ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ
И СОЦИАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ БГУ

Кафедра управления финансами и недвижимостью

Т. В. Борздова, А. Э. Титовицкая

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЦЕНОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Практикум

МИНСК
ГИУСТ БГУ
2008

УДК 332.6/.7(076.5)(075.8)
ББК 65.32-5я73
Б82

Рекомендовано кафедрой управления финансами и недвижимостью
Государственного института управления и социальных технологий БГУ

Авторы:
кандидат технических наук, доцент ***Т. В. Борздова***
кандидат педагогических наук, доцент ***А. Э. Титовицкая***

Рецензенты:
кандидат педагогических наук, доцент *М. Ф. Поснова*
кандидат экономических наук, доцент *Е. Г. Кобзик*

Борздова, Т. В.
Б82 Математические основы оценочной деятельности : практикум / Т. В. Борздова, А. Э. Титовицкая. — Минск : ГИУСТ БГУ, 2008. — 100 с.
ISBN 978-985-491-004-8.

Практическое пособие содержит последовательное и систематическое изложение методов анализа финансовых и кредитных операций. Подробно обсуждаются методы начисления процентов, обобщающие характеристики потоков платежей, схемы расчетов выплат по кредитам, методика составления уравнения эквивалентности при конверсии платежей. Приводится множество примеров, задач и заданий в тестовой форме.

Для студентов и магистрантов, обучающихся на финансово-экономических специальностях, а также для работников финансово-кредитных учреждений, желающих самостоятельно выполнять финансово-экономические расчеты.

УДК 332.6/7(076.5)(075.8)
ББК 65.32-5я73

ISBN 978-985-491-004-8

Оглавление

Предисловие 4

Раздел 1. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ 6
1.1. Время как фактор в финансовых расчетах 6
1.2. Операции наращения и дисконтирования 9
1.3. Расчеты при начислении простых процентов 11
1.4. Расчеты при начислении сложных процентов 18
Тесты и тестовые задания к разделу 1 28
Задачи для самостоятельного решения 34

Раздел 2. ОЦЕНКА ПОТОКОВ ФИНАНСОВЫХ ПЛАТЕЖЕЙ 37
2.1. Виды потоков платежей и их основные параметры 37
2.2. Наращенная величина постоянной ренты постнумерандо 40
2.3. Современная (текущая) стоимость постоянной ренты постнумерандо 44
2.4. Определение параметров постоянных рент постнумерандо 49
2.5. Вечная рента 52
2.6. Дополнительные примеры 53
Тесты и тестовые задания к разделу 2 60
Задачи для самостоятельного решения 62

Раздел 3. ФИНАНСОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ 66
И КОНВЕРСИЯ ПЛАТЕЖЕЙ 66
3.1. Финансовая эквивалентность обязательств 66
3.2. Консолидирование (объединение) задолженностей 67
3.3. Общая постановка задачи изменения условий контракта 70
Задачи для самостоятельного решения 74

Раздел 4. КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ. ПОГАШЕНИЕ КРЕДИТА (ССУДЫ) 77
4.1. Погашение потребительского кредита 77
4.2. Погашение задолженности частями 80
Задачи для самостоятельного решения 84

Литература 87

Приложение 1 88

Приложение 2 89

Предисловие

Становление и развитие рыночных отношений в экономике Республики Беларусь связано в значительной мере с объектами недвижимости. Рынок недвижимости Беларуси по историческим меркам еще очень молод. Начало его развития можно датировать серединой 1990 года, когда в Беларуси появились первые легальные сделки по продаже квартир. За прошедшие 18 лет он проделал беспрецедентно большой путь становления и развития. В период с 1990 по 2007 год рост рыночной стоимости объектов недвижимости постоянно изменялся: то уменьшался, то резко увеличивался. И в будущем цена недвижимости на рынке будет постоянно колебаться вместе с экономическими, инвестиционными, миграционными циклами.

Исследование состояния и тенденций спроса и предложения на рынке недвижимости — едва ли не самое излюбленное направление в публикациях, посвященных проблемам сферы недвижимости. И это вполне оправдано, так как именно от спроса в определяющей степени зависят такие важнейшие параметры, как цены, доходность, риски приобретения или создания объектов недвижимости. Реальную ценность имеют исследования, основанные на использовании богатого практического и теоретического материала. Анализ фактического материала сам имеет ценность тогда, когда в основу его положены правильные методологические принципы, отражающие специфику исследуемого явления.

В настоящее время невозможно представить себе человека, которому ни разу не придется обратиться за услугами в банк, воспользоваться кредитом и т. д. Поэтому методами финансово-экономических расчетов должны владеть не только руководители предприятий, экономисты и банковские работники, но и каждый современный, образованный человек. На полках же книжных магазинов и лотков отсутствуют специальные практикумы по оценочной деятельности, хотя на книжном рынке постоянно появляются новые профессиональные теории по инвестициям, финансовому менеджменту, финансовой математике и т. д.

Книга, предлагаемая вашему вниманию, относится к серии изданий под условным названием «Практическое пособие по оценочной деятельности» и содержит информацию по финансовой математике, достаточную для освоения начальной теории оценочной деятельности.

В ней вы найдете ответы на вопросы: как производятся расчеты с учетом фактора времени при начислении простых и сложных процентов для разовых платежей и потоков; как операции наращивания и дисконтирования влияют на оценочную деятельность; какие расчеты необходимо произвести оценщику, чтобы найти эквивалентную розничную цену исследуемому объекту недвижимости и т. д.

Мы постарались на доступном и простом языке показать, что достаточно сложные и, что немаловажно, с нашей точки зрения, красивые задачи можно решать простыми и доступными методами любому студенту.

Говоря кратко, в книге рассмотрены четыре математические проблемы:

– начисление процентов;
– оценка потоков финансовых платежей;
– финансовая эквивалентность обязательств;
– кредитные расчеты, погашение кредитов (ссуд).

Наряду с рассмотрением различных тестов и задач в книге показано влияние всевозможных условий на начальный, промежуточный и конечный результаты оценочной деятельности.

При выборе примеров мы руководствовались во многом и эстетическими соображениями, отбирая те задания, которые, с нашей точки зрения, могут доставить определенное удовольствие. Считаем, что необходимым условием для получения производственного навыка является подробное рассмотрение задач, которые наиболее приближены к действительности, а именно всевозможные финансовые операции с распределенными во времени выплатами и поступлениями. Причем задачи, входящие в сборник, приводятся как с решениями и ответами, так и только с ответами или вообще без них.

Авторы предлагают книгу тем, кто не разлюбил самостоятельно изучать такой интересный предмет, как «Теория оценки», и будут признательны за конструктивную критику и особенно за новые найденные эффектные задачи.

Раздел 1
НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ

1.1. Время как фактор в финансовых расчетах

Занятия коммерцией (бизнесом) требуют умения правильно оценивать все возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки. Главное правило коммерсанта гласит: *покупать надо дешево, а продавать — дорого!* Для количественных характеристик понятий «дорого» и «дешево» необходимы определенные знания в области финансовых вычислений.

В практических финансовых операциях суммы денег вне зависимости от их назначения или происхождения так или иначе, но обязательно связываются с конкретными моментами или периодами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность выплат. *Вне времени нет денег.* Фактор времени, особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда и даже большую роль, чем сами размеры денежных сумм. Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности финансирования, кредитования и инвестирования и выражается в ***принципе неравноценности денег, относящихся к различным моментам времени,*** или в другой формулировке — ***в принципе изменения ценности денег во времени.***

Интуитивно понятно, что 1000 рублей, полученных через пять лет, не равноценны этой же сумме, поступившей сегодня, даже если принять во внимание инфляцию и риск их неполучения. Здесь, вероятно, вполне уместен известный афоризм *«Время — деньги».* Он имеет под собой реальную основу, позволяющую определить истинную ценность денег с позиции текущего момента.

Важность учета фактора времени обусловлена принципом неравноценности денег, относящихся к различным моментам времени: равные по абсолютной величине денежные суммы оцениваются сегодня и завтра по-разному — сегодняшние деньги ценнее будущих.

Отмеченная зависимость ценности денег от времени обусловлена влиянием фактора времени:

во-первых, деньги можно продуктивно использовать во времени как приносящий доход финансовый актив, т. е. деньги могут быть инвестированы и тем самым принести доход. Рубль в руке сегодня стоит больше, чем рубль, который должен быть получен завтра ввиду процентного дохода, который вы можете получить, положив его на сберегательный счет или проведя другую инвестиционную операцию;

во-вторых, инфляционные процессы ведут к обесцениванию денег во времени. Сегодня на рубль можно купить товара больше, чем завтра на этот же рубль, так как цены на товар повысятся;

в-третьих, неопределенность будущего и связанный с этим риск повышает ценность имеющихся денег. Сегодня рубль в руке уже есть и его можно израсходовать на потребление, а будет ли он завтра в руке — еще вопрос.

Поясним принцип неравноценности денег во времени на следующем условном примере.

Предположим, что некто X обладает суммой S_0 = 10 000 руб., которую он может положить в банк на депозит под 10 % годовых.

В идеальном случае (отсутствие инфляции, налогообложения, риска неплатежеспособности банка и т. д.) проведение этой операции обеспечит получение через год суммы, равной уже 11 000 руб.:

$$(10\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}1) = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1) = 11\,000\,.$$

Если указанная сумма (10 000) окажется в распоряжении X только через год, он будет вынужден отложить или даже отменить осуществление этой операции, теряя тем самым возможность получить доход в 1000 руб.

Очевидно, что с этой точки зрения сумма S_1 = 10 000 руб., получение которой ожидается только через год, является в данной ситуации для X менее ценной по сравнению с эквивалентной суммой S_0, имеющейся к текущему моменту времени, поскольку обладание последней связано с возможностью заработать дополнительный доход (1000) и увеличить свои средства до 11 000 руб.

В этом же смысле текущая стоимость будущих 10 000 руб. для X эквивалентна той сумме, которую необходимо поместить в банк под 10 %, чтобы получить их год спустя:

$$10\,000 / (1 + 0{,}1) = 9090{,}91.$$

Продемонстрированная неравноценность двух одинаковых по величине ($S_0 = S_1$ = 10 000), но разных по времени получения (t_0 и t_1) денежных сумм — явление, широко известное и осознанное в финансовом мире. Его существование обусловлено целым рядом причин. Вот лишь некоторые из них:

– любая, имеющаяся в наличии денежная сумма, в условиях рынка может быть немедленно инвестирована и спустя некоторое время принести доход;

– даже при небольшой инфляции покупательная способность денег со временем снижается.

Исследования этого явления нашли свое воплощение в формулировке принципа временной ценности денег *(time value of money),* который является краеугольным камнем в современном финансовом менеджменте. Согласно этому принципу сегодняшние поступления ценнее будущих. Соответственно, будущие поступления обладают меньшей ценностью по сравнению с современными.

Из принципа временной ценности денег вытекает, по крайней мере, два важных следствия:

– ***необходимость учета фактора времени*** при проведении финансовых операций;

– ***некорректность*** (с точки зрения анализа долгосрочных финансовых операций) суммирования денежных величин, относящихся к разным периодам времени.

Приведем пример. В свое время газеты сообщали, что американская компания «Юнион Карбайд», на химическом заводе которой в Индии произошла крупная авария, предложила в качестве компенсации выплатить пострадавшим в течение 35 лет 200 млн долл. (индийская сторона отклонила это предложение). Воспользуемся этими данными для иллюстрации фактора времени. Определим сумму денег, которую необходимо положить в банк, скажем, под 10 % годовых для того, чтобы полностью обеспечить последовательную выплату 200 млн долл. Оказывается, для этого достаточно выделить всего 57,5 млн долл. Иначе говоря, 57,5 млн долл., выплаченных сегодня, равнозначны (эквивалентны) 200 млн долл., погашаемых ежемесячно в равных долях на протяжении 35 лет.

Пример 1. Предприятие участвует в деловой операции, приносящей ей доход в 200 млн руб. по истечении двух лет. Предлагается выбрать вариант получения доходов:

– либо по 10 млн руб. по истечении каждого года;

– либо единовременное получение всей суммы в конце двухлетнего периода.

Решение

Выгоднее первый вариант, так как сумма будет пущена в оборот и принесет новый доход.

В финансовом менеджменте учет фактора времени осуществляется с помощью ***методов наращения и дисконтирования***, в основу которых положена техника процентных вычислений.

1.2. Операции наращения и дисконтирования

Введем обозначения и определения, которые будем использовать в дальнейшем:

PV (от англ. *present value*) — исходная (или современная, настоящая) сумма денег (например долга);

FV (от англ. *future value*) — наращенная (будущая) сумма денег (ссуды, депозита или других инвестиционных денежных средств);

n — срок ссуды или финансового соглашения в годах;

I — процентные деньги за весь срок финансового соглашения.

☞**Определение**. Под ***процентными деньгами***, или ***процентами***, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, покупка облигации и т. д.

☞**Определение**. Под ***процентной ставкой*** понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени.

При этом отношение может вычисляться либо к *PV*, либо к *FV*. Тогда имеем:

темп прироста (или процентная ставка, ставка процента, норма прибыли, доходность) —

$$i = \frac{FV - PV}{PV}; \tag{1.1}$$

темп снижения (или учетная банковская ставка, дисконт) —

$$d = \frac{FV - PV}{FV}. \tag{1.2}$$

Одна ставка может выражаться через другую при помощи следующих формул:

$$i = \frac{d}{1-d}; \tag{1.3}$$

$$d = \frac{i}{1-i}. \tag{1.4}$$

В финансовой литературе проценты, полученные по процентной ставке, принято называть *декурсивными*, а по дисконтной ставке — *антисипативными*.

Процентная ставка — один из важнейших элементов коммерческих, кредитных или инвестиционных контрактов. Оба показателя измеряются в виде десятичной или обыкновенной дроби или в процентах.

☞**Определение**. Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют ***периодом начисления***. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Экономический смысл финансовой операции, задаваемой формулой (1.1), состоит в определении той суммы, которой будет и желает располагать инвестор по окончании этой операции. Из этой формулы видно, что время генерирует деньги:

$$FV = PV + PVi\,.$$

Величина FV показывает будущую стоимость «сегодняшней» величины PV при заданном уровне доходности.

Из формулы (1.2) получаем

$$PV = FV(1-d)$$

и опять убеждаемся, что время генерирует деньги.

☞**Определение**. Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов называют ***наращением***, или ростом этой суммы.

Возможно определение процентов и при движении во времени в обратном направлении — от будущего к настоящему. В этом случае сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего ***дисконта*** (скидки). Такой способ называют ***дисконтированием*** (сокращением).

Операции наращения и дисконтирования позволяют сопоставлять разновременные деньги (см. рис. 1.1).

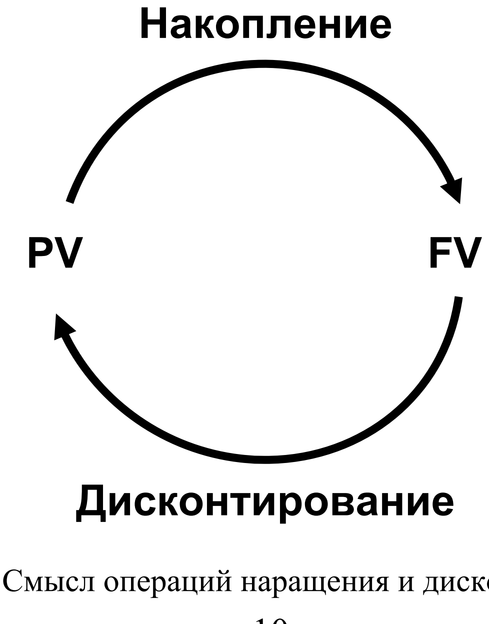


Рис. 1.1. Смысл операций наращения и дисконтирования

Термин «дисконтирование» в широком смысле означает определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину.

Исходя из методики начисления процентов, применяют два вида дисконтирования:

– математическое дисконтирование по процентной ставке;

– банковский учет по учетной ставке.

Различие в *ставке процентов* и *учетной ставке* заключается в различии базы для начислений процентов:

– в процентной ставке в качестве базы берется первоначальная сумма долга:

$$i = \frac{FV - PV}{PV};$$

– в учетной ставке за базу принимается наращенная сумма долга:

$$d = \frac{FV - PV}{FV}.$$

Учетная ставка более жестко отражает временной фактор, чем процентная ставка. Если сравнить между собой математическое и банковское дисконтирование в случае, когда процентная и учетная ставки равны по своей величине, то видно, что приведенная величина по процентной ставке больше приведенной величины по учетной ставке.

Пример 2. Предприятие получило кредит на один год в размере 50 млн руб. с условием возврата 100 млн руб.

В этом случае процентная ставка равна 100 %, а дисконт 50 %:

$$i = (FV - PV)/PV = (100 - 50)/50 = 1, \text{ или } 100\ \%;$$

$$d = (FV - PV)/FV = (100 - 50)/100 = 0{,}5, \text{ или } 50\ \%.$$

1.3. Расчеты при начислении простых процентов

Наращение по простым процентам

Для начисления простых процентов применяют ***постоянную базу начисления***, т. е. предполагается неизменность базы, с которой происходит начисление процентов.

Процесс наращения суммы денег за счет начисления простых процентов выглядит как арифметическая прогрессия:

PV;

$PV + PVi$;

$PV + 2PVi$; $PV + 3PVi$ и т. д.

с первым членом PV и разностью прогрессии PVi;

и аналитически для n периодов может быть выражен следующей формулой:

$$FV = PV + PVi + \ldots + Pi = PV + PVni = PV(1 + ni), \tag{1.5}$$

где (1+ ni) называют ***множителем наращения***.

К *наращению по простым процентам* обычно прибегают:

– при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до 1 года);

– в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору в конце каждого периода.

Пример 3. Кредит выдан на 1 год в сумме 3 млн руб. с условием возврата 4 млн руб. Определить процентную ставку этой операции.

Дано:	Решение
PV = 3 млн руб. n = 1 год FV = 4 млн руб.	$i = (FV - PV)/PV = (4-3)/3 = 0{,}333$, или 33,3 %
Определить: i = ?	

Пример 4. Кредит в размере 100 млн руб. выдан на 2 года под 10 % годовых. Определить подлежащую возврату сумму, если простой процент начисляется за каждый год, а долг погашается единовременным платежом.

Дано:	Решение
PV = 100 млн руб. n = 2 года i = 10 % годовых	$FV = PV(1+ni) = 100 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}1) = 120$ млн руб.
Определить: FV = ?	

Обычные и точные простые проценты

Заметим, что вычисления, когда используются полные годы, встречаются редко. Чаще пользуются формулой, где аналитически выражен принцип расчета для случаев, когда задана *годовая* ставка i, а срок операции выражен в *днях* (иногда — в месяцах). Обозначим срок операции через t (англ. *time* — время). Для перевода срока финансовой операции в доли от года используют уравнивающий знаменатель Y (англ. *year* – год), обозначающий продолжительность года, выраженную в тех же единицах, что и t. Отношение t/Y подставим вместо n в (1.5) и получим формулу, которая наиболее часто применяется и является разновидностью формулы (1.5):

$$FV = PV(1 + t/Y \cdot i). \tag{1.6}$$

Величину *Y* называют ***временной базой***, т. е. это число дней в году.

При краткосрочных операциях срок инвестирования *t* удобно измерять в днях, а продолжительность года *Y* принимать равной либо $360 = 12 \cdot 30$ дням, либо фактическому числу дней в году. В первом случае простые проценты называют ***обычными,*** во втором — ***точными*** (табл. 1).

Таблица 1

Показатели t и Y

Измерение	t	Y
Точное	Фактически дней в месяце (январь — 31, февраль — 28 (29), март — 31 и т. д.)	Фактически дней в году 365 (366)
Приближенное	Число дней во всех месяцах принимается равным 30	Продолжительность 360 дней

В зависимости от значений *t* и *Y,* измеренных по-разному, на практике встречаются следующие способы расчетов:

1. *Точные проценты с точным числом дней ссуды — t и Y измерены точно (в коммерческих документах данный способ обозначается как* $\frac{ACT}{ACT}$ *или* $\frac{365}{365}$*).* Это значит начислить точные проценты (365) с фактическим сроком операции (АСТ) 365. Для определения *t* здесь пользуются специальной таблицей порядковых номеров дней в году (см. Приложение 1): из номера дня окончания операции вычитают день ее начала (день выдачи и день погашения ссуды считаются за 1). Данный способ применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например, в Великобритании, США, Португалии, и называется еще «английской практикой расчета». В России и Республике Беларусь по такому же принципу ведутся все банковские операции. Данный вариант дает самые точные результаты.

2. *Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды — t измерено точно, а Y — приближенно (в коммерческих документах данный способ обозначается как* $\frac{ACT}{360}$ *или* $\frac{365}{360}$*).* Этот метод иногда называют банковским или «французской практикой расчета». Он используется в межстрановых ссудных операциях коммерческих банков, во внутристрановых — во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии. Этот вариант расчета дает несколько больший результат, чем применение точных процентов.

3. *Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды — t и Y измерены приближенно (в коммерческих документах дан-*

ный способ обозначается как $\frac{360}{360}$*).* Этот метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах. Он принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании и называется «германской практикой расчета».

Следует учитывать, что применение различных методов подсчета дней и годовой базы приводит к различным результатам.

Пример 5. Депозит размером 100 тыс. руб. размещен под 10 % годовых с 01.01 по 01.04.2007 г. Начислить проценты по схемам $(\frac{ACT}{365})$ и $(\frac{ACT}{360})$.

Дано:	Решение
PV = 100 тыс. руб. i = 10 % годовых t = 31+28 + 31 = 90 дней (1 апреля не считаем, так как этот день является днем погашения ссуды) или по таблице: t = 91 (порядковый номер 1 апреля) — 1 (порядковый номер 1 января) = 90 дней	$I = \left(\frac{ACT}{365}\right) = PV\frac{t}{365}i = 100\,000 \cdot \frac{90}{365} \cdot 0{,}1 =$ =2,46575 тыс. руб. $I\,(\frac{ACT}{360}) = PV\frac{t}{360}i = 100000 \cdot \frac{90}{360} \cdot 0{,}1 =$ =2,50000 тыс. руб.
Определить: $I\,(\frac{ACT}{365}) = ?$ $I\,(\frac{ACT}{360}) = ?$	

Пример 6. Ссуда в размере 1 млн руб. выдана 20.01 на срок до 05.10 включительно под 18 % годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? При решении применить все 3 метода.

Решение

Предварительно определим число дней ссуды: точное — 258, приближенное — 255.

1. Английская практика — точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

$$FV = 1\,000\,000 \cdot (1 + 258/365 \cdot 0{,}18) = 1\,127\,233 \text{ руб.}$$

2. Французская практика — обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360):

$$FV = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + 258/360 \cdot 0{,}18\right) = 1\,129\,000 \text{ руб.}$$

3. Германская практика — обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360):

$$FV = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + 255/360 \cdot 0{,}18\right) = 1\,127\,500 \text{ руб.}$$

Переменные ставки простых процентов

Предположим, что инфляция вынуждает часто изменять ставку простых процентов. Тогда наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$FV = PV\left(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m\right) = PV\left(1 + \sum_t n_t i_t\right), \qquad (1.7)$$

где i_t — ставка простых процентов в периоде t; n_t — продолжительность периода с постоянной ставкой; $n = \sum_t n_t$.

Пример 7. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год — 16 %, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1 %. Определить множитель наращения за 2,5 года.

Решение

$$(1 + \sum_t n_t i_t) = 1 + 1 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}17 + 0{,}5 \cdot 0{,}18 + 0{,}5 \cdot 0{,}19 = 1{,}43$$

Дисконтирование по простым процентам

Пусть требуется по известной сумме FV, которую следует уплатить через некоторое время n, определить объем полученной ссуды PV. Вычисление PV на основе FV называется ***дисконтированием***.

Разрешая формулы (1.5) и (1.6) относительно PV, получим современное значение наращенной суммы FV:

$$PV = \frac{FV}{1 + ni}; \qquad (1.8)$$

$$PV = \frac{FV}{1 + \frac{t}{Y} i}. \qquad (1.9)$$

Дробь $1/(1 + ni)$ называют ***дисконтным***, или ***дисконтирующим***, ***множителем*** по ставке простых процентов.

При этом разница между современной и будущей стоимостью (доход) $I = FV - PV$ составит:

$$I = FV - PV = FV - \frac{FV}{1+ni} = \frac{FV + FVni - FV}{1+ni} = \frac{FVni}{1+ni}, \qquad (1.10)$$

или

$$I = \frac{FV\left(t/Y \cdot i\right)}{1+t/Y \cdot i} \ . \qquad (1.11)$$

Пример 8. Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 тыс. руб. Кредит выдан под 16 % годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 365 дням?

Дано:	Решение
FV = 310 тыс. руб. i = 16 % годовых t = 180 дней Y = 365 дней	Согласно (1.9) находим: $PV = \dfrac{310\,000}{1+\dfrac{180}{365}\cdot 0{,}16} = 287\,328{,}59$ руб.
Определить: PV = ?	

Пример 9. Ставка при размещении краткосрочных денежных ресурсов для банков на 3 суток составляет 14,1 % годовых. Какой объем средств необходимо разместить, чтобы в результате операции поступило 1,5 млн руб. (точные проценты).

Дано:	Решение
FV = 1,5 млн руб. i = 14,1 % годовых t = 3 суток Y = 365 дней	$PV = \dfrac{FV}{1+\dfrac{t}{Y}i} = \dfrac{1{,}5}{1+\dfrac{3}{365}\cdot 0{,}141} =$ =1,498264 млн руб.
Определить: PV = ?	

Пример 10. Сумма долга, подлежащая возврату, — 10 млн руб. Определить сумму начисленных процентов (в денежном выражении), если срок ссуды — 1 год, а ставка процентов — 70 % годовых.

Дано:	Решение
FV = 10 млн руб. n = 1 год i = 70 % годовых	$I = \dfrac{FVni}{1+ni} = \dfrac{10\cdot 1\cdot 0{,}7}{1+1\cdot 0{,}7} = 4{,}11765$ млн руб.
Определить: проценты ($FV - PV$) = ?	

Если за базу начисления процентов взять не PV, а FV, то приходим к определению ***годовой банковской учетной ставки d*** (формула 1.2).

Из нее вытекает, что процентные деньги за год $I = dFV$, а за n лет они будут в n раз больше: $I = FV - PV = ndFV$. В итоге получаем, что

$$PV = \frac{FV}{1 + nd}, \tag{1.12}$$

где $(1 - nd)$ — *дисконтный множитель по банковской учетной ставке d.*

Если срок финансовой операции измеряется не в годах, а в днях, то формула (1.12) принимает вид:

$$PV = FV - FV\frac{t}{Y}d = FV\left(1 - \frac{t}{Y}d\right). \tag{1.13}$$

Наращение по банковской учетной ставке d, как следует из (1.12), вычисляется по формуле:

$$FV = \frac{PV}{1 - nd}. \tag{1.14}$$

Подведем небольшой итог.

Наращение и дисконтирование применяются для решения сходных задач. Однако для ставки наращения прямой задачей является определение наращенной суммы, обратной — дисконтирование. Для учетной ставки, наоборот, прямая задача заключается в дисконтировании, обратная — в наращении.

Пример 11. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 100 тыс. руб., вырос до 120 тыс. руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25 % годовых (схема начисления *ACT/ACT*)?

Дано:	Решение
PV = 100 тыс. руб. FV = 120 тыс. руб. Y = 365 дней i = 25 % годовых	Воспользовавшись формулой (1.6) и выразив из нее t, получим: $t = \frac{120 - 100}{100 \cdot 0,25} \cdot 365 = 292$ дня
Определить: $t = ?$	

Пример 12. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 110 тыс. руб. через 120 дней. Первоначальная сумма долга 90 тыс. руб. (схема начисления процентов *ACT/360*). Определить доходность ссудной операции для кредитора в виде ставки процента и учетной ставки.

Дано:	Решение
$FV = 110$ тыс. руб. $t = 120$ дней $PV = 90$ тыс. руб. $Y = 360$	Воспользовавшись формулами (1.6) и (1.13) и выразив из них i и d, получим: $i = \frac{110-90}{90 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}666(6)$, или 66,67 %; $d = \frac{110-90}{110 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}5454$, или 54,54 %.
Определить: $i = ?$ $d = ?$	

1.4. Расчеты при начислении сложных процентов

Наращение по сложным процентам

В средне- и долгосрочных финансовых операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, применяются ***сложные проценты***. База для начисления сложных процентов в отличие от простых не остается постоянной — она увеличивается с каждым шагом во времени. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, часто называют ***капитализацией процентов***.

Найдем формулу для расчета наращенной суммы. Если расчет осуществляется по процентной ставке i, то формулу для определения наращенной суммы через n периодов можно вывести, прослеживая путь наращения с учетом капитализации процентов в конце каждого из n периодов:

$FV_1 = PV + PVi = PV(1+i)$ — FV к концу 1-го периода,

$FV_2 = PV(1+i) + [PV(1+i)]i = PV(1+i)^2$ — FV к концу 2-го периода,

...

$$FV = PV(1+i)^n \text{ — к концу } n\text{-го периода.} \quad (1.15)$$

Выражение $(1 + i)^n$ называют ***коэффициентом (множителем) наращения.***

Пример 13. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб. через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5 % годовых?

Дано:	Решение
$PV = 1$ млн руб. $i = 15{,}5$ % годовых $n = 5$ лет	Воспользуемся формулой (1.15): $FV = 1\,00\,000 \cdot (1+0{,}155)^5 = 2\ 055\,464{,}22$ руб.
Определить: $FV = ?$	

Следует отметить, что при большом сроке наращения даже небольшое изменение ставки заметно влияет на величину множителя. В свою очередь очень большой срок приводит к устрашающим результатам даже при небольшой процентной ставке.

Здесь уместна следующая иллюстрация. Остров Манхэттен, на котором расположена центральная часть Нью-Йорка, был куплен (а точнее выменен) за 24 долл. Стоимость земли этого острова 350 лет спустя оценивалась примерно в 40 млрд долл., т. е. первоначальная сумма увеличилась в $1{,}667 \cdot 10^9$ раз! Такой рост достигается при сложной ставке, равной всего 6,3 % годовых.

Сравнение роста по сложным и простым процентам

Для того чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. Нетрудно убедиться в том, что при одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей зависят от срока. При условии, что временная база для начисления процентов одна и та же, имеем следующие соотношения:

– для срока меньше года простые проценты больше сложных;

– для срока больше года сложные проценты больше простых;

– для срока, равного году, множители наращения равны друг другу.

Графическая иллюстрация соотношения множителей наращения приведена на рис. 1.2.

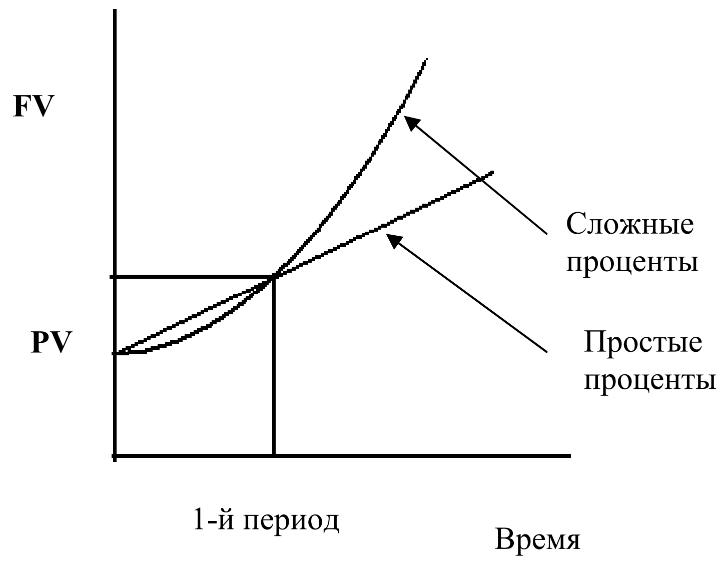


Рис. 1.2. Сравнение множителей наращения при простых и сложных процентах

Эффективная и номинальная ставки процентов

В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не по истечении года, а чаще (m раз в году): по полугодиям, кварталам и т. д. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют даже ежедневное начисление процентов. Наращение при этом идет быстрее, чем при разовой капитализации.

В такой ситуации в условиях финансовой сделки оговаривают не ставку за период, а годовую ставку (обозначим ее j), на основе которой исчисляют ставку за конкретный период начисления (j/m). При этом *годовую базовую* ставку (j) называют ***номинальной*** в отличие от ***эффективной*** ставки (i), которая характеризует полный реальный эффект (доходность) операции с учетом внутригодовой капитализации.

Итак, j — годовая ставка, m — число периодов начисления в году, j/m — ставка начисления процентов; формула наращения процентов имеет вид:

$$FV = PV\left(1 + j/m\right)^N, \qquad (1.16)$$

где N — общее число периодов начисления, $N = nm$.

Пример 14. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб. через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5 % годовых, если проценты начисляются поквартально?

Дано:	Решение
PV = 1 млн руб. n = 5 лет m = 4 i = 15,5 % годовых	Воспользуемся формулой (1.16): $FV = 1\,000\,000\left(1+0{,}155/4\right)^{20} = 2\,139\,049{,}01$ руб.
Определить: FV = ?	

Нетрудно догадаться, что *чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения.* Для иллюстрации сказанного приведем значения множителей для j = 20 % и n = 10 лет при разной частоте наращения в пределах года:

m	1	2	4	12	365
множитель	6,1917	6,7275	7,04	7,2682	7,385

Эффективная ставка процента i измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год. Иначе говоря, ***эффективная ставка*** — это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m-разовое начисление процентов по ставке j/m:

$$(1+i)^n = (1+j/m)^{mn};$$

за год:

$$(1+i) = (1+j/m)^m.$$

Отсюда:

$$i = (1+j/m)^m - 1; \tag{1.17}$$

$$j/m = \sqrt[m]{1+i} - 1. \tag{1.18}$$

Замена в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении процентов на эффективную ставку i не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. Обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.

Пример 15. По вкладу А проценты начисляются один раз в год, исходя из 10,2 % годовых. По вкладу Б обслуживание осуществляется по полугодиям, исходя из 10 % годовых. Сравнить доходности размещения средств.

Дано:	Решение
А : $i_А$ = 10,2 % годовых $m = 1$ Б : j = 10 % годовых $m = 2$ j/m = 5 %	$i_Б = (1 + j/m)^m - 1 = (1 + 0{,}05)^2 - 1 = 0{,}1025$ $i_Б$= 10,25 % годовых $i_Б > i_А$
Определить: $i_Б$ = ?	

Пример 16. Каков размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25 % при помесячном начислении процентов?

Дано:	Решение
j = 25 % годовых $m = 12$	Из формулы (1.17) имеем: $i = \left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}280732$
Определить: i = ?	

Для участвующих в сделке сторон не имеет разницы: применить ли ставку 25 % при помесячном начислении процентов или годовую (эффективную) ставку 28,0732 %.

Пример 17. Что выгоднее: увеличение вклада в три раза за три года или использование ставки 46 % годовых?

Дано:	Решение
$FV = 3PV$	Такого рода задачи приходится решать не только лицам, занимающимся финансовой работой, но и населению, когда решается вопрос о том, куда выгоднее вложить деньги. В таких случаях решение сводится к определению процентной ставки. Воспользовавшись формулой (1.15) и выразив из нее i, получим (учтем при этом, что $FV = 3PV$):
Определить: $i = ?$	$i = \sqrt[n]{FV / PV} - 1 = \sqrt[3]{3} - 1 = 1{,}443 - 1 = 0{,}443$.
	Таким образом, увеличение вклада за три года в три раза эквивалентно годовой процентной ставке в 44,3 %, поэтому размещение денег под 46 % годовых будет более выгодно.

Дисконтирование по сложным процентам

Определение FV по PV называют прямым счетом. Соответственно обратный расчет дает значение современной стоимости денег.

Формула математического учета по сложной процентной ставке имеет вид:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}. \qquad (1.19)$$

Величина $(1 + i)^{-n} = p_{n,i}$ называется дисконтирующим множителем. Значения этого множителя табулированы в зависимости от периода дисконтирования (n), т. е. числа процентных периодов, и ставки дисконтирования (i).

Для случаев, когда проценты начисляются m раз в году, получим:

$$PV = \frac{FV}{(1 + j / m)^{mn}}. \qquad (1.20)$$

Современная стоимость может быть рассчитана на любой момент до выплаты суммы FV. Такие вычисления имеют большое прикладное значение в проектном анализе для приведения денег, оцененных по состоянию на различные даты (как правило, это будущие суммы денег), к одному требуемому моменту времени (например, современному).

Разность $D = FV - PV$ в случае, когда PV определено дисконтированием, называют ***дисконтом***.

Пример 18. Определить текущую стоимость денег, будущая величина которых через 10 лет оценивается в 2000 долл. Ставка дисконтирования — 3 % годовых.

Дано:	Решение
$FV = 2000$ долл. $i = 3$ % годовых $n = 10$	$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = FV \cdot p_{10;0,03} =$
Определить: $PV = ?$	$= 2000 \cdot \frac{1}{(1+0,03)^{10}} = 2000 \cdot 0,74409 = 1488,18$ долл.

Операции со сложной учетной ставкой

Банковский учет — второй вид дисконтирования, при котором исходя из известной суммы в будущем, определяют сумму в данный момент времени, удерживая дисконт.

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

$$PV = FV(1-d)^n, \tag{1.21}$$

где d — сложная годовая учетная ставка.

Заметим, что процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при простой учетной ставке), а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени.

Пример 19. Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15 % годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта (в тыс. руб.)?

Дано:	Решение
$FV = 5$ млн руб. $d = 15$ % годовых $n = 5$	Исходя из формулы (1.21), имеем: $PV = 5000 \cdot (1 - 0,15)^5 = 2218,5$ тыс. руб.; $D = 5000 - 2218,5 = 2781,5$ тыс. руб.
Определить: $PV = ?$ $D = ?$	Если применить простую учетную ставку того же размера, то: $PV = 5000 \cdot (1 - 5 \cdot 0,15) = 1250$ тыс. руб.; $D = 5000 - 1250 = 3750$ тыс. руб.

Как следует из приведенного примера, дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем по простой учетной ставке.

Дисконтирование может производиться не один, а m раз в году, т. е. каждый раз учет производится по ставке f/m. В этом случае

$$PV = FV(1 - f/m)^{mn}, \tag{1.22}$$

где f — номинальная годовая учетная ставка.

Эффективная учетная ставка (d) характеризует степень дисконтирования за год. Определим ее на основе равенства дисконтных множителей:

$$(1-d)^n = (1 - f/m)^{mn},$$

откуда

$$d = 1 - (1 - f/m)^m.$$

В свою очередь

$$f = m\left(1 - \sqrt[m]{1-d}\right).$$

Эффективная учетная ставка во всех случаях, когда m>1, меньше номинальной.

Пример 20. По данным примера 19 определить сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15 %, и эффективную учетную ставку.

Дано:	Решение
FV = 5 млн руб. f = 15 % годовых n = 5 m = 4 mn = 20	Исходя из формулы (1.22), имеем: $PV = 5000 \cdot (1 - \frac{0,15}{4})^{20} = 2328$ тыс. руб. Эффективная учетная ставка составит: $d = 1 - (1 - \frac{0,15}{4})^4 = 0,141777,$ или 14,178%.
Определить: PV = ? d = ?	

Определение периода начисления процентов

На практике возникают вопросы определения периода времени, который, например, потребуется для увеличения суммы PV до значения FV при начислении процентов по ставке i.

При наращении по сложной годовой ставке i и по номинальной ставке j из формул (1.15) и (1.16) имеем:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1+i)}; \qquad (1.23)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{m\ln(1+j/m)}. \qquad (1.24)$$

При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d и по номинальной учетной ставке f получим:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{PV}{FV}\right)}{\ln(1-d)}; \qquad (1.25)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{PV}{FV}\right)}{\ln(1-f/m)}. \qquad (1.26)$$

Пример 21. За какой срок в годах сумма, равная 75 млн руб., достигнет 200 млн руб. при начислении процентов по сложной ставке 15 % раз в год и поквартально?

Дано:	Решение
PV = 75 млн руб. FV = 200 млн руб. i = 15 % годовых $m = 4$	Воспользуемся формулами (1.23) и (1.24): $n = \frac{\ln\left(\frac{200}{75}\right)}{\ln 1{,}15} = 7{,}0178$ года; $n = \frac{\ln\left(\frac{200}{75}\right)}{4\ln\left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)} = 6{,}6607$ года.
Определить: $n = ?$	

Доходность

На финансовом рынке инвестора интересует результативность его операций. Например, лицо А инвестировало 2 млн руб. на три года и получило сумму в 6 млн руб. Лицо В инвестировало 3 млн руб. на пять лет, и его результат составил 10 млн руб. Какой из вариантов инвестирования оказался более предпочтительным? Ответить на этот вопрос с помощью абсолютных величин довольно трудно, так как в примере отличаются как суммы, так и сроки инвестирования. Результативность инвестиций сравнивают с помощью такого показателя, как доходность.

Доходность — это относительный показатель, который говорит о том, какой процент приносит рубль инвестированных средств за определенный период. Например, доходность инвестиций составляет 10 %. Это означает, что инвестированный рубль приносит 10 коп. прибыли. Более высокий уровень доходности означает лучшие результаты для инвестора.

В самом общем случае показатель доходности можно определить как отношение полученного результата к затратам, которые принесли данный результат. Доходность выражают в процентах.

В финансовой практике принято, что показатель доходности или процент на инвестиции задают или определяют в расчете на *год*. Такая практика существует потому, что возникает необходимость сравнивать доходность инвестиций, отличающихся по срокам продолжительности.

Доходность за период — это доходность, которую инвестор получит за определенный период времени. Она определяется по формуле (1.1):

$$i = \frac{FV - PV}{PV}.$$

На финансовом рынке возникает необходимость сравнивать доходности различных финансовых инструментов. Поэтому наиболее часто встречающийся показатель доходности — это доходность в расчете на год.

Приведем формулы для расчета процентных ставок доходности i, j, d, f для различных условий наращения процентов и дисконтирования. Они получены при решении уравнений, связывающих FV и PV.

При наращении по сложной годовой ставке процентов i и по номинальной ставке j получим:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1; \tag{1.27}$$

$$j = \sqrt[mn]{\frac{FV}{PV}} - 1. \tag{1.28}$$

При дисконтировании по сложным учетным ставкам d и f:

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{PV}{FV}}; \tag{1.29}$$

$$f = m\left(1 - \sqrt[mn]{\frac{PV}{FV}}\right). \qquad (1.30)$$

Пример 22. Сберегательный сертификат куплен за 10 млн руб., выкупная его сумма 16 млн руб., срок 2,5 года. Каков уровень доходности инвестиций в виде годовой ставки сложных процентов?

Дано:	Решение
PV = 10 млн руб. FV = 16 млн руб.	По формуле (1.27): $i = \sqrt[2,5]{1,6} - 1 = 0,20684$ или $20,68\,\%$
Определить: $i = ?$	

Пример 23. Срок до погашения векселя равен 2 годам. Дисконт при его учете составил 30 %. Какой сложной годовой учетной ставке соответствует этот дисконт?

Дано:	Решение
$n = 2$	Применим формулу (1.29). По исходным данным задачи $\frac{FV - PV}{FV} = 1 - \frac{PV}{FV} = 0,3$.
Определить: $i = ?$	Отсюда следует, что $\frac{PV}{FV} = 0,7$. Тогда: $d = 1 - \sqrt{0,7} = 0,16334$ или 16,33 %

Тесты и тестовые задания к разделу 1

В заданиях, представленных в форме теста, необходимо выбрать правильные варианты ответа. Количество правильных ответов может быть больше одного.

1. *Принцип неравноценности денег заключается в том, что:*

A) деньги обесцениваются со временем;

B) деньги приносят доход;

C) равные по абсолютной величине денежные суммы, относящиеся к различным моментам времени, оцениваются по-разному;

D) «сегодняшние деньги ценнее завтрашних денег».

2. *Финансово-коммерческие расчеты используются:*

A) для определения выручки от реализации продукции;

B) для расчета кредитных операций;

C) для расчета рентабельности производства;

D) для расчета доходности ценных бумаг.

3. *Подход, при котором фактор времени играет решающую роль, называется:*

A) временной;

B) статический;

C) динамический;

D) статистический.

4. *Проценты в финансовых расчетах:*

A) это доходность, выраженная в виде десятичной дроби;

B) это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме;

C) показывают, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование в течение определенного периода времени 100 единиц первоначальной суммы долга.

5. *Процентная ставка:*

A) это относительный показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов;

B) это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме;

C) это ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах;

D) это отношение суммы процентных денег к величине ссуды.

6. *В качестве единицы времени в финансовых расчетах принят:*
A) год;
B) квартал;
C) месяц;
D) день.

7. *Наращение:*
A) это процесс увеличения капитала за счет присоединения процентов;
B) это базисный темп роста;
C) это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга;
D) это движение денежного потока от настоящего к будущему.

8. *Коэффициент наращения:*
A) это отношение суммы процентных денег к величине первоначальной суммы;
B) это отношение наращенной суммы к первоначальной сумме;
C) это отношение первоначальной суммы к будущей величине денежной суммы;
D) это отношение процентов к процентной ставке.

9. *Виды процентных ставок в зависимости от исходной базы:*
A) постоянная, сложная;
B) простая, переменная;
C) простая, сложная;
D) постоянная, переменная.

10. *Фиксированная процентная ставка:*
A) это ставка, неизменная на протяжении всего периода ссуды;
B) это ставка, применяемая к одной и той же первоначальной сумме долга;
C) это ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах;
D) это отношение суммы процентных денег к величине ссуды.

11. *Формула простых процентов:*
A) $FV = PVin;$
B) $FV = PV(1 + i)^n;$
C) $FV = PV(1 + ni)$.

12. *Простые проценты используются в случаях:*
A) реинвестирования процентов;

B) выплаты процентов по мере их начисления;
C) краткосрочных ссуд с однократным начислением процентов;
D) ссуд с длительностью более одного года.

13. *Точный процент:*
A) это капитализация процента;
B) это коммерческий процент;
C) это расчет процентов, исходя из продолжительности года в 365 или 366 дней;
D) это расчет процентов с точным числом дней финансовой операции.

14. *Точное число дней финансовой операции можно определить:*
A) по специальным таблицам порядковых номеров дней года;
B) используя прямой счет фактических дней между датами;
C) исходя из продолжительности каждого целого месяца в 30 дней;
D) считая дату выдачи и дату погашения ссуды за один день.

15. *Французская практика начисления процентов:*
A) обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;
B) обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;
C) точный процент с точным числом дней финансовой операции;
D) точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

16. *Германская практика начисления процентов:*
A) обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;
B) обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;
C) точный процент с точным числом дней финансовой операции;
D) точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

17. *Английская практика начисления процентов:*
A) обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;
B) обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;

C) точный процент с точным числом дней финансовой операции;

D) точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

18. *Расчет наращенной суммы в случае дискретно изменяющейся во времени процентной ставки по схеме простых процентов имеет следующий вид:*

A) $FV = PV(1 + \Sigma n_к i_к)$;

B) $FV = PV \Sigma (1 + n_к i_к)$;

C) $FV = PV(1 + n_1 i_1) \cdot (1 + n_2 i_2) \ldots (1 + n_к i_к)$;

D) $FV = PV(1 + n i_к)$.

19. *Срок финансовой операции по схеме простых процентов определяется по формуле:*

A) $n = I / (PVi)$;

B) $n = [(FV – PV) / (FVt)]i$;

C) $t = [(FV – PV) / (PVi)]Y$;

D) $n = [(FV – PV) / (FVt)]Y$;

20. *Формула сложных процентов:*

A) $FV = PV(1 + ni)$;

B) $FV = PV(1 + t / Y \cdot i)$;

C) $FV = PV(1 + i)^n$;

D) $FV = PV(1 + ni)(1 + i)^n$.

21. *Начисление по схеме сложных процентов предпочтительнее:*

A) при краткосрочных финансовых операциях;

B) при сроке финансовой операции в один год;

C) при долгосрочных финансовых операциях;

D) во всех вышеперечисленных случаях.

22. *Чем больше периодов начисления процентов:*

A) тем медленнее идет процесс наращения;

B) тем быстрее идет процесс наращения;

C) процесс наращения не изменяется;

D) процесс наращения предсказать нельзя.

23. *Номинальная ставка:*

A) это годовая ставка процентов, исходя из которой определяется величина ставки процентов в каждом периоде начисления, при начислении сложных процентов несколько раз в год;

B) это отношение суммы процентов, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды;

C) это процентная ставка, она применяется для декурсивных процентов;

D) годовая ставка, с указанием периода начисления процентов.

24. *Формула сложных процентов с неоднократным начислением процентов в течение года:*

A) $FV = PV(1 + i)^{m \cdot n}$;

B) $FV = PV(1 + j/m)^{m \cdot n}$;

C) $FV = PV / m \cdot (1 + i)^{n / m}$;

D) $FV = PV(1 + i \cdot m)^{m \cdot n}$.

25. *Эффективная ставка процентов:*

A) не отражает эффективности финансовой операции;

B) измеряет реальный относительный доход;

C) отражает эффект финансовой операции;

D) зависит от количества начислений и величины первоначальной суммы.

26. *Если в условиях финансовой операции отсутствует ставка сложных процентов, то:*

A) ее определить нельзя;

B) $i = \sqrt[n]{FV / PV} - 1$

C) $i = ln(FV / PV) / ln(1 + n)$;

D) $i = (1 + j / m)^m - 1$.

27. *Дисконтирование:*

A) это процесс начисления и удержания процентов вперед;

B) это определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину;

C) это разность между наращенной и первоначальной суммами.

28. *Банковский учет – это учет:*

A) по учетной ставке;

B) по процентной ставке;

C) по ставке рефинансирования;

D) по ставке дисконтирования.

29. *Антисипативные проценты – это проценты, начисленные:*

A) с учетом инфляции;

B) по учетной ставке;

C) по процентной ставке.

30. *Дисконтирование по сложным процентам осуществляется по формуле:*

A) $PV = FV(1 + i)^{-n}$;
B) $PV = FV(1 + i)^{-1}$;
C) $PV = FV(1 – d)^{n}$;
D) $PV = FV(1 + i)^{n}$.

31. *Дисконтирование по простой учетной ставке осуществляется по формуле:*

A) $PV = FV(1 – d)^{n}$;
B) $PV = FV(1 – d)^{-n}$;
C) $PV = FV(1 – nd)$;
D) $PV = FV(1 + nd)^{-1}$.

32. *Чем меньше процентная ставка:*

A) тем выше современная стоимость;
B) тем ниже современная стоимость;
C) тем она не оказывает влияния на современную стоимость.

33. *Для срока меньше года:*

A) простые проценты больше сложных;
B) сложные проценты больше простых;
C) множители наращения равны друг другу.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вкладчик размещает на счете в банке 100 тыс. руб. Какую сумму он получит через 60 дней, если банк начисляет по вкладу 10 % годовых?

Ответ: 101 666,67 руб.

2. Заемщик получил кредит на 6 месяцев под 80 % годовых с условием вернуть 3 млн руб. Какую сумму получил заемщик в момент заключения договора и чему равен дисконт? Использовать Германскую практику расчетов.

Ответ: D = 857 тыс. руб.

3. Договор предусматривает следующую схему начисления простых процентов: за первый год — 60 %, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 10 %. Требуется определить коэффициент наращения за 2,5 года.

Ответ: 2,8.

4. По банковскому счету установлено 10 % годовых. Процент начисляется ежеквартально. Рассчитать эффективную ставку.

Ответ: 10,38 %.

5. Вкладчик инвестировал 50 тыс. руб. и получил через 4 года 200 тыс. руб. Определить доходность его операции за 4 года.

Ответ: 300 %.

6. Вкладчик инвестировал 50 тыс. руб. и получил через 4 года 200 тыс. руб. Определить доходность его операции в расчете на 1 год.

Ответ: 41,42 %.

7. Вкладчик инвестировал 50 тыс. руб. и получил через 100 дней 60 тыс. руб. Определить эффективную доходность его операции, если продолжительность финансового года равна 365 дням.

Ответ: 94,54 %.

8. Банк начисляет 10 % годовых. Проценты капитализируются поквартально. Какую сумму вкладчик должен разместить в банке, чтобы через 5 лет получить на счете 100 тыс. долл.?

Ответ: 61 027,09 долл.

9. При рождении ребенка родители положили в банк 500 000 долл. с ежемесячным накоплением под 9 % годовых. Определить сумму вклада к совершеннолетию ребенка.

Ответ: 2 511 318,7 долл.

10. В рекламе банка № 1 говорится, что сумма, помещенная сегодня на срочный депозит, удвоится за 5 лет. Банк № 2 обещает своим клиентам 14 % годовых по вкладам на тот же период. В каком из банков ежегодно платят больший процент на вложенные средства?

Ответ: в банке № 1, там платят 15 % годовых.

11. Вам должны выплатить 30 000 долл. с отсрочкой в 4 года. Должник готов немедленно погасить свои обязательства из расчета 10 %-й годовой ставки. Какова текущая стоимость долга?

Ответ: 20 490,4 долл.

12. В банке размещена сумма в 140 000 долл. на 3 года по учетной ставке 20 %. Определить накопленную сумму.

Ответ: 241 920 долл.

13. Ссуда в размере 125 тыс. долл. выдана 16.01 по 10.11 включительно под 5,75 % простых годовых, год високосный. На сколько больше будет наращенная сумма ссуды при использовании *обыкновенных* процентов по сравнению с наращенной суммой при использовании *точных* процентов, если продолжительность пользования ссудой вычисляется точно?

Ответ: на 97,53 долл.

14. Какую сумму следует положить на депозит 18.03 под 8,75 простых годовых процентов, чтобы 14.11 накопить 1800 долл., если используются: а) точные проценты; б) используются обыкновенные проценты? (Y = 365).

Ответ: а) 1701,69 долл.; б) 1700,4 долл.

15. Через сколько лет первоначальная сумма увеличится в 1000 раз, если на нее начисляются сложные годовые проценты по ставке 12: а) при начислении процентов в конце года; б) при ежемесячном начислении процентов?

Ответ: а) 60,95 года; б) 57,95 года.

16. Кредит выдан на 5 лет под 8 % годовых, начисление процентов в конце года. Какую номинальную годовую ставку процентов необходимо назначить, чтобы получить к концу пятого года ту же наращенную сумму при поквартальном начислении процентов? Будет ли зависеть эта номинальная ставка от срока ссуды?

Ответ: 7,77 %; нет.

17. Кредит в сумме 2500 долл. выдан на 8 лет. Сложная ставка годовых процентов менялась от периода к периоду: на протяжении первых 3 лет действовала ставка 7,5 %, в следующие 3 года —

8 %, в последнем периоде — 8,2 %. Какую сумму нужно вернуть в конце восьмого года?

Ответ: 4580,27 долл.

18. Достаточно ли положить на счет 50 тыс. долл. для приобретения через 7 лет дома стоимостью 700 тыс. долл.? Банк начисляет проценты ежеквартально, годовая ставка — 40 %.

19. Какую сумму инвестор должен внести сегодня под простые проценты по ставке 50 % годовых, чтобы накопить 200 млн руб.: а) за полгода; б) за два года; в) за пять лет?

20. 10 млн руб. инвестированы на 2 года по ставке 12 % годовых. Требуется найти наращенную за это время сумму и ее приращение при начислении процентов: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально; г) ежемесячно.

21. Требуется найти современное значение долга, полная сумма которого через 3 года составит 7 млн руб. Проценты начисляются по следующим ставкам:

а) 14 % процентов в конце каждого года;

б) 20 % годовых в конце каждого квартала;

в) 12 % годовых в конце каждого месяца.

22. Банк предлагает следующие варианты помещения денежных средств: во вклад А — под 40 % годовых, во вклад Б — под 30 % годовых с начислением и присоединением процентов каждое полугодие, во вклад В — под 20 % годовых с ежеквартальным начислением и присоединением процентов. Определить вклад с наибольшей полной годовой доходностью инвестора.

23. Ссуда предоставлена на 4 года под 60 % годовых. Процент начисляется ежегодно и присоединяется к основной сумме долга. Во сколько раз дешевле обойдется ссуда, полученная под простые проценты?

24. Номинальная ставка процента — 62 % годовых. Процент начисляется и присоединяется 4 раза в год. Определите эффективную ставку процента.

25. Через 3 года Вы планируете купить дом, который стоит 600 тыс. долл. Какую сумму нужно положить в банк сегодня, чтобы купить дом в будущем, если годовая процентная ставка (8 %) начисляется ежеквартально?

Раздел 2
ОЦЕНКА ПОТОКОВ ФИНАНСОВЫХ ПЛАТЕЖЕЙ

2.1. Виды потоков платежей и их основные параметры

До сих пор рассматривались случаи финансовых операций, состоящих из отдельного разового платежа, например получение и погашение долгосрочной ссуды. Вместе с тем погашение такой ссуды возможно не только единовременным платежом, а и множеством распределенных во времени выплат. В финансовой литературе ряд распределенных во времени выплат и поступлений называется **потоком платежей**.

Потоки платежей являются неотъемлемой частью всевозможных финансовых операций: с ценными бумагами, в управлении финансами предприятий, при осуществлении инвестиционных проектов, в кредитных операциях, при оценке бизнеса, при оценке недвижимости, выборе альтернативных вариантов финансовых операций и т. п.

Потоки финансовых платежей, или ***финансовые, денежные потоки***, представляют собой ряд следующих друг за другом выплат и поступлений денег в рамках одной финансовой операции. Финансовый поток охватывает несколько актов перехода денежных средств от одного владельца к другому и предполагает рассредоточенность однородных платежей во времени. Можно сравнить, например, разовое помещение средств в банк и взносы во вклад на протяжении ряда лет (поток).

Потоки платежей могут быть *регулярными* (размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу, предусматривающему равные интервалы между платежами) и *нерегулярными*. Члены потоков могут быть положительными (поступления) и отрицательными (выплаты).

Поток платежей, все члены которого — положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют **финансовой рентой**, или просто **рентой**, или **аннуитетом**.

Ренты часто встречаются на практике. Их примером являются квартирная плата, взносы по погашению потребительского кредита, пенсия, регулярная выплата процентов по банковскому депозиту или по ценным бумагам и т. д. Первоначально рассматривались лишь ежегодные (*anno* — год на латинском языке) выплаты, оттуда и произошло их название «аннуитет». Позднее это понятие стало включать и все последовательности платежей одного знака через любые одинаковые интервалы времени.

Рента описывается следующими параметрами:

– **суммарный годовой платеж** — R — размер суммы, которая переходит от одного владельца к другому в течение года;

– **количество поступлений** отдельных платежей в течение года — p;

– **член ренты** — размер отдельного платежа — PMT *(payment)* = R/p ($PMT = R$, если $p = 1$);

– **период** — временной интервал между двумя соседними платежами;

– **срок потока платежей** — n — время от начала первого периода ренты до конца последнего;

– **процентная ставка** — i (j) — ставка, используемая при наращении или дисконтировании отдельных платежей, из которых состоит поток;

– **количество раз *m* в году начисления процентов** исходя из годовой ставки j.

На практике применяют разные по своим условиям ренты. В основу их классификации может быть положен ряд признаков. Рассмотрим некоторые из таких классификаций.

По количеству выплат членов ренты на протяжении года ренты делятся:

– *на годовые* (выплата раз в году);

– *на p-срочные* (p — количество выплат в году).

По числу раз начислений процентов на протяжении года различают:

– *ренты с ежегодным начислением;*

– *с начислением m раз в году;*

– *с непрерывным начислением.*

Моменты начисления процентов необязательно совпадают с моментами выплат членов ренты.

По величине своих членов ренты делятся:

– *на постоянные* (с одинаковыми размерами члена ренты);

– *на переменные*.

По вероятности выплат ренты делятся:

– *на верные;*

– *на условные*.

Верные ренты подлежат безусловной уплате, например, при погашении кредита. Число членов такой ренты заранее известно. В свою очередь, выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, число ее членов заранее неизвестно. Примером условной ренты может служить пенсия (*life annuity*), выплата которой начинается после достижения гражданином определенного возраста и прекращается после смерти пенсионера. Анализ условных рент — один из фундаментальных разделов страховой математики, результаты которой положены в основу расчетов страховых тарифов. Без этого невозможна законная деятельность страховых фирм и пенсионных фондов.

По количеству членов различают:

– *ренты с конечным числом членов*, или *ограниченные ренты* (их срок заранее оговорен);

– *бесконечные, или вечные ренты*.

С вечной рентой встречаются на практике в ряде долгосрочных операций, когда предполагается, что период функционирования анализируемой системы или срок операции весьма продолжителен и не оговаривается конкретными датами.

По соотношению начала срока ренты и какого-либо момента времени, упреждающего начало ренты (например, начало действия контракта или даты его заключения), ренты делятся:

– *на немедленные,* действие которых начинается после заключения договора*;*

– *на отложенные, или отсроченные,* платежи по которым производятся по истечении оговоренного периода.

Очень важным является различие по моменту выплат платежей в пределах периода ренты:

– если платежи осуществляются в конце этих периодов, то соответствующие ренты называют *обыкновенными*, или *постнумерандо (postnumerando)*;

– если же платежи производятся в начале периодов, то их называют *пренумерандо (prenumerando)*.

Иногда контракты предусматривают платежи или поступления денег в середине периодов.

2.2. Наращенная величина постоянной ренты постнумерандо

Исходя из понятий операции наращения и финансового потока, определим, что *наращенная стоимость аннуитета FVA (future value of annuity)* — это сумма всех последовательных платежей с начисленными на них процентами к концу срока операции.

Рассмотрим условную ситуацию: пусть задан регулярный финансовый поток (аннуитет) *postnumerando*, при формировании которого начисляют сложные проценты один раз за процентный период. Платежи аннуитета поступают с такой же частотой — один раз в период. Проследим в течение трех периодов процесс наращения его отдельных платежей и оценим сумму этих платежей на момент окончания всех взносов.

Дано:	Решение
PMT — *const* i — *const* $m = 1$ $p = 1$ $n = 3$	Наращение регулярного финансового потока (аннуитета) представлено на рис. 2.1.
Определить: $FVA = ?$	

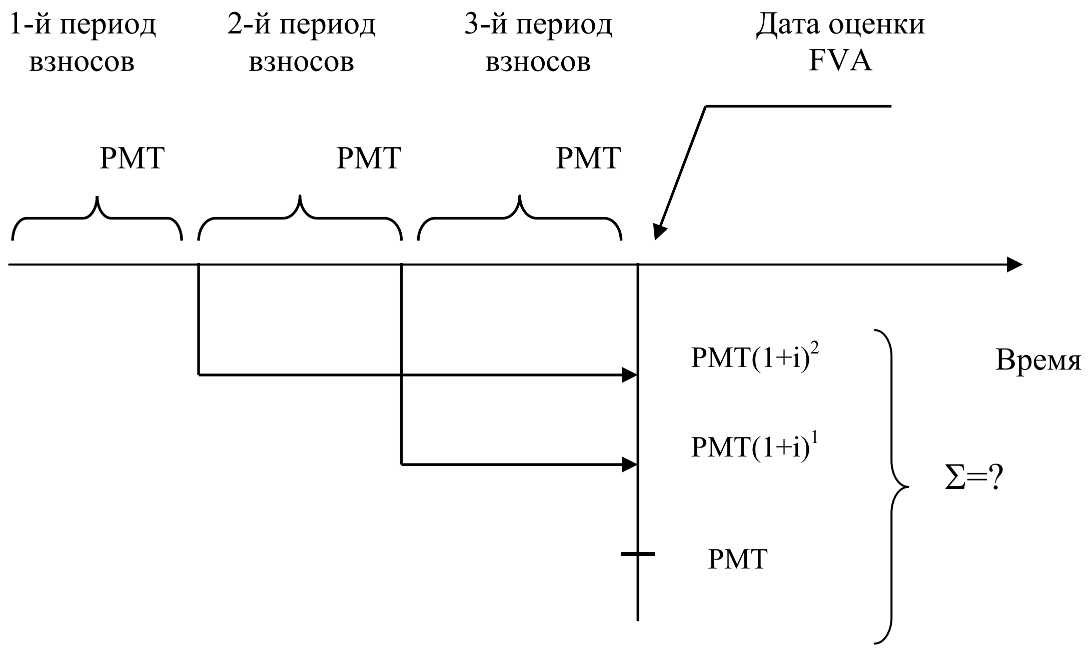


Рис. 2.1. Наращение регулярного финансового потока (аннуитета)

Наращенные отдельные платежи PMT, $PMT(1+i)^1$, $PMT(1+i)^2$ представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом PMT и знаменателем прогрессии (1+i). Поэтому искомая сумма как сумма геометрической прогрессии для случая m=1, p=1 равна:

$$FVA^{post} = PMT\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = PMT\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}\,. \tag{2.1}$$

Выражение $fA^{post}_{n;i} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$ называют ***коэффициентом (множителем) наращения обычной финансовой ренты***. Он представляет собой наращенную стоимость регулярного потока платежей, каждый из которых равен одной денежной единице, к моменту окончания всех платежей. Нижний индекс n; i указывает на продолжительность ренты и величину процентной ставки. Значения коэффициента табулированы.

Пример 1. На счет в банке в течение пяти лет в конце каждого года будут вноситься суммы в размере 500 долл., на которые будут начисляться проценты по ставке 30 %. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Дано:	Решение
$n = 5$ $m = 1$ $PMT = 500$	Для определения наращенной суммы FVA^{post} воспользуемся формулой (2.1).
Определить: $FVA^{\text{post}} = ?$	$FVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i} = \frac{500\cdot(1+0,3)^5 - 1}{0,3} =$ $= 4521,55$ долл.

Можно определить наращенную сумму постоянной ренты, воспользовавшись финансовыми таблицами, содержащими коэффициенты наращения ренты:

$$FVA^{\text{post}} = PMT \cdot fA_{5\,;\,30} = 500 \cdot 9{,}0431 = 4521{,}55 \text{ долл.}$$

Сумма взносов в течение 5 лет составит:

$$P = nPMT = 5 \cdot 500 = 2500 \text{ долл.}$$

Следовательно, сумма начисленных процентов будет равна:

$$I = FVA^{\text{post}} - P = 4521{,}55 - 2500 = 2021{,}55 \text{ долл.}$$

Таким образом, доход владельца счета за 5 лет составит 2021,55 долл.

Для овладения методами финансовой математики важно не столько запоминание формул, сколько общих принципов расчета.

Рассмотрим поэтапное решение предыдущего примера:

$$500 + 500 \cdot (1+0,3) + 500 \cdot (1+0,3)^2 + 500 \cdot (1+0,3)^3 + 500 \cdot (1+0,3)^4 =$$
$$= 500 + 650 + 845 + 1098,5 + 1428,05 = 4521,55 \text{ долл.}$$

Таким образом, получается такая же сумма, как и по формуле наращения аннуитета.

Пример 2. График предусматривает следующий порядок выдачи ссуды во времени: 1 июля 2000 г. — 5 млн руб., 1 января 2001 г. — 15 млн руб., 1 января 2003 г. — 18 млн руб. Необходимо определить сумму задолженности на начало 2004 г. при условии, что проценты начисляются по ставке 20 %.

Дано:	Решение
i = 20 % годовых	Схематично условие задачи показано на рис. 2.2. Находим: $FVA^{post} = 5 \cdot 1,2^{3,5} + 15 \cdot 1,2^3 + 18 \cdot 1,2 =$ $= 56,985$ млн руб.
Определить: FVA^{post} =?	

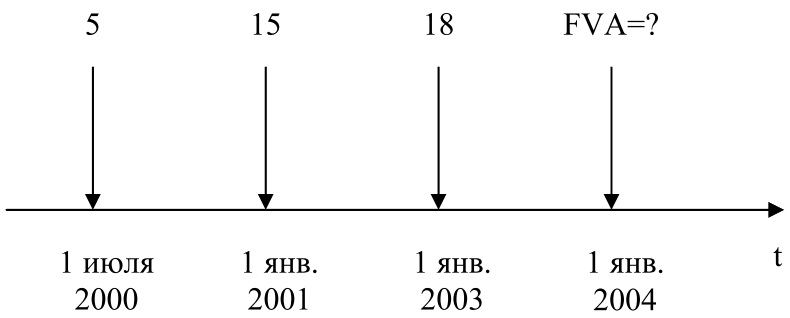


Рис. 2.2. Схема потоков выдачи ссуды

Годовая рента, начисление процентов m раз в году (вложения осуществляются реже, чем капитализация, т. е. p < m, при этом p = 1).

Пусть, как и выше, анализируется годовая рента постнумерандо. Однако проценты теперь начисляются m раз в году. Число членов ренты равно nm. Члены ренты с начисленными к концу срока процентами образуют ряд (но в обратном порядке):

$$PMT,\ PMT(1+j/m)^{m},\ PMT(1+j/m)^{2m},\ \ldots,\ PMT(1+j/m)^{(n-1)m},$$

где j — номинальная ставка процентов.

Мы имеем дело с возрастающей геометрической прогрессией. Первый член прогрессии равен PMT, знаменатель $(1+j/m)^{m}$. Сумма членов этой прогрессии составляет:

$$FVA^{post} = PMT\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{(1+\frac{j}{m})^{m}-1}\ . \qquad (2.2)$$

Пример 3. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер разового платежа 4 млн руб. На поступающие взносы начисляются проценты по ставке 18,5 % годовых. Определить:

1) размер фонда на конец срока; 2) размер фонда, если проценты начисляются поквартально, а не раз в году.

Дано:	Решение
$n = 5$ $m = 1$ $m = 4$ $PMT = 4$ млн руб. $i = 18,5$ % годовых	1) Воспользуемся формулой (2.1): $FVA^{post} = 4\cdot\frac{(1+0,185)^{5}-1}{0,185} = 28,9$ млн. руб. 2) Имеем $j/m = 18,5/4$; $mn = 20$. Воспользуемся формулой (2.2): $FVA^{post} = 4\cdot\frac{(1+0,185/4)^{20}-1}{(1+0,185/4)^{4}-1} =$ $= 29,663$ млн. руб. Как видим, переход от годового начисления процентов к поквартальному несколько увеличил наращенную сумму.
Определить: $FVA^{post} = ?$	

p-срочная рента (m=1, m≠p). Пусть рента выплачивается p раз в году равными суммами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если годовая сумма платежей равна R, то каждый раз выплачивается $PMT = R/p$. Общее число выплат ренты равно np. Последовательность членов ренты с начисленными процентами представляет собой геометрическую прогрессию. Первый ее член равен $R/p = PMT$, знаменатель $(1 + i)^{1/p}$. Сумма членов прогрессии равна:

$$FVA^{post} = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^{\frac{1}{p}np} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = PMT\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}\;. \tag{2.3}$$

Пример 4. Допустим, что в условиях примера 3 платежи выплачиваются поквартально (p=4): $PMT = R/p = 1$ млн руб., общее число платежей равно 20.

Тогда наращенная сумма составит:

$$FVA^{post} = 1\cdot\frac{1{,}185^{5} - 1}{1{,}185^{\frac{1}{4}} - 1} = 30{,}834\ \text{млн. руб.}$$

p-срочная рента (p = m). На практике наиболее часто встречаются случаи, когда число выплат в году равно числу начислений процентов: $p = m$. Для получения необходимой формулы воспользуемся формулой (1), в которой i заменим на j/m, а вместо числа лет возьмем число периодов выплат ренты np; член ренты равен $PMT = R/p$. Поскольку $p = m$, то в итоге получим:

$$FVA^{post} = PMT\,\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j/m}\;. \tag{2.4}$$

Пример 5. Продолжим наш сквозной пример. Пусть теперь выплата членов ренты и начисление процентов производятся поквартально. Определить размер фонда.

Решение

По формуле (2.4) получим:

$$FVA^{post} = 1\cdot\frac{(1+0{,}185/4)^{4\cdot 5} - 1}{0{,}185/4} = 31{,}785\ \text{млн. руб.}$$

2.3. Современная (текущая) стоимость постоянной ренты постнумерандо

Данный показатель находит широкое применение в разнообразных финансовых расчетах: планирование погашения долгосрочных займов, реструктурирование долга, оценка и сравнение эффективности производственных инвестиций и т. п.

Начнем с самого простого случая: член годовой ренты постнумерандо равен *PMT*, срок ренты — *n*, происходит ежегодное дисконтирование. Под современной стоимостью регулярных финансовых потоков, или срочных аннуитетов *PVA* (*present value of annuity*), понимают сумму всех платежей, дисконтированных на начало периода первого платежа.

Представим процесс дисконтирования аннуитета *postnumerando* графически на рис. 2.3, исходя из тех же параметров, что и при определении наращенной суммы *FVA*.

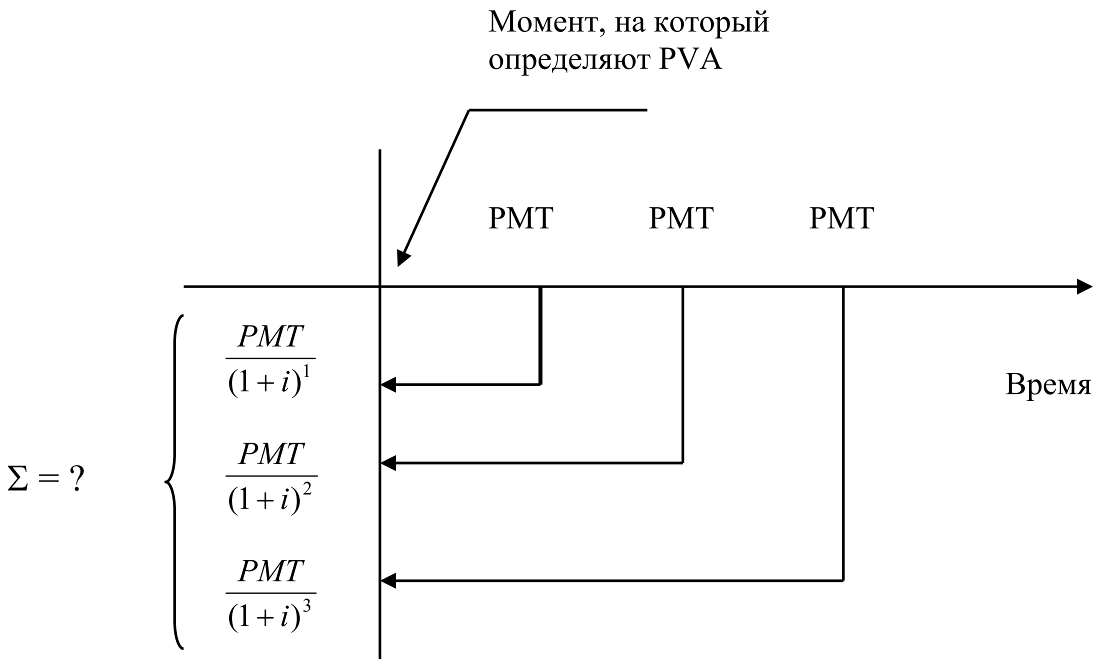


Рис. 2.3. Дисконтирование регулярного финансового потока (аннуитета)

Дисконтированные отдельные платежи $PMT(1+\text{i})^{-1}$, $PMT((1+i)^{-1})^2$, $PMT((1+i)^{-1})^3$ представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $PMT(1+i)^{-1}$ и знаменателем $(1+i)^{-1}$. Ее сумма имеет вид:

$$PVA^{\text{post}} = PMT(1+i)^{-1}\,\frac{((1+i)^{-1})^{\text{n}}-1}{(1+i)^{-1}-1} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i} \qquad (2.5)$$

Величина $\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i}$ называется ***коэффициентом современной стоимости срочного аннуитета*** (или ***коэффициентом приведения ренты***) и характеризует современную величину обычного регулярного потока платежей, каждый из которых равен одной денежной единице. Значения этих коэффициентов табулированы.

Пример 6. Годовая рента постнумерандо характеризуется следующими параметрами: *PMT* = 4 млн руб., *n* = 5. При дисконтировании применяется сложная ставка 18,5 % годовых. Определить современную стоимость потока платежей в течение 5 лет.

Дано:	Решение
PMT = 4 млн руб. $n = 5$ i = 18,5 %	Для определения наращенной суммы PVA^{post} воспользуемся формулой (2.5). $PVA^{\text{post}} = 4 \cdot \dfrac{1-1{,}185^{-5}}{0{,}185} = 4 \cdot 3{,}092 =$ $= 12{,}368$ млн. руб.
Определить: $PVA^{\text{post}} = ?$	

Таким образом, все будущие платежи оцениваются в настоящий момент в сумме 12,368 млн руб. Иначе говоря, 12,368 млн руб., размещенных под 18,5 % годовых, обеспечивают ежегодную выплату по 4 млн руб. в течение 5 лет.

Пример 7. В начале первого года фирме предложено вложить 8 млн руб. Доходы от инвестирования ожидаются в конце четырех последующих лет по 2 млн руб. Вычислим чистую приведенную стоимость исходя из ставки процентов 10 % годовых.

Дано:	Решение
PMT = 2 млн руб. $p = 1$ $m = 1$ i = 10 % годовых n = 4 года	Графически условие представлено на рис. 2.5. Определим сумму приведенных поступлений на начало первого периода: $PVA^{\text{post}} = PMT\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 2 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}1)^{-4}}{0{,}1} =$ $= 6{,}3397309$ млн. руб. $NVP = -8 + 6{,}3397309 = -1{,}6602691$ млн. руб. Следовательно, если поступления от инвестирования ограничиваются указанными суммами, то проект убыточен.
Определить: $NPV = ?$	

Примечание. Финансовая операция может предусматривать неоднократные и разновременные переходы денежных сумм от одного владельца к другому (рис. 2.4). Рассматривая поток платежей с позиции одного из них, можно считать все поступления к нему положительными величинами, а все его выплаты — отрицательными.

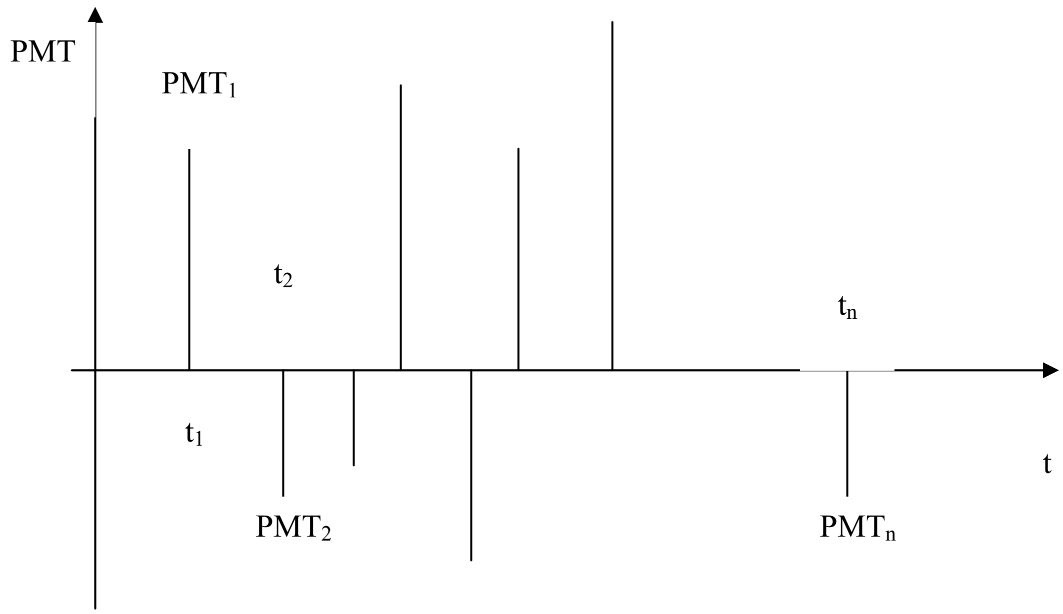


Рис. 2.4. Потоки платежей

Для оценки финансовой операции в целом используется **чистая приведенная величина (*NPV — Net Present Value*)**, вычисляемая с учетом знака величин PMT_i.

Требование положительности *NPV* является обязательным при принятии решения о реализации финансовой операции кредитором.

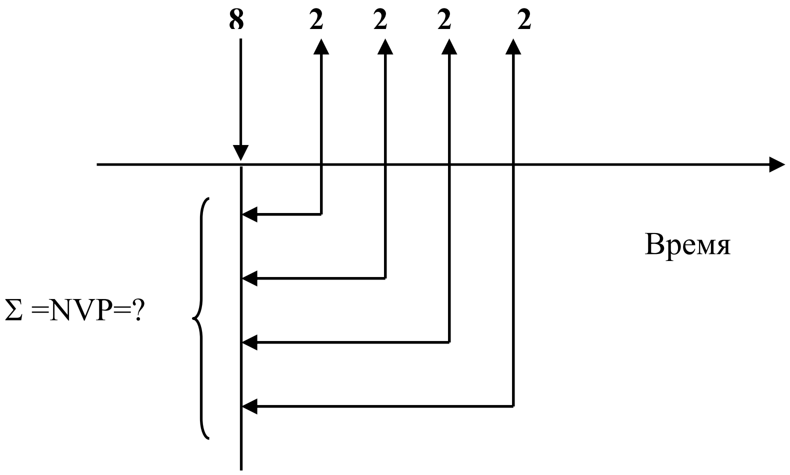


Рис. 2.5. Схема определения NPV

Пример 8. Инвестор сдал в аренду недвижимость на 5 лет, ежегодная арендная плата — 1000 долл. в конце года. Ожидается, что к концу срока недвижимость будет стоить 400 000 долл. За какую цену можно продать объект сегодня, если на рынке установилась норма рентабельности 10 % годовых.

Дано:	Решение
PMT = 1 тыс. долл. FV = 400 000 долл. i = 10 % годовых n = 5 лет	$PV_{общ} = PV_{недвиж} + PVA_{платы} =$ $= \dfrac{400000}{(1+0{,}1)^5} + 1000 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} =$ $= 248\,369 + 3791 = 252\,160$ долл.
Определить: $PV_{общ.}$=?	

Годовая рента, начисление процентов *m* *раз в году*

Заменим в формуле (5) дисконтный множитель $(1 + i)^{-n}$ на эквивалентную величину $(1 + j/m)^{-mn}$ соответственно, а знаменатель — на $(1 + j/m)^{m}$ — 1. После этого имеем:

$$PVA^{post} = PMT\,\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1}\;. \tag{2.6}$$

p-срочная рента (m=1). Если платежи производятся не один, а p раз в году, то размер платежа равен $PMT = R/p$, а число членов составит np. Сумма дисконтированных платежей в этом случае равна:

$$PVA^{post} = \frac{R}{p}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}\;. \tag{2.7}$$

Пример 9. Газеты сообщали («За рубежом», № 11, 1985 г.), что американская компания «Юнион Карбайд», на химическом заводе которой в Индии произошла крупная авария, предложила в качестве компенсации выплатить пострадавшим в течение 35 лет 200 млн долл. Индийская сторона отклонила это предложение. Предложенная компенсация эквивалентна 57,5 млн долл., выплаченных единовременно. Покажем, как была рассчитана эта сумма.

Дано:	Решение
PMT = 5,714 млн долл. p = 12 i = 10 % годовых n = 35 лет	Если выплаты производятся помесячно на протяжении 35 лет равными суммами, то данный ряд платежей представляет собой постоянную ренту (p = 12) с годовой суммой выплат 200 / 35 = 5,714 млн долл. Допустим, что эта рента постнумерандо. Тогда согласно формуле (2.7), положив i = 10 %, получим:
Определить: PVA^{post}=?	

$$PVA^{\text{post}} = \frac{5,714}{12} \cdot \frac{1-1,1^{-35}}{1,1^{1/12}-1} =$$

$= 57,59$ млн. долл.

Иначе говоря, капитал в сумме всего 57,59 млн долл. при начислении 10 % годовых достаточен для выполнения обязательства.

р-срочная рента (р = т). Число членов ренты равно числу начислений процентов; величина члена ренты составляет $PMT = R/m$. В итоге:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m}\ . \qquad (2.8)$$

2.4. Определение параметров постоянных рент постнумерандо

Как было отмечено ранее, постоянная рента описывается набором основных (PMT, n, i) и дополнительными параметрами (p, m). При разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик PVA^{post} или FVA^{post} и неполный набор параметров ренты. В таких случаях находят недостающий параметр.

Определение размера члена ренты

Исходные условия: задается PVA^{post} или FVA^{post} и набор параметров, кроме PMT. Например, за некоторое число лет необходимо создать фонд в сумме FVA^{post} путем систематических постоянных взносов. Если рента годовая, постнумерандо, с ежегодным начислением процентов, то, обратившись к формуле (1), получим:

$$PMT = \frac{FVA^{\text{post}}i}{(1+i)^{n}-1}\,. \qquad (2.9)$$

Пусть теперь условиями договора задана современная стоимость ренты PVA^{post}. Если рента годовая ($m = 1$), то из (5) следует:

$$PMT = \frac{PVA^{\text{post}}i}{1-(1+i)^{-n}}\,. \qquad (2.10)$$

Таким образом, если ставится задача накопить за определенный срок некоторую сумму FVA^{post}, то прибегают к формуле (2.9); если же речь идет о погашении задолженности в сумме PVA^{post}, то следует воспользоваться (2.10).

Аналогичным образом можно определить PMT и для других условий ренты.

Пример 10. Для покупки автомобиля через 5 лет потребуется 50 тыс. долл. Определите размер ежегодных взносов, вносимых в конце каждого года в банк, который начисляет проценты по ставке 40 %.

Дано:	Решение
$n = 5$ $i = 40\ \%$ $FVA^{post} = 50$ тыс. долл.	Размер ежегодных взносов, исходя из формулы (2.9), будет равен: $$PMT = \frac{FVA^{post} i}{(1+i)^n - 1} = \frac{50000 \cdot 0,4}{(1+0,4)^5 - 1} =$$ $= 4568$ долл.
Определить: $PMT = ?$	Таким образом, чтобы накопить на счете необходимую сумму для покупки автомобиля, следует в конце каждого года в течение пяти лет откладывать 4568 долл.

Пример 11. Известно, что принц Чарльз при разводе с Дианой выплатил ей 17 млн ф. ст. Как сообщалось, эта сумма была определена в расчете на то, что принцесса проживет еще 50 лет (увы, это не сбылось). Указанную сумму можно рассматривать как современную стоимость постоянной ренты. Определим размер члена этой ренты при условии, что процентная ставка равна 10 %, а выплаты производятся помесячно.

Дано:	Решение
$PVA^{post} = 17$ млн ф. ст. $n = 50$ $p = 12$ $i = 10\ \%$	Для ренты постнумерандо с указанными параметрами можно записать уравнение, используя формулу (2.7):
Определить: $PMT = ?$	$$17\,000 = PMT\,\frac{1-1,1^{-50}}{1,1^{1/12}-1}.$$ Отсюда ежемесячная выплата PMT составит 135,6 тыс. ф. ст.

Расчет срока ренты

При разработке условий контракта иногда возникает необходимость в определении срока ренты и соответственно числа членов ренты. Решая полученные выше выражения, определяющие PVA^{post} или FVA^{post}, относительно n, получим искомые величины. Так, для годовой ренты постнумерандо с ежегодным начислением процентов находим:

$$n = \frac{\ln(\frac{FVA^{post}}{PMT} i + 1)}{\ln(1+i)};$$

$$n = \frac{\ln(1 - \frac{PVA^{post}}{PMT} i)^{-1}}{\ln(1+i)}.$$

Аналогичным образом определяются сроки и для других видов рент.

При расчете срока ренты необходимо принять во внимание следующие моменты.

1. Расчетные значения срока будут, как правило, дробные. В этих случаях для годовой ренты в качестве n часто удобно принять ближайшее целое число лет. У p-срочной ренты результат округляется до ближайшего целого числа периодов np. Например, пусть для квартальной ренты получено n = 6,28 года, откуда np = 25,12 кварталов. Округляем до 25, в этом случае n = 6,25 года.

2. Если округление расчетного срока производится до меньшего целого числа, то наращенная сумма или современная стоимость ренты с таким сроком оказывается меньше заданных размеров. Возникает необходимость в соответствующей компенсации. Например, если речь идет о погашении задолженности путем выплаты постоянной ренты, то компенсация может быть осуществлена соответствующим платежом в начале или конце срока, или с помощью повышения суммы члена ренты.

Пример 12. Какой необходим срок для накопления 100 млн руб. при условии, что ежемесячно вносится по 1 млн руб., а на накопления начисляются проценты по ставке 25 % годовых?

Дано:	Решение
p = 12 i = 25 % PMT = 1 млн руб. FVA^{post} = 100 млн руб.	По формуле, которая выводится для случая p>1, m = 1 из (2.3), получаем:
Определить: n = ?	

$$n = \frac{\ln(\frac{FVA^{\text{post}}}{PMT}((1+i)^{1/\text{p}}-1)+1)}{\ln(1+i)} =$$

$$= \frac{\ln(\frac{100}{1}(1,25^{1/12}-1)+1)}{\ln 1,25} = 4,7356 \text{ года.}$$

Если срок округляется до 5 лет, то необходимо несколько уменьшить размер члена ренты, т. е. найти член ренты для n = 5. В этом случае ежемесячный взнос должен составлять 914,79 тыс. руб. (из формулы (2.3).

2.5. Вечная рента

Под ***вечной рентой*** понимается ряд платежей, количество которых не ограничено — теоретически она выплачивается в течение бесконечного числа лет. На практике иногда сталкиваются со случаями, когда есть смысл прибегнуть к такой абстракции, например, когда предполагается, что срок потока платежей очень большой и конкретно не оговаривается.

Очевидно, что наращенная сумма вечной ренты равна бесконечно большой величине. На первый взгляд представляется бессодержательным и определение современной стоимости такой ренты. Однако это далеко не так. Современная величина вечной ренты есть конечная величина, которая определяется весьма просто.

Вспомним формулу современной стоимости годовой ренты постнумерандо:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i}.$$

Коэффициент приведения ренты $a_{\text{n;i}} = \dfrac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i}$ при увеличении срока ренты стремится к некоторому пределу. При $n = \infty$ предельное значение коэффициента составит:

$$a_{\text{n;i}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-(1+i)^{\text{-n}})}{i} = \frac{1}{i}.$$

Отсюда находим:

$$PVA_{\infty} = \frac{PMT}{i}. \qquad (2.11)$$

Таким образом, современная стоимость вечной ренты зависит только от размера члена ренты и процентной ставки. Из (2.11) следует:

$$PMT = PVA_{\infty} i\ . \qquad (2.12)$$

Для других видов рент получим:

при $p > 1$, $m = 1$

$$PVA_{\infty} = \frac{R}{p}\,\frac{1}{(1+i)^{1/p}-1} = PMT\,\frac{1}{(1+i)^{1/p}-1}\,;$$

при $p = m > 1$

$$PVA_{\infty} = PMT\,\frac{1}{j/m} = \frac{R}{j}\,.$$

Пример 13. Требуется выкупить вечную ренту, член которой равен 5 млн руб., выплачиваемых в конце каждого полугодия.

Дано:	Решение
$P = 2$ $PMT = 5$ млн руб.	Капитализированная стоимость такой ренты при условии, что для ее определения применена годовая ставка 25 %, составит:
Определить: $PVA_{\infty} = ?$	$PVA_{\infty} = PMT\,\dfrac{1}{(1+i)^{1/p}-1} = 5\cdot\dfrac{1}{1{,}25^{1/2}-1} =$ $= 42{,}361$ млн. руб.

2.6. Дополнительные примеры

1. (Текущая стоимость аннуитета.) Предположим, что мы хотим получать доход, равный 10 млн руб. в год, на протяжении четырех лет. Какая сумма обеспечит получение такого дохода, если ставка по срочным депозитам равна 10 % годовых?

Решение

$$PVA^{\text{post}} = 1\,000\,000/1{,}10 + 1\,000\,000/(1{,}10)^2 + 1\,000\,000/(1{,}10)^3 +$$
$$+1\,000\,000/(1{,}10)^4 = 3\,169\,870 \text{ млн. руб.}$$

2. (Будущая стоимость аннуитета.) На депозитный счет в течение 5 лет будут ежегодно в конце каждого года вноситься суммы 5 млн руб., на которые будут начисляться сложные проценты по ставке 80 % годовых. Определить сумму начисленных процентов.

Решение

В этом случае сумма вклада с процентами составит:

$$FVA^{\text{post}} = 5\,000\,000 \cdot \frac{(1+0{,}8)^5 - 1}{0{,}8} = 111\,848\,000 \text{ руб.}$$

Сумма всех взносов будет равна:

$$PV = 5\,000\,000 \cdot 5 = 25\,000\,000 \text{ руб.}$$

Следовательно, сумма начисленных процентов составит:

$$I = 111\,848\,000 - 25\,000\,000 = 86\,848\,000 \text{ руб.}$$

3. Владелец кафе предполагает, что в течение 6 лет будет получать ежегодный доход от аренды в сумме 60 тыс. руб. В конце шестого года кафе будет продано за 1350 тыс. руб.; расходы по ликвидации составят 5 % продажной цены. Различия в уровне риска определяют выбранные аналитиком ставки дисконта для дохода от аренды и продажи: 8 и 20 % соответственно. Рассчитать сумму доходов.

Решение

Рассчитаем текущую стоимость потока доходов от аренды:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-\text{n}}}{i} = 60 \cdot \frac{1-1{,}08^{-6}}{0{,}08} = 60 \cdot 4{,}6229 = 277{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

Определим текущую стоимость дохода от продажи:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^{\text{n}}} = \frac{1350 \cdot 0{,}95}{1{,}2^6} = 1282{,}5 \cdot 0{,}3349 = 429{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Рассчитаем сумму доходов:

$$277{,}4 + 429{,}5 = 70\,669 \text{ тыс. руб.}$$

4. Аренда магазина принесет его владельцу в течение первых трех лет ежегодный доход в 750 тыс. руб.; в последующие пять лет доход составит 950 тыс. руб. в год. Определить текущую стоимость совокупного дохода, если ставка дисконта 10 %.

Решение

Текущая стоимость совокупного дохода равна текущей стоимости потока доходов в 750 тыс. руб. за первые 3 года и потока доходов в 950 тыс. руб. за последующие 5 лет.

Рассчитаем текущую стоимость арендных платежей за первые 3 года:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i} = 750\cdot\frac{1-1{,}1^{-3}}{0{,}1} = 750\cdot 2{,}4869 =$$

$$= 1865{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Определим текущую стоимость арендной платы за последующие 5 лет. При этом вначале вычислим текущую стоимость арендной платы в 950 тыс. руб. на конец третьего года:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i} = 950\cdot\frac{1-1{,}1^{-5}}{0{,}1} = 950\cdot 3{,}7907 =$$

$$= 3601{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

А теперь продисконтируем эту сумму на начало периода (первого года):

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^{\text{n}}} = \frac{3601{,}2}{1{,}1^{3}} = 2705{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

Суммарная текущая стоимость арендной платы равна:

1865,2 + 2705,7 = 4570,8 тыс. руб.

5. Рассчитать величину ежегодного взноса на погашение кредита в сумме 40 тыс. руб., предоставленного на 15 лет под 20 % годовых.

Решение

Рассчитаем величину взноса:

$$PMT = \frac{PVA^{\text{post}}i}{1-(1+i)^{\text{-n}}} = \frac{40000\cdot 0{,}2}{1-1{,}2^{-15}} = 40000\cdot 0{,}2139 = 8555{,}3 \text{ тыс. руб.}$$

Заемщик уплатит кредитору за 15 лет: 8555,3 · 15 = 128 329,3 тыс. руб., что превышает величину выданного кредита на 128 329,3 – 40 000 = 88 329,3 руб. Разница является суммой процентов, уплаченных заемщиком за весь период кредитования.

6. Какую сумму необходимо 40-летнему мужчине вносить на протяжении 20 лет в конце года на счет под 8 % годовых, чтобы затем, после достижения пенсионного возраста в 60 лет, на протяжении 20 лет в конце каждого месяца снимать по 200 долл.? Счет должен быть исчерпан за 20 лет.

Решение

Определим современную величину пенсионных выплат:
$R = 200 \cdot 12 = 2400$; $PMT = 200$; $n = 20$; $p = 12$; $m = 1$.

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{(1+i)^{1/\text{p}}-1} = 200\cdot\frac{1-1,08^{-20}}{1,08^{1/12}-1} = 24\,415,55 \text{ долл.}$$

Эту сумму мужчина должен накопить в течение 20 лет, внося на счет в конце каждого года сумму *PMT*, определяемую по формуле:

$$PMT = \frac{FVA^{\text{post}}i}{(1+i)^{\text{n}}-1} = \frac{24415,55\cdot 0,08}{1,08^{20}-1} = 533,53 \text{ долл.}$$

7. Банковская ставка выросла с 8 % до 10 %. Как это повлияло на капитал держателя бессрочной ценной бумаги, которая приносит ему ежегодный доход в 200 долл.?

Решение

Эта облигация обеспечивает владельца вечной рентой с последовательными выплатами в 200 долл. Для него это равносильно обладанию капиталом:

$$PVA_{\infty} = \frac{PMT}{i} = \frac{200}{0,08} = 2500 \text{ долл.}$$ при 8%-ой ставке;

$$PVA_{\infty} = \frac{PMT}{i} = \frac{200}{0,1} = 2000 \text{ долл.}$$ при 10%-ой ставке.

Увеличение процентной ставки приводит к снижению капитала на 500 долл.

8. Тысячному клиенту страховой фирмы предлагается на выбор 20 тыс. руб. наличными или 2 тыс. руб. ежегодно и пожизненно. Банковская процентная ставка составляет 8,5 %. Какой вариант приза выбрать тысячному клиенту?

Решение

Подсчитаем, сколько лет необходимо получать выплаты, чтобы их текущая стоимость (стоимость аннуитета) превышала 20 тыс. руб.

Имеем соотношение: $PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i}$.

Для наших условий: $20 = 2\cdot\frac{1-(1+0,085)^{\text{-n}}}{0,085}$.

Отсюда: n = 23,3 года.

Следовательно, второй вариант приза лучше, если предполагается ежегодные выплаты получать не менее 24 лет.

9. Фирма проводит замену оборудования (модернизацию) каждые 10 лет. Для этого фирма ежегодно выделяет 30 тыс. долл. и размещает их в банк под 8 % годовых. На какую сумму фирма обновляет оборудование?

Решение

Вычислим наращенную (накопленную) сумму ренты за n = 10 лет:

$$FVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{(1+i)^{\text{n}}-1}{i} = 30000 \cdot \frac{1,08^{10}-1}{0,08} = 469\,364,6 \text{ долл.}$$

10. Аннуитет, приносящий 16 тыс. долл. в месяц при 8 % годовых, стоит 85 тыс. долл. При каких условиях целесообразно купить такой аннуитет?

Решение

Имея соотношение:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i},$$

определим n:

$$85 = 16 \cdot \frac{1-1,08^{-n}}{0,08};$$

$$n = 12,5 \text{ года.}$$

Это означает, что аннуитет должен выплачиваться в течение не менее 13 лет, чтобы его стоимость превысила стоимость его приобретения.

11. Новый станок должен работать в течение 9 лет и обеспечивать ежегодную прибыль в размере 6300 долл. Какова текущая стоимость станка, если ставка составляет 11,4 % годовых? Какова чистая текущая стоимость операции от покупки станка за 30 000 долл.?

Решение

Нужно вычислить текущую стоимость ежегодных поступлений прибыли, производимых станком.

$$PVA^{post} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i} = 6300 \cdot \frac{1-1,114^{-9}}{0,114} = 34\,348 \text{ долл.}$$

Результат показывает, что приобретение станка целесообразно, если его цена не превышает 34 348 долл., и нецелесообразно, если его цена выше.

Текущая стоимость за вычетом стоимости приобретения станка называется **чистой текущей стоимостью (ЧТС)** операции.

ЧТС = 34 348 – 30 000 = 4348 долл.

12. Предположим, что другой поставщик, узнав, что завод приступил к переоборудованию (задача 11), предлагает станок, который работает 11 лет, ежегодно приносит 7500 долл. прибыли и стоит 41 000 долл. Следует ли заводу выбрать (предпочесть первому) второй станок?

Решение

Аналогично задаче 11 определим текущую стоимость второго станка:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 7500\cdot\frac{1-1{,}114^{-11}}{0{,}114} = 45\,725 \text{ долл.}$$

Тогда чистая текущая прибыль от второго станка составит 45 725 – 41 000 = 4725 долл.

Чистая текущая прибыль от второго станка больше, чем от первого станка. По этому критерию покупать второй станок предпочтительней.

13. Университету необходимо сократить затраты. Одним из путей является возможность сдавать часть помещений в аренду. Для сдачи в аренду потребуется понести определенные затраты на текущий ремонт помещений. Текущая процентная ставка составляет 15 % годовых.

Возможны следующие варианты аренды:

Вариант	Затраты на ремонт, долл.	Ежемесячные платежи за аренду, долл.	Срок аренды, лет
1	4500	2200	3
2	11 750	7300	2
3	5160	1925	4

Какой вариант аренды предпочтителен?

Решение

Определим текущую стоимость и чистую текущую стоимость вариантов аренды. Текущая стоимость аннуитета вычисляется в соответствии с соотношением:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Чистая текущая стоимость равна разности текущей стоимости и размера затрат на ремонт. Тогда имеем следующие сравнительные показатели:

Вариант	Затраты на ремонт, долл.	Текущая стоимость аренды	Чистая текущая стоимость
1	4500	5023,1	523,1
2	11 750	11 867,7	117,7
3	5160	5495,8	335,8

Первый вариант представляет наилучшие возможности для аренды. Он обеспечивает наибольшую чистую текущую стоимость при наименьшей текущей стоимости.

14. Контракт между фирмой и банком предусматривает, что банк предоставляет в течение 3 лет кредит фирме ежегодными платежами в размере 20 тыс. долл. в начале каждого года под ставку 40 % годовых. Фирма возвращает долг, выплачивая 75, 30, 50 тыс. руб. последовательно в конце 3, 4, 5 годов. Какова чистая современная приведенная величина *NPV* для банка?

Решение

$NPV = -20 - 20 \cdot 1/(1 + 0{,}4) - 20 \cdot 1/(1 +0{,}4)^2 + 75 \cdot 1/(1 + 0{,}4)^3 +$
$+ 30 \cdot 1/(1 + 0{,}4)^4 + 50 \cdot 1/(1 + 0{,}4)^5 = 0{,}1$ тыс. долл.

Так как $NPV > 0$, то эта операция является для банка приемлемой.

15. Выдана ссуда в 120 млн руб. на 30 лет под 9 % годовых. Должник обязан ежемесячно выплачивать равными долями долг вместе с процентами. Какова сумма ежемесячных выплат?

Решение

Сумма месячного платежа рассчитывается из условия:

$$PVA^{\text{post}} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1};$$

$$120 = PMT\,\frac{1-(1+0{,}09)^{-30}}{(1+0{,}09)^{1/12}-1}.$$

Отсюда:

$$PMT = \frac{120\cdot(1{,}09^{1/12}-1)}{1-1{,}09^{-30}} = 0{,}935 \text{ млн. руб.}$$

Тесты и тестовые задания к разделу 2

В заданиях, представленных в форме теста, необходимо выбрать правильный вариант ответа. Количество правильных ответов может быть больше одного.

1. *Поток платежей:*

A) это рост инвестированного капитала на величину процентов;

B) это распределенные во времени выплаты и поступления;

C) это перманентное обесценивание денег;

D) это платеж в конце периода.

2. *Вечная рента:*

A) это рента, подлежащая безусловной выплате;

B) это рента с выплатой в начале периода;

C) это рента с бесконечным числом членов;

D) это рента с неравными членами.

3. *Аннуитет:*

A) это частный случай потока платежей, когда члены потока только положительные величины;

B) это частный случай потока платежей, когда число равных временных интервалов ограничено;

C) это частный случай потока платежей, когда члены равны и имеют одинаковую направленность, а периоды ренты одинаковы.

4. *Наращенная величина годовой постоянной обычной ренты определяется по формуле:*

A) $FVA^{\text{post}} = PMT\,\dfrac{(1+i)^{\text{n}}-1}{i}$;

B) $FVA^{\text{post}} = PMT \cdot (1+i)^{\text{n}} - 1$;

C) $FVA^{\text{post}} = PMT\,\dfrac{1-(1+i)^{\text{-n}}}{i}$;

D) $FVA^{\text{post}} = PMT\,\dfrac{(1+j/m)^{\text{mn}}-1}{j/m}$.

5. *Современная величина годовой обычной ренты определяется по формуле:*

A) $PVA^{\text{post}} = PMT\,\dfrac{(1+i)^{\text{n}}-1}{i}$;

B) $PVA^{post} = PMT\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$;

C) $PVA^{\text{post}} = PMT\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

6. *Для определения члена ренты необходимо знать:*

A) наращенную сумму;

B) первоначальную сумму;

C) первоначальную и наращенную сумму;

D) только процентную ставку и срок ренты.

7. *Для оценки бессрочного аннуитета не имеет смысла определение:*

A) современной величины аннуитета;

B) наращенной величины аннуитета;

C) члена ренты.

8. *Нерегулярные потоки платежей характеризуются присутствием нерегулярного параметра:*

A) периода ренты;

B) размера платежа;

C) процентной ставки.

9. Ряд платежей, количество которых не ограничено:

A) это вечная рента;

B) это годовая рента;

C) это срочная рента.

10. *Под процентной ставкой понимают размер процента, устанавливаемый ________ по различным видам финансовых сделок. (Вставьте пропущенное слово.)*

A) банком;

B) правительством;

C) кредитором;

D) дебитором.

11. *Функция «будущая стоимость единицы» и функция «текущая стоимость единицы» являются:*

A) независимыми друг от друга;

B) обратными величинами по отношению друг к другу;

C) нет правильного ответа.

12. *Решите следующую задачу. Квартира стоимостью 200 тыс. долл. куплена в рассрочку. Рассчитать ежегодный взнос в погашение долга, если процентная ставка 10 %, а долг надо погасить за 7 лет равными частями.*

A) 41082; B) 21082; C) 55678.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вы решили купить автомобиль в рассрочку (оплата — 90 тыс. руб. ежемесячно в течение 2 лет). Определите сегодняшнюю ценность этой покупки, если банк начисляет 12 % годовых ежемесячно.

Ответ: 1 911 904,85 руб.

2. Вы заняли 2,5 млн руб. и возвращаете долг в течение 2,5 лет равными платежами. Каков будет месячный платеж при годовой процентной ставке 12 %?

Ответ: 96,15 тыс. руб.

3. На протяжении 25 лет создается резервный фонд. На поступающие в него средства начисляются сложные проценты по ставке 9,75 % годовых. В течение первых 10 лет в конце каждого года в фонд вносили по 10 тыс. долл., в течение последующих 10 лет — по 20 тыс. долл. в конце года, а в последние 5 лет – по 25 тыс. долл. в конце года. Чему будет равна сумма фонда через 25 лет?

Ответ: 1 289 110,7 долл.

4. На счет в банк, в течение 6 лет, в конце года поступает 15 тыс. долл. и начисляется 9,5 % годовых. Имеет смысл перейти к ежемесячным взносам в банк (в конце каждого месяца), если это приведет к 5 % увеличению суммы счета к концу шестого года. Целесообразно ли увеличение частоты взносов?

Ответ: нет.

5. Какую сумму нужно вносить на счет в банке под 8,5 % годовых, чтобы через 20 лет накопить 100 тыс. долл., если: а) взносы в конце каждого полугодия; б) взносы в конце каждого месяца?

Ответ: а) 2024,94 долл.; б) 1990,69 долл.

6. Некто, в возрасте 30 лет, решил создать фонд по дополнительной оплате к пенсии. Для этого было решено в течение 30 лет в конце каждого года вносить в банк по 500 долл. под 6 % годовых. Какую сумму можно будет снимать со счета ежемесячно, в конце каждого месяца, после достижения пенсионного возраста в 60 лет, чтобы на протяжении 20 лет полностью исчерпать накопленный фонд? На остаток средств в фонде начисляется 6 % годовых.

Ответ: 279,59 долл.

7. За какой срок можно накопить 100 тыс. долл., если в конце каждого квартала на счет вносится 15 тыс. долл. и на собранные средства начисляются проценты в конце каждого полугодия по ставке 8,75 % годовых?

Ответ: 1,5 года.

8. Какую сумму разовым платежом нужно положить в банк под 8 % годовых мужчине в возрасте 40 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста в 60 лет в течение 20 лет в начале каждого месяца снимать по 200 долл., если проценты капитализируются: а) в конце года; б) в конце каждого полугодия?

Ответ: а) 5272,02 долл.; б) 5061,95 долл.

9. Авиационная фирма может продать покупателю свою продукцию по одному из двух вариантов оплаты: а) через год выплачивается 20 млн долл., затем с интервалом через год еще 4 платежа по 30 млн долл.; б) через год выплачивается 30 млн долл., затем с интервалом в полгода 8 платежей по 10 млн долл. Какой из вариантов более приемлем для покупателя, если он имеет возможность разместить денежные средства в банке под 8 % годовых?

Ответ: вариант «б».

10. В аренду сдается оборудование стоимостью 1 млн долл. сроком на 4 года. Остаточная стоимость оборудования в конце аренды оценивается в 500 тыс. долл. На профилактический осмотр и ремонт арендодатель тратит дополнительно по 200 долл. в конце второго и третьего годов. Какую годовую арендную плату следует брать в конце каждого года, чтобы обеспечить норматив рентабельности в 15 % годовых?

Ответ: 250 231,71 долл.

11. Для того чтобы начать свое дело, вам необходимы собственные средства в сумме 15 000 долл. Уровень вашего текущего дохода позволяет вам откладывать на счет 800 долл. ежемесячно. Через какое время вы накопите нужную сумму, если банк выплачивает по вкладам 9 % годовых?

Ответ: 1,5 года.

12. Родители решили, что для обучения в университете их сыну будет достаточно иметь по 11 000 долл. в месяц. Определить, какую сумму им необходимо разместить в банке под 12 % годовых с ежемесячным начислением процентов, чтобы в течение 5 лет обучения их сын мог каждый месяц снимать со счета 11000 долл.

Ответ: 494 505,4 долл.

13. Какую сумму целесообразно заплатить инвестору за объект недвижимости, который можно эксплуатировать 5 лет? Объект в конце каждого года приносит доход по 350 тыс. руб. Требуемый доход на инвестиции — 20 %.

Ответ: 1 046 713,5 руб.

14. При покупке дома стоимостью 5 000 000 долл. предоставлена рассрочка на 9 лет. Определить ежегодные платежи при ставке 0,75 %.

Ответ: 576 596,5 долл.

15. Какую сумму в течение 10 лет необходимо откладывать в конце каждого года, чтобы купить дачу за 400 тыс. долл.? Банк выплачивает 20 % годовых.

16. Для создания погасительного фонда предприятие в течение 3 лет перечисляло в банк ежегодно 40 тыс. руб., на которые кредитное учреждение начисляло проценты из расчета 10 % годовых (дважды в год; сложные проценты). Равные взносы осуществляются каждое полугодие. Определите объем фонда к моменту окончания всех проплат.

17. За какой срок будет возвращен кредит в сумме 29 130 руб., взятый под 8 % годовых, если возврат осуществляется равными платежами по 2500 руб. в год?

18. Какая сумма должна быть инвестирована сегодня для накопления 500 тыс. долл. через 2 года при начислении процентов по ставке:

а) 16 % годовых в конце каждого квартала;

б) 14 % годовых в конце каждого полугодия?

19. Определите цену недвижимости на сегодняшний момент, если через 10 лет ее цена ориентировочно составит 1 000 000 долл., а ежегодно получаемая в течение 10 лет арендная плата равна 6 000 долл.

20. В течение 4 лет ожидаются поступления от реализации проекта в размере 1,3 млн руб. ежеквартально. Единовременные вложения в проект в начале первого года — 8 млн руб. Оцените соотношение доходов и расходов исходя из ставки 10 % годовых.

21. Гостиница в течение 4 лет будет приносить годовой доход в размере 120 тыс. руб., после чего ожидается его рост на 30 тыс. руб. Рассчитать текущую стоимость дохода за 7 лет, если ставка дисконтирования 9 %.

22. Рассчитайте суммарную текущую стоимость денежного потока, возникающего в конце года, если ставка дисконта равна 12 %.

Денежный поток:

первый год — 200 тыс. руб.;

второй год — 0;

третий год — 500 тыс. руб.;

четвертый год — 900 тыс. руб.

23. Рассчитайте текущую стоимость потока арендных платежей, возникающих в конце года, если годовой арендный платеж первые четыре года составляет 400 тыс. руб., затем он уменьшится на 150 тыс. руб. и сохранится в течение трех лет, после чего возрастет на 350 тыс. руб. и будет поступать еще два года. Ставка дисконта — 10 %.

24. Объект в течение восьми лет обеспечит в конце года поток арендных платежей по 280 тыс. руб. После получения последней арендной платы он будет продан за 11,5 млн руб. Расходы по продаже составят 500 тыс. руб. Рассчитайте совокупную текущую стоимость предстоящих поступлений денежных средств, если различия в уровне риска определяют выбранные аналитиком ставки дисконта для дохода от аренды и продажи: 10 % и 20 % соответственно.

25. Коттедж стоимостью 400 тыс. долл. куплен в рассрочку на 10 лет под 20 % годовых. Какова стоимость ежегодного равновеликого взноса при погашении долга?

Раздел 3
ФИНАНСОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ И КОНВЕРСИЯ ПЛАТЕЖЕЙ

3.1. Финансовая эквивалентность обязательств

На практике нередко возникают случаи, когда необходимо заменить одно денежное обязательство другим, например, с более отдаленным сроком платежа, объединить несколько платежей в один (консолидировать платежи) и т. п. Ясно, что такие изменения не могут быть произвольными. Неизбежно возникает вопрос о принципе, на котором должны базироваться изменения условий контрактов. Таким общепринятым принципом является ***финансовая эквивалентность обязательств.***

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи «приведенными» к одному моменту времени, оказываются равными.

Напомним, что приведение осуществляется путем *дисконтирования* (приведение к более ранней дате) или, наоборот, путем *наращения* суммы платежа (если эта дата относится к будущему). Если при изменении условий контракта принцип финансовой эквивалентности не соблюдается, то одна из участвующих сторон терпит ущерб, размер которого можно заранее определить.

По существу, принцип эквивалентности в наиболее простом проявлении следует из формул наращения и дисконтирования, связывающих величины PV и FV. Сумма PV эквивалентна FV при принятой процентной ставке и методе ее начисления. Две суммы денег FV_1 и FV_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные (или наращенные) величины, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковы. Замена FV_1 на FV_2 в этих условиях формально не изменяет отношения сторон.

На принципе эквивалентности основывается сравнение разновременных платежей. Покажем это на примере.

Пример 1. Имеются два обязательства. Условия первого: выплатить 400 тыс. руб. через 4 месяца; условия второго: выплатить 450 тыс. руб. через 8 месяцев. Можно ли считать их равноценными?

Дано:	Решение
$FV_1 = 400$ тыс. руб. $FV_2 = 450$ тыс. руб. $t_1 = 4$ мес. $t_2 = 8$ мес.	Так как платежи краткосрочные, то при дисконтировании на начало срока применим простую ставку, равную, допустим, 20 %. Получим:
Сравнить два обязательства.	$PV_1 = \dfrac{400}{1+4/12\cdot 0{,}2} = 375{,}00$ тыс. руб. $PV_2 = \dfrac{450}{1+8/12\cdot 0{,}2} = 397{,}06$ тыс. руб. Как видим, сравниваемые обязательства не являются эквивалентными при заданной ставке и в силу этого не могут адекватно заменять друг друга.

3.2. Консолидирование (объединение) задолженностей

Принцип финансовой эквивалентности платежей применяется при различных изменениях условий выплат денежных сумм: их объединении, изменении сроков (досрочном погашении задолженности или, наоборот, пролонгировании срока) и т. п. Общий метод решения подобного рода задач заключается в разработке так называемого ***уравнения эквивалентности***, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных обязательств приведение осуществляется обычно на основе простых ставок, для средне- и долгосрочных — с помощью сложных процентных ставок. Заметим, что в простых случаях часто можно обойтись без разработки и решения уравнения эквивалентности.

Одним из распространенных случаев изменения условий контрактов является ***консолидация*** (объединение) платежей. Пусть платежи S_1, S_2, …, S_m со сроками n_1, n_2, …, n_m заменяются одним в сумме S_0 и сроком n_0. В этом случае возможны две постановки задачи:

– если задается срок n_0, то находится сумма S_0;

– и наоборот, если задана сумма консолидированного платежа S_0, то определяется срок n_0.

Рассмотрим обе постановки задачи.

Определение размера консолидированного платежа

При решении этой задачи уравнение эквивалентности имеет простой вид. В общем случае, когда $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, искомую величину находим как сумму наращенных и дисконтированных платежей. Так, при применении простых процентных ставок получим:

$$S_0 = \sum_j S_j(1+t_j i) + \sum_k S_k(1+t_k i)^{-1}\ , \qquad (3.1)$$

где S_j — размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$; S_k — размеры платежей со сроками $n_k > n_0$, $t_j = n_0 - n_j$, $t_k = n_k - n_0$.

Пример 2. Два платежа в 1 млн руб. и 0,5 млн руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Пусть стороны согласились на применении при конверсии простой ставки, равной 20 %. Найти консолидированную сумму.

Дано:	Решение
$S_1 = 1$ млн руб. $S_2 = 0{,}5$ млн руб. $t_1 = 150$ дней $t_2 = 180$ дней $t = 200$ дней $i = 20$ %	Консолидированная сумма составит: $S_0 = 1000 \cdot (1 + \frac{200-150}{365} \cdot 0{,}2) +$ $+500 \cdot (1 + \frac{200-180}{365} \cdot 0{,}2) = 1532{,}87$ тыс. руб.
Определить: $S_0 = ?$	

Консолидацию платежей можно осуществить и на основе сложных процентных ставок:

$$S_0 = \sum_j S_j(1+i)^{t_j} + \sum_k S_k(1+i)^{-t_k}\ . \qquad (3.2)$$

Пример 3. Платежи в 1 млн руб. и 2 млн руб. со сроками уплаты через 2 и 3 года соответственно объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20 %.

Дано:	Решение
$S_1 = 1$ млн руб. $S_2 = 2$ млн руб. $t_1 = 2$ года $t_2 = 3$ года $t = 2{,}5$ года $i = 20$ %	Консолидированная сумма составит: $S_0 = 1000 \cdot 1{,}2^{0,5} + 2000 \cdot 1{,}2^{-0,5} =$ 2921,187 тыс. руб.
Определить: $S_0 = ?$	

Определение срока консолидированного платежа

Если при объединении платежей задана величина консолидированного платежа S_0, то возникает проблема определениия его срока n_0. В этом случае уравнение эквивалентности удобно представить в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей.

При применении простой ставки это равенство имеет вид:

$$S_0(1+n_0 i)^{-1} = \sum S_j (1+n_j i)^{-1},$$

откуда

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum\limits_j S_j (1+n_j i)^{-1}} - 1\right). \qquad (3.3)$$

Пример 4. Суммы в размере 10, 20 и 15 млн руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом в 50 млн руб. Определить срок нового платежа.

<table>
<tr><td>Дано:
S_1 = 10 млн руб.
S_2 = 20 млн руб.
S_3 = 15 млн руб.
S_0 = 50 млн руб.
t_1 = 50 дней
t_2 = 80 дней
t_3 = 150 дней
i = 10 %</td><td>Решение
Современная стоимость заменяемых платежей (обозначим эту величину через PV) при условии, что i = 10 % и Y = 365, составит:
$PV = 10\cdot(1+\frac{50}{365}\cdot 0{,}1)^{-1} + 20\cdot(1+\frac{80}{365}\cdot 0{,}1)^{-1} +$
$+15\cdot(1+\frac{150}{365}\cdot 0{,}1)^{-1} = 43{,}844$ млн. руб.</td></tr>
<tr><td>Определить:
n_0 = ?</td><td>Согласно (3.3) находим:
$n_0 = \frac{1}{0{,}1}\cdot(\frac{50}{43{,}844} - 1) = 1{,}404$ года, или 512 дней.
Продолжим пример. Пусть теперь размер заменяющего платежа задан в сумме 45 млн руб. Тогда срок заметно сократится и станет равным 0,264 года, или 96 дням.</td></tr>
</table>

Перейдем к определению срока консолидированного платежа на основе сложных процентных ставок. Уравнение эквивалентности запишем следующим образом:

$$S_0(1+i)^{-n_0} = \sum_j S_j (1+i)^{-n_j}.$$

Для упрощения дальнейшей записи примем:

$$Q = \sum_{j} S_{j}(1+i)^{-n_j}.$$

После чего находим:

$$n_0 = \frac{\ln(\frac{S_0}{Q})}{\ln(1+i)}. \qquad (3.4)$$

Пример 5. Платежи в 1 млн руб. и 2 млн руб. со сроками уплаты через 2 и 3 года соответственно объединяются в один платеж в сумме 3 млн руб. При консолидации используется сложная ставка 20 %. Определить срок нового платежа.

Дано:	Решение
$S_1 = 1$ млн руб. $S_2 = 2$ млн руб. $t_1 = 2$ года $t_2 = 3$ года $i = 20$ %	Сначала рассчитаем Q: $Q = 1 \cdot 1{,}2^{-2} + 2 \cdot 1{,}2^{-3} = 1{,}8518$. После этого находим: $n_0 = \frac{\ln(\frac{3}{1{,}8518})}{\ln 1{,}2} = 1{,}646$ года.
Определить: $n_0 = ?$	

3.3. Общая постановка задачи изменения условий контракта

Обсудим теперь общие случаи изменения условий выплат, предусматриваемых в контрактах, для которых решение нельзя получить простым суммированием приведенных на некоторую дату платежей. Разумеется, и в таких случаях решение основывается на принципе эквивалентности платежей до и после изменения условий. Метод решения заключается в разработке соответствующего уравнения эквивалентности. Если приведение платежей осуществляется на некоторую начальную дату, то получим следующие уравнения эквивалентности в общем виде:

$\sum_{j} S_{j}(1+n_{j}i)^{-1} = \sum_{k} S_{k}(1+n_{k}i)^{-1}$ — при использовании простых процентов;

$$\sum_j S_j v^{n_j} = \sum_k S_k v^{n_k}$$ — при использовании сложных процентов.

Здесь S_j и n_j — параметры заменяемых платежей, S_k и n_k — параметры заменяющих платежей; v^n — коэффициент дисконтирования.

Конкретный вид уравнения определяется содержанием контрактов, поэтому методику разработки уравнений эквивалентности рассмотрим на трех примерах. В двух первых для дисконтирования применяются простые ставки, в последнем — сложные.

Пример 6. Две суммы в 10 млн руб. и 5 млн руб. должны быть выплачены 1 ноября и 1 января следующего года соответственно. Стороны согласились пересмотреть порядок выплат: должник 1 декабря выплачивает 6 млн руб. Остаток долга гасится 1 марта. Необходимо найти сумму остатка при условии, что пересчет осуществляется по ставке простых процентов, равной 20 % ($Y = 365$).

Решение

Графическое изображение условия задачи показано на рис. 3.1.

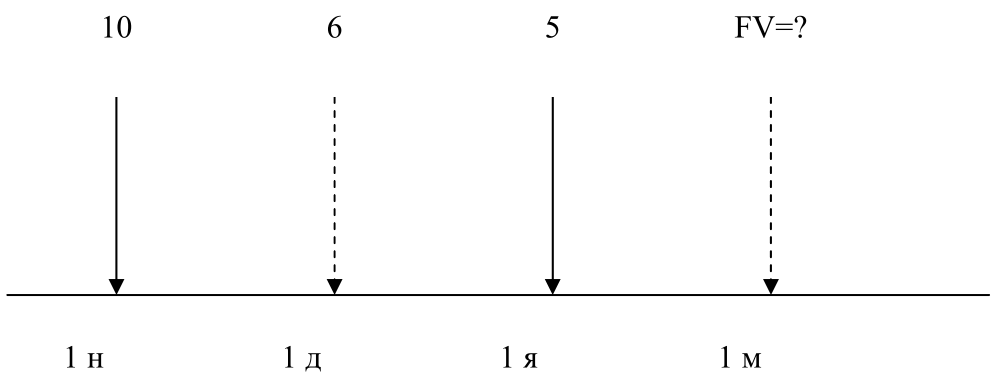


Рис. 3.1. Схема потоков платежей

Возьмем за базовую дату, допустим, момент выплаты 5 млн руб. Уравнение эквивалентности в этом случае выглядит следующим образом:

$$10 \cdot (1 + \frac{61}{365} \cdot 0,2) + 5 = 6 \cdot (1 + \frac{31}{365} \cdot 0,2) + FV(1 + \frac{59}{365} \cdot 0,2)^{-1}.$$

Находим $FV = 9{,}531$ млн руб.

Заметим, что изменение базовых дат приводит к некоторым, впрочем незначительным, смещениям результатов. Например, при приведении платежей к 1 марта получим следующее уравнение эквивалентности:

$$10\cdot(1+\frac{120}{365}\cdot 0{,}2)+5\cdot(1+\frac{59}{365}\cdot 0{,}2)=6\cdot(1+\frac{90}{365}\cdot 0{,}2)+FV\ .$$

Теперь FV = 9,523 млн руб.

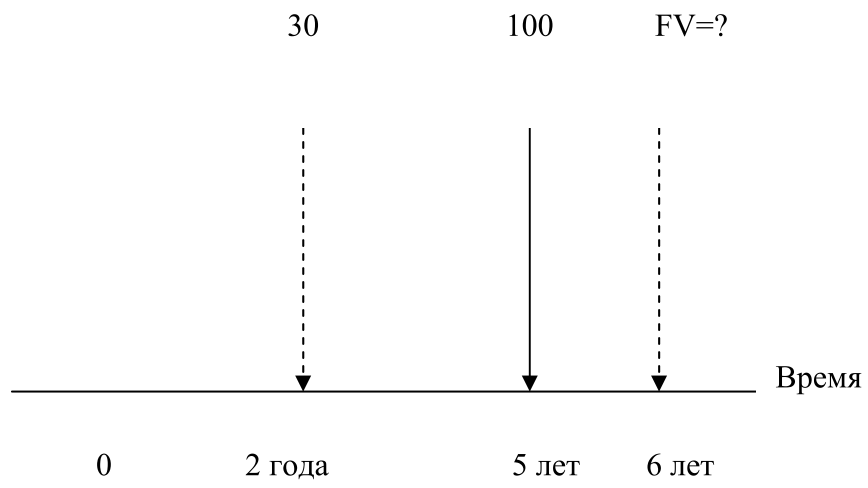
Пример 7. Имеется обязательство уплатить 10 млн руб. через 4 месяца и 7 млн руб. через 8 месяцев после некоторой даты. По новому обязательству необходимо выплату произвести равными суммами через 3 и 9 месяцев. Изменение условий осуществляется с использованием простой ставки, равной 10 % (Y = 360). Определить сумму выплат по новому обязательству.

Дано:	Решение
S_1 = 10 млн руб. S_2 = 7 млн руб. t_1 = 4 мес. t_2 = 8 мес. t_3 = 3 мес. t_4 = 9 мес. i = 10 %	Примем в качестве базовой даты начало отсчета времени. Уравнение эквивалентности в этом случае записывается следующим образом: $10\cdot(1 + 4/12\cdot 0{,}1)^{-1} + 7\cdot(1 + 8/12\cdot 0{,}1)^{-1} =$ $= FV(1 + 3/12\cdot 0{,}1)^{1} + FV(1 + 9/12\cdot 0{,}1)^{-1}$ Следовательно, FV = 8,521 млн руб.
Определить: FV = ?	

Пример 8. Существует обязательство уплатить 100 тыс. долл. через 5 лет. Стороны согласились изменить условия погашения долга следующим образом: через 2 года выплачивается 30 тыс. долл., а оставшийся долг — спустя 4 года после первой выплаты. Необходимо определить сумму последнего платежа.

Решение

Проиллюстрируем условие задачи графически.



Уравнение эквивалентности составим на начало отсчета времени:

$$100v^5 = 30v^2 + FVv^6,$$

где v — дисконтный множитель: $v = (1 + i)^{-n}$.

Аналогичное по смыслу равенство можно составить на любую дату, например, на конец шестого года. В этом случае:

$$100\cdot(1 + i) = 30\cdot(1 + i)^4 + FV.$$

Данное уравнение легко получить из предыдущего, умножив его на $(1 + i)^6$.

При решении любого из приведенных уравнений относительно FV находим (при условии, что ставка равна 10 % годовых) $FV = 133{,}233$ тыс. долл. Выбор базовой даты при применении сложных процентов не влияет на результаты расчетов по замене платежей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Четыре платежа: 10,5 тыс. долл., 12 тыс. долл., 8,4 тыс. долл. и 7,25 тыс. долл. со сроками оплаты соответственно 3.03; 8.04; 17.06; 13.09 (год не високосный) решено заменить одним платежом, выплачиваемым 15.08. При такой замене стороны согласились использовать годовую ставку простых процентов — 6,5 %. В качестве базовой даты можно выбрать любую из дат оплаты платежей. Какую базовую дату следует выбрать, чтобы консолидированный платеж: а) был минимальным; б) был максимальным? Определите величину консолидированного платежа для каждого из вариантов.

Ответ: а) 13.09; 38,78175 тыс. долл.; б) 17.06; 3878925 тыс. долл.

2. Платежи в сумме 8,25 тыс. долл., 10,05 тыс. долл. и 25,45 тыс. долл. со сроками оплаты соответственно через 2; 3,5 и 4 года решили заменить одним платежом в сумме S, выплачиваемым через 4,5 года. Подобная замена производится по сложной ставке 8,75 % годовых. Чему равна сумма S? Зависит ли сумма S от базовой даты?

Ответ: 47,6443 тыс. долл.; не зависит.

3. Платежи из предыдущей задачи решили заменить одним платежом в размере 44 тыс. долл. на основе сложной ставки 8,75 % годовых. Через сколько лет должен быть оплачен этот консолидированный платеж?

Ответ: 3,55 года.

4. По финансовому обязательству необходимо оплатить 120 тыс. долл. через 4,5 года. На основе сложной ставки процентов 9,5 годовых решено изменить порядок оплат: задолженность погашается тремя равными частями S_0 через год, два и три года. Чему равно S_0?

Ответ: 31,79312 тыс. долл.

5. Задолженность в 1 млн долл. планируется погасить следующим образом: в течение 3 лет в конце года выплачивается по 2 тыс. долл., а остальной долг гасится равными суммами S_0 в конце пятого и седьмого годов. На остаток долга начисляется 7,5 % годовых. Чему равно значение S_0?

Ответ: 765,63431 тыс. долл.

6. Два платежа в 100 тыс. руб. и 150 тыс. руб. со сроками 12.02 и 15.03 соответственно решили заменить одним платежом со сроком 5.04. Стороны договорились на замену платежей при ставке 50 % годовых. Найти величину консолидированного платежа (использовать точное определение числа дней).

Ответ: 261,438 тыс. руб.

7. Три платежа в 100 тыс. руб., 150 тыс. руб. и 200 тыс. руб. со сроками 15.05, 15.06 и 15.08 соответственно заменяются на один со сроком на 1.08. Найти величину консолидированного платежа, если используются простые проценты при ставке 80 % (использовать точное определение числа дней).

Ответ: 476,594 тыс. руб.

8. Платежи в 10 тыс. долл., 20 тыс. долл. и 15 тыс. долл. со сроками 15.05, 15.06 и 15.08 соответственно заменяются одним в размере 46 тыс. долл. Найти дату этого платежа, если ставка равна 8 % годовых (использовать точное определение числа дней, год невисокосный).

Ответ: 285 дней, 12.10.

9. Задолженность в сумме 800 тыс. долл. гасится платежами в конце каждого года на протяжении 7 лет. Первые 4 года выплачивается по 100 тыс. долл. Какие годовые выплаты должны производиться в последние 3 года, чтобы долг был полностью погашен, если на остаток долга начисляется 6 % годовых?

Ответ: 214,18534 тыс. долл.

10. Фонд в сумме 1 млн долл. должен быть создан за 10 лет. Первые 5 лет в фонд в конце каждого года вносится по 60 тыс. долл., на поступающие средства начисляется 10 % годовых. Последние 5 лет в фонд в конце каждого года вносится по 61 тыс. долл. и в этот период на денежные суммы начисляется 11 % годовых. Какую суму нужно внести в фонд в конце десятого года, чтобы в фонде была накоплена намеченная сумма?

Ответ: 63,8572 тыс. долл.

11. Задолженность в сумме 800 тыс. долл. гасится в течение 8 лет. На остаток задолженности в течение первых 4 лет начисляется 10 % годовых. Годовые выплаты в конце года в этот период составляют по 100 тыс. долл. В последние 4 года на остаток задолженности начисляется 11 % годовых, а задолженность гасится в конце каждого года выплатами по 110 тыс. долл. Остаток непогашенной задолженности возвращается в конце восьмого года. Какую сумму нужно уплатить по погашению задолженности в конце восьмого года?

Ответ: 665 478,62 долл.

12. Сумма 100 млн руб. взята в долг под 5 % годовых на 5 лет с ежегодной капитализацией. Стороны согласились пересмотреть соглашение. Обязательство будет погашено по схеме: через 2 года будет выплачено 30 млн руб., остальной долг гасится еще через 4 года. Найти сумму окончательного платежа.

Ответ: 97,544 млн руб.

13. Платежи в 1 млн руб. и 2 млн руб. со сроками уплаты через 2 года и через 3 года заменяются одним в сумме 3 млн руб. Определить срок этого платежа при ставке сложных процентов 20 % годовых.

Ответ: 2,65 года.

14. Какие из этих платежей эквивалентны:

а) уплатить 200 700 руб. 07.01.2007 г.;

б) уплатить 250 000 руб. 17.01.2007 г.;

в) уплатить 251 008 руб. 07.02.2007 г.;

г) уплатить 252 123 руб. 17.02.2007 г.

Используйте в расчетах ставку 10 % годовых.

15. Организация имеет обязательство к одному и тому же кредитору: уплатить 20.02 — 162 тыс. руб., 14.06 — 16 тыс. руб. и 15.07 — 284 тыс. руб. Принято решение о замене платежей: 20.09 уплатить 200 тыс. руб., остальные — 20.10. Определите сумму к погашению 20 октября исходя из 40 % годовых.

Раздел 4
КРЕДИТНЫЕ РАСЧЕТЫ. ПОГАШЕНИЕ КРЕДИТА (ССУДЫ)

4.1. Погашение потребительского кредита

Потребительский кредит служит для кредитования населения с целью стимулирования спроса на товары. Предоставляют его банки и предприятия. При расчете платежей при погашении потребительского кредита обычно используется схема простых процентов.

Схема 1. В потребительском кредите проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита (т. е. имеем разовое начисление процентов). Погашение долга с процентами производится частями на протяжении всего срока кредита.

Пусть PV — сумма кредита, выданного на T лет под i % годовых, m — число платежей в году (обычно $m = 12$).

Схема платежей основана на следующих рассуждениях: через T лет сумма долга с начисленными процентами составит величину:

$$FV = PV(1+Ti).$$

За T лет платежи будут сделаны mT раз. Величина разового погасительного платежа составит:

$$PV_{\text{ед}} = \frac{FV}{mT} = \frac{PV(1+Ti)}{mT}.$$

Пример 1. Телевизор ценой 600 тыс. руб. продается в кредит на 2 года под 10 % годовых (простые проценты). Погасительные платежи вносятся через каждый квартал. Определить размер разового погасительного платежа.

Дано:	Решение
$T = 2$ года $i = 10$ % $PV = 600$ тыс. руб. $m = 4$	Сумма, подлежащая погашению за весь срок кредита: $FV = 600 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}1) = 720$ тыс. руб.
Определить: $PV_{ед} = ?$	Разовый квартальный платеж: $PV_{ед} = \dfrac{720}{4 \cdot 2} = 90$ тыс. руб.

Данная схема достаточно жесткая по отношению к заемщику, т. к. в ней процентные начисления делаются на весь срок T и на всю сумму кредита PV. Но каждая выплата уменьшает сумму долга, и начисления должны бы делаться на меньшие суммы, а это должно привести к меньшей сумме разового платежа.

Схема 2. Пусть: PV — величина кредита, i — ставка простых процентов, T — срок кредита (в годах), m — число платежей в году, $l = mT$ — полное число платежей, $PV/l = PV/(mT)$ — величина платежа за этап в счет погашения суммы основного долга.

Процентные выплаты за этапы начисляются по правилу:

$I_1 = PV\dfrac{i}{m}$ — процентный платеж за 1-й период (месяц), начисленный на всю сумму долга PV;

$I_2 = (PV - \dfrac{PV}{l})\dfrac{i}{m} = PV\dfrac{i}{m}(1 - \dfrac{1}{l})$ — процентный платеж за 2-й период, начисленный на оставшуюся сумму долга;

$I_3 = (PV - 2\dfrac{PV}{l})\dfrac{i}{m} = PV\dfrac{i}{m}(1 - \dfrac{2}{l})$ — процентный платеж за 3-й период;

…

$I_к = PV\dfrac{i}{m}(1 - \dfrac{к-1}{l})$.

За последний этап $к = l$ величина процентного платежа будет:

$$I_1 = PV\frac{i}{m}\frac{1}{l}.$$

Общая величина процентных платежей:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_l = \frac{PVi}{m}(1 + (1 - \frac{1}{l}) + (1 - \frac{2}{l}) + \ldots + (1 - \frac{к-1}{l}) + \ldots + \frac{1}{l}).$$

Во внешних скобках стоит сумма первых l членов арифметической прогрессии, первый член которой $a_1 = 1$, последний — $a_l = 1/l$.

Учитывая, что сумма равна $S = \frac{a_1 + a_l}{2} l$, получаем:

$$I = PV \cdot i / m \cdot l / 2 \cdot (1 + 1/l) = PV \cdot imT / 2m \cdot (1 + 1/mT) = PV \cdot iT / 2 \cdot (1 + 1/mT).$$

Для суммы одного платежа получаем:

$$PV_{\text{ед}} = \left(PV + I\right) / mT.$$

Пример 2. Потребительский кредит на сумму 1,2 млн руб. предоставлен на 6 месяцев под 12 % годовых. Необходимо найти величину месячного платежа.

Решение

Воспользуемся вначале *схемой 1*:

$$PV_{\text{ед}} = 1{,}2 \cdot (1 + 0{,}12 \cdot 0{,}5) / 12 \cdot 0{,}5 = 0{,}212 \text{ млн. руб.}$$

Ежемесячные выплаты составляют 212 тыс. руб.

Воспользуемся *схемой 2*.

Найдем по выведенным формулам величину месячного платежа.

$$I = PV \cdot iT / 2 \cdot (1 + 1/mT) = 1200 \cdot \left(0{,}12 \cdot 0{,}5 / 2\right) \cdot (1 + 1/12 \cdot 0{,}5) = 42 \text{ тыс. руб.}$$

$$PV_{\text{ед}} = \left(1200 + 42\right) / 12 \cdot 0{,}5 = 207 \text{ тыс. руб.}$$

Построим ***план погашения кредита (амортизационный план)***.

Месячная выплата основного долга PV/l = 1200 / (12 · 0,5) = = 200 тыс. руб.

Месячный взнос представляет собой сумму месячной выплаты основного долга и процентного платежа за данный месяц. Находим процентные платежи по месяцам:

$$I_1 = 1200 \cdot 0{,}12 / 12 = 12 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_2 = 1200 \cdot 0{,}12 / 12 \cdot (1 - 1/6) = 10 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_3 = 1200 \cdot 0{,}12 / 12 \cdot (1 - 2/6) = 8 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_4 = 1200 \cdot 0{,}12 / 12 \cdot (1 - 3/6) = 6 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_5 = 1200 \cdot 0{,}12 / 12 \cdot (1 - 4/6) = 4 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_6 = 1200 \cdot 0{,}12 / 12 \cdot (1 - 5/6) = 2 \text{ тыс. руб.}$$

Месячные взносы:

за первый месяц:	200 + 12 = 212 тыс. руб.;
за второй месяц:	200 + 10 = 210 тыс. руб.;
за третий месяц:	200 + 8 = 208 тыс. руб.;
за четвертый месяц:	200 + 6 = 206 тыс. руб.;
за пятый месяц:	200 + 4 = 204 тыс. руб.;
за шестой месяц:	200 + 2 = 202 тыс. руб.

Общая величина процентных платежей:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 42 \text{ тыс. руб.}$$

Величина месячного (одинакового) платежа $PV_{\text{ед}} = \dfrac{PV + I}{l} = 207$ тыс. руб., что меньше, чем по схеме 1.

4.2. Погашение задолженности частями

Рассмотренный выше потребительский кредит — пример ссуды, которая погашается по частям. С помощью частичных платежей погашаются краткосрочные обязательства, а термин «краткосрочные» здесь означает, что на долг начисляются простые проценты.

Контур финансовой операции. Необходимым условием финансовой или кредитной операции в любой ее форме является сбалансированность вложений и отдачи. Пусть выдана ссуда на срок n в размере PV. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся, допустим, два платежа R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается остаток задолженности в сумме R_3 (для нас не имеет значения, какая часть этой суммы идет на выплату процентов, а какая — на погашение долга). Понятие сбалансированности удобно пояснить на графике в виде изображенного на рис. 4.1 контура операции.

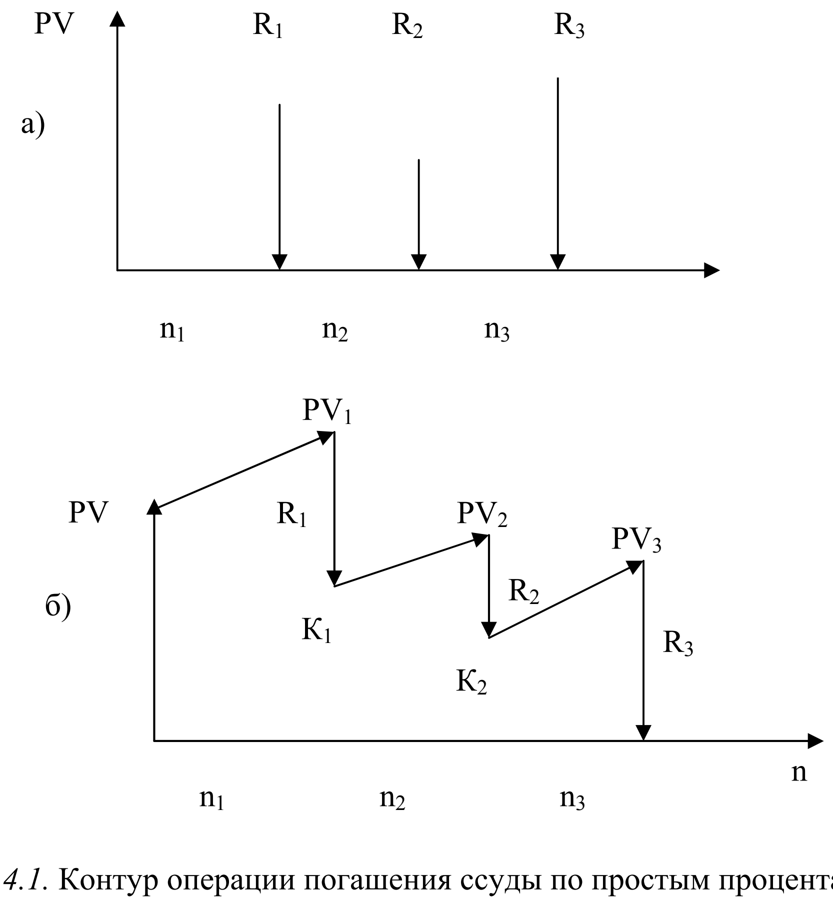


Рис. 4.1. Контур операции погашения ссуды по простым процентам

Очевидно, что на интервале n_1 задолженность возрастает (в силу начисления процентов) до величины PV_1. В конце этого периода выплачивается в счет погашения задолженности сумма R_1. Долг уменьшается до величины K_1 и т. д. Заканчивается операция получением кредитором в окончательный расчет суммы R_3. В этот момент задолженность должна быть равна нулю. Назовем такой график контуром операции (б).

Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур. Иначе говоря, последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. В этом случае совокупность платежей точно соответствует условиям сделки.

Частичные платежи. При последовательности частичных платежей надо решить вопросы:

- какую сумму следует брать за базу для расчета процентов;
- каким путем определять остаток задолженности.

Существуют два метода решения этой задачи. Первый, который применяется в основном в операциях со сроком более года, называют ***актуарным методом.*** Второй метод назван ***правилом торговца***. Он используется коммерческими фирмами в сделках со сроком не более года. Если иное не оговорено, то при начислении процентов в обоих методах используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней (360 / 360).

Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на *фактические суммы долга*. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница (остаток) идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т. д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Поступление приплюсовывается к следующему платежу. Для случая, показанного на приведенном выше графике, получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности (K_j):

$$K_1 = PV(1 + n_1 i) - R_1;$$

$$K_2 = K_1(1 + n_2 i) - R_2$$

Задолженность на конец срока должна быть полностью погашена. Таким образом,

$$K_2(1 + n_3 i) - R_3 = 0$$

Пример 3. Имеется обязательство погасить за 1,5 года (с 12.03.2005 по 12.09.2006 г.) долг в сумме 15 млн руб. Кредитор согласен получать частичные платежи. Проценты начисляются по ставке 20 % годовых. Частичные поступления характеризуются следующими данными (в тыс. руб.):

12.06.2005	500
12.06.2006	5000
30.06.2006	8000
12.09.2006	?

Решение

Решение представим в следующей последовательности шагов:

12.03.2005	долг	15 000
12.06.2005	долг с процентами	15 750
	поступление	–500

(Поскольку поступившая сумма 500 меньше начисленных процентов 750, то она присоединяется к следующему поступлению.)

12.06.2006	долг с процентами	18750 (15750+3000)
	поступления 500+5000	–5500
Остаток долга		13250
30.06.2006	долг с процентами	13382,5
	поступления 8000	–8000
Остаток долга		5382,5
12.09.2006	долг с процентами	5597,8

Контур данной операции представлен на рис. 4.2.

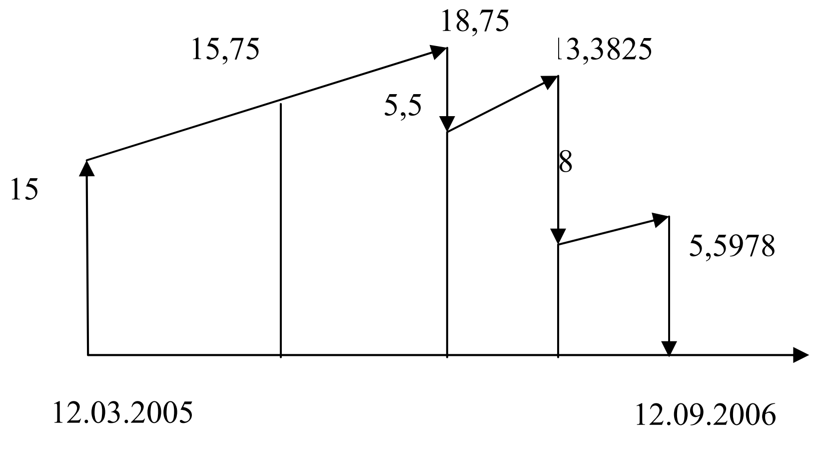


Рис. 4.2. Контур финансовой операции

Иной подход предусматривается ***правилом торговца.*** Здесь возможны два варианта. Если срок ссуды не превышает год, то сумма долга с процентами, начисленными за все время предоставления кредита, остается неизменной до полного погашения. В свою очередь накапливаются частичные платежи с начисленными на них до конца срока процентами. Последний взнос должен быть равен разности этих сумм. В случае, когда срок превышает год, указанные выше расчеты делаются для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

Алгоритм можно записать следующим образом:

$$Q = FV - K = PV(1 + ni) - \Sigma R_j(1 + n_j i_j)\ ,$$

где Q — остаток долга на конец срока или года, FV — наращенная сумма долга, K — наращенная сумма платежей, R_j — сумма частичного платежа, n — общий период ссуды, n_j — интервал времени от момента платежа до конца срока ссуды или года.

Заметим, что для одних и тех же данных актуарный метод и правило торговца в общем случае дают разные результаты. Остаток задолженности по первому методу немного выше, чем по второму.

Пример 4. Обязательство в 1,5 млн руб., датированное 10.08.2005 г., должно быть погашено 10.06.2006 г. Ссуда выдана под 20 % годовых. В счет погашения долга 10.12.1999 г. поступило 800 тыс. руб. Рассчитать остаток долга, используя правило торговца.

Решение

Остаток долга на конец срока согласно предыдущей формуле составит:

$$Q = 1{,}5 \cdot \left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}2\right) - 0{,}8 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}2\right) = 0{,}87 \text{ млн. руб.}$$

В свою очередь, при применении актуарного метода получим:

$$Q = \left[1{,}5 \cdot \left(1 + \frac{4}{12} \cdot 0{,}2\right) - 0{,}8\right] \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}2\right) = 0{,}88 \text{ млн. руб.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Потребительский кредит на сумму 60 млн руб. открыт на 2 года по ставке 40 % годовых. Погашение кредита должно осуществляться равными взносами. Определить сумму процентных платежей, погашаемую сумму и размер взносов, если погашение кредита будет осуществляться ежеквартально.

Ответ: 27 млн руб., 87 млн руб., 10 875 000 руб.

2. Потребительский кредит на сумму 60 млн руб. открыт на 2 года по ставке 40 % годовых. Погашение кредита должно осуществляться равными взносами. Определить начисленные проценты и размер взносов, если погашение кредита будет осуществляться ежеквартально.

Ответ: 27 млн, 10,875 млн руб.

3. Кредит 2 тыс. долл. выдан на 2 года под 9 % годовых с условием ежемесячной выплаты долга одинаковыми платежами. Найти сумму месячного платежа заемщика и сумму начисленных процентов.

Ответ: 91 долл., 184 долл.

4. Потребительский кредит на сумму 4 млн руб. предоставлен на 9 месяцев под 14 % годовых. Найти величину месячного платежа, пользуясь схемой 1.

Ответ: 491 тыс. руб.

5. Долг в сумме 200 тыс. долл. должен быть погашен через 5 лет равными выплатами в конце каждого полугодия. На остаток долга начисляется 9,5 % годовых. Определить величину разовой уплаты по погашению долга.

Ответ: 25 452,85 долл.

6. Кредит в сумме 120 тыс. долл. выдан 10.01 по 16.09 включительно, под 10,5 % годовых (обыкновенные проценты). В счет погашения долга 21.05 уплачено 80 тыс. долл. Какую сумму нужно вернуть 16.09?

Указание: использовать правило *торговца,* т. е. сумму в 80 тыс. долл. «вывести» на дату 16.09.

Ответ: 45 961,67 руб.

7. На пять лет под 8,5 сложных годовых процентов выдана ссуда в 1000 долл. В счет погашения долга в конце второго года внесено 1100 долл., которые пошли на уплату процентов, накопленных к этому сроку, а остальная сумма — на погашение основного долга, т. е.

использовался *актуарный метод* погашения задолженности. Какую сумму следует уплатить в конце пятого года, чтобы полностью погасить задолженность?

Ответ: 98,64 долл.

8. Долг в сумме 700 тыс. долл. гасится равными платежами в конце каждого года на протяжении 4 лет, затем гасится также равными платежами, но возросшими на 30 % по сравнению с первым периодом, в течение последующих 3 лет в конце каждого года. На остаток задолженности начисляется 9,25 % годовых. Чему равна величина годового платежа по погашению долга в первом периоде?

Ответ: 126 772,41 долл.

9. Кредит в размере 50 млн руб., выданный по ставке 80 % годовых, должен погашаться равными суммами в течение 5 лет. Определить размеры ежегодных уплат и сумму выплаченных процентов, если погасительные платежи осуществляются по полугодиям.

10. Потребительский кредит в 60 млн руб. открыт на 2 года по ставке 40 % годовых. Погашение кредита (основного долга) должно осуществляться равными взносами. Определить погашаемую сумму и размер взносов, если погашение кредита будет осуществляться ежемесячно.

11. Составить схему погашения кредита, выданного банком «Беларусбанк» (для двух случаев). Условия кредитования приведены в следующей таблице:

сумма кредита (млн руб.)	10
годовая процентная ставка	14 %
срок кредитования (в годах)	2
выплаты:	1) ежемесячные; 2) ежеквартальные

12. Долг в сумме 10 млн руб. необходимо погасить последовательными равными суммами за 5 лет годовыми платежами постнумерандо. За заем выплачиваются проценты по ставке 10 % годовых. Составить план погашения задолженности.

13. Сбербанк Российской Федерации предоставляет кредит размером 120 тыс. долл. на 12 месяцев под 30 % годовых. Долг погашается ежемесячно равными частями, проценты начисляются на остаток долга и выплачиваются ежемесячно. Составьте план погашения кредита.

14. Кредит в размере 50 млн руб., выданный по ставке 80 % годовых, должен погашаться равными суммами в течение 5 лет. Определить размеры погасительных ежегодных взносов и сумму выплаченных процентов, если погасительные платежи осуществляются один раз в конце года (составить план погашения кредита).

15. Банк выдал кредит 10 млн руб. на 3 года по сложной годовой ставке 60 % с погашением единовременным платежом. Определить погашаемую сумму и сумму начисленных процентов.

16. Банк выдает долгосрочные кредиты по сложной ставке 45 % годовых. Определить, на какой срок можно взять кредит 100 млн руб., если его предполагается погасить единовременным платежом в размере 200 млн руб.?

Литература

1. *Аванесов, Э.Т.* Инвестиционный анализ / Э.Т. Аванесов, М.М. Ковалев, В.Г. Руденко. Минск: БГУ, 2002.
2. *Башарин, Г.П.* Начала финансовой математики / Г.П. Башарин. М.: ИНФРА-М, 1997.
3. *Грязнова, А.Г.* Оценка стоимости предприятия (бизнеса) / А.Г. Грязнова [и др.]. М.: ИНТЕРРЕКЛАМА, 2003.
4. *Гукова, А.В.* Оценка бизнеса для менеджеров: учеб. пособие / А.В. Гукова, И.Д. Аникина. М.: Омега-Л, 2006.
5. *Есипов, В.Е.* Оценка бизнеса / В.Е. Есипов, Г.А. Маховникова, В.В. Терехова. 2-е изд. СПб.: Питер, 2006.
6. *Есипов, В.Е.* Тесты и задачи по оценочной деятельности / В.Е. Есипов, Г.А. Маховникова, В.В. Терехова. СПб: Питер, 2002.
7. *Кирлица, В.П.* Финансовая математика: рук. к решению задач: учеб. пособие / В.П. Кирлица. Минск: ТетраСистемс, 2005.
8. *Ковалев, В.В.* Сборник задач по финансовому анализу / В.В. Ковалев. М.: Финансы и статистика, 1999.
9. *Коптева, Н.В.* Финансовая математика: учеб. пособие / Н.В. Коптева, С.П. Семенов [Электронный ресурс]. 2003. Режим доступа: http://irbis.asu.ru/mmc/econ/u finmath. Дата доступа: 25.04.2008.
10. *Кочетыгов, А.А.* Финансовая математика / А.А. Кочетыгов. Ростов н/Д: Феникс, 2004. Серия «Учебники, учебные пособия».
11. *Кочович, Е.М.* Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов / Е.М. Кочович. М.: Финансы и статистика, 1994.
12. *Медведев, Г.А.* Начальный курс финансовой математики: учеб. пособие / Г.А. Медведев. М.: Остожье, 2000.
13. *Мелкумов, Я.С.* Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям / Я.С. Мелкумов. М.: ИНФРА-М, 1996.
14. *Риполь-Сарагоси, Ф.Б.* Основы оценочной деятельности: учеб. пособие / Ф.Б. Риполь-Сарагоси. М.: ПРИОР, 2001.
15. *Салин, В.Н.* Техника финансово-экономических расчетов: учеб. пособие / В.Н. Салин, О.Ю. Ситникова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 2002.
16. *Черкасов, В.Е.* Практическое руководство по финансово-экономическим расчетам / В.Е. Черкасов. М.: Метаинформ, 1995.
17. *Четыркин, Е.М.* Финансовая математика: учебник / Е.М. Четыркин. М.: Дело, 2007.

Приложение 1

Порядковые номера дат в году

Дни	Месяцы											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	23	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	39	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

Приложение 2

Таблицы сложных процентов — шесть функций денежной единицы

Будущая стоимость единицы: $FV = PV(1+i)^{n}$.

Накопление единицы за период: $FVA = PMT\,\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$.

Фактор фонда возмещения: $PMT = \dfrac{FVAi}{(1+i)^{n}-1}$.

Текущая стоимость единицы: $PV = \dfrac{FV}{(1+i)^{n}}$.

Текущая стоимость единичного аннуитета: $PVA = PMT\,\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}$.

Взнос за амортизацию единицы: $PMT = \dfrac{PVAi(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}$.

6 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возмеще-ния	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортиза-цию еди-ницы
1	1,06000	1,00000	1,00000	0,94340	0,94340	1,06000
2	1,12360	2,06000	0,48544	0,89000	1,83339	0,54544
3	1,19102	3,18360	0,31411	0,83962	2,67301	0,37411
4	1,26248	4,37462	0,22859	0,79209	3,46511	0,28859
5	1,33823	5,63709	0,17740	0,74726	4,21236	0,23740
6	1,41852	6,97532	0,14336	0,70496	4,91732	0,20336
7	1,50363	8,39384	0,11914	0,66506	5,58238	0,17914
8	1,59385	9,89747	0,10104	0,62741	6,20979	0,16104
9	1,68948	11,49132	0,08702	0,59190	6,80169	0,14702
10	1,79085	13,18079	0,07587	0,55839	7,36009	0,13587
11	1,89830	14,97164	0,06679	0,52679	7,88687	0,12679
12	2,01220	16,86994	0,05928	0,49697	8,38384	0,11928
13	2,13293	18,88214	0,05296	0,46884	8,85268	0,11296
14	2,26090	21,01507	0,04758	0,44230	9,29498	0,10758
15	2,39656	23,27597	0,04296	0,41727	9,71225	0,10296
16	2,54035	25,67253	0,03895	0,39365	10,10590	0,09895
17	2,69277	28,21288	0,03544	0,37136	10,47726	0,09544
18	2,85434	30,90565	0,03236	0,35034	10,82760	0,09236
19	3,02560	33,75999	0,02962	0,33051	11,15812	0,08962
20	3,20714	36,78559	0,02718	0,31180	11,46992	0,08718
21	3,39956	39,99273	0,02500	0,29416	11,76408	0,08500
22	3,60354	43,39229	0,02305	0,27751	12,04158	0,08305
23	3,81975	46,99583	0,02128	0,26180	12,30338	0,08128
24	4,04893	50,81558	0,01968	0,24698	12,55036	0,07968
25	4,29187	54,86451	0,01823	0,23300	12,78336	0,07823
26	4,54938	59,15638	0,01690	0,21981	13,00317	0,07690
27	4,82235	63,70576	0,01570	0,20737	13,21053	0,07570
28	5,11169	68,52811	0,01459	0,19563	13,40616	0,07459
29	5,41839	73,63980	0,01358	0,18456	13,59072	0,07358
30	5,74349	79,05818	0,01265	0,17411	13,76483	0,07265
31	6,08810	84,80168	0,01179	0,16425	13,92909	0,07179
32	6,45339	90,88978	0,01100	0,15496	14,08404	0,07100
33	6,84059	97,34316	0,01027	0,14619	14,23023	0,07027
34	7,25102	104,18375	0,00960	0,13791	14,36814	0,06960
35	7,68609	111,43478	0,00897	0,13011	14,49825	0,06897
36	8,14725	119,12087	0,00839	0,12274	14,2099	0,06839
37	8,63609	127,26812	0,00786	0,11579	14,73678	0,06786
38	9,15425	135,90421	0,00736	0,10924	14,84602	0,06736
39	9,70351	145,05846	0,00689	0,10306	14,94907	0,06689
40	10,28572	154,76197	0,00646	0,09722	15,04630	0,06646

8 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возмещения	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортизацию единицы
1	1,08000	1,00000	1,00000	0,92593	0,92593	1,08000
2	1,16640	2,08000	0,48077	0,85734	1,78326	0,56077
3	1,25971	3,24640	0,30803	0,79383	2,57710	0,38803
4	1,36049	4,50611	0,22192	0,73503	3,31213	0,30192
5	1,46933	5,86660	0,17046	0,68058	3,99271	0,25046
6	1,58687	7,33593	0,13632	0,63017	4,62288	0,21632
7	1,71382	8,92280	0,11207	0,58349	5,20637	0,19207
8	1,85093	10,63663	0,09401	0,54027	5,74664	0,17401
9	1,99900	12,48756	0,08008	0,50025	6,24689	0,16008
10	2,15892	14,48656	0,06903	0,46319	6,71008	0,14903
11	2,33164	16,64549	0,06008	0,42888	7,13896	0,14.008
12	2,51817	18,97713	0,05270	0,39711	7,53608	0,13270
13	2,71962	21,49530	0,04652	0,36770	7,90378	0,12652
14	2,93719	24,21492	0,04130	0,34046	8,24424	0,12130
15	3,17217	27,15211	0,03683	0,31524	8,55948	0,11683
16	3,42594	30,32428	0,03298	0,29189	8,85137	0,11298
17	3,70002	33,75023	0,02963	0,27027	9,12164	0,10963
18	3,99602	37,45024	0,02670	0,25025	9,37189	0,10670
19	4,31570	41,44626	0,02413	0,23171	9,60360	0,10413
20	4.66096	45,76196	0,02185	0,21455	9,81815	0,10185
21	5,03383	50,42292	0,01983	0,19866	10,01680	0,09983
22	5,43654	55,45675	0,01803	0,18394	10,20074	0,09803
23	5,87146	60,89329	0,01642	0,17032	10,37106	0,09642
24	6,34118	66,76476	0,01498	0,15770	10,52876	0,09498
25	6,84847	73,10594	0,01368	0,14602	10,67478	0,09368
26	7,39635	79,95441	0,01251	0,13520	10,80998	0,09251
27	7,98806	87,35077	0,01145	0,12519	10,93516	0,09145
28	8,62711	95,33883	0,01049	0,11591	11,05108	0,09049
29	9,31727	103,96593	0,00962	0,10733	11,15841	0,08962
30	10,06266	113,28321	0,00883	0,09938	11,25778	0,08883
31	10,86767	123,34586	0,00811	0,09202	11,34980	0,08811
32	11,73708	134,21353	0,00745	0,08520	11,43500	0,08745
33	12,67605	145,95062	0,00685	0,07889	11,51389	0,08685
34	13,69013	158,62666	0,00630	0,07305	11,58693	0,08630
35	14,78534	172,31680	0,00580	0,06763	11,65457	0,08580
36	15,96817	187,10215	0,00534	0,06262	11,71719	0,08534
37	17,24562	203,07032	0,00492	0,05799	11,77518	0,08492
38	18,62527	220,31595	0,00454	0,05369	11,82887	0,08454
39	20,11530	238,94122	0,00419	0,04971	11,87858	0,08419
40	21,72452	259,05652	0,00386	0,04603	11,92461	0,08386

10 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возмещения	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортизацию единицы
1	0,10000	1,00000	1,00000	0,90909	0,90909	1,10000
2	0,21000	2,10000	0,47619	0,82645	1,73554	0,57619
3	0,33100	3,31000	0,30211	0,75131	2,48685	0,40211
4	0,46410	4,64100	0,21547	0,68301	3,16987	0,31547
5	0,61051	6,10510	0,16380	0,62092	3,79079	026380
6	1,77156	7,71561	0,12961	0,56447	4,35526	0,22961
7	1,94872	9,48717	0,10541	0,51316	4,86842	0,20541
8	2,14359	11,43589	0,08744	0,46651	5,33493	0,18744
9	2,35795	13,57948	0,07364	0,42410	5,75902	0,17364
10	2,59374	15,93742	0,06275	0,38554	6,14457	0,16275
11	2,85312	18,53117	0,05396	0,35049	6,49506	015396
12	3,13843	21,38428	0,04676	0,31863	6,81369	0,14676
13	3,45227	24,52271	0,04078	0,28966	7,10336	0,14078
14	3,79750	27,97498	0,03575	0,26333	7.36669	0,13575
15	4,17725	31,77248	0,03147	0,23939	7,60608	0,13147
16	4,59479	35,94973	0,02782	0,21763	7,82371	0,12782
17	5,05447	40,54470	0,02466	0,19784	8,02155	0,12466
18	5,55992	45,59917	0,02193	0,17986	8,20141	0,12193
19	6,11591	51,15909	0,01955	0,16351	8,36492	0,11955
20	6,72750	57,27500	0,01746	0,14864	8,51356	0 11746
21	7,40025	64,00250	0,01562	0,13513	8,64869	0,11562
22	8,14028	71,40275	0,01401	0,12285	8,77154	0,11401
23	8,95430	79,54303	0,01257	0,11168	8,88322	0,11257
24	9,84973	88,49733	0,01130	0,10153	8,98474	0,11130
25	10,83471	98,34706	0,01017	0,09230	9,07704	0,11017
26	11,9188	109,18177	0,00916	0,08391	9,16095	0,10916
27	13,10999	121,09994	0,00826	0,07628	9,23722	0,10826
28	14,42099	134,20994	0,00745	0,06934	9 30657	0 10745
29	15,86309	148,63093	0,00673	0,06304	9,36961	0,10673
30	17,44940	164,49403	0,00608	0,05731	9,42691	0,10608
31	19,19434	181,94343	0,00550	0,05210	9,47901	0,10550
32	21,11378	201,13777	0,00497	0,04736	9,52638	0,10497
33	23,22516	222,25154	0,00450	0,04306	9,56943	0,10450
34	25,54767	245,47670	0,00407	0,03914	9,60857	0 10407
35	28,10244	271,02437	0,00369	0,03558	9,64416	0,10369
36	30,91268	299,12681	0,00334	0,03235	9,67651	0.10334
37	34,00395	330,03949	0,00303	0,02941	9,70592	0,10303
38	37,40435	364,04343	0,00275	0,02673	9,73265	0,10275
39	41,14478	401,44778	0,00249	0,02430	9,75696	0,10249
40	45,25926	442,59256	0,00226	0,02210	9,77905	0,10226

12 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возмеще-ния	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортизацию единицы
1	1,12000	1,00000	1,00000	0,89286	0,89286	1,12000
2	1,25440	2,12000	0,47170	0,79719	1,69005	0,59170
3	1,40493	3,37440	0,29635	0,71178	2,40183	0,41635
4	1,57352	4,77933	0,20923	0,63552	3,03735	0,32923
5	1,76234	6,35285	0,15741	0,56743	3,60478	0,27741
6	1,97382	8,11519	0,12323	0,50663	4,11141	0,24323
7	2,21068	10,08901	0,19912	0,45235	4,56376	0,21912
8	2,47596	12,29969	0,08130	0,40388	4,96764	0,20130
9	2,77308	14,77566	0,06768	0,36061	5,32825	0,18768
10	3,10585	17,54873	0,05698	0,32197	5,65022	0,17698
11	3,47855	20,65458	0,04842	0,28748	5,93770	0,16842
12	3,89598	24,13313	0,04144	0,25668	6,19437	0,16144
13	4,36349	28,02911	0,03568	0,22917	6,42355	0,15568
14	4,88711	32,39260	0,03087	0,20462	6,62817	0,15087
15	5,47357	37,27971	0,02682	0,18270	6,81086	0,14682
16	6,13039	42,75328	0,02339	0,16312	6,97399	0,14339
17	6,86604	48,88367	0,02046	0,14564	7,11963	0,14046
18	7,68997	55,74971	0,01794	0,13004	7,24967	0,13794
19	8,61276	63,43968	0,01576	0,11611	7,36578	0,13576
20	9,64629	72,052244	0,01388	0,10367	7,46944	0,13388
21	10,80385	81,69873	0,01224	0,09256	7,56200	0,13224
22	12,10031	92,50258	0,01081	0,08264	7,64465	0,13081
23	13,55235	104,60289	0,00956	0,07379	7,71843	0,12956
24	15,17863	118,15524	0,00846	0,06588	7,78432	0,12846
25	17,00006	133,33386	0,00750	0,05882	7,84314	0,12750
26	19,04007	150,33393	0,00665	0,05252	7,89566	0,12665
27	21,32488	169,37401	0,00590	0,04689	7,94255	0,12590
28	23,88386	190,69889	0,00524	0,04187	7,98442	0,12524
29	26,74993	214,58275	0,00446	0,03738	8,02181	0,12466
30	29,95992	241,33268	0,00414	0,03338	8,05518	0,12414
31	33,55511	271,29261	0,00369	0,02980	8,08499	0,12369
32	37,58172	304,84772	0,00328	0,02661	8,11159	0,12328
33	42,09153	342,42945	0,00292	0,02376	8,13535	0,12292
34	47,14251	384,52098	0,00260	0,02121	8,15656	0,12260
35	52,79962	431,66350	0,00232	0,01894	8,17550	0,12232
36	59,13557	484,46312	0,00206	0,01691	8,19241	0,12206
37	66,23184	543,59870	0,00184	0,01510	8,20751	0,12184
38	74,17966	609,83053	0,00164	0,01348	8,22099	0,12164
39	83,08122	684,01020	0,00146	0,01204	8,23303	0,12146
40	93,05097	767,09142	0,00130	0,01075	8,24378	0,12130

15 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда воз-мещения	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортизацию единицы
1	1,15000	1,00000	1,00000	0,86957	0,86957	1,15000
2	1,32250	2,15000	0,46512	0,75614	1,62571	0,61512
3	1,52088	3,47250	0,28798	0,65752	2,28323	0,43798
4	1,74901	4,99338	0,20027	0,57171	2,85498	0,35027
5	2,01136	6,74238	0,14832	0,49718	3,35216	0,29832
6	2,31306	8,75374	0,11414	0,43233	3,78448	0,26424
7	2,66002	11,06680	0,09036	0,37594	4,16042	0,24036
8	3,05902	13,72682	0,07285	0,32690	4,48732	0,22285
9	3,51788	16,78584	0,05957	0,28426	4,77158	0,20957
10	4,04556	20,30372	0,04925	0,24718	5,01877	0,19925
11	4,65239	24,34928	0,04107	0,21494	5,23371	0,19107
12	5,35025	29,00167	0,03448	0,18691	5,42062	0,18448
13	6,15279	34,35192	0,02911	0,16253	5,58315	0,7911
14	7,07571	40,50471	0,02469	0,14133	5,72448	0,17469
15	8,13706	47,58041	0,02102	0,12289	5,84737	0,17102
16	9,35762	55,71748	0,01795	0,10686	5,95423	0,16795
17	10,76126	65,07510	0,01537	0,09293	6,04716	0,16537
18	12,37545	75,83636	0,01319	0,08081	6,12797	0,16319
19	14,23177	88,21182	0,01134	0,07027	6,19823	0,16134
20	16,36654	102,44359	0,00976	0,06110	6,25933	0,15976
21	18,82152	118,81013	0,00842	0,05313	6,31246	0,15842
22	21,64475	137,63165	0,00727	0,04620	6,38866	0,15727
23	24,89146	159,27640	0,00628	0,04017	6,39884	0,15628
24	28,62518	184,16786	0,00543	0,03493	6,43377	0,15543
25	32,91896	212,79302	0,00470	0,03038	6,46415	0,15470
26	37,85680	245,71198	0,00407	0,02642	6,49056	0,15407
27	43,53532	283,56877	0,00353	0,02297	6,51353	0,15353
28	50,06562	327,10408	0,00306	0,01997	6,53351	0,15306
29	57,57546	377,16969	0,00265	0,0137	6,55088	0,15265
30	66,21178	434,74515	0,00230	0,01510	6,56598	0,15230
31	76,14355	500,95692	0,00200	0,01313	6,57911	0,15200
32	87,56508	577,10046	0,00173	0,01142	6,59053	0,15173
33	100,69985	664,66552	0,00150	0,00993	6,60046	0,15150
34	115,80482	765,36535	0,00131	0,00864	6,60910	0,15131
35	133,17555	881,17016	0,00113	0,00751	6,61661	0,15113
36	153,15188	1014,34583	0,00099	0,00653	6,62314	0,15099
37	176,12466	1167,49753	0,00086	0,00568	6,62881	0,15086
38	202,54336	1343,66216	0,00074	0,00494	6,63375	0,15074
39	232,92487	1546,16549	0,00065	0,00429	6,63804	0,15065
40	267,86360	1779,09031	0,00056	0,00373	6,64178	0,15056

18 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возмещения	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортизацию единицы
1	1,18000	1,00000	1,00000	0,87746	0,87476	1,18000
2	1,39240	2,18000	0,45872	0,71818	1,56564	0,63872
3	1,64303	3,57240	0,27992	0,60863	2,17427	0,45992
4	1,93878	5,21543	0,19174	0,51579	2,69006	0,37174
5	2,28776	7,15421	0,13978	0,43711	3,12717	0,31978
6	2,69955	9,44197	0,10591	0,37043	3,49760	0,28591
7	3,18547	12,14152	0,08236	0,31393	3,81153	0,26236
8	3,75886	15,32700	0,06524	0,26604	4,07757	0,24524
9	4,43545	19,08586	0,05239	0,22546	4,30302	0,23239
10	5,23384	23,52131	0,04251	0,19106	4,49409	0,22251
11	6,17593	28,75515	0,03478	0,16192	4,65601	0,21478
12	7,28759	34,93107	0,02863	0,13722	4,79322	0,20863
13	8,59936	42,21866	0,02369	0,11629	4,90951	0,20369
14	10,14724	50,81802	0,01968	0,098855	5,00806	0,19968
15	11,97375	60,96527	0,01640	0,08352	5,09158	0,19640
16	14,12902	72,93902	0,01371	0,07078	5,06235	0,19371
17	16,67225	87,06804	0,01149	0,05998	5,22233	0,19149
18	19,67325	103,74029	0,00964	0,05083	5,27316	0,18964
19	23,21444	123,41354	0,00810	0,04308	5,31424	0,18810
20	27,39304	146,62798	0,00682	0,03651	5,35275	0,18682
21	32,32378	174,02102	0,00575	0,03094	5,38368	0,18575
22	38,14207	206,34481	0,00485	0,02622	5,40990	0,184858
23	45,00764	244,48687	0,00409	0,02222	5,43212	0,18409
24	53,10901	289,49451	0,00345	0,01883	5,45095	0,18345
25	62,66864	432,60352	0,00292	0,01596	5,46691	0,18292
26	73,94899	405,27216	0,00247	0,01352	5,48043	0,18247
27	87,25981	479,22115	0,00209	0,01146	5,49189	0,18209
28	102,9658	566,18096	0,00177	0,00971	5,50160	0,18177
29	121,50056	669,44754	0,00149	0,00823	5,50983	0,18149
30	143,37066	790,94810	0,00126	0,00697	5,51681	0,18126
31	169,17739	934,31877	0,00107	0,00591	5,52272	0,18107
32	199,62932	1103,49615	0,00091	0,00501	5,52773	0,18091
33	235,56259	1303,12547	0,00077	0,00425	5,53197	0,18077
34	277,69386	1538,68806	0,00065	0,00360	5,53557	0,18065
35	327,99736	1816,65193	0,00055	0,00305	5,53862	0,18055
36	387,03689	2144,64929	0,00047	0,00258	5,54120	0,18047
37	456,70353	2531,68617	0,00039	0,00219	5,54339	0,18040
38	538,91017	2988,38970	0,00033	0,00186	5,54525	0,18033
39	635,91400	3527,29987	0,00028	0,00157	5,54682	0,18028
40	750,37853	4163,21387	0,00024	0,00133	5,54815	0,18024

20 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возмещения	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортизацию единицы
1	1,20000	1,00000	1,00000	0,83333	0,83333	1,20000
2	1,44000	2,20000	0,45455	0,69444	1,52778	0,65455
3	1,72800	3,64000	0,27473	0,57870	2,10648	0,47473
4	2,07360	5,36800	0,18629	0,48225	2,58873	0,38629
5	2,48832	7,44160	0,13438	0,40188	2,99061	0,33438
6	2,98598	9,92992	0,10071	0,33490	3,32551	0,30071
7	3,58318	12,91590	0,07742	0,27908	3,60459	0,27742
8	4,29982	16,49908	0,06061	0,23257	3,83716	0,26061
9	5,15978	20,79890	0,04808	0,19381	4,03097	0,24808
10	6,19174	25,95868	0,03852	0,16151	4,19247	0,23852
11	7,43008	32,15042	0,03110	0,13459	4,32706	0,23110
12	8,91610	39,58050	0,02526	0,11216	4,43922	0,11526
13	10,69932	48,49660	0,02062	0,09346	4,53268	0,22062
14	12,83919	59,19520	0,01689	0,07789	4,61057	0,21689
15	15,40702	72,03511	0,01388	0,06491	4,67547	0,21388
16	18,48843	87,44213	0,01144	0,05409	4,72956	0,21144
17	22,18611	105,93056	0,00944	0,04507	4,77463	0,20944
18	26,62333	128,11667	0,00781	0,03756	4,81219	0,20781
19	31,94800	154,74000	0,00646	0,03130	4,84350	0,20646
20	38,33760	186,68801	0,00536	0,02608	4,86958	0,20536
21	46,00512	225,02561	0,00444	0,02174	4,89132	0,20444
22	55,20615	271,03073	0,00369	0,01811	4,90943	0,20369
23	66,24738	326,23688	0,00307	0,01509	4,92453	0,20307
24	79,49685	392,48425	0,00255	0,01258	4,93710	0,20255
25	95,39622	471,98111	0,00212	0,01048	4,94759	0,20212
26	114,47547	567,37733	0,00176	0,00874	4,95632	0,20176
27	137,37056	681,85280	0,00147	0,0728	4,96360	0,20147
28	164,84467	819,22336	0,00122	0,00607	4,96967	0,20122
29	197,81361	984,06803	0,00102	0,00506	4,97472	0,20102
30	237,37633	1181,88164	0,00085	0,00421	4,97894	0,20085
31	284,85160	1419,25797	0,00070	0,00351	4,98245	0,20070
32	341,82192	1704,10957	0,00059	0,00293	4,98537	0,20059
33	410,18630	2045,93149	0,00049	0,00244	4,98781	0,20049
34	492,22357	2456,11779	0,00041	0,00203	4,98984	0,20041
35	590,66828	2948,34136	0,00034	0,00169	4,99153	0,20034
36	708,80194	3539,00964	0,00028	0,00141	4,99295	0,20028
37	850,56233	4247,81158	0,00024	0,00118	4,99412	0,20024
38	1020,67480	5098,37391	0,00020	0,00098	4,99510	0,20020
39	1224,80976	6119,04870	0,00016	0,00082	4,99592	0,20016
40	1469,77171	7343,85846	0,00014	0,00068	4,99660	0,20014

22 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возме-щения	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортиза-цию еди-ницы
1	1,22000	1,00000	1,00000	0,81967	0,81967	1,22000
2	1,48840	2,22000	0,45045	0,67186	1,49153	0,67045
3	1,81585	3,70840	0,26966	0,55071	2,04224	0,48966
4	2,21533	5,52425	0,18102	0,45140	2,49364	0,40102
5	2,70271	7,73958	0,12921	0,37000	2,86364	0,34921
6	3,29730	10,44229	0,09576	0,30328	3,16692	0,31576
7	4,02271	13,73959	0,07278	0,24859	3,41551	0,29278
8	4,90771	17,76231	0,05630	0,20376	3,61927	0,27630
9	5,98740	22,67001	0,04411	0,16702	3,78628	0,26411
10	7,30463	28,65742	0,03489	0,13690	3,92318	0,25489
11	8,91165	35,96205	0,02781	0,11221	4,03540	0,24781
12	10,87221	44,87370	0,02228	0,09198	4,12737	0,24228
13	13,26410	55,74591	0,01794	0,07539	4,20277	0,23794
14	16,18220	69,01001	0,01449	0,06180	4,26456	0,23449
15	19,74229	85,19221	0,01174	0,05065	4,31522	0,23174
16	24,08559	104,93450	0,00953	0,04152	4,35673	0,22953
17	29,38442	129,02009	0,00775	0,03403	4,39077	0,22775
18	35,84899	158,40451	0,00631	0,02789	4,41866	0,22631
19	43,73577	194,25350	0,00515	0,02286	4,44152	0,22515
20	53,35764	237,98927	0,00420	0,01874	4,46027	0,22420
21	65,09632	291,34691	0,00343	0,01536	4,47563	0,22343
22	79,41751	356,44323	0,00281	0,01259	4,48822	0,22281
23	96,88936	435,86074	0,00229	0,01032	4,49854	0,22229
24	118,20502	532,75010	0,00188	0,00846	4,50700	0,22188
25	144,21013	650,95512	0,00154	0,00693	4,51393	0,22154
26	175,93635	795,16525	0,00126	0,00568	4,51962	0,22126
27	214,64235	971,10160	0,00103	0,00466	4,52428	0,22103
28	261,86367	1185,74395	0,00084	0,00382	4,52810	0,22084
29	319,47367	1447,60762	0,00069	0,00313	4,53123	0,22069
30	389,75788	1767,08130	0,00057	0,00257	4,53379	0,22057
31	475,50462	2156,83918	0,00046	0,00210	4,53590	0,22046
32	580,11563	2632,34379	0,00038	0,00172	4,53762	0,22038
33	707,74107	3212,45943	0,00031	0,00141	4,53903	0,22031
34	863,44410	3920,20050	0,00026	0,00116	4,540019	0,22026
35	1053,40181	4783,64460	0,00021	0,00095	4,54114	0,22021
36	1285,15020	5837,04641	0,00017	0,00078	4,54192	0,22017
37	1567,88325	7122,19661	0,00014	0,00064	4,54256	0,22014
38	1912,81756	8690,07986	0,00012	0,00052	4,54308	0,22012
39	2333,63742	10602,89741	0,00009	0,00043	4,54351	0,22009
40	2847,03765	12936,53483	0,00008	0,00035	4,54386	0,22008

25 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возмещения	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за амортизацию единицы
1	1,25000	1,00000	1,00000	0,80000	0,80000	1,25000
2	1,56250	2,25000	0,44444	0,64000	1,44000	0,69444
3	1,95313	3,81250	0,26230	0,51200	1,95200	0,51230
4	2,44141	5,76563	0,17344	0,40960	2,36160	0,42344
5	3,05176	8,20703	0,12185	0,32768	2,68928	0,37185
6	3,81740	11,25879	0,08882	0,026214	2,95142	0,33882
7	4,76837	15,07349	0,06634	0,20972	3,16114	0,31634
8	5,96046	19,84186	0,05040	0,16777	3,32891	0,30040
9	7,45058	25,80232	0,03876	0,13422	3,46313	0,28876
10	9,31323	33,25290	0,03007	0,10737	3,57050	0,28007
11	11,64153	42,56613	0,02349	0,08590	3,65640	0,27349
12	14,55192	54,20766	0,01845	0,06872	3,72512	0,26845
13	18,18989	68,75958	0,01454	0,05498	3,78010	0,26454
14	22,73737	86,94947	0,01150	0,04398	3,82408	0,26150
15	28,42171	109,68684	0,00912	0,03518	3,85926	0,25912
16	35,52714	138,10855	0,00724	0,02815	3,88741	0,25724
17	44,40892	173,63569	0,00576	0,02252	3,90993	0,25576
18	55,51115	218,04460	0,00459	0,01801	3,92794	0,25459
19	64,38894	273,55576	0,00366	0,01441	3,94235	0,25366
20	86,73617	342,94470	0,00292	0,01153	3,95388	0,25292
21	108,42022	429,68087	0,00233	0,00922	3,96311	0,25233
22	135,52527	538,10109	0,00186	0,00738	3,97049	0,25186
23	169,40659	673,62636	0,00148	0,00590	3,97639	0,25148
24	211,75824	843,03295	0,00119	0,00472	3,98111	0,25119
25	264,69780	1054,79118	0,00095	0,00378	3,98489	0,25095
26	330,87225	1319,48898	0,00076	0,00302	3,98791	0,25076
27	413,59031	1650,36123	0,00061	0,00242	3,99033	0,25061
28	516,98788	2063,95153	0,00048	0,00193	3,99226	0,25048
29	646,23485	2580,93941	0,00039	0,00155	3,99381	0,25039
30	807,79357	3227,17427	0,00031	0,00124	3,99505	0,25031
31	1009,74196	4034,96783	0,00025	0,00099	3,99604	0,25025
32	1262,17745	5044,70979	0,00020	0,00079	3,99683	0,25020
33	1577,72181	6306,88724	0,00016	0,00063	3,99746	0,25016
34	1972,15226	7884,60905	0,00013	0,00051	3,99797	0,25013
35	2465,19033	9856,76132	0,00010	0,00041	3,99838	0,25010
36	3081,4879	12321,95164	0,00008	0,00032	3,99870	0,25008
37		15403,43956	0,00006	0,00026	3,99896	0,25006
38		19255,29944	0,00005	0,00021	3,99917	0,25005
39			0,00004	0,00017	3,99934	0,25004
40			0,00003	0,00013	3,99947	0,25003

	1 3851,8598 9 4814,8248 6 6018,5310 8 7523,1638 5	24070,1243 0 30088,6553 8				

28 %

Начисление процентов (ежегодное)

Год	Будущая стоимость единицы	Накопление единицы за период	Фактор фонда возме-щения	Текущая стоимость единицы	Текущая стоимость единичного аннуитета	Взнос за аморти-зацию единицы
1	1,28000	1,00000	1,00000	0,78125	0,78125	1,28000
2	1,63840	2,28000	0,43860	0,61035	1,39160	0,71860
3	2,09715	3,91840	0,25521	0,47684	1,86844	0,53521
4	2,68435	6,01555	0,16624	0,37253	2,24097	0,44624
5	3,43597	8,69991	0,11494	0,29104	2,53201	0,39494
6	4,39805	12,13588	0,08240	0,22737	2,75938	0,36240
7	5,62950	16,53393	0,06048	0,17764	2,93702	0,34048
8	7,20576	22,16343	0,04512	0,13878	3,07579	0,32512
9	9,22337	29,36919	0,03405	0,10842	3,18421	0,31405
10	11,80592	38,59256	0,02591	0,08470	3,26892	0,30591
11	15,11157	50,39847	0,01984	0,06617	3,33509	0,29984
12	19,34281	65,51005	0,01526	0,05170	3,38679	0,29526
13	24,75880	84,85286	0,01179	0,04039	3,42718	0,29179
14	31,69127	109,61166	0,00912	0,03155	3,45873	0,28912
15	40,56482	141,30293	0,00708	0,02465	3,48339	0,28708
16	51,92297	181,86775	0,00550	0,01926	3,50265	0,28550
17	66,46140	233,79072	0,00428	0,01505	3,51769	0,28428
18	85,07059	300,25212	0,00333	0,01175	3,52945	0,28333
19	108,89036	385,32271	0,00260	0,00918	3,53863	0,28260
20	139,67966	494,21307	0,00202	0,00717	3,54580	0,28202
21	178,40597	633,59273	0,00158	0,00561	3,55141	0,28158
22	228,35964	811,99869	0,00123	0,00438	3,55579	0,28123
23	292,30033	1040,35833	0,00096	0,00342	3,55921	0,28096
24	374,14443	1332,65866	0,00075	0,00267	3,56188	0,28075
25	478,90487	1706,80309	0,00059	0,00209	3,56397	0,28059
26	612,99823	2185,70796	0,00046	0,00163	3,56560	0,28046
27	784,63774	2798,70619	0,00036	0,00127	3,56688	0,28036
28	1004,33630	3583,34393	0,00028	0,00100	3,56787	0,28028
29	1285,55047	4587,68023	0,00022	0,00078	3,56865	0,28022
30	1645,50460	5873,23070	0,00017	0,00061	3,56926	0,28017
31	2106,24589	7218,73530	0,00013	0,00047	3,56973	0,28013
32	2695,99475	9624,98120	0,00010	0,00037	3,57010	0,28010
33	3450,87328	12320,97595	0,00008	0,00029	3,57039	0,02008
34	4417,11780	15771,84923	0,00006	0,00023	3,57062	0,28006
35	5653,91079	20188,96703	0,00005	0,00018	3,57080	0,28005
36	7237,00582	25842,87782	0,00004	0,00014	3,57094	0,28004
37	9263,36746	33079,88364	0,00003	0,00011	3,57104	0,28003
38	11857,11036	42343,25110	0,00002	0,00008	3,57113	0,28002
39	1577,10127	54200,36145	0,00002	0,00007	3,57119	0,28002
40	19426,68965	69377,46273	0,00001	0,00005	3,57124	0,28001

Учебное издание

Борздова Татьяна Васильевна
Титовицкая Адалина Эрнстовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЦЕНОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Практикум

Редактор *А. Г. Иванов*
Компьютерная верстка *Е. В. Камкар*
Корректор *Л. И. Печенникова*

Подписано в печать 20.06.2008. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,81.
Уч.-изд. л. 5,37. Тираж 200 экз. Заказ № 198.

Издатель и полиграфическое исполнение
Учреждение образования «Государственный институт
управления и социальных технологий БГУ» ЛИ № 02330/0056772 от 17.02.2004.
220037, Минск, ул. Ботаническая, 15.