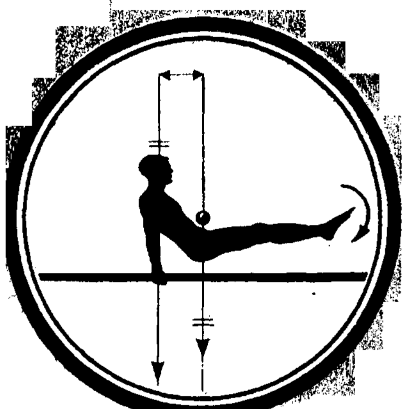
МЕХАНИКА СПОРТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ

МЕХАНИКА СПОРТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ

В. Петров

Ю. Гагин



Физкультура и спорт

В. Петров Ю. Гагин

МЕХАНИКА СПОРТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ

*Допущено Комитетом по физической культуре
и спорту при Совете Министров СССР
в качестве учебного пособия для студентов
институтов физической культуры*

Москва
«Физкультура и спорт»
1974

Петров В. А., Гагин Ю. А.

П30 Механика спортивных движений. М., «Физкультура и спорт», 1974.

232 с. с ил.

Настоящее пособие издается впервые. Оно предназначено для студентов институтов физической культуры и может быть использовано также тренерами по различным видам спорта и преподавателями кафедр спортивных и педагогических дисциплин. В пособии изложены основы общей (теоретической) механики и представлены решения разнообразных задач из практики спорта. Изучение пособия поможет углубить понимание законов механического движения, освоить основные методы решения задач, связанных с анализом спортивной техники, а также приобрести знания, необходимые для исследования кинематической и динамической структуры спортивных движений и физических упражнений.

$П\frac{60901-136}{009(01)-74}$ **БЗ 11—17—1974** **7А.06**

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет и метод общей механики

Общая (или теоретическая) механика — это наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами. Общая механика представляет собой одну из научных основ всех современных технических дисциплин; она лежит в основе изучения механического движения как на микро-, так и на макроуровне.

Механическим движением называется изменение взаимного положения материальных тел и отдельных их точек относительно друг друга. Механическое движение является неотъемлемым компонентом функционирования человеческого организма. Движения человека — своеобразное отображение всех процессов (биохимических, физиологических и психологических), происходящих в его организме. В 1863 г. в работе «Рефлексы головного мозга» великий физиолог И. М. Сеченов писал: «Все бесконечное разнообразие внешних проявлений мозговой деятельности сводится окончательно к одному явлению — к мышечному движению».

Тело человека принадлежит к материальным телам. Материальные тела различны, но движение их обладает многими общими свойствами, в том числе и не зависящими от физических свойств самих тел. Так, например, можно говорить о траектории центра тяжести какого-либо предмета (скажем, спортивного снаряда) и тела человека не принимая во внимание различий между живыми и неживыми телами. Эти общие свойства механического движения тел и изучаются в общей механике. Ее задача — «дать наиболее полное и возможно более простое описание движений, происходящих в природе» (Р. Кирхгофф).

Исходными понятиями общей механики являются: «*пространство*», «*время*» и «*масса*». Общая механика не пользуется, по существу, ни одним понятием, которое не являлось бы производным от этих трех основных понятий. Правда, это не единственные возможные исходные понятия, и для первого восприятия они обладают даже значительно меньшей наглядностью, чем, например, «скорость» и «сила» (которые во всех случаях и остаются для нас единственными средствами для измерения пространства, времени и массы), но для изучения механического движения особенно выгодны в силу наибольшей простоты выводов.

Напомним, что мировоззрение, пытающееся все явления и свойства предметов вывести из понятий пространства, времени и массы, носит поэтому название механистического. Однако не следует думать, что всякое применение законов механики для описания, например, движений человека является механицизмом. При анализе движений человека важно выделить те элементы (свойства) системы движений, которые ограничиваются кругом механических характеристик (кинематических, динамических, условий равновесия и т. п.). Описание этих элементов с помощью законов механики не будет противоречить современным диалектическим позициям в естествознании. В настоящее время нет никаких оснований говорить о «неприменимости» законов общей механики для описания движений человека. Однако необходимо всегда четко представлять себе тот круг их свойств, который очерчивается возможностями законов общей механики, построенных на определенных абстракциях и предположениях.

Для наиболее полного и простого описания движения общая механика прибегает к схематизации явлений, выделяя их наиболее существенные стороны. Поэтому она рассматривает движение не тех материальных тел, которые реально существуют в природе, а некоторых абстрактных моделей, отражающих только определенные общие свойства их. Наиболее простыми из этих моделей являются: материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело, стержневая система (рычаг, кинематическая цепь, стержневая конструкция) и т. п.

Материальной точкой называется тело определенной массы, размерами которого можно пренебречь в данных условиях. Она отличается от геометрической точки тем, что имеет конечную массу. За материальную точку в механике принимается не только мельчайшая частица тела, но иногда и тело весьма больших размеров. Так, например, за материальную точку можно принять молот или ядро при изучении их полета, а в ряде движений и тело человека. Когда размерами тела пренебречь нельзя, можно мысленно разделить его на части и принять их за материальные точки. В этом случае само тело следует рассматривать как *систему материальных точек*. При изучении движения нескольких тел иногда можно принять их за материальные точки и рассматривать все вместе как систему материальных точек.

Все физические тела под влиянием внешних воздействий деформируются. Если деформация тела незначительна и ею можно пренебречь, считая расстояния между его частицами неизменными, то такое тело называют *абсолютно твердым*.

Применение в общей механике понятий материальной точки и абсолютно твердого тела упрощает проводимые в ней исследования. При отказе от этих абстракций нельзя было бы установить общих для всех тел законов движения, которые затем применять к реально существующим физическим телам (упругим, упруго-вязким, жидким и т. д., свойства и движения которых изучаются в различных разделах механики, ставших, по существу, самостоятельными науками: сопротивлении материалов, математической теории упругости, гидравлике и др.).

Таким образом, в общей механике изучаются движения абсолютно твердых тел, с которыми в природе мы не встречаемся. Однако практика подтверждает правильность следствий, вытекающих из законов общей механики. Построенные на основании этих законов легкие мосты выдерживают большие нагрузки, работают машины, плавают корабли, летают самолеты, а космические аппараты достигают конечной цели.

Законы общей механики могут быть применены также для точного описания отдельных элементов системы движений человека. Но область применения их в данном случае ограничена теми специфическими особенностями, которые отличают живые системы от неживых.

Отличие биологических систем от неживых тел можно рассматривать только в биомеханическом смысле; в основе этого отличия лежит отнюдь не то обстоятельство, что биологические системы не являются абсолютно твердыми телами. (Это обстоятельство в данном сравнении имеет тот же удельный вес, что и при сравнении двух неживых тел. И не более.)

В наибольшей мере интересам биомеханики отвечает концепция живых систем Э. С. Бауэра*, выражающаяся в форме нескольких законов, свойственных всем системам, которые принято обозначать как живые, и характерных только для них. Эта концепция получила название принципа устойчивого неравновесия, который определяет следующие свойства живых систем.

1. Всем биосистемам свойственно прежде всего самопроизвольное, т. е. не вызванное внешними причинами, изменение своего состояния. Если материальная система находится в состоянии покоя или движется тогда и туда, когда и куда ее двигают соответственно ее массе, инерции и сопротивлению трения, то никто не назовет эту систему живой. Самопроизвольное изменение состояния биосистемы возможно благодаря таким скоплениям энергии в самой системе, которые при господствующих в ней условиях и при неизменных условиях окружающей среды могут разряжаться. То есть в биосистеме существуют такие разности потенциалов, которые могут разряжаться, т. е. выравниваться, помимо внешнего содействия, а освобождаемая при этом энергия может проявиться по-разному, в том числе и в виде механической работы.

Этого свойства, однако, не достаточно для полного определения живой системы, так как им обладают также любые «заведенные» машины (часовой механизм, аккумуляторная батарея и т. п.).

---

* Основной труд Э. С. Бауэра — «Теоретическая биология». М.— Л., изд-во ВИЭМ, 1935.

2. Биосистемы обладают устройствами, с помощью которых они могут изменить внешнее воздействие (толчок, тягу, доставку тепла и т. п.) посредством процессов, протекающих за счет разности потенциалов. Этот существенный признак биосистемы характеризуется в биологии двумя свойствами — раздражимостью и возбудимостью. В современных технических устройствах принципиально можно смоделировать раздражимость и возбудимость, однако для биосистем эти свойства постоянны, и в этом принципиальное отличие биосистем от искусственных систем. Например, чтобы ослабленную пружину натянуть вновь, необходимо произвести работу извне. Мышца производит эту работу после напряжения, возникающего вследствие раздражения, которое является результатом процессов, происходящих в мышце без внешнего воздействия. Изменения, которые происходят в мышце после каждого ее раздражения, связаны с доставкой энергии и восстановлением разности потенциала и отличают мышцу от простой пружины.

3. Работа живых систем при всякой окружающей среде направлена против равновесия, которое должно было бы наступить при данной окружающей среде и при данном первоначальном состоянии системы. Биосистемы способны превращать свободную энергию в работу, повышающую работоспособность системы. Живые системы никогда не бывают в равновесии и за счет своей свободной энергии постоянно исполняют работу против равновесия.

Здесь лишь схематически отмечены принципиальные отличия живых систем от неживых. Но и этого достаточно, чтобы понять, насколько сложна проблема полного описания движений человека как совершеннейшей из биосистем.

Физиология, биофизика и другие биологические науки, вооруженные современной радиоэлектронной аппаратурой, много сделали для раскрытия закономерностей биологических процессов в организме человека. Цель биомеханики — объединить механические и биологические знания о движениях человека с тем, чтобы установить основные закономерности их формирования и развития.

Одна из задач предстоящих исследований заключается в том, чтобы ответить на многие вопросы двигательной координации человека в экстремальных условиях, где движения нередко феноменальны. Особенно часто такие движения встречаются в спорте, когда при достижении рекордных результатов человек как биосистема раскрывается наиболее ярко. Проявляемые в экстремальных ситуациях «сверхвозможности» представляют существенный интерес для тренеров и педагогов. Анализ двигательных возможностей человеческого организма — важнейшая задача биомеханики.

Законы общей механики позволяют описать окончательный результат проявления этих возможностей, установить связи механических характеристик уже совершившегося или предполагаемого (при данных условиях) явления, поэтому эти законы не могут вступить в противоречие с теми биологическими свойствами системы, которыми определяются возможности организма.

Знание общих законов механики — необходимое условие познания всех сторон двигательной деятельности человека. Именно с этих законов следует начинать изучение движений в спорте.

Курс основной механики принято делить на три раздела: статику, кинематику, динамику. Статика изучает условия равновесия твердых тел, кинематика — движения тел без учета действующих на них сил и, наконец, динамика — механическое движение в связи с силами, приложенными к движущимся объектам.

§ 2. Основные законы механики*

Основные законы механики представляют собой результат обобщения вековых наблюдений за движением материальных тел в природе и при эксперименте.

Первый закон (закон инерции). *Всякое изолированное от внешних воздействий тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия других тел не заставят его изменить это состояние.*

Мы наблюдаем, что любое тело, как будто бы предоставленное самому себе, постепенно уменьшает скорость и, наконец, останавливается (например, бильярдный шар после удара по нему кием, футбольный мяч после удара по нему ногой и т. д.). Это кажущееся противоречие закону инерции объясняется различным внешним влиянием на движение данного тела: трением о поверхность, по которой оно движется, сопротивлением воздуха и т. п. Они-то и замедляют движение тела. Если уменьшить сопротивление движению, то оно будет приближаться к равномерному. Если бы удалось устранить всякое сопротивление движению тела, то скорость его не изменилась бы ни по направлению, ни по величине (следовательно, движение было бы прямолинейным, равномерным).

Взаимодействие материальных тел, в результате которого происходит изменение скорости движения этих тел (или их деформация), называется механическим.

Практически, конечно, нельзя изолировать тело от воздействия на него окружающих тел, в частности полностью устранить силы сопротивления движению тела. Поэтому для поддержания движения тела к нему нужно приложить некоторую силу F. Если эта сила будет меньше силы сопротивления P, то движение будет замедляться и тело остановиться; если она будет больше силы сопротивления, то скорость тела будет увеличиваться; если же величины этих сил будут равны, скорость тела будет неизменной. В этом случае силы, приложенные к телу, взаимно уравновешиваются. Такие силы не влияют на движе-

* Основные законы механики рассматриваются здесь в той мере в какой это необходимо для усвоения понятия о силе и изучения статики. Они изложены в третьем разделе курса — динамике — и описаны более подробно.

ние тела. Следовательно, можно сделать следующее заключение: *всякое тело, находящееся под действием взаимно уравновешенных сил, сохраняет свою скорость неизменной.* В частном случае, когда скорость равна нулю, тело сохраняет состояние покоя. Если какое-либо тело движется с неизменной скоростью, то можно говорить о том, что все действующие на него силы взаимно уравновешиваются.

Сохранение телом состояния своего движения (в частности, состояния покоя) неизменным при отсутствии действия на него сил (или при их равновесии) называется инерцией тела.

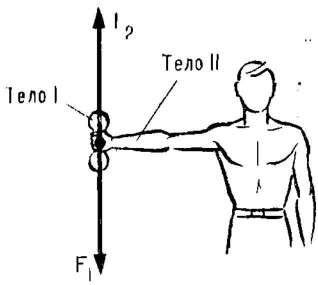


Рис. 1.

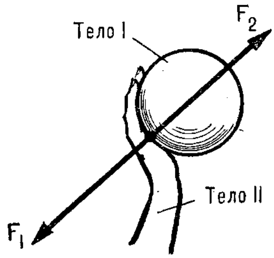


Рис. 2.

Второй закон. *Между силой и изменением скорости (ускорением) существует прямо пропорциональная зависимость**.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). *Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны* (рис. 1).

Равенство действия и противодействия имеет место, например, при ударе по мячу (рис. 2): рука ударяет по мячу, а сила противодействия со стороны мяча действует на руку.

§ 3. Понятие силы

Человек испытывает ощущение мускульного усилия, перемещая какое-либо тело с одного места на другое, при изменении его скорости и т. п. По аналогии с этим ощущением силой называют всякое действие одного тела на другое, в результате которого тело изменяет свое механическое состояние.

Природу возникновения тех или иных сил изучает физика; общую механику интересуют лишь механические изменения состояния данного тела в результате действия на него какой-либо силы (силы тяжести, силы трения и т. д.).

---

* Этот закон является основным законом динамики и рассматривается в соответствующем разделе.

Если изменение состояния тела выражается в изменении скорости его движения, то говорят о динамическом проявлении силы. При медленной деформации тела имеет место статическое проявление силы.

Действие силы на тело определяется: 1) точкой приложения силы, 2) направлением силы и 3) численным значением (модулем) силы, которое находят путем ее сравнения с некоторой другой силой, принимаемой за единицу.

За единицу силы в практике и в технической системе единиц принимается килограмм, т. е. вес международного эталона, равный весу одного кубического дециметра чистой воды при 4°C на уровне моря и на широте 45°.

В международной системе единиц* за единицу силы принимается сила, называемая *ньютоном.*

1 *кГ* $= 9{,}80665$ *н* $\approx 9{,}81$ *н* ≈ 10 *н* — для приближенных расчетов, или 1 *н* $= 0{,}101971$ *кГ* $\approx 0{,}102$ *кГ* $\approx 0{,}1$ *кГ* — для приближенных расчетов; 1 меганьютон (*Мн*) = 1 *н*$\cdot 10^6$ (1 *Мн* $\approx 100\,000$ *кГ*); 1 килоньютон (*Кн*) = 0,001 *Мн* = 1 *н*$\cdot 10^3$ (1 *Кн* ≈ 100 *кГ*).

Приборы, служащие для измерения силы, называются динамометрами. Принцип действия динамометра основан на том, что до известных пределов деформация упругого элемента (пластины) или растяжение пружины пропорциональны силе, их вызывающей, и прекращаются по прекращении действия силы.

§ 4. Скалярные и векторные величины

Существует два ряда физических величин, значительно отличающихся друг от друга. Такие величины, как температура, время, масса и т. д., характеризуются (при выбранной единице меры) числами и называются *скалярными величинами*, или просто скалярами. Для характеристики же таких величин, как сила, скорость, ускорение и др., указания одного их численного значения недостаточно, нужно знать еще и их направление в пространстве. Такие величины называются *векторными величинами*, или просто векторами.

Всякая векторная величина графически изображется прямолинейным отрезком AB (рис. 3), длина которого в выбранном масштабе соответствует численному значению вектора, а направление совпадает с его направлением и указывается стрелкой. Точки A и B отрезка AB являются соответственно началом и концом вектора AB. Численная величина вектора есть положительная скалярная величина, определяемая арифметическим числом.

Так как действия над векторами существенно отличаются от действий над скалярными величинами, то для их отличия друг от друга векторные величины обозначают одной или двумя буквами (первая обозначает начало, а вторая конец вектора) с чертой наверху. Модуль вектора обозначают той же буквой (буквами), что и вектор, но без

* Система СИ — система интернациональная; подробнее см. в гл. XII, § 60.

черты. Для обозначения векторных величин часто применяют жирные буквы, а для скалярных — обычные. Иногда с целью подчеркнуть, что интерес представляет только модуль, букву, обозначающую вектор, ставят в прямые скобки. Так, например $/F/$ — модуль вектора $\overline{F}$, $/AB/$ — модуль вектора $\overline{AB}$.

Различают три типа векторов:

1. Векторы связанные, имеющие определенную точку приложения.

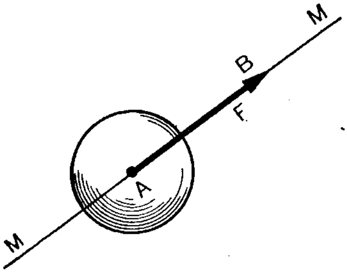


Рис. 3.

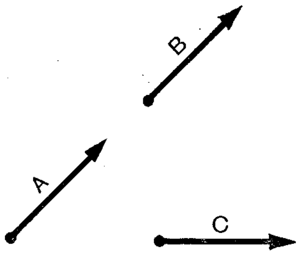


Рис. 4.

2. Векторы скользящие, за начало которых может быть принята любая точка, лежащая на линии их действия. Скользящие векторы можно переносить вдоль этой линии.

3. Векторы свободные, за начало которых может быть принята любая точка пространства.

Два свободных вектора называются равными, если они имеют одинаковые модули и одинаковое направление (т. е. параллельны и направлены в одну сторону). Так, например, векторы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ (рис. 4) — равные векторы. Векторы же $\overline{A}$ и $\overline{C}$, хотя и имеют одинаковые модули, не равны, так как направления их различны.

Раздел I

СТАТИКА

Глава I.

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ

§ 5. Предмет и аксиомы статики

Статикой называется раздел теоретической механики, изучающий условия равновесия тел и механических систем, т. е. те условия, при которых приложенные к телу силы не изменяют его движения, а также определяются возможные положения равновесия.

В основе статики помимо первого и третьего законов классической механики лежат еще аксиомы статики. Они подтверждаются многовековой практикой и принимаются без доказательств.

Прежде чем говорить об аксиомах статики, необходимо ввести несколько определений. Предварительно следует заметить, что все положения статики применимы только к абсолютно твердому телу. При применении же их к реальным деформируемым телам необходимо учитывать особенности последних.

1. Совокупность сил, действующих на данное тело, называется системой сил.

2. Система сил, под действием которой свободное тело не изменяет своего равномерного движения или продолжает оставаться в покое, называется уравновешенной системой сил.

3. Сила, присоединяемая к системе сил, действующих на тело, и приводящая систему к равновесию, называется уравновешивающей силой.

4. Две системы сил, если они оказывают одинаковое механическое действие на одно и то же свободное твердое тело, называются эквивалентными.

Первая аксиома. Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Вторая аксиома. От присоединения к телу или устранения от него уравновешенной системы сил равновесие тела не нарушается.

Следствие. Всякую силу, приложенную в какой-либо точке абсолютно твердого тела, можно, не изменяя ее действия, переносить в любую другую точку, лежащую на линии действия этой силы.

Для абсолютно твердого тела существенна не точка приложения силы, а линия действия ее. Можно сказать, что по отношению к абсолютно твердому телу сила является скользящим вектором.

Третья аксиома. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке и направленных под углом друг другу, приложена в той же точке и по величине и направлению равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

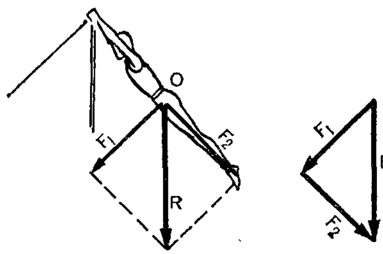


Рис. 5.

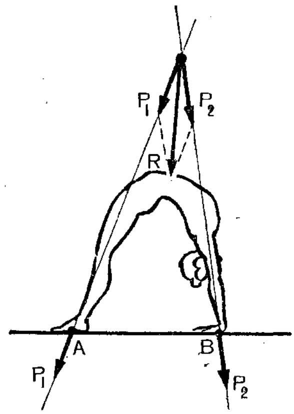


Рис. 6.

Параллелограмм, построенный на данных силах, называется *параллелограммом сил*, а сам способ нахождения равнодействующей таким путем называется *правилом параллелограмма.*

Сложение сил по правилу параллелограмма называют их *геометрическим сложением*. Как и сложение любых векторов, оно обозначается обычным знаком сложения (+), стоящим между буквенными изображениями векторов сил. Если R есть равнодействующая двух сил F_1 и F_2, приложенных к одной точке O тела гимнаста* (рис. 5), то можно записать:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2. \qquad (1)$$

Третья аксиома говорит о равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке. Если же две силы приложены в различных точках тела (A и B) и пересекаются, то, пользуясь следствием, можно перенести обе силы в точку пересечения их линий действия и затем сложить по правилу параллелограмма (рис. 6).

* Здесь тело гимнаста находится в движении, и природа сил F_1 и F_2 будет выяснена в разделе «Динамика». В данном примере важно обратить внимание только на геометрическое сложение этих сил.

П р и м е р I. 1. Альпинист весом $\overline{Q} = 70$ *кГ*, висящий на тросе, оттягивается в сторону веревкой с силой $F = 70$ *кГ*. Найти равнодействующую этих сил, учитывая, что угол $\alpha = 90°$.

Р е ш е н и е. Складывая по правилу параллелограмма силы Q и F, определим их равнодействующую: $\overline{R} = \overline{Q} + \overline{F}$. Так как угол α между заданными силами равен $90°$, диагональ параллелограмма $/ R /$ будет равна:

$$|R| = \sqrt{Q^2 + F^2} = \sqrt{70^2 + 70^2} = 98{,}96 \text{ кГ} = 960 \text{ н}.$$

Таким образом, усилие в тросе, удерживающем альпиниста, при оттягивании увеличилось.

§ 6. Связи и реакции связей

Под *свободным телом* понимают тело, которое под действием сил может перемещаться в любых направлениях (например, летящий мяч, капли дождя). Практически наиболее часто приходится иметь дело с телами несвободными, т. е. с такими, которые соприкасаются или связаны (соединены) с другими телами, благодаря чему перемещения данного тела ограничены или невозможны.

Если тело несвободно, то говорят, что на него наложены связи. *Связями называются тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела.* Так, для человека, стоящего на полу, связью является пол: он препятствует перемещению человека ниже пола. Для гимнаста, находящегося в висе на перекладине, связью является гриф перекладины. Для отдельных звеньев тела человека, соединенных между собой (голень, бедро, стопа, позвоночник и т. п.), связями являются суставные поверхности, связки, суставные сумки и, конечно, мышцы.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется силой реакции этой связи, или просто *реакцией связи*. Сила реакции связи равна по модулю силе давления на связь и направлена в сторону, противоположную последней. Так, например, если тело весом Q находится на гладкой поверхности стола (рис. 7), то его вес* направлен по вертикали вниз. Сила реакции R со стороны стола, действующая на тело, направлена по вертикали вверх. Модули этих сил равны: $/ Q / = / R /$. Реакции связей существуют только тогда, когда данное тело действует на связи; как только прекращается это действие, перестают существовать и реакции связей. Вес тела относится к категории *активных сил*. Силы, не являющиеся силами реакций связей, являются активными силами.

---

* Вес тела — сила контактная, она приложена к связи. Сила тяжести — дистантная сила, она приложена к центру тяжести.

В приведенном примере сила тяжести Q остается неизменной по величине и направлению. При решении задач, где объектом исследования является несвободное тело, рассматриваемая сила приложена к различным телам. Поэтому вместо одного тела имеется система тел, а задача заключается в определении силы, действующей на изучаемое тело, или в установлении условия равновесия этого тела. Так, если нам нужно найти реакцию опоры какого-то предмета (см. рис. 7), то мы имеем дело с этим предметом и опорой (пол), являющейся связью. Поэтому задачи статики — в том числе на равновесие несвободных тел — решаются при следующем допущении. Всякое несвободное тело рассматривают как свободное, мысленно освобожденное от связей, действие которых на тело заменено силами реакций этих связей (*принцип освобождаемости связей*).

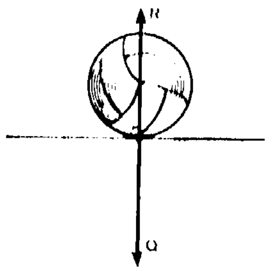


Рис. 7.

При исследовании физических упражнений для определения действующих сил часто приходится пользоваться принципом освобождаемости связей. Поэтому следует познакомиться с основными типами связей.

Простейшей связью является поверхность пола, препятствующая движению тела в определенном направлении. Она показана на рис. 7. Эта поверхность может быть шероховатой или идеально гладкой (не создающей трения). Связь в виде идеально гладкой поверхности называется *идеальной*. В ряде случаев трение тела о поверхность (связь) столь мало, что им можно пренебречь и рассматривать связь как идеальную. Пока речь пойдет об идеальных связях.

Направление реакции связи всегда противоположно тому направлению, по которому данная связь мешает перемещаться телу. Так как абсолютно гладкая поверхность препятствует не скольжению тела по ней, а лишь перемещению, направленному по нормали к поверхности в точке соприкосновения тел, то ее реакция N_2 (рис. 8) направлена по этой нормали. Величина силы реакции равна давлению, производимому телом на поверхность. Поэтому реакция N_1 перпендикулярна гладкой поверхности бруса.

В большинстве случаев направление реакции связи заранее не может быть указано и определение его является сложной задачей. Например, связь, возникающая в плечевом суставе, который приближается по своей форме к шаровому шарниру (рис. 9), имеет неопределенное пространственное направление, а связь в плечелоктевом сочленении (блоковидном) (рис. 10) имеет неопределенное направление в плоскости плечевой и локтевой костей.

Для определения реакции связи на плоскости следует заменить ее двумя составляющими реакциями, линии действия которых могут быть выбраны произвольно. Удобнее неизвестную реакцию разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие. В таком случае (рис. 11), хотя модули составляющих R_x и R_y остаются неизвестными, направление этих сил уже задано.

Разлагая реакцию на составляющие, при постановке задачи можно не заботиться об их направлении. Оно может быть выбрано неправильно. В этом случае при решении задачи получится отрицательное значение — это укажет на истинное направление силы.

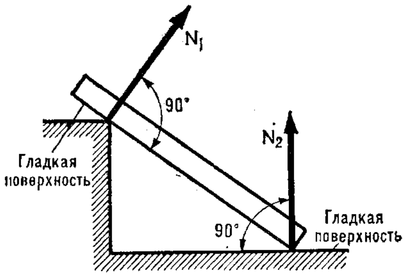


Рис. 8.

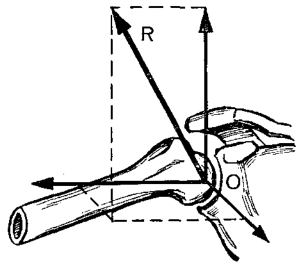


Рис. 9.

Вместо реакции шарнирно-неподвижной опоры можно, как уже было сказано, определить модули двух составляющих этой реакции. Поэтому, когда в изучаемой системе встречается шарнирно-неподвижная опора двух стержней, необходимо помнить о наличии двух неизвестных элементов (F_x и F_y).

До сих пор речь шла о связях с абсолютно гладкими поверхностями. Эти связи препятствуют перемещению тел только в направлении, перпендикулярном к поверхности, и характеризуются одной нормаль-

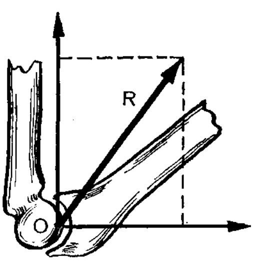


Рис. 10.

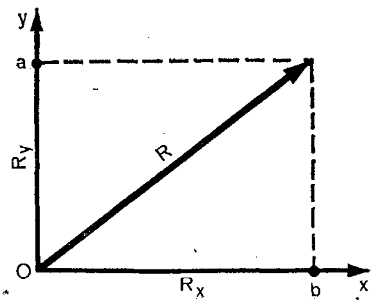


Рис. 11.

ной реакцией (например, как на рис. 8). Негладкая поверхность затрудняет перемещение по самой поверхности. Следовательно, реакция негладкой поверхности должна быть сложной и иметь две составляющие: одну — нормальную, к поверхности, и другую — лежащую в плоскости скольжения и направленную в сторону, противоположную перемещению тела, к которому приложены активные силы. Первая составляющая $\overline{N}$ является нормальной реакцией, вторая — $\overline{R}_{тр}$ носит название силы трения. Следовательно, негладкие опорные поверхности отличаются тем, что сила реакции $\overline{R}$ есть сумма двух составляющих $\overline{N}$ и $\overline{R}_{тр}$:

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{R}_{тр}. \qquad (2)$$

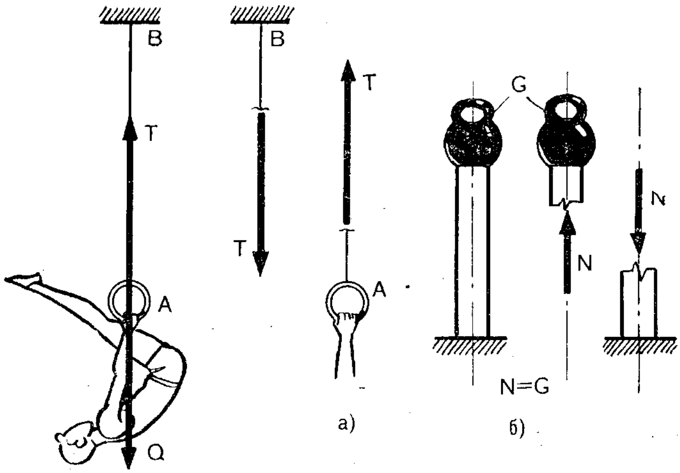


Рис. 12.

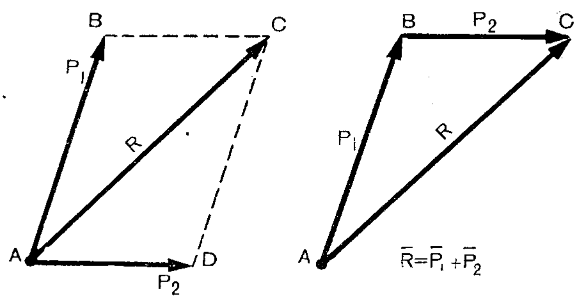


Рис. 13.

Хотя идеально гладких поверхностей, а следовательно, и идеальных связей в действительности не существует, во многих случаях величина силы трения бывает настолько малой, что ею можно пренебречь и практически считать связи идеальными. Примером таких связей являются суставные поверхности.

Помимо связей, осуществляемых путем непосредственного соприкосновения поверхностей тел, бывают связи, осуществляемые через промежуточные тела. Например, тело гимнаста действует на блочный подвес колец через пару тросов, а тело фигуриста оказывает давление на лед через лезвие конька.

Пусть на кольце A троса AB, другой конец которого неподвижно прикреплен к крюку B, висит тело (гимнаст) весом Q (рис. 12). Реакция троса T направлена вертикально вверх и численно равна весу тела Q. Важно заметить, что трос оказывает равное по величине, но противоположное по направлению действие на тела, с которыми он соприкасается своими концами.

Если трос, на котором висит тело, мысленно перерезать, то действие усилия в тросе на подвес и на тело следует показать стрелками, как, например, на рис. 12, *а*. Если такой метод мысленного сечения применить к сжатому стержню, то усилия, действующие в этом стержне, следует приложить к телам, которые он соединял, как показано на рис. 12, *б*.

Глава II.

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 7. Сложение двух сил, приложенных в одной точке

Сходящимися силами называют систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Если все силы данной системы перенести по линиям их действия в общую точку A пересечения этих линий, то действие системы на абсолютно твердое тело не изменится. Это позволяет любую систему сходящихся сил заменить эквивалентной системой сил, приложенных в одной точке. Здесь можно ограничиться рассмотрением системы сходящихся сил, линии действия которых расположены в одной плоскости. Такую систему сил называют плоской системой сходящихся сил.

Сложение двух сил, приложенных к телу в одной точке, графически решается просто. Пусть в точке A твердого тела приложены две силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ (рис. 13). На основании правила параллелограмма сил равнодействующая этих сил $\overline{R}$ приложена в той же точке A и определяется по модулю и направлению диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Для нахождения равнодействующей вместо параллелограмма $ABCD$ удобнее и проще построить только один треугольник ABC. Для этого из конца вектора одной силы ($\overline{P}_1$) проводим вектор ($\overline{BC}$), равный вектору второй силы ($\overline{P}_2$). Замыкающая сторона AC треугольника ABC изображает по модулю и направлению равнодействующую двух данных сходящихся сил. Остается лишь в принятом масштабе измерить ее длину и определить числовое значение. Треугольник ABC называется *силовым треугольником*, а данный способ сложения двух сил — *правилом треугольника*.

Равнодействующую двух сил, приложенных в одной точке, можно найти вычислением, используя тот же силовой треугольник.

§ 8. Разложение силы на две сходящиеся составляющие

Разложить силу на две составляющие — значит найти такую систему двух сил, которая бы производила на тело то же самое действие, что и одна данная сила. Из ранее сказанного следует, что две сходящиеся силы F_1 и F_2 можно заменить одной равнодействующей силой F. Очевидно, и действие на тело одной данной силы F можно заменить действием двух сил F_1 и F_2, обязательно сходящихся на линии действия данной силы F. При этом сила F должна быть диагональю параллелограмма, сторонами которого являются силы F_1 и F_2.

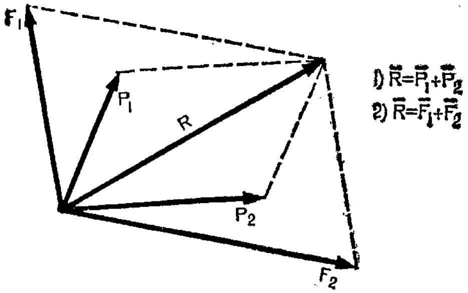


Рис. 14.

Так как на данной диагонали можно построить бесчисленное множество параллелограммов (рис. 14), то для того, чтобы решение было определенным, необходимо знать либо два направления, по которым должны действовать составляющие силы; либо модуль и направление одной из составляющих сил; либо модули обеих составляющих сил; либо модуль одной силы и направление другой.

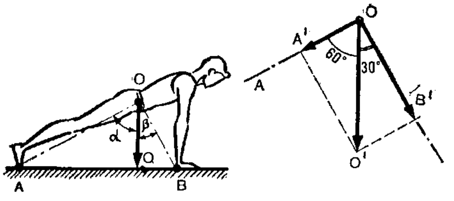


Рис. 15.

Несмотря на широкое применение разложения сил на две и более составляющие, нужно всегда помнить, что этот метод является условным и удобен для решения задач, но не всегда соответствует реально существующим силам в изучаемой системе. Поэтому без тщательного анализа нельзя говорить о существовании сил, полученных на основе производимого разложения.

П р и м е р II. 1. При исследовании физических упражнений наиболее часто силу Q требуется разложить на две сходящиеся силы, направления которых OA и OB заданы (рис. 15). В данном примере речь идет о реальных силах, действующих на опору в точках A и B. Сила Q известна, угол $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$. Требуется определить составляющие силы Q.

Р е ш е н и е. Из начала вектора силы Q проводим прямые OA и OB, а также $O'A'$ и $O'B'$. В результате имеем параллелограмм $OA'O'B$, для которого сила Q является диагональю. Составляющие этой силы есть вектор $\overline{OA'}$ и вектор $\overline{OB'}$. Данные составляющие могут быть определены графиками и расчетами. Так, если сила тяжести $Q =$ 70 *кГ*, то:

$$OA' = Q\cos\alpha = 70\cos 60° = 35\ кГ,$$

$$OB' = Q\cos\beta = 70\cos 30° = 60\ кГ.$$

Из рис. 15 видно, что численная величина составляющих сил тем больше, чем больше угол между их направлениями. При достаточно большом угле модуль каждой из составляющих может быть и больше модуля разлагаемой силы. Это обстоятельство следует учитывать, если мы имеем дело с реальными силами и способом разложения пользуемся с целью учета этих сил.

П р и м е р II. 2. Альпинисту нужно перебраться через расщелину из точки A в точку B с помощью подвесной люльки (рис. 16). Вес люльки и альпиниста $Q = 200$ *кГ*, расстояние $l = 10$ *м*. Определить натяжение T_1 и T_2 тросов при стреле прогиба CD, равной 0,25 *м*; 0,5 *м*; 1,0 *м*.

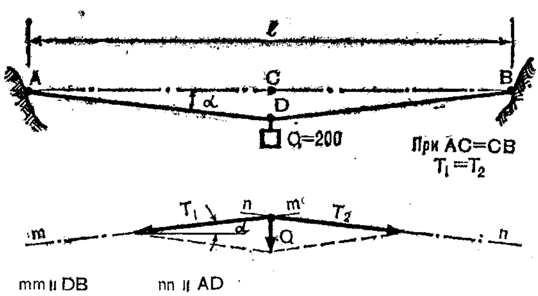


Рис. 16.

Р е ш е н и е. Разложим силу Q на две составляющие T_1 и T_2. Натяжение троса T_1 равно:

$$T_1 = \frac{Q}{2\sin\alpha}.$$

Находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{\frac{l}{2}} = \frac{CD}{5}.$$

Далее находим значения α_1, α_2, α_3 при заданном значении провеса CD и синусы этих углов (табл. 1).

Таблица 1

Расчетная таблица к примеру II. 2 (значения натяжения троса)

CD (*м*)	$\operatorname{tg}\alpha$	α_i	$\sin\alpha$	T_i
0,25	0,05	2°50′	0,05	2000 *кГ* (20 *кн*)
0,50	0,10	5°50′	0,10	1000 *кГ* (10 *кн*)
1,00	0,20	11°20′	0,20	500 *кГ* (5 *кн*)

Расчеты показывают, что если запас прочности троса невелик, то перемещаться следует при больших стрелах его провеса.

§ 9. Силовой многоугольник

Многоугольник, стороны которого равны сходящимся силам и их равнодействующей и одинаково с ними направлены, называется *силовым многоугольником*. Пусть, например, даны три сходящиеся силы F_1, F_2, F_3, которые необходимо сложить. Покажем данные силы в произвольном масштабе векторами, приложенными в точке A (рис. 17). Выберем в плоскости действия сил произвольную точку O и отложим от нее вектор $\overline{OB}$, равный в принятом масштабе силе F_1; из конца его (точка B) проведем вектор $\overline{BC}$, равный силе F_2; из конца этого вектора (точка C) проведем вектор $\overline{CD}$, равный силе F_3. Вектор $\overline{AD}$, соединяющий точки O и D, в выбранном масштабе будет равнодействующей сил F_1, F_2 и F_3. Полученный многоугольник $OBCD$ — силовой многоугольник. Замыкающая сторона его OD, направленная от начала вектора первой силы к концу вектора последней, изображает равнодействующую данной системы сходящихся сил как по величине, так и по направлению. Чтобы определить линию действия равнодействующей, достаточно про-

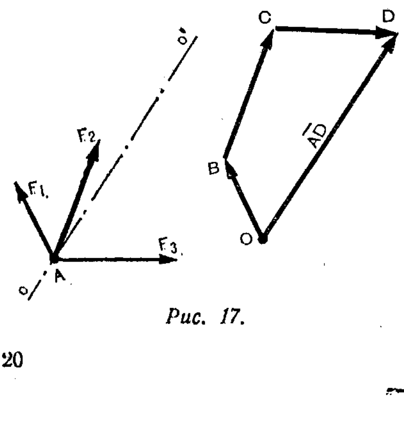


Рис. 17.

вести через общую точку A линий действия сходящихся сил прямую, параллельную замыкающей стороне силового многоугольника OO'.

Правило сложения сходящихся сил является общим правилом сложения любых векторов и называется *геометрическим сложением*. Оно справедливо при любом числе сходящихся сил.

Геометрическое сложение сил можно записать так:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \dots + \overline{F}_n, \qquad (3)$$

или сокращенно:

$$\overline{R} = \sum_1^n \overline{F}_n. \qquad (4)$$

Символ $\sum\limits_1^n$ обозначает, что нужно сложить выражения, стоящие за ним, придавая индексу n все целые значения от указанного под символом до указанного над символом. Иногда для упрощения записи пределы изменения индекса опускают, записывая:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_n. \qquad (5)$$

В таком случае подразумевают, что складываются все силы, начиная от F_1 до F_n. Равнодействующая системы сходящихся сил равна геометрической сумме составляющих. Порядок, в котором строится векторный многоугольник, может быть изменен, так как от перемены мест слагаемых геометрическая сумма не меняется.

§ 10. Определение вектора по его проекциям

Геометрическое сложение векторов, например сил при построении силового многоугольника, связано с графическими построениями и не дает достаточно точных результатов. Поэтому часто прибегают к аналитическим вычислительным методам, основанным на применении метода проекций.

Пусть $\overline{AB} = \overline{F}$ и ось x лежит в плоскости чертежа (рис. 18, *а*). Опустим на нее перпендикуляры из начала A и конца B вектора. Основания перпендикуляров (a и b) называются проекциями этих точек на данную ось.

Длина отрезка (ab) на оси проекций называется *проекцией вектора на данную ось*. Проекцию вектора на ось будем обозначать той же буквой, которой обозначается вектор, указывая индексом ось проекции. Так, например, проекция вектора F на ось x обозначается через F_x. Проекция вектора на ось считается положительной, если ее направление совпадает с направлением оси, и отрицательной,— в противоположном случае. На рис. 18, *а* и 18, *б* видно, что проекция вектора на ось положительна, когда вектор составляет острый угол с направлением оси проекций; проекция вектора отрицательна, когда этот вектор составляет с направлением оси проекций тупой угол. Следовательно:

$$F_{1x} = ab, \quad F_{2x} = -cd.$$

Важно отметить, что проекция вектора на ось представляет собой не векторную, а скалярную величину, так как она вполне определяется знаком и численным значением соответствующего отрезка оси проекций. Часто оказывается удобным проектировать вектор на ось, проходящую через начало вектора, параллельную данной и одинаково

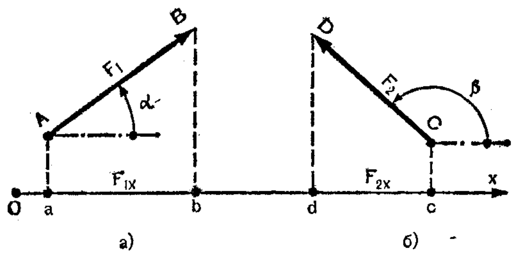


Рис. 18.

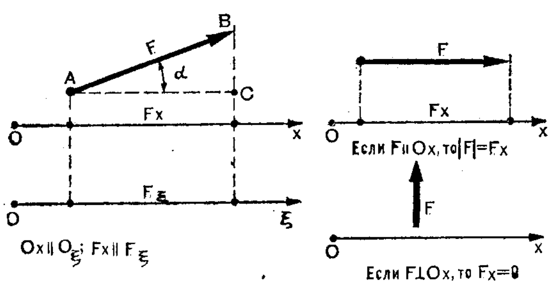


Рис. 19.

направленную. Проекции вектора на две параллельные и одинаково направленные оси равны между собой как отрезки параллельных между параллельными. Это хорошо видно из рис. 19. Ось ξ параллельна данной оси x и одинаково с ней направлена. Из прямого треугольника ABC имеем:

$$F_x = F \cos \alpha. \tag{6}$$

Проекция вектора на ось равна модулю этого вектора, умноженному на косинус угла между вектором и положительным направлением оси проекций.

Это равенство определяет численное значение проекции и ее знак. В рассматриваемом случае (см. рис. 18, *а*) угол α острый, следовательно, его косинус положителен и проекция силы F_1 положительна. На рис. 18, *б* проекция вектора $\overline{F}_2$ отрицательна, так как угол β между вектором и положительным направлением оси проекций тупой и косинус этого угла отрицателен.

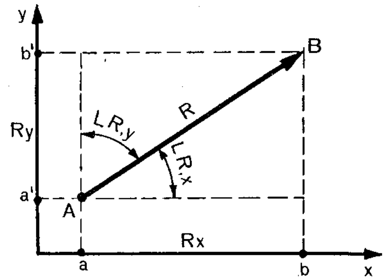


Рис 20.

Если вектор параллелен оси проекций ($\alpha = 0$ или $\alpha = 180°$), проекция вектора равна его модулю, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от направления вектора. Если вектор перпендикулярен к оси проекций ($\alpha = 90°$), то его проекция равна нулю.

Для определения вектора на плоскости нужно знать его проекции на две оси прямоугольной системы координат. В этом случае, как видно из рис. 20, вектор $\overline{R}$ является диагональю прямоугольника, стороны которого численно равны проекциям вектора на координатные оси. Отсюда следует, что модуль вектора $\overline{R}$ равен:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \qquad (7)$$

Направление вектора определяется из равенств

$$R_x = R\cos(\overline{R,\ x}) \quad \text{и} \quad R_y = R\cos(\overline{R,\ y})$$

где $(\overline{R,\ x})$ и $(\overline{R,\ y})$ — углы, образуемые вектором с положительным направлением соответствующей оси проекций. Отсюда:

$$\cos(R,\ x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(R,\ y) = \frac{R_y}{R}. \qquad (8)$$

Таким образом, всякий вектор на плоскости вполне определяется (задан), если даны две его проекции на координатные оси. Для определения вектора в пространстве нужно знать его проекции на три координатные оси.

§ 11. Проекция геометрической суммы векторов на ось

Теорема. *Проекция геометрической суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.*

Пусть дано несколько векторов, например, $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, расположенных в одной плоскости. По правилу сложения векторов геометрической суммой их будет вектор $\overline{AD} = \sum \overline{F_n}$, представляющий собой замыкающую сторону векторного многоугольника $ABCD$, сторонами которого служат составляющие векторы (рис. 21).

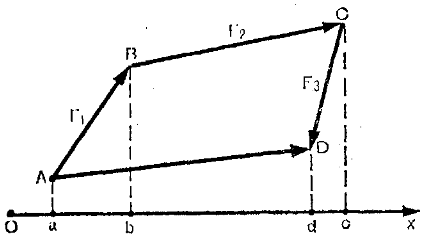


Рис. 21.

Проектируя векторы на какую-нибудь ось x, получим:

$$F_{1x} = ab, \quad F_{2x} = bc,$$
$$F_{3x} = -cd, \quad R_x = ad.$$

Из рисунка видно, что $ad = ab + bc - cd$, т. е.

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum F_{nx}, \tag{9}$$

что и требовалось доказать.

Данная теорема справедлива для векторов, расположенных не только в плоскости, но и как угодно в пространстве, и при любом их количестве.

§ 12. Определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Как уже говорилось, равнодействующая системы сходящихся сил равна их геометрической сумме; проекция геометрической суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.

Отсюда следует, что проекция равнодействующей системы сходящихся сил на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось:

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \sum X_n,$$
$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n = \sum Y_n. \tag{10}$$

Эти уравнения дают возможность определить, если известны проекции сил на какую-либо ось, проекцию равнодействующей на ту же ось. Зная проекции какой-либо силы на две взаимно перпендикулярные оси, в плоскости которых лежит вектор данной силы, можно определить по формулам (7) и (8) ее модуль и направление. Модуль равнодействующей плоской системы сходящихся сил, лежащих в одной плоскости, определяется по формуле:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\Sigma X_n)^2 + (\Sigma Y_n)^2}. \tag{11}$$

Углы между равнодействующей и координатными осями можно определить по формулам:

$$\cos(\overline{R}, x) = \frac{R_x}{R} = \frac{\Sigma X_n}{\sqrt{(\Sigma X_n)^2 + (\Sigma Y_n)^2}},$$

$$\cos(\overline{R}, y) = \frac{R_y}{R} = \frac{\Sigma Y_n}{\sqrt{(\Sigma X_n)^2 + (\Sigma Y_n)^2}}. \quad (12)$$

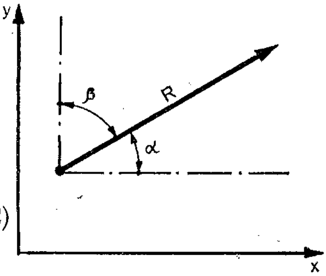


Рис. 22.

Углы принято обозначать $(\overline{R}, x)$ или $(\overline{R}, y)$, т. е. указывать направления векторов или осей, между которыми лежит искомый угол. Так, угол $\alpha = (\overline{R}, x)$, угол $\beta = (\overline{R}, y)$ (рис. 22). Формулы (11) и (12) дают возможность определить модуль и направление равнодействующей системы сходящихся сил, применяя алгебраические вычисления (аналитический метод).

§ 13. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Ранее было показано, что всякая система сходящихся сил может быть заменена равнодействующей. *Если эта система сил находится в равновесии, то ее равнодействующая должна быть равна нулю.*

Рассмотрим геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил.

Равнодействующая сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника. Чтобы равнодействующая равнялась нулю, замыкающая сторона многоугольника должна также равняться нулю. Иначе говоря, необходимо, чтобы силовой многоугольник замыкался сам по себе. Это положение можно сформулировать так: *для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный для этой системы сил, был замкнутым.*

На рис. 23 для находящейся в равновесии плоской системы сходящихся сил $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, $\overline{P_3}$ и $\overline{P_4}$ построен замкнутый силовой многоугольник. В нем конец вектора последней силы совпадает с началом вектора первой. Это и есть геометрическое условие равновесия.

Теперь рассмотрим аналитическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил. При использовании аналитического метода для анализа равновесия величина равнодействующей определяется по формуле:

$$R = \sqrt{(\Sigma X_n)^2 + (\Sigma Y_n)^2}. \quad (13)$$

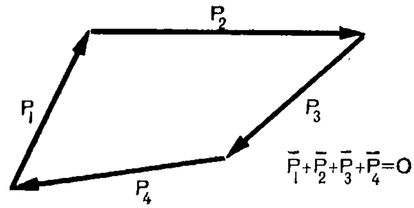


Рис. 23

Если $R = 0$, и при условии, что $(\Sigma X_n)^2$ и $(\Sigma Y_n)^2$— всегда положительные, будем иметь:

$$\Sigma X_n = 0 \text{ и } \Sigma Y_n = 0. \quad (14)$$

Эти уравнения называются *уравнениями равновесия.*

Таким образом, *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух любых взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости действия сил, равнялись нулю.* На практике очень часто приходится встречаться с действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, взаимно уравновешиваются, то линии их действия пересекаются в одной точке.

Это нетрудно доказать путем построения треугольника равновесия этих сил.

§ 14. Решение задач о равновесии плоской системы сходящихся сил

Задачи о равновесии плоской системы сил, расположенных любым образом, рекомендуется решать в определенном порядке. Прежде всего следует, пользуясь принципом освобождаемости (см. § 6), освободить тело или точку, равновесие которых рассматривается, от их связей, заменяя последние соответствующими реакциями. Затем нужно сделать схематический чертеж, нанеся на него все активные силы и все реакции связей, приложенные к телу или точке. (Напомним, что в статике признаком равновесия тела является его неподвижность.) Далее надо использовать условия равновесия сил в геометрической или аналитической форме, смотря по тому, какая из них оказывается более простой и удобной в данной задаче. В первом случае для системы сходящихся сил определяют искомые силы или другие неизвестные в данной задаче величины при помощи построения замкнутого силового многоугольника. Во втором — находят искомые величины, пользуясь методом проекций, из уравнений равновесия (14).

За начало координат удобно принимать ту точку, в которой сходятся силы. Координатные оси следует направлять так, чтобы проекции сил на эти оси можно было находить наиболее просто: часто располагают одну из осей перпендикулярно к линии действия одной из неизвестных сил, в этом случае проекция этой неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия и расчеты упрощаются.

Пример II. 3. На велосипедиста, движущегося по окружности с некоторым радиусом, действуют сила тяжести $Q = 81$ *кГ* и центробежная сила $F' = 30$ *кГ* (рис. 24). Необходимо найти равнодействующую $\overline{R}$, если известно, что система велосипедист — велосипед отклонена от вертикали под углом $\alpha = 20°$ к горизонту (т. е. под углом, равным углу наклона трекового пути к горизонту).

Решение. Точку O удобно принять за начало координат, а линию действия силы F

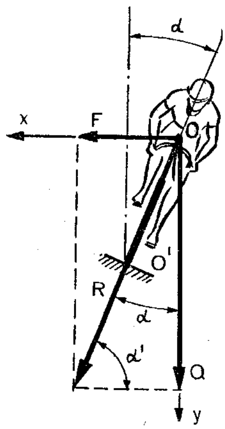


Рис. 24.

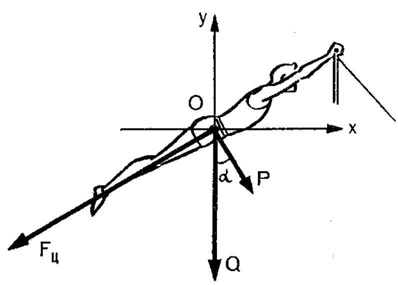


Рис. 25.

за ось x. Ось y направлена перпендикулярно к оси x. Проектируя силы на координатные оси, имеем:

$$X_1 = Q\cos(\overline{Q}, x) = 0,$$

$$X_2 = F\cos(\overline{F}, x) = 30\cos 0° = 30 \text{ кГ } (295 \text{ н}),$$

$$Y_1 = Q\cos(\overline{Q}, y) = 81\cos 0° = 81 \text{ кГ } (794 \text{ н}),$$

$$Y_2 = F\cos(\overline{F}, y) = 30\cos 90° = 0.$$

По формуле 10 определяем проекцию равнодействующей на ось x:

$$R_x = \Sigma X_n = 0 + 30 = 30 \text{ кГ } (295 \text{ н}),$$

$$R_y = \Sigma Y_n = 81 + 0 = 81 \text{ кГ } (794 \text{ н}).$$

По формуле 11 определяем величину (модуль) равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{81^2 + 30^2} = 86 \text{ кГ } (844 \text{ н}).$$

Направление равнодействующей определяем по одной из формул 12:

$$\cos\left(\overline{R},\ x\right) = \frac{R_x}{R} = \frac{30}{86} = 0{,}35.$$

Отсюда (по таблицам тригонометрических функций) находим:

$$\angle\left(\overline{R},\ x\right) = 69°30' \approx 70°.$$

Итак, равнодействующая R, проходящая через точку O и точку O' (место соприкосновения колеса с грунтом), наклонена к горизонтальной поверхности под углом $\alpha' = 70°$.

Пример II. 4*. На гимнаста, выполняющего большой оборот, в некоторый момент времени действуют силы, приложенные в точке O: сила тяжести $Q = 80$ *кГ*, центробежная сила $F_ц = 200$ *кГ* и сила, с которой тренер помогает ему выполнить упражнение, $P = 40$ *кГ* (рис. 25). Нужно найти равнодействующую сил, приложенных к телу гимнаста. Известно, что сила P перпендикулярна линии действия силы $F_ц$. Угол α между Q и P в исследуемый момент равен 20°.

Решение. Примем центр тяжести тела гимнаста за начало координат, оси которых расположены по вертикали и горизонтали.

Определим проекции сил на оси координат.

Проекция на ось Ox:

$$P_x = P\cos(90° - \alpha) = 40 \cdot \cos 70° = 40 \cdot 0{,}34 = 13{,}6\ кГ\ (133\ н),$$

$$Q_x = Q\cos 90° = 0,$$

$$F_{цx} = -F_ц\cos\alpha = -200 \cdot \cos 20° = -200 \cdot 0{,}94 =$$
$$= -188\ кГ\ (-1850\ н).$$

Проекция равнодействующей на ось Ox:

$$R_x = P_x + Q_x + F_{цx} = 13{,}6 + 0 - 188 = -174{,}4\ кГ\ (-1710\ н).$$

Проекция на ось Oy:

$$R_y = -P\cos\alpha = -40\cos 20° = -40 \cdot 0{,}94 = -38\ кГ\ (-373\ н),$$

$$Q_y = Q = -80\ кГ,$$

$$F_{цx} = -F_ц\cos 70° = -200 \cdot 0{,}34 = -68\ кГ\ (-670\ н).$$

Проекция равнодействующей на ось Oy:

$$R_y = P_y + Q_y + F_{цy} = -38 - 80 - 68 = -196\ кГ\ (-1920\ н)$$

Равнодействующая:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-174{,}4)^2 + (-196)^2} = 263\ кГ\ (2580\ н).$$

---

* Данный пример не относится к статике — он приведен здесь для упражнения в определении равнодействующей методом проекций.

Угол между осью Ox и равнодействующей R находим по формуле 12:

$$\cos(\overline{R}, x) = \frac{R_x}{R} = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} = \frac{-174,4}{263} = -0,664.$$

Он равен 48°36′. Знак минус перед косинусом означает, что угол необходимо отложить от отрицательного направления оси x.

Пример II. 5. Определить усилия в тросах гимнастических колец P_1 и P_2 при выполнении гимнастом упора руки в стороны (рис. 26). Сила тяжести гимнаста (Q) дана.

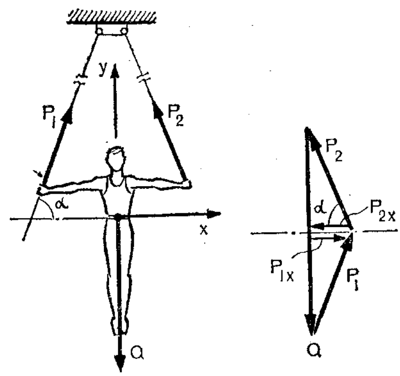


Рис. 26.

Решение. Примем центр тяжести тела гимнаста за начало координат x и y, направленных горизонтально и вертикально. Определим проекции сил P_1, P_2 и Q на оси координат.

Проекции на ось x:

$$P_{1x} = P_1 \cos\alpha,$$

$$P_{2x} = -P_2 \cos\alpha,$$

$$Q_x = 0.$$

Проекция равнодействующей на ось x:

$$R_x = P_1 \cos\alpha - P_2 \cos\alpha,$$

или, так как при равновесии $R_x = 0$, то $|P_1| = |P_2|$.

Проекция на ось y:

$$P_{1y} = P_1 \sin\alpha,$$

$$P_{2y} = P_2 \sin\alpha,$$

$$Q_y = -Q.$$

Проекция равнодействующей на ось y:

$$R_y = P_1 \sin\alpha + P_2 \sin\alpha - Q = 2P \sin\alpha - Q,$$

или, так как при равновесии $R_y = 0$, то $P = \frac{Q}{2\sin\alpha}$.

На рис. 26 показана также схема графического решения этой задачи. В построенных силовых треугольниках Q является уравновешивающей силой для усилий в тросах. Из рисунка видно, что при укорочении подвески колец (при уменьшении α) усилие в каждом тросе увеличивается; увеличивается также горизонтальная составляющая усилия, называемая распором, которая оказывает «заклинивающее» действие на тело гимнаста в данном упражнении и облегчает удержание «креста». Поэтому укороченными подвесками колец целесообразно пользоваться при обучении данному упражнению. Обычно применяют пояс (ручную лонжу), делая с помощью него перехваты тросов на различных уровнях.

Глава III.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИЛЫ, ПАРА СИЛ И МОМЕНТЫ СИЛ

§ 15. Сложение параллельных сил. Пара сил и ее действие на тело

Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону, производится в соответствии с теоремой*: *равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, параллельна им и направлена в ту же сторону; линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.*

Система двух равных по модулю и параллельных сил, направленных в противоположные стороны, называется *парой сил*. Примером такой системы сил могут служить усилия, передаваемые от рук шофера на рулевое колесо автомобиля (рис. 27, *а*). Пара сил имеет очень большое значение при анализе спортивных движений.

Сумма сил пары равна нулю: $f_1 - f_2 = 0$ (рис. 27, *б*), т. е. пара сил не имеет равнодействующей. Несмотря на это, тело, на которое действует пара сил, не находится в равновесии. Пара сил, как показывает опыт, стремится вращать тело, к которому она приложена. Это свойство количественно определяется *моментом пары***, равным произведению одной из сил на кратчайшее расстояние между линиями действия сил.

Обозначим момент пары через M, а расстояние между силами — через h. Тогда абсолютная величина момента (см. рис. 27, *б*) будет:

$$M = Fh = F_1h. \tag{15}$$

* Предлагается доказать учащимся.

** Момент пары есть векторная величина. Здесь имеется в виду модуль момента пары.

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил называется *плечом пары*, поэтому можно сказать, что момент пары сил численно равен произведению одной из сил пары на ее плечо.

Так как пара сил не имеет равнодействующей, ее нельзя уравновесить одной силой. Пара сил может быть уравновешена другой парой.

Поскольку в технической системе единиц силу измеряют в килограммах, а плечо в метрах, момент пары сил измеряется в килограммометрах (*кГм*). В Международной системе единиц (СИ) силу измеряют в ньютонах, а плечо в метрах. Соответственно момент пары в системе СИ измеряется в ньютонометрах (*нм*).

1 меганьютонметр (*мнм*) = 1000 *кнм* (*мнм* $\approx 10^5$ *кГм*), 1 килоньютонметр (*кнм*) = 0,001 *мнм* (1 *кнм* $\approx$ 100 *кГм*).

Момент пары сил считают положительным, если пара стремится вращать тело против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

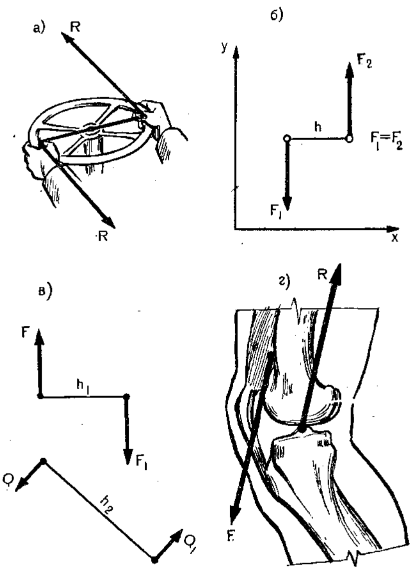


Рис. 27.

Две пары сил считают эквивалентными в том случае, когда после замены одной пары сил другой состояние тела не изменяется, т. е. не изменяется движение тела или не нарушается равновесие. Пару сил в плоскости ее действия можно переносить в любое положение: эффект действия пары сил на твердое тело от этого не зависит.

Основой для сложения пар является следующее свойство пары сил: можно как угодно изменять величины сил и плечо пары, не нарушая состояния тела, если момент пар остается неизменным. Так, пару сил FF_1 с плечом h_1 (рис. 27, *в*) можно заменить парой QQ_1 с плечом h_2, сохраняя момент пары неизменным.

Примером пары сил в биомеханических системах может служить пара: активная мышечная тяга (F) — реакция суставного сочленения (R) (рис. 27, *г*).

§ 16. Сложение пар сил

Пары сил, подобно отдельным силам, можно складывать. Пара сил, заменяющая собой данные пары, называется *результирующей*.

Сложим две пары, расположенные в одной плоскости: P_1P_1 и P_2P_2 с плечами h_1 и h_2 (рис. 28), т. е.

$$M_1 = P_1 h_1,$$
$$M_2 = -P_2 h_2.$$

Приведем данные пары к одному плечу, не изменяя величины моментов каждой пары. Некоторый отрезок $AB = H$ примем за общее плечо преобразованных пар. Обозначим $\overline{Q_1}$, $\overline{Q_2}$ и $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ силы эквивалентных пар. Тогда

$$M_1 = P_1 h_1 = Q H,$$
$$M_2 = -P_2 h_2 = -F_1 H.$$

Складывая силы, приложенные в точках A и B, найдем их равнодействующие:

$$\overline{R}_1 = \overline{Q}_1 - \overline{F}_1,$$
$$\overline{R}_2 = \overline{Q}_2 - \overline{F}_2. \qquad (16)$$

Равнодействующие $\overline{R_1}$ и $\overline{R_2}$, равные по величине и направленные в противоположные стороны, образуют пару сил R_1R_2, момент которой

$$M = R_1 H = R_2 H. \qquad (17)$$

Пара R_1R_2 представляет собой результирующую пару. Подставим в уравнение 17 значение $\overline{R}$ из уравнения 16. Получим:

$$M = R_1 H = (Q_1 - F_1) H.$$

А так как

$$QH = M_1,$$
$$-F_1 H = M_2,$$

то

$$M = M_1 + M_2.$$

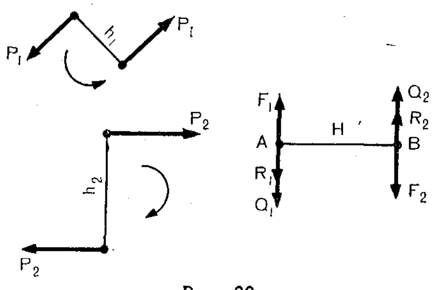


Рис. 28.

Таким образом, приходим к заключению, что *момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.* Это положение применимо к любому числу пар, лежащих в одной плоскости. Поэтому при произвольном числе слагаемых пар момент результирующей пары определяется по формуле:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i. \qquad (18)$$

Для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары равнялся нулю или чтобы алгебраическая сумма моментов пар равнялась нулю.

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0. \qquad (19)$$

§ 17. Момент силы относительно точки

Пусть некоторое тело (пластина) будет вращаться около точки O (рис. 29, *а*). Чтобы привести его во вращательное движение, нужно приложить силу $\overline{F}$. Если она будет направлена вдоль линии, проходящей через ось O, то движения (вращения) не произойдет, так как эта сила будет уравновешена реакцией опоры (оси). Если сила $\overline{F}$ будет иметь какое-либо другое направление, то она вызовет вращение тела. Мерой действия силы, вызывающей вращение тела, служит *момент силы.*

*Моментом силы относительно точки** *называется произведение величины силы на плечо*, т. е. на перпендикуляр, опущенный из данной точки на линию действия силы (рис. 29, *б*). Точка, относительно которой берется момент, называется центром момента, а перпендикуляр h — плечом силы относительно центра момента.

Момент силы $\overline{F}$ относительно O обозначается:

$$M_O\left(\overline{F}\right) = Fh. \qquad (20)$$

Моменты сил измеряют в килограммометрах (*кГм*) или в ньютонометрах (*нм*), как и моменты пар.

Принято считать момент силы положительным, если сила стремится вращать тело против хода часовой стрелки (рис. 29, *в*), и отрицательным — в противоположном случае (рис. 29, *г*). Когда линия действия силы проходит через данную точку, ее момент относительно этой точки равен нулю, так как плечо равно нулю. Величина и направление (знак) момента силы зависят от положения точки, относительно которой определяется момент.

Пример III. 1. На рис. 30 показаны три положения гимнаста относительно грифа перекладины (точка O). Вес гимнаста (Q) равняется 70 *кГ*. В зависимости от его положения плечо h принимает значения $h_a = 0{,}45$ *м*; $h_b = 1{,}0$ *м* и $h_c = 0{,}25$ *м*. Необходимо определить момент силы тяжести, действующей на гимнаста в положениях a, b и c. Плечи — длины перпендикуляров, опущенных из точки O на линию действия силы Q, приложенной в центре тяжести тела,— заданы.

---

* Момент силы относительно точки есть векторная величина. Здесь имеется в виду модуль момента силы.

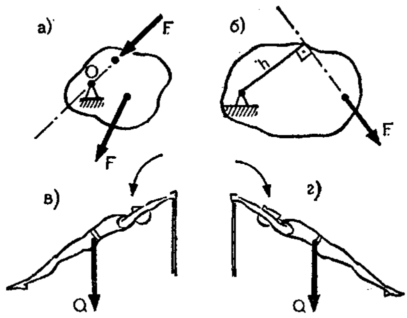


Рис. 29.

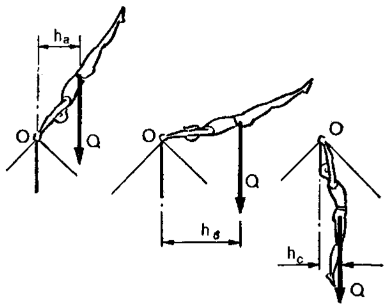


Рис. 30.

Р е ш е н и е. Момент силы тяжести Q относительно точки O

$$M_O(\overline{Q}) = Qh$$

во всех трех случаях будет отрицательным, так как сила стремится вращать тело гимнаста по ходу часовой стрелки.

$$M_O^a(\overline{Q}) = -Qh_a = -70 \cdot 0{,}45 = -30{,}5\ кГ\ (-0{,}305\ кнм),$$

$$M_O^b(\overline{Q}) = -Qh_b = -70 \cdot 1{,}0 = -70{,}0\ кГм\ (-0{,}700\ кнм),$$

$$M_O^c(\overline{Q}) = -Qh_c = -70 \cdot 0{,}25 = -17{,}5\ кГм\ (-0{,}175\ кнм).$$

§ 18. Момент силы относительно оси

Наиболее часто центром момента является точка, лежащая на оси вращения. Эффект действия силы на тело в этом случае зависит от величины силы, ее наклона к оси и расстояния от точки приложения силы до оси. Силы, проходящие через ось, и силы, параллельные оси, не могут вызвать вращения тела вокруг этой оси. Для оценки вращательного эффекта силы относительно закрепленной оси пользуются понятием момента силы относительно оси $M_z(\overline{F})$, где z — ось вращения.

Пусть на тело в какой-либо точке, например точке A (рис. 31), действует произвольная сила F, не параллельная оси вращения Q_z и не пересекающая ее. Проведем плоскость Q, перпендикулярную оси O_z и проходящую через начало A вектора силы. Разложим заданную силу $\overline{F}$ на две составляющие: $\overline{F_1}$, расположенную в плоскости Q, и $\overline{F_2}$, параллельную оси O_z.

Составляющая $\overline{F_2}$, параллельная оси O_z, не создает момента относительно этой оси. Составляющая $\overline{F_1}$, действующая в плоскости Q, создает момент относительно оси O_z или, что то же самое, относительно

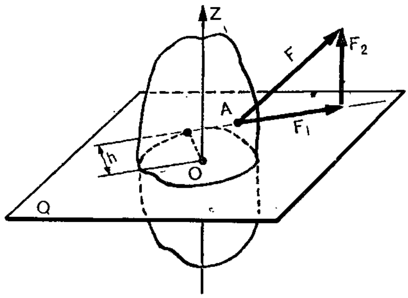


Рис. 31.

точки O. Момент силы F_1 измеряется произведением модуля самой силы на длину перпендикуляра h, опущенного из точки O на линию действия этой силы, т. е.

$$M_z(\overline{F}) = F_1 h. \tag{21}$$

В выражение момента силы относительно оси входит только составляющая сила, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Знак момента по общему правилу определяется направлением вращения тела: (+) при вращении против хода часовой стрелки, (—) при вращении по ходу часовой стрелки. При определении знака момента следует находиться со стороны положительного направления оси. Поэтому на рис. 31 момент силы F относительно оси O_z отрицателен.

Итак, для определения момента силы относительно оси нужно: 1) спроектировать силу на плоскость, перпендикулярную оси, 2) найти момент проекции силы на плоскость относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. Нередко определение момента силы относительно оси сводится к определению момента силы относительно точки на оси вращения (как на рис. 31). При исследовании спортивных движений определять момент силы относительно точки или оси вращения приходится очень часто: выполняя различные упражнения, спортсмен совершает движения в вертикальной плоскости, расположенной перпендикулярно оси вращения.

§ 19. Рычаги. Равновесие рычага

Рычагом называется твердое тело, шарнирно закрепленное на некоторой оси. В технике рычаг — это чаще всего брус правильной формы. В биомеханике и анатомии тело, образующее рычаг, может иметь довольно сложную форму (рис. 32). При решении многих задач приходится рассматривать равновесие тела, шарнирно закрепленного на некоторой неподвижной оси (рычаг).

Рычаг может вращаться вокруг оси закрепления или центра шарнира. *Рычаг будет находиться в равновесии, когда алгебраическая сумма моментов всех действующих на него сил относительно его неподвижной точки О равна нулю:*

$$\sum M_O \left(\overline{F}_i \right) = 0. \tag{22}$$

Для рычага (рис. 33, *а*):

$$-F_1h_1 + F_2h_2 = 0 \tag{22a}$$

или

$$F_1h_1 = F_2h_2.$$

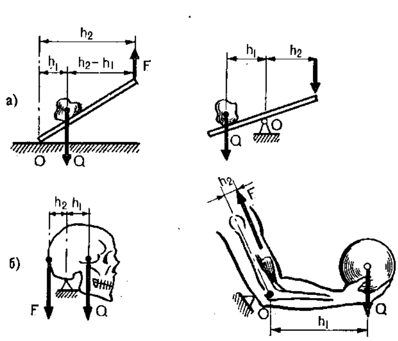


Рис. 32.

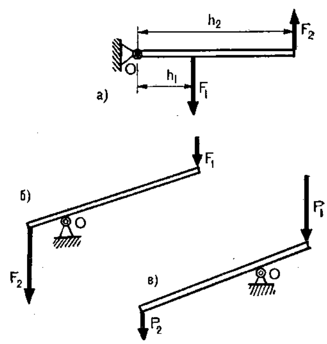


Рис. 33.

Подбирая соотношения плеч, можно изменять соотношение сил. Рычаги, показанные на рис. 33, *б*, служат для получения большей силы при малой приложенной ($F_2 > F_1$). Рычаг на рис. 33, *в* требует приложения силы P_1 большей, чем сила P_2; однако здесь при малом перемещении силы P_1 достигается относительно большое перемещение точки приложения силы P_2.

§ 20. Составные рычаги

В биомеханике часто встречаются составные рычаги, нагруженные на конце. По существу, это стержни, связанные шарниром, лежащие почти на одной прямой линии (рис. 34). Чтобы расположить их вдоль прямой OO', нужно преодолеть ничтожно малый угол α. Подобная система характерна для сочленения бедренной и большой берцовой, локтевой и плечевой костей.

Приложив к составному рычагу малую силу F (рис. 35), можно преодолеть большую силу Q (почти выпрямленная рука при ударе в боксе, почти выпрямленные ноги при подъеме тяжести и т. д.):

$$F = \frac{sQ}{l\alpha}, \tag{23}$$

где s — удлинение сложного рычага,
l — длина звеньев составного рычага,
α — малый угол.

Сила F намного больше Q, так как l относительно велика, а угол α — мал. Для решения данной задачи допустим, что имеется составной рычаг (рис. 36), включающий стержни AB и BC, соединенные меж-

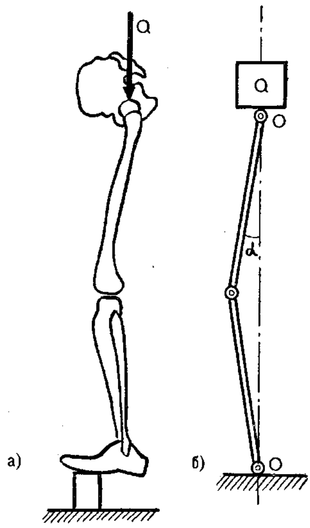


Рис 34.

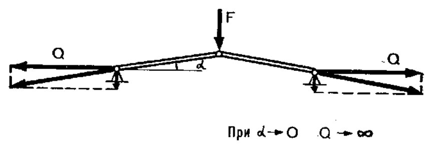


Рис. 35.

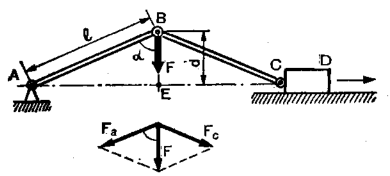


Рис. 36.

ду собой в точке B шарниром. В точке A рычаг также «связан» шарниром, а в точке C упирается в тело D и может его перемещать. Пусть в точке B приложена сила $\overline{F}$, направленная по вертикали вниз. Сила F в точках A и C действует на основание: F_a и F_c (в результате симметрии они равны между собой). Определим эти силы, произведя разложение силы F на две составляющие (см. § 8):

$$F_a = F_c = \frac{F}{2\cos\alpha}.$$

Каждая из этих сил значительно больше силы F, оказывающей давление на шарнир B. Если $l = 0{,}4$ *м*, а $d = 0{,}005$ *м*, то $l/d = \frac{0{,}4}{0{,}00} = 80$. Значит, силы F_a и F_c будут превосходить силу F приблизительно в

40 раз. Поэтому, несмотря на то, что сама сила F в результате специфического действия многосуставных мышц не достигает значительных величин, силы F_a и F_c оказываются весьма большими. Подобную систему рычагов представляют собой верхние и нижние конечности человека.

Кости скелета человека являются элементами сложных биомеханических систем. Костные рычаги образуют своеобразные кинематические цепи, дополненные мышечными тягами. На рис. 37 схематически представлена верхняя конечность человека. В ней можно выделить рычаг, состоящий из костных стержней (локтевой и лучевой костей).

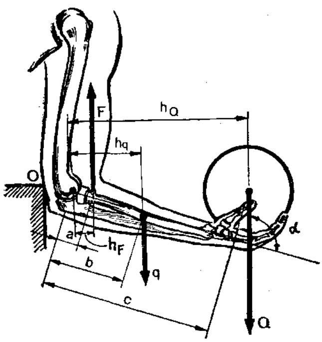


Рис. 37.

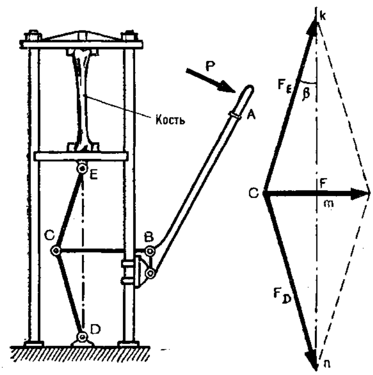


Рис. 38.

Конец этого рычага имеет шарнирное соединение (локтевой сустав). Если в руке груза нет, то сила $Q = 0$. В этом случае на рычаг действует сила q — сила тяжести предплечья и сила тяги мышц-сгибателей предплечья. Для равновесия рычага необходимо, чтобы сумма моментов относительно точки O была равна нулю:

$$M_O = \sum M_O(F_i) = 0.$$

Если предположить, что сгибание предплечья производит только двуглавая мышца плеча, то можно составить равенство:

$$Fh_F - qh_q = 0, \qquad F = \frac{qh_q}{h_F}.$$

Как видно из рис. 37, $h_F < h_q$, поэтому сила F, развиваемая мышцей, должна быть больше силы q. С изменением угла между локтевым и плечевым звеньями меняется величина плеч. Плечи рычагов h_F, h_Q и h_q изменяют свою длину в зависимости от угла α.

Если к кисти руки приложена сила Q, условие равновесия может быть записано так:

$$Fh_F - qh_q - Qh_Q = 0.$$

Отсюда:

$$F = \frac{qh_q + Qh_Q}{h_F}.$$

Сила F, развиваемая мышцей, должна быть очень большой, так как величина h_Q значительно больше h_F.

Пример III. 2. Найти величину усилия F, сжимающего кость в испытательном прессе, при следующих условиях: сила $P = 20$ *кГ* и направлена перпендикулярно к рычагу OA, имеющему неподвижную ось O; в рассматриваемом положении пресса тяж BC перпендикулярен к OB и делит $\angle ECD$ пополам; причем $\angle CED = \mathrm{arctg}\ 0{,}2 = 11°20'$; $OA = 1$ *м*; $OB = 10$ *см* (рис. 38).

Решение. Механизм ECD представляет собой кинематическую цепь — составной рычаг. Угол между этим рычагом и прямой ED относительно мал ($11°20'$). Один конец рычага зафиксирован в точке D с помощью шарнира, другой — «связан» шарниром с захватом для нижней головки кости. К точке C приложена сила F, стремящаяся выпрямить рычаг. Ее можно определить, так как OA — это рычаг, закрепленный в точке O. Для его равновесия необходимо, чтобы $F \cdot OB = P \cdot OA$, откуда:

$$F = \frac{P \cdot OA}{OB} = \frac{20 \cdot 1{,}0}{0{,}1} = 200\ \textit{кГ}\ (2\ \textit{кн}).$$

Определим силу F_E, действующую на нижний захват кости. Для этого силу F разложим на две составляющие: F_E и F_D, направленные по CE и CD. Из начала вектора $\overline{F}$ по направлению звеньев CE и CD проведем линии дйствия сил F_E и F_D; из конца — линии, параллельные линиям CD и CE. Точка k — конец вектора F_E, а точка n — конец вектора F_D. В силу симметрии модули сил F_E и F_D равны. $\angle Ckm = \beta = 11°20'$; $\angle Cnm$ также равен $\beta = 11°20'$. Отрезки Ck и Cn равны. ΔCmk — прямоугольный. Ck — гипотенуза этого треугольника, Cm — катет, равный половине силы F (см. треугольник равновесия). Поэтому:

$$|F_E| = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{\sin\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{\sin(11°20')} = 500\ \textit{кГ}\ (5\ \textit{кн}).$$

Итак, в совокупности два рычага CE и CD привели к увеличению силы в 25 раз, на долю составного рычага приходится увеличение только в 2,5 раза (для заданного угла $11°20'$). При дальнейшем движении рукоятки AO (точка A) составной рычаг будет выпрямляться еще больше, что поведет к уменьшению угла β, а следовательно, к возрастанию силы F_E (табл. 2).

Таблица 2

Расчетная таблица к примеру III. 3

β°	Сила F_E	Усиление за счет составного рычага
11°20′	5 *кн* (500 *кГ*)	2,5 раза
5°00′	11,5 *кн* (1150 *кГ*)	6 раз
1°00′	66 *кн* (6600 *кГ*)	33 раза

Увеличение силы за счет составного биомеханического рычага ценно при малых углах, когда сокращенная мышца уже не в состоянии выполнять необходимую механическую работу (рис. 39). В отличие от пресса, у которого обычный и составной рычаги работают одновременно (см. рис. 38), в биомеханической цепи сначала работает только обычный рычаг, а затем в работу включается составной рычаг. Тяговое усилие в обычном рычаге, вероятно, создается четырехглавой мышцей бедра (I), а в составном — мышцами-разгибателями бедра (II) и сгибателями голени (III).

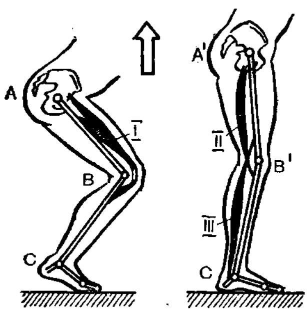


Рис. 39.

Глава IV.

СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ПЛОСКОСТИ СИЛ

§ 21. Приведение силы к точке

Как уже говорилось, силу можно переносить в любую точку, находящуюся на линии действия этой силы, не изменяя при этом механического состояния тела.

Силу можно переносить и в точку, не лежащую на линии действия силы (рис. 40). Такой перенос называется приведением. Пусть имеется сила $\overline{F}$, приложенная в точке C. Требуется перенести эту силу параллельно ей в некоторую точку O. Приложим в точке O две противоположно направленные силы $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$, равные по модулю и параллельные заданной силе $\overline{F}$. Состояние тела от этого не изменяется, так как силы $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$ взаимно уравновешиваются. Опустим из точки O на линию действия силы $\overline{F}$ перпендикуляр h, тогда полученную систему трех сил можно рассматривать как состоящую из силы $\overline{F'}$, приложенной в точке O, и пары сил $\overline{F}\overline{F''}$ с моментом $M = Fh$. Такую пару сил называют *присоединенной*.

Таким образом, при приведении силы к точке получается эквивалентная система, состоящая из силы, равной по модулю и направлению данной силе (F), и присоединенной пары сил, момент которой равен моменту данной силы относительно точки приведения:

$$M_O(\overline{F}) = Fh. \tag{24}$$

Приведение силы к данной точке удобно использовать для выявления характера действия силы на тело. Например, к телу приложена

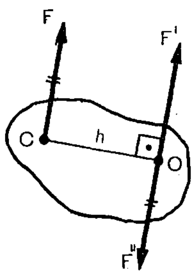


Рис. 40.

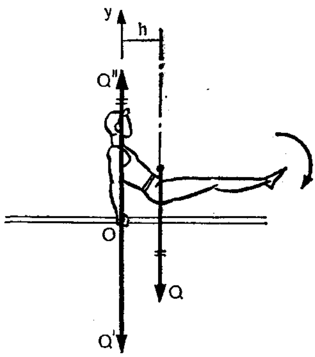


Рис. 41.

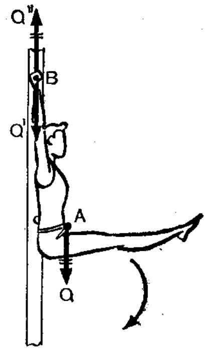


Рис. 42.

сила Q, параллельная оси y, на расстоянии h от нее (рис. 41). Приведя эту силу к точке O, лежащей на оси y, можно определить, что приведенная сила Q' давит на жердь, а присоединенная пара QQ'' с моментом $M = Qh$ стремится повернуть тело по ходу часовой стрелки. Если гимнаст удерживает свое положение неизменным (состояние равновесия), значит эта пара сил уравновешена другой парой сил с моментом, равным M, но противоположным по направлению. Вторая пара сил может быть создана гимнастом в месте хвата (при небольшом h).

На рис. 42 показан вис на гимнастической стенке. Вес тела Q приложен в точке A. При переносе силы Q в точку B возникает пара сил, прижимающая тело спортсмена к гимнастической стенке.

§ 22. Приведение плоской системы сил к данной точке

Метод приведения одной силы к данной точке можно применить к какому угодно числу сил. Допустим, что в точках тела A, B и C (рис. 43, *а*) приложены силы $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$, лежащие в плоскости ABC. Требуется привести эти силы к точке O данной плоскости. Приведем сначала силу $\overline{F_1}$. Приложим в точке O две силы: $\overline{F_1}'$ и $\overline{F_1}''$, равные порознь по модулю заданной силе $\overline{F_1}$, параллельные ей и направ-

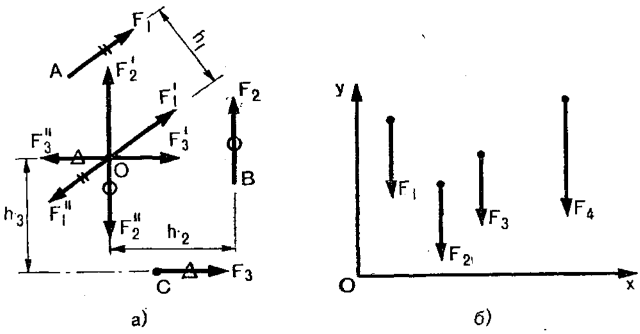


Рис. 43.

ленные в противоположные стороны. В результате приведения силы $\overline{F_1}$, получим силу $\overline{F_1}'$, приложенную в точке O, и пару сил $\overline{F_1}\overline{F_1}''$ с плечом h_1. Поступим таким же образом с силой $\overline{F_2}$, приложенной в точке B, и получим силу $\overline{F_2}'$, приложенную в точке O, и пару сил $\overline{F_2}\overline{F_2}''$ с плечом h. И т. д.

Система сил, приложенных в точках A, B и C, в данном случае заменена сходящимися силами $\overline{F_1}'$, $\overline{F_2}'$ и $\overline{F_3}'$, приложенными в точке O, и парами сил с моментами, равными моментам заданных сил относительно точки O:

$$M_1 = M_O\left(\overline{F_1}\right) = -F_1h_1,$$

$$M_2 = M_O\left(\overline{F_2}\right) = F_2h_2,$$

$$M_3 = M_O\left(\overline{F_3}\right) = F_3h_3.$$

Сходящиеся в точке силы можно заменить одной силой $\overline{R}'$, равной геометрической сумме составляющих:

$$\overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \overline{F}_3' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i. \qquad (25)$$

Сила $\overline{R'}$, равная геометрической сумме заданных сил, есть *главный вектор системы сил*. На основании правила сложения пар сил, лежащих в одной плоскости, их можно заменить результирующей парой сил, лежащих в той же плоскости. Момент результирующей пары сил равен алгебраической сумме моментов заданных сил относительно точки O:

$$M_O = M_1 + M_2 + M_3 = \sum_{i=1}^{n} M_i. \tag{26}$$

Такой момент называют *главным моментом системы* относительно данного центра приведения (O). Следовательно, в общем случае плоская система сил в результате приведения к некоторой точке O заменяется эквивалентной ей системой, состоящей из одной силы — главного вектора системы сил — и одной пары, момент которой называют главным моментом заданной системы.

Из рассмотренного материала и уравнений 25 и 26 следует, что приведенная система не эквивалентна только одной силе R, а поэтому главный вектор $\overline{R'}$ не является равнодействующей данной системы сил, за исключением частного случая, когда главный момент равен нулю.

Величина и направление главного вектора не зависят от выбора центра приведения. Величина и знак главного момента M_0 зависят от положения центра приведения, так как величины плеч составляющих пар зависят от взаимного положения сил и точки (центра), относительно которой берутся моменты.

При приведении системы сил к точке могут встретиться следующие случаи.

1. $\overline{R'} \neq 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$ — общий случай, система приводится к главному вектору и к главному моменту.

2. $\overline{R'} \neq 0$, $\overline{M}_0 = 0$ — система приводится к одной равнодействующей, равной главному вектору системы.

3. $\overline{R'} = 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$ — система приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту.

4. $\overline{R'} = 0$, $\overline{M}_0 = 0$ — система находится в равновесии.

В общем случае, когда $\overline{R'} \neq 0$ и $\overline{M}_0 \neq 0$, можно найти такую точку, относительно которой главный момент системы сил равен нулю.

§ 23. Уравнение равновесия плоской системы сил

Всякая система произвольно расположенных в плоскости сил может быть приведена к главному вектору и главному моменту. Поэтому условия равновесия сил на плоскости имеют вид:

$$\overline{R}' = 0; \quad M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\overline{F}_i\right) = 0. \tag{27}$$

Итак, *для равновесия системы сил, произвольно расположенных в плоскости, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этих сил относительно любого центра равнялись нулю.*

Главный вектор $\overline{R}$ есть геометрическая сумма всех сил, составляющих систему и перенесенных в центр приведения его. Величину $\overline{R}$ можно определить с помощью проекции на координатные оси всех сил системы. Применив для сумм проекций всех сил на оси x и y сокращенные обозначения ΣF_{ix} и ΣF_{iy}, получим для величины главного вектора выражение:

$$R = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}.$$

Для равновесия системы сил необходимо, чтобы ее главный вектор был равен нулю. Поэтому:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad \Sigma F_{iy} = 0. \tag{28}$$

Кроме того, для равновесия необходимо, чтобы главный момент также был равен нулю, т. е.

$$\sum M_O (F_i) = 0. \tag{29}$$

Уравнения 28 и 29 являются уравнениями равновесия тела, находящегося под воздействием системы сил, произвольно расположенных в плоскости. Уравнения 28 представляют собой равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил системы на две произвольные координатные оси; уравнение 29 выражает равенство нулю суммы моментов всех сил относительно произвольно выбранной точки. С помощью уравнений 28 и 29 решаются задачи статики для плоской системы сил, правда лишь в том случае, если число неизвестных сил (или число уравнений равновесия) не больше трех. В противном случае задача является *статически неопределимой* и решается более сложными методами, которые здесь не рассматриваются.

§ 24. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил

Пусть к данному телу приложена уравновешенная система параллельных сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, $\overline{F_4}$ (рис. 43, *б*). Через произвольную точку O, взятую в плоскости действия сил, проведем ось Ox, перпендикулярную силам, и ось Oy, параллельную им. Запишем для данной системы сил уравнения равновесия:

$$\sum_1^4 F_{ix} = 0; \qquad \sum_1^4 F_{iy} = 0; \qquad \sum_1^4 M_O = 0.$$

Каждая сила перпендикулярна оси Ox, и проекция силы на эту ось равна нулю. Следовательно, первое уравнение обращается в тождество $0 = 0$ и выполняется независимо от того, уравновешиваются силы или нет. Таким образом, для плоской системы параллельных сил остается только два уравнения равновесия. Так как проекции сил на ось Oy равны силам, уравнение равновесия для плоской системы параллельных сил принимает вид:

$$\sum_{1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad \sum_{1}^{n} M_O = 0. \tag{30}$$

При решении задач на равновесие плоской системы сил необходимо пользоваться уравнениями равновесия 28 и 29. Прежде всего следует убедиться в статической определимости задачи. Далее надо рационально выбрать координатные оси и центры моментов для упрощения вычислений, связанных с решением уравнений. Просто решается система уравнений, каждое из которых содержит только одну из неизвестных сил: это достигается соответствующим выбором направления координатных осей и центра моментов. За центр моментов следует брать точку пересечения двух неизвестных сил, тогда уравнение моментов относительно этой точки будет содержать только одну неизвестную силу. Направление координатных осей x и y нужно выбирать так, чтобы они были перпендикулярны некоторым неизестным силам, тогда проекции неизвестных сил, перпендикулярные соответствующей оси, в уравнения равновесия не войдут. Определение неизвестных сил лучше начинать с уравнений моментов, а затем переходить к уравнениям проекций.

§ 25. Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил

Произвольную пространственную систему сил, как и плоскую, можно привести к какому-нибудь центру O и заменить одной результирующей $\overline{R}$ и парой с моментом $\overline{M}_0$. Значения $\overline{R}$ и $\overline{M_0}$ определяются равенствами:

$$\overline{R} = \Sigma \overline{F}_n, \tag{31}$$

$$\overline{M}_O = \sum \overline{M}_O \left(\overline{F}_n \right). \tag{32}$$

Рассуждая так же, как и в § 23, можно заключить, что для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно $\overline{R} = 0$ и $\overline{M}_0 = 0$. Но векторы $\overline{R}$ и $\overline{M}_0$ могут обратиться в ноль только тогда, когда равны нулю все их проекции на оси координат, т. е. когда $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$, или

$$R_x = \Sigma F_{nx}; \quad R_y = \Sigma F_{ny}; \quad R_z = \Sigma F_{nz}; \tag{33}$$

$$M_x = \Sigma M_x (F_n); \quad M_y = \Sigma M_y (F_n);$$

$$M_z = \Sigma M_z (F_n), \tag{34}$$

т. е. когда действующие силы удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_{nx} = 0; \quad \Sigma F_{ny} = 0; \quad \Sigma F_{nz} = 0 \\ &\Sigma M_x(F_n) = 0; \quad \Sigma M_y(F_n) = 0; \quad \Sigma M_z(F_n) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Таким образом, уравнения 35 выражают необходимые условия равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием любой пространственной системы сил: *для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.*

Для пространственной системы параллельных сил можно составить три уравнения равновесия: два уравнения моментов и одно уравнение проекций.

§ 26. Порядок решения задач на равновесие плоской системы сил

1. Выделить тело, равновесие которого надо рассмотреть.

2. Изобразить расчетную схему, условно показывая связи и заданные силы.

3. Отбросить связи, изобразить на схеме их реакции.

4. Провести оси координат так, чтобы одна ось была перпендикулярна некоторым неизвестным силам. Наметить центры моментов в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил или на линии действия одной неизвестной силы.

5. Составить уравнения равновесия.

6. Решить уравнения и определить неизвестные силы.

Пример IV. 1. Для выполнения упражнений в равновесии на подвижной опоре был применен брус AB, весом P, одним концом прикрепленный к горизонтальному полу A, другим — привязанный к стене веревкой BC (рис. 44, *а*). Определить реакцию шарнира в точке A и натяжение веревки — T, если дано:

$$\angle CED = \alpha; \quad \angle BAD = \beta.$$

Решение. Отбросим связи и заменим их реакциями связей, как это показано на рис. 44, *б*. В точке A (шарнирная опора) направление реакции опоры неизвестно, поэтому надо заменить ее проекциями R_x и R_y. В точке B приложена реакция T веревки. Сила P приложена в точке D, лежащей на середине стержня AB. Обозначим длину бруса через l. Составим уравнения равновесия, учитывая, что $\angle ABE = \alpha - \beta$, а плечо силы T $AF = l \sin(\alpha - \beta)$:

$$\Sigma F_x = R_x + T\cos\alpha = 0,$$
$$\Sigma F_y = R_y - P + T\sin\alpha = 0,$$
$$\Sigma M_A = -P\frac{l}{2}\cos\beta + Tl\sin(\alpha-\beta) = 0.$$

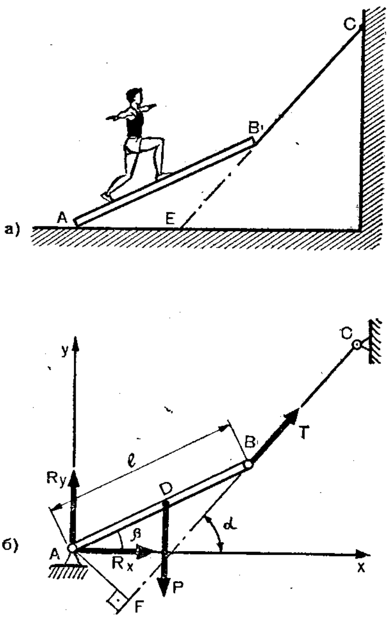


Рис. 44.

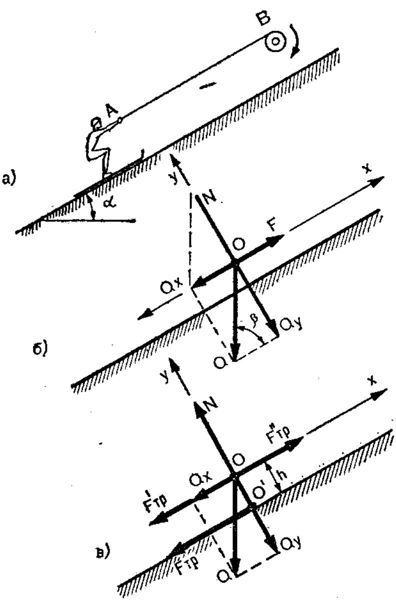


Рис. 45.

Из уравнений равновесия имеем:

$$T = P\frac{\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)},$$

$$R_x = -P\frac{\cos\alpha\ \cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)},$$

$$R_y = P\left[1 - \frac{\sin\alpha\ \cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}\right].$$

Пример IV.2. Простейшее подъемное устройство для лыжников состоит из троса AB и барабана с мотором B (рис. 45, a). Определить тяговое усилие F при равномерном движении лыжника при условии, что плоскость подъема наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30°$, вес лыжника $Q = 79$ *кГ*, если:

1. Коэффициент трения скольжения $f = 0$;

2. Коэффициент трения скольжения $f = 0,1$.

Решение. 1-й вариант: $f = 0$.

На рис. 45, *б* в центре тяжести лыжника — точке O приложены сила тяжести $Q = 70$ *кГ* и сила тяги F, направленная параллельно склону. Силу Q можно разложить на составляющие: нормальную реакцию N и силу Q_x, препятствующую подъему. Оси координат направим параллельно и перпендикулярно склону. Составляющая

$$Q_x = Q\cos\beta = 70 \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = 35 \text{ кГ } (343 \text{ н}).$$

Для определения тягового усилия составим уравнение равновесия:

$$\Sigma F_x = -Q_x + F = 0. \quad \text{Отсюда:}$$

$$F = Q_x = Q\cos\beta = 35 \text{ кГ } (343 \text{ н}).$$

2-й вариант: $f = 0,1$.

На рис. 45, *в* в точке O приложены сила тяжести Q и сила тяги F, а в точке O' — сила трения «лыжи — снег» $F_{тр}$. Оси расположены так же, как в 1-м варианте. Начало координат в точке O. Перенесем в точку O силу $F_{тр}$, так как это было показано в § 23, направленную противоположно силе тяги F. При этом возникает момент силы $F_{тр}$ с плечом h, которое для взрослого человека в среднем равно 0,9 *м*. Силу тяжести Q, как и в 1-м варианте, можно разложить на две составляющие: нормальную реакцию N и горизонтальную составляющую Q_x.

Так как $\Sigma M_0 = -F_{тр}\, h \neq 0$, то возникшая пара сил будет вращать спортсмена вокруг точки опоры (опрокидывать его). Для равновесия должен еще существовать момент силы M_1, так что

$$\Sigma M_O = -F_{тр} \cdot h + M_1 = 0.$$

Из уравнения равновесия следует, что $M_1 = F_{тр} \cdot h$. Фактически такой момент создается за счет некоторого отклонения спортсмена назад по отношению к направлению движения. Теперь найдем выражение для Q_x и $F_{тр}$:

$$Q_x = Q\cos 60^\circ; \quad F_{тр} = fN = fQ\cos 30^\circ$$

и составим уравнение равновесия:

$$\Sigma F_x = -Q_x - F_{тр} + F = 0.$$

Отсюда:

$$F = Q_x + F_{тр} = Q\cos 60^\circ + fQ\cos 30^\circ = 70 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 70 \cdot 0,87 =$$

$$= 41 \text{ кГ } (402 \text{ н}).$$

Пример IV. 3. На рис. 46 показан человек, опирающийся в точке B руками о стену. Вес его $Q = 70$ *кГ* и приложен в точке C. Расстояние $AC = CD = 1$ *м*, а расстояние $BD = 0,8$ *м*. Линия CB параллельна AD. Найти реакцию в точке B.

Решение. Отбрасывая связи (пол и опорную стену), следует заменить их реакциями связей. Реакция R_a в точке A будет направлена по линии AC. Направление и величина реакции в точке B неизвестны, поэтому заменим ее двумя составляющими R_{bx} и R_{by}, направление которых совпадает с осями координат в точке B.

Составим уравнение равновесия:

$$\Sigma F_x = R_a \cos\alpha + R_{bx} = 0,$$

$$\Sigma F_y = R_a \sin\alpha - Q + R_{by} = 0,$$

$$\Sigma M_b = -R_a h + Q \cdot CB = 0.$$

Заметим, что: $\sin\alpha = \frac{BD}{AC} = 0{,}8$; $\alpha = 54°$; $\cos\alpha = 0{,}59$.

Кроме того, $\angle ECB = \alpha = 54°$; $h = CB \sin\alpha = CD \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha =$

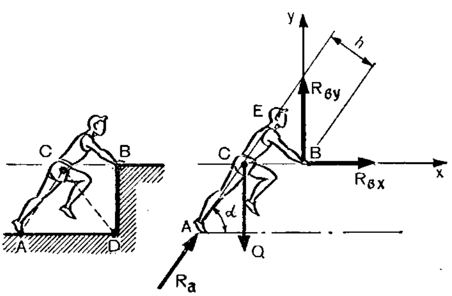


Рис. 46.

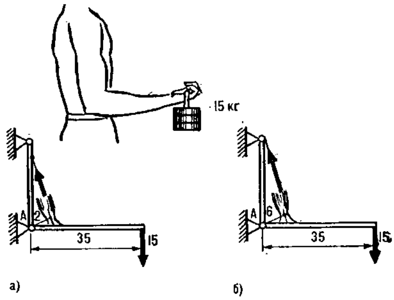


Рис. 47.

$= 1{,}0 \cdot 0{,}59 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$ (*м*); $CB = CD \cdot \cos\alpha = 0{,}59$ (*м*).

Решив уравнение равновесия, получим:

$$R_{bx} = -R_a \cos\alpha = -0{,}59 R_a;$$

$$R_{by} = 70 - 0{,}8 R_a;$$

$$R_a = \frac{Q \cdot CB}{h} = \frac{70 \cdot 0{,}59}{0{,}48} = 86{,}2 \text{ кГ } (845 \text{ н});$$

$$R_{bx} = -0{,}59 \cdot R_a = -51 \text{ кГ } (-500 \text{ н});$$

$$R_{by} = 70 - 0{,}8 \cdot 0{,}86 \cdot 20 \approx 1 \text{ кГ } (10 \text{ н}).$$

Пренебрегая $R_{by} = 1$ *кГ* как величиной малой, можно говорить о том, что реакция в точке B направлена от стены в сторону человека по горизонтали. Знак минус у R_{bx} показывает, что направление реакции было выбрано неправильно.

Пример IV.4. Определить усилия в плечевой мышце и в двуглавой мышце плеча (рис. 47), допустив, что каждая из этих мышц без участия в работе других обеспечивает удержание груза в руке. (Кстати, только в этом случае задача будет статически определимой.)

Решение. Составим расчетную схему работы плечевой мышцы. Она начинается от нижней половины передней поверхности плечевой кости и прикрепляется к бугристости локтевой кости и ее венечному отростку. Эта мышца имеет плечо относительно точки A, равное приблизительно 2 *см*.

Используем уравнения равновесия:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$F_1 \cdot 2 - Q \cdot 35 = 0.$$

Отсюда:

$$F_1 = \frac{15 \cdot 35}{2} = 263 \text{ кГ } (2580 \text{ н}).$$

Двуглавая мышца плеча начинается на лопатке и прикрепляется на предплечье к бугристости лучевой кости и к фасции предплечья. Она имеет плечо относительно точки A, равное у взрослого мужчины около 6 *см*.

Используем то же уравнение равновесия и получим:

$$F_2 = \frac{15 \cdot 35}{6} = 78{,}9 \text{ кГ } (773 \text{ н}).$$

Таким образом, один и тот же груз вызывает различные усилия в мышцах, имеющих различное положение.

Этот пример подтверждает слова П. Ф. Лесгафта о ловких и сильных мышцах: сильные мышцы имеют большие плечи относительно оси рычага (в данном примере — это двуглавая мышца плеча), а ловкие расположены близко к опоре рычага, действуют с большим напряжением, быстро утомляются (в данном примере это плечевая мышца).

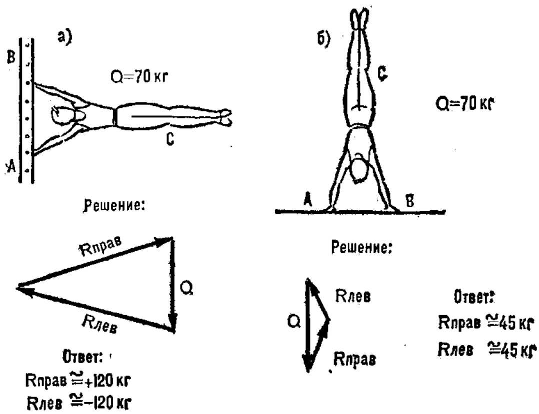


Рис. 48.

Пример IV. 5. Определить усилия в верхних конечностях гимнаста в положении горизонтального бокового упора (рис. 48, *а*) и в стойке с разведенными руками (рис. 48, *б*).

Решение. Для определения усилий в верхних конечностях достаточно построить треугольники равновесия (решение выполнено на рисунке графическим методом). В масштабе строится вектор силы тяжести тела спортсмена. Затем из начала и конца вектора проводятся линии параллельно осям верхних конечностей. Векторы, образовавшиеся на этих линиях, будут определять искомые усилия.

Глава V.
ТРЕНИЕ

§ 27. Виды трения

Трением называется сопротивление, возникающее при перемещении одного тела по поверхности другого. Трение — одно из распространенных явлений природы и встречается почти повсюду. В зависимости от характера перемещения различают: *трение скольжения и трение качения.*

Примерами трения скольжения могут служить: трение лыж о снег, коньков о лед, подошвы обуви о пол или покрытие беговой дорожки и т. д. Примерами трения качения служат: трение при перекатывании колес велосипеда по земле, трение в шариковых и роликовых подшипниках и т. д. В большинстве практических расчетов пользуются эмпирическими законами трения, установленными Кулоном в 1781 г.

§ 28. Трение скольжения

Трением скольжения называется сопротивление, которое возникает при скольжении одного тела по поверхности другого.

Основной причиной, вызывающей сопротивление, являются не абсолютно гладкие поверхности соприкасающихся тел. При перемещении одного тела по поверхности другого требуется некоторая сила для преодоления этого сопротивления. Даже если с технической точки зрения поверхности идеально гладки, все равно необходимо приложить силу для преодоления молекулярного взаимодействия между частицами поверхностных слоев соприкасающихся тел.

Кулон установил следующие (приближенные) законы трения:

1. Сила трения при прочих равных условиях не зависит от размеров трущихся поверхностей. Этот закон справедлив лишь до некоторой величины давления, приходящегося на единицу площади трущихся поверхностей.

2. Величина силы трения прямо пропорциональна нормальному давлению одного тела на другое.

Под нормальным давлением понимается давление, направленное по нормали к поверхности скольжения. Когда плоскость горизонтальна (рис. 49), нормальное давление равно весу тела. Если тело лежит на наклонной плоскости, то на величину силы трения влияет лишь составляющая N, перпендикулярная к плоскости скольжения. В эргометрах используются конструкции, в которых помимо веса на движущееся тело действует добавочная сила P (рис. 50). В этом случае в качестве нормального давления следует считать сумму сил $Q + P$.

3. Величина силы трения зависит от материала и состояния трущихся поверхностей, от наличия и рода смазки между ними. Сила трения металла по металлу меньше силы трения дерева по дереву; сила трения между сталью и бронзой меньше силы трения между сталью и сталью и т. д. Чем лучше обработаны трущиеся поверхности, тем меньше трение. Смазывание трущихся поверхностей уменьшает трение (полусухое и жидкостное трение). Это хорошо известно лыжникам.

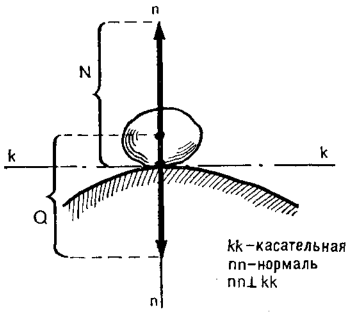


Рис. 49.

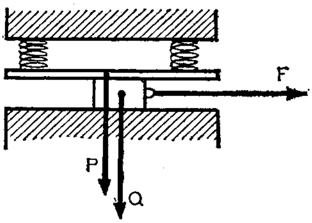


Рис. 50.

Качество смазки также имеет большое значение. Лыжные мази подбираются в зависимости от состояния снежного покрова и температуры воздуха.

На основании данного закона Кулона сила трения выражается так:

$$R_{\text{тр}} = fN = fQ. \qquad (36)$$

Коэффициент f называют коэффициентом трения или скольжения при покое, или предельным коэффициентом трения. Он характеризует состояние трущихся поверхностей, род материалов, их обработку, смазку и равен: $f = \frac{R_{\text{тр}}}{N}$. Из этого равенства следует, что коэффициент трения скольжения есть число отвлеченное (безразмерное).

4. Сила трения при движении меньше силы трения при покое. Чтобы вывести тело из состояния покоя, нужно (при прочих равных условиях) преодолеть бо́льшую силу трения, чем при движении тела. Сила трения при движении зависит от относительной скорости движения. Величину силы трения при движении определяют по формуле 36, подставляя в нее вместо коэффициента трения при покое коэффициент трения при движении. Ориентировочные значения коэффициентов трения скольжения приведены в табл. 3.

В спорте проблема трения имеет огромное значение. В табл. 4 дано значение коэффициента трения лыжи о снег.

Некоторые материалы в зависимости от расположения по отношению к направлению движения обладают различным коэффициен-

Таблица 3

Коэффициент трения различных материалов

Материалы трущихся поверхностей	Коэффициент трения			
	покоя (сцепление)		движения (скольжение)	
	насухо	со смазкой	насухо	со смазкой
Сталь — сталь	0,15	0,1—0,12	0,15	0,05—0,1
Сталь — бронза	0,15	0,1—0,15	0,15	0,1—0,15
Мягкая сталь — дуб	0,6	0,12	0,4—0,6	0,1
Дерево — дерево	0,4—0,6	0,1	0,2—0,5	0,07—0,15
Кожа — дуб	0,6	—	0,3—0,5	—
Кожа — чугун	0,3—0,5	0,15	0,6	0,15
Резина — чугун	—	—	0,8	0,5
Сталь — лед	0,4	—	0,01—0,03	—
Дерево — лед (—14°)	—	—	0,05	—

Таблица 4

Характеристика трения лыжи о снег

Характеристика снегового покрова	Оценка скольжения	Коэффициент трения скольжения
Твердый, промерзлый, крепкий весенний наст	Отличное, хорошее	0,02—0,06
Укатанный снег	Удовлетворительное	0,06—0,1
Снег с подлипом, сыпучий глубокий снег, снег с проваливающейся коркой	Плохое	0,1 —0,9

том трения. Например, значения f различны у древесины при движении вдоль волокон и поперек, у шкуры оленя — при движении по шерсти и против шерсти.

Коэффициент трения стали по льду зависит от качества льда и полоза конька. Чем чище вода, из которой изготовлен лед, чем меньше в ней примесей, тем меньше коэффициент трения. Неровности и грязь на льду или полозе конька резко повышают его. При скольжении конька по льду непосредственно под полозом вода подтаивает, образуя очень тонкий слой смазки, которая уменьшает трение в 8—10 раз. Чем ниже температура воздуха и тверже лед, тем меньше образуется смазки. В то же время, недостаточно прочный лед под коньками разрушается. Наилучшим скольжение бывает при наибольшей разнице между температурой льда и температурой окружающего воздуха, что возможно на катках с искусственным льдом и на высокогорных катках. На обычных катках скольжение лучшим бывает при температуре воздуха минус 3—5° С.

Для определения коэффициента трения используют наклонную плоскость. На нее кладут брус. Угол наклона плоскости может изменяться. При некотором угле α брус удерживается на плоскости; если постепенно увеличивать угол, то наступит момент, когда брус начнет скользить. Измерив этот угол, можно определить значение предельного коэффициента трения.

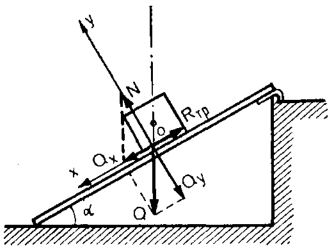


Рис. 51.

Пример V. 1. На наклонной дубовой доске положен брус из стали в форме куба весом 100 *кГ*. Он начинает скользить, как только угол наклона плоскости достигает 32°. Определить значение коэффициента трения.

Решение. В точке O приложены силы: вес куба Q, нормальная реакция N и сила трения $R_{тр}$. Направим оси координат параллельно (x) и перпендикулярно (y) наклонной плоскости (рис. 51). К моменту начала скольжения сила Q_x, заставляющая груз перемещаться по доске, равна силе трения:

$$|Q_x| = |R_{тр}| = fN;$$

$$Q_x = Q \sin \alpha; \quad N = Q \cos \alpha;$$

$$f = \frac{Q_x}{N} = \frac{Q \sin \alpha}{Q \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 32^\circ = 0{,}62.$$

Необходимо отметить, что коэффициент трения f в данном случае определяется только одним углом α: $f = \operatorname{tg} \alpha$.

§ 29. Угол и конус трения

Когда тело опирается на гладкую поверхность, имеется только одна нормальная реакция — N. Если же опорная поверхность шероховатая, то при действии сдвигающей силы $\overline{P}$ появится сила трения, действующая по касательной к плоскости и направленная в сторону, противоположную $\overline{P}$. Для критического момента, когда тело будет находиться на грани между покоем и движением, сила трения будет максимальна $R_{тр} = fN$. Нормальная реакция N и касательная (сила трения) $R_{тр}$, складываясь по правилу параллелограмма, дадут полную реакцию R опорной поверхности, направленную под некоторым углом φ к нормали.

Наибольший угол φ, на который вследствие трения отклоняется от нормали реакция R шероховатой поверхности, называется *углом трения*. В примере, приведенном на рис. 52, имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_{тр}}{N} = f.$$

Следовательно:

$$\operatorname{tg}\varphi = f. \tag{37}$$

Тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения.

Если тело может перемещаться по шероховатой поверхности в любом направлении, то линии действия возможных реакций этой поверхности образуют коническую поверхность (рис. 53). Конус, образующие которого наклонены под углом трения к нормали к поверхности скольжения в данной точке, называется *конусом трения.*

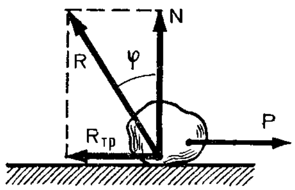


Рис. 52.

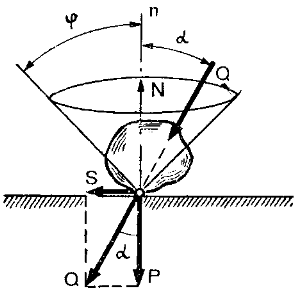


Рис. 53.

Если коэффициент трения при движении тела в различных направлениях по данной поверхности одинаков, то полная реакция R этой поверхности отклоняется от нормали во всех направлениях на одинаковый угол трения и конус трения будет круглым с углом при вершине, равным 2φ. Если же коэффициент трения при движении тела в разных направлениях имеет различные значения, то конус трения будет некруглым (например, в горных охотничьих лыжах).

Предположим, что к телу, находящемуся на горизонтальной шероховатой поверхности, приложена сила Q, составляющая с нормалью к плоскости угол α (см. рис. 53). Сила Q может быть разложена на две силы: силу P, прижимающую тело к поверхности и уравновешиваемую нормальной реакцией N к поверхности:

$$N = P = Q\cos\alpha,$$

и силу S, стремящуюся сдвинуть тело с места:

$$S = Q\sin\alpha.$$

Шероховатость поверхности вызывает силу трения $\overline{R_{тр}}$, действующую в направлении, противоположном силе $\overline{S}$. При равновесии:

$$S = R_{тр} < R_{тр.\,max} = fN = fQ\cos\alpha.$$

Чтобы тело под действием приложенного усилия могло быть сдвинуто с места, необходимо, чтобы сила S была по величине больше или равна $R_{\text{тр. max}}$, т. е., чтобы

$$Q \sin\alpha \geqslant fQ\cos\alpha,$$

или

$$f = \operatorname{tg}\varphi \leqslant \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$\alpha \geqslant \varphi.$$

Это значит, что какая бы сила ни была приложена к телу, если α будет меньше φ, то тело останется в равновесии, т. е. перемещаться не будет. Иными словами, *если усилие, приложенное к телу, лежит в пределах конуса трения, то оно не в состоянии вызвать перемещение тела.*

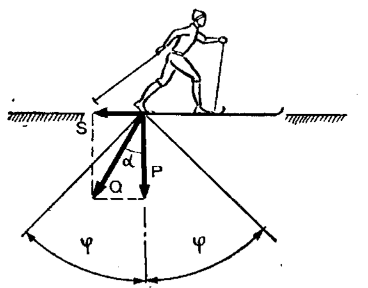


Рис. 54.

На рис. 54 показан лыжник. Пока усилие Q, развиваемое им, лежит в пределах конуса трения, определяемого углом 2φ, его левая нога (и лыжа) остается неподвижной (в противном случае лыжа будет проскальзывать назад и отталкивания не произойдет). Для этого подбирают мазь так, чтобы сила трения покоя $R_{\text{тр.}\,max}$ была значительно больше силы трения скольжения.

§ 30. Трение качения

Сопротивление перекатыванию возникает главным образом оттого, что как катящееся тело, так и основание, по которому оно катится, не являются абсолютно твердыми и всегда несколько деформируются, при взаимодействии. Например, при перемещении тяжелого цилиндра (рис. 55) всегда нужно преодолевать некоторый «барьер» (на рисунке показан стрелкой). Этим физический характер трения качения отличается от трения скольжения. Чтобы сдвинуть цилиндр весом Q (начать его перемещение), нужно на уровне центра приложить силу, равную:

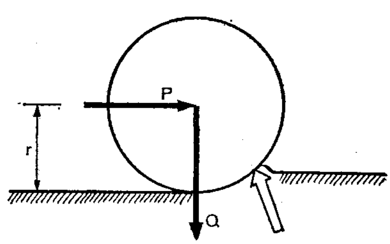


Рис. 55.

$$P = \frac{k}{r} Q, \tag{38}$$

где k — коэффициент трения качения, r — высота приложения силы тяги P (в данном случае — радиус перекатываемого цилиндра), Q — нагрузка на грунт. Размеренность k — единица измерения длины. Поэтому $\frac{k}{r}$ — величина безразмерная (относительная). В табл. 5 даны примерные значения коэффициентов трения качения.

Таблица 5

Коэффициент трения качения некоторых материалов

Материалы трущихся поверхностей	Коэффициент трения k (*см*)
Сталь мягкая — сталь мягкая	0,005
Сталь закаленная — сталь закаленная	0,001
Дерево — сталь	0,03—0,04
Резина — дерн	0,10—0,15
Резина — асфальтовое покрытие	0,04

В спорте коэффициент трения качения имеет большое значение при анализе езды на велосипеде. Для велосипедного колеса коэффициент трения качения представлен в табл. 6.

Таблица 6

Коэффициент трения качения велосипедного колеса

Дорожное покрытие	$f = \frac{k}{r}$
Естественный грунт в хорошем состоянии	0,02
Бетон, асфальт	0,004—0,006
Снег утрамбованный	0,2
Булыжная мостовая	0,02

Формула для определения силы тяги P (равномерное движение с малой скоростью), если известно значение $f = \frac{k}{r}$, может быть записана так:

$$P = fQ. \tag{39}$$

Например, чтобы катить велосипед по асфальтовому грунту (горизонтальному), нужно приложить силу:

$$P = fQ = 0{,}004 \cdot 15 = 0{,}06 \text{ кГ } (0{,}59 \text{ н}).$$

Если на велосипеде находится человек весом 85 *кГ*, тогда

$Q = 15 + 85 = 100$ *кГ*, а необходимое усилие $P = 0,004 \cdot 100 =$
$= 0,4$ *кГ* (3,9 *н*).

Нужно заметить, что тяговая сила P резко возрастает со скоростью движения, увеличением подъема дороги, усилением ветра и т. д.

Пример V. 2. Лыжник А подобрал лыжную мазь, обеспечивающую коэффициент трения покоя $f_{max} = 0,2$; лыжник Б — мазь, обеспечивающую $f_{max} = 0,5$. Определить максимальную возможность угла отталкивания для лыжников А и Б.

Решение. Так как $f_{max} = \text{tg}\,\varphi$, то $\text{tg}\,\varphi_А = 0,2$; $\text{tg}\,\varphi_Б = 0,5$. Отсюда, пользуясь таблицами, находим: $\varphi_А = 11°20'$; $\varphi_Б = 27°$. Следовательно, угол отталкивания для лыжника А должен быть не больше: $\alpha_А = 90° - 11°20' = 78°40'$, а для лыжника Б не больше: $\alpha_Б = 90° - 27° = 63°$.

Глава VI.
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛА

§ 31. Понятие о центре параллельных сил

Одной из важнейших характеристик движущегося тела является центр его тяжести. Однако прежде чем говорить о центре тяжести, необходимо остановиться на понятии *центра параллельных сил.*

Пусть к твердому телу в точках A_1, A_2, ..., A_n приложены параллельные и одинаково направленные силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$ ... $\overline{F}_n$. Очевидно, что равнодействующая этой системы сил $\overline{R}$ направлена так же, как и слагаемые силы, причем ее модуль равен $\overline{R} = \Sigma F_i$.
Если все силы, приложенные к телу, одновременно одинаково поворачивать около их точек приложения, то равнодействующая сил в новом положении также изменит направление, сохраняя точку приложения и модуль R*.

Точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется *центром параллельных сил.*

Положение точки, где приложена равнодействующая параллельных сил, по отношению к телу является неизменным и не зависит от выбора системы координат. Действительно, если к телу Q (штанга с 4 грузами) в точке C приложена равнодействующая параллельных сил R, то какую бы систему координат x, y или x', y' ни применять,

---

* Это положение можно принять без доказательства: оно есть в любых курсах теоретической механики.

в ней будут изменяться только координаты точки C, но положение ее по отношению к телу не изменится. Это дает возможность избирать любую систему координат.

Возьмем произвольные координатные оси x, y, z и обозначим координаты точек:

$$A_1(x_1, y_1, z_1); \quad A_2(x_2, y_2, z_2); \ \dots ,$$
$$C(x_C, y_C, z_C).$$

Пользуясь тем, что от направления сил положение точки C не зависит, повернем силы около их точек приложения так, чтобы они стали параллельны оси O_z и применим к повернутым силам $\overline{F_1}'$, $\overline{F_2}'$, ..., $\overline{F}_i'$ *теорему Вариньона: если данная система сил не эквивалентна нулю и имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси**. Поэтому, беря момент относительно оси Oy, получим:

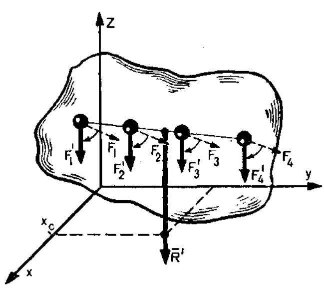


Рис. 56.

$$M_y(\overline{R}') = \Sigma M_y(\overline{F}_i'). \qquad (40)$$

Из рис. 56 видно, что

$$M_y(\overline{R}') = Rx_C,$$

где R — модуль равнодействующей $\overline{R}$, равный модулю $\overline{R}'$; x_c — координата точки C на оси Ox (является плечом равнодействующей силы $\overline{R}'$).

Аналогично для всех составляющих сил:

$$M_y(\overline{F}_i') = F_i x_i.$$

Поэтому уравнение 40 можно написать так:

$$Rx_C = F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_ix_i,$$

откуда

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_ix_i}{R}. \qquad (41)$$

Таким образом, получена координата x_c для точки приложения равнодействующей. Чтобы получить координату y_c, необходимо идти тем же путем, беря моменты относительно оси Ox. Чтобы получить координату z_c, нужно сначала повернуть все силы, сделав их парал-

* Доказательство этой теоремы есть в курсах теоретической механики.

лельными, например, оси Oy, а затем искать моменты относительно оси Ox.

В результате получится:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{R}; \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{R}. \qquad (42)$$

Итак, если известны модули сил и координаты точек их приложения, пользуясь выражением 42, можно определить путем простых арифметических действий координаты точки приложения равнодействующей этих сил.

§ 32. Центр тяжести твердого тела

На любую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вниз по вертикали сила, называемая *силой тяжести*. Для предметов, с которыми обычно приходится иметь дело, ввиду их малых размеров относительно размеров Земли; силы тяжести частиц тела можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянную величину.

Если силы, действующие на отдельные частицы тела, есть P_1, P_2, ..., P_i, а равнодействующая их $\overline{P}$, то модуль этой силы равен весу тела и определяется равенством

$$P = \sum P_i. \qquad (43)$$

При любом повороте тела силы P_i остаются приложенными в одних и тех же его точках, параллельными друг другу и сохраняют свое направление. Изменяется только их направление по отношению к телу (рис. 57). Следовательно, равнодействующая $\overline{P}$ сил $\overline{P_i}$ будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же точку C, неизменно связанную с телом, являющуюся центром параллельных сил тяжести $\overline{P}$. Эта точка называется *центром тяжести тела*.

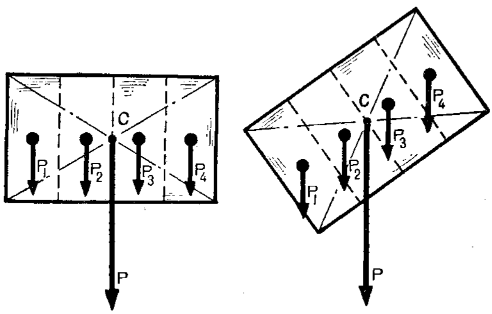


Рис. 57.

Иными словами *центр тяжести твердого тела есть неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующих сил тяжести частиц данного тела при любом его положении в пространстве.*

Координаты центра тяжести, подобно координатам центра параллельных сил, могут быть определены по формулам:

$$x_C = \frac{\Sigma P_i x_i}{P}; \quad y_C = \frac{\Sigma P_i y_i}{P}; \quad z_C = \frac{\Sigma P_i z y_i}{P}, \tag{44}$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения сил тяжести P_i отдельных элементов тела.

В ряде случаев приходится иметь дело с массами тела. Если обозначить массу тела через M, а массы отдельных его частиц соответственно через m_1, m_2, ..., m_i, то $P = Mg$, $P_i = m_i g$, где g — ускорение силы тяжести.

Подставляя эти значения в выражение 44, получим:

$$x_C = \frac{\sum_1^i m_i x_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_1^i m_i y_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_1^i m_i z_i}{M}. \tag{45}$$

Точка C, координаты которой определяются формулами 45, называется *центром масс тела**.

Если в равенствах 44 вместо веса отдельных частиц тела P_i поставить ρv_i, а вместо веса тела P — ρV, где соответственно v_i и V — объем частицы тела и объем тела, а ρ — вес единицы объема тела, то

$$x_C = \frac{\Sigma v_i x_i}{V}; \quad y_C = \frac{\Sigma v_i y_i}{V}; \quad z_C = \frac{\Sigma v_i z_i}{V}. \tag{46}$$

Из этих равенств следует, что *центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы* и не зависит от плотности ρ. В силу этого точку C, координаты которой определяются по формуле 46, называют *центром объема* V.

Выражения $\Sigma v_i x_i$, $\Sigma v_i y_i$ и $\Sigma v_i z_i$, стоящие в числителях формул 46, называют *статическими моментами объема* относительно плоскостей yOz, xOz и xOy.

Во многих случаях приходится иметь дело с телами, вырезанными из пластины, толщина которой постоянно сохраняется. Такие тела можно рассматривать как *плоские фигуры*. Для них координаты центра тяжести площади S будут:

$$x_C = \frac{\Sigma S_i x_i}{S}; \quad y_C = \frac{\Sigma S_i y_i}{S}, \tag{47}$$

где S — площадь всей пластины, а S_i — площади ее отдельных частей.

---

* Хотя положение центра масс тела совпадает с положением центра тяжести тела, понятия эти не тождественны. Понятие «центр тяжести» имеет смысл по существу только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие «центр масс» имеет смысл для любой системы материальных точек, независимо от того, находится ли она под действием каких-либо сил.

Величины $\Sigma S_i x_i$ и $\Sigma S_i y_i$ называют *статическими моментами плоской фигуры* относительно осей y и x.

Для определения *центра тяжести линии*, например, кривой из проволоки, используют формулы:

$$x_C = \frac{\Sigma l_i x_i}{L}; \quad y_C = \frac{\Sigma l_i y_i}{L}; \quad z_C = \frac{\Sigma l_i z_i}{L}, \qquad (48)$$

где L — длина всей линии, а l_i — длины отдельных ее частей.

Необходимо подчеркнуть, что все сказанное относится к однородным телам. Тело человека не является однородным. Мышцы и другие мягкие ткани имеют плотность, близкую к $\rho = 1$ *г/см*^{3}, костные ткани — 1,5—2,0 *г/см*^{3}, а ткань легких — 0,25—0,35 *г/см*^{3}. Поэтому в приведенные в данном параграфе формулы, если речь идет о теле человека, необходимо вносить значительные поправки.

§ 33. Определение центров тяжести тел

1. Аналитические (расчетные) методы. На основании формул 44—48, имеющих общий вид, разработан ряд практических способов определения центров тяжести тел. При этом большое значение имеет наличие *симметрии*. Если однородное тело имеет плоскость, оси или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно в *плоскости симметрии*, или на *оси симметрии*, или в *центре симметрии*.

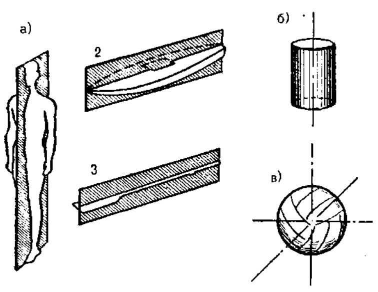


Рис. 58.

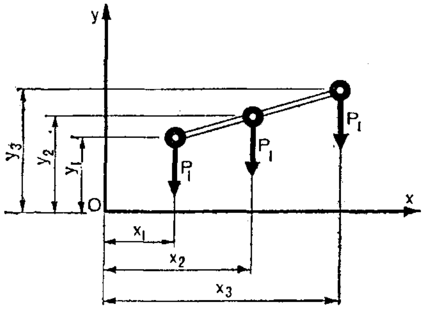


Рис. 59.

На рис. 58, *а* показаны тела, которые имеют плоскость симметрии. Каждое такое тело можно разбить на ряд элементарных тел одинакового веса, симметрично расположенных относительно этой плоскости. Причем если сложить силы тяжести, приложенные к симметричным частицам тела, всегда получится равнодействующая, лежащая в плоскости симметрии. Следовательно, и центр всех сил тяжести будет лежать в этой плоскости. Таким же образом можно показать, что при наличии оси симметрии центр тяжести будет лежать на этой оси (рис. 58, *б*) или при наличии центра симметрии центр тяжести будет совпадать с ним (рис. 58, *в*). То же самое можно сказать и о плоских фигурах.

При определении центра тяжести аналитическим методом тело мысленно разбивают на конечное число частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно. Координаты центра тяжести всего тела можно вычислить, применяя формулы 46 или 47. При этом число слагаемых в каждом числителе будет равно числу частей, на которое разбито тело. Пусть дано тело (рис. 59), состоящее из трех шариков, координаты которых (x_1, y_1); (x_2, y_2) и (x_3, y_3). Вес шариков, одинаков P_1 (весом соединительных проволок можно пренебречь). Вес всего тела P равен $3P_1$. Согласно формулам 47 имеем:

$$x_C = \frac{\Sigma P_i x_i}{P} = \frac{P_1x_1 + P_1x_2 + P_1x_3}{P} = \frac{P_1(x_1 + x_2 + x_3)}{3P_1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Точно так же находится другая координата общего центра тяжести:

$$y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Наиболее часто приходится иметь дело с плоскими фигурами, у которых всегда есть плоскость симметрии, как бы расслаивающая плоское тело на две равные половины. Центр тяжести при этом, как уже говорилось, всегда будет лежать в этой плоскости.

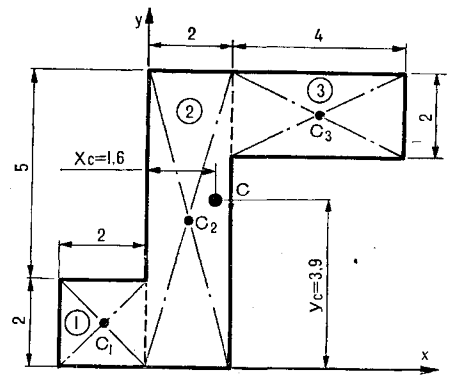


Рис. 60.

Пример VI. 1. Определить координаты центра тяжести однородной пластины (рис. 60). Все размеры даны в сантиметрах.

Решение. Выбираем оси координат. Разбиваем данную фигуру на три прямоугольника. Вычисляем координаты центров тяжести каждого из них и определяем их площади. Результаты приведены в табл. 7. По формуле 47 находим:

$$x_C = \frac{\Sigma x_i S_i}{S} = \frac{-1 \cdot 4 + 1 \cdot 14 + 4 \cdot 8}{26} = \frac{42}{26} = 1{,}6,$$

$$y_C = \frac{\Sigma y_i S_i}{S} = \frac{1 \cdot 4 + 3{,}5 \cdot 14 + 6 \cdot 8}{26} = \frac{101}{26} = 3{,}9.$$

Найденное положение центра тяжести отмечено точкой C.

Таблица 7

Расчетная таблица к примеру VI.1

Координаты	Отдельные фигуры		
	1-я	2-я	3-я
x_i	-1	$+1$	$+4$
y_i	$+1$	$+3,5$	$+6$
z_i	0	0	0
Площадь	4	14	8

Замечание. Оси координат можно выбирать произвольно; иногда удобно начало координат совместить с центром тяжести одного из звеньев, тогда сумма статических моментов уменьшится на один член.

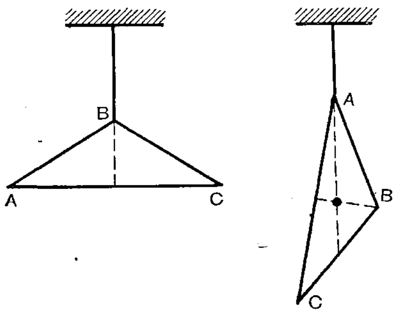


Рис. 61.

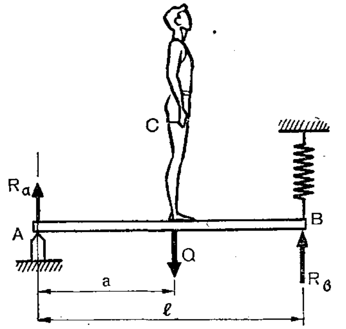


Рис. 62.

2. Инструментальные методы. Один из простых инструментальных методов — *метод подвешивания.* Он состоит в том, что тело подвешивают на нити поочередно за различные его точки. Направление нити, на которой подвешено тело, будет каждый раз указывать направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений будет центром тяжести (C). На рис. 61 показан треугольник, подвешенный первый раз за вершину угла B, второй раз — за вершину угла A. Линии, нанесенные на треугольник — продолжение нити, на которой он подвешен; точка пересечения этих линий (линий действия сил тяжести) — центр тяжести треугольника.

Другим практически важным методом является *метод взвешивания.* На рис. 62 показан человек, стоящий на брусе AB, один конец которого укреплен на опорной призме, а другой подвешен к пружине динамометра. Сила тяжести человека Q определена предварительным взвешиванием. Реакцию R_b в точке B можно определить по показанию динамометра. Реакция R_a в точке A, очевидно, равна $Q - R_b$. Пусть расстояние от A до B будет равно l, а расстояние от A до линии действия силы, проходящей через центр тяжести, будет a. Если приравнять нулю сумму моментов всех сил относительно центра тяжести человека (C), получится

$$-R_a a + R_b (l - a) = 0,$$

откуда: $-R_a a + R_b l - R_b a = 0$, $(R_a + R_b) a = R_b l$; а так как $R_a + R_b = Q$, то

$$a = \frac{R_b l}{Q}. \tag{49}$$

Линию (вертикаль), которая проходит через центр тяжести человека, находим, отсчитав расстояние a от точки A, которое легко определить по формуле 49. Чтобы определить высоту центра тяжести тела человека в основной стойке, можно воспользоваться этой же формулой, но человек должен принять для этого положение лежа на динамометрическом брусе.

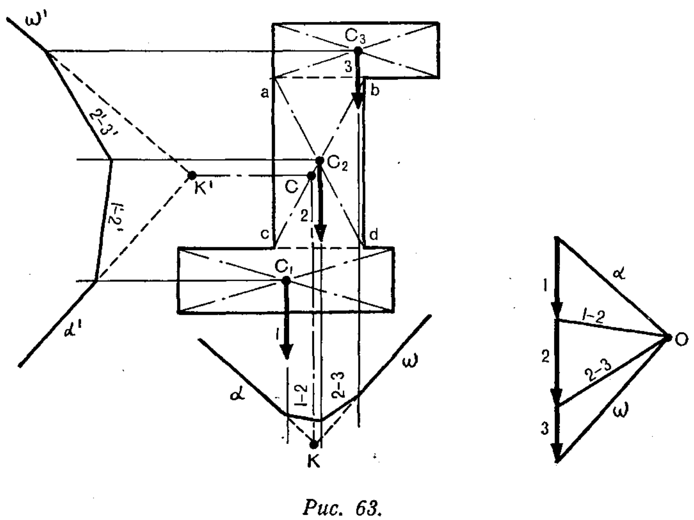


Рис. 63.

3. Графический метод. Пусть дана плоская фигура (рис. 63). Разобьем ее на три прямоугольника отрезками ab и cd. Площади этих прямоугольников (или веса при однородности фигуры) обозначим цифрами 1, 2 и 3 и будем считать их векторами, приложенными в центрах тяжести прямоугольников и направленными вертикально вниз. Сложим их последовательно (1, 2, 3) графически. Выберем произвольный полюс O. Построим так называемый *веревочный многоугольник*, соединяя полюс O с началами и концами векторов 1, 2 и 3 с помощью отрезков α, 1—2, 2—3, ω. Проведем луч α (параллельно отрезку α в веревочном многоугольнике) до пересечения с направлением вектора 1. Из полученной точки пересечения проведем отрезок 1—2, далее 2—3 и ω. Продолжив лучи α и ω до их взаимного пересечения, получим точку K. Искомый центр тяжести лежит на вертикали, пересекающей эту точку. Далее повернем силы 1, 2 и 3 вокруг их точек приложения на прямой угол так, чтобы они заняли положение $1'$, $2'$, $3'$. Построим веревочный многоугольник для этой новой системы сил. Стороны его будут перпендикулярны сторонам α, 1—2, 2—3, ω первого веревочного многоугольника. Так что фактически строить его не обязательно, важно только найти точку K'— точку пересечения лучей α' и ω'. Искомый центр тяжести лежит на пересечении вертикали, проходящей через точку K и горизонтали, проходящей через точку K'.

§ 34. О центре тяжести тела человека

Определение положения общего центра тяжести (о.ц.т.) тела человека важно для решения различных вопросов механики спортивных движений. По положению центра тяжести судят об устойчивости равновесия, о рациональности движения. Одной из важнейших характеристик любого движения является траектория центра тяжести. Кроме того, положение центра тяжести зависит от распределения масс тела и служит одним из показателей соматических особенностей спортсмена. Дело в том, что у разных людей при одинаковых линейных размерах тела положение центра тяжести может быть различным в зависимости от удельного веса тех или иных тканей и органов. Когда речь идет о центре тяжести тела человека, фактически подразумевается не геометрическая точка, а сфера, в которой эта точка непрерывно перемещается. Это перемещение обусловливается процессами кровообращения, дыхания, пищеварения, мышечного тремора и др. Ориентировочно можно считать, что диаметр той сферы, внутри которой происходит постоянное перемещение о.ц.т. при спокойном положении тела, равняется около 10 *мм*. В процессе движений он значительно увеличивается и смещение о.ц.т. может оказать влияние на технику выполнения упражнений.

§ 35. Определение центра тяжести тела человека

1. **Аналитический метод.** Определение центра тяжести тела человека по фотографии или по промеру производится, как и для симметричного твердого тела, по формулам 44 для плоской фигуры. Чтобы определить о.ц.т., необходимо знать веса отдельных звеньев тела человека и положение их центров тяжести (табл. 8).

Таблица 8

Относительный вес и координаты центров тяжести звеньев тела человека

Части тела	Относительный вес звена (%)	Относительное расстояние от проксимального конца до центра тяжести звена (%)
Голова	7	
Туловище	43	44
Плечо правое	3	47
Плечо левое	3	47
Предплечье правое	2	42
Предплечье левое	2	42
Кисть правая	1	
Кисть левая	1	
Бедро правое	12	44
Бедро левое	12	44
Голень правая	5	42
Голень левая	5	42
Стопа правая	2	44
Стопа левая	2	44

Так, центр тяжести головы расположен на середине линии, соединяющей верхние края наружных слуховых отверстий. Центр тяжести кисти с полусогнутыми пальцами находится в области головки третьей пястной кости.

2. Инструментальный метод. В процессе физических упражнений положение тела многократно изменяется. Меняется при этом и положение центра тяжести. Определить расположение центра тяжести при различных положениях тела можно с помощью прибора, состоящего из треугольной платформы, укрепленной на 3 динамометрах (рис. 64). Динамометры регистрируют реакции, представляющие суммы реакций незагруженной треугольной платформы и реакции, вызванные весом тела.

Вследствие весовой симметрии реакции от веса платформы равны между собой ($P_1 = P_2 = P_3$), поэтому они могут автоматически исключаться из динамометрических показателей (или динамометры перед опытом могут быть поставлены на ноль).

С помощью уравнений равновесия могут быть определены отрезки a, b и c, по которым находят центр тяжести тела человека, помещенного на платформу:

$$a = \frac{Q_a + 2Q_c}{2Q} l; \quad b = \frac{Q_b + 2Q_a}{2Q} l; \quad c = \frac{Q_c + 2Q_b}{2Q} l, \tag{50}$$

где Q — вес тела человека, равный $Q_a + Q_b + Q_c$ — показаниям динамометров (из которых вычтена $^1/_3$ веса платформы).

Перед тем как положить человека на платформу, ее покрывают листом бумаги, предварительно очертив контур позы человека. После этого, на основании показаний динамометров и расчета по формулам 50, откладывают на бумаге отрезки *a*, *b*, *c*.

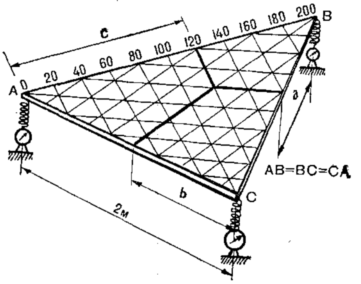


Рис. 64.

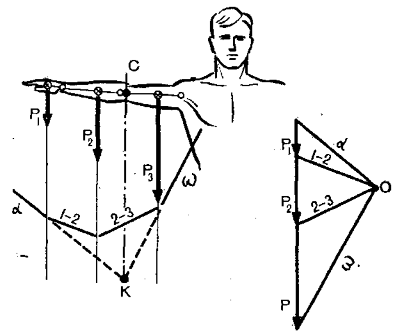


Рис. 65.

3. **Графический метод** (п р и м е р VI. 2). На рис. 65 показано построение, с помощью которого определяется положение центра тяжести руки человека. Методика этого построения описана на стр. 60.

Глава VII.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

§ 36. Понятие об устойчивости равновесия тела

Вопрос устойчивости равновесия тел при изучении физических упражнений имеет исключительно важное значение. Здесь рассматривается в основном устойчивость равновесия тела, когда сила, действующая на него, длительно сохраняет свою величину, т. е. когда условия приближаются к статике.

Равновесие тела называется *устойчивым*, если после малого отклонения от положения равновесия тело возвращается к этому положению. Равновесие тела называется *неустойчивым*, если в результате малого отклонения от первоначального положения равновесия тело не возвращается к этому положению.

Примером устойчивого равновесия может служить равновесие шарика, касающегося вогнутой поверхности в ее нижней точке (рис. 66, *а*), примером неустойчивого равновесия — равновесие шарика, касающегося выпуклой поверхности в ее верхней точке (рис. 66, *б*). Если поверхность, на которой лежат шарики, гладкая, сила реакции будет направлена по нормали к поверхности. В этих двух случаях шарики будут находиться в равновесии, так как приложенные к ним силы Q и R равны по величине и противоположны по направлению. Если отклонить шарики от положения равновесия, то реакция опоры изменит свое направление. Равнодействующая сил Q и R в первом случае будет возвращать шарик в первоначальное положение, а во втором еще более удалять от него.

Для шарика, находящегося на горизонтальной плоскости (рис. 66, *в*), силы Q и R будут оставаться уравновешенными при любом его смещении. Такое равновесие называется *безразличным*.

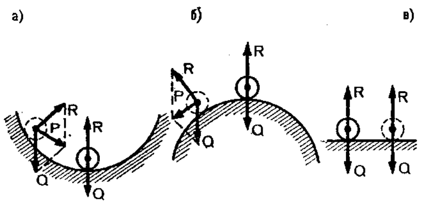


Рис. 66.

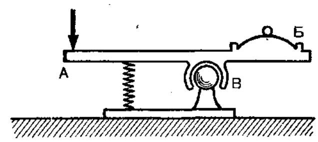


Рис. 67.

Такое неустойчивое равновесие, какое рассмотрено в примере с гладким шариком на вершине выпуклой поверхности, удержать практически невозможно. Только хорошо натренированные люди — жонглеры, цирковые гимнасты, эквилибристы — благодаря быстроте реакции способны удерживать предмет или свое тело в положении неустойчивого равновесия. Длительное время, как правило, тело может находится только в состоянии устойчивого или безразличного равновесия.

Вместе с тем в процессе тренировки широко используется положение неустойчивого равновесия. Так на нем основан прибор (рис. 67) для тренировки футболистов и определения быстроты реакции. Ставя ногу на педаль A, футболист обязан удержать шарик в очерченной зоне $Б$ на выпуклой поверхности, жестко соединенной с педалью и посаженной на шаровой шарнир $В$.

§ 37. Устойчивость равновесия тела, имеющего точку опоры или ось вращения

Примером равновесия тела, имеющего одну точку опоры или ось вращения, может служить равновесие тела гимнаста в стойке (рис. 68, *а*) или в висе (рис. 68, *б*). Равновесие тела является устойчивым, если при отклонении его от положения равновесия центр тяжести тела поднимается, и неустойчивым, если при отклонении тела от положения равновесия центр тяжести его опускается. Следовательно, равновесие тела, имеющего точку опоры или ось вращения, будет устойчивым, когда его центр тяжести занимает самое низкое из всех возможных положений; неустойчивым, когда он занимает самое высокое положение; безразличным, когда высота его центра тяжести при всех положениях тела остается неизменной.

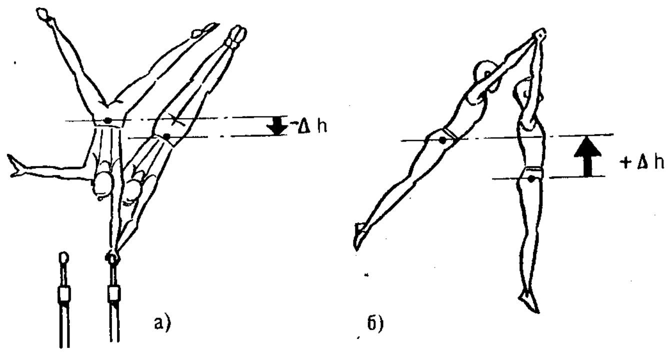


Рис. 68.

§ 38. Устойчивость равновесия тела, опирающегося на плоскость

Если твердое тело, опирающееся своим основанием на горизонтальную плоскость (рис. 69, *а*), повернут вокруг ребра *А* (положение II) так, чтобы сила тяжести тела *Q* проходила слева от него, то эта сила создает относительно оси поворота момент, стремящийся возвратить тело в прежнее положение равновесия. Когда тело займет положение III, то сила тяжести будет проходить через ось опоры и относительно ее момент силы тяжести будет равен нулю. В этом случае тело с одинаковой вероятностью может либо возвратиться в первоначальное положение, либо упасть вправо. Поэтому положение III — положение неустойчивого равновесия. В положении I тело будет находиться в состоянии устойчивого равновесия, так как при малом отклонении от него тело опять возвращается в первоначальное положение.

Угол поворота α, на который следует повернуть тело, чтобы перевести его из устойчивого положения в неустойчивое, называется *углом устойчивости*. Он тем больше, чем шире основание тела и чем ниже расположен его центр тяжести. Если то же самое тело положить на другую плоскость (рис. 69, *б*), угол устойчивости будет больше ($\alpha_1 > \alpha$). Для опрокидывания тела в этом случае потребуется поворот его на бо́льший угол. Эти обстоятельства широко используются в практике спорта для создания положения устойчивости. На рис. 70 показано, как постановка ног способствует повышению угла устойчивости. В технике борьбы и бокса приемы увеличения угла устойчивости особенно разнообразны.

Способность тела возвращаться к первоначальному положению равновесия по прекращении действия на тело сил, нарушающих это равновесие, называется *динамической устойчивостью тела.* Она возрастает с увеличением ширины площади опоры тела и с понижением его центра тяжести. Если твердое тело опирается не всем основанием, а несколькими точками, не лежащими на одной прямой, то за площадь опоры надо принимать площадь, образуемую линиями, соединяющими эти точки.

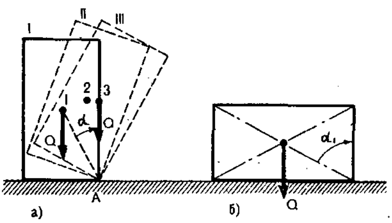


Рис. 69.

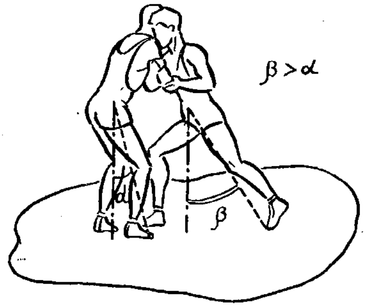


Рис. 70.

Способность тела сопротивляться всякому, хотя бы и малому, нарушению его равновесия, называется *статической устойчивостью тела.* Пусть на тело с сечением $ABCD$, имеющее вес Q, действует сила P, стремящаяся опрокинуть тело вокруг ребра B. Равновесие тела будет возможно лишь в том случае, если равнодействующая R сил Q и P будет пересекать плоскость опоры внутри контура основания тела (рис. 71, *а*). Если же равнодействующая R пройдет справа от точки B, то она будет создавать момент, стремящийся опрокинуть тело вокруг этой точки (рис. 71, *б*). В случае предельного равновесия, т. е. когда равнодействующая R пройдет через точку B, ее момент относительно

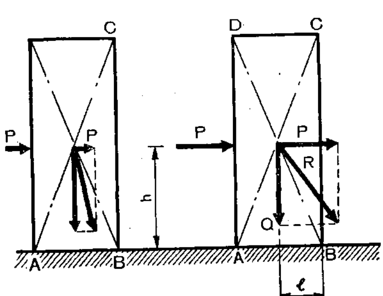


Рис. 71.

этой точки будет равен нулю. Но по теореме Вариньона момент равнодействующей R равен сумме моментов составляющих сил. Следовательно, в случае предельного равновесия тела $Ql - Ph = 0$. Произведение веса тела на его плечо относительно возможной оси вращения тела называется *моментом устойчивости тела.* Произведение модуля опрокидывающей силы на ее плечо относительно возможной оси вращения тела называется *опрокидывающим моментом*. Сила $P = \frac{Ql}{h}$, т. е. минимальная сила, при которой твердое тело опрокидывается, называется *критической силой*.

Для статической устойчивости тела необходимо, чтобы момент устойчивости его был больше опрокидывающего момента. Отношение момента устойчивости к опрокидывающему моменту называется *коэффициентом устойчивости*:

$$k_{\text{уст}} = \frac{Ql}{Ph}. \qquad (51)$$

Для устойчивого положения тела коэффициент устойчивости должен быть больше единицы.

§ 39. Статическая устойчивость равновесия тела человека

Все вычисления, связанные с устойчивостью тела, усложняются, когда речь идет не о геометрически правильном твердом теле, а о теле человека. У человека стопы ног не имеют правильной формы, они не абсолютно жестки и при опрокидывании тела деформируются. Площадь опоры стоп (S) при опрокидывании будет уменьшаться. При этом точка опрокидывания будет перемещаться к середине площади опоры. Определим критическую силу для человека в основной стойке. Вес тела $Q = 70$ *кГ*, расстояние от пола до центра тяжести $h = 0{,}9$ *м*. Длина стопы $l = 0{,}25$ *м*. Ширина стопы $c = 0{,}1$ *м*. Предположительно проекция центра тяжести проходит через центр площади опоры.

Если тело человека принять за абсолютно жесткое и если опрокидывающая сила F_x приложена к центру тяжести тела и направлена вдоль оси x горизонтально, то для ее определения можно воспользоваться формулой:

$$F_x = \frac{Q \cdot \frac{l}{2}}{h} = \frac{70 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}125}{-0{,}9} = 9{,}7 \text{ кГ } (95 \text{ н}).$$

Если опрокидывающая сила F_y направлена вдоль оси y, то ее критическое значение будет:

$$F_y = \frac{Q \cdot \frac{c}{2}}{h} = \frac{70 \cdot 0}{0{,}9 \cdot 2} = 4{,}35 \text{ кГ } (43 \text{ н}).$$

Однако в действительности критическое значение опрокидывающей силы значительно меньше. Поэтому на практике для решения задачи об устойчивости тела человека нужно воспользоваться другими формулами.

Предварительно следует ввести геометрическое понятие — *момент сопротивления* (W). Эта величина служит для характеристики площади сечения или (в данном случае) площади опоры и зависит не только от величины площади, но и от ее формы. Момент сопротивления для прямоугольной площади опоры длиной l, шириной $2c$, относительно оси, перпендикулярной l и проходящей через центр тяжести площади, вычисляется по формуле:

$$W = \frac{2cl^2}{6}. \tag{52}$$

Момент сопротивления измеряется в *см*^{3} или (в системе СИ) в *м*^{3}, 1 *см*$^3 = 10^{-6}$ *м*^{3}.

Рабочая формула для определения критической силы F и опрокидывающего момента M_0 для человека:

$$M \geqslant \frac{QW}{S}, \tag{53}$$

где Q — вес тела (*кГ*), S — площадь опоры (*см*^{2}), W — момент сопротивления площади опоры (*см*^{3}). Так как $M = Fh$, критическое значение опрокидывающей силы будет:

$$F \geqslant \frac{QW}{Sh}.$$

Определим критическую силу F_x по данной формуле

$$F_x \geqslant \frac{Q}{Sh} W_x = \frac{Q}{Sh} \cdot \frac{2cl^2}{6}.$$

Учитывая, что $S = 2cl$, получим:

$$F_x \geqslant \frac{Q \cdot 2cl^2}{2cl \cdot 6} = \frac{Ql}{6}. \tag{54}$$

Для конкретного случая:

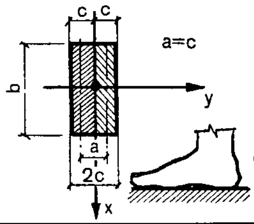
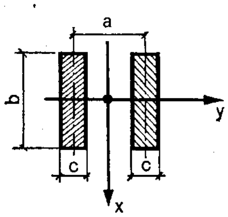
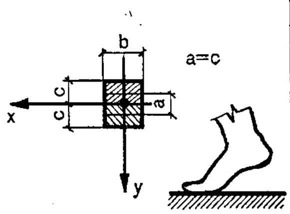
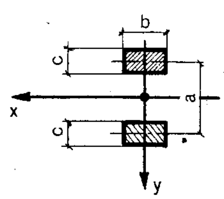
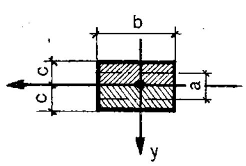
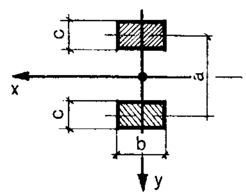
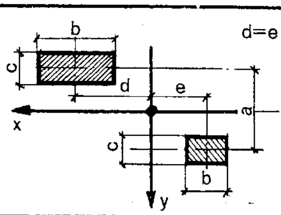
$$F_x \geqslant \frac{70 \cdot 0{,}25}{6 \cdot 0{,}9} = 3{,}24 \text{ кГ } (31{,}8 \text{ н}).$$

Полученное расчетным путем по формуле 54 значение критической силы соответствует опытным данным.

В табл. 9 приведены формулы для расчета критической силы в зависимости от позы спортсмена.

Таблица 9

Формулы к анализу статической устойчивости человека в некоторых положениях

Различные схемы постановки стоп	Формулы для критических сил в некоторых статических положениях		
 a=c	$P_{x_1}=\frac{Gb}{6h_1}$ $P_{y_1}=\frac{Gc}{3h_1}$ h_1	$P_x=0{,}94P_{x_1}$ $h=1{,}06h_1$ $P_{y_1}=0{,}94P_{y_1}$	$P_x=0{,}88P_{x_1}$ $h_3=1{,}14h_1$ $P_{y_1}=0{,}88P_{y_1}$
	$P_{x_2}=\frac{Gb}{6h_2}$ $P_{y_2}=\frac{G(c^2+3a^2)}{6h_2(a+c)}$ h_2	$P_x=0{,}94P_{x_2}$ $P_y=0{,}94P_{y_2}$ $h=1{,}06h_2$	$P_x=0{,}88P_{x_2}$ $P_y=0{,}88P_{y_2}$ $h=1{,}14h_2$
 a=c	$P_{x_3}=\frac{Gb}{6h_3}$ $P_{y_3}=\frac{Gc}{3h_3}$ h_3	$P_x=0{,}94P_{x_3}$ $P_y=0{,}94P_{y_3}$ $h=1{,}06h_3$	$P_x=0{,}88P_{x_3}$ $P_y=0{,}88P_{y_3}$ $h=1{,}14h_3$
	$P_{x_4}=\frac{Gb}{6h_4}$ $P_{y_4}=\frac{G(c^2+3a^2)}{6h_4(a+c)}$ h_4	$P_x=0{,}94P_{x_4}$ $P_y=0{,}94P_{y_4}$ $h=1{,}06h_4$	$P_x=0{,}88P_{x_4}$ $P_y=0{,}88P_{y_4}$ $h=1{,}14h_4$
	Промежуточное положение $P_{x_i}=\frac{Gb}{6h_i}$ $P_{y_i}=\frac{Gc}{3h_i}$ h_i	Предельное положение $P_x=\frac{Gb}{4{,}3h_1}$ $P_y=\frac{Gc}{2{,}2h_1}$ $h=0{,}72h_1$ β	Примечание: Предельное положение определяется углом β
	Промежуточное положение $P_{x_i}=\frac{Gb}{6h_i}$ $P_{y_i}=\frac{G(c^2+3a^2)}{6h_i(a+c)}$ h_i	Предельное положение $P_x=\frac{Gb}{3{,}3h_1}$ $P_y=\frac{G(c^2+3a^2)}{3{,}3h_1(a+c)}$ $h=0{,}55h_1$ α	Примечание: Предельное положение определяется углом α
 d=e	$P_{x_7}=\frac{G[c(c^2+12d^2)+b(b^2+12d^2)]}{6h_1(c^2+cb)(2d+c)}$ $P_{y_7}=\frac{G(c^2+3a^2)}{6h_1(a+c)}$ h_i	$P_x=\frac{P_{x_7}\cdot h_1}{h_i}$ $P_y=\frac{P_{y_7}\cdot h_1}{h_i}$ h_i	Приведенные формулы верны в случае равномерной передачи веса тела на обе ноги.

Раздел II

КИНЕМАТИКА

Глава VIII.

ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

§ 40. Основные понятия

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение тел без учета их инертности и действующих сил. Поэтому иногда говорят, что кинематика изучает *геометрические* свойства движения, т. е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения тел в пространстве.

Кинематика занимает исключительно большое место в биомеханике физических упражнений.

Кинематические методы исследования имеют самостоятельное практическое значение при изучении сложных траекторий движения, передач движений от одного органа другому и т. д.

Напомним, что под движением в механике понимают изменения положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам, происходящие во времени. Чтобы зарегистрировать изменения положения тела, необходимо применить какую-то систему отсчета. Поэтому определение движения тела следует уточнить: движение есть изменение положения тела с течением времени относительно неподвижной системы отсчета. Это добавление существенно, что подтверждается следующими примерами. Велосипедист видит с седла, что носки его ног «проходят» *круговой путь* (рис. 72, *а*). Человек, стоящий на обочине дороги, видит, что носки велосипедиста «проходят» *волнообразный путь* (рис. 72, *б*). Пассажир на пароходе, наблюдая за своим спутником, подбрасывающим мяч вверх, видит, что он движется вертикально вверх и вниз. Наблюдатель, стоящий на берегу, видит, что мяч описывает параболу.

Несмотря на то, что неподвижных тел нет, условно обычно считают неподвижным твердым телом, с которого удобно наблюдать процессы движения, Землю. К неподвижным телам при решении ряда задач причисляют также пол аудитории, площадку для игры и т. д. При этом сознательно оставляют без внимания суточное движение Земли.

Система координат, связанная с телом, относительно которого рассматривается изучаемое движение, называется *системой отсчета*. Если условно считать Землю неподвижной, та система отсчета неподвижна относительно Земли. Движение тел по отношению к этой системе отсчета, т. е. по отношению к Земле, принимается (условно) за *абсолютное* (результирующее).

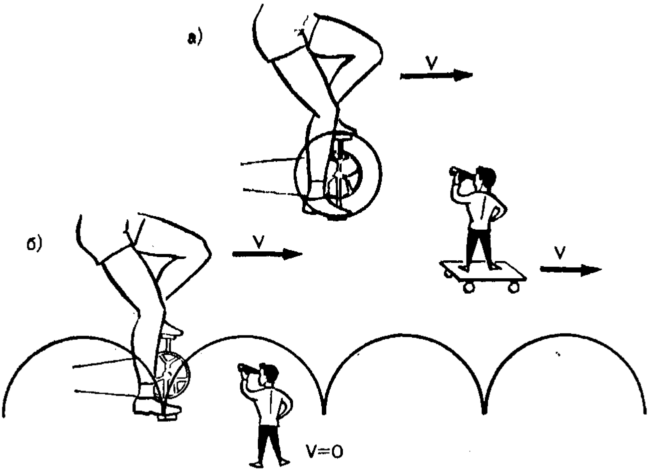


Рис. 72.

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство. Все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины принимается один метр, за единицу времени — одна секунда. Время является скалярной, непрерывно изменяющейся, величиной. Время t принимается за независимую переменную (аргумент). Все другие переменные величины рассматриваются как функции времени t. Обычно этими переменными величинами являются расстояние, скорость, ускорение и т. д.

Всякий *момент времени* t определяется числом секунд, которые прошли от какого-то начального момента t_0 до данного. Разность между этими последовательными моментами ($t - t_0$) или какими-либо другими называется *промежутком времени*.

Когда в кинематике говорят, что изучаемое движение задано, это значит, что указано положение тела или точки относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Изучение кинематики удобно начать с простейшего объекта — точки. Только после изучения кинематики точки рационально переходить к изучению движения твердого тела.

§ 41. Способы задания движения точки

I. Естественный способ. Пусть точка совершает движение по некоторой линии AB (рис. 73, *а*). Эта линия носит название *траектории* точки. Выберем на ней произвольную неподвижную точку O и будем считать ее началом отсчета расстояний. Измеренная в линейных единицах, длина дуги OM называется *расстоянием* точки M от начала отсчета, или ее *дуговой координатой*. (Это расстояние обозначим малой буквой s; путь, пройденный точкой, принято обозначать большой буквой S.)

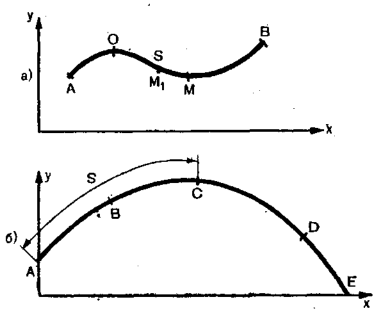


Рис. 73.

Примем какое-то направление от начала отсчета O за положительное, например вправо от точки O; тогда расстояние, отложенное от точки O в этом направлении, будет положительным, в противоположном — отрицательным. Расстояние s не всегда есть путь S, пройденный точкой за заданный промежуток времени. Когда путь, пройденный точкой, исчисляется от начала отсчета в одном направлении, расстояние s равно пути S. Если же, например, точка, двигаясь из начала O, доходит до положения M, а затем, перемещаясь в обратном направлении, проходит в положение M_1, то в этот момент ее координата $s = \smile{OM_1}$, а пройденный за время движения путь равен $\smile{OM} + \smile{MM_1}$, т. е. не равен s.

В любой данный момент точка может занимать только одно положение на траектории, поэтому ее расстояние s от начала отсчета — некоторая однозначная функций времени:

$$s = f(t). \qquad (55)$$

Это уравнение, выражающее функциональную зависимость между расстоянием точки (s) от начала отсчета и временем (t), истекшим от начала движения, называется *уравнением движения точки по данной траектории*.

Допустим, что диск брошен под углом α к горизонту, $ABCDE$ есть траектория центра тяжести диска (рис. 73). В этом случае путь, пройденный за некоторое время t, есть дуга ABC. Если закон движения по данной траектории известен, т. е. s является известной функцией t, то, пользуясь уравнением движения, можно для любого момента времени определить расстояние, которое прошла точка от начала отсчета, и указать ее положение на траектории.

Траектория точки может быть задана *аналитически* (дано уравнение кривой) или *геометрически* (например, указывают, что, выполняя обязательные упражнения, фигурист движется по окружности диаметром $d = 11{,}4$ м).

Функция $s = f(t)$ может быть дана в виде уравнения или графика. График ее называется *графиком движения*. Он может быть построен по уравнению $s = f(t)$. Следует отметить, что как уравнение, так и график движения дают возможность определить путь, пройденный точкой от начала отсчета. По графику на рис. 74 можно сказать, что в момент времени t_1 точка находится на расстоянии s_1 от начала O. Данный график не является траекторией точки.

Пример VIII. 1. Мяч подброшен вверх с начальной скоростью

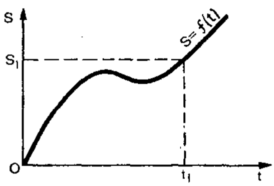


Рис. 74.

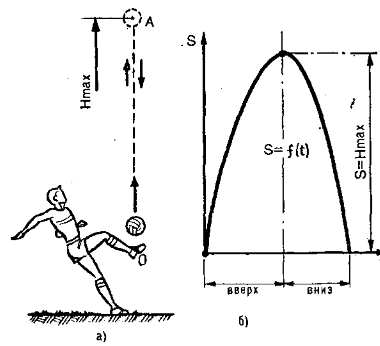


Рис. 75.

$v_0 = 29{,}4$ *м/сек*. Вертикальная линия OA — его траектория (рис. 75, *а*). Положение точки $s = f(t)$ представлено графиком (рис. 75, *б*). График $s = f(t)$ — есть закон движения.

Пример VIII. 2. Изучая скорость бегуна на 100-метровой дистанции, отмечают путь, пройденный атлетом в различные промежутки времени. На основании этих данных строят график $s = f(t)$ (рис. 76). Правда, в большинстве случаев отмечают время t, соответствующее прохождению определенной дистанции.

Таким образом, при естественном способе задания движения точки должны быть известны: а) траектория точки в выбранной системе отсчета, б) начало и положительное направление движения, в) закон движения точки по данной траектории в виде уравнения $s = f(t)$ или графика.

2. Координатный способ. Естественный способ задания движения точки прост и нагляден. Однако траектория точки заранее не всегда бывает известна. Поэтому чаще приходится пользоваться другим способом — *координатным*.

Положение точки M по отношению к системе отсчета $Oxyz$ (рис. 77) можно определить ее координатами x, y, z. При перемещении точки все эти координаты с течением времени будут изменяться: в какой-то другой момент времени, например t, координаты точки будут x_1, y_1, z_1 и т. д. Чтобы знать закон движения точки, на основании которого можно было бы определить ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значение координат для каждого момента времени. Поэтому необходимо задать функции координат в зависимости от времени:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \tag{56}$$

Эти уравнения — *уравнения движения точки в декартовых прямоугольных осях координат*. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

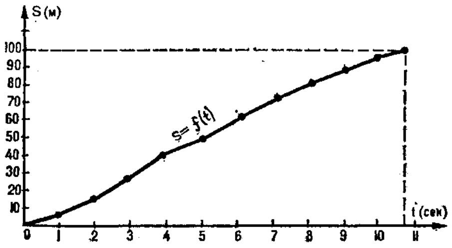


Рис. 76.

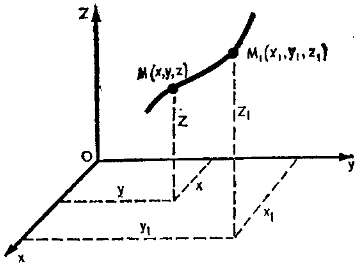


Рис. 77.

Если движение точки происходит в одной плоскости и если эту плоскость принять за систему отсчета (плоскость Ox), то будет только два уравнения движения:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \tag{57}$$

При прямолинейном движении точки, если вдоль траектории направить координатную ось Ox, движение будет описываться одним уравнением

$$x = f_1(t), \tag{58}$$

как при естественном способе движения.

При исследовании большинства физических упражнений, движение отдельных точек тела спортсмена рассматривают как плоское движение, т. е. движение, которое может быть задано уравнениями 57. Только в последнее время благодаря новой стереограмметрической аппаратуре стали пользоваться уравнениями 56. Уравнения 56 и 57 представляют собой одновременно *уравнения траектории точки в параметрической форме*. Роль параметра играет время t. Поэтому уравнение 56 или 57 содержит всю необходимую информацию о движении точки как во времени, так и в пространстве. Чтобы получить уравнение траектории в обычной форме, необходимо исключить из уравнений 56, 57 или 58 время и найти взаимоотношение координат точки.

Если движение задано уравнением 56, то, зная, что $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ или

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt, \text{ где}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

и т. д.; можно (приняв во внимание, что при $t = 0$ и $s = 0$) получить:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{59}$$

Это уравнение используется для перехода от координатного способа задания движения к естественному.

Пример VIII. 3. При прыжке спортсмена в воду положение его центра тяжести задано с помощью уравнений движения в координатной форме:

$$x = 3t;$$

$$y = 6{,}0t - 6{,}0t^2.$$

Требуется найти траекторию центра тяжести прыгуна.

Решение. Найдем траекторию движения точки. Для этого исключим t из заданных уравнений. Заметим, что:

$$t = \frac{x}{3}; \quad t^2 = \frac{x^2}{9}.$$

Подставим эти значения в исходное уравнение для y:

$$y = \frac{6x}{3} - \frac{6x^2}{9}, \text{ или}$$

$$y = 2x - \frac{2}{3}x^2.$$

Полученное уравнение есть уравнение параболы. График этого уравнения — траектория центра тяжести прыгуна (рис. 78).

Пример VIII. 4. Движение мяча по наклонной плоскости задано уравнениями:

$$x = 8t - 4t^2;$$

$$y = 6t - 3t^2.$$

Определить траекторию мяча и записать движение естественным способом.

Решение. Для определения траектории исключим t из заданных уравнений. Для этого помножим первое уравнение на 3, второе на 4 и вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$$3x - 4y = 3(8t - 4t^2) - 4(6t - 3t^2) = 0.$$

Отсюда: $y = \frac{3}{4}x$. Следовательно, искомая траектория — прямая линия (рис. 79), имеющая наклон к оси x под углом α, тангенс которого $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

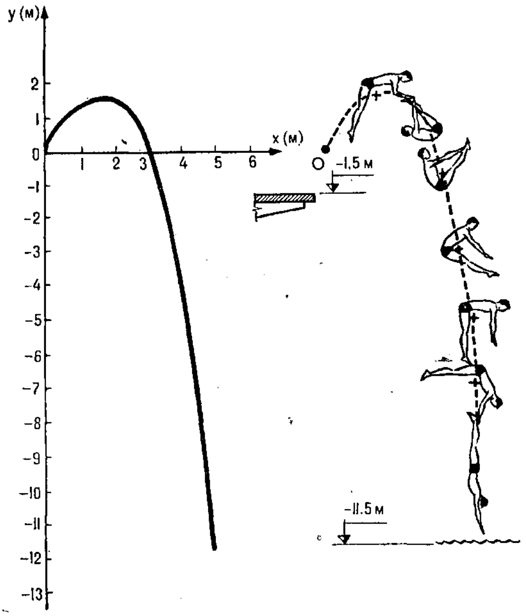


Рис. 78.

Чтобы записать данное движение естественным способом, воспользуемся формулой 59, применив ее для плоского движения:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

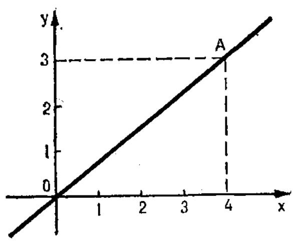


Рис. 79.

Производные от x и y: $\dot{x} = 8 - 8t$, $\dot{y} = 6 - 6t$.
Поэтому:

$$s = \int_0^t \sqrt{(8-8t)^2 + (6-6t)^2}\, dt = \int_0^t \sqrt{(10-10t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^t (10 - 10t)\, dt = \int_0^t 10dt - \int_0^t 10t dt = 10t - 5t^2.$$

Итак, $s = 10t - 5t^2$. Это запись данного движения мяча естественным способом. Заметим, что при $t = 0$ $s = 0$; при $t = 1$ $s = 5$. Это значит, что через 1 *сек.* мяч поднимется в точку A. При $t = 2$ *сек.* $s = 0$. Это значит, что через 2 *сек.* мяч, скатываясь по наклонной плоскости, достигнет начала координат. При $t > 2$ *сек.* s — отрицательна и ее абсолютная величина непрерывно увеличивается. Таким образом, мяч, поднявшись по наклонной плоскости до точки A, скатывается вниз по закону $s = 10t - 5t^2$.

Глава IX.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 42. Скорость точки

Скоростью точки называется вектор, определяющий в каждый данный момент быстроту и направление движения точки.

Для равномерного прямолинейного движения определить скорость точки наиболее просто. В этом случае характерным является то обстоятельство, что всегда в равные промежутки времени точка проходит равные пути, перемещаясь вдоль прямой линии. Поэтому отношение пути S, пройденного точкой за некоторый промежуток времени t, к величине этого промежутка представляет собой модуль v скорости точки:

$$v = \frac{S}{t}. \tag{60}$$

Направление вектора $\bar{v}$ скорости точки в этом случае совпадает с направлением ее траектории. Иначе говоря, вектор скорости точки направлен по прямолинейной траектории точки в сторону ее движения.

Как видно из формулы 60, скорость имеет размерность

$$[v] = \frac{\text{длина}}{\text{время}}.$$

Для любого криволинейного движения скорость точки определяется иначе. Например, точка M движется по траектории AB (рис. 80). Пусть в момент времени t точка занимает положение M, определяемое радиусом — вектором $\bar{r}$, а в другой момент $(t + \Delta t)$ положение M_1 определяемое радиусом — вектором $\bar{r}_1$. Здесь Δt — малое приращение времени.

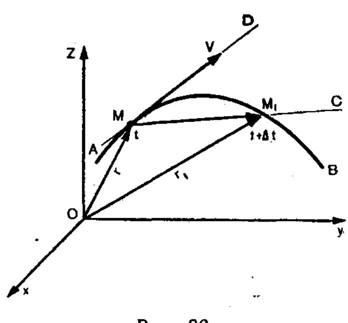


Рис. 80.

Вектор $\overline{MM}_1$, начало которого совпадает с точкой M (т. е. с положением точки в начале данного промежутка времени), а конец с точкой M_1 (с положением точки в конце промежутка времени), — перемещение точки за данный промежуток времени. Следовательно, перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = [(t + \Delta t) - t]$ определяется вектором $\overline{MM}_1$, который можно назвать *вектором перемещения* *точка*. Он направлен по хорде, если точка движется криволинейно. Из треугольника OMM_1 видно, что $\bar{r} + \overline{MM_1} = \bar{r}_1$, следовательно:

$$\overline{MM_1} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta\bar{r}.$$

Допустим, что точка M движется не по дуге $\breve{MM_1}$, а по ее хорде MM_1, причем равномерно, перемещаясь за промежуток времени Δt из положения M в то же положение M_1. Скорость этого (воображаемого) движения называется *средней скоростью* точки за промежуток времени Δt.

Средняя скорость $\bar{v}_{\text{ср}}$ будет равна:

$$\bar{v}_{\text{ср}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}. \tag{61}$$

Так как перемещение точки $\overline{MM_1}$ есть вектор, то и средняя скорость $\bar{v}_{\text{ср}}$ как вектор, деленный на скалярную величину Δt, есть также вектор. Средняя скорость точки позволяет судить только о направлении *конечного* перемещения точки за время Δt и о некоторой средней скорости перемещения, но еще не дает представления о действительной скорости движения точки в каждый данный момент времени. Средняя скорость точки зависит от величины промежутка времени Δt: чем он меньше, тем меньше ошибка при замене дуги $\breve{MM_1}$ хордой $\overline{MM_1}$. Поэтому по мере уменьшения промежутка времени Δt непрерывно уменьшается величина перемещения $\overline{MM_1}$, при этом отношение $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$ стремится к некоторому определенному предельному значению, или, как говорят, стремится к пределу.

Этот предел есть *мгновенная скорость* в данный момент времени. Обозначая ее через $\bar{v}$, будем иметь:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Вектор $\bar{v}$ будет направлен по касательной MD к траектории точки в сторону ее движения.

Модуль $|\bar{v}|$ этой скорости будет равен:

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} \right|, \tag{62}$$

где $\overline{MM_1}$ длина хорды MM_1. Но предел отношения $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ представляет собой первую производную от вектора $\bar{r}$ по аргументу t и обозначается, как и производная скалярной функции, символом $\frac{d\bar{r}}{dt}$.

В результате:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (63)$$

Это можно выразить словами так: *вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса вектора точки по времени.*

Так как предельным направлением секущей MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Обращаясь к соотношению 62, можно сказать, что

$$|\bar{v}| = \frac{d\,|\overline{MM_1}|}{dt}. \qquad (64)$$

Но MM_1 есть расстояние s, пройденное точкой за время Δt, поэтому соотношение 64 можно написать так:

$$|\bar{v}| = \frac{ds}{dt}. \qquad (65)$$

Таким образом, численная величина скорости в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) по времени.

Чтобы определить численное значение (модуль) скорости по заданному уравнению движения $s = f(t)$ в какой-нибудь момент времени $t = t_1$, следует взять производную от функции s по времени t. В найденное выражение производной надо подставить вместо аргумента t его частное значение t, соответствующее тому моменту времени, для которого определяется скорость. Полученное значение и будет модулем определяемой скорости в момент времени t_1.

Пример IX. 1. Мяч подброшен вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Уравнение движения:

$$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 равна 29,4 *м/сек*; H — переменная высота подъема мяча над уровнем земли; $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

Необходимо определить скорость в момент времени $t = 2$ *сек.*

Решение:

Найдем производную от H:

$$v = \frac{dH}{dt} = v_0 - gt.$$

Подставим заданные значения: $v_0 = 29{,}4$ *м/сек*; $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}; $t = 2$ *сек.*

Получим: $v = 29{,}4 - 9{,}8 \cdot 2 = 9{,}8$ *м/сек.*

§ 43. Определение скорости точки по уравнениям ее движения в прямоугольных координатах

Рассмотрим движение в плоскости xOy, которое задано уравнениями $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$.

Пусть в момент времени t и $t + \Delta t$ движущаяся точка занимает положения M и M_1. На рис. 81 эти положения описываются координатами (x, y) и $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$.

Соединив точки MM_1, получим вектор $\overline{MM_1}$.

Средняя скорость $\bar{v}_{ср}$ за этот промежуток времени будет:

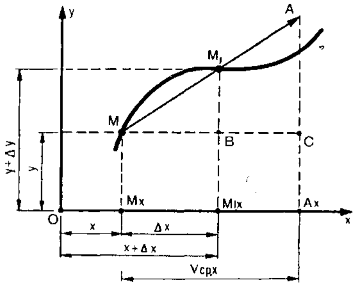


Рис. 81.

$$\bar{v}_{ср} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \overline{MA}.$$

Деля вектор $\overline{MM_1}$ на Δt, получим вектор $\overline{MA}$. Из чертежа следует, что

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MM_1},$$

но $MC = M_xA_x = (MA)_x = (\bar{v}_{ср})_x$, а $(\bar{v}_{ср})_x$ есть проекция вектора $\overline{MA}$ (средней скорости точки) на ось x, скалярная величина. $MB = M_xM_{1x} = \Delta x$ — проекция вектора $\overline{MM_1}$ на ось x.

$MA = v_{ср}$ — модуль вектора $\overline{MA}_1$ (средней скорости точки).

Но модуль вектора средней скорости точки $\bar{v}_{ср} = \dfrac{MM_1}{\Delta t}$.

Подставляя данные значения в пропорцию, получим:

$$\frac{|\bar{v}_{ср\,x}|}{\Delta x} = \frac{\dfrac{MM_1}{\Delta t}}{MM_1} = \frac{1}{\Delta t}.$$

Отсюда проекция средней скорости точки на ось x:

$$|\bar{v}_{ср.\,x}| = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и обозначая проекцию истинной скорости точки на ось x через $|v_x|$, получим:

$$|\bar{v}_x| = \lim_{\Delta t \to 0} |\bar{v}_{ср\,x}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad (66)$$

Подобным образом можно показать, что

$$|\bar{v}_y| = \frac{dy}{dt}, \qquad (67)$$

Это дает возможность говорить о том, что *проекции скорости точки на неподвижные оси координат равны первым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени.*

Зная проекции вектора на две неподвижные оси координат, в плоскости которых лежит вектор, можно найти для всякого вектора его модуль и направление. Это положение справедливо и для вектора скорости. Модуль вектора скорости будет равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \tag{68}$$

Направление вектора скорости можно определить также, пользуясь рис. 82:

$$\cos\varphi = \cos(\bar{v},\ x) = \frac{v_x}{v},$$

$$\cos\alpha = \cos(\bar{v},\ y) = \frac{v_y}{v}. \tag{69}$$

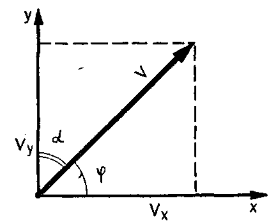


Рис. 82.

Следует заметить, что в выражении $\cos(\bar{v}, x)$ поставлены вектор $\bar{v}$ и его проекции. Это значит, что речь идет об угле между вектором $\bar{v}$ и его проекцией x или y.

Если точка совершает движение не в плоскости, а как угодно в пространстве, то ее движение будет задано тремя уравнениями 56, а скорость представлена тремя проекциями скоростей v_x, v_y и v_z.

$$v_x = \frac{dx}{dt};\quad v_y = \frac{dy}{dt};\quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{70}$$

Соответственно этому модуль v будет равен (рис. 83):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v};\quad \cos\beta = \frac{v_y}{v};\quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$

Обычно при исследовании спортивных движений опыт ставят так, чтобы можно было рассматривать движение точки только в одной плоскости xOy.

Пример IX. 2. Движение диска задано уравнениями:

1). $x = 8t$; 2) $y = -t^2 + 8t$ (x и y — в метрах, t — в секундах).

Необходимо определить: а) уравнение траектории; б) наибольшую высоту полета—H; в) дальность полета—L; г) скорость v_1 в наивысшей точке траектории; д) скорость v_2 в момент падения диска на землю. Сопротивление воздуха можно не учитывать*.

* Решение задачи о движении легкоатлетических снарядов с учетом сопротивления воздуха изложено в книге В. Н. Тутевича «Теория спортивных метаний» (ФиС, 1969).

Решение. Чтобы определить траекторию полета диска $y = f(x)$, нужно из заданных уравнений движения диска исключить время t. Из первого уравнения определяем t, которое равно $\frac{x}{8}$; это значение t подставляем во второе уравнение. В результате получаем:

$$y = -t^2 + 8t = -\frac{x^2}{64} + x.$$

Это уравнение и есть уравнение траектории, которая является параболой. На основании данного уравнения можно определить y, задавая различные значения x:

x	0	10	20	30	32	40	50	60	64
y	0	8,44	13,75	15,95	16	15	11	4,0	0

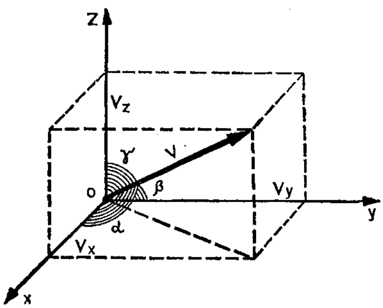


Рис. 83.

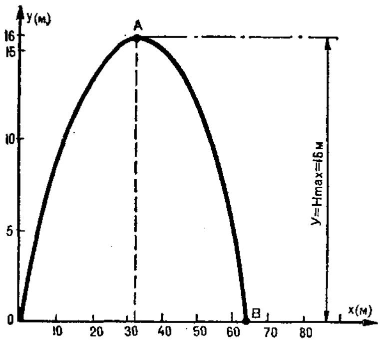


Рис. 84.

Пользуясь этими значениями, построим траекторию диска (рис. 84). Она пересекает ось x в двух точках, ордината которых равна нулю ($y = 0$). Подставим это значение y в уравнение траектории, найдем абсциссы точек пересечения кривой с осью x:

$$y = x - \frac{x^2}{64} = 0; \quad x\left(1 - \frac{x}{64}\right) = 0.$$

Левая часть уравнения может быть равна нулю, когда $x_1 = 0$ или когда $(1 - \frac{x}{64}) = 0$; при этом $x_2 = 64$ *м*.

Очевидно, $x_1 = 0$. Эта точка относится к началу полета, а x_2 соответствует моменту приземления диска. Длина полета L равна:

$$L = x_2 = 64 \text{ м}.$$

Наивысшую точку A, которую достигает диск при полете, можно определить, считая что при этом $H = y_{max}$.

Чтобы найти максимум функции, следует отыскать первую производную и приравнять ее к нулю:

$$y = x - \frac{x^2}{64};$$

$$\dot{y} = 1 - \frac{2x}{64} = 0;$$

$$x = 32 \text{ м}.$$

Следовательно, максимальное значение $y_{\max}$ будет при $x = 32$ *м*. Подставив это значение в уравнение для y, получим:

$$y_{\max} = x - \frac{x^2}{64} = 32 - \frac{(32)^2}{64} = 16 \text{ м};$$

$$H = y_{\max} = 16 \text{ м}.$$

Чтобы определить скорость диска, необходимо найти проекции скорости на координатные оси, применяя формулы 70:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\,(8t)}{dt} = 8 \text{ (м/сек)};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\,(-t^2 + 8t)}{dt} = -2t + 8 \text{ (м/сек)}.$$

Необходимо отметить, что проекция скорости снаряда на ось x постоянная и не зависит от времени t. Проекция же на ось y зависит от времени t.

В наивысшей точке траектории скорость диска направлена по касательной к ней и параллельна оси x. Поэтому $v_{1y} = 0$; $v_{1x} = 8$ *м/сек*. Этот же результат может быть получен и другим путем. Известно, что наивысшая точка имеет координаты $x = 32$ *м*; $y = 16$ *м*. Поэтому легко определить время, по истечении которого диск достигнет точки A с координатами 32 и 16. В заданные уравнения движения $x = 8t$; $y = -t^2 + 8t$ делаем подстановку: $x = 8t = 32$; $y = -t^2 + 8t = 16$. Откуда находим $t = 4$. Подставляя $t = 4$ в выражение для v_y найдем $v_{1y} = (-2t + 8) = 0$, т. е. тот же результат, что и при рассмотрении графика на рис. 84.

Скорость диска v_2 в момент падения его на землю может быть определена с учетом дальности полета $L = 64$ *м*, $x = 8t = 64$; при этом $t = 8$ сек.

$v_{2x} = 8$ *м/сек*, так как $\frac{dx}{dt} = 8$ *м/сек* и не зависит от времени.

$v_{2y} = (-2t + 8) = (-16 + 8) = -8$ *м/сек*.

Модуль скорости диска v_2 будет равен:

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = 11{,}31 \text{ м/сек}.$$

Направление вектора скорости v_2 определяется по формулам:

$$\cos(v_2, x) = \frac{v_{2x}}{v_2} = \frac{8}{11{,}31} = 0{,}707;$$

$$\angle(v_2, x) = 45°;$$

$$\cos(v_2, y) = \frac{v_{2y}}{v_2} = \frac{-8}{11{,}31} = -0{,}707;$$

$$\angle(v_2, y) = 135°.$$

Задав уравнения движения $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$, получаем подробную информацию о движении точки тела.

Пример IX. 3. Копье брошено с начальной скоростью 24 *м/сек* под углом $\alpha = 45°$ к поверхности земли (рис. 85). Найти:

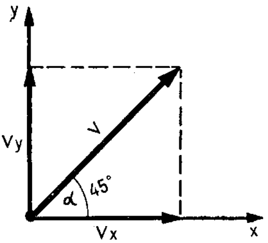


Рис. 85.

1) уравнение движения в координатной форме:

$$x = f_1(t) \text{ и } y = f_2(t);$$

2) траекторию движения $y = f(x)$;
3) дальность полета L;
4) наибольшую высоту полета $H_{\max}$;
5) длительность полета t;
6) скорость в момент, когда точка достигнет $H_{\max}$ и при приземлении. Сопротивление воздуха можно не учитывать.

Решение. Зная вектор скорости $\overline{v}$ (в условии дано, что его модуль равен $|v| = 24$ *м/сек*) и угол α, можно найти его составляющие по осям координат x и y.

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v.$$

Угол v, x равен 45°, поэтому

$$v_x = v_y = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 17 \text{ м/сек}.$$

Зная, что составляющие $v_x = 17$ *м/сек* и $v_y = 17$ *м/сек*, можно написать уравнения движения: $x = 17t$; $y = 17t - 4{,}9t^2$. При записи второго уравнения необходимо обратить внимание на то, что движение по вертикали возможно при начальной скорости $(17t)$ и действии сил тяжести

$$\left(-\frac{gt^2}{2} = -4{,}9t^2\right).$$

Чтобы получить уравнение траектории, нужно исключить время t из уравнений для x и y, так как уравнение траектории есть $y = f(x)$. Если $x = 17\ t$, то $t = \frac{x}{17}$,

$$t^2 = \frac{x^2}{17^2} = \frac{x^2}{289}.$$

Подставим значение t в уравнение для y:

$$y = 17t - 4{,}9t^2 = x - \frac{x^2}{59}.$$

Это и есть *уравнение траектории* полета копья. Дальность полета L будет равна координате x, при которой $y = 0$ (момент приземления)

$$y = x - \frac{x^2}{59} = 0; \quad x\left(1 - \frac{x}{59}\right) = 0.$$

Уравнение может быть равно нулю, когда

$$x = 0,$$

$$\left(1 - \frac{x}{59}\right) = 0.$$

Отсюда находим: $x_1 = 0$ (это соответствует началу полета) и $x_2 = 59$м (это соответствует приземлению), $L = x_2 = 59$ *м*.

Полное время полета t можно найти из уравнения $x = 17t$:

$$t = \frac{x}{17} = \frac{59}{17} = 3{,}47 \text{ сек.}$$

Максимальную высоту полета H_{max} можно найти, определив максимальное значение функции $y = f(x)$. Чтобы найти значение x, при котором наступает максимум функции, следует взять первую производную по x и приравнять ее к нулю:

$$y = x - \frac{x^2}{59};$$

$$\dot{y} = 1 - \frac{2x}{59} = 0; \quad x = 29{,}5 \text{ м}.$$

Подставляя эти значения x в уравнение траектории, найдем

$$H_{max} = y_{max} = x - \frac{x^2}{59} = 29{,}5 - \frac{29{,}5^2}{59} = 14{,}75 \text{ м}.$$

Скорость в любой точке равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

где x и y — координаты точки.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (17t)' = 17 \text{ м/сек},$$

$$v_y = (17t - 4{,}9t^2)' = 17 - 9{,}8t.$$

Пользуясь уравнением $x = 17t$, найдем время, когда снаряд достигнет H_{max}:

$$t = \frac{x}{17} = \frac{29,5}{17} = 1,75\ сек.$$

Зная это время, можно определить проекции скоростей, соответствующих заданной точке. Поэтому $v_x = 17$ *м/сек*; $v_y = 17 - 9,8t = 17 - 9,8 \cdot 1,75 = 0$.

В результате скорость в наивысшей точке полета равна:

$$v = v_x = 17\ м/сек.$$

Скорость в точке B к моменту приземления равна:

$$v_x = 17\ м/сек,$$

$$v_y = 17 - 9,8t = 17 - 9,8 \cdot 3,47 = -17\ м/сек.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17^2 + (-17)^2} = 24\ м/сек.$$

Угол наклона вектора этой скорости $\angle (v, x) = \alpha$ может быть определен так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-17}{17} = -1; \quad \alpha = 345°.$$

Пример IX. 4. Точка совершает гармоническое колебание по закону $x = a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$. (рис. 86). Определить скорость точки.

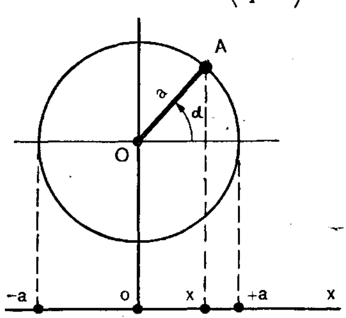


Рис. 86.

Примером гармонического колебания может служить перемещение проекции точки A на ось Ox при равномерном вращении этой точки по окружности с радиусом a. T — период колебания, т. е. время, в течение которого точка A совершает один оборот. Действительно, угол между радиусом a и осью Ox в любой момент времени будет равен $\frac{2\pi}{T} t = \alpha$. Здесь $\frac{2\pi}{T}$ — угловая скорость радиуса OA, или круговая частота: $\frac{2\pi}{T} = \omega$.

Проекция радиуса a на ось Ox будет равна:

$$x = a \cos \alpha = a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = a \cos \omega t.$$

Таким образом, задано уравнение движения $x = f(t)$. Поскольку движение происходит вдоль линии (ось Ox), проекция скорости на ось x будет равна скорости v:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = a\omega \sin \omega t.$$

Скорость в данном случае есть также функция от t:

$$v = \psi(t).$$

Так как синус может изменяться в зависимости от угла в пределах от (-1) до $(+1)$, то очевидно, что максимальное значение скорости будет:

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} = a\omega.$$

§ 44. Изменение скорости во времени

Изменение скорости во времени в процессе выполнения физических упражнений имеет исключительно важное значение. Поэтому, зная скорость в каждый данный момент времени или в определенной точке траектории, можно построить график функции

$$v = f(t) \tag{71}$$

или

$$v = \varphi(s). \tag{72}$$

Последнее выражение может быть задано через координаты

$$v_x = \varphi_1(s_x),$$
$$v_y = \varphi_2(s_y). \tag{73}$$

В предыдущем примере было показано, что скорость перемещения проекции точки на ось Ox непрерывно изменяется от $-\left(\frac{2\pi}{T} a\right)$ до $+\left(\frac{2\pi}{T} a\right)$, переходя через нулевые значения.

На рис. 87, *а* показано изменение скорости в беге на дистанции 100 *м* в зависимости от пути. Эта кривая есть $v = \varphi(s)$. Зависимость скорости от времени $v = f(t)$ при беге показана на рис. 87, *б*. Кривые похожи одна на другую, но это относится только к данному примеру.

Кривая функции $v = f(t)$ представляет большой интерес с точки зрения определений характера бега; она дает ответ на вопрос, как быстро была достигнута необходимая скорость, как она удерживалась, нарастала или убывала в конце бега и т. д. Эта кривая интересна еще и по следующим соображениям. На рис. 88 дан график $v = f(t)$. Прямоугольник с основанием Δt_1 и высотою v_1 имеет площадь $v_1\Delta t_1$, численно равную (с известным приближением) пути, пройденному телом за время Δt_1. Вообще же площадь, ограниченная кривой $v = f(t)$, отрезком на оси t, равным t_2, и перпендикулярами, восстановленными из концов этого отрезка, равна пути пройденному телом за время t, и может быть представлена в виде интеграла:

$$S = \int_0^{t_2} vdt. \qquad (74)$$

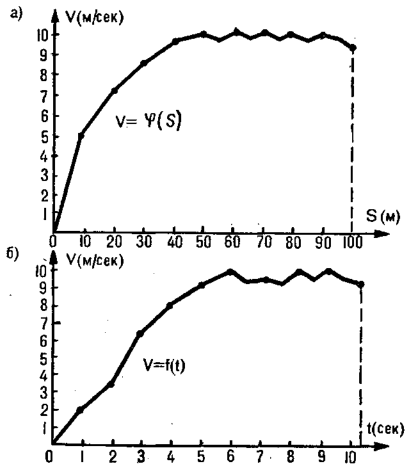


Рис. 87.

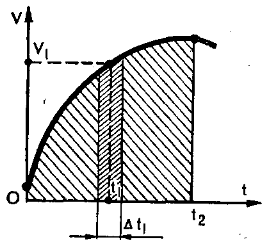


Рис. 88.

Если надо узнать путь, пройденный за время начиная от t_1 до t_2, то выражение 74 примет вид:

$$S_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} vdt. \qquad (75)$$

Допустим, что ведется наблюдение за скоростью бега спринтера и автоматический прибор вычерчивает кривую $v = f(t)$. Второй прибор (интегратор) может определить площадь, ограниченную осью Ox и координатами начала и конца движения. Таким образом, будет известна не только скорость, но и путь S, пройденный спринтером в данный момент времени.

Пример IX. 5. Фигурист выполняет обязательную фигуру — круг диаметром $D = 11{,}4$ *м* со скоростью v, которая постепенно падает, подчиняясь экспоненциальной зависимости: $v = v_0e^{-\alpha t}$. В момент отталкивания начальная скорость $v_0 = 4{,}5$ *м/сек*; $\alpha \cong 0{,}1$.

Определить, способен ли спортсмен при заданной начальной скорости сделать полный круг. Какая скорость будет к моменту завершения полного круга? Каково наибольшее перемещение фигуриста, если считать конечную скорость $v = 0{,}1\ v_0$?

Решение. Путь фигуриста при полном круге: $S = \pi D = 3{,}14 \cdot 11{,}4 = 36$ *м*.

Путь S, пройденный спортсменом, равен:

$$S = \int_0^t v\,dt.$$

Подставим значение скорости под знак интеграла:

$$S = \int_0^t v_0 e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha} v_0 \left| -e^{-\alpha t} \right|_0^t = \frac{1}{\alpha} v_0 \left[1 - e^{-\alpha t}\right].$$

Путь задан: $S = 36$ *м*, поэтому

$$\frac{1}{\alpha} v_0 \left[1 - e^{-\alpha t}\right] = 36.$$

Подставляя значения $\alpha = 0{,}1$ и $v_0 = 4{,}5$ *м/сек*, имеем:

$$\frac{1}{0{,}1} \cdot 4{,}5 \left(1 - e^{-0{,}1t}\right) = 36; \qquad e^{-0{,}1t} = 0{,}2.$$

Пользуясь таблицами функции e^{-x}, находим, что показатель степени ($0{,}1\,t$) должен быть равен 1,61. Отсюда время движения по окружности $t = 16{,}1$ *сек*.

Теперь можно определить, какова будет скорость v, когда спортсмен пройдет один круг:

$$v = v_0 e^{-\alpha t} = 4{,}5 e^{-0{,}1 \cdot 16{,}1} = 4{,}5 \cdot e^{-1{,}61} = 4{,}5 \cdot 0\,2 = 0{,}9 \text{ м/сек}.$$

Это дает возможность ответить на первые два вопроса. Фигурист опишет окружность за 16,1 *сек*. и будет иметь скорость, равную 0,9 *м/сек*.

Какой длины путь S способен пройти спортсмен?

По условию задачи можно считать, что практически движение закончено, когда $v = 0{,}1$, $v_0 = 0{,}1 \cdot 4{,}5 = 0{,}45$ *м/сек*. Пользуясь уравнением $v = v_0 e^{-\alpha t}$, подставив в него $v = 0{,}45$ *м/сек*, $v_0 = 4{,}5$ *м/сек*, $\alpha = 0{,}1$, в итоге получим:

$$e^{-0{,}1t} = \frac{v}{v_0} = 0{,}1.$$

Пользуясь таблицами функции e^{-x}, найдем, что $0{,}1t$ должно быть равно 2,3. При этом $t = \frac{2{,}3}{0{,}1} = 23$ *сек*., т. е. движение практически закончится через 23 *сек*. Это позволяет определить путь, пройденный фигуристом за данное время.

$$S=\int_0^{23} 4,5\cdot e^{-0,1t}\,dt=\frac{4,5}{0,1}\left|-e^{-0,1t}\right|_0^t=$$

$$=45\left|1-e^{-0,1\cdot 23}\right|=45\,(1-0,1)=40,5\text{ м}.$$

Итак, спортсмен при начальной скорости 4,5 *м/сек* способен пройти путь, равный $S = 40,5$ *м*.

§ 45. Ускорение точки

Движение точки с постоянной скоростью как по модулю, так и по направлению, происходит тогда, когда силы, приложенные к точке, взаимно уравновешиваются. Однако подобного рода движение встречается не так часто. В большинстве случаев скорость точки не остается постоянной. Изменение скорости может происходить либо по модулю (неравномерное прямолинейное движение), либо по направлению (равномерное криволинейное движение), либо по модулю и направлению одновременно (неравномерное криволинейное движение). Величина, характеризующая *быстроту изменения вектора скорости* как по модулю, так и по направлению, называется *ускорением*.

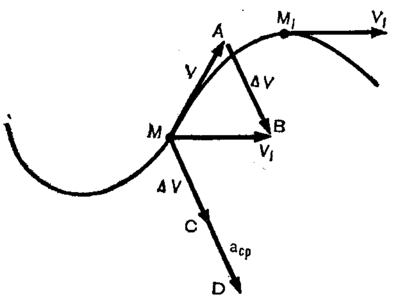


Рис. 89.

Пусть точка движется по некоторой криволинейной траектории (рис. 89). В момент времени t она занимает положение M, а в момент времени $(t+\Delta t)$ — M_1. Векторы скорости $\bar{v}$ и $\bar{v}_1$ в этих точках будут направлены по касательным к траектории.

Определим изменение вектора скорости точки за промежуток времени Δt. Для этого перенесем начало вектора $\bar{v}_1$ в точку M; вектор $\overline{AB}$, соединяющий концы A и B векторов $\bar{v}$ и $\bar{v}_1$, есть разность векторов $\bar{v}_1-\bar{v}$, поэтому можно написать, что

$$\bar{v}_1-\bar{v}=\Delta\bar{v}.$$

Вектор $\Delta\bar{v}$ также удобно перенести в точку M. Он представляет собой *приращение скорости* точки за промежуток времени Δt.

Отношение приращения скорости $\Delta\bar{v}$ к промежутку времени Δt, в течение которого происходило изменение скорости, есть *среднее* *ускорение* точки. Вектор среднего ускорения принято обозначать символом $\bar{a}_{ср}$:

$$\bar{a}_{ср} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{\overline{MC}}{\Delta t}.$$

При делении вектора $\overline{MC}$ на скалярную величину Δt получается также вектор, который называется *средним ускорением*. Вектор $\bar{a}_{ср}$ по своему направлению будет совпадать с вектором $\overline{MC}$.

Итак, ***средним за данный промежуток времени ускорением точки называется вектор, равный отношению вектора приращения скорости точки за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка.***

Среднее ускорение ($\bar{a}_{ср}$) говорит о конечном изменении вектора скорости за промежуток времени Δt и не дает представления о действительном изменении величины и направления скорости точки в каждый данный момент времени. Среднее ускорение в общем случае не является постоянной величиной и зависит от выбранной величины приращения Δt. Однако по мере приближения Δt к нулю вектор среднего ускорения будет стремиться к определенному пределу, характеризующему *истинное ускорение точки* в данный момент времени*.

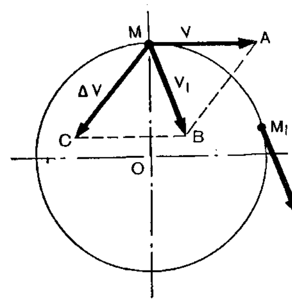


Рис. 90.

Ускорение точки равно:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} a_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \qquad (76)$$

Ускорение точки в данный момент времени t равно пределу ее среднего ускорения за промежуток времени Δt, когда величина этого промежутка стремится к нулю.

Следует заметить, что вектор $\bar{a}$ по своему направлению не совпадает с векторами $\Delta\bar{v}$ и $\bar{a}_{ср}$, так как вектор соответствует предельному направлению, до достижения которого по мере уменьшения промежутка Δt изменялось и направление $\bar{a}_{ср}$.

При равномерном движении точки по окружности (рис. 90) скорость точки по модулю постоянна, но по направлению все время изменяется. *Модули* $|v|$ и $|v_1|$ скорости точки в моменты t и $(t + \Delta t)$ *равны между собой* и $\Delta v = |v_1| - |v| = 0$, но *векторы* $\bar{v}$ и $\bar{v}_1$ этих скоростей *различны*.

---

* В дальнейшем истинное ускорение точки будет называться ускорением точки и обозначаться символом $\bar{a}$.

Поэтому $\overline{\Delta v} = \overline{v_1} - \overline{v} = \overline{MB} - \overline{MA} = \overline{MC} \neq 0$. Это дает основание говорить, что несмотря на то, что модуль $|\Delta v| = 0$, *ускорение* точки $\overline{a}$, равное $\overline{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t}$ *не равно нулю.*

Здесь еще раз следует подчеркнуть, что ускорение $\overline{a}$ — *векторная* величина, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t}$ — *векторная производная.*

Прежде чем перейти к способам определения ускорения точки, необходимо сказать о *размерности ускорения*

$$[a] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] = \frac{\textit{скорость}}{\textit{время}} = \frac{\textit{длина}}{\textit{время}} : \textit{время} = \frac{\textit{длина}}{\textit{время}^2}.$$

В зависимости от выбора единиц длины и времени ускорение будет выражаться в *м/сек*^{2}; *см/сек*^{2} и т. д. Размерность ускорения в технической системе единиц и системе СИ совпадает.

§ 46. Определение ускорения точки при криволинейном движении

Напомним, что при естественном способе задания точки уравнение движения ее по заданной траектории есть

$$S = f(t).$$

Наиболее простым случаем криволинейного движения является движение точки по окружности. При движении точки по дуге окружности в моменты времени t и $t + \Delta t$ точка занимает положения M и

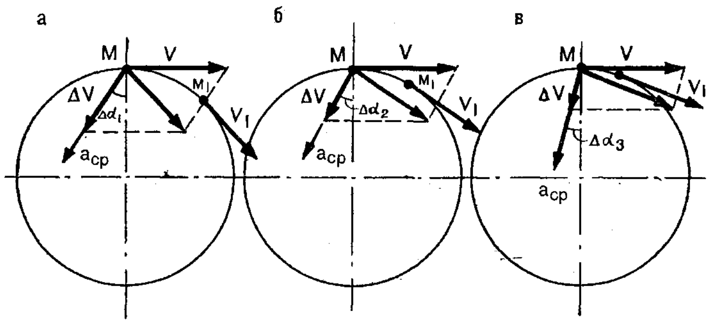


Рис. 91.

M_1 (рис. 91). Соответствующая скорость точки — v и v_1. Как уже говорилось, вектор скорости не остается постоянным, а получает некоторое приращение $\Delta \overline{v}$. Чтобы определить его, надо построить отрезки, равные и совпадающие по направлениям с векторным направлением скорости $\bar{v}$ (в моменты времени t) и $\bar{v}_1$ (в момент времени $t+\Delta t$). Направления этих векторов совпадают с направлением касательной к окружности в том месте, где находится точка в данный момент. Вычитая вектор $\bar{v}$ из вектора $\bar{v}_1$, получим вектор $\Delta\bar{v}$. Он не будет перпендикулярен ни к одному из векторов ($\bar{v}$ и $\bar{v}_1$). Но если Δt будет уменьшаться и стремиться к нулю, то приращение скорости также будет стремиться к нулю и направление вектора $\Delta\bar{v}$ в пределе при $\Delta t \to 0$ будет стремиться расположиться перпендикулярно к вектору скорости $\bar{v}$. Следовательно ускорение $\bar{a}$ будет перпедикулярно к скорости и направлено к центру круга. Если, рассматривая параллелограммы скоростей и точки, движущейся по окружности, представить себе, что $\Delta\alpha \to 0$, то будет видно, что направление вектора $\Delta\bar{v}$ стремится стать перпендикулярным к вектору $\bar{v}$ и совпадает с направлением ускорения $\bar{a}$ (сравним положения *а*, *б*, *в*).

Из рис. 91 видно, что при малом $\Delta\alpha$

$$\Delta v \cong v\Delta\alpha. \tag{77}$$

Путь, пройденный точкой за время Δt, равен:

$$v\Delta t \cong R\Delta\alpha. \tag{78}$$

Исключая из двух уравнений $\Delta\alpha$, получим:

$$\Delta\bar{v} \cong \frac{\bar{v}^2}{R}\Delta t \tag{79}$$

или

$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} \cong \frac{v^2}{R}.$$

Таким образом, при движении точки по окружности с постоянной скоростью возникает приращение скорости, имеющее направление по нормали к касательной данной окружности. Этому изменению скорости соответствует так называемое нормальное (центростремительное) ускорение, определяющееся выражением:

$$|a_n| = \frac{v^2}{R} \tag{80}$$

Итак, численная величина ускорения точки, движущейся равномерно по окружности, равна квадрату скорости, деленному на радиус. Ускорение направлено к центру окружности.

В спортивной практике чаще всего траектории криволинейных движений представляют собой не окружности, а более сложные кривые.

Как уже говорилось, рассматривая любую кривую, удобно выбрать следующие ориентиры: касательная к кривой в данной точке всегда занимает определенное положение («определяется однозначно»), оно удобно, так как скорость в данной точке всегда направлена по касательной; линия, перпендикулярная касательной, проведенная через данную точку, является нормалью. Для окружности радиус, проведенный через точку касания, перпендикулярен касательной.

Пусть траекторией точки будет какая-то кривая ABD (рис. 92). Расположим по обе стороны точки B еще какие-либо точки, например K и M. Из геометрии известно, что через три точки всегда можно провести окружность и притом только одну. Пусть этими тремя точками и будут точки K, B и M. Проведем через них окружность с центром в точке C. Чем меньше будет расстояние между точками K и M, тем меньше элемент кривой KBM будет отличаться от соответствующей этим точкам дуги окружности. В пределе точки K и M будут неограниченно приближаться к точке B, и бесконечно малый элемент траек-

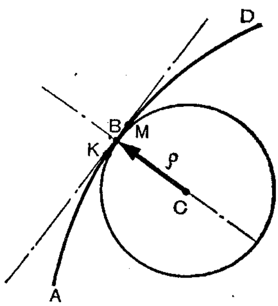


Рис. 92.

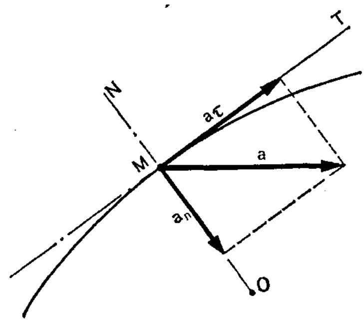


Рис. 93.

тории KBM будет совпадать с дугой окружности и иметь с ней общую касательную в точке B.

Окружность, проведенная через точки B, K и M, называется окружностью кривизны кривой в точке B. Радиус ρ окружности кривизны, проведенной для данной точки кривой, называется *радиусом кривизны кривой* в этой точке. Центр круга кривизны называется *центром кривизны кривой* в данной точке.

Величина k, *обратная радиусу кривизны* кривой в данной точке, *называется кривизной кривой* в этой точке $k = \frac{1}{\rho}$. Чем меньше искривлена кривая в данной точке, тем больше ее радиус кривизны и тем меньше кривизна k.

У одной кривой в разных ее точках различная кривизна. У прямой линии кривизны нет ($k = 0$), поэтому радиус кривизны прямой $\rho = \infty$. Любой достаточно малый участок криволинейной траектории можно заменить дугой соответствующей окружности и определить ее радиус, а следовательно, и радиус кривизны ρ этой кривой.

В рассмотренном частном случае равномерного движения точки по окружности модуль приращения скорости был равен нулю ($\Delta v =$

$= 0$), а ускорение $|\bar{a}_n| = \frac{v^2}{R}$ и направлено по радиусу к центру окружности, или по нормали. В более общем случае, когда траектория точки может быть произвольной кривой, а модуль скорости изменяется по времени, $\Delta v \neq 0$; $\frac{dv}{dt} \neq 0$ ускорение $\bar{a}$ точки будет представлено вектором, направление которого отлично от нормального (рис. 93). Разложим вектор ускорения $\bar{a}$ на две составляющие, одну из них a_τ направим по касательной к кривой, а другую a_n— по нормали. Вектор ускорения $\bar{a}$ можно представить как сумму его составляющих и написать:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \tag{81}$$

Составляющую ускорения a_τ принято называть тангенциальной, она совпадает по направлению со скоростью для данного положения точки. Составляющая $\bar{a}_n$ носит название нормальной составляющей (направлена по нормали), ее модуль равен $\frac{v^2}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны.

Если траекторией точки является окружность, то радиус кривизны равен радиусу окружности.

Модуль тангенциальной составляющей ускорения равен:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{82}$$

Согласно рис. 93 можно написать:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \tag{83}$$

Касательное и нормальное ускорения есть не что иное как проекции вектора на две взаимно перпендикулярные оси, касательную (MT) и нормаль (ON). Поэтому можно определить не только модуль ускорения $\bar{a}$ точки, но и направление вектора $\bar{a}$.

$$\cos(a, a_\tau) = \frac{a_\tau}{a}; \quad \angle a, a_\tau = \alpha; \tag{84}$$

$$\cos(a, a_n) = \frac{a_n}{a}; \quad \angle a, a_n = 90^\circ - \alpha. \tag{85}$$

Полезно заметить, что если траектория точки есть прямая, то скорость может изменяться только по модулю. При этом, если движение неравномерное,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \neq 0.$$

Так как радиус кривизны ρ прямой равен бесконечности, то:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

Следовательно, при *неравномерном прямолинейном* движении точка имеет *только одно касательное ускорение.*

Когда точка совершает равномерное криволинейное движение и скорость точки $\bar{v}$ изменяется только по направлению, модуль остается неизменным, $|v| = \text{const}$, касательное ускорение $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, а нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$.

Следовательно, при *равномерном криволинейном движении* точка имеет *только нормальное ускорение.*

В табл. 10 даны значения a_τ и a_n в зависимости от характера движения точки.

Таблица 10

Величины a_τ и a_n в зависимости от характера движения точки

Характер движения точки	Касательное ускорение	Нормальное ускорение
Неравномерное криволинейное	$a_\tau = \frac{dv}{dt} \neq 0$	$a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$
Неравномерное прямолинейное	$a_\tau = \frac{dv}{dt} \neq 0$	$a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0$
Равномерное криволинейное	$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$	$a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$
Равномерное — по окружности, радиус $\rho = R$	$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$	$a_n = \frac{v^2}{R} = \text{const}$
Равномерное прямолинейное	$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$	$a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0$

Пример IX. 6. Велосипедист едет по повороту, имеющему радиус $R = 25$ *м*, с постоянной по модулю скоростью, равной 10 *м/сек*. Определить величину ускорения.

Решение. Гонщик испытывает только нормальное ускорение, определяющееся изменением вектора скорости по направлению. Величина его:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{100}{25} = 4\ (м/сек^2).$$

Пример IX. 7. При малых углах отклонения груз маятника (рис. 94) движется по окружности радиуса l по закону $s = b \sin \omega t$. Начало отсчета в точке O; b и ω — постоянные величины. Найти скорость, касательное и нормальное ускорение груза и те положения, в которых эти величины равны нулю.

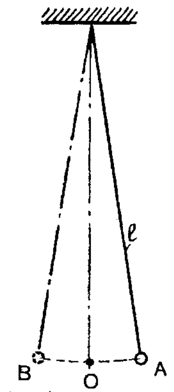


Рис. 94.

Решение. Скорость находим как производную пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = b\omega \cos \omega t.$$

Касательное ускорение:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -b\omega^2 \sin \omega t.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{b^2\omega^2}{l} \cos^2 \omega t.$$

Из заданного закона движения следует, что груз совершает вдоль траектории гармонические колебания с дуговой амплитудой b. В крайних положениях (т. е. в точках A и B) $\sin \omega t = \pm 1$ и, следовательно, $\cos \omega t = 0$. Поэтому в крайних точках скорость и нормальное ускорение равны нулю; касательное же ускорение имеет наибольшее по модулю значение: $a_{\tau\max} = b\omega^2$. Когда груз проходит начало отсчета, то $s = 0$ и, следовательно, $\sin \omega t = 0$, а $\cos \omega t = 1$. В этом положении $a_\tau = 0$, а v и a_n имеют максимальное значение:

$$a_{n\,max} = \frac{b^2\omega^2}{l}.$$

Замечание. Показанное в этом примере колебательное движение весьма часто встречается при выполнении физических упражнений. Так, при выполнении гимнастом упражнений на перекладине или на кольцах его тело в ряде задач можно рассматривать как физический маятник. В процессе физических упражнений отдельные звенья опорно-двигательного аппарата спортсмена совершают колебательные движения в суставах. Например, бедро при беге можно рассматривать как физический маятник, имеющий точкой подвески тазобедренный сустав. В беге очень важно знать направление и величину ускорений, которые испытывают нижние конечности. Изменения этих ускорений, по существу, определяют динамическую структуру бега.

Пример IX. 8. При скоростном спуске на санях спортсмен начинает двигаться по закруглению радиуса $R = 40$ *м* и, пройдя путь $S_1 = 30$ *м*, приобретает скорость $v_1 = 36$ *км/час*. Определить скорость и ускорение спортсмена в середине этого пути.

Решение. Так как спортсмен движется равноускоренно и при этом $v_0 = 0$, то закон его движения (если считать, что $S_0 = 0$) будет:

$$S = \frac{1}{2} a_\tau t^2,$$

а скорость движения: $v = a_{\tau 0} t$.

Исключая из этих уравнений t, получим $v^2 = 2a_\tau S$. По условию задачи при $S = S_1$ $v = v_1$. Следовательно:

$$a_\tau = \frac{v_1^2}{2S_1}.$$

В середине пути при $S_2 = \frac{S_1}{2}$ скорость v_2 равна:

$$v_2 = \sqrt{2a_\tau S_2} = \sqrt{a_\tau S_1} = \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

Нормальное ускорение в этом месте траектории равно: $a_{n2} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{v_1^2}{R}$. Полное ускорение в середине пути

$$a_2 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n2}^2} = \frac{v_1^2}{2} \sqrt{\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{R^2}}.$$

Подставляя численные значения, найдем: $v_2 \approx 7{,}1$ *м/сек*; $a_2 \approx 2{,}2$ *м/сек*^{2}.

§ 47. Определение ускорения точки при координатном способе задания движения

Рассмотрим случай, когда точка совершает плоское движение, заданное уравнениями: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$.

Проекции скорости точки в этом случае будут равны:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Ускорение точки есть быстрота изменения ее скорости и было определено как $\frac{dv}{dt}$. Поэтому, рассуждая по аналогии с определением скорости как быстроты изменения пути, можно показать, что *проекции ускорения точки на неподвижные координатные оси равны* первым производным по времени от проекции скорости точки на соответствующие координатные оси или *вторым производным от соответствующих координат точки по времени.*

Таким образом, проекции ускорения точки будут равны:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (86)$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (87)$$

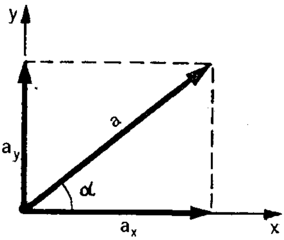


Рис. 95.

По известным проекциям ускорения ($\overline{a}_x$ и $\overline{a}_y$) можно определить само ускорение (рис. 95). Складывая $\overline{a}_x$ и $\overline{a}_y$ как векторы, получим ускорение $\overline{a}$.

Модуль ($\overline{a}$) будет равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d^2}\right)^2}. \quad (88)$$

Направление вектора $\overline{a}$ определяется следующим образом:

$$\cos\alpha = \cos(\overline{a}, \overline{x}) = \frac{a_x}{a}; \quad (89)$$

$$\cos(90° - \alpha) = \cos(\overline{a}, \overline{y}) = \frac{a_y}{a}. \quad (90)$$

Пример IX. 9. На рис. 96, *а* схематически показан аттракцион «колесо смеха». Колесо — платформа A, устроенная заподлицо с полом, приводится во вращение вокруг неподвижной оси. Люди, лежащие или сидящие на этой подвижной платформе, оказываются под влиянием больших ускорений.

Необходимо дать уравнения движения в прямолинейных координатах и определить скорость и ускорение в точке A платформы. Расстояние точки A от оси OO' $r_a = 3$ *м*. Угол поворота платформы относительно ее оси изменяется по закону $\varphi = \omega t$.

Решение. Возьмем систему координатных осей x и y с началом координат в точке O. Координаты точки A в этой системе:

$$x = OK = r\cos\varphi = r\cos\omega t;$$

$$y = OL = r\sin\varphi = r\sin\omega t.$$

Эти уравнения и представляют собой закон движения точки A. Проекции скорости точки A на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t.$$

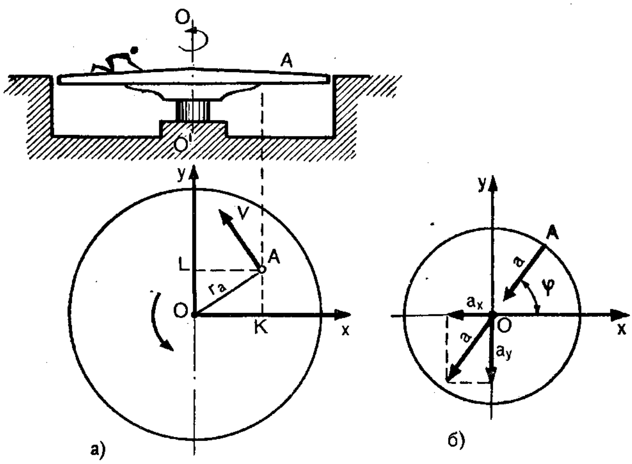


Рис. 96.

Модуль скорости точки A:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-r\omega \sin \omega t)^2 + (r\omega \cos \omega t)^2} = r\omega,$$

$$v = r\omega; \quad v = 4\omega; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Если $T = 15{,}7$ *сек.*, то $\omega = \frac{2 \cdot 3{,}14}{15{,}7} = 0{,}4$ (1/*сек*); $v = r\omega = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6$ *м/сек.*

Скорость точки A по величине постоянна. Направление вектора скорости в этой точке можно определить по формуле:

$$\cos(\bar{v}, x) = \frac{v_x}{v} = -\frac{r\omega \sin \omega t}{r\omega} = -\sin \omega t = -\sin \varphi;$$

$$\cos(\bar{v}, y) = \frac{v_y}{v} = \frac{r\omega \cos \omega t}{r\omega} = \cos \omega t = \cos \varphi.$$

Проекции ускорения точки A на координаты оси:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = (-r\omega \sin \omega t)' = -r\omega^2 \cos \omega t;$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = (r\omega \cos \omega t)' = -r\omega^2 \sin \omega t.$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-r\omega \cos \omega t)^2 + (-r\omega^2 \sin \omega t)^2} = r\omega^2;$$

$$a = r\omega^2 = 4 \cdot (0{,}4)^2 = 4 \cdot 0{,}16 = 5{,}4 \text{ м/сек}^2.$$

Ускорение по величине постоянно и равно: $a = \frac{5{,}4}{9{,}8} g = 0{,}55g$, т. е. несколько больше половины ускорения свободного падения на Земле.

Ускорение, как показали расчеты, значительно, несмотря на то, что модуль скорости постоянен $|v| = 4\omega = \text{const}$. Это объясняется тем, что направление скорости непрерывно изменяется.

Направление вектора $\bar{a}$ ускорения точки A можно определить по формулам:

$$\cos(\bar{a}, x) = \frac{a_x}{a} = \frac{-r\omega^2 \cos \omega t}{r\omega^2} = -\cos \omega t = -\cos \varphi;$$

$$\cos(\bar{a}, y) = \frac{a_y}{a} = \frac{-r\omega^2 \sin \omega t}{r\omega^2} = -\sin \omega t = -\sin \varphi.$$

Как следует из рис. 96, *б*, ускорение $\bar{a}$ направлено по радиусу OA к центру.

Пример IX. 10. Точка тела, брошенного с горизонтальной скоростью v_0, движется по закону, определенному уравнениями: $x = v_0 t$, $y = \frac{1}{2} gt^2$, где v_0 и g — постоянные величины.

Найти траекторию движения, скорость и ускорение точки; ее касательное и нормальное ускорения; радиус кривизны траектории в любом положении, выразив полученные значения через скорость точки в этом положении (рис. 97).

Решение. Определяя из первого уравнения t и подставляя его во второе, получим:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Таким образом, траектория движения точки — парабола.

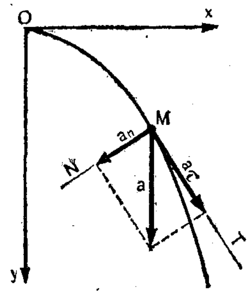


Рис. 97.

Определим проекции скоростей точки:

$$v_x = \dot{x} = v_0; \quad v_y = \dot{y} = gt.$$

Отсюда:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

Чтобы определить ускорение точки, найдем его проекции $a_x = \ddot{x} = 0$; $a_y = \ddot{y} = g$. Следовательно, $a = g$.

Следует обратить внимание на то, что движение точки здесь не равнопеременное, так как условием равнопеременного движения является не $a = \text{const}$, а $a_\tau = \text{const}$. В рассматриваемом же движении, как будет видно дальше, a_τ не постоянно.

Ускорение a_τ выразится так:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{g^2t}{v}.$$

Но поскольку $v^2 = v_0^2 + g^2t^2$, $\quad t = \frac{1}{g}\sqrt{v^2 - v_0^2}$.

Применяя это значение t, выразим a_τ через v:

$$a_\tau = \frac{g^2t}{v} = g\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}.$$

Отсюда следует, что, когда $v = v_0$, $\quad a_\tau = 0$. Затем с увеличением v величина a_τ будет расти и при $v \to \infty$ $a_\tau \to g$. Для определения a_n обратимся к зависимости:

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = g^2 - g^2\left(1 - \frac{v_0^2}{v}\right) = g^2\frac{v_0^2}{v^2},$$

$$a_n = \frac{v_0 g}{v}.$$

Таким образом, в начальный момент (когда $v = v_0$) $a_n = g$, а затем с увеличением v величина a_n убывает, стремясь в пределе к нулю.

Радиус кривизны траектории можно определить по формуле:

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$, откуда $\quad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{v_0 g}$.

В начальный момент радиус кривизны имеет наименьшее значение:

$\rho_{\min} = \frac{v_0^2}{g}$, затем с увеличением v он увеличивается, и, следовательно, кривизна траектории уменьшается. При $v \to \infty$ $\rho \to \infty$, а кривизна стремится к 0.

§ 48. Частные случаи движения точки

Зная, что такое скорость и ускорение точки, и умея определять их при различных способах задания движения (естественный и координатный), интересно рассмотреть некоторые частные случаи движения точки.

1. Прямолинейное движение. *При прямолинейном движении траекторией точки является прямая линия.* В прямой линии кривизны нет, радиус кривизны $\rho = \infty$. Поэтому нормальное ускорение отсутствует:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0.$$

Ускорение a точки равно только одному касательному ускорению: $a = \bar{a}_\tau = \frac{dv}{dt}$.

При прямолинейном движении ускорение направлено вдоль траектории. Поэтому *касательное ускорение* характеризует численное изменение скорости.

2. Равномерное криволинейное движение. Равномерным криволинейным движением точки называется такое движение, в котором *численная величина скорости остается постоянной:* $v = \text{const}$. В этом случае: $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$. Все ускорение точки определяется только одним нормальным ускорением: $\bar{a} = a_n = \frac{v^2}{\rho}$. Вектор $\bar{a}$ направлен по нормали к траектории точки. *Ускорение появляется только вследствие изменения направления скорости. Поэтому нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.*

Примером такого движения может служить движение молота в установившемся режиме, когда линейная скорость уже больше не возрастает. Скорость точки v в этом случае равна: $v = \frac{dS}{dt}$. Это дает возможность определить путь, пройденный точкой за время dt: $dS = vdt$.

Пусть в начальный момент движения ($t = 0$) точка находится от начала координат на расстоянии S_0. Чтобы найти путь, пройденный точкой за конечное время t, необходимо полученное уравнение проинтегрировать. Беря от левой и правой частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$\int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t vdt.$$

Индекс S_0 внизу интеграла указывает на то, что путь отсчитывался с некоторого начального значения. В результате интегрирования, учитывая, что $v = \mathrm{const}$, получим:

$$\int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t v dt; \qquad |S|_{S_0}^{S} = |vt|_0^t;$$

$$S - S_0 = vt \text{ или } S = S_0 + vt. \tag{91}$$

Если предположить, что $S = 0$, т. е. что отсчет пути начался в начале движения, то путь, пройденный точкой за время t, будет равен:

$$S = vt.$$

Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, растет пропорционально времени, а скорость движения равна отношению пути ко времени.

3. Равномерное прямолинейное движение. Когда прямолинейное движение является равномерным, то $v = \mathrm{const}$ и $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0.$

Следовательно, при равномерном прямолинейном движении точки ускорение равно нулю: $\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n = 0.$

Здесь, как и в предыдущем случае, $S = S_0 + vt$ при $S = 0$, $S = vt$; $v = \frac{S}{t} = \mathrm{const}.$

4. Равнопеременное криволинейное движение. *Равнопеременным называется* такое *криволинейное движение* точки, при котором *касательное ускорение остается* все время *величиной постоянной:* $a_\tau = \mathrm{const}$.

Закон этого движения $S = f(t)$ может быть определен так. Предположим, что при $t = 0$ $S = S_0$; $v = v_0$, где v_0— начальная скорость точки. Касательное ускорение равно:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Следовательно, $dv = a_\tau dt.$

По условию $a_\tau = \mathrm{const}$. Проинтегрировав обе части равенства

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_\tau dt = a_\tau \int_0^t dt,$$

получим $v - v_0 = a_\tau t$, или $v = v_0 + a_\tau t$.

Зная, что $v = \frac{dS}{dt}$, будем иметь:

$$\frac{dS}{dt} = v_0 + a_\tau t \text{ или } dS = (v_0 + a_\tau t)\, dt.$$

Вторично интегрируя, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки:

$$S = S_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \qquad (92)$$

Если при криволинейном движении *модуль скорости* со временем *возрастает*, то движение называется *ускоренным*, а *если убывает* — *замедленным*.

Так как изменение модуля скорости характеризуется касательным ускорением, то *движение* будет *ускоренным, если величины* v и a_τ *имеют одинаковые знаки*, и *замедленным, если они имеют разные знаки*.

Среди спортивных движений часто встречаются такие, в законе которых путь является функцией t более высокого порядка, чем 2.

5. Прямолинейное неравнопеременное движение. Рассмотрим прямолинейное движение, в законе которого путь является функцией t^3. Допустим $a_\tau = \text{const}$; $a = a_\tau$; $\frac{da}{dt} = k = \text{const}$; $da = kdt$.

Проинтегрировав обе части равенства

$$\int_{a_0}^{a} da = \int_0^t kdt; \quad a - a_0 = kt,$$

получим, что ускорение равно: $a = a_0 + kt$.

Но ускорение есть $\frac{dv}{dt}$, поэтому

$$\frac{dv}{dt} = kt + a_0$$

или $dv = (kt + a_0)\,dt$.

Проинтегрировав обе части этого выражения получим:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t (kt + a_0)\,dt; \quad v - v_0 = a_0 t + \frac{kt^2}{2};$$

$$v = v_0 + a_0 t + \frac{kt^2}{2}.$$

Зная, что скорость точки есть $\frac{dS}{dt}$, получим:

$$\frac{dS}{dt} = \left(v_0 + a_0 t + \frac{kt^2}{2}\right)$$

или

$$dS = \left(v_0 + a_0 t + \frac{kt^2}{2}\right) dt.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$\int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t \left(v_0 + a_0 t + \frac{kt^2}{2}\right) dt;$$

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} + \frac{kt^3}{6}.$$

В тех случаях, когда $S_0 = 0$; $v_0 = 0$; $a_0 = 0$,

$$S = \frac{kt^3}{6}.$$

6. Гармоническое колебание. Рассмотрим прямолинейное движение точки, при котором ее расстояние x от начала координат изменяется со временем по закону:

$$x = r\cos\omega t. \qquad (93)$$

Пусть точка A (рис. 98) совершает равномерное движение по окружности с радиусом r. В это время проекция точки движется по оси Ox. Величина этой проекции равна $r\cos\alpha$, где $\alpha = \omega t$. Точка M совершает при этом движении колебания между положениями $M_0(x = +r)$ и $M_1(x = -r)$ по закону, описываемому уравнением: $x = r\cos\omega t$. Такие колебания называются *простыми гармоническими колебаниями*.

Величина r, равная наибольшему отклонению точки от центра

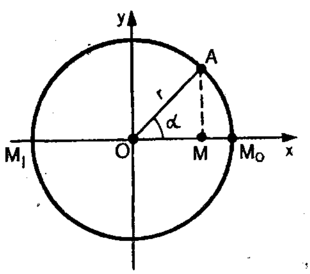


Рис. 98.

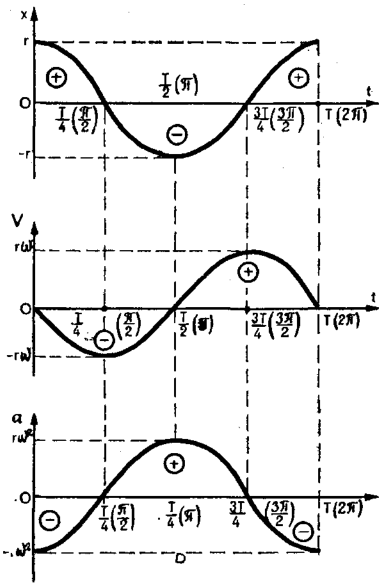


Рис. 99.

O, называется *амплитудой колебания.* При $t = 0$ проекция точки A находится в положении $M_0(x = r)$, далее по мере увеличения t точка перемещается влево. Переходя нулевое положение, она достигает положение $M_1(x = -r)$, затем вновь двигается вправо и в момент t_1, для которого $\cos\omega t = +1$, т. е. когда $\omega t_1 = 2\pi$, занимает положение M_0. Далее описанный цикл движений повторяется.

Промежуток времени $t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, в течение которого точка совершает одно полное колебание, обычно обозначается буквой T и называется *периодом колебания:*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величина $f = \frac{1}{T}$, равная числу колебаний, совершенных точкой за 1 *сек.*, носит название *линейной частоты колебаний.* Если размерность T есть время (секунды), то размерность

$$[f] = \frac{1}{(\text{время})} = \frac{1}{\text{сек}} = \text{сек}^{-1}.$$

Величина ω — круговая частота колебаний. Она также измеряется в сек^{-1}.

Чтобы определить скорость и ускорение колебаний (численные значения), следует взять производные от x по t:

$$v = v_x = (r\cos\omega t)' = -r\omega\sin\omega t;$$

$$a = v'_x = (r\cos\omega t)'' = -r\omega^2\cos\omega t.$$

Интересно и крайне важно отметить, что как скорость, так и ускорение точки, изменяясь со временем, тоже совершают гармонические колебания. Графики значений пути (x), скорости (v) и ускорения (a) при колебательном движении показаны на рис. 99.

§ 49. Исследование кинематики точки методом графического дифференцирования

Правила графического дифференцирования в механике основаны на следующих математических зависимостях:

1. Если производная положительная, то функция возрастает. Например, если ускорение положительно, то скорость увеличивается.

2. Если производная отрицательная, то функция убывает. Например, если скорость отрицательна, то путь убывает (движение идет в обратную сторону).

3. Если функция постоянная, то производная ее равна нулю. Например, скорость постоянная — ускорения нет.

4. При экстремальных значениях функции (максимумы и минимумы) производная равна нулю. Например, если скорость достигла максимума в какой-то точке, то до этого она увеличивалась, а после этого стала уменьшаться. Данная точка, таким образом, характеризует переход от ускорения к замедлению, следовательно, в ней ускорение равно нулю.

5. В точках «перегиба» функции производная имеет максимальное или минимальное значение. Точка «перегиба» функции означает окончание увеличения или уменьшения тангенса угла наклона каса-

тельной к линии этой функции. Тангенс же угла наклона касательной характеризует производную.

6. Если производная постоянна, то функция линейна. Например, если ускорение постоянно, то скорость изменяется по линейному закону. Если производная линейна, то функция — кривая второго порядка. Если производная — кривая второго порядка, то функция — кривая третьего порядка и т. д.

Эти правила не трудно проверить, рассматривая, например, зависимости, представленные на рис. 99.

С помощью графического дифференцирования можно по заданному закону движения построить график скорости и ускорения. График пути в спортивных исследованиях получают на основе обработки материалов киносъемки или других фактических материалов. После измерений на карте — промере получим: $s = s(t)$; $x = x(t)$; $y = y(t)$. Поэтому, дифференцируя $s = s(t)$, находим график скорости: $v = f(t)$, или, дифференцируя $x = x(t)$ и $y = y(t)$, получаем $\dot{x} = v_x$ и $\dot{y} = v_y$, где v_x и v_y — проекции скорости на оси x и y.

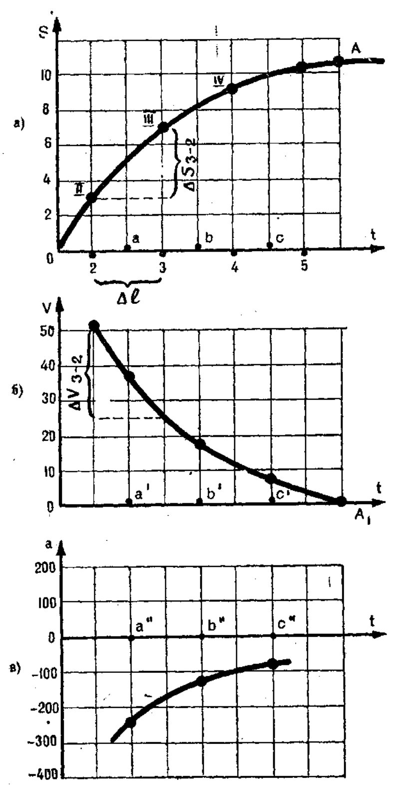


Рис. 100.

Повторное дифференцирование позволит получить графики ускорений в зависимости от времени.

Приемы графического дифференцирования относительно просты и при некотором навыке отнимают немного времени. Наиболее простым является «метод приращений». Он основан на том, что в течение достаточно малого интервала Δt скорость и ускорение исследуемой точки принимаются изменяющимися приближенно по прямолинейному закону, а средняя скорость и среднее ускорение, вычисленные для этого интервала, совпадают с истинными их значениями в середине интервала. Рассмотрим этот метод на простом примере.

Возьмем небольшой отрезок кривой $S = S(t)$ (рис. 100). Выделим на оси абсцисс участки 2—3, 3—4, 4—5; длина каждого участка равна 2 *см*. По оси абсцисс отложено время: 1 *см* $= \mu_t$ *сек.* $= 0{,}05$ *сек.*, следовательно, масштаб $\mu_t = 0{,}05$. По оси ординат отложен путь в метрах: 1 *см* = 2 *м* = μ_s *м*, поэтому $\mu_s = 2$.

Будем считать, что $v_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, относя среднее значение к середине участка. Для участка 2—3 $\Delta S_{3-2} = S_3 - S_2 = 3,3$ *см* — — 1,5 *см* = 1,8 *см*. Из точки 2′ удобно провести линию, параллельную оси абсцисс, тогда отрезок 3″—3′ и будет равен ΔS_{3-2}. Очевидно $v_{ср}$, отнесенное к точке *a*, находящейся на середине отрезка 2—3, будет равно $\frac{\Delta S_{3-2}}{\Delta t}$. Численная величина $v_{ср}$ зависит только от заданных масштабов при вычерчивании этого графика.

Так как отрезки 2—3, 3—4, определяющие Δt, равны между собой, то величина скорости зависит только от величины ΔS.

Масштаб μ_v для скорости $v_{ср}$, определенный по данным рис. 100, равен:

$$\mu_v = \frac{\mu_S}{\mu_t \Delta t} = \frac{2}{0,005 \cdot 2} = 20 \ (м/сек/см).$$

Это дает возможность определить скорость для точки *a*, лежащей на отрезке 2—3, точки *b* — на отрезке 3—4, точки *c* — на отрезке 4—5 и т. д.

$$v_{3-2} = \Delta S_{3-2}\mu_v = 1,8 \cdot 20 = 36 \ м/сек;$$

$$v_{4-3} = \Delta S_{4-3}\mu_v = 0,8 \cdot 20 = 16 \ м/сек;$$

$$v_{5-4} = \Delta S_{5-4}\mu_v = 0,4 \cdot 20 = 8 \ м/сек.$$

Для вычерчивания графика скоростей следует выбрать масштаб для оси ординат. Например, исходя из вычисленных величин скоростей, примем $\mu = 10$, т. е. 1 *см* — 10 *м/сек*. Величины вычисленных скоростей откладываем на вертикалях, проходящих через точки *a′* *b′*, *c′* и т. д. (см. рис. 100, *б*).

Размещение рисунков 100, *a* и 100, *б* на одном листе позволит получить точку A_1 на оси абсцисс (рис. 100, *б*). Так как экстремуму кривой (в данном случае максимуму в точке *A* кривой, рис. 100, *a*) соответствует производная, равная нулю, то

$$v = \frac{dS}{dt} = 0.$$

Поэтому, если из точки *A* (рис. 100, *a*) опустить перпендикуляр на ось абсцисс (рис. 100, *б*), то точка их пересечения A_1 будет соответствовать значению $v = 0$.

Вновь полученную кривую всегда следует проверять по экстремумам (максимумам и минимумам) исходной дифференцируемой кривой. Это позволяет найти дополнительные опорные (надежные) точки.

Если полученную кривую скоростей $v = f(t)$ (рис. 100, *б*) вновь продифференцировать, то получим кривую ускорений исследуемой точки, так как

$$a = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Чтобы получить кривую ускорений $a = f(t)$, поступают так же, как при определении скоростей.

На кривой (рис. 100, *б*) разности Δv_{3-2}, Δv_{4-3} позволяют определять значение ускорений для точек a, b, c. Определим масштаб ускорений μ_a для кривой рисунка 100, *б* по формуле:

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t \Delta l}.$$

Значения μ_t и Δl остались прежние, без изменений: $\mu_t = 0,05$; $\Delta l = 2,0$. На рисунке масштаб по оси ординат: 1 *см* = 10 *м/сек*, поэтому $\mu_v = 10$.

$$\mu_a = \frac{10}{0,05 \cdot 2,5} = 100 \ (\text{м/сек}^2/\text{см})$$

Для точки a' $a = \Delta V_{3-2}\mu_a = -2,5 \times 100 = -250$ *м/сек*^{2}.

Для точки b' $\Delta v_{4-3} = -1,3$ *см*; $a = \Delta v_{4-3}\ \mu_a = -1,3 \cdot 100 = -130$ *м/сек*^{2} и т. д.

Ускорения для этих точек отрицательны, так как кривая скорости убывает.

Глава X.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 50. Поступательное движение

В кинематике, как и в статике, рассматривают абсолютно твердые тела, считая расстояния между двумя любыми точками тела неизменными. Задача кинематики твердого тела состоит, во-первых, в задании движения и, во-вторых, в изучении кинематических характеристик движения как всего тела в целом, так и каждой из точек тела в отдельности.

Наиболее простое движение твердого тела — поступательное. *Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором всякая прямая, неизменно связанная с этим телом, движется, оставаясь параллельной самой себе.* Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Рассмотрим примеры поступательных движений.

1. Если тело A (рис. 101, *а*) перемещается по горизонтальной поверхности вдоль прямой линии из положения I в положение II, то траекториями всех его точек будут прямые линии, а следовательно,

прямая, проведенная через точки a и b будет перемещаться параллельно самой себе.

2. На рис. 101, *б* показан механизм, называемый спарником. Тело AB при вращении кривошипов O_1A и O_2B ($O_1A = O_2B$) движется поступательно, так как любая прямая, проведенная в этом теле будет оставаться параллельной самой себе. Все точки тела AB движутся по окружностям.

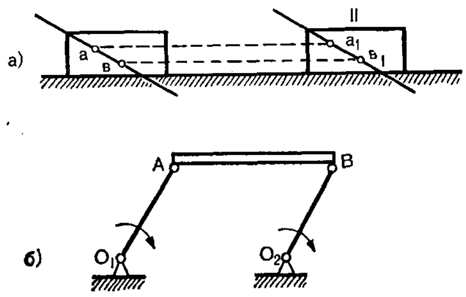


Рис. 101.

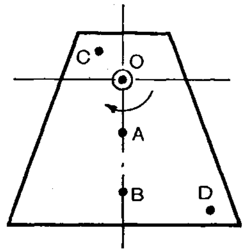


Рис. 102.

Термин «поступательное движение» применим только к движению тела и не применим к движению точки. Из определения поступательного движения вытекает следующее положение. *При поступательном движении твердого тела все его точки движутся по одинаковым и параллельно расположенным траекториям и имеют в каждый данный момент времени равные скорости и равные ускорения.* Поэтому можно сказать, что *поступательное движение тела вполне определяется движением какой-либо одной его точки.*

Следовательно, задача изучения поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения точки, т. е. к тем задачам кинематики точки, которые уже были рассмотрены.

Необходимо заметить, что говорить о скорости и ускорении тела (зная скорость и ускорение одной точки) можно только в том случае, если движение этого тела поступательно: При всех других типах движения тела этого делать нельзя, ибо различные точки тела имеют различные скорости и ускорения. Например, на рис. 102 показано движение пластины, которая вращается около точки O. Точки A, B, C и D имеют разные скорости и ускорения.

§ 51. Вращательное движение

Вращательным движением называется такое движение твердого тела, при котором какие-либо две его точки остаются все время неподвижными.

На рис. 103 показано тело, совершающее вращательное движение. Прямая AB, проходящая через неподвижные точки A и B, называется *осью вращения*. Все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны; все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения, а центры лежат на этой оси.

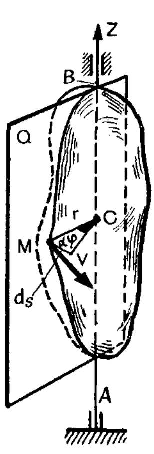


Рис. 103.

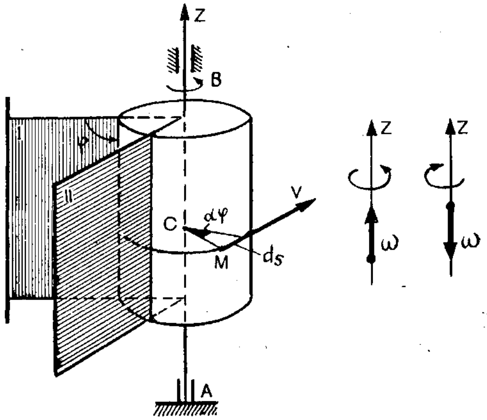


Рис. 104.

Чтобы определить положение вращающегося тела, надо провести через ось вращения AZ две плоскости: I — неподвижную и II как бы врезанную во вращающееся тело, а потому и вращающуюся вместе с ним (рис. 104). Наличие этих двух плоскостей позволяет однозначно определить положение тела углом φ между ними. Угол φ называют *углом поворота тела*. Его считают *положительным*, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении *против хода часовой стрелки*, для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси O, *и отрицательным*, если наблюдатель будет видеть движение плоскости *по ходу часовой стрелки*.

Напомним, что наряду с градусным измерением углов в механике применяют радианное измерение. Величина угла α — центрального для произвольной окружности — измеряется отношением длины дуги l, на которую этот угол опирается, к длине радиуса r этой окружности: $\alpha = \frac{l}{r}$. При этом за единицу измерения принимается *радиан* — угол, являющийся центральным для дуги, длина которой равна радиусу окружности. 1 радиан равен $\frac{180}{\pi} = 57^\circ\,17'\,44''$. $1^\circ = 0{,}01745$ радиана. Переход одного измерения к другому производится по формулам:

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\,\alpha\,(\text{радианов});\quad \alpha\,(\text{радианов}) = \frac{\pi}{180}\,\alpha^\circ.$$

В частности, $360^\circ = 2\pi$ *рад*; $180^\circ = \pi$ *рад*; $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ *рад*.

Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{94}$$

Уравнение 94 выражает *закон вращательного движения тела* и называется *уравнением вращательного движения тела*.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела является его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Пусть тело совершило поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$. Его средняя угловая скорость за этот промежуток времени будет равна:

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Угловая скорость в данный момент времени t есть предел величины $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, когда промежуток времени Δt стремится к нулю.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{95}$$

Следовательно, угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота по времени.

Знак, стоящий перед ω, определяет направление вращения тела. При вращении против хода часовой стрелки $\omega > 0$, а когда вращение происходит по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$.

Как известно, углы измеряются в радианах, время — в секундах, поэтому размерность угловой скорости будет:

$$|\omega| = \left[\frac{угол}{время}\right] = \left[\frac{радиан}{секунда}\right].$$

Так как радиан равен отношению $\frac{длина\ дуги}{радиус} = \frac{длина}{длина}$, то размерность угловой скорости будет:

$$|\omega| = \left[\frac{радиан}{секунда}\right] = \frac{1}{сек}.$$

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\overline{\omega}$, численная величина которого $|\omega|$ равна $\frac{d\varphi}{dt}$ и который направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (см. рис. 104). Такой вектор определяет модуль $|\omega|$ угловой скорости, ось, около которой происходит вращение, и направление вращения вокруг этой оси.

Угловое ускорение дает нам представление об изменении угловой скорости тела с течением времени. Пусть угловая скорость тела изменилась на величину $\Delta\omega$, равную $\omega_1 - \omega$, за промежуток времени Δt, равный $t_1 - t$, при этом *среднее угловое ускорение* тела за время Δt будет численно равно:

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени t будет равно пределу, к которому стремится величина $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, когда Δt стремится к нулю. Следовательно, $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$. Известно, что ω, в свою очередь, равно

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Поэтому

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (96)$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения можно определить следующим образом:

$$\varepsilon = \left[\frac{скорость}{время}\right] = \left[\frac{\frac{радиан}{секунда}}{секунда}\right] = \left[\frac{радиан}{секунда^2}\right] = \left[\frac{1}{сек^2}\right]$$

Угловое ускорение можно представить в виде вектора $\bar{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения тела.

Если модуль угловой скорости ω возрастает, т. е. происходит ускоренное вращение тела, направление векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ совпадает; при замедленном вращении тела векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ направлены в противоположные стороны. Векторы ω и ε относятся к скользящим.

§ 52. Равномерное и равнопеременное вращение

Равномерным называется такое *вращение* тела, при котором *угловая скорость* вращения тела *остается* все время *постоянной*: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$ или $d\varphi = \omega dt$. Считая, что при $t = 0$ и $\varphi = 0$, проинтегрировав обе половины равенства

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^{t} dt, \qquad (97)$$

получим: $\varphi = \omega t$.

При равномерном вращении, когда $\omega = \text{const}$,

$$\omega = \frac{\varphi}{t}; \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Угловую скорость вращения ω в практике определяют *числом оборотов в минуту*, обозначая эту величину через *n об/мин*. При одном полном обороте тело поворачивается на угол 2π, при n оборотах — на $2\pi n$, т. е. $\varphi = 2\pi n$. Этот поворот производится за время $t = 1$ *мин.* или 60 *сек.*, поэтому

$$\omega = \frac{\varphi}{} = \frac{2\pi n}{60}.$$

При некоторых видах вращения тела угловая скорость ω не остается постоянной, поэтому и угловое ускорение $\varepsilon \neq 0$. Пусть в рассматриваемом случае угловое ускорение тела во время движения остается постоянным: $\varepsilon = \text{const}$. Вращение в этом случае движения называется *равнопеременным*. Найдем закон этого вращения. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$, угол $\varphi = 0$, а угловая скорость $\omega = \omega_0$. Из формулы 96 имеем $d\omega = \varepsilon dt$. Интегрируя левую часть этого уравнения в пределах от ω_0 до ω, а правую от 0 до t, получим:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t; \tag{98}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Подставив это выражение в равенство

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = (\omega_0 + \varepsilon t),$$

получим: $d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt$.

Вторично интегрируя, найдем:

$$\int_0^\varphi d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)\, dt; \qquad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{99}$$

Если угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и ε имеют одинаковые знаки, вращение будет равноускоренным; если разные — равнозамедленным.

По-видимому, при описании очень резких движений спортивных упражнений величина углового ускорения $\varepsilon \neq \text{const}$. Допустим, что $\frac{d\varepsilon}{dt} = k$, т. е. $d\varepsilon = kdt$. Трижды последовательно интегрируя, найдем закон этого переменного вращательного движения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon_0 t^2}{2} + \frac{kt^3}{6}.$$

При $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$; $\varepsilon_0 = 0$; $\varphi = \frac{kt^3}{6}$.

Пример X. 1. При выполнении сальто угловая скорость гимнаста равна 11 *рад/сек*. Какое время необходимо гимнасту для выполнения одного полного оборота?

Решение. Известно, что $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, или $\omega = 2\pi N$, где N — — число оборотов в 1 *сек*.

$\omega = 2\pi N = 11$ (*рад/сек*);

отсюда определим число оборотов N за 1 *сек*.: $N = \frac{11}{2\pi} = 1{,}75$ *об*.

Один полный оборот потребует время, равное:

$$t = \frac{1}{N} = \frac{1}{1{,}75} = 0{,}57 \text{ (сек.)}.$$

Пример X. 2. Диск в начале броска делает 380 *об/мин*. Определить его угловую скорость.

Решение:

$$n = 380 \frac{об}{мин}; \quad \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 380}{60} = 40 \frac{рад}{сек}.$$

§ 53. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Уже говорилось, что только при поступательном движении тела его траекторию, скорости и ускорения можно характеризовать данными, присущими одной точке. Во всех других случаях движения разные точки тела имеют различные скорости и ускорения.

Рассмотрим твердое тело, которое вращается около оси AZ (см. рис. 103). Возьмем точку M, находящуюся на расстоянии r от оси вращения. При вращении тела точка M будет описывать окружность радиусом r, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения, а центр лежит на самой оси.

За время dt, когда тело совершает поворот на угол $d\varphi$, точка M переместится по своей траектории на элементарный отрезок пути $ds = rd\varphi$. Зная его, можно определить скорость точки M:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$v = r\omega. \tag{100}$$

Чтобы отличить скорость v от угловой скорости тела, ее называют *линейной* или *окружной* скоростью точки M.

Линейная скорость точки вращающегося твердого тела *численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения тела.* Линейная скорость направлена по касательной к окружности, описываемой точкой M. Это направление будет перпендикулярно к плоскости Q, проходящей через ось вращения AZ и радиус точки M. Ускорение точки M определяется так же, как для криволинейного движения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

В рассматриваемом случае $\rho = r$.

Переходя к угловым скоростям, будем иметь:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon; \tag{101}$$

$$a_n = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2. \tag{102}$$

Полное ускорение точки M будет равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4}$$

или

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{103}$$

Угол, составленный вектором полного ускорения $\overline{a}$ и радиусом окружности, описываемой точкой, это угол μ (рис. 105), тангенс которого равен:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{|a_n|}. \tag{104}$$

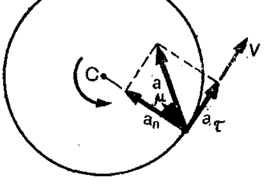


Рис. 105.

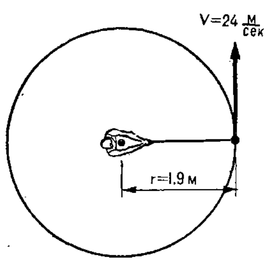


Рис. 106.

Подставляя в это равенство значения $a_\tau = r\varepsilon$ и $a_n = r\omega^2$, получим:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{|a_n|} = \frac{r\varepsilon}{r\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{105}$$

Пример X. 3. Молот получает необходимую скорость для метания: $v = 24$ *м/сек* за 4 полных оборота. Найти ускорения ε, a и $\operatorname{tg}\mu$, считая движение равноускоренным. Длина рукоятки молота 1,2 м (рис. 106).

Решение. Так как молот движется равноускоренно, закон движения можно записать так:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

В данном случае начальная угловая скорость $\omega_0 = 0$. Следовательно, $\omega = \varepsilon t$. Максимальная линейная скорость по условию задачи равна: $v = r\omega = 24$ *м/сек*; $r = 1{,}9$ *м* $(1{,}2 + 0{,}7)$, так как радиус состоит из длины рукоятки молота и руки метателя. Поэтому угловая скорость ω будет

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{24{,}0}{1{,}9} = 12{,}6 \text{ рад/сек}.$$

По условию задачи молот делает 4 полных оборота, поэтому

$$\varphi = 2\pi n = 2\pi \cdot 4 = 8\pi.$$

Пользуясь законами движения, можно записать:

$$1)\ \omega = \varepsilon t;\ \varepsilon t = 12{,}6 \text{ (рад/сек)};$$

$$2)\ \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2};\quad \frac{\varepsilon t^2}{2} = 8\pi$$

Таким образом, имеется два уравнения с двумя неизвестными: t и ε. Из первого уравнения находим, что $t = \frac{12{,}6}{\varepsilon}$. Это значение t подставляем во второе уравнение:

$$\varepsilon\left(\frac{12{,}6}{\varepsilon}\right)^2 = 16\pi;\quad \varepsilon = \frac{(12{,}6)^2}{16\pi} = 3{,}1\ \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}.$$

Время раскручивания молота t найдем так:

$$t = \frac{12{,}6}{\varepsilon} = \frac{12{,}6}{3{,}1} = 4{,}1 \text{ сек}.$$

Пример X. 4. Аппарат для тренировки хоккеистов состоит из диска A, делающего n *об/мин*, помещенного в кожух (Б) с выпускным каналом. Шайбы загружаются в канал кожуха и выбрасываются из канала с линейной скоростью $v = 40$ *м/сек*. Определить число оборотов диска, если радиус диска в месте расположения центра шайбы равен 0,25, 0,30 и 0,35 *м*. Можно считать, что проскальзывания шайбы на диске нет (рис. 107).

Решение. Линейная скорость $v = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r$;

$$n = \frac{60 v}{2\pi r} \text{ (об/мин)};$$

при $r_1 = 0{,}25$ *м*

$$n_1 = \frac{60v}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{60 \cdot 40}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_1} = 383 \frac{1}{r_1} = 1550 \text{ об/мин};$$

при $r_2 = 0{,}30$ *м*

$$n_2 = 383 \cdot \frac{1}{0{,}30} = 1275 \text{ об/мин};$$

при $r_3 = 0{,}35$ *м*

$$n_3 = 383 \cdot \frac{1}{0{,}35} = 1100 \text{ об/мин}.$$

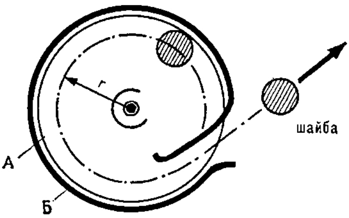


Рис. 107.

§ 54. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором расстояние каждой точки тела от данной неподвижной плоскости остается постоянным, или иначе такое движение, при котором *все точки тела движутся в плоскостях, параллельных данной неподвижной плоскости.*

Пусть некоторая плоская фигура движется в плоскости чертежа (рис. 108). Отнесем это движение к неподвижной системе координат

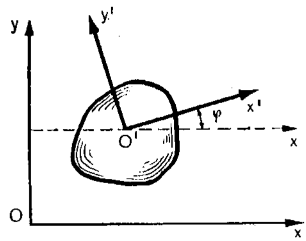


Рис. 108.

Oxy; кроме того, на самой фигуре возьмем неизменно с ней связанные и вместе с ней движущиеся координатные оси $O'x'y'$. Ясно, что положение движущейся фигуры на неподвижной плоскости определяется положением подвижных осей $O'x'y'$ относительно неподвижных Oxy, а это последнее определяется положением подвижного начала O', т. е. координатами x_0 и y_0 и углом поворота φ, который будем отсчитывать от оси Ox в направлении, обратном движению часовой стрелки. Отсюда следует, что положение плоской фигуры будет вполне определенным, если для каждого момента времени будут известны значения x_0, y_0 и φ.

При движении плоской фигуры координаты подвижного начала x_0 и y_0 и угол φ, изменяясь с течением времени, являются некоторыми однозначными и непрерывными функциями t, т. е.

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \tag{106}$$

Эти уравнения вполне определяют движение плоской фигуры и называются уравнениями движения плоской фигуры, движущейся в свой плоскости, или, что то же, *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.*

Движение плоской фигуры в общем случае можно разложить на два движения: 1) поступательное — со скоростью, равной скорости произвольно выбранного полюса, и 2) вращательное — вокруг этого полюса.

Скорость всякой точки (M) движущейся плоской фигуры равна векторной сумме двух скоростей: 1) скорости произвольно выбранной точки O' этой фигуры и 2) скорости точки M во вращательном движении вокруг точки O' (рис. 109).

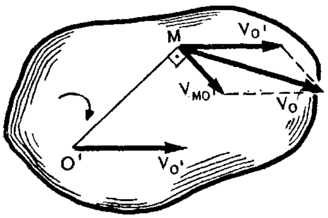


Рис. 109.

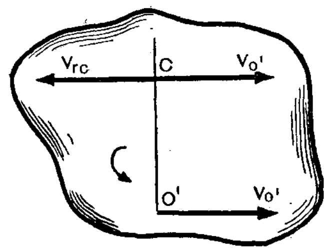


Рис. 110.

В связи с этим возникает вопрос, имеет ли фигура такую точку, скорость которой в данный момент равна нулю, и как найти такую точку? Повернем полупрямую, по которой направлена скорость v_o (рис. 110), на прямой угол вокруг точки O' в направлении вращения фигуры и затем на повернутой полупрямой отложим отрезок $O'C = \frac{v_{O'}}{\omega}$, т. е. отрезок, равный отношению линейной скорости точки O' к угловой скорости фигуры. Тогда точка C будет искомой точкой. В самом деле, скорость ее равна векторной сумме двух скоростей: скорости $v_{0'}$ и скорости во вращательном движении вокруг точки O'. Вращательная скорость перпендикулярна к $O'C$ и по модулю равна $v_{rc} = \omega \cdot O'C$. Как видно из рис. 110, эти две скорости направлены по одной прямой в противоположные стороны, а потому:

$$v_C = v_{O'} - \omega O'C = v_{O'} - \omega \frac{v_{O''}}{\omega} = 0.$$

Таким образом, скорость точки C, называемой *мгновенным центром скоростей,* в данный момент равна нулю. Поэтому распределение скоростей в движущейся плоской фигуре в этот момент, очевидно, такое же, как при вращении фигуры вокруг неподвижной точки C. В самом деле, при разложении движения плоской фигуры на поступательное и вращательное точку O' можно выбрать произвольно; если при разложении движения вместо точки O' выбрать точку C, то согласно скаванному для скорости любой точки M фигуры будем иметь:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC},$$

где v_{MC} — скорость точки M во вращательном движении фигуры вокруг точки C. Но $v_C = 0$, потому $v_M = v_{MC}$, т. е. скорость любой точки фигуры в данный момент равна по модулю и направлению той скорости, которую имеет в тот же момент эта точка во вращательном движении фигуры вокруг точки C. Поэтому *та точка неподвижной плоскости, с которой совпадает в данный момент мгновенный центр скоростей, называется мгновенным центром вращения фигуры.*

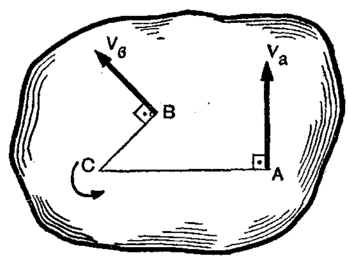


Рис. 111.

Если положение мгновенного центра вращения в данный момент времени найдено и угловая скорость фигуры в этот момент известна, то скорости всех точек фигуры определяются весьма просто: как уже говорилось, скорость каждой точки будет равна по модулю и направлению вращательной скорости этой точки вокруг мгновенного центра. Например, для точек A и B движущейся фигуры (рис. 111) будем иметь: $v_a = CA \cdot \omega$ и $\bar{v}_a \perp \overline{CA}$, $v_b = CB \cdot \omega$ и $\bar{v}_b \perp \overline{CB}$.

Отсюда следует, что мгновенный центр вращения фигуры лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в начале векторов скоростей двух любых точек этой фигуры.

В спорте плоскопараллельное движение встречается очень часто; по существу, это все движения, в которых нет вращения тела спортсмена вокруг продольной оси.

Глава XI. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 55. Абсолютное, относительное и переносное движение точки

В некоторых случаях движение точки по отношению к неподвижной системе координат (системе отсчета) удобно рассматривать как сложное, состоящее из двух одновременных движений.

Движение точки по отношению к подвижной системе отсчета называется относительным движением. Движение точки подвижной системы отсчета *по отношению к неподвижной системе отсчета называется переносным движением.*

Многие физические упражнения состоят из сложных движений. Например, точка M на оси педали велосипеда (рис. 112) совершает движение по отношению к Земле по кривой $MM_1M_2M_3M_4$, носящей название *циклоиды*. Это движение можно считать состоящим из двух простых движений: движения точки по окружности по отношению к

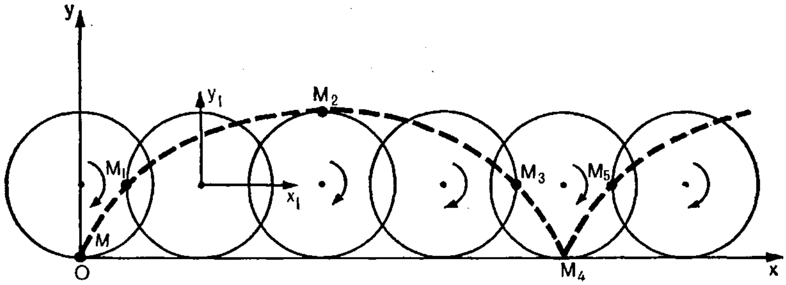


Рис. 112.

раме велосипеда и движения точки вместе с поступательно движущимся велосипедом. Круговое движение точки M по отношению к раме велосипеда — относительное движение. Движение точки M, жестко связанное с рамой велосипеда,— переносное движение. Движение точки M по отношению к Земле будет абсолютным (результирующим) движением.

Другой пример. Человек движется по полу железнодорожного вагона, в свою очередь перемещающегося по рельсам. Движение человека по отношению к полу вагона — относительное движение; движение точки вагона по отношению к рельсам — переносное; движение человека по отношению к рельсам — абсолютное.

Или: гимнаст выполняет упражнение на кольцах в каче. Движение какой-либо точки тела гимнаста по отношению к кольцам — относительное; движение тела, условно жестко связанное с кольцами, по отношению к Земле — переносное; движение избранной точки тела гимнаста по отношению к Земле — абсолютное.

Исходя из определений переносного и относительного движений, можно указать на следующий метод изучения движений. Для изучения относительного движения точки следует мысленно остановить переносное движение и рассматривать его далее по законам и правилам абсолютного движения точки. Если необходимо изучать переносное движение точки, следует мысленно остановить относительное движение точки и рассматривать его по формулам кинематики точки в абсолютном движении.

Введем теперь несколько дополнительных понятий.

Абсолютной скоростью ($\bar{v}_{абс}$) *и абсолютным ускорением* ($\bar{a}_{абс}$) данной точки *называются* ее *скорость* и *ускорение по отношению к неподвижной системе отсчета.*

Относительной скоростью ($\bar{v}_{отн}$) *и относительным ускорением* ($\bar{a}_{отн}$) данной точки *называются* ее *скорость* и *ускорение по отношению к подвижной системе отсчета.*

Переносной скоростью ($\bar{v}_{пер}$) *и переносным ускорением* ($a_{пер}$) *называются скорость и ускорение относительно неподвижной системы отсчета той точки, неизменно связанной с подвижной системой отсчета, с которой совпадает в данный момент времени движущаяся точка.*

При поступательном движении подвижной системы отсчета скорости и ускорения всех связанных с ней точек одинаковы. Переносная скорость и переносное ускорение движущейся точки не зависят от ее положения относительно подвижной системы отсчета, поэтому под ними следует понимать скорость и ускорение подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Если движение подвижной системы отсчета отлично от поступательного относительно неподвижной системы отсчета, определение переносной скорости и переносного ускорения точки усложняется.

§ 56. Сложение скоростей при составном движении

Уже говорилось о том, что составное движение можно представить в виде двух движений — относительного и переносного. Зная это, можно утверждать, что абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей:

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{пер} + \bar{v}_{отн}. \tag{107}$$

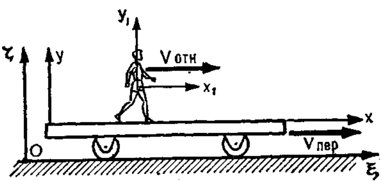
Например, на прямолинейном участке железнодорожного пути находится тележка, перемещающаяся со скоростью $v_{пер}$ по отношению неподвижной системы координат xOy. По тележке бежит человек со скоростью $v_{отн}$, причем направление скоростей $v_{пер}$ и $v_{отн}$ совпадает. Ясно, что человек по отношению к Земле или (что то же) по отношению к координатам xOy передвигается со скоростью $\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$. Для отыскания абсолютной скорости ($\bar{v}_{абс}$) нужно сложить два вектора: $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{v}_{отн}$, т. е. произвести геометрическое сложение. На рис. 113 показаны эти векторы в некоторый момент времени. Если модули переносной и относительной скоростей точки и угол α между ними известны, то модуль абсолютной скорости можно найти, пользуясь теоремой косинусов:

$$v_{абс} = \sqrt{v_{пер}^2 + v_{отн}^2 + 2v_{пер} \cdot v_{отн} \cdot \cos\alpha}.$$

Если направления векторов $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{v}_{отн}$ перпендикулярны друг другу, то $\alpha = 90°$; $\cos\alpha = 0$ и

$$\bar{v}_{абс} = \sqrt{v_{пер}^2 + v_{отн}^2}.$$

Если векторы $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{v}_{отн}$ направлены по одной прямой в одном направлении, то $\alpha = 0$ и $\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{пер} + \bar{v}_{отн}$; при противоположном направлении этих векторов $\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{пер} - \bar{v}_{отн}$; причем вектор $\bar{v}_{абс}$ направлен в сторону большей составляющей.



Пример XI. 1. На теннисной площадке морского лайнера идет игра. На коротких расстояниях мяч летит прямолинейно параллельно палубе корабля. Сопротивление воздуха можно не учитывать.

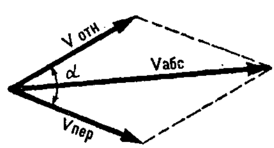


Рис. 113.

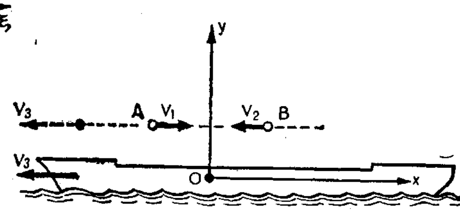


Рис. 114.

Скорость лайнера $v_3 = 18$ *км/час* (рис. 114). Каждый из игроков способен послать мяч с относительной скоростью $v_1 = -v_2 = 30$ *м/сек*.

Определить абсолютные скорости мячей, ударенных игроками A и B.

Решение. Выберем неподвижную систему отсчета. Скорость лайнера, как известно, $v_3 = 18$ *км/час* $= 5$ *м/сек*.

Для игрока A скорости v_3 и v_1 направлены по одной прямой в противоположные стороны, поэтому $\bar{v}_{абс_1} = \bar{v}_{пер} + \bar{v}_{отн} = -5 + 30 = +25$ *м/сек*. Для игрока B скорости v_3 и v_2 имеют одинаковое направление, поэтому $\bar{v}_{абс_2} = \bar{v}_{пер} + \bar{v}_{отн} = -5 - 30 = -35$ *м/сек*.

§ 57. Сложение ускорений при составном движении

Наиболее простым случаем сложения ускорений является тот, когда движение подвижной системы отсчета поступательное: *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного и относительного ускорения.*

Когда переносное движение не является поступательным, для абсолютного ускорения выводится формула:

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{отн} + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}). \qquad (108)$$

В этом случае абсолютное ускорение точки складывается из трех ускорений: переносного ($a_{пер}$), относительного ($a_{отн}$) и ускорения, равного $2(\overline{\omega} \times \overline{v}_{отн})$, которое называется *ускорение Кориолиса*. Обозначая ускорение Кориолиса через a_k имеем:

$$a_k = 2\left(\overline{\omega} \times \overline{v}_{отн}\right). \tag{109}$$

Следовательно: $\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{отн} + \overline{a}_k$.

Физический смысл кориолйсова ускорения можно пояснить следующим примером. Стрелок производит стрельбу во вращающемся тире и всегда предусматривает некоторое упреждение попадания в цель. Объяснить необходимость упреждения зрителю, который находится в этом вращающемся тире, т. е. в подвижной, неинерциальной, системе отсчета, невозможно. Если же зритель находится вне тира (в неподвижной, инерциальной, системе отсчета), то ему быстро все становится ясно: пока пуля летит от стрелка к цели, цель успеет повернуться на некоторый угол, который и требует определенного упреждения в стрельбе.

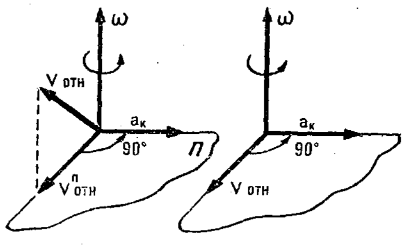


Рис. 115.

Таким образом, необходимость в понятии кориолйсова ускорения возникает у зрителя, находящегося в неинерциальной системе отсчета. Этим ускорением можно объяснить появление сил инерции, которые и обеспечивают отклонение пули при стрельбе.

На рис. 115 показан вектор кориолйсова ускорения. Модуль этого вектора определяется выражением:

$$a_k = 2\omega v_{отн} \sin\Theta. \tag{110}$$

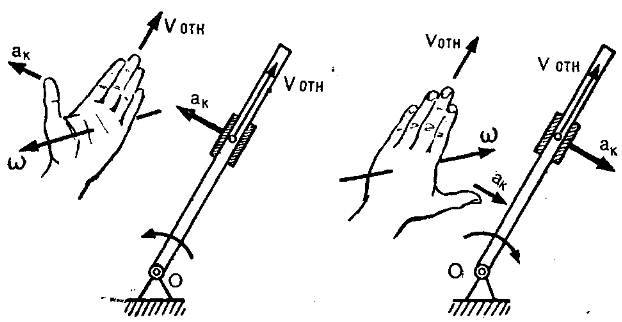


Рис. 116.

Для определения направления кориолисова ускорения можно пользоваться правилом левой руки: если кисть левой руки расположить так, чтобы вектор угловой скорости переносного движения выходил из ладони, а пальцы (кроме большого) показывали направление скорости относительного движения, то большой палец покажет направление вектора кориолисова ускорения (рис. 116). Ускорение Кориолиса всегда перпендикулярно оси вращения. Если $v_{пер} \parallel \omega$, то $\Theta = 0$ или $\Theta = 180°$ и, следовательно, $\sin\Theta = 0$, а потому $a_k = 0$, т. е. в этом случае ускорение Кориолиса обращается в нуль. На рисунках 117 и 118 показаны примеры спортивных движений, при выполнении которых возникает ускорение Кориолиса.

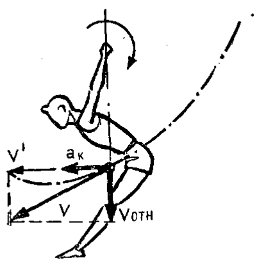


Рис. 117.

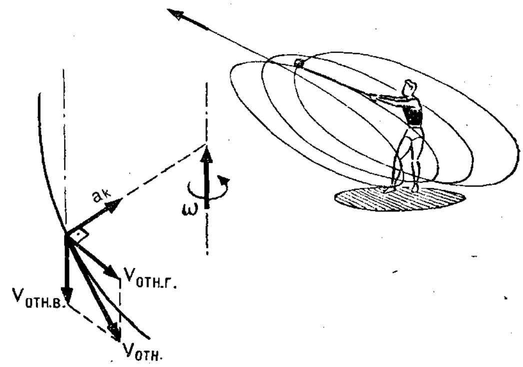


Рис. 118.

Пример XI. 2. Тело акробата в свободном полете имеет мгновенный центр скоростей в точке P.

Известно, что угловая скорость ω в данный рассматриваемый момент равна 6,4 *рад/сек*. Определить скорость $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_b$ в точках A и B соответственно. Вращение тела происходит по ходу часовой стрелки. Для определения расстояний PA и PB приведен масштаб (рис. 119).

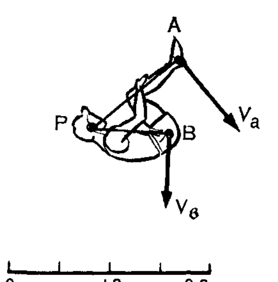


Рис. 119.

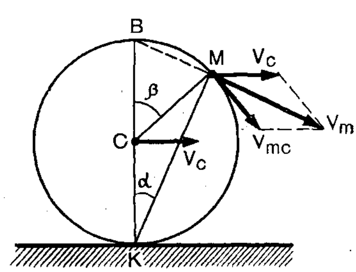


Рис. 120.

Решение. Определяем расстояние PA = 1,1 *м*, PB = 0,75 *м*. По формуле $v = \omega r$ вычисляем скорости в точках A и B:

$$v_a = \omega r = \omega PA = 6{,}4 \cdot 1{,}1 = 7{,}15 \ м/сек;$$

$$v_b = \omega r = \omega PB = 6{,}4 \cdot 0{,}75 = 4{,}8 \ м/сек.$$

Скорости направлены от точек A и B вправо под углом 90°.

Пример XI. 3. Найти скорость точки M обода ренского колеса*, катящегося по прямолинейному участку пути без скольжения (рис. 120), если скорость центра колеса C равна: $v = 4$ *м/сек*, а $\angle BKM = \alpha$. Диаметр колеса $d = 2R = 1{,}93$ *м*.

Решение. Скорость точки C задана: $\bar{v}_c = 4$ *м/сек*, поэтому удобно принять эту точку за полюс. Тогда скорость любой точки будет равна: $\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{v}_{io}$, где $\bar{v}_{ic}$ всегда перпендикулярна линии iC, соединяющей точки i и C. Для точки M: $\bar{v}_m = \bar{v}_c + \bar{v}_{mc}$.

Существует еще одна точка, представляющая интерес — точка K. Это точка касания колеса и площадки. При условии, что скольжение отсутствует, в данный момент времени скорость в точке K равна нулю: $\bar{v}_к = 0$. Вместе с тем скорость $\bar{v}_к$ точки K может быть определена по формуле: $\bar{v}_к = \bar{v}_c + \bar{v}_{кc}$.

Если $\bar{v}_к = 0$, то и $\bar{v}_c + \bar{v}_{кc} = 0$. $|\bar{v}_{кc}| = |\bar{v}_c|$ и направлена перпендикулярно KC в сторону, противоположную скорости v_c. С другой стороны, $\bar{v}_{кc} = \omega \ KC$.

KC — есть радиус колеса, который равен 0,96 м. Зная, что $|v_{кc}| = |v_c|$ имеем:

$$\omega = \frac{|v_c|}{R} = \frac{4}{0{,}96} \cong 4 \ рад/сек.$$

Скорость точки M может быть определена по формуле:

$$\bar{v}_m = \bar{v}_c + \bar{v}_{mc} = \bar{v}_c + \omega R;$$

$$\bar{v}_m = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \ м/сек.$$

$\bar{v}_m$ перпендикулярна отрезку KM.

Скорость $\bar{v}_m$ может быть определена с помощью других рассуждений. Точка K неподвижна в данный момент, поэтому она является мгновенным центром скоростей. Скорость $\bar{v}_m$ точки M равна: $\bar{v}_m = \omega KM$. KM найдем из прямоугольного треугольника KMB: $KM = KB \cdot \cos \alpha = 2R \cos \alpha$.

Пример XI. 4. Катушка с радиусом R катится по горизонтальной плоскости HH без скольжения (рис. 121). На средней цилиндрической части катушки с радиусом r намотана нить, конец которой B перемещается со скоростью u по горизонтальному направлению вправо. Определить скорость v перемещения оси катушки.

---

* Гимнастические колеса (ренские) — снаряд для тренировок вестибулярного аппарата — выпускаются следующих диаметров: 1,73; 1,83 и 1,93 м.

Р е ш е н и е. Прежде всего необходимо знать, куда будет двигаться катушка, если потянуть ее за нить.

Точка касания K катушки с плоскостью является для данного момента времени неподвижной, следовательно может быть принята за мгновенный центр скоростей.

$$v_a = \omega KA = \omega (R - r); \quad \omega = \frac{v_a}{R-r} = \frac{u}{R-r};$$

$$v_o = \omega KO = \omega R = \frac{u}{R-r} R.$$

Угловая скорость ω создает вращение, направленное по ходу часовой стрелки, благодаря этому катушка будет перемещаться вправо.

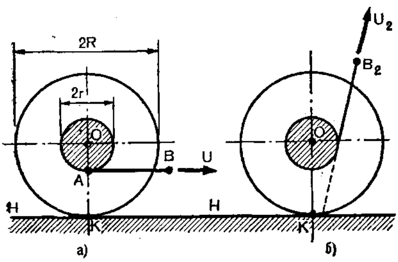


Рис. 121.

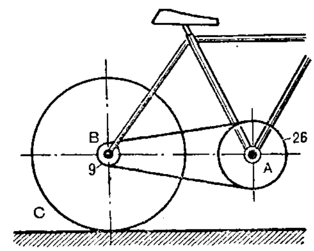


Рис. 122.

Достаточно изменить направление скорости конца нити (u_2), (рис. 125, *б*), как центр катушки будет двигаться влево. Почему так происходит?

П р и м е р XI. 5. Цепная передача в велосипеде (рис. 122) состоит из цепи, охватывающей звездочку A с 26 зубцами и звездочку B с 9 зубцами, которая неизменно соединена с задним колесом C, диаметром 0,7 *м*. Определить скорость велосипеда, если звездочка A делает в секунду один оборот, а колесо C катится при этом без скольжения по прямолинейному пути.

Р е ш е н и е. Определим угловую скорость ω_2 звездочки B около ее центра, зная, что угловая скорость звездочки A около ее центра $\omega_1 = 1$ *об/сек*.

Очевидно, отношение угловых скоростей будет равно отношению числа зубцов n_1 и n_2:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_2}; \quad \omega_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \omega_1 = \frac{26}{9} \cdot 1 = \frac{26}{9} \text{ об/сек} = \frac{26}{9} \cdot 2\pi \ 1/\text{сек}.$$

Скорость точки C колеса будет равна:

$$v_c = \omega r = \frac{26}{9} \cdot 2\pi \cdot \frac{0,7}{2} = 6,35 \text{ м/сек}.$$

или 22,87 *км/час*.

Пример XI. 6. Выполняя сальто прогнувшись на батуте, спортсмен начинает снижаться от некоторой точки A с начальной скоростью, равной нулю; при этом он вращается около центра тяжести с постоянной угловой скоростью: $\omega = 11{,}5$ *рад/сек* (рис. 123). Определить скорость в точках тела E и D, находящихся на расстоянии от центра тяжести C на 0,8 и 0,9 *м*, когда линия ED горизонтальна. Когда начальная скорость точки C была равна нулю, линия ED с вертикалью составляла угол $\varphi = 45°$.

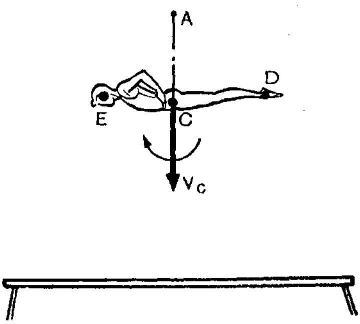


Рис. 123.

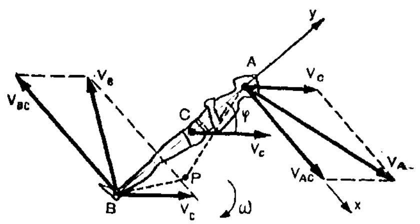


Рис. 124.

Решение. Снижение тела спортсмена происходило в течение времени, необходимого для поворота на 45°, что соответствует

$$\varphi = \frac{2\pi}{360} \cdot 45 = \frac{\pi}{4} \text{ рад}.$$

Время прохождения этого угла:

$$t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi/4}{11{,}5} = 0{,}07 \text{ сек}.$$

Скорость центра тяжести к моменту, когда ось тела будет горизонтальна, составит:

$$\overline{v}_c = gt = 9{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}685 \text{ м/сек}.$$

Скорость точки D равна: $\overline{v}_d = \overline{v}_c + \overline{\omega}\ (CD) = 0{,}685 + 11{,}5 \cdot 0{,}8 = 9{,}885$ *м/сек*.

Скорость точки E равна: $\overline{v}_e = \overline{v}_c + \overline{\omega}\ (CE) = 0{,}685 + (-11{,}5 \cdot 0{,}8) = -9{,}715$ *м/сек*. Скорость v_e направлена по вертикали вверх, скорость v_d — по вертикали вниз.

Пример XI. 7. В один из моментов при темповом сальто движение тела акробата слагается из поступательного и вращательного (рис. 124). При этом точка C, которую можно принять за полюс, движется вправо со скоростью $v_c = 44$ *м/сек*; угловая скорость тела $\omega = 11$ *рад/сек*. Определить скорость точек A и B, а также мгновенный центр скоростей. Расстояние от полюса C до точек A и B равно 0,8 *м*. Вектор $\overline{v_c}$ направлен под углом $\varphi = 45°$ к отрезку AC.

Р е ш е н и е. Скорость в точке A равна: $\overline{v_a} = \overline{v_c} + \overline{\omega AC}$. Скорость $\overline{v_c} = 4$ *м/сек* и направлена по горизонтали. Вектор $\overline{v_c}$ перенесем в точку A. Скорость направлена по перпендикуляру к отрезку AC и равна: $\overline{v_{AC}} = \omega\, AC = 11 \cdot 0{,}8 = 8{,}8$ *м/сек*. v_a может быть определена графически (как на рис. 121) либо аналитически*.

* Аналитическое решение предлагается сделать самостоятельно.

ЛИТЕРАТУРА

Р а з д е л I

Д о н с к о й Д. Д. Биомеханика с основами спортивной техники. ФиС, 1971, стр. 81—108, 167—180.

Т а р г С. М. Краткий курс теоретической механики. М., «Наука», 1967, стр. 15—137.

Х а й к и н С. Э. Физические основы механики. М., «Наука», 1971, стр. 11—30, 64—122.

Р а з д е л II

Д о н с к о й Д. Д. Биомеханика с основами спортивной техники. ФиС, 1971, стр. 62—80.

П е т р о в В. А. Методические указания к биомеханическому анализу спортивной техники. Л., ГДОИФК им. П. Ф. Лесгафта, 1970, стр. 3—21.

Т а р г С. М. Краткий курс теоретической механики. М., «Наука», 1967, стр. 138—241.

Х а й к и н С. Э. Физические основы механики. М., «Наука», 1971, стр. 31—63.

Раздел III

ДИНАМИКА

Глава XII.

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ

§ 58. Предмет динамики и ее основные задачи

Динамика изучает зависимости между механическим движением материальных тел и действующими на них силами.

Изучение динамики начинается обычно с изучения движения материальной точки как наиболее простого объекта.

Иногда бывает, что в условиях конкретного исследования даже значительными размерами тела можно пренебречь. Например, при поступательном движении тела все его точки движутся одинаково и для определения движения тела достаточно знать движение какой-либо одной его точки. Центр тяжести тела движется, как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса тела и к которой приложены все действующие на него силы. Поэтому поступательно движущееся тело можно рассматривать в динамике как точку, находящуюся в центре тяжести тела, имеющую массу, равную массе этого тела. В тех же случаях, когда размерами движущегося тела пренебречь нельзя, можно мысленно разбить его на малые части и считать их материальными точками. Всякое тело или несколько тел, соединенных вместе, обычно рассматривают как совокупность материальных точек. *Совокупность материальных точек, взаимодействующих между собой по закону равенства действия и противодействия, называется механической системой материальных точек или просто механической системой.* Таким образом, в механической системе движение каждой точки и положение ее в пространстве зависят от движения и положения в пространстве других точек. В связи с тем, что предметом изучения может быть материальная точка или система материальных точек, динамика подразделяется на динамику материальной точки и динамику механической системы. Движение абсолютно твердого тела, которое можно рассматривать как систему материальных точек, расстояния между которыми не изменяются, изучается в динамике механической системы.

Динамика решает прежде всего следующие две задачи.

1. По заданному движению материальной точки или системы определить силы, действующие на эту точку или систему.

2. По заданным силам, действующим на данную материальную точку или систему, определить закон движения этой точки или системы.

§ 59. Основные законы динамики

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел. Эти законы впервые были изложены Исааком Ньютоном* (1643—1727).

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем (1638), гласит: *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные к ней силы не заставят ее изменить это состояние.*

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением по инерции. Закон инерции указывает на одно из основных свойств материи — пребывать неизменно в движении. Состояние покоя рассматривается как частный случай движения (скорость равна нулю) по инерции.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной системой отсчета.*

Для решения большинства технических задач инерциальной можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Второй закон (основной закон динамики). *Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и совпадает с ней по направлению.* Этот закон имеет и другую формулировку: произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно модулю этой силы; направление ускорения совпадает с направлением силы.

Математически этот закон может быть представлен равенством:

$$m\bar{a} = \bar{F}. \tag{111}$$

Необходимо обратить внимание на то, что по второму закону с направлением силы совпадает направление ускорения, а не направление самого движения (направление скорости). Это же вытекает и из формулы 111, так как в левой части ее $\bar{a}$ — вектор, m — скаляр; в правой части $\bar{F}$ — вектор, следовательно векторы $\bar{a}$ и $\bar{F}$ имеют оди-

* Основной труд Ньютона «Математические начала естественной философии» (1687). На русский язык он был переведен акад. А. Н. Крыловым.

наковое направление. Направление движения в общем случае не совпадает с направлением приложенной к точке силы. Так, например, тело, брошенное под углом к горизонту, движется по кривой линии (парабола), все время изменяя направление своего движения, в то время как действующая на точку сила тяжести и сообщаемое ею ускорение всегда направлены по вертикали вниз (рис. 125).

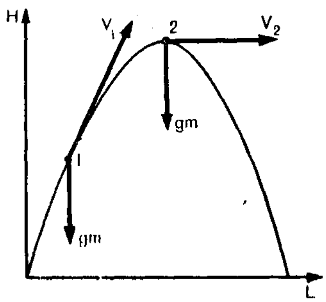


Рис. 125.

Направление приложенной силы будет совпадать с направлением движения в том случае, если она действует на свободную точку, находившуюся до этого момента в покое.

Пусть, например, какая-либо точка M движется равномерно пря-

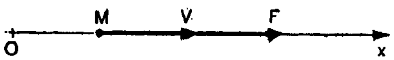


Рис. 126.

молинейно со скоростью v, направленной вдоль оси Ox (рис. 126). Приложим к этой точке силу F, действующую в направлении ее движения. От этого направление движения точки не изменяется, но модуль ее скорости будет возрастать. Если приложить к точке M силу в противоположном направлении, то скорость точки будет уменьшаться, сохраняя свое направление.

При толкании ядра, в момент, предшествующий отделению ядра от руки спортсмена, оно уже имеет определенную скорость. Поэтому направление силы $\overline{F}_m$, приложенной к ядру в момент толчка, и направление движения ядра v не совпадают (рис. 127).

Если на точку M будет действовать сила $\overline{F}$ (рис. 128), перпендикулярная к направлению движения точки, она будет иметь только нормальное ускорение a_n; касательное же ускорение будет равно нулю. Следовательно, движение точки перестанет быть прямолинейным ($a_n \neq 0$).

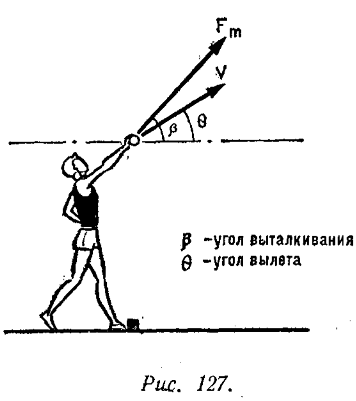


Рис. 127.

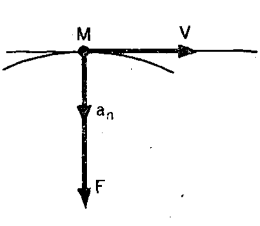


Рис. 128.

Из повседневного опыта известно, что одна и та же сила сообщает различным телам неодинаковые ускорения. Модуль ускорений зависит не только от модуля действующей силы, но и от массы тел. *Массой тела называется мера его инертности, численно выражающаяся отношением модуля силы, действующей на тело, к вызванному ею ускорению.* В практике часто массу тела определяют по значению его силы тяжести. Но она изменяется в зависимости от географической широты места, в котором производится взвешивание. Масса же тела является величиной неизменной. Отсюда следует, что вес тела нельзя принять в качестве *точной меры* его массы. В каждом данном земном пункте все тела падают в пустоте с одинаковым ускорением. Модуль этого ускорения (g) находится в той же зависимости от места наблюдения, что и сила тяжести (вес) тела, так как отношение силы тяжести тела к ускорению его свободного падения есть величина постоянная; это отношение и принимают за меру массы тела.

Обозначая массу тела через m, силу тяжести его через Q и ускорение свободного падения через g, будем иметь:

$$m = \frac{Q}{g}. \qquad (112)$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). *Силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки, равны по величине, направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой.* Этот закон был рассмотрен на стр. 8.

Закон независимости действия сил. *Ускорение, получаемое материальной точкой при одновременном действии на нее нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые она получила бы под действием каждой из данных сил в отдельности.*

Пусть на точку, масса которой равна m, одновременно действуют силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ..., $\overline{F}_n$, сообщая ей ускорение $\overline{a}$. Ускорение, сообщаемое точке при раздельном действии на нее каждой из данных сил, обозначим через $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, ..., $\overline{a}_n$. Закон независимости сил позволяет сказать, что $\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + ... + \overline{a}_n$.

Умножая обе части данного равенства на скалярный множитель m (масса точки), получим:

$$m\overline{a} = m\overline{a}_1 + m\overline{a}_2 + m\overline{a}_3 + ... + m\overline{a}_n. \qquad (113)$$

Согласно второму закону динамики, $m\overline{a}_1 = \overline{F}_1$; $m\overline{a}_2 = \overline{F}_2$; $m\overline{a}_3 = \overline{F}_3$, ..., $m\overline{a}_n = \overline{F}_n$, поэтому уравнение 113 можно записать:

$$m\overline{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_n = \overline{R}, \qquad (114)$$

где $\overline{R}$ — равнодействующая системы сил, приложенных в данной точке, равная их геометрической сумме, т. е. $m\overline{a} = \overline{R}$.

Следовательно, в задачах раздела динамики систему сил, приложенных в точке, можно заменять одной равнодействующей, как и в задачах раздела статики.

§ 60. Системы единиц

В механике приняты две системы единиц — техническая и физическая (международная система — СИ). Единицами измерения величин являются три основные единицы, определяющие систему единиц. Двумя основными единицами служат: единица длины (L) и единица времени (T). За третью основную единицу принимается либо единица силы, либо единица массы (M). Другие величины, такие как скорость, ускорение и др., являются производными от основных. Так, например, скорость имеет размерность $\frac{длина}{время}$, т. е. единица скорости является производной от двух основных единиц: единицы длины и единицы времени: $L^{1}\ T^{-1}$. Модуль силы и масса связаны между собой определенной зависимостью, выражаемой основным уравнением динамики $\overline{F} = m\overline{a}$. Следовательно, для измерения силы и массы за основную (независимую) единицу можно принять только одну из них, единица же другой величины будет уже производной от трех основных единиц.

В основу технической системы единиц положены единицы длины L, силы F и времени T. За основную принимается единица силы, а единица массы является производной.

За основную единицу в физической системе единиц принимается единица массы, а единица силы является уже производной.

1. **Техническая система единиц***. Основными единицами в этой системе являются: единица длины — метр (*м*), единица времени — секунда (*сек*), единица силы — килограмм (*кГ*). Размерность массы в этой системе определяется из основного уравнения динамики:

$$масса = \frac{сила}{ускорение} = \frac{сила \cdot время^2}{длина}.$$

Единица массы в технической системе называется технической единицей массы (или сокращенно т. е. м.).

Таким образом, 1 т. е. м. = 1 *кГ·сек²/м*.

Технической единицей массы является такая масса, которой сила, равная 1 кГ, сообщает ускорение, равное 1 м/сек².

Зная силу тяжести тела Q и ускорение g силы тяжести в данном месте земной поверхности, можно найти массу тела по формуле 112:

$$m = \frac{Q}{g}.$$

Так как изменение силы тяжести тела Q и ускорения g невелико для различных пунктов Земли, в качестве среднего значения принимают $g = 9{,}81$ *м/сек²*.

* В данном учебном пособии представлены расчеты, выполненные в технической системе единиц, а результаты расчетов чаще всего даны и в технической системе, и в системе СИ.

Чтобы найти массу тела в технических единицах, нужно вес тела, выраженный в килограммах, разделить на 9,81 *м/сек*^{2}.

$$m = \frac{Q}{9,81} \text{ кГ. сек}^2/\text{м} = \frac{Q}{9,81} \text{ т. е. м.}$$

2. Физическая система единиц (СИ). За основные единицы для измерения механических величин в этой системе приняты: единица длины — метр (*м*), единица времени — секунда (*сек.*) и единица массы — килограмм (*кг*).

Размерность силы определяется из основного уравнения динамики:

$$\text{сила} = \text{масса} \cdot \text{ускорение} = \frac{\text{масса} \cdot \text{длина}}{\text{время}^2}.$$

Единица силы в системе СИ называется ньютоном (*н*). Для выражения единицы силы через основные единицы надо в формулу 111 подставить единицу массы — 1 *кг*, единицу длины — 1 *м* и единицу времени — 1 *сек*. Таким образом, 1 *м* = 1 *кгм/сек*^{2}.

Ньютон — есть сила, сообщающая массе в 1 *кг* ускорение в 1 *м/сек*^{2}. Из формулы 112 имеем: $Q = mg$. Отсюда следует, что при ускорении $g = 9,81$ *м/сек*^{2} вес тела с массой $m = 1$ *кг* будет равен: $1 \cdot 9,81 = 9,81$ *кгм/сек*^{2} = 9,81 *н*.

§ 61. Классификация сил, действующих на механическую систему

Все силы, действующие на материальные точки механической системы, можно разделить на два вида: 1) заданные (активные) силы, выражения которых в зависимости от времени, положения движущихся материальных точек системы и от их скоростей известны, так что для отыскания этой зависимости нет надобности знать движение данной системы; 2) реакции связей (если на систему наложены некоторые связи); например, реакция поверхности, по которой принуждена перемещаться данная материальная точка системы, реакция нити, которой связаны две точки системы, реакция шарнира, при помощи которого закреплено твердое тело, входящее в состав данной системы, и т. п. Эти силы заранее, до исследования движения системы, неизвестны (в некоторых случаях, как об этом говорилось в разделе статики, можно заранее указать только направления реакций).

Силы, действующие на материальные точки системы, можно еще классифицировать по другому признаку, а именно: 1) внутренние силы, т. е. силы, с которыми материальные точки данной системы действуют друг на друга, и 2) внешние силы, т. е. силы, с которыми действуют на данную систему тела или материальные точки, не принадлежащие к ней. Эта классификация сил имеет важное значение в динамике системы.

На бегуна, например, действуют внешние силы (собственный вес, реакция покрытия беговой дорожки) и внутренние (мышечные усилия). Эти же силы можно классифицировать иначе: вес тела и усилия в мышцах являются заданными силами, а реакция покрытия — реакцией связи. Одни и те же силы могут рассматриваться и как внешние и как внутренние в зависимости от условия задачи. Например, мышечные усилия, обеспечивающие движение нижних конечностей, следует рассматривать как внешние по отношению к бедру, голени, когда речь идет о движении этих звеньев относительно туловища, или как внутренние по отношению ко всему телу, когда рассматривается его движение в целом.

Внутренние силы, согласно закону равенства действия и противодействия, всегда попарно равны по модулю и противоположны по направлению, поскольку представляют собой взаимодействия между материальными точками данной механической системы.

§ 62. Динамическая характеристика механических связей

В разделе статики уже говорилось о механических связях и некоторых методах определения их при условии равновесия тел. При динамическом анализе реакций связей необходимы некоторые дополнительные понятия.

Стационарные (склерономные) связи — это такие связи, реакции которых не изменяются со временем.

Нестационарные (реономные) связи — это такие связи, реакции которых являются явными функциями времени.

Идеальные связи — это стационарные связи, сумма работ всех реакций которых при элементарном перемещении системы равна нулю. Например, если связью является поверхность, трением о которую можно пренебречь (например, суставная поверхность), то при перемещении тел по такой поверхности работа реакции равна нулю.

Геометрические связи — это такие связи, которые ограничивают положения точек системы в пространстве, но не их скорости. Например, нить для физического маятника является геометрической связью. Связи отдельных костей скелета в суставах являются геометрическими связями. Мышцы, окружающие сустав, при движении могут играть двойную роль: быть геометрическими и негеометрическими связями, в зависимости от двигательной задачи и координированности спортсмена.

Кинематические (дифференциальные) связи — это такие связи, которые налагают ограничения не только на координаты, но и на скорости.

Голономными связями называются дифференциальные интегрируемые и геометрические связи.

Неголономными связями называются дифференциальные неинтегрируемые связи.

Пример XII. 1. Колесо с радиусом R катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. 129). Движение колеса является плоскопараллельным, положение в пространстве определяется координатами x_c, y_c и углом поворота φ. Здесь $y_c = R$ (геометрическая связь). Так как скорость точки K равна нулю, то: $\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$ или $\dot{x}_c - R\dot{\varphi} = 0$ (кинематическая, или дифференциальная, связь). Уравнение этой связи можно проинтегрировать и получить зависимость x_c от φ: $x_c - R\varphi = \text{const}$. Интегрируемость связи указывает на то, что эта система является голономной.

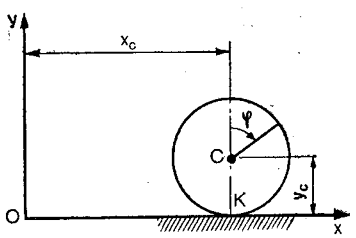


Рис. 129.

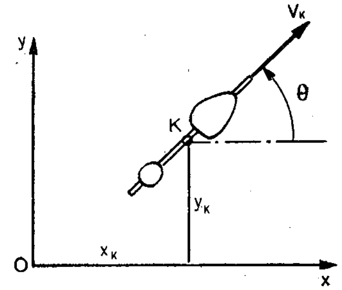


Рис. 130.

Пример XII. 2. Фигурист движется на одном коньке со скоростью, изменяющейся по закону: $v_k = at$. Допустим, что лезвие конька врезается в лед и перемещение конька в направлении, перпендикулярном плоскости конька, исключено (рис. 130). Такое допущение требует, чтобы скорость v_k всегда была в плоскости лезвия конька. Это приводит к следующим соотношениям координат x_k, y_k и Θ:

$$\dot{x}_k = at\cos\Theta; \quad \dot{y}_k = at\sin\Theta.$$

Данные уравнения, если Θ — не постоянный угол, не могут быть проинтегрированы. Следовательно, рассмотренная система является неголономной. Описание движения такой системы чрезвычайно затруднено. Чтобы уравнения связи были интегрируемы, необходимо угол Θ определить в функции времени. Поэтому нужно описать математически условия разрушаемости льда лезвием конька. В спорте эта задача несколько упрощается, так как есть возможность задать функцию $\Theta(t)$ как «программу места», т. е. задать известную в фигурном катании на коньках фигуру, которую спортсмен должен выполнить.

Глава XIII.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 63. Прямолинейное движение точки

При прямолинейном движении точки скорость и ускорение ее все время направлены вдоль одной прямой. Действие силы совпадает по направлению со скоростью и ускорением.

Пусть на материальную точку M действуют силы $\overline{F_1} \dots \overline{F_i}$ с равнодействующей $\overline{R} = \Sigma \overline{F_i}$ (рис. 131). Положение точки на траектории определяется ее координатой x_m. Задача динамики в этом случае заключается в том, чтобы, зная $\overline{R}$, найти закон движения точки, т. е. $x = f(t)$.

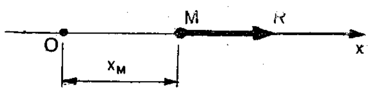


Рис. 131.

Как известно, основной закон механики может быть представлен равенством $m\overline{a} = \overline{F}$ или, если на тело действует несколько сил, равенством $m\overline{a} = \Sigma \overline{F_i} = \overline{R}$.

Перемещение материальной точки x необходимо связать с действующей на нее силой F. Проектируя обе части предыдущего равенства на ось Ox, получим:

$$ma_x = R_x. \tag{115}$$

Зная, что $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, заменим a_x величиной $\frac{d^2x}{dt^2}$:

$$m\frac{d^2x}{dt} = \sum F_{ix}. \tag{116}$$

Уравнения, в которые входят независимая переменная, искомая функция и производные или их дифференциалы, называются *дифференциальными уравнениями*. В уравнение 116 искомая величина x входит под знаком производной. Это и есть *дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки*.

Данное уравнение можно заменить двумя дифференциальными уравнениями, содержащими первые производные. Так как проекция скорости $v_x = \frac{dx}{dt}$, можно написать:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= \sum F_{ix} \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

Чтобы найти закон движения точки, т. е. $x = f(t)$, необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение. В полученном решении будет произвольная постоянная величина c, так как $\int f(x)dx = \varphi(x) + c_1$. После повторного интегрирования в полученном решении будут две постоянные c_1 и c_2, значение которых нужно будет определить. Для этого необходимо принять во внимание дополнительные, или, как говорят, *начальные условия*: положение и скорость точки в начальный момент времени.

В случае прямолинейного движения заданные начальные условия будут иметь следующий вид: при $t = 0$ $x = x_0$; $v_x = v_0$, или при $t = 0$ $x = 0$; $v_x = 0$.

Зная начальные условия, после интегрирования дифференциального уравнения можно определить значения постоянных c_1 и c_2. Например, пусть на точку действует сила F, *постоянная* по модулю и направлению. Уравнение движения будет иметь вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x. \tag{118}$$

Учитывая, что F_x есть постоянная величина, уравнение 118 можно переписать так:

$$dv_x = \frac{F_x}{m}dt.$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$\int dv_x = \int \frac{F_x}{m}dt,$$

$$v_x + c' = \frac{1}{m}F_x + c''.$$

или

$$v_x = \frac{1}{m}F_x t + (c'' - c').$$

Постоянная величина $|c'' - c'|$ может быть обозначена через c_1, и тогда

$$v_x = \frac{1}{m}F_x t + c_1.$$

Но $v_x = \frac{dx}{dt}$, поэтому:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}F_x t + c_1. \tag{119}$$

Умножим обе части равенства на dt:

$$dx = \left(\frac{1}{m}F_x t + c_1\right)dt.$$

Интегрируя это выражение:

$$\int dx = \int \left(\frac{1}{m} F_x t + c_1\right) dt,$$

получим:

$$x = \frac{1}{2m} F_x t^2 + c_1 t + c_2. \qquad (120)$$

Полученный результат — общее решение уравнения 116.

Для определенного, частного решения задачи необходимо знать конкретные значения постоянных c_1 и c_2. Зададим начальные условия: пусть при $t = 0$ $x = x_0$ и $v_x = v_0$; так как при $t = 0$ $v_x = \frac{dx}{dt} = v_0$, то, делая соответствующие подстановки в уравнения 119 и 120, получим: $v_0 = c_1$; $x_0 = c_2$.

Подставив полученные значения c_1 и c_2 в уравнение 120, будем иметь:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2m} F_x t^2. \qquad (121)$$

Как следует из уравнения 121, материальная точка под действием постоянной силы F совершает *равнопеременное движение*.

Интегрируя соответствующие дифференциальные уравнения движения, можно решить много интересных и практически важных задач механики спортивных движений.

В типичных задачах сила, действующая на материальную точку, находится в зависимости от ряда условий, например, сила зависит от времени: $F = f(t)$; от пройденного пути: $F = f(s)$; от скорости: $F = f(\dot{t})$ и т. д.

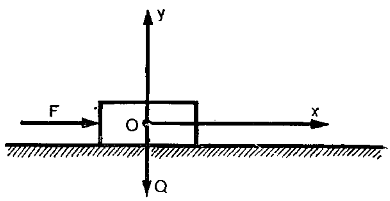


Рис. 132.

Пример XIII. 1. Тело весом Q, будучи в состоянии покоя, начинает двигаться вдоль горизонтальной плоскости под действием силы F, величина которой растет пропорционально времени по закону $F = kt$. Найти закон движения тела.

Решение. Выберем за начало отсчета точку O, в начальном положении тела (рис. 132) и направим ось Ox в сторону движения. Начальные условия будут: при $t = 0$ $x = 0$; $v_x = 0$. Сила, действующая на тело, $F_x = F = kt$, поэтому равенство $m\overline{a} = \overline{F}$ можно записать:

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{dv_x}{dt} = kt.$$

Затем, умножая обе части равенства на dt, получим:

$$dv_x = \frac{kg}{Q} t dt.$$

Интегрируя это выражение, имеем:

$$v_x = \frac{kg}{Q} \cdot \frac{t^2}{2} + c_1.$$

Так как при $t = 0$ $v_x = 0$, то, делая соответствующую подстановку, получим, что c_1 также равно нулю.

Заменим $v_x = \frac{dx}{dt}$ и, умножая обе части равенства на dt, получим:

$$dx = \frac{kg}{2Q} t^2 dt.$$

Интегрируя второй раз, получим:

$$x = \frac{kg}{6Q} t^3 + c_2.$$

Подстановка начальных данных $t = 0$; $x = 0$ показывает, что $c_2 = 0$. Окончательно имеем:

$$x = \frac{kg}{6Q} t^3.$$

Из полученного уравнения следует, что путь, проходимый телом, будет пропорционален кубу времени. С подобным характером нарастания силы часто приходится встречаться в момент «разгона» какой-либо системы (например при «разгоне» велосипеда, диска, молота) и т. п.

Пример XIII. 2. Академическое гребное судно весом 15 *кГ* толкнули, сообщив ему начальную скорость $v_0 = 3{,}0$ *м/сек*. Сила сопротивления воды при малых скоростях пропорциональна первой степени скорости и равна $R = \mu v$*, где $\mu = 1$ *кГсек/м* $\left(9{,}8\ \frac{н \cdot сек}{м}\right)$. Определить, через сколько времени скорость лодки уменьшится вдвое и какой путь пройдет лодка за это время.

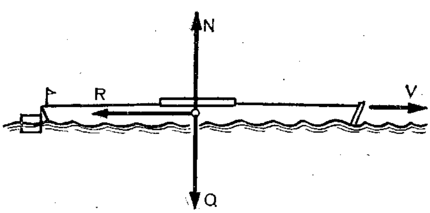


Рис. 133.

Следует учесть, что сила, которая сообщила лодке толчок, действовала на нее до момента времени $t = 0$; лодка приобрела скорость v_0 как результат действия этой силы. С момента времени $t = 0$ на лодку действует (рис. 133) активная сила

* Величина сопротивления, испытываемого телом, может быть представлена в общем виде формулой: $R = \mu v^n$. Если R измерять в системе СИ (*н*), то μ (некоторая постоянная величина) будет измеряться в *н·сек/м*; v (относительная скорость движения) — в *м/сек*. Показатель степени n зависит от величины v и для характерных в спортивной практике скоростей применяется в пределах 1—3.

Q — сила тяжести; реактивные силы N и R появляются в результате действия на лодку воды.

Р е ш е н и е. Исходим из основного уравнения динамики:

$$\sum F_{ix} = -R = -\mu v.$$

Поскольку $v_x = v$, $m\frac{dv}{dt} = -\mu v.$

Прежде чем интегрировать это уравнение, нужно разделить переменные:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}dt.$$

Затем, проинтегрировав уравнение

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}\int_{0}^{t}dt$$

и учитывая, что при $t = 0$ $v = v_0$, получим:

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m}t.$$

Отсюда имеем:

$$t = \frac{m}{\mu}\ln\frac{v_0}{v}$$

По условиям задачи необходимо найти время $t = t_1$, когда $v = 0{,}5\,v_0$.

$$t_1 = \frac{m}{\mu}\ln\frac{v_0}{0{,}5\,v_0} = \frac{m}{\mu}\ln 2 = 0{,}69\frac{m}{\mu}$$

$$t_1 = 0{,}69\frac{15}{g1} = 1{,}05\ сек.$$

Для определения пройденного пути S рационально основное уравнение написать так:

$$m\frac{dv_1}{dt} = -\mu v.$$

Затем, если надо искать зависимость скорости от координат x, а не от времени t, или если сами силы зависят от x, это уравнение следует преобразовать, умножая его на $\frac{dx}{dx}$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v.$$

Заменяя $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}v$, имеем:

$$mv\frac{dv}{dx} = -\mu v.$$

Сокращая это уравнение на v и учитывая, что при $x = 0$ $v = v_0$ будет иметь:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{x} -\frac{\mu}{m} dx;$$

и

$$x = \frac{-(v - v_0)\, m}{\mu}.$$

Полагая, что $v = 0{,}5\ v_0$, найдем, что лодка пройдет путь, снизив скорость на половину, равный:

$$x_1 = \frac{mv_0}{2\mu} = \frac{15 \cdot 3}{g \cdot 2} = 2{,}25\ м$$

Замечания. Эта задача интересна тем, что, зная вес лодки, ее начальную скорость v_0 (определив ее), регистрируя время t_1, можно экспериментально определить коэффициент μ и сопротивление R. На практике оказалось, что этот метод определения сопротивления судна значительно удобнее и точнее метода буксировки, особенно при определении качества смазки, где необходима большая точность измерений.

§ 64. Движение тела в сопротивляющейся среде

Падение тела в воздухе. В спорте очень часто приходится встречаться с падением тела в сопротивляющуюся среду, например, при прыжке с парашютом, прыжке в воду, прыжке лыжника с трамплина. При движении тела в какой-либо среде оно испытывает сопротивление, зависящее от формы и размеров тела, скорости его движения, а также от свойств самой среды. При падении тела в воздухе сила сопротивления R может быть определена по формуле:

$$R = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2 = K v^2, \qquad (122)$$

где ρ — плотность среды (для воздуха при температуре 15° С, и давлении 760 *мм рт. ст.* $\rho = \frac{1}{8}$ *кГсек*^{2}/*м*^{4}, или 1,23 *нсек*^{2}/*м*^{4}).

Площадь S — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения (иногда ее называют *площадью миделя*). Как показано на рис. 134, площадь проекции куполообразного парашюта во втором случае будет меньше, чем в первом.

C_x— безразмерный коэффициент сопротивления, который зависит от формы тела.

Пусть тело падает с относительно небольшой высоты, при которой плотность воздуха ρ и вес тела Q можно считать постоянными. Координатную ось Ox направим вертикально вниз (рис. 135). Необходимо определить, как будет изменяться скорость падения тела в зависимости от пройденного пути x при начальной скорости $v_0 = 0$.

На падающее тело действуют силы Q — вес тела и R — сила сопротивления. Поэтому можно написать уравнение:

$$\sum F_{ix} = Q - R.$$

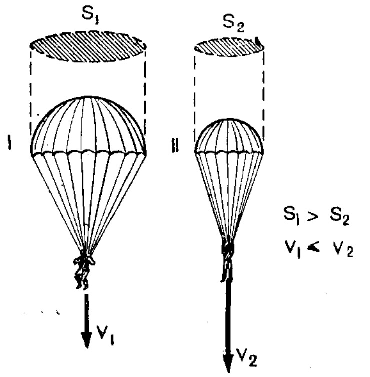


Рис. 134.

Рис. 135.

Так как интерес представляет зависимость v от x, уравнение удобнее записать так:

$$mv \frac{dv}{dx} = Q - R;$$

$$\frac{Q}{g} v \frac{dv}{dx} = Q - Kv^2 \quad \text{или}$$

$$v \frac{dv}{dx} = g\left(1 - \frac{Kv^2}{Q}\right).$$

Обозначим $\frac{K}{Q} = \frac{1}{a^2}$,

тогда уравнение будет иметь вид:

$$v \frac{dv}{dx} = g\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right).$$

Разделим переменные

$$\frac{vdv}{a^2 - v^2} = \frac{g}{a^2} dx.$$

Интегрируя обе части равенства, получим:

$$\int \frac{vdv}{a^2 - v^2} = \frac{g}{a^2} \int dx,$$

$$-\frac{1}{2} ln (a^2 - v^2) = \frac{g}{a^2} x + c_1.$$

Так как при $x = 0$ $v = 0$, то $c_1 = -\frac{1}{2} ln\, a^2$; подставив это значение, получим:

$$ln \frac{(a^2 - v^2)}{a^2} = -2 \frac{g}{a^2} x$$

или

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-2 \frac{g}{a^2} x}.$$

Отсюда находим:

$$v = a \sqrt{1 - e^{-2 \frac{g}{a^2} x}}. \qquad (123)$$

Это выражение — закон изменения скорости падающего в воздухе тела в зависимости от пройденного пути. По мере возрастания пути, пройденного падающим телом, величина $e^{-2 \frac{g^2}{a} x}$ убывает, стремясь к нулю, когда x становится достаточно большим ($x \to \infty$). В это время скорость падения v возрастает и стремится к постоянной величине a, которая представляет собой *предельную скорость падения для данного тела* ($v_{пр}$).

Для тела человека предельная скорость падения достигает 60 *м/сек*. Поэтому с какой бы высоты человек не падал, скорость его падения не будет превышать этого значения. Когда человек прыгает с парашютом, сопротивление движению после раскрытия парашюта резко возрастает вследствие его больших размеров и куполообразной формы. Предельная скорость поэтому равна 5—6 *м/сек* и соответствует такой скорости, которая была бы достигнута при прыжке без парашюта с высоты около 2 *м*.

В табл. 11 представлены некоторые аэродинамические характеристики тела человека.

Таблица 11

Мидель в рабочей среде ($м^2$) и коэффициент сопротивления C_x

Спортивная специализация	Мидель S ($м^2$)	Среднее значение C_x
Прыжки в воду (из основной стойки)	0,05—0,1	0,01—0,03
Лыжный спорт	0,3—1,0	0,5—0,9
Конькобежный спорт	0,35—0,5	0,9—1,1
Велосипедный спорт	0,4—0,5	0,7—0,9

П р и м е р XIII. 3. Спортсмен прыгает в воду с вышки ($h = 10$ *м*), сохраняя вертикальное положение («солдатиком»). Определить скорость его падения к моменту входа в воду. Вес спортсмена $Q = 70$ *кГ*.

Р е ш е н и е. Скорость определяется по формуле 123:

$$v = a\sqrt{1 - e^{-2\frac{g}{a^2}h}},$$

где

$$a^2 = \frac{Q}{K}; \quad K = \frac{C_x S \rho}{2}$$

Значения C_x, S приведены в табл. 11.
Примем

$$\rho = \frac{1}{8}; \quad S = 0{,}1\ м^2; \quad C_x = 0{,}02.$$

Отсюда находим:

$$K = \frac{1}{2}\rho C_x S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}02 = 1{,}25\cdot 10^{-4}.$$

Определим значения коэффициентов, входящих в формулу:

$$a^2 = \frac{Q}{K} = \frac{70}{1{,}25\cdot 10^{-4}} = 5{,}6\cdot 10^5; \quad a = 7{,}5\cdot 10^2;$$

$$\frac{2g}{a^2}\cdot h = \frac{20\cdot 10}{5{,}6\cdot 10^5} = 3\cdot 7\cdot 10^{-4}.$$

$$v = 7{,}5\cdot 10^2\sqrt{1 - e^{-\frac{2\cdot 10}{5{,}6\cdot 10^5}\cdot 10}} = 13{,}5\ м/сек.$$

Скорость для материальной точки в пустоте (без учета сопротивления воздуха) была бы равна:

$$v = \sqrt{2gh} = 14{,}0\ м/сек.$$

При сложных прыжках мидель и Cx являются переменными величинами и значительно большими, чем было принято в рассмотренном примере, поэтому и снижение скорости в сложных прыжках больше.

П р и м е р XIII. 6. Как уже говорилось, предельная скорость человека при падении с большой высоты не превышает 60 *м/сек*. Определить величину $C_x \cdot S$ для этого случая. В формуле 123 по мере возрастания $he^{-2\frac{g}{a^2}h}$ убывает и, когда $h \to \infty$, $e^{-2\frac{g}{a^2}h} \to 0$. В это время скорость падения v возрастает и стремится к постоянной величине a, которая равна:

$$a = \sqrt{\frac{Q}{K}}, \quad \text{поэтому}$$

$$v_{пр} = a = \sqrt{\frac{2Q}{C_x \rho S}}.$$

По условию задачи $v = 60$ *м/сек*; $Q = 70$ *кГ*. Отсюда:

$$S \cdot C_x = \frac{2Q}{\rho v_{пр}^2} = \frac{2 \cdot 70}{\frac{1}{8} \cdot 60^2} = \frac{1120}{3600} = 0{,}31.$$

Большое значение SC_x прежде всего объясняется большим миделем. При падении человек принимает различные позы; кроме того, мидель возрастает за счет теплой громоздкой одежды; несомненно резко возрастает и величина C_x.

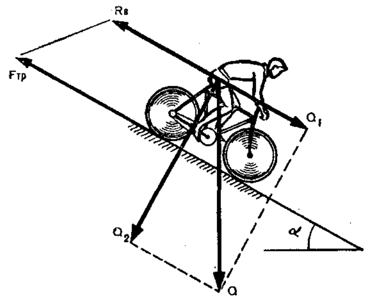


Рис. 136.

Спуск велосипедиста под уклон. Во время спуска велосипедиста под уклон на велосипед и спортсмена действуют сила тяжести Q и силы сопротивления F_c. Разложим силу Q на составляющие: одна из них $Q_2 = Q \cos \alpha$ и направлена по нормали к поверхности N, другая $Q_1 = Q \sin \alpha$ и направлена параллельно полотну дороги. Она создает разгон велосипеда. Сила трения $F_{тр}$ и сопротивление воздуха $R_в$ направлены параллельно полотну дороги (рис. 136).

Запишем уравнение движения:

$$am = Q \sin \alpha - fQ \cos \alpha - R_в, \tag{124}$$

где Q — вес велосипеда и велосипедиста, m — масса этой системы, f — коэффициент трения, R — сопротивление воздуха. Сила $fQ \cos \alpha$ — сила сопротивления качения. Эта величина при хорошей трассе практически не зависит от скорости движения. Учитывая, что $\cos \alpha$ при углах в пределах от 0 до 30° изменяется незначительно (1,000—0,866), очень часто считают, что сопротивление качению равно fQ. Для хорошей дороги (асфальт) $f = 0{,}004$, для плохой (булыжная мостовая) f возрастает до 0,008—0,01.

Сопротивление воздуха ($R_в$) равно:

$$R_в = \frac{C_x S \rho}{2} v^2.$$

Полагаем, что C_x, S и ρ — величины неизменные для данного велосипедиста. Если $C_x = 0{,}8$, $S = 0{,}5$, $\rho = 0{,}125$, то

$$\frac{C_x S \rho}{2} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}125}{2} = 0{,}025.$$

При $C_x = 0,6$

$$\frac{C_x S \rho}{2} = 0,039.$$

Поэтому можно считать, что сопротивление воздуха равно $R_в = 0,022\, v^2$.

Здесь следует оговорить, что v — это относительная скорость движения, при большей скорости перемещения воздушных потоков (ветер) величина v не будет соответствовать скорости движения велосипедиста.

Подставляя полученные значения в уравнение 124, получим:

$$am = Q \sin\alpha - 0,004Q - 0,022v^2. \tag{125}$$

Когда действующие силы будут равны нулю, велосипед будет двигаться с постоянной скоростью, и она будет максимальной при условии, что спуск совершается свободно и велосипедист «не работает».

$$Q \sin\alpha - 0,004Q - 0,022v^2 = 0.$$

$$0,022v^2 = Q(\sin\alpha - 0,004),$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{Q(\sin\alpha - 0,004)}{0,022}} \text{ м/сек}. \tag{126}$$

Формулу 126 иногда удобно записать в ином виде:

$$v_{\max} = \sqrt{Q} \cdot \sqrt{\frac{\sin\alpha - 0,004}{0,022}} \text{ м/сек}. \tag{127}$$

При $\alpha = 10°$ ($\sin 10° = 0,174$) и весе велосипедиста с велосипедом 90 *кГ* максимальная скорость будет:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{90 \cdot (0,174 - 0,004)}{0,022}} = 26,4 \text{ м/сек} = 95 \text{ км/час}.$$

Учитывая, что ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

уравнение 125 может быть переписано так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Q(\sin\alpha - 0,004) - 0,022v^2 \tag{128}$$

или в другой форме:

$$mv \cdot \frac{dv}{dx} = Q(\sin\alpha - 0,004) - 0,022v^2, \tag{129}$$

или:

$$\frac{Q}{g}v \cdot \frac{dv}{dx} = Q(\sin\alpha - 0,004) - 0.022v^2. \tag{130}$$

Обозначим

$$(\sin\alpha - 0{,}004) \text{ через } k^2, \text{ а}$$

$$\frac{Qk^2}{0{,}022} = a^2.$$

Введя эти обозначения в уравнение 130, будем иметь:

$$\frac{Q}{g} v \frac{dv}{dx} = Qk^2 - \frac{Qk^2}{a^2} v^2 \text{ или}$$

$$v \frac{dv}{dx} = gk^2 \left(\frac{a^2 - v^2}{a^2}\right). \tag{131}$$

После разделения переменных получим:

$$-v \cdot \frac{dv}{a^2 - v^2} = -\frac{gk^2}{a^2} dx.$$

Беря интеграл от обеих частей этого равенства

$$-\int v \frac{dv}{a^2 - v^2} = -\frac{gk^2}{a^2} \int dx$$

(интеграл левой части — простой табличный интеграл, он помещен в таблицах всех кратких справочников),
имеем:

$$ln(a^2 - v^2) = -\frac{2gk^2}{a^2} x + c_1. \tag{132}$$

При $x = 0$, скорость $v = 0$. Следовательно, $lna^2 = c_1$.
Подставляя это значение c_1 в уравнение 132, получим:

$$ln(a^2 - v^2) = -\frac{2gk^2}{a^2} x + ln\, a^2;$$

$$ln \frac{a^2 - v^2}{a^2} = -\frac{2gk^2}{a^2} x$$

или

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-\frac{2gk^2}{a^2} x};$$

$$v = a\sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{a^2} x}}, \tag{133}$$

$$\text{но } k^2 = (\sin\alpha - 0{,}004), \text{ а}$$

$$a^2 = \frac{Qk^2}{0{,}022}; \quad a = \sqrt{\frac{Qk^2}{0{,}022}} = \sqrt{\frac{Q(\sin\alpha - 0{,}004)}{0{,}022}}.$$

$$\text{при } x \to \infty \quad v \to v_{\max} = a.$$

Значит:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{Q(\sin\alpha - 0{,}004)}{0{,}022}}.$$

Поэтому формулу 133 можно переписать так:

$$v = v_{max}\cdot\sqrt{1 - e^{\frac{-2g(\sin\alpha - 0{,}004)}{v_{max}^2}x}}. \qquad (134)$$

Эта формула дает возможность вычислить, как изменяется скорость v в зависимости от длины пробега.

При возрастании x величина

$$e^{-2g(\sin\alpha - 0{,}004)v_{max}^{-2}x}$$

убывает, стремясь при $x \to \infty$ к нулю. При этом скорость велосипедиста стремится в пределе к постоянной величине, равной v_{max} при данных условиях спуска.

Показатель степени

$$\frac{2g(\sin\alpha - 0{,}004)}{v_{max}^2}\cdot x = \frac{2g(\sin\alpha - 0{,}004)}{\left[\sqrt{\frac{Q\cdot(\sin\alpha - 0{,}004)}{0{,}022}}\right]^2}\cdot x =$$

$$= \frac{2g\cdot 0{,}022}{Q}\cdot x = \frac{0{,}432}{Q}x.$$

Для дальнейших расчетов целесообразно построить вспомогательную табл. 12.

Таблица 12

Расчетная таблица

α	$\sin\alpha - 0{,}004$	$\sqrt{\frac{\sin\alpha - 0{,}004}{0{,}022}}$	Скорость v_{max} (при $Q=90$ *кГ*)	
			м/сек	*км/час*
5°	0,083	1,95	18,5	66
10°	0,170	2,8	26,6	95
15°	0,255	3,4	32,3	115
20°	0,338	3,78	35,8	129
25°	0,419	3,92	37,2	134
30°	0,496	4,16	39,4	142

Подставляя это значение показателя степени в формулу 134, получим:

$$v = v_{max}\sqrt{1 - e^{\frac{-0{,}432}{Q}\cdot x}} \quad (м/сек). \qquad (135)$$

Представляет интерес изменение скорости в зависимости от длины спуска x. Для данного велосипедиста $Q = \text{const}$. Пусть, как и ранее, $Q = 90$ *кГ*. При этом $\frac{0,432}{Q} \cdot x = 0,0048x$.

Составим расчетную табл. 13.

Таблица 13

Расчетная таблица

x в *м*	$0,0048x$	$e^{-0,0048x}$	$1 - e^{-0,0048x}$	$\sqrt{1-e^{-0,0048x}}$
0	0	1	0	0
10	0,048	0,950	0,050	0,024
50	0,240	0,787	0,213	0,468
100	0,480	0,619	0,381	0,617
300	1,340	0,262	0,738	0,859
500	2,400	0,091	0,909	0,953
1000	4,800	0,008	0,992	0,996

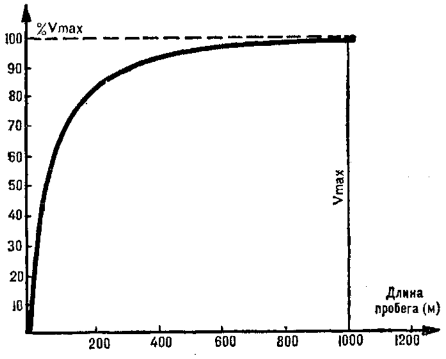


Рис. 137.

Из табл. 13 и рис. 137 видно, как быстро нарастает скорость к концу спуска: при $x = 500$ *м* скорость уже близка к предельной.

Интересно исследовать изменение скорости (v) в зависимости от времени (t), т. е. найти аналитическое выражение для функции $v = f(t)$.

Для этого уравнение 125

$$ma = Q(\sin\alpha - 0,004) - 0,022v^2$$

надо преобразовать в уравнение:

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = Qk^2 - \frac{Qk^2}{a^2} v^2$$

или

$$\frac{dv}{dt} = gk^2 \left(\frac{a^2 - v^2}{a^2}\right).$$

Разделив переменные

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{gk^2}{a^2} dt$$

и проинтегрировав обе части этого равенства

$$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \int \frac{gk^2}{a^2}\, dt$$

(левая часть представлена табличным интегралом), получим:

$$\frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{v}{a} = \frac{gk^2}{a^2}\, t + c_1.$$

При $t = 0$ $v = 0$ и $c_1 = 0$, следовательно:

$$\operatorname{Arcth} \frac{v}{a} = \frac{gk^2}{a}\, t.$$

Так как

$$a = v_{\max},$$

$$\operatorname{Arcth} \frac{v}{v_{\max}} = \frac{gk^2}{v_{\max}}\, t. \qquad (136)$$

Функция Arcth носит название Арктангенса (обратная гиперболическая функция)*. Если $y = \operatorname{Arcth} x$, то x есть $\operatorname{th} y$ (гиперболический тангенс), $x = \operatorname{th} y$;

$$\operatorname{th} y = \frac{\sin hy}{\cos hy}; \quad \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\cosh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Так как предстоит узнать, как изменяется скорость (v) от времени (t), то зависимость, данную уравнением 136, нужно представить в виде $v = f(t)$:

$$\frac{v}{v_{\max}} = \operatorname{th}\left(\frac{gk^2}{v_{\max}}\, t\right)$$

или

$$v = v_{\max} \operatorname{th}\left(\frac{gk^2}{v_{\max}}\, t\right). \qquad (137)$$

Проследим, как изменяется скорость (v) в период разгона в зависимости от времени (t). Для угла наклона $\alpha = 10°$ $v_{\max} = 26{,}6$ *м/сек* (см. табл. 12);

$gk^2 = 9{,}81\ (\sin 10° - 0{,}004) = 9{,}81 \cdot 0{,}170 = 1{,}67$;

$\frac{gk^2}{v_{\max}} = \frac{1{,}67}{26{,}6} = 0{,}063$. Расчеты представлены в табл. 14.

* Таблицы для гиперболических функций, как и для обычных тригонометрических, даются в различных справочниках (Н. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев. «Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов»; А. К. Митропольский «Краткие математические таблицы» и др.).

Таблица 14

Расчетная таблица

t (сек)	$\frac{gk^2}{v_{max}}t$	$\text{th}\left(\frac{gk^2}{v_{max}}t\right)$
0	0	0,00
1	0,06	0,06
5	0,31	0,30
10	0,61	0,57
15	0,94	0,74
20	1,26	0,85
25	1,57	0,92
30	1,87	0,95
40	2,50	0,99

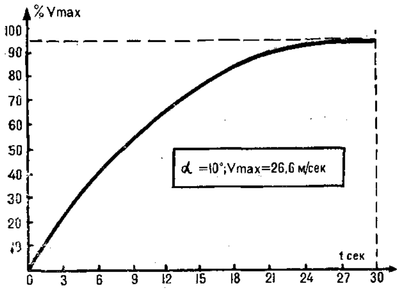


Рис. 138.

Данные этой таблицы представлены в виде графика $v = f(t)$ на рис. 138. Подобным образом можно исследовать скорость для любых углов наклона.

Пример XIII. 5. Определить скорость, которую достигнет велосипедист (не педалируя), спускаясь под уклон при $\alpha = 20°$, через 20 *сек.* после спуска, если его вес равен 80 *кГ*, а вес велосипеда 10 *кГ*. Какова возможная максимальная скорость?

Решение.

$$v_{max} = \sqrt{\frac{Q(\sin\alpha - 0{,}004)}{0{,}022}} = \sqrt{\frac{90\cdot(0{,}342 - 0{,}004)}{0{,}022}} = 35{,}8 \text{ м/сек}.$$

Скорость v через 20 *сек.*, считая от момента спуска, можно определить по формуле:

$$v = v_{max}\,\text{th}\left(\frac{gk^2}{v_{max}}t\right);$$

$$v = 35{,}8\,\text{th}\left[\frac{9{,}81(\sin 20° - 0{,}004)}{28{,}8}\cdot 20\right] =$$

$$= 35{,}8\,\text{th}(2{,}3) = 35{,}8\cdot 0{,}98 = 35{,}3 \text{ м/сек}.$$

Представляет интерес определить время T_0, по истечении которого скорость достигнет максимума. Для этого момента времени формула 137 примет вид:

$$\frac{v}{v_{max}} = \text{th}\left(\frac{gk^2}{v_{max}}T_0\right) = 1$$

или

$$\frac{gk^2}{v_{max}} \cdot T_0 = \text{Arcth}\, 1 = 3{,}8;$$

$$T_0 = \frac{3{,}8 \cdot v_{max}}{9{,}81 \cdot k^2} = \frac{3{,}8 \cdot v_{max}}{9{,}81 \cdot (\sin\alpha - 0{,}004)}. \qquad (138)$$

В данном примере:

$$T_0 = \frac{3{,}8 \cdot 35{,}8}{9{,}81\,(\sin 20^\circ - 0{,}004)} = 40 \text{ сек.}$$

Пример XIII. 6. По истечении какого времени скорость велосипедиста, едущего под уклон при $\alpha = 10^\circ$, достигнет v_{max}, если его вес равен 80 *кГ*, а вес велосипеда 10 *кГ*?

Решение. Известно, что при $\alpha = 10^\circ$ $v_{max} = 26{,}6$ *м/сек*. Пользуясь формулой 138, находим:

$$T_0 = \frac{3{,}8 \cdot v_{max}}{9{,}81 \cdot (\sin\alpha - 0{,}004)} = \frac{0{,}39 \cdot v_{max}}{\sin 10^\circ - 0{,}004} = \frac{0{,}39 \cdot 26{,}6}{0{,}170} = 61 \text{ сек.}$$

Замечание. Время $T = 61$ *сек.* относительно велико. За 30 *сек.* (см. рис. 138) скорость достигает 0,95 v_{max}, и почти такое же время (61,0 *сек* — 30 *сек.* = 31,0 *сек.*) требуется, чтобы поднять скорость на 0,05 v_{max}. Поэтому, по-видимому, рационально определять не теоретическое значение T, а некоторое меньшее время, в течение которого велосипедист достигает околопредельной скорости.

Для этого можно применять формулу:

$$\text{th}\left|\frac{gk^2}{v_{max}} \cdot T\right| = \frac{v}{v_{max}} = 0{,}95.$$

В таком случае

$$\frac{gk^2}{v_{max}} T = \text{Arcth}\, 0{,}95 = 1{,}83.$$

$$T = \frac{1{,}83 \cdot v_{max}}{9{,}81\,(\sin\alpha - 0{,}004)} = \frac{0{,}187 \cdot v_{max}}{\sin\alpha - 0{,}004}. \qquad (139)$$

Решая пример XIII. 6. по формуле 139, получим время разгона (T):

$$T = \frac{0{,}187 \cdot v_{max}}{\sin\alpha - 0{,}004} = \frac{0{,}187 \cdot 26{,}6}{0{,}170} = 29 \text{ сек.}$$

Спуск лыжника с горы. При спуске лыжника с горы, которая имеет вид наклонной плоскости (прямолинейный спуск), на него действуют силы: Q — сила тяжести, $R_{сн}$ — сопротивление трения о снеговую поверхность и $R_в$ — сопротивление воздуха—сила, приложенная в центре тяжести. Реакция со стороны поверхности спуска N направлена перпендикулярно линии спуска.

Пусть ось Ox направлена вдоль линии спуска, а ось Oy перпендикулярно ей (рис. 139). Разложим силу тяжести Q на две составляющие: одну (Q_1), направленную параллельно склону, а другую (Q_2), — перпендикулярно ему. Величины этих составляющих зависят от крутизны склона, характеризуемого углом α (рис. 140). Максимально допустимый угол наклона (α_{max}) принимают равным 45°.

Величина силы Q_1, направленной параллельно склону, определяет скорость движения лыжника. Она растет почти пропорционально углу наклона α. Величина силы Q_2, перпендикулярной поверхности ската, изменяется незначительно с изменением угла наклона и при малых углах (до 20°), можно считать, остается постоянной.

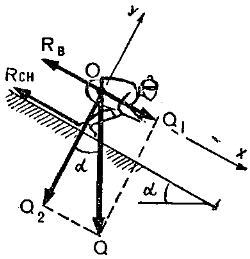


Рис. 139.

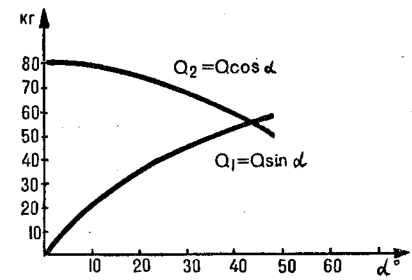


Рис. 140.

Сила сопротивления снега ($R_{сн}$) движению лыжника зависит от: 1) силы трения лыжи — снег — R_1; 2) силы, расходуемой на преодоление снежного валика впереди носового загиба, — R_2; 3) силы, преодолевающей сопротивление снега выдавливанию лыжами,— R_3; 4) силы, преодолевающей боковое трение лыж и выступающих частей креплений,— R_4. Таким образом:

$$R_{сн} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4. \tag{140}$$

В большинстве случаев силами R_2, R_3 и R_4 во время слалома и скоростного спуска на укатанном плотном снегу можно пренебречь. Тогда сила трения лыжи — снег будет равна:

$$R_{сн} = R_1 = Q_2 f = Q \cos \alpha f.$$

Коэффициент трения f зависит от состояния снегового покрова, температуры воздуха, типа лыж, качества смазки и скорости скольжения лыж по снегу. В последнем случае характер трения может переходить от «сухого» к «жидкостному». При жидкостном трении на величину силы сопротивления движению влияет смачиваемость скользящей поверхности водой. Сопротивление трения R равно:

$$R = \eta S \frac{v}{\delta}, \tag{141}$$

где η — вязкость (в *кГсек/м*^{2}) (для воды $\eta = 1$);

v — относительная скорость ($м/сек$);

S — площадь соприкосновения трущихся поверхностей ($м^2$);

δ — толщина слоя воды, смачивающей трущиеся поверхности ($м$);

R — сила трения ($кГ$).

В свою очередь, сила трения R зависит от нагрузки (удельного давления): $p = \frac{N}{S}$ ($кГ/см^2$), так как толщина слоя смачивающей жидкости δ является функцией давления p. Поэтому сила трения R зависит от силы Q_2: $R = fQ_2$, но и является функцией величин η, δ, p и v:

$$R = \varphi\left(\frac{\eta v}{p\delta}\right).$$

Сила сопротивления воздуха $R_в$ движению лыжника зависит от размеров и формы его тела, плотности воздуха и (в значительной мере) скорости относительного перемещения тело — воздух.

Сила сопротивления R может быть представлена следующим выражением:

$$R_в = C_x S \frac{\rho v^2}{2}, \qquad (142)$$

где v — скорость движения лыжника ($м/сек$);

S — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению скорости ($м^2$);

C_x — аэродинамический коэффициент, зависящий от формы и состояния поверхности тела и его ориентировки по отношению к направлению движения;

ρ — массовая плотность воздуха ($кГсек^2/м^4$).

В начале движения лыжника по склону скорость его мала, а затем начинает возрастать. Если бы сил сопротивления не было, то она возрастала бы беспредельно. Развитию скорости лыжника препятствуют силы сопротивления воздуха и сопротивления скольжения. Сила, вызывающая ускорение движения, равна разности силы Q_1 и силы сопротивления R. Поэтому

$$ma = Q_1 - R, \qquad (143)$$

где a — ускорение, m — масса лыжника. По мере возрастания скорости v растет и сопротивление R; в результате наступит такой момент, когда сила R будет равна силе Q_1, т. е. $Q_1 - R = 0$. Тогда лыжник будет продолжать движение с постоянной скоростью v_{max} (рис. 141). Если принять, что сопротивление R движению лыжника складывается из сопротивления воздуха $R_в$ и сопротивления скольжения R_1, то для моментов времени, когда скорость достигает своего максимального значения, будем иметь:

$$Q_1 - R_в - R_1 = 0. \qquad (144)$$

Так как $Q_1 = Q \sin \alpha$, $R_1 = Qf \cos \alpha$,

$$R_в = \frac{C_x S \rho}{2} v^2_{max},$$

то, делая соответствующие подстановки, получим:

$$Q \sin \alpha - Qf \cos \alpha = \frac{C_x S \rho}{2} v^2.$$

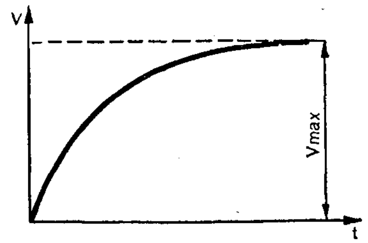


Рис. 141.

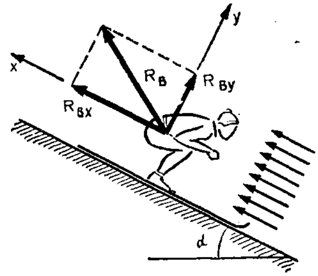


Рис. 142.

Решив это уравнение относительно v_{max}, имеем:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{C_x \rho S}}. \qquad (145)$$

Площадь проекции лыжника на плоскость, перпендикулярную направлению скорости, зависит от роста лыжника, его фигуры, характера одежды и стойки во время спуска (рис. 142).

Для мужчины весом $Q = 70$ *кГ*, ростом 170 *см*, в обычной спортивной одежде, при высокой стойке площадь проекции тела S лежит в пределах от 0,8—1,0 $м^2$. В табл. 15 даны примерные площади проекции тела лыжника.

Таблица 15

Площадь S проекции тела лыжника на плоскость, перпендикулярную направлению скорости

Стойка	S ($м^2$)	Площадь при облегающей одежде ($м^2$)*
Высокая	0,8—1,0	0,68—0,85
Средняя	0,6—0,8	0,51—0,68
Низкая	0,4—0,6	0,34—0,50

* Тип одежды может повлиять на величину площади S в пределах 10—15%.

Аэродинамический коэффициент C_x определяется по формуле:

$$C_x = 2C\,\frac{h^2}{S}, \tag{146}$$

где C — коэффициент, получаемый опытным путем при продуве модели в аэродинамической трубе;

h — рост человека (*м*);

S — площадь проекции (*м*²).

При высокой стойке, когда $h = 1{,}7$ *м*, $C = 0{,}14$;

$$C_x = 2C\,\frac{h^2}{S} = 2 \cdot 0{,}14\,\frac{(1{,}7)^2}{1{,}0} = 0{,}8.$$

Когда туловище лыжника наклонено вперед, сила сопротивления воздуха $R_в$ изменяет свое направление (см. рис. 142). Если разложить эту силу на составляющие по осям, найдем, что $R_{вx}$ тормозит движение лыжника, а составляющая $R_{вy}$ будет поднимать лыжника вверх, уменьшая тем самым величину Q_2.

Величина этой подъемной силы равна:

$$R_{вy} = \frac{C_y S \rho}{2}\,v^2, \tag{147}$$

т. е. подъемная сила также зависит от аэродинамического коэффициента C_y, площади проекции, плотности воздуха и (очень сильно) от скорости v.

В табл. 16 даны значения коэффициентов C_x и C_y для различных стоек лыжника.

Таблица 16

Коэффициенты C_x и C_y для различных стоек лыжника

Стойка	Угол наклона туловища α (градусы)	Аэродинамический коэффициент	
		C_x	C_y
Высокая	80—90	0,75—0,80	0,25
Средняя	70—50	0,70—0,75	0,15—0,2
Низкая	60—70	0,65—0,70	0,2—0,3
«Конькобежец»	0	0,55—0,65	0,3—0,4

Массовая плотность воздуха при нормальных условиях, т. е. при давлении воздуха, равном 760 *мм рт. ст.*, и температуре его +15° С равна: $\rho = 0{,}123$ *кГсек²/м⁴*.

В зависимости от высоты местности, температуры и плотности воздуха ρ изменяется и может быть рассчитана по соответствующим формулам или определена по таблицам*. При высоте $H = 2500$ *м* плотность воздуха снижается до 0,10 $кГсек^2/м^4$.

Итак, максимально возможная скорость $(v)_{max}$ лыжника при спуске с горы, как это видно из формулы 146, зависит от его веса Q, коэффициента трения f, коэффициентов C_x, ρ и S. На рис. 143 дан график зависимости v_{max} от крутизны склона при различных значениях f, C_x и S.

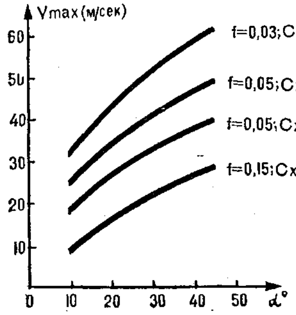


Рис. 143.

Для исследования движения лыжника при спуске с горы необходимо составить *уравнение движения*. Направим ось Ox вдоль поверхности спуска, ось Oy — по нормали к поверхности. Ради упрощения можно считать, что коэффициент трения f есть постоянная величина: $f = \text{const}$. Аэродинамический коэффициент $C_y = 0$, т. е. подъемная сила, действующая на лыжника, очень мала и ею можно пренебречь.

При этих условиях уравнение движения будет иметь вид:

$$ma = Q_1 - R_в - R_1$$

или

$$ma = Q \sin \alpha - \frac{C_x \rho S}{2} v^2 - Qf \cos \alpha. \qquad (148)$$

Чтобы получить зависимость v от x, составляем дифференциальное уравнение:

$$mv \frac{dv_x}{dx} = \Sigma F_{ix}. \qquad (149)$$

Учитывая, что $v_x = v$, получим:

$$\frac{Q}{g} v \cdot \frac{dv}{dx} = (Q \sin \alpha - Qf \cos \alpha) - \frac{C_x \rho S}{2} v^2. \qquad (150)$$

Введем обозначения:

$$Q \sin \alpha - Qf \cos \alpha = Qk^2, \text{ а также:}$$

$$\frac{2Qk^2}{C_x \rho S} = a^2. \qquad (151)$$

Тогда уравнение 150 примет вид:

$$\frac{Q}{g} v \frac{dv}{dx} = Qk^2 - \frac{Qk^2}{Q^2} v^2. \qquad (152)$$

* См. в технических и физических справочниках.

Деля обе части равенства на $\frac{Q}{g}$, получим:

$$v\frac{dv}{dx} = gk^2\,\frac{(a^2 - v^2)}{a^2}.$$

После разделения переменных будем иметь:

$$\frac{vdv}{a^2 - v^2} = \frac{gk^2}{a^2}\,dx.$$

Берем от обеих частей интегралы, умножив их на —1:

$$-\int \frac{vdv}{a^2 - v^2} = -\frac{gk^2}{a^2}\int dx;$$ в результате получим:

$$\ln (a^2 - v^2) = \frac{2gk^2}{a^2}\,x + c_1. \tag{153}$$

При $x = 0$ скорость $v = 0$, следовательно, $ln\,a^2 = c_1$. Подставляя в уравнение 153 значение c_1 получим:

$$ln\,(a^2 - v^2) = -\frac{2gk^2}{a^2}\,x + ln\,a^2;$$

$$ln\,\frac{a^2 - v^2}{a^2} = -\frac{2gk^2}{a^2}\,x$$

или

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x}.$$

Отсюда окончательно находим:

$$a^2 - v^2 = a^2 e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x}$$

$$v = a\sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x}}. \tag{154}$$

Эта формула характеризует закон изменения скорости лыжника в зависимости от пройденного им пути x.

С возрастанием x величина $e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x}$ убывает, стремясь при $x \to \infty$ к нулю. Скорость спуска лыжника (v) возрастает, стремясь в пределе к постоянной величине a, которая является предельной скоростью спуска (v_{max}) при данных условиях движения.

Из равенства $\frac{2Qk^2}{C_x\rho S} = a^2$ найдем, что

$$v_{max} = a = \sqrt{\frac{2Qk^2}{C_x\rho S}}.$$

Зная, что $k^2 = \sin \alpha - f \cos \alpha$, будем иметь:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{C_x \rho S}}. \qquad (155)$$

После достижения v_{max} лыжник будет двигаться уже с постоянной скоростью: $v_{max} = \text{const}$. Промежуточные значения скорости могут быть определены так:

$$v = v_{max} \sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{v_{max}^2} x}}. \qquad (156)$$

Пример XIII. 7. Определить предельную скорость спуска лыжника, если известно, что его вес вместе с лыжами $Q = 70$ *кГ*, $S = 0{,}6$ *м*²; $C_x = 0{,}8$; $f = 0{,}05$; $\alpha = 20°$; $\rho = 0{,}125$.

Решение. Предельную скорость спуска v_{max} следует определить по формуле 155, учтя, что $\sin 20° = 0{,}342$; $\cos 20° = 0{,}940$.

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{C_x \rho S}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot (0{,}342 - 0{,}05 \cdot 0{,}94)}{0{,}8 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}6}} = 28 \text{ м/сек } (108 \text{ км/час}).$$

Пример XIII.8. Определить предельную скорость спуска лыжника, если известно, что его вес вместе с лыжами $Q = 70$ *кГ*, $S = 0{,}6$ *м*²; $C_x = 0{,}8$; $f = 0{,}1$; $\alpha = 10°$; $\rho = 0{,}125$.

Решение. $\sin \alpha = \sin 10° = 0{,}174$,
$\cos \alpha = \cos 10° = 0{,}985$.

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{C_x \rho S}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot (0{,}174 - 0{,}1 \cdot 0{,}985)}{0{,}8 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}6}} = 13{,}3 \text{ м/сек } (48 \text{ км/час}).$$

Пример XIII.9. Найти скорость спуска на расстоянии x, равном 10, 20, 40, 80, 160, 320 и 640 *м* при условии, что $Q = 70$ *кГ*, $S = 0{,}6$ *м*²; $C_x = 0{,}8$; $f = 0{,}05$; $\alpha = 30°$, $\rho = 0{,}125$.

Решение. Применяем формулу 156:

$$v = v_{max} \sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{v_{max}^2} x}};$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{C_x \rho S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot 0{,}457}{0{,}8 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}6}} = 39{,}6 \text{ м/сек}.$$

Показатель степени, равный $-\frac{2gk^2}{v_{max}^2}x$ удобно обозначить через Ax. В данном случае задан ряд значений расстояния x; величина A остается постоянной.

Известно, что $k^2 = (\sin\alpha - f\cos\alpha)$; $k^2 = (\sin 30^\circ - 0{,}05\cdot\cos 30^\circ) = (0{,}5 - 0{,}05\cdot 0{,}866) = 0{,}457$. Численное значение A будет:

$$A = \frac{2gk^2}{v_{max}^2} = \frac{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}457}{(39{,}6)^2} = \frac{8{,}96}{1560} = 0{,}00574.$$

Расчеты приведены в табл. 17.

Таблица 17

Расчетная таблица

x (м)	Ax	e^{-Ax}	$1-e^{-Ax}$	$\sqrt{1-e^{-Ax}}$	v (м/сек)
10	0,057	0,942	0,058	0,24	9,2
20	0,114	0,896	0,104	0,32	12,7
40	0,229	0,794	0,216	0,47	18,6
80	0,459	0,631	0,369	0,69	24,2
100	0,918	0,398	0,618	0,79	31,4
320	1,837	0,165	0,835	0,91	36,0
640	3,674	0,025	0,945	0,98	39,0

Результаты расчетов, данные в последнем столбце табл. 17, нанесены на график (рис. 144), из которого видно, что по мере прохождения пути скорость спуска (v) приближается к максимальной ($v_{max} = 39{,}6$ *м/сек*).

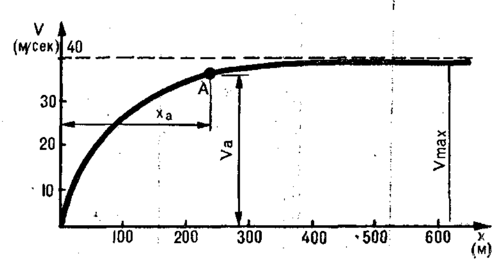


Рис. 144.

Замечания. Для слаломиста, очевидно, важно знать расстояние x, при котором скорость перестает быстро нарастать. Практически это происходит на $^1/_3$ пути, необходимого для достижения v_{max}.

В результате исследования формул 155 и 156 получены данные о длине пути, который должен пройти лыжник прежде, чем он достигнет максимальной скорости.

Если уравнение

$$ma = Q\sin\alpha - \frac{C_x\rho S}{2}v^2 - Qf\cos\alpha,$$

принимая во внимание, что

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

представить в ином виде, а именно

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Q(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{C_xS\rho}{2}v^2,$$

то, решая его, можно получить время t, по истечении которого спортсмен приобретает максимальную скорость v_{max}. Готовая формула имеет вид:

$$t = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x\rho S}}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}. \tag{157}$$

Выражения $(\sin\alpha - f\cos\alpha) = k^2$ и $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = gk^2$ встречаются очень часто, а входящие в них параметры α и f варьируют не в очень широких пределах. Значения этих величин даны в табл. 18.

Таблица 18

Значения k^2 и gk^2 в зависимости от α и f

α	f	$(\sin\alpha - f\cos\alpha)$	$g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
10°	0,03	0,171	1,66
	0,05	0,169	1,64
	0,16	0,076	0,73
	0,15	0,026	0,23
20°	0,03	0,339	3,29
	0,05	0,337	3,27
	0,10	0,248	2,40
	0,15	0,201	1,95
30°	0,03	0,497	4,82
	0,05	0,496	4,81
	0,10	0,491	4,76
	0,15	0,487	4,72
40°	0,03	0,641	6,21
	0,05	0,639	6,20
	0,10	0,635	6,16
	0,15	0,631	6,12

Пример XIII. 10. Определить, через какое время лыжник весом $Q = 70$ *кГ*, спускаясь с горы с уклоном $\alpha = 30°$, достигнет максимальной скорости, если $f = 0{,}05$; $S = 1$; $C_x = 0{,}8$ и $\rho = 0{,}125$.

Решение. Подставив в формулу 157 соответствующие значения $(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ и $g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$, которые можно взять из табл. 18, получим:

$$t = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x\rho S}}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{2\cdot 70\cdot 0{,}496}{0{,}8\cdot 1{,}125\cdot 1}}}{4{,}81} = 19{,}7 \text{ сек.}$$

По-видимому, имеет значение не только время t, но и некоторое время t_1, когда скорость перестает быстро нарастать, например время, соответствующее скорости в точке A (см. рис. 144). Это время в 2—2,5 раза меньше времени t, необходимого для достижения v_{max}.

Пример XIII. 11. Прямолинейный участок горы разгона лыжного трамплина имеет длину $x = 40$ *м*, угол наклона $\alpha = 40°$. Определить, какой скорости (v) достигнет спортсмен после прохождения этого участка, если вес его с лыжами $Q = 70$ *кГ*; $f = 0,05$; $S = 0,6$; $C_x = 0,8$; $\rho = 0,125$.

Решение. Максимально возможная скорость при данных условиях равна:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x\rho S}} = \sqrt{\frac{2\cdot 70\cdot 0,639}{0,8\cdot 0,125\cdot 0,6}} = 38,8 \text{ м/сек}.$$

Искомая скорость определяется по формуле 156:

$$v = v_{max}\sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{v_{max}^2}x}} = 38,8\cdot\sqrt{1 - e^{\frac{-2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot 40}{38,8^2}}} =$$

$$= 38,8\cdot\sqrt{1 - e^{\frac{-12,4\cdot 40}{38,8^2}}} = 38,8\cdot\sqrt{1 - e^{-0,33}} =$$

$$= 38,8\cdot 0,53 = 20,6 \text{ м/сек}.$$

§ 65. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Движение тела, брошенного под углом к горизонту с начальной нулевой скоростью v_0, исследуется для анализа легкоатлетических метаний и различных спортивных прыжков.

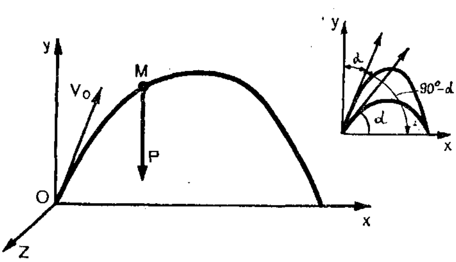


Рис. 145.

На данную точку массой m (рис. 145) действует только сила P (сопротивление воздуха не учитывается). Проекции этой силы на координатные оси: $P_x = 0$; $P_y = -P = -mg$; $P_z = 0$. Следовательно:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0; \quad m\frac{dv_y}{dt} = -mg; \quad m\frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Используя второе уравнение в виде

$$\frac{dv_y}{dt} = -g.$$

Умножая обе части его на dt и интегрируя, получим:

$$dv_y = -gdt,$$

$$v_y = -gt + c_2.$$

Интегрирование первого и третьего уравнений дает: $v_x = c_1$; $v_z = c_3$ (т. е. скорости постоянны, так как производные от них — ускорения — равны нулю).

При $t = 0$ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Следовательно: $v_{x_0} = v_0 \cos\alpha$; $v_{y_0} = v_0 \sin\alpha$; $v_{z_0} = 0$.

Таким образом: $v_x = c_1 = v_0 \cos\alpha$; $v_y = c_z = v_0 \sin\alpha$

или

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha; \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Интегрируя, получаем: $x = v_0 t \cos\alpha + c_4$;

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + c_5.$$

При $t = 0$ $x = y = 0$. Следовательно, $c_4 = c_5 = 0$.

Окончательно имеем:

$$x = v_0 t \cos\alpha; \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (158)$$

Имея эти уравнения, исследуем движение точки методами кинематики. Определим траекторию точки. Для этого исключим из уравнений 158 время t и найдем зависимость x от y: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$,

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (159)$$

Уравнение траектории в данном случае есть уравнение параболы. Определим дальность полета, т. е. x при $y = 0$:

$$x = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{g}$$

или (так как $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$)

$$l = x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \qquad (160)$$

Известно, что $\sin 2\alpha = \sin(180° - 2\alpha) = \sin 2\beta$, где $2\beta = 180° - 2\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$. Поэтому при броске тела под углом $\beta = 90° - \alpha$ дальность полета будет той же (см. рис. 145).

Определим высоту траектории, т. е. y при x, равном половине дальности:

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Поэтому

$$y = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gv_0^4\sin^2\cos^2\alpha}{2v_0^2\cos^2\alpha g^2} = \frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha -$$

$$- \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

Таким образом:

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha. \qquad (161)$$

Пример XIII. 12. Допустим, что начальная скорость полета (v_0) тела спортсмена при прыжке в длину равна 8 *м/сек* и направлена под углом $\alpha = 20°$. Найти длину прыжка и максимальную высоту о.ц.т. тела атлета, если в конце отталкивания эта высота равнялась 1 *м* (рис. 146).

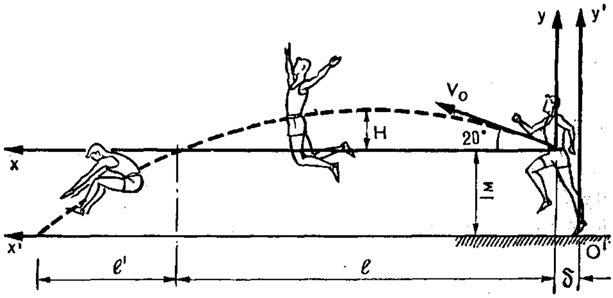


Рис. 146.

Решение. Определим проекции начальной скорости на осях x и y.

$$v_{x0} = v_0\cos\alpha = 8\cos 20° = 7{,}45 \text{ м/сек}.$$

$$v_{y0} = v_0\sin\alpha = 8\sin 20° = 2{,}72 \text{ м/сек}.$$

Используя формулы 158, получим: $x = v_0 t\cos\alpha = 7,$

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 2{,}72t - 4{,}9t^2.$$

Исключая t из этих уравнений, найдем зависимость $x = x(y)$, т. е. траекторию о.ц.т.:

$$t = \frac{x}{7{,}45}; \quad y = 2{,}72\,\frac{x}{7{,}45} - \frac{4{,}9x^2}{7{,}45^2}$$

$y = 0{,}365\,x - 0{,}088\,x^2$. Это уравнение параболы. Найдем производную от y:

$$\dot{y} = 0{,}365 - 0{,}18\,x.$$

Когда о.ц.т. тела атлета поднимется на максимальную высоту, вертикальная составляющая скорости его будет равна нулю: $\dot{y} = 0$, т. е. $0{,}365 - 0{,}18x = 0$. Этому положению будет соответствовать $x = 2$ *м*. Следовательно, дальность прыжка $l = 2x = 4$*м*. Это же значение можно получить и с помощью формулы 160:

$$l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{8^2}{9{,}8}\sin 40^\circ = 4 \text{ м.}$$

Эта длина прыжка не является фактической. Реальная длина прыжка будет больше на величину l^1 (см. рис. 146). Поэтому для определения реальной длины прыжка целесообразно воспользоваться уравнением траектории, найдя значение x при $y = -1$ *м*. В данном примере получится квадратное уравнение: $0{,}365\,x - 0{,}088\,x^2 + 1 = 0$, или $x^2 - 4x - 11{,}3 = 0$. Решение этого уравнения:

$$x = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{2} - (-11{,}3)} = 2 \pm 2{,}7;$$

$x_1 = -0{,}7$ (*м*); $x_2 = 4{,}7$ (*м*).

Как видно из рис. 146, x_1 есть l^1, а x_2 — длина прыжка, уменьшенная на величину δ.

Определим высоту подъема о.ц.т. тела спортсмена в полетной фазе прыжка:

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = \frac{8^2}{2\cdot 9{,}81}\sin^2 20^\circ = 0{,}37 \text{ м.}$$

Это же значение можно получить, пользуясь уравнением траектории. Для этого необходимо вычислить y при $x = \frac{l}{2} = 2$ *м*. $H = y_{\max} = 0{,}365\cdot 2 - 0{,}088\cdot 2^2 = 0{,}37$ *м*.

П р и м е р XIII. 13. Допустим, что прыжок в высоту выполняется при начальной скорости $v_0 = 5$ *м/сек*, вектор которой направлен под углом $\alpha = 80^\circ$. Определить траекторию о.ц.т. и высоту прыжка.

Р е ш е н и е. Проекции начальной скорости на оси координат:

$$v_{x0} = v_0\cos 80^\circ = 5\cdot 0{,}17 = 0{,}85 \text{ м/сек};$$

$$v_{y0} = v_0\sin 80^\circ = 5\cdot 0{,}98 = 4{,}9 \text{ м/сек}.$$

Следовательно, $x = v_{x_0}\ t = 0{,}85\,t$; $y = v_{y_0}t - \frac{gt^2}{2} = 4{,}9t - 4{,}9t^2$.

Траектория о.т.ц. тела прыгуна:

$$y = \frac{4{,}9x}{0{,}85} - \frac{4{,}9x^2}{0{,}85^2};\quad y = 5{,}75x - 6{,}8x^2.$$

Скорость по оси y : $\dot{y} = 5{,}75—13{,}6\,x$. В момент, когда данная скорость достигает нуля: $\dot{y} = 0 = 5{,}75—13{,}6\,x$, длина $x = 0{,}42$ *м* (рис. 147). При этом высота подъема о.т.ц. тела атлета: $H' = y = 5{,}75 \cdot 0{,}42 - 6{,}8 \cdot 0{,}42^2 = 1{,}22$ *м*.

Общая высота прыжка составит: $H = H' + h = 1{,}22 + 1{,}0 = 2{,}22$ *м*.

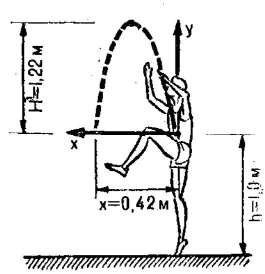


Рис. 147.

Пример XIII. 14. Определить дальность полета ядра, вылетевшего при толчке с места с $v_0 = 12{,}5$ *м/сек* под углом $\alpha_0 = 42°$.

Решение. Дальность полета ядра при толчке без стартового разгона зависит от трех величин: v_0, α_0 и h_0— высоты выпуска. Для определения дальности полета легкоатлетических снарядов можно пользоваться приближенной формулой:

$$L' = \frac{v_0^2}{g} + h_0. \tag{162}$$

При этом нужно помнить, что сопротивление воздуха уменьшает дальность полета в среднем на 0,9%.

Приняв $h_0 = 2{,}1$ *м*, будем иметь:

$$L' = \frac{12{,}5^2}{9{,}81} + 2{,}1 = 18{,}0 \text{ м}.$$

Фактическая длина с учетом сопротивления воздуха: $L = 18{,}0 - 18{,}0 \cdot 0{,}009 = 17{,}8$ *м*.

Замечание. Исследования техники спортивных метаний (В. Н. Тутевич) показали, что дальность полета ядра зависит от географической широты и высоты местности над уровнем моря. В частности, у экватора ядро (как, впрочем, и другие легкоатлетические снаряды) летит дальше на 0,4—0,5%. На высоте 2 *км* над уровнем моря дальность полета всех снарядов, кроме диска, увеличивается на 0,5% (дальность полета диска с увеличением высоты уменьшается).

Глава XIV.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

§ 66. Понятие о количестве движения и кинетической энергии

Общие теоремы динамики устанавливают наглядные и простые зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел и поэтому дают возможность изучать спортивные движения. Основными динамическими характеристиками механического движения являются количество движения и кинетическая энергия*.

Количеством движения точки называется вектор, равный произведению массы точки на вектор ее скорости.

Направление вектора количества движения точки совпадает с направлением вектора ее скорости, модуль равняется произведению массы точки на модуль скорости точки. Размерность количества движения:

$$(\text{количество движения}) = (\textit{масса} \cdot \textit{скорость}) =$$

$$= \left(\frac{\textit{сила} \cdot \textit{время}^2}{\textit{длина}} \cdot \frac{\textit{длина}}{\textit{время}}\right) = (\textit{сила} \cdot \textit{время}).$$

В технической системе единиц количество движения измеряется в килограмм-секундах (*кГсек*), а в системе СИ — в ньютон-секундах (*нсек*).

Кинетической энергией точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Размерность кинетической энергии:

$$(\text{кинетическая энергия}) = (\textit{масса} \cdot \textit{скорость}^2) =$$

$$= \left(\frac{\textit{сила} \cdot \textit{время}^2}{\textit{длина}} \cdot \frac{\textit{длина}^2}{\textit{время}^2}\right) = (\textit{сила} \cdot \textit{длина}).$$

В технической системе единиц кинетическая энергия измеряется в килограммометрах (*кГм*) (здесь *кГ* — килограмм-сила), в системе СИ в *кгм²/сек²* (здесь *кг* — килограмм-масса).

Действие, оказываемое на тело силой за некоторый промежуток времени, характеризуется импульсом силы. Импульс за бесконечно малый промежуток времени dt называют *элементарным импульсом силы. Это векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени:*

$$\overline{dJ} = \overline{F}dt. \tag{163}$$

---

* Здесь дается определение этим характеристикам, основанное на способе их измерения. Позже будет ясен их физический смысл.

Вектор $d\overline{J}$ по направлению совпадает с силой $\overline{F}$. Импульс любой силы $\overline{F}$ за конечный промежуток времени определяется как интеграл от элементарных импульсов силы:

$$J = \int_0^t \overline{F} dt. \qquad (164)$$

В частном случае, когда сила $\overline{F}$ постоянная (по модулю и направлению),

$$J = \overline{F} t. \qquad (165)$$

Ввиду того, что направление импульса силы $\overline{J}$ и направление силы $\overline{F}$ одинаковы, можно для вычисления модуля импульса силы использовать его проекции (рис. 148), как при определении модуля силы.

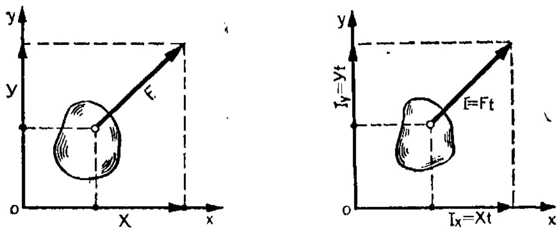


Рис. 148.

Проекции на координатные оси импульса постоянной силы за некоторый промежуток времени равны произведениям соответствующих проекций этой силы на данный промежуток времени,

$$J_x = Xt, \quad J_Y = Yt, \qquad (166)$$

где X и Y — проекции силы F на соответствующие координатные оси.

Импульс силы имеет размерность, одинаковую с размерностью количества движения: (*импульс силы*) = (*сила · время*). Поэтому он измеряется так же, как и количество движения: в технической системе единиц в килограмм-секундах (*кГсек*), а в системе СИ — в ньютон-секундах (*нсек*).

§ 67. Теорема о количестве движения материальной точки

Точка, имеющая массу m, движется под действием приложенной к ней силы F на траектории AB (рис. 149) относительно некоторой неподвижной системы координат. В начальный момент времени, когда $t = 0$, эта точка занимала положение M_0 и имела скорость v_0; в момент времени t_1 она занимает положение M_1 и имеет скорость v_1. Проекция векторного равенства $m\bar{a} = \bar{F}$ на координатную ось x:

$$ma_x = F_x = X. \quad (167)$$

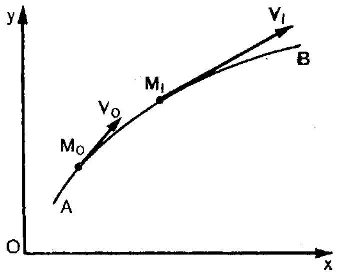


Рис. 149.

Проекция ускорения на ось Ox равна первой производной по времени от проекции скорости точки на ту же ось:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Подставляя это значение в уравнение 167, получим:

$$m\frac{dv_x}{dt} = X.$$

Постоянный множитель m можно ввести под знак дифференциала:

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = X. \quad (168)$$

Это равенство можно распространить на проекцию силы на другие оси координат и сформулировать в более общем виде так:

Производная во времени от проекции количества движения точки на какую-либо ось равна проекции на ту же самую ось действующей на точку силы.

Умножим обе части равенства 168 на dt:

$$d(mv_x) = Xdt.$$

Интегрируя в заданных пределах ($t = 0$; $t = t_1$), имеем:

$$\int_{v_{x0}}^{v_{x1}} d(mv_x) = \int_0^{t_1} Xdt.$$

В левой части равенства пределы интегрирования будут v_{x0} и v_{x1}, т. е. скорости, соответствующие времени $t = 0$ $t = t_1$. Проекция X постоянной силы F есть постоянная величина, поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Интеграл от $d(mv_x)$ равен mv_x, таким образом:

$$m\,|v_x|_{v_{x0}}^{v_{x1}} = X\,|t|_0^t.$$

После подстановки пределов интегрирования получаем:

$$mv_{x1} - mv_{x0} = Xt_1 = \mathrm{I}_x. \quad (169)$$

По аналогии в проекциях на ось y имеем:

$$mv_{y1} - mv_{y0} = Yt_1 = I_y. \qquad (170)$$

Уравнения 169 и 170 говорят о том, что *изменение проекции количества движения точки на какую-либо ось равно проекции на ту же ось импульса силы, действующей на точку за то же время.*

Это положение и есть теорема о количестве движения материальной точки. В случае прямолинейного движения точки вдоль оси x теорема выражается одним уравнением (169).

Предполагалось, что речь идет о свободной материальной точке. Но все сказанное можно отнести и ко всякой несвободной материальной точке, движение которой ограничено связями, мысленно освобождая ее от связей и заменяя их действие реакциями этих связей.

Теорема о количестве движения точки дает возможность решать такие задачи, встречающиеся в механике спортивных движений, в которых устанавливается зависимость между массой (или весом) материальной точки и ее скоростью в начальный и конечный моменты движения, между силой и временем ее действия.

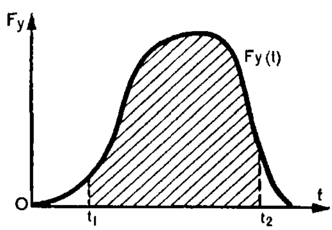


Рис. 150.

Предполагалось, что сила F и ее проекция на любую из осей постоянны. В действительности при решении многих спортивных задач сила изменяется со временем: $F = f(t)$. На рис. 150 дана проекция силы F на вертикальную ось при отталкивании спринтера от стартовых колодок. В этом случае проекция импульса силы на ось y будет равна:

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)\, dt. \qquad (171)$$

Площадь, описанная кривой $F_y(t)$, равна определенному интегралу (171). Выражение 170 для этого случая может быть записано:

$$mv_{y1} - mv_{y0} = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)\, dt;$$

поскольку при начале отталкивания скорость v_{y0} была равна нулю, имеем:

$$mv_{y1} = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)\, dt.$$

Следовательно, конечная скорость после отталкивания зависит только от величины $\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$ и не зависит от формы кривой импульса.

На этот идеализированный случай, когда не учтен ряд связей, не всегда можно ориентироваться при решении практических задач, в том числе и при анализе фазы отталкивания в спортивных локомоциях.

Пример XIV. 1. Лыжник, подойдя к спуску, имел скорость $v_0 = 1{,}5$ *м/сек*; на спуск он затратил 2 *сек*. Определить скорость спортсмена в конце спуска, если его вес с лыжами $Q = 80$ *кГ*, угол α равен 30°. Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение. Так как вес Q тела уравновешивается нормальной реакцией плоскости скольжения, то равнодействующей всех сил, действующих на данное тело при его движении по гладкой плоскости, будет приложенная к нему сила Q_x, являющаяся составляющей силы Q и равная $X = Q_x = Q\sin\alpha = 80 \cdot 0{,}5 = 40$ *кГ* (395 *н*).

Применяя теорему о количестве движения, можно написать:

$$mv_1 - mv_0 = Xt, \text{ откуда:}$$

$$v_1 = \frac{mv_0 + Xt}{m} = 1{,}5 + 10 = 11{,}5 \text{ м/сек}.$$

Пример XIV. 2. На Ладожском озере среди юношей было развито катание на коньках с парусом. Пусть конькобежец движется по гладкому льду со скоростью $v_0 = 1$ *м/сек*. В этот момент порыв ветра (со скоростью 10 *м/сек*) действует на конькобежца и парус в течение 3 *сек*. Используя данные табл. 19, определить скорость конькобежца (v) к концу третьей секунды, если известно, что парус имеет площадь 1,5 $м^2$ и поставлен перпендикулярно направлению ветра; вес конькобежца $Q = 68{,}5$ *кГ*. Сопротивлением коньки — лед можно пренебречь.

Таблица 19

Справочная таблица

Характер ветра	Скорость ветра (*м/сек*)	Сила, действующая на 1 $м^2$ поверхности (*кГ*)	(*н*)
Очень слабый	0,50	0,040	0,395
	1,00	0,140	1,38
	2,00	0,540	5,32
Слабый	3,00	1,050	10,4
	4,0	2,170	21,2
	5,0	2,910	28,7
	6,0	4,870	48,0
	8,0	6,430	63,5
Сильный	10,0	13,540	134,0
	14,0	23,000	228,0
	20,0	46,520	460,0

Решение. Можно применить формулу:

$$mv_{x1} - mv_{x0} = Xt,$$

где в данном случае $v_{x0} = v_0 = 1$ *м/сек*; $v_{x1} = v_1$; $X = F$.
Искомая скорость v_1 определяется так:

$$v_1 = \frac{Xt}{m} + v_0.$$

При площади паруса 2 $м^2$ и скорости ветра 10 *м/сек*.

$$F = 13{,}54 \cdot 1{,}5 = 20{,}3\ кГ\ (200\ н),$$

Определяем искомую скорость:

$$v_1 = \frac{20{,}3 \cdot 3}{\frac{68{,}5}{9{,}8}} + 1 = 9{,}7\ м/сек = 35\ км/час.$$

Скорость 9,7 *м/сек* несколько завышена, потому что не были учтены силы сопротивления.

Пример XIV. 3. На рис. 151 дана кривая силы отталкивания спринтера от колодок, полученная на тензодинамометрической установке. Определить начальную скорость безопорного движения v_1, если вес спортсмена $Q = 60$ *кГ*.

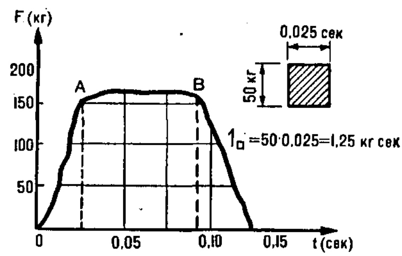


Рис. 151.

Решение. Полученная кривая почти симметрична и может быть условно принята за трапецию, нижнее основание которой равно 5 *см*, верхнее 3 *см*. Площадь трапеции $\frac{(5+3)}{2} \cdot 3 = 12$ *см*. Единица площади ее 1 $см^2$ соответствует: 50 *кГ*·0,025 *сек*.= 1,25 *кГсек*. Вся площадь трапеции соответствует: 1,25·12 $см^2$= 15 *кГсек* (148 *нсек*). Поэтому:

$$I = \int_0^{0,125} F dt = 15 кГсек.$$

Применяя уравнение 169, получим:

$$mv_1 - mv_0 = \int F dt.$$

Так как $v_0 = 0$, а $\int F dt = 15$ *кГсек*, то $mv_1 = 15$ *кГсек*. Приняв

$$m = \frac{60}{9{,}8} \cong 6\ т.\ е.\ м.,\ \text{получим:}\ v_1 = \frac{15}{m} \cong \frac{15}{6} = 2{,}5\ м/сек.$$

Пример XIV. 4. Человек прыгает с высоты $h = 2{,}3$ *м* без начальной скорости. Амортизационная фаза приземления длится $t =$

$=$ 0,10 *сек.* (время гашения скорости до 0). Определить среднюю величину реакции опоры.

Р е ш е н и е. На тело действуют силы: сила тяжести Q, направленная вниз по вертикали, и реакция опоры N, которая изменяется в течение 0,1 *сек.* и также направлена по вертикали, но вверх.

Используя уравнение 169, получим:

$$mv_1 - mv_0 = \mathrm{I} = Xt.$$

Начальная скорость v_0 зависит от высоты площадки над уровнем положения центра тяжести человека. (Среднее значение его 80 *см*). Поэтому:

$$h' = 2{,}30 - 0{,}80 = 1{,}50 \text{ м};$$

$$v_0 = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}50} = 5{,}45 \text{ м/сек}.$$

Сила, действующая на человека, равна: $X = Q - N$. Подставляя это значение в основную формулу, будем иметь:
$mv_1 - mv_0 = (Q - N)t$. Отсюда:

$$N = \frac{mv_0}{t} + Q.$$

Подставив $Q = 70$ *кГ*, $m = \frac{70}{g} = 7$ *т. е. м.* в это равенство, получим:

$$N = \frac{7 \cdot 5{,}45}{0{,}1} + 70 = 451{,}5 \text{ кГ } (4450 \text{ н}).$$

Отношение $\frac{N}{Q} = \frac{451{,}5}{70} = 6{,}45$ носит название среднего коэффициента динамичности. На величину реакции опоры N значительное влияние оказывает время приземления. Снижение перегрузок достигается путем применения различных подстилок, матов, способных деформироваться в момент приземления и тем самым удлинять его время.

§ 68. Работа

Работа является эффектом действия силы, выражающимся в изменении кинетической энергии точки или тела.

Если точка приложения постоянной силы $\overline{F}$ движется по прямой, совпадающей с линией действия силы, то работа этой силы равна произведению ее модуля F на длину пути S, пройденного точкой, взятому с определенным знаком (плюс или минус).

Если работу обозначить через A, то

$$A = FS \quad \text{или} \quad A = -FS. \tag{172}$$

Работа считается положительной, если направление силы совпадает с направлением движения точки, или отрицательной, если сила направлена в сторону, противоположную движению точки.

Размерность работы выражается так: (A) = (сила·длина), а потому работа в технической системе единиц измеряется в килограммометрах (*кГм*), а в системе СИ — в джоулях. 1 *кГм* = 9,8 *дж*.

Предположим, что модуль силы F есть величина переменная. В таком случае для вычисления работы на пути S надо разбить этот путь на n очень малых участков ΔS_1, ΔS_2 ΔS_3, ..., ΔS_n. Значения переменного модуля силы в начале каждого из этих участков обозначим соответственно через F_1, F_2, ..., F_n. Так как участок ΔS_i очень мал, то величину F_i на нем приближенно можно считать постоянной (с тем большей точностью, чем меньше ΔS_i). Поэтому элементарная работа на пути ΔS_i, согласно равенству 172, будет равна:

$$F_i \Delta S_i \quad \text{или} \quad -F_i \Delta S_i \tag{173}$$

Взяв сумму этих элементарных работ и переходя затем к пределу при $\Delta S_i \to 0$ и $n \to \infty$, получим работу переменной силы на конечном пути S. В пределе эта сумма выразится определенным интегралом и, следовательно, будет:

$$A = \lim \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta S_i = \int_0^S F dS. \tag{174}$$

Это равенство означает, что работа численно может характеризоваться площадью, ограниченной линией $F = F(S)$, осью абсцисс и ординатами (рис. 152).

Работа силы тяжести. Пусть материальная точка M весом P переместилась по некоторой криволинейной траектории из положения M_1 (x_1, y_1, z_1) в положение M_2 (x_2, y_2, z_2) (рис. 153, *а*). Проекции силы P на координатные оси будут равны: $X = 0$, $У = 0$ и $Z = -P$ (ось z направлена по вертикали вверх). Следовательно, элементарная работа этой силы будет равна: $Xdx + Xdy + Zdz = -Pdz$, а работа на конечном пути M_1M_2 равна:

$$A_g = -\int_{z_1}^{z_2} Pdz = P(z_1 - z_2).$$

Полагая, что $z_1 - z_2 = h$, получим

$$A_g = Ph. \tag{175}$$

Отсюда следует, что работа силы тяжести, действующей на материальную точку, не зависит ни от длины пути, ни от вида траектории этой точки и равна произведению ее веса на разность ее высот в начальном и конечном положениях, причем эти высоты отсчитываются от произвольно выбранной горизонтальной плоскости.

Работа сил, приложенных к вращающемуся телу. Элементарная работа силы F (рис. 153, *б*) будет равна: $dA = FdS = Fhd\varphi$.

Здесь $dS = hd\varphi$, где $d\varphi$ — угол поворота. Но Fh — есть вращающий момент, поэтому $dA = M_{вр}d\varphi$.

Следовательно, при повороте на конечный угол φ работа будет равна: $A = \int\limits_0^{\varphi} Md\varphi$, а в случае постоянного момента

$$A = M\varphi. \tag{176}$$

Эта формула аналогична формуле 175; здесь роль силы играет вращающий момент, а путь определяется угловым смещением.

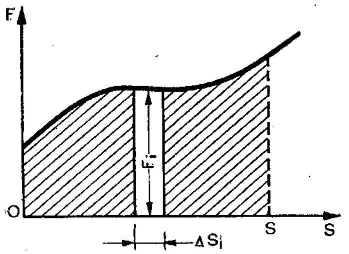


Рис. 152.

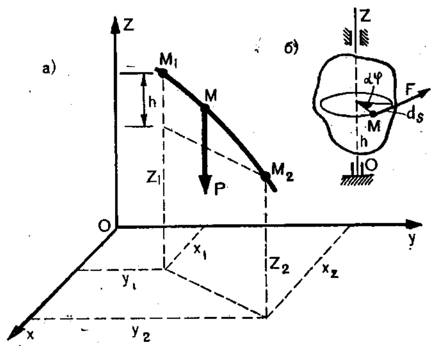


Рис. 153.

Работа силы трения. Если точка весом P движется прямолинейно по негладкой горизонтальной плоскости, то работа силы трения на пути S выразится так:

$$A_{тр} = -fPS, \tag{177}$$

где f — коэффициент трения.

Работа деформации упругого тела. На рис. 154 показан график удлинения упругой пружины в зависимости от приложенной внешней силы. Работа внешней силы численно равна работе внутренних упругих сил и определяется площадью заштрихованного на рисунке треугольника.

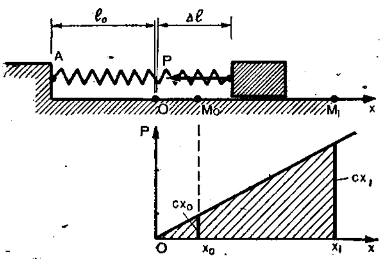


Рис. 154.

Поэтому:

$$A_{упр} = \frac{1}{2} P\Delta l. \tag{178}$$

Упругую силу по закону Гука можно выразить через удлинение Δl и жесткость пружины c:

$$P = c\Delta l. \qquad (179)$$

Жесткость пружины c — это сила, которую нужно приложить к пружине, чтобы удлинить ее на единицу длины. Размерность жесткости: $[c] = \left[\frac{\textit{сила}}{\textit{длина}}\right]$. Таким образом, жесткость измеряется в *кГ/м*; *кГ/см* или (в системе СИ) — в *н/м*. Используя выражение 179, работу деформации упругого тела можно вычислить по формуле:

$$A_{\text{упр}} = {}^1/_2 c\Delta l^2. \qquad (180)$$

Понятие о работе деформации весьма важно для анализа механизма мышечного сокращения.

§ 69. Потенциальная и кинетическая энергия

Одной из основных характеристик движения материи является энергия. *Под энергией тела понимают способность его совершать работу*. Различают два вида механической энергии: *потенциальную и кинетическую*.

Энергия, зависящая только от взаимного расположения тел, называется потенциальной (от латинского слова *potentatus*, что значит скрытая, возможная; в данном случае — скрытая до какого-то момента). Она измеряется той работой, которую тело может совершить при перемещении его из данного положения в какое-либо другое. Например, тело весом Q, находящееся на высоте h над поверхностью земли, обладает относительно этой поверхности потенциальной энергией, равной произведению Qh. Данная величина равна работе, которую тело может совершить, перемещаясь с высоты h на уровень поверхности земли. В этом случае работа совершается силой тяжести.

Но система может обладать потенциальной энергией и в том случае, если при изменении ее положения действуют другие силы, например силы упругости. Потенциальной энергией обладает упругое деформированное тело, например: растянутая или сжатая пружина, напряженная мышца и т. д. Силы упругости, возникающие при деформации тела, могут совершить определенную работу в процессе восстановления формы тела. Так, изогнутый фибергласовый шест обладает запасом потенциальной энергии, которую спортсмен может использовать, чтобы увеличить высоту прыжка.

Кинетической энергией называется энергия тела, зависящая от его механического движения. Она измеряется той работой, которую движущееся тело может совершить при его затормаживании, и зависит только от массы и скорости тела.

Кинетическая энергия имеет ту же размерность, что и работа силы. В технической системе единиц кинетическая энергия измеряется в килограммометрах (*кГм*), а в системе СИ — в джоулях (*дж*).

§ 70. Теорема о кинетической энергии материальной точки

Пусть материальная точка M с массой m под действием приложенной к ней силы F движется по прямой (рис. 155). Сила F сообщает точке ускорение a. Векторы силы $\overline{F}$ и ускорения $\overline{a}$ всегда совпадают по направлению, в данном случае это относится к направлению вектора $\overline{v}$ скорости точки. В результате действия силы F скорость точки M_1 возрастает.

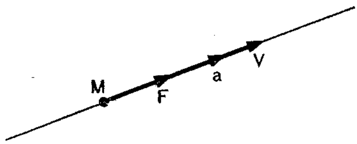


Рис. 155.

Численное значение a равно производной от численной величины скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt}. \qquad (181)$$

Выражая a через $\frac{dv}{dt}$ и умножая обе части равенства на бесконечно малое перемещение dS точки M, получим

$$m\frac{dv}{dt}dS = FdS. \qquad (182)$$

Левую часть этого равенства можно переписать следующим образом:

$$m\frac{dv}{dt}dS = m\frac{dS}{dt}dv = mvdv.$$

Известно, что производная $\frac{dS}{dt}$ равна модулю скорости точки. Таким образом, равенство (182) принимает вид:

$$m\,\overline{v}dv = \overline{F}\,dS.$$

Уже говорилось, что под действием силы F скорость, присущая точке M, возрастает; при этом с перемещением точки M, сила F производит некоторую работу.

Интегрируя обе части данного равенства, выбираем пределы интегрирования от v_0 (что соответствует модулю начальной скорости точки, когда путь S, пройденный ею, равен нулю) до конечной скорости точки v (что соответствует моменту, когда длина пройденного точкой пути равна S). Будем иметь:

$$\int_{v_0}^{v} mvdv = \int_{0}^{S} FdS.$$

Интеграл, стоящий в правой части данного равенства, представляет собой работу A силы F, приложенной к точке на ее пути, равном

S. Проведя интегрирование в заданных пределах, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \qquad (183)$$

Это равенство говорит о том, что *приращение кинетической энергии материальной точки на некотором пути равно работе приложенной к ней силы на том же пути*. Данная формулировка и является теоремой о кинетической энергии материальной точки.

Если движение материальной точки совершается под действием не одной, а нескольких сил, приложенных к ней, то под работой A в уравнении 183 следует понимать работу равнодействующей этих сил.

Если под действием каких-либо сил, например сил сопротивления, приложенных к данной материальной точке, она останавливается (конечная скорость ее $v = 0$), уравнение 183 принимает вид:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Представляет интерес произвести анализ уравнения

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$$

Допустим, что на тело действуют две противоположно направленные силы: сила тяги $F_{тяг}$ и сила сопротивления $F_{сопр}$. При переходе тела из точки B в точку C будет затрачена работа, равная $F_{тяг}\, S$; одна часть этой работы будет израсходована на преодоление сопротивления ($F_{сопр}\, S$), а другая — на наращивание скорости, так как в точке C скорость v будет больше скорости v_0 (в точке B). В связи с этим, если работа приложенных к точке движущих сил будет больше работы сил сопротивления, то правая часть равенства будет положительной. Следовательно, и левая часть равенства должна быть положительной. Таким образом, в данном случае кинетическая энергия и скорость точки увеличиваются.

Если работа движущих сил будет равна работе сил сопротивления, то правая часть равенства будет равна нулю. В этом случае кинетическая энергия и скорость точки остаются неизменными.

Если же работа движущих сил окажется меньше работы сил сопротивления, то правая часть равенства будет отрицательной. Следовательно, и левая часть равенства должна быть отрицательной. Отсюда следует, что кинетическая энергия и скорость точки уменьшаются.

Теорема о кинетической энергии точки позволяет определить работу при переходе точки из одного положения в другое даже в тех случаях, когда непосредственное вычисление работы невозможно. Решая задачи с использованием этой теоремы, необходимо знать массу точки и модули ее скорости в начальном и конечном положениях.

Можно решать и другую задачу — найти модуль скорости точки в одном из положений, если известны: работа приложенных к точке сил, ее масса и скорость в другом ее положении.

Пример XIV. 5. Макет гимнаста (рис. 156) опускается из положения I без начальной скорости. Центр тяжести макета находится в точке M на расстоянии $h = 1{,}2$ *м* от грифа перекладины. Вес макета гимнаста $Q = 70$ *кГ*. Определить скорость v_2 центра тяжести макета в положении II. Трением о гриф и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

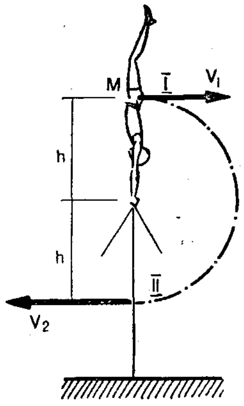


Рис. 156.

Решение. Перемещение точки M из положения I в положение II происходит под действием силы тяжести Q.

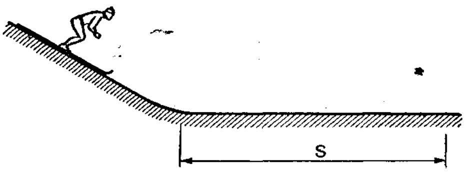


Рис. 157.

По теореме о кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = A.$$

Работа силы тяжести A_g равна: $A_g = 2hQ$.
Скорость v_1 точки M в положении I равна нулю, поэтому:

$$\frac{mv_2^2}{2} = 2hQ;$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{4hQ}{m}} = \sqrt{4hg} = \sqrt{4 \cdot 1{,}2 \cdot 9{,}8} = 6.8 \text{ м/сек}.$$

Точка M движется по окружности с радиусом $r = h = 1{,}2$ *м*. Зная это, можно определить угловую скорость модели:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{h} = \frac{6.8}{2{,}2} = 5{,}66 \text{ рад/сек}.$$

Пример XIV. 6. Лыжник движется под уклон со скоростью 36 *км/час* и переходит на горизонтальную часть пути. Считая силу сопротивления R равной 3.0 *кГ* (пренебрегая всеми другими силами сопротивления), определить, на каком расстоянии S (длина выката и через сколько времени t_1 от начала горизонтального пути спортсмен остановится, если никаких движений для перемещения он не предпринимает и движется только по инерции. Вес лыжника $Q = 80$ *кГ*.

Решение. Лыжника рассматриваем как материальную точку, на которую действуют (рис. 157) силы: Q — сила тяжести и R — сила сопротивления.

Для определения пути выката S применяем теорему о кинетической энергии точки:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

По условию задачи начальная скорость лыжника $v_0 = 36$ *км/час* $= 10$ *м/сек*, конечная скорость $v_1 = 0$. Работа A равна работе силы R, приложенной к лыжнику: $A = RS = 3S$.

Для данного случая уравнение кинетической энергии принимает вид:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -RS.$$

Отсюда:

$$S = \frac{mv_0^2}{2R} = \frac{\frac{80}{9{,}81} \cdot 10^2}{2 \cdot 3} = 136 \text{ м}.$$

Для определения времени (t_1) торможения можно воспользоваться теоремой о количестве движения точки. Приняв направление движения лыжника за направление оси x, напишем уравнение 169: $mv_1 - mv_0 = J_x$.

В данном случае $v_1 = 0$; $v_0 = 10$ *м/сек*. Действующая на лыжника сила, заданная условием, постоянна, поэтому:

$$-J = -mv_0 = -tR;$$

$$t = \frac{mv_0}{R} = \frac{8 \cdot 10}{9{,}8 \cdot 3} = 27{,}2 \text{ сек}.$$

Пример XIV. 7. Мяч брошен под углом к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти скорость мяча в тот момент, когда он поднимется на высоту H.

Решение. На мяч действует только сила тяжести $P = mg$. Работа этой силы при перемещении мяча на высоту H : $A = mgH$. Применяя теорему о кинетической энергии точки, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgH.$$

Отсюда искомая скорость:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gH}.$$

Пример XIV. 8. Груз весом P подвешивается к пружине (рис. 158) и отпускается без начальной скорости. Найти наибольшее расстояние, на которое опустится груз, если жесткость пружины c известна.

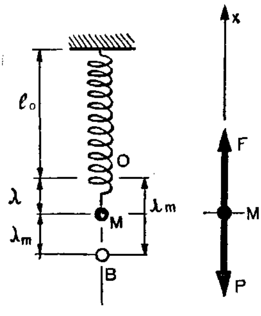


Рис. 158.

Решение. Пусть в начальный момент груз находится в точке O. Промежуточное положение груза обозначим через M, а самое нижнее, соответствующее максимальному удлинению пружины, — через B. Если удлинение пружины до промежуточного положения обозначить через λ, а ее максимальное удлинение через λ_m, то $OM = \lambda$ и $OB = \lambda_m$. На груз действуют две силы: вес P и реакция пружины F, направленная вверх. Сила F определяется по формуле $F = c\lambda$. Так как скорость груза в точках O и B равна нулю, то (по теореме о кинетической энергии) работа сил P и F на пути OB равна нулю:

$$A = -P\lambda_m + \int_0^{\lambda_m} F dS = -P\lambda_m + \int_0^{\lambda_m} c\lambda\, d\lambda = -P\lambda_m + \frac{1}{2} c\lambda_m^2,$$

следовательно,

$$-P\lambda_m + \frac{1}{2} c\lambda_m^2 = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda_m = \frac{2P}{c}.$$

В положении равновесия груза силы P и F равны по модулю. Если статическое удлинение пружины, соответствующее этому положению, обозначить через $\lambda_{ст}$, то $c\,\lambda_{ст} = P$,

откуда $\lambda_{ст} = \dfrac{P}{c}$

и, следовательно, $\lambda_m = 2\lambda_{ст}$.

Замечание. К аналогичному результату можно прийти, рассматривая вместо пружины балку, стержень или нить. Подобные задачи могут встречаться при изучении взаимодействия спортсмена с различными упругими снарядами (перекладиной, брусьями, штангой, шестом и т. п.), а также в механической теории мышечного сокращения.

§ 71. Теорема о моменте количества движения материальной точки

Момент количества движения относительно точки O можно представить так же, как и момент силы, в виде векторного произведения радиуса-вектора $\overline{r}$ на вектор $\overline{mv}$, т. е.

$$K_0 = M_0(\overline{mv}) = \overline{r} \times \overline{mv}. \tag{184}$$

Между моментом количества движения $\overline{mv}$ относительно данной точки O и моментом относительно какой-нибудь оси, проходящей через эту точку, существует такая же зависимость, как и между теми же моментами силы $\overline{F}$. Поэтому проекции вектора K_0 на координатные оси равны моментам количества движения относительно этих осей, т. е.:

$$K_{0x} = m_x(mv); \quad K_{0y} = m_y(mv); \quad K_{0z} = m_z(mv). \tag{185}$$

Теорема моментов доказывается в курсах теоретической механики. Теорема моментов относительно оси гласит: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-нибудь неподвижной оси равна моменту действующей на эту точку силы относительно той же оси.*

Эту теорему выражают уравнения:

$$\frac{dK_x}{dt} = m_x(F),$$
$$\frac{dK_y}{dt} = m_y(F), \tag{186}$$
$$\frac{dK_z}{dt} = m_z(F).$$

Теорема моментов относительно точки формулируется так: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-нибудь неподвижного центра O равна моменту действующей на эту точку силы относительно того же центра:*

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0. \tag{187}$$

§ 72. Законы сохранения энергии и движения материальной точки

Законы сохранения энергии и движения материальной точки можно рассматривать как следствия теорем о кинетической энергии, количестве движения и моменте количества движения.

Закон сохранения энергии: *при движении материальной точки в потенциальном силовом поле сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной.* Математическое выражение этого закона:

$$\frac{mv^2}{2} + \text{П} = \text{const}. \qquad (188)$$

Закон сохранения количества движения: *если на точку не действуют никакие внешние силы, то количество движения ее остается постоянным (сохраняется).* Действительно, если в уравнении 169 $X = 0$, то $mv_{1x} - mv_{0x} = 0$,
или

$$mv_{1x} = mv_{0x}. \qquad (189)$$

Закон сохранения момента количества движения: *если момент действующей силы относительно какой-либо неподвижной оси все время равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно этой оси остается постоянным.* Действительно, если в выражении 187 $M_0 = 0$, то

$$K_0 = \text{const}. \qquad (190)$$

(если производная равна нулю, то функция постоянна).

Глава XV.

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

§ 73. Главный вектор и главный момент внутренних сил системы

На рис. 159 представлена простая система, состоящая из трех точек: A, B и C. Известно, что силы взаимодействия между всякими двумя материальными точками всегда равны по модулю и противоположны по направлению. Сила F^i_{AB}, с которой точка A действует на точку B, будет, очевидно, равна по модулю и противоположна по направлению силе F^i_{BA}, с которой точка B действует на точку A. Сила F^i_{BC}, с которой точка B действует на точку C, будет равна по модулю и противоположна по направлению силе F^i_{CB}, с которой точка C действует на точку B. В свою очередь, $F^i_{CA} = -F^i_{AC}$. Комбинируя попарно силы взаимодействия между всеми точками данной системы (внутрен-

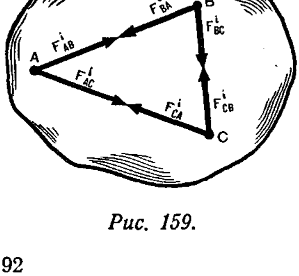


Рис. 159.

ние силы системы), найдем, что *геометрическая сумма всех внутренних сил всякой системы (т. е. их главный вектор) равна нулю:*

$$\sum \overline{F}_k^i = 0. \qquad (191)$$

Алгебраическая сумма проекций на любую ось всех внутренних сил системы также равна нулю:

$$\sum X_k^i = 0; \quad \sum Y_k^i = 0; \quad \sum Z_k^i = 0. \qquad (192)$$

Полученные выводы имеют большое практическое значение и значительно упрощают исследование вопросов, связанных с системой, в том числе с твердым телом. В ряде случаев, рассматривая движение тела, внутренние силы не учитывают.

Аналогично можно показать, что *векторная сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил относительно любого центра и оси равняется нулю:*

$$\sum m_x(F^i) = 0; \quad \sum m_y(F^i) = 0;$$
$$\sum m_z(F^i) = 0; \quad \sum m_0(F^i) = 0. \qquad (193)$$

Эти уравнения показывают, что момент внутренних сил не сказывается на движении системы в целом.

§ 74. Закон сохранения количества движения системы

Количеством движения системы называется мера механического движения ее, равная геометрической сумме векторов количеств движения всех точек системы:

$$\overline{J} = \sum \overline{m_i v_i}, \qquad (194)$$

где m_i — масса одной какой-либо точки системы,

$\overline{v}_i$ — вектор скорости этой точки.

Так как количество движения точки или отдельного тела, входящего в систему, является вектором, то можно говорить о проекции этого вектора на какую-либо из осей координат. Известно, что геометрическая сумма векторов на любую ось равна алгебраической сумме проекций на ту же ось составляющих векторов, поэтому:

$$J_x = \sum m_k v_{kx}. \qquad (195)$$

Проекция количества движения системы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций на эту ось количеств движения всех точек системы.

Как известно, для одной материальной точки производная проекции количества движения на какую-либо ось равна проекции силы на ту же самую ось, т. е.:

$$\frac{d}{dt} mv_x = X, \tag{196}$$

где X — проекция равнодействующей всех сил, действующих на точку.

Рационально все силы, действующие на точку системы, разделить на внешние и внутренние. Проекцию на ось равнодействующей внешних сил, приложенных к какой-либо i-й точке системы с массой m_i, обозначим через X_i^e, а проекцию на ту же ось равнодействующей внутренних сил, приложенных к той же точке, через X_i^i, проекцию на ось скорости данной точки обозначим через v_{ix}. После этого выражение 196 можно написать так:

$$\frac{d}{dt} m_i v_{ix} = X_i^e + X_i^i.$$

Для всей системы в целом, суммируя проекции количества движения отдельных ее элементов, получим:

$$\sum \frac{d}{dt} m_i v_{ix} = \sum X_i^e + \sum X_i^i. \tag{197}$$

Так как сумма проекций на любую ось всех внутренних сил равна нулю ($\Sigma X_i^i = 0$), равенство 197 можно записать так:

$$\sum \frac{d}{dt} m_i v_{ix} = \sum X_i^e.$$

Левая часть его — сумма производных по времени от $m_i v_{ix}$. Зная, что она равна производной от суммы слагаемых, полученное выражение можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i v_{ix} = \sum X_i^e. \tag{198}$$

Иначе говоря, *производная от проекции количества движения системы на какую-либо неподвижную ось равна сумме проекций на ту же ось всех внешних сил, действующих на систему.*

Если сумма проекций внешних сил на какую-либо ось, например на ось Ox, равна нулю, то $\Sigma X_i^e = 0$,

$$\frac{d}{dt} \sum m_i v_{ix} = 0.$$

Такое равенство возможно, если производная взята от *постоянной величины*.

Иначе говоря, в данной ситуации дифференцируемое выражение $\Sigma m_i v_{ix}$ должно быть постоянной величиной:

$$\sum m_i v_{ix} = \text{const}. \tag{199}$$

Если *сумма проекций всех внешних сил системы на какую-либо неподвижную ось равна нулю, то проекция на ту же ось количества движения системы является величиной постоянной.*

В то же время геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, может при этом быть и не равной нулю. Например, если на систему действуют только вертикальные силы, то сумма их проекций на горизонтальную ось равна нулю, а их геометрическая сумма не равна нулю. Если геометрическая сумма всех внешних сил системы равна нулю ($\Sigma F_i^e = 0$), то обязательно будет равна нулю и сумма проекций этих сил на любую ось. Следовательно, в этом случае будут постоянными проекции количества движения системы на любую ось.

Из рассмотренных положений, представленных уравнениями 197, 198 и 199, вытекает закон сохранения количества движения системы: *если на систему не действуют никакие внешние силы, то количество движения системы остается постоянным (сохраняется).* Из этого закона следует, что *внутренние силы не могут изменить общего количества движения системы.*

Если рассматривать тело спортсмена, выполняющего прыжок в длину в направлении оси x, как самостоятельную систему, то после отрыва от земли на него действует, по существу, только одна внешняя сила тяжести — Q, остающаяся во все время свободного полета постоянной.

В этом случае $$\frac{d}{dt}\sum m_i v_{ix} = 0.$$

Следовательно, движение тела в свободном полете определяется целиком силой тяжести и начальной скоростью тела. Внутренние силы не могут изменить количества движения этой системы.

Винтовка и пуля — одна система; давление пороховых газов при выстреле будет внутренней силой. Сообщая некоторое количество движения пуле, оно одновременно сообщает винтовке такое же количество движения, направленного в противоположную сторону (это вызывает явление, называемое отдачей винтовки). Сумма возникших количеств движения при выстреле будет равна нулю.

В разговоре о количестве движения системы предполагалось, что она изолирована (замкнута), т. е. не соприкасается с другими телами, не принадлежащими к данной системе. В неизолированных (разомкнутых) механических системах внутренние силы, вызывая движение отдельных частей системы, вследствие взаимодействия с внешними телами могут вызвать внешние силы в виде реакций связей, а они, в свою очередь, изменить количество движения системы.

Пример XV. 1. Из спортивной винтовки весом $Q_1 = 4{,}5$ *кГ*, расположенной горизонтально, вылетает пуля весом $Q_2 = 0{,}007$ *кГ* со скоростью $v_2 = 450$ *м/сек*. Определить отдачу винтовки (ее скорость), если она неплотно приложена к плечу.

Решение. До выстрела скорость винтовки и пули была равна нулю, следовательно, и количество движения системы (винтовка и пуля) было равно нулю:

$$\sum m_i v_i = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0.$$

Давление пороховых газов в канале винтовки является внутренней силой, действующей на систему. Внешние силы — это вес винтовки, пули и реакция опоры. Эти силы вертикальные, поэтому сумма их проекций на горизонтальную ось Ox равна нулю: $\Sigma X_i^e = 0$.

В этом случае сумма проекций количеств движения на ось Ox должна быть неизменной как до выстрела, так и после него. До выстрела эта величина была равна нулю, она сохранится и после выстрела: $\sum m_i x_i = m_2 v_2 + m_i v_i = 0$.

$$\frac{4{,}5}{g} v_1 + \frac{0{,}007 \cdot 450}{g} = 0.$$

$$v_1 = -\frac{0{,}007 \cdot 450}{4{,}5} = 0{,}7 \text{ м/сек}.$$

§ 75. Теорема о кинетической энергии системы

Кинетической энергией системы называется сумма кинетической энергии всех материальных точек системы (кинетическую энергию системы принято обозначать буквой T):

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \qquad (200)$$

Для одной материальной точки, согласно теореме о кинетической энергии материальной точки,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

где $\frac{mv^2}{2}$ и $\frac{mv_0^2}{2}$ — кинетическая энергия точки соответственно в конце и в начале некоторого пути, A — работа силы, приложенной к точке на том же пути.

Для всех точек системы

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{0k}^2}{2} = \sum A.$$

Обозначая кинетическую энергию системы $\sum \frac{m_k v^2{}_k}{2}$ в ее начальном положении через T_0 и кинетическую энергию системы $\sum \frac{m_k v_k^2}{2}$ в ее конечном положении через T, получим:

$$T - T_0 = \sum A. \qquad (201)$$

Изменение кинетической энергии системы при перемещении ее из одного положения в другое равно сумме работ всех заданных сил, действовавших на систему при ее перемещении. Под заданными силами понимаются как внешние, так и внутренние силы. При определении суммы работы ΣA, произведенной всеми силами, необходимо иметь в виду следующее.

1. *При всяком перемещении твердого тела сумма работы его внутренних сил равна нулю, так как в этой системе расстояния между ее точками не изменяются.*

2. *Сумма работы реакций идеальных связей при всяком перемещении системы, допускаемом этими связями, равна нулю.*

Например, реакция связи тела, лежащего на идеально гладкой горизонтальной поверхности, направлена по нормали к перемещению тела, поэтому

$$A = R^n S \cos 90^\circ = 0.$$

Если же связи не идеальные, т. е. трением в них пренебречь нельзя, то в сумму работы сил, приложенных к системе, включается и работа сил трения.

При движении в свободном полете тело человека принципиально нельзя рассматривать как твердое тело. Но очень часто ради упрощения это все же делают. Кроме того, при больших скоростях движения (хотя явных связей как будто бы и нет) необходимо учитывать сопротивление воздушной среды.

§ 76. Кинетическая энергия твердого тела при различных видах движения

При решении многих задач приходится определять кинетическую энергию движущегося твердого тела. Поэтому этот вопрос имеет смысл рассмотреть самостоятельно при различных видах движения твердого тела.

Поступательное движение. При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек в каждый данный момент равны между собой. Поэтому кинетическая энергия тела равна:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k.$$

Сумма масс всех точек тела Σm_k есть масса твердого тела M, поэтому

$$T = \frac{Mv^2}{2}. \qquad (202)$$

Кинетическая энергия поступательно движущегося твердого тела равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.

По формуле 202 вычисляется также и кинетическая энергия любой системы, движущейся так, что модули скоростей всех ее точек одинаковы. (Например, кинетическая энергия тонкого обруча, вращающегося около центральной оси.)

Вращательное движение. При вращении тела вокруг неподвижной оси модуль v_k скорости любой k-й точки тела равен произведению угловой скорости ω тела на расстояние r_k данной точки от оси вращения.

Кинетическая энергия тела:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega r_k)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 .$$

Сумма $\Sigma m_k r_k^2$ —момент инерции (J) тела относительно его оси вращения (подробнее см. § 85). Следовательно, при данном движении тела его кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (203)$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости.

Плоскопараллельное движение. При плоскопараллельном движении твердого тела все точки его движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Если заданы угловая скорость ω фигуры и скорость $\overline{v_c}$ центра тяжести тела, то можно найти положение мгновенного центра скоростей фигуры. Он лежит, как известно (см. § 54), на перпендикуляре, восстановленном из какой-либо точки фигуры к направлению скорости этой точки, на расстоянии, равном отношению линейной скорости данной точки к угловой скорости фигуры.

Плоскопараллельное движение тела можно рассматривать в каждый данный момент времени как вращательное движение вокруг мгновенной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей фигуры.

Таким образом, для данного момента времени кинетическую энергию тела можно определить как кинетическую энергию вращательного движения тела по формуле:

$$T = \frac{J_p \omega^2}{2}, \qquad (204)$$

где J_p — момент инерции тела относительно его мгновенной оси вращения, проходящей через точку P (рис. 160).

Однако применять формулу 204 для определения кинетической энергии тела при его плоскопараллельном движении неудобно, так как для каждого момента времени необходимо определять положение мгновенной оси вращения тела и вычислять момент инерции его, соответствующий данному положению тела. Применяя теорему о моментах инерции относительно параллельных осей (см. § 87), можно написать:

$$J_p = J_c + M(PC)^2 = J_c + M\frac{v_c^2}{\omega^2}, \qquad (205)$$

где J_c — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела и параллельной мгновенной оси, M — масса тела, PC — расстояние между данными параллельными осями, равное $\frac{v_c}{\omega}$.

Подставив в формулу 204 значение J_p, взятое из уравнения 205, найдем:

$$T = \frac{J_p\,\omega^2}{2} = \left(J_c + M\frac{v_c^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{2}.$$

Раскрыв скобки и произведя сокращение, получим:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{J_c\,\omega^2}{2}.$$

В правой части этого выражения находятся два слагаемых $\frac{Mv_c^2}{2}$ и $\frac{J_c\,\omega^2}{2}$, из которых первое определяет кинетическую энергию тела при его поступательном движении, а второе — при вращательном. Поэтому можно сказать, что *кинетическая энергия тела при его плоскопараллельном движении равна кинетической энергии тела при поступательном движении со скоростью его центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.*

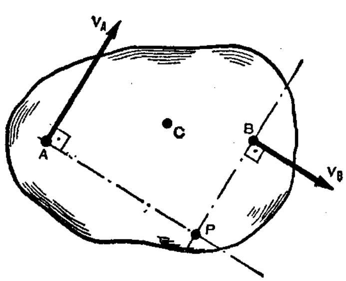


Рис. 160.

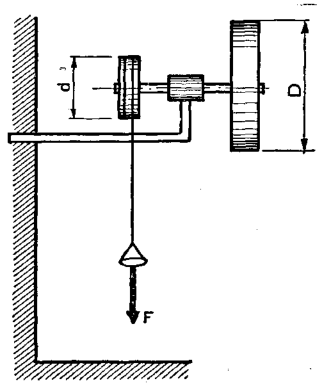


Рис. 161.

Пример XV. 2. На консолях укреплено тренировочное устройство (рис. 161), состоящее из маховика и шкива, на который намотан канат. С какой силой следует тянуть канат, чтобы через 10 оборотов маховик начал вращаться со скоростью 90 *об/мин.*? Маховик изготовлен из чугуна, диаметр маховика $D = 40$ *см*, толщина $\delta = 10$ *см*, диаметр шкива $d = 20$ *см*. Весом шкива и сопротивлением трения можно пренебречь.

Решение. Определить искомое усилие можно применяя теорему о кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A.$$

Кинетическую энергию маховика в конце рассматриваемого периода его работы находим по формуле 204: $T = \frac{J\omega^2}{2}$. Так как в начальный момент маховик был неподвижен, его кинетическая энергия была:

$$T_0 = \frac{J\omega_0^2}{2} = 0,$$

значит $T = \sum A$. Следовательно, кинетическая энергия маховика изменяется только за счет приложенного к нему постоянного вращающего момента, работа которого, согласно формуле 176, равна:

$$A = M_{вр}\varphi = F\frac{d}{2}\varphi,$$

так как $M_{вр} = F\frac{d}{2}$, где $\frac{d}{2}$ — плечо силы F.

Таким образом, уравнение, определяющее кинетическую энергию системы, принимает вид:

$$\frac{J\omega^2}{2} = F\frac{d}{2}\varphi.$$

Отсюда вращающий момент:

$$M_{вр} = F\frac{d}{2} = \frac{J\omega^2}{2\varphi}; \qquad F = \frac{J\omega^2}{d\varphi}.$$

Момент инерции J маховика определяем по формуле:

$$J = \frac{MR^2}{2};$$

$$R = \frac{D}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ см} = 0{,}2 \text{ м}.$$

$$M = \frac{\rho}{g}\cdot\frac{\pi D^2}{4}\delta = \frac{7800}{9{,}8}\pi\cdot\frac{(0{,}40)^2}{4}\cdot 0{,}10 = 10\ (т.е.м.)$$

Следовательно, момент инерции:

$$J = \frac{MR^2}{2} = \frac{10\cdot(0{,}2)^2}{2} = 0{,}2\ кГм\cdot сек^2.$$

Угловая скорость маховика:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 90}{30} = 3\pi \text{ } рад/сек.$$

Угол, на который повернется маховик, сделав 10 оборотов, равен: $\varphi = 2\pi 10 = 20\pi$ *радиан*. Используя эти данные, определяем силу, с которой надо тянуть канат, чтобы маховик начал вращаться со скоростью 90 *об/мин*:

$$F = \frac{J\omega^2}{d\varphi} = \frac{0{,}2\,(3\pi)^2}{0{,}2 \cdot 20\pi} = 1{,}4 \text{ } кГ \text{ } (13{,}8 \text{ } н).$$

Подобные устройства могут быть использованы в тренировочном процессе. Прямая динамометрия может быть заменена учетом показаний счетчиков оборотов и электросекундомеров.

Пример XV. 3. При исполнении сальто гимнаст вращается около оси, проходящей через центр тяжести его тела с угловой скоростью $\omega = 14$ *рад/сек*. Момент инерции тела относительно этой оси равен $J = 1{,}8$ *кГмсек*^{2}. Какова кинетическая энергия тела? На какую высоту можно было бы повысить центр тяжести тела спортсмена, если бы кинетическую энергию вращения использовать для этой цели? Вес тела гимнаста равен 70,5 *кГ*.

Решение. Применяя формулу для определения кинетической энергии вращающегося тела, находим:

$$T = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{1{,}8 \cdot (14)^2}{2} = 176 \text{ } кГм \text{ } (1740 \text{ } дж).$$

Высоту H подъема центра тяжести можно найти, зная, что работа A, затрачиваемая на подъем, равна QH и должна быть равна T. Отсюда:

$$A = QH = T;$$

$$H = \frac{T}{Q} = \frac{176}{70{,}5} = 2{,}5 \text{ } м.$$

§ 77. Закон сохранения механической энергии системы

В теоретической механике доказывается, что при перемещении системы в потенциальном силовом поле сумма работы сил этого поля равна разности значений силовой функции, соответствующих конечному и начальному положениям системы, т. е.:

$$\sum A_F = \int\limits_{(I)}^{(II)} dU = U_2 - U_1. \tag{206}$$

В качестве примера найдем силовую функцию для поля силы тяжести. Если ось z направим по вертикали вверх, то будем иметь:

$$X_k = Y_k = 0; \quad Z_k = -m_k g \; (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно,

$$dU = \sum_{k=1}^{n} (X_k \, dx_k + Y_k \, dy_k + Z_k \, dz_k) = -\sum_{k=1}^{n} m_k g dz_k =$$

$$= -g \sum_{k=1}^{n} m_k \, dz_k.$$

Интегрируя это выражение, находим:

$$U = -g \sum_{k=1}^{n} m_k z_k + \text{const}.$$

Но, как известно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k z_k = M z_c,$$

где M — масса всей системы и z_c — координата центра тяжести C этой системы, а потому: $U = -Mgz_c + \text{const}$.

Потенциальной энергией, соответствующей данному положению системы, называется работа, совершаемая силами поля F_k при перемещении системы из данного положения в некоторое «нулевое» положение. Если потенциальную энергию обозначить через П, то на основании этого определения и равенства 206 получим:

$$\Pi = U_0 - U. \tag{207}$$

На основании равенств 201 и 207 уравнение, выражающее теорему о кинетической энергии системы, примет вид: $T - T_0 = U_0 - U$. Отсюда

$$T + U = T_0 + U_0 = \text{const}. \tag{208}$$

Это уравнение выражает закон сохранения механической энергии системы: *при движении системы в потенциальном силовом поле сумма кинетической и потенциальной энергии тела, называемая общей механической энергией, остается постоянной (сохраняется).*

§ 78. Закон сохранения момента количества движения (кинетического момента) системы

Аналогично теоремам о моменте количества движения точки (см. § 71) можно доказать две теоремы о моменте количества движения системы.

I теорема. *Производная по времени от кинетического момента системы относительно какой-нибудь неподвижной точки равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно той же точки*, т. е.:

$$\frac{dK}{dt} = M_0^e. \tag{209}$$

II теорема. *Производная по времени от кинетического момента системы относительно какой-нибудь неподвижной оси равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно той же оси*, т. е.:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y;$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z. \tag{210}$$

Допустим теперь, что $M = 0$, тогда $\frac{dK_0}{dt} = 0$; $K_0 =$ const. Последнее равенство выражает закон сохранения момента количества движения системы относительно точки: *если главный момент внешних сил, действующих на систему, относительно данной неподвижной точки все время равен нулю, то кинетический момент системы относительно той же точки остается постоянным.*

Если в формулах 210 $M_x = M_y = M_z = 0$, то $K_x =$ const; $K_y =$ const; $K_z =$ const, т. е. *если главный момент внешних сил, действующих на систему, относительно данной неподвижной оси все время равен нулю, то кинетический момент системы относительно той же оси остается постоянным.* Так формулируется закон сохранения момента количества движения системы относительно оси.

§ 79. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс, или центром инерции, системы материальных точек называется геометрическая точка C, положение которой определяется следующими координатами:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M};$$

$$z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}, \tag{211}$$

где $m_к$ — масса одной произвольной точки системы; $x_к$, $y_к$, $z_к$ — координаты этой точки; $\sum m_к y_к$, $\sum m_к x_к$, $\sum m_к z_к$ — алгебраические суммы, составленные из произведений массы каждой данной системы на соответствующие ее координаты; M — масса всей системы.

От формул, определяющих центр масс тела, легко перейти к формулам, определяющим координаты центра тяжести: так как вес точки q равен mg, достаточно умножить числители и знаменатели правых частей равенств на g:

$$x_c = \frac{\sum q_k x_k}{Q}; \quad y_c = \frac{\sum q_k y_k}{Q};$$

$$z_c = \frac{\sum q_k z_k}{Q}. \tag{212}$$

Из сравнения формул 211 и 212 следует, что *центр тяжести неизменяемой системы совпадает с ее центром масс* (центром инерции). Несмотря на это, понятие центра тяжести системы отлично от понятия центра ее масс.

Центр тяжести неизменяемой системы есть точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести всех материальных точек или тел данной системы. Когда под неизменяемой системой подразумевается тело спортсмена, то имеется в виду, что положение звеньев тела неизменно. Как только поза тела изменилась, сразу же изменяется и положение центра тяжести. Понятие центра тяжести применимо поэтому только к неизменяемым (в какой-то отрезок времени) системам, которые находятся под действием силы тяжести. Иначе обстоит дело с центром масс. Независимо от характера действия сил (для всех скоростей тел, существующих на Земле), масса тела неизменна. И положение центра масс, определяемое формулами 211, зависит только от распределения масс точек и тел, составляющих данную систему, и совсем не зависит от того, какие силы действуют на нее.

Рассмотрим движение системы.

Формулу
$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M},$$

определяющую ординату центра масс системы, можно переписать так:

$$Mx_c = \sum m_k x_k,$$

где M — масса всей системы; x_c — изменяющаяся со временем координата центра масс движущейся системы; m_k — масса одной какой-либо k-й точки или тела системы и x_k — изменяющаяся во времени координата этой точки или центра тяжести тела системы. Беря производные по времени от обеих частей данного равенства, получим:

$$M\frac{dx_c}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m_k x_k = \sum m_k \frac{dx_k}{dt}.$$

Но производная $\frac{dx_c}{dt}$ есть проекция v_{cx} на ось x скорости центра масс, а производная $\frac{dx_k}{dt}$ есть проекция v_{kx} на ту же ось скорости k-й точки или центра тела системы.

Произведя соответствующие замены, получим:

$$\Sigma m_k v_{kx} = M v_{cx}. \tag{213}$$

То же самое будем иметь, если возьмем проекции на какую-либо другую ось. Поэтому можно сказать, что *проекция на какую-либо ось количества движения системы равна проекции на ту же ось количества движения центра масс этой системы, если предположить, что в этом центре сосредоточена вся масса системы.*

Вновь продифференцируем обе части равенства 213. Так как производная $\frac{dv_{cx}}{dt}$ от проекции скорости точки равна проекции на ту же ось ускорения a_{cx} этой точки, получим:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k v_{kx} = M\frac{dv_{cx}}{dt} = Ma_{cx}. \tag{214}$$

С другой стороны, согласно формуле 198, имеем:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k v_{kx} = \Sigma X_k^e. \tag{215}$$

На основании равенств 214 и 215 можно написать:

$$Ma_{cx} = \Sigma X_k^e.$$

По аналогии для двух других координат y_c и z_c центра масс будем иметь:

$$Ma_{cy} = \Sigma Y_k^e,$$
$$Ma_{cz} = \Sigma Z_k^e. \tag{216}$$

Объединяя равенства 215 и 216, получим:

$$\begin{aligned} Ma_{cx} &= \Sigma X_k^e, \\ Ma_{cy} &= \Sigma Y_k^e, \\ Ma_{cz} &= \Sigma Z_k^e. \end{aligned} \tag{217}$$

Левые части равенств 217 представляют собой проекции — произведения массы системы на вектор ускорения ее центра масс; правые части равенств — проекции на координатные оси вектора геометрической суммы всех внешних сил, действующих на систему. Следовательно, уравнения 217 представляют собой одно векторное равенство

$$M\overline{a}_c = \Sigma \overline{F}_k^e, \tag{218}$$

где $\overline{a}_c$ — вектор ускорения центра масс системы, а F_k^e — вектор геометрической суммы всех внешних сил.

Сравнивая полученное уравнение с основным уравнением динамики для отдельной материальной точки, можно усмотреть, что уравнение движения центра масс представляет собой уравнение движения материальной точки массы M, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Теорема о движении центра масс системы формулируется так: *центр масс системы точек или тел движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все действующие на данную систему внешние силы.*

При поступательном движении твердого тела его центр масс, совпадающий с центром тяжести, движется так же, как и все остальные точки этого тела. Поэтому, определив движение центра масс тела, мы тем самым определяем и движение всего тела. Таким образом, при исследовании поступательного движения тела его можно рассматривать как материальную точку, сосредоточив всю массу тела в его центре тяжести и перенеся в нее все внешние силы, действующие на тело.

Если тело движется плоскопараллельно, то можно разложить это сложное движение на поступательное движение вместе с центром тяжести и на вращательное — вокруг центра тяжести. Поступательное движение как часть сложного движения тела может быть определено с помощью уравнения 218. Отсюда следует, что тело можно принимать за материальную точку в случае его непоступательного движения, но только тогда, когда вращательная часть этого движения не рассматривается, например при изучении траектории центра тяжести тела гимнаста, выполняющего акробатические упражнения.

В уравнение 218 движения центра масс внутренние силы системы не входят. Отсюда следует, что внутренние силы системы не влияют на движение ее центра масс.

При движении акробата в безопорном положении на него действует только одна внешняя сила — сила тяжести, остающаяся во время свободного полета постоянной. Поэтому траектория центра тяжести после отталкивания от опоры предопределена действиями акробата на опоре. Внутренние силы механической системы не могут изменить эту траекторию. Изменяя позу тела, они способны только изменить характер вращательного движения около центра тяжести.

Если сумма внешних сил равна нулю, т. е.

$$\Sigma F_k^e = 0,$$

то, как следует из уравнения 218, ускорение центра масс тоже равно нулю: $a_c = 0$.

Следовательно, центр масс движется равномерно прямолинейно или находится в состоянии покоя.

Практически наибольший интерес представляет другой случай, когда геометрическая сумма внешних сил не равна нулю, но сумма проекций этих сил на какую-либо ось равна нулю.

В уравнении

$$Ma_{cx} = \Sigma X_k^e = 0$$

проекция на ось Ox ускорения центра масс системы равна нулю и, следовательно, центр масс вдоль этой оси движется равномерно.

Уже говорилось, что при движении снарядов (например, при толкании ядра) в момент свободного полета на снаряд действует только одна сила тяжести, проекция которой на горизонтальную ось равна нулю (см. § 65). В силу этого проекция центра масс ядра на эту ось движется равномерно. Если в начальный момент проекция скорости центра масс на данную ось равна нулю, то она остается равной нулю и во все время движения системы.

Приведем еще несколько примеров.

Единственная внешняя сила, действующая на снаряд при полете,— сила тяжести снаряда (сопротивлением воздуха можно пренебречь). Поэтому центр тяжести его движется по параболе, как и всякая материальная точка тела, брошенного под углом к горизонту. При разрыве снаряда во время полета осколки разлетаются в разные стороны, но их центр масс продолжает прежнее движение, пока хотя бы один из осколков не достигнет земли. Возникающие при взрыве снаряда силы — суть внутренние силы, и потому они не могут изменить движение его центра масс.

Человек, стоящий на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности, не может сам передвинуться в горизонтальном направлении. Этот идеализированный пример можно наблюдать (в известном приближении), если человека, не умеющего кататься на коньках, поставить на идеально гладкий лед. Внешними силами для системы, которую представляет собой человек, будет вес человека и нормальная реакция гладкой горизонтальной плоскости. Обе эти силы вертикальны, и потому сумма их проекций на любую горизонтальную ось равна нулю. Проекция ускорения центра тяжести человека на эту ось равна нулю. Если человек вначале стоял неподвижно, то никакими внутренними усилиями нельзя переместить его центр тяжести. Как только человек вынесет вперед одну ногу, другая нога сейчас же отодвинется назад и, следовательно, общий центр тяжести будет оставаться на прежнем месте. Перемещение человека в горизонтальной плоскости возможно только благодаря внешней горизонтальной силе, возникающей вследствие трения. В случае негладкой поверхности, когда человек выносит одну ногу вперед, другая не может переместиться назад, так как мешает трение подошвы ног о поверхность.

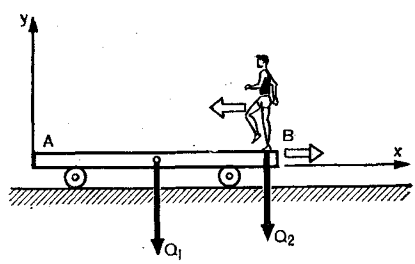


Рис. 162.

Пример XV. 4. Платформа может двигаться без трения по рельсам, расположенным горизонтально, но в данный момент находится в покое (рис. 162). Стоящий на ней человек переходит с одного конца ее на другой. Определить, на какое расстояние передвинется при этом платформа, если ее вес равен $Q_1 = 280$ *кГ*, длина $l = 10$ *м*, вес человека $Q_2 = 70$ *кГ*.

Решение. На платформу с человеком действуют только вертикальные внешние силы Q_1 и Q_2, а также нормальные реакции опор. Сумма их проекций на горизонтальную ось x равна нулю:

$$\Sigma F_{kx} = Q_1 + Q_2 - (R_1 + R_2) = 0.$$

Поэтому на основании теоремы о движении центра масс горизонтальная скорость центра масс системы (платформа — человек) должна быть постоянной. Так как вначале система была неподвижна, то центр масс ее должен остаться неподвижным и при перемещении человека.

За неподвижное начало координат можно взять первоначальное положение точки A. Абсцисса центра масс системы в первоначальном положении системы равна:

$$x_{1c} = \frac{Q_1 \frac{l}{2} + Q_2 l}{Q_1 + Q_2}.$$

Допустим, что при перемещении человека из конца B в конец A платформа перемещается вправо на расстояние S. Тогда абсцисса центра тяжести системы в новом ее положении (при том же начале координат) будет равна:

$$x_{2c} = \frac{Q_1 \left(S + \frac{l}{2}\right) + Q_2 S}{Q_1 + Q_2}.$$

Так как центр тяжести системы остается неподвижным, то $x_{1c} = x_{2c}$. Отсюда получим:

$$\frac{Q_1 \frac{l}{2} + Q_2 l}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1 \left(S + \frac{l}{2}\right) + Q_2 S}{Q_1 + Q_2}.$$

Решая это уравнение относительно S, находим:

$$S = \frac{Q_2 l}{Q_1 + Q_2} = \frac{70 \cdot 10}{280 + 70} = 2{,}5 \text{ м}.$$

§ 80. Дифференциальные уравнения движения материальной системы

Известно, что все силы, действующие на точки материальной системы, могут быть разделены на две группы, причем двояким образом: или на внешние и внутреннние, или на заданные силы и реакции связей. Дифференциальные уравнения движения материальной системы также могут быть записаны двумя способами.

Представим себе материальную систему, состоящую из k материальных точек: M_1, M_2, ..., M_k (рис. 163, *а*). Разделим все силы, приложенные к точкам системы, на внешние и внутренние. Равнодействующую всех внешних сил, приложенных к точке M_1, обозначим через F_1^e, равнодействующую всех внутренних сил, приложенных к той же точке,— через F_1^i; равнодействующие внешних и внутренних сил, приложенных к остальным точкам, — соответственно через F_2^e, F_2^i, ..., F_k^e, F_k^i. Обозначим координаты точек M_1, M_2, ..., M_k через x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_k, y_k, z_k. Для каждой точки системы можно написать три дифференциальных уравнения движения. Взяв какую-либо точку M_n ($n = 1, 2, \ldots, k$) и обозначая проекции сил F_n^e и F_n^i, приложенных к этой точке, через X_n^e, Y_n^e, Z_n^e и X_n^i, Y_n^i, Z_n^i, получим:

$$\left\{\begin{aligned} m_n\ddot{x}_n &= X_n^e + X_n^i \\ m_n\ddot{y}_n &= Y_n^e + Y_n^i \\ m_n\ddot{z}_n &= Z_n^e + Z_n^i. \end{aligned}\right. \qquad (219)$$

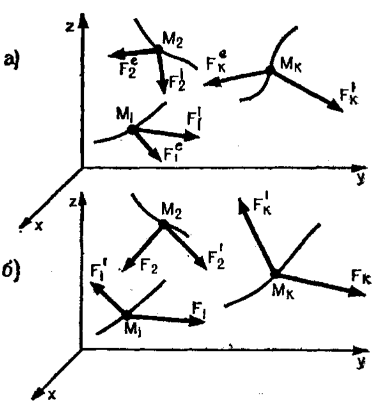


Рис. 163.

Теперь представим себе материальную систему, состоящую из точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ (рис. 163, *б*), и разделим все силы, действующие на эти точки, на заданные силы и на реакции связей. Обозначим равнодействующую всех заданных сил, приложенных к точке M_1, через F_1, равнодействующую всех реакций связей, действующих на эту точку,— через F_1'. Для остальных точек введем аналогичные обозначения: F_2, F_2', ..., F_n, F_n'. Взяв координатные оси x, y, z и обозначив проекции сил F_n и F_n', действующих на точку M_n, через X_n, Y_n, Z_n и X_n', Y_n', Z_n', получим:

$$\left.\begin{aligned} m_n\ddot{x}_n &= X_n + X_n', \\ m_n\ddot{y}_n &= Y_n + Y_n', \\ m_n\ddot{z}_n &= Z_n + Z_n'. \end{aligned}\right\} \qquad (220)$$

Если бы все силы, действующие на все точки системы, были известны, то интегрирование (решение) уравнений 219 и 220 привело бы к определению движения системы под действием заданных сил. Однако в большинстве случаев число материальных точек системы настолько велико (для тела человека $n = \infty$), что применение этих уравнений практически неосуществимо. Кроме того, известно, что реакции связей существенно зависят от движения системы и поэтому могут быть определены после того, как изучено движение самой системы. Поэтому практическое значение данных уравнений невелико. В прикладных разделах механики удобными являются другие уравнения (см. § 90), из которых исключены внутренние силы или реакции связей.

§ 81. Принцип Даламбера

Рассмотрим какую-нибудь точку M_k данной системы. На эту точку действуют заданная сила F_k и реакция связей N_k. Если приложить к этой точке еще силу инерции $F_k^{\text{ин}}$, равную по модулю произведению массы точки на модуль ее ускорения и направленную противоположно ускорению, то эти три силы взаимно уравновесятся. То же самое можно сказать в отношении всех остальных точек системы, т. е.:

$$F_k = N_k + F_k^{\text{ин}} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{221}$$

Отсюда приходим к заключению: *если в любой момент к каждой материальной точке данной системы приложить силу инерции этой точки, то силы инерции всех точек будут уравновешиваться заданными силами, действующими на систему, и реакциями связей.* В этом и состоит *принцип Даламбера* для системы.

Таким образом, вводя силы инерции, можно в задачах динамики составлять уравнения в той же форме, как и в задачах статики, принимая во внимание, что поскольку заданные силы, реакции связей и силы инерции взаимно уравновешиваются, то сумма проекций всех этих сил на любую ось и сумма их моментов относительно любой точки или любой оси равны нулю. При этом следует иметь в виду, что если эти уравнения составлены для всей системы в целом, то внутренние силы в них, конечно, не войдут. Принцип Даламбера имеет очень важное значение, так как дает общий метод решения динамических задач. Этим методом особенно удобно пользоваться для определения динамических реакций связей, т. е. реакций, возникающих при движении системы.

Применяя понятие «сила инерции», необходимо помнить о его двояком значении. Существует реальная сила инерции и фиктивная (даламберова) сила инерции. *Реальная сила инерции всегда приложена к связи и направлена против ускорения.* Например, если при финальном разгоне ядро движется с положительным ускорение $\bar{a}$, то реальная сила инерции действует на руку спортсмена, сжимает руку и равна $\bar{F}_{\text{р}}^{\text{ин}} = -m\bar{a}$. В принципе же Даламбера вводится фиктивная сила инерции: $\bar{F}_{\text{дал}}^{\text{ин}} = -m\bar{a}$, но приложенная к телу, которому сообщается ускорение (в данном случае к ядру).

Пример XV. 5. Найти натяжение нити маятника (рис. 164).

Решение. На тело действуют силы T (натяжение нити) и P — вес тела. Присоединим к телу касательную и нормальную силы инерции. В соответствии с принципом Даламбера тело будет в равновесии. Тогда сумма проекций всех сил на вертикальную ось будет:

$$T - P - F_n^{\text{ин}} = 0; \qquad F_n^{\text{ин}} = m\,\frac{v^2}{l}.$$

$T = \dfrac{mv^2}{l} + P$ — искомое натяжение нити. Здесь v — скорость груза, которую можно определить на основании теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки*.

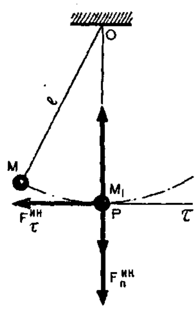


Рис. 164.

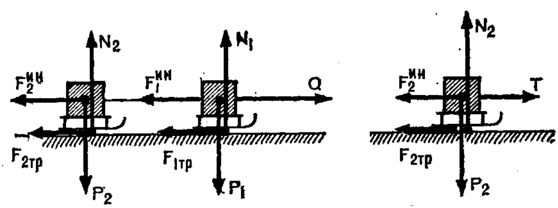


Рис. 165.

Пример XV. 6. Буксировка санного поезда производится силой Q (рис. 165). Вес первых саней P_1, вторых — P_2. Определить ускорение саней и натяжение троса, связывающего их. Коэффициент трения известен.

Решение. Определим силы инерции. Так как сани движутся с ускорением a, то $F_1^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a$; $F_2^{\text{ин}} = \dfrac{P_2}{g}a$.

Силы трения: $F_{1\text{тр}} = fP_1$; $F_{2\text{тр}} = fP_2$. В соответствии с принципом Даламбера, под действием заданных сил, реакций связей и сил инерции система должна находиться в равновесии. Поэтому сумма проекций всех сил на горизонтальную ось будет:

$$Q - f(P_1 + P_2) - \frac{1}{g}(P_1 + P_2)a = 0.$$

Отсюда

$$a = g\left(\frac{Q}{P_1 + P_2} - f\right).$$

Очевидно, санный поезд будет двигаться, если $f < \dfrac{Q}{P_1 + P_2}$.

---

* Определить v предлагается самостоятельно.

Для определения силы натяжения T надо расчленить систему и рассмотреть силы, действующие на первые сани. Спроектируем эти силы на горизонтальную ось:

$T - fP_2 - \frac{P_2}{g} a = 0$. Подставив сюда значение a и, сделав несложные преобразования, получим:

$$T = \frac{QP_2}{P_1 + P_2}$$

Из этой формулы видно, что натяжение троса, соединяющего сани, не зависит от силы и коэффициента трения.

§ 82. Принцип возможных перемещений

Как уже говорилось, всякая задача динамики может быть сведена к соответствующей задаче статики посредством введения сил инерции точек системы. Наиболее общий прием для решения задач статики — прием, одинаково применимый к вопросам о равновесии каких угодно систем,— дает *принцип возможных перемещений*.

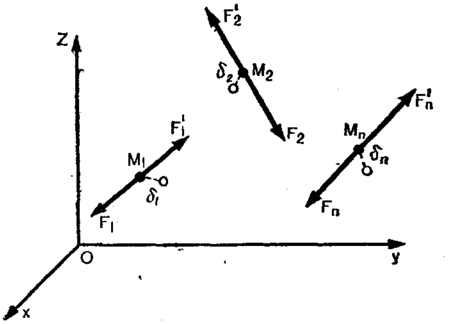


Рис. 166.

Представим себе материальную систему M_1, M_2, ..., M_n, находящуюся в равновесии под действием приложенных к ней сил (рис. 166). Все силы, действующие на точки системы, разделим на заданные силы и на реакции связей. Равнодействующие заданных сил, приложенных к каждой из точек, обозначим через F_1, F_2, ..., F_n; равнодействующие реакций связей — через F_1', F_2', ..., F_n'. Так как по предположению каждая из точек M_1, M_2, ..., M_n находится в равновесии, то сила F_1 должна уравновешиваться с силой F_1', сила F_2 с силой F_2' и т. д. Отсюда следует, что силы F_1 и F_1' равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны; то же относится к силам F_2 и F_2', F_3 и F_3' и т. д.

Мысленно сместим систему из занимаемого ею положения равновесия, дадим ей некоторое *возможное перемещение* («возможным» перемещением системы называют всякое такое ничтожно малое перемещение, которое допускается связями, существующими в ней)*. Обозначим ничтожно малые перемещения точек M_1, M_2, ..., M_n через δ_1, δ_2, ..., δ_n и вычислим сумму работы всех сил (как заданных, так и реакций связей) на рассматриваемом перемещении системы.

Так как силы F_1 и F_1' равны и направлены в противоположные стороны, то работа этих сил на перемещении δ_1 численно одинакова и отличается знаком; сумма работы равна нулю. То же можно сказать про работу сил F_2 и F_2' на перемещении δ_2 и т. д. Отсюда вытекают равенства:

$$F_1\delta_1 \cos(F_1, \delta_1) + F_1'\delta_1 \cos(F_1', \delta_1) = 0;$$

$$F_2\delta_2 \cos(F_2, \delta_2) + F_2'\delta_2 \cos(F_2', \delta_2) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n\delta_n \cos(F_n, \delta_n) + F_n'\delta_n \cos(F_n', \delta_n) = 0.$$

Складывая эти равенства почленно, получим:

$$\Sigma F_i\delta_i \cos(F_i, \delta_i) + \Sigma F_i'\delta_i \cos(F_i', \delta_i) = 0.$$

Предположим, что все связи в системе идеальные, относя силы трения, если таковые существуют, к числу сил заданных. В таком случае сумма работы реакций связей на всяком возможном перемещении системы, вычисленная с точностью до малых величин 1-го порядка малости (включительно), равна нулю. Следовательно, ограничиваясь этой степенью точности, можно отбросить второй член в предыдущем равенстве. Тогда получится уравнение:

$$\Sigma F_i\delta_i \cos(F_i, \delta_i) = 0.$$

Итак, если все связи в системе идеальные, то условие равновесия ее может быть выражено следующим образом: *сумма работы заданных сил на всяком возможном перемещении системы из положения равновесия, вычисленная с точностью до малых величин 1-го порядка малости (включительно), равна нулю.* Этот принцип называется *принципом возможных перемещений;* уравнение, выражающее его,— *уравнением работы.*

Принцип возможных перемещений является одним из важнейших и основных принципов механики. Все теоремы статики могут быть выведены как следствия из него. Принцип возможных перемещений имеет всеобъемлющее значение не только в учении о равновесии, но также и в учении о движении. В то же время он имеет очень большое практическое значение: применение его ведет к наиболее простому

---

* Следует подчеркнуть, что перемещение системы, о котором идет речь, отнюдь не вызывается силами, действующими на точки системы; эти силы по предположению взаимно уравновешиваются и никакого перемещения системы дать не могут; имеется в виду лишь мысленное смещение системы из ее положения равновесия.

решению многих вопросов механики, поскольку из уравнения работы, выражающего принцип возможных перемещений, автоматически исключены все реакции связей.

Уравнению работы можно придать несколько иной вид, если воспользоваться известным трехчленным выражением элементарной работы. Возьмем прямоугольные координатные оси x, y, z и обозначим проекции на эти оси силы F_i через X_i, Y_i, Z_i, а координаты точки M_i — через x_i, y_i, z_i; приращения к этим координатам, когда точка M_i получит перемещение δ_i, обозначим через δx_i, δy_i, δz_i. Тогда: $F_i\delta_i \cos(F_i, \delta_i) = X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i$.

Уравнение работ примет вид:

$$\Sigma (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0. \qquad (222)$$

Уравнение в таком виде называют *общим уравнением статики*. Оно имеет значение в теоретических исследованиях; в практике удобнее пользоваться первоначальным уравнением.

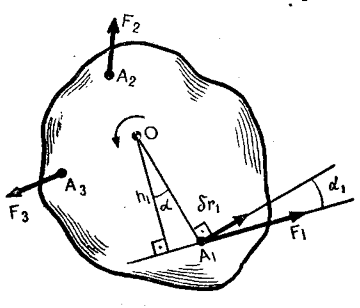


Рис. 167.

Пример XV. 7. Определить на основе принципа возможных перемещений условие равновесия рычага.

Пусть твердое тело, закрепленное при помощи цилиндрического шарнира O, находится под действием системы сил F_i, расположенных в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела (в плоскости чертежа, рис. 167). Сообщим телу возможное перемещение, т. е. повернем его вокруг оси O, перпендикулярной плоскости чертежа, на произвольный элементарный угол $\delta\varphi$. Точка A_1 тела получит при этом перемещение δr_1, направленное перпендикулярно OA_1 и равное по модулю $OA_1\cdot\delta\varphi$*. Элементарная работа силы F_1, приложенной в этой точке, будет равна:

$$\delta A_1 = F_1 \cos\alpha_1 \cdot |\delta r_1| = F_1 \cdot OA_1 \cdot \cos\alpha_1 \cdot \delta\varphi,$$

где α_1— угол между F_1 и δr_1. Если из точки O опустить на линию действия силы F_1 перпендикуляр h_1, то $h_1 = OA_1 \cos\alpha_1$,
а потому $\delta A_1 = F_1 h_1 \delta\varphi$.

Но произведение F_1h_1 представляет собой момент силы относительно оси O, следовательно, $\delta A_1 = m_0(F_1)\delta\varphi$.

Сумма элементарной работы всех сил, приложенных к рычагу, выразится, следовательно, так:

$$\Sigma\delta A_i = \Sigma\, m_0(F_i)\delta\varphi = \delta\varphi\Sigma\, m_0(F_i).$$

* Вектор δr_1 направлен по касательной к дуге окружности, которую описывает точка A_1, а его модуль равен длине этой элементарной дуги.

Приравнивая эту сумму к нулю, получим условие равновесия рычага: $\delta\varphi\Sigma\, m_0(F_i) = 0$,
или, так как $\delta\varphi \neq 0$, $\Sigma\, m_0(F_i) = 0$;
следовательно, чтобы рычаг в данном положении оставался неподвижным, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех приложенных к нему сил относительно оси его вращения равнялась нулю.

§ 83. Общее уравнение динамики

Согласно принципу Даламбера, заданные силы, действующие на механическую систему, реакции связей и силы инерции материальных точек этой системы в каждый данный момент, находятся в равновесии. Из принципа возможных перемещений следует, что сумма элементарных работ всех этих сил при всяком возможном перемещении системы равна нулю. В случае совершенных связей (сумма работ реакций этих связей всегда равна нулю) сумма элементарных работ заданных сил и сил инерции будет равна нулю при любом возможном перемещении системы, т. е.:

$$\Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \Sigma\left(F_x^{\text{ин}}\delta x + F_y^{\text{ин}}\delta y + F_z^{\text{ин}}\delta z\right) = 0,$$

где δx, δy и δz обозначают проекции возможных перемещений точек системы на координатные оси X, Y, Z — проекции заданных сил и $F_x^{\text{ин}}$, $F_y^{\text{ин}}$, $F_z^{\text{ин}}$ — проекции сил инерции на те же оси. Но проекции силы инерции на координатные оси выражаются так:

$$F_x^{\text{ин}} = -ma_x = -m\,\frac{d^2x}{dt^2}; \qquad F_y^{\text{ин}} = -ma_y = -m\,\frac{d^2y}{dt^2};$$

$$F_z^{\text{ин}} = -ma_z = -m\,\frac{d^2z}{dt^2},$$

где m — масса материальной точки, а a_x, a_y и a_z — проекции ее ускорения на координатные оси. Поэтому предыдущее уравнение принимает вид:

$$\sum\left[\left(X - m\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0. \quad (223)$$

Это уравнение, вытекающее из двух основных принципов механики — принципа Даламбера и принципа возможных перемещений,— называется *общим уравнением динамики*. От общего уравнения статики 222 оно отличается только тем, что кроме проекций заданных сил на координатные оси в него входят еще проекции сил инерции на те же оси.

Таким образом, вводя силы инерции и пользуясь уравнением 223, можно применять принцип возможных перемещений и в задачах динамики.

§ 84. Основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела

Вращательное движение является элементом очень многих физических упражнений. Оно встречается в преобладающем числе гимнастических и акробатических упражнений, прыжках в воду, фигурном катании на коньках и т. д.

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z под действием приложенных к нему сил F_1, F_2, ..., F_n (рис. 168). Для равновесия тела, имеющего неподвижную ось, необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов всех приложенных к нему активных сил F_1, F_2, ..., F_n относительно оси была равна нулю: $\Sigma m_z(\overline{F}_k) = 0$; в противном случае тело будет вращаться вокруг оси z с некоторым угловым ускорением ε:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

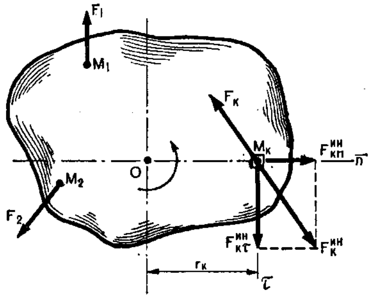


Рис. 168.

Угловое ускорение ε вращающегося тела является одной из важных кинематических характеристик. Чтобы определить его, применяют принцип Даламбера, условно присоединяя к активным силам, приложенным к телу, силы инерции всех его частиц. Тогда можно считать, что система находится как бы в равновесии. При этом сумма моментов приложенных к телу активных сил и сил инерции всех его частиц относительно оси вращения тела должна равняться нулю.

Чтобы определить силы инерции, разобьем данное тело (см. рис. 168) на частицы с массой m_k (каждая такая частица находится на расстоянии r_k от оси).

Сила инерции, присущая каждой такой частице, будет равна $\overline{F}^{ин}_k = m_k\overline{a}$. Разложим ее на составляющие: центробежную, равную по модулю $F^{ин}_{kn} = m_k r_k \omega^2$ и направленную по радиусу от центра, и касательную, равную по модулю $F^{ин}_{k\tau} = m_k r_k \varepsilon$ и направленную по перпендикуляру к радиусу в сторону, противоположную касательному ускорению. Так как главный момент приложенных к телу сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$ положителен (под действием этих сил тело вращается против хода часовой стрелки), угловое ускорение будет также положительно.

Поскольку центробежные силы инерции пересекают ось z вращения тела, моменты их относительно этой оси равны нулю. Касательная, составляющая силы инерции для одной частицы, дает относительно оси вращения тела момент $m_z(F^{ин}_{k\tau}) = -F^{ин}_{k\tau} r = -m_k r_k^2 \varepsilon$.

Сумма моментов касательных сил инерции для всех элементарных частиц тела будет равна:

$$\Sigma m_z(F_{k\tau}^{\text{ин}}) = -\Sigma F_{k\tau}^{\text{ин}} r = -\Sigma m_k r_k^2 \varepsilon.$$

Угловое ускорение ε тела можно вынести за знак суммы, как общий множитель, поскольку оно одинаково для всех элементарных частиц.

Правая часть равенства состоит из двух множителей: ε и $\Sigma m_k r_k^2$. Последний является характерной величиной для вращающегося тела и носит название *момента инерции* относительно оси вращения. Его принято обозначать через J.

Моментом инерции тела относительно какой-либо оси называется величина, измеряемая суммой произведений массы каждой частицы тела на квадрат расстояния этой частицы до данной оси.

Следует заметить, что, говоря о моменте инерции вращающегося тела, необходимо указывать, относительно какой оси или точки значение J вычисляется, так как r_k, входящее в выражение и определяющее момент инерции, характеризует расстояние от каждой элементарной массы до оси или точки вращения.

Сумма моментов сил инерции материальных частиц тела теперь может быть записана так:

$$\Sigma m_z\left(F_k^{\text{ин}}\right) = -J\varepsilon. \tag{224}$$

Для равновесия тела необходимо, чтобы сумма моментов всех сил, как активных, так и сил инерции, была равна нулю. Поэтому, прибавляя сумму моментов сил инерции к сумме моментов всех приложенных к телу активных сил, получим равенство: $\Sigma m_z(F_k) + \Sigma m_z(F_k^{\text{ин}}) = \Sigma m_z(F_k) - J\varepsilon = 0$.

Алгебраическую сумму моментов всех приложенных к телу активных сил относительно оси z вращения тела принято называть *вращающим моментом* и обозначать через $M_{\text{вр}}$.

$$M_{\text{вр}} = \Sigma m_z(F_k). \tag{225}$$

Введя новые обозначения, получим $M_{\text{вр}} - J\varepsilon = 0$ или

$$M_{\text{вр}} = J\varepsilon. \tag{226}$$

Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, вращающий момент равен моменту инерции тела относительно этой оси, умноженному на угловое ускорение тела.

Уравнение 226 — основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Если вращение тела происходит около определенной оси, то для него момент инерции есть величина постоянная. Поэтому если и вращающий момент также постоянен, то и угловое ускорение есть величина постоянная, т. е. тело совершает равномерно-переменное вращение.

Если приложенный к телу вращающий момент $M_{вр}$ равен нулю, то угловое ускорение тела ε также равно нулю. Поэтому тело или вращается с постоянной угловой скоростью, или остается в покое.

На тело могут действовать различные вращающие моменты. Например, на вал в маятнике Обербека (рис. 169) действуют два противоположно направленных момента: момент $M_{вр} = -Q_r$ вращает систему по ходу часовой стрелки; момент $M_{тр}$ препятствует этому вращению. Если сумма $\Sigma(M_{вр} + M_{тр})$ будет равна нулю, то вал будет вращаться равномерно.

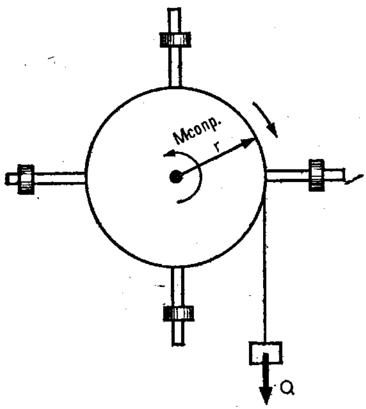


Рис. 169.

Если момент движущих сил больше момента сил сопротивления, то вал будет вращаться ускоренно. Если момент движущих сил меньше момента сил сопротивления, то вал будет вращаться замедленно.

Из табл. 20 видно, что по своей структуре основное уравнение динамики для вращательного движения тела подобно основному уравнению динамики для материальной точки (или, что то же, для поступательного движения тела): $\overline{F} = m\overline{a}$.

Момент инерции тела при его вращательном движении играет ту же роль, что масса тела при поступательном движении. Так же как масса тела является мерой его инертности при поступательном движении, так и *момент инерции тела относительно данной оси является мерой его инертности при вращательном движении вокруг этой оси.*

Таблица 20

Характеристики поступательного и вращательного движения твердого тела

Поступательное движение	Вращательное движение
Сила F	Момент сил $m(F)$
Масса m	Момент инерции J
Скорость v	Угловая скорость ω
Ускорение a	Угловое ускорение ε
Основное уравнение динамики:	Основное уравнение динамики:
$\overline{F} = m\overline{a}$	$\overline{M}вр = \overline{J}_{\varepsilon}$

Если задан вращательный момент ($M_{вр}$), который сохраняется постоянным ($M_{вр} = J\varepsilon = \mathrm{const}$), то угловое ускорение ε будет находиться в зависимости от величины J: оно будет тем меньше, чем больше момент инерции тела относительно оси вращения.

Несмотря на то, что момент инерции как бы выполняет роль массы (инертности) во вращающейся системе, необходимо указать на отличие его от массы тела. Масса тела является для него величиной постоянной, в то время как *момент инерции* тела *зависит* не только от самой вращающейся массы, но и *от распределения массы относительно оси вращения*. Это хорошо иллюстрируется при помощи скамьи Жуковского (рис. 170). Человек, стоящий на приведенной во вращение

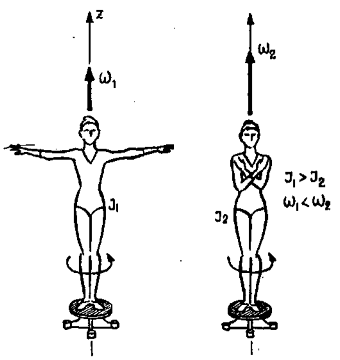


Рис. 170.

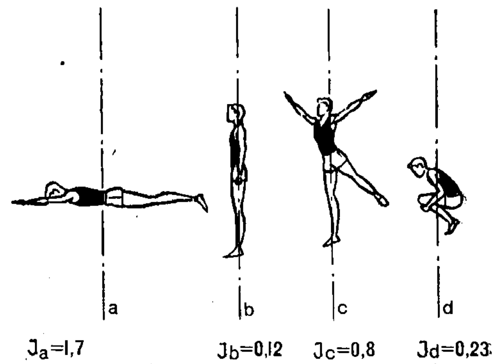


Рис. 171.

скамье, может изменять ее угловую скорость, изменяя распределение массы тела и тем самым момент инерции системы относительно оси ее вращения. Вращение системы будет ускоряться, если человек приблизит руки к груди и, наоборот, замедляться, если он удалит их от оси вращения.

Момент инерции тела человека относительно оси, проходящей через центр его тяжести, будет изменяться с изменением позы тела (рис. 171)*.

§ 85. Определение момента инерции тела человека

Для определения момента инерции твердого тела относительно какой-либо его оси, например z (рис. 172), надо разбить все тело на очень большое число n очень малых частиц; затем получить сумму из произведения массы каждой частицы тела на квадрат расстояния этой частицы до оси z и вычислить предел этой суммы, предполагая, что число n частиц стремится к бесконечности, а масса каждой частицы — к нулю.

* Числовые значения момента инерции даны в *кГм · сек*^{2}.

$$J = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \Sigma m_k r_k^2.$$

Часто слово «предел» опускают и момент инерции тела относительно какой-либо его оси определяют просто как сумму, составленную из произведений массы каждой частицы тела на квадрат расстояния этой частицы от данной оси:

$$J = \Sigma m_k r_k^2. \qquad (227)$$

Размерность момента инерции $[J] = (\textit{масса} \cdot \textit{длина}^2)$. В системе СИ момент инерции измеряется в килограммометрах в квадрате ($\textit{кгм}^2$). В технической системе единиц размерность момента инерции $[J] = \left(\frac{\textit{сила} \cdot \textit{время}^2}{\textit{длина}} \cdot \textit{длина}^2\right) = (\textit{сила} \cdot \textit{длина} \cdot \textit{время}^2)$. Таким образом, в технической системе единиц момент инерции измеряется в килограммометросекундах в квадрате ($\textit{кГм} \cdot \textit{сек}^2$).

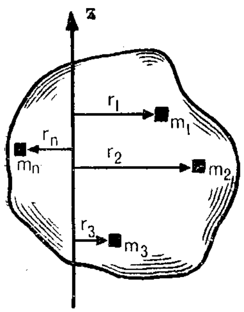


Рис. 172.

Иногда вводят такое понятие, как «радиус инерции». Для этого момент инерции тела относительно оси представляют в виде произведения массы тела на квадрат длины некоторого отрезка r, называемого *радиусом инерции* тела относительно данной оси: $J = Mr^2$.

Если момент инерции тела относительно оси известен, то радиус инерции тела относительно этой оси будет:

$$r = \sqrt{\frac{J}{M}}. \qquad (228)$$

Радиус инерции тела относительно данной оси равен расстоянию от данной оси до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы получить момент инерции этой точки, равный моменту инерции тела относительно данной оси.

В ряде случаев бывает необходимо, зная момент инерции тела относительно какой-либо оси, определить момент относительно другой оси. Например, опытным путем легко найти момент инерции J_{z_1} относительно оси, около которой происходит качание системы, в то время как для исследования спортивных движений интересно знать момент инерции относительно оси z. Решение этой задачи дает *теорема Гюйгенса: момент инерции J_{z_1} тела относительно любой оси равен моменту инерции J_z этого тела относительно оси z, параллельной данной и проходящей через центр тяжести тела, сложенному с произведением массы M тела на квадрат расстояния l между данными осями:*

$$J_{z_1} = J_z + Ml^2. \qquad (229)$$

П р и м е р XV.8. Момент инерции тела человека относительно оси z, проходящей через центр тяжести, равен: $J_z = 1{,}7$ *кГмсек*^{2}. Определить момент инерции тела человека относительно оси z_1, если расстояние между осями $l = 1{,}00$ *м*, вес тела $Q = 73{,}5$ *кГ*.

Р е ш е н и е. Пользуясь теоремой Гюйгенса, находим:

$$J_{z_1} = J_z + Ml^2 = 1{,}7 + \frac{73{,}5 \cdot 1^2}{9{,}8} = 9{,}2 \ кГмсек^2.$$

Рассмотрим определение моментов инерции однородных тел расчетным методом.

1. Пусть дан прямой однородный тонкий стержень AB постоянного поперечного сечения, поперечные размеры которого малы сравнительно с его длиной l. Необходимо определить момент инерции относительно оси z, проходящей через конец стержня (рис. 173).

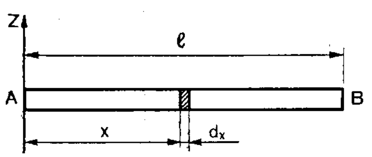


Рис. 173.

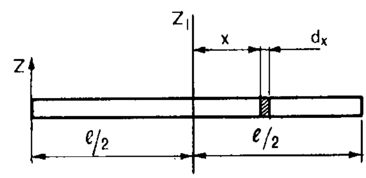


Рис. 174.

Выделим из стержня очень малый отрезок длиной dx, находящийся на расстоянии x от оси z. Его масса dm будет:

$$dm = \rho dx, \tag{230}$$

где ρ — линейная плотность стержня (масса, приходящаяся на единицу длины стержня). Момент инерции выделенной элементарной частицы dJ будет равен:

$$dJ_z = x^2 dm. \tag{231}$$

Чтобы получить момент инерции J_z всего стержня относительно оси z, необходимо это выражение проинтегрировать:

$$J_z = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l \rho x^2 dx = \rho \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho l^3}{3}.$$

Обозначая массу всего стержня, равную ρl, через M и подставляя это значение в найденное выражение момента инерции стержня, окончательно получим:

$$J_z = \frac{Ml^2}{3}. \tag{232}$$

2. Момент инерции стержня относительно поперечной оси z_1 (рис. 174), проходящей через центр тяжести стержня, можно получить так же, как в предыдущем примере:

$$J_{z_1} = 2\int\limits_0^{l/2} \rho x^2 dx = 2\rho \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^{l/2} = \frac{\rho l^3}{12} = \frac{Ml^2}{12}.$$

Это же выражение можно получить, применяя теорему Гюйгенса: $J_{z_1} = J_z + Ml_1^2$, учитывая, что $J_z = \frac{Ml_1^2}{3}$ — момент инерции стержня относительно оси z, проходящей через конец стержня; J_{z_1} — момент инерции стержня относительно оси z_1, параллельной оси z и проходящей через центр тяжести стержня; M — масса стержня; $\frac{l}{2}$ — расстояние между параллельными осями z и z_1.

Искомый момент инерции стержня:

$$J_{z_1} = J_z - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12}. \qquad (233)$$

Поступая принципиально так же, можно рассчитать моменты инерции различных тел правильной формы (табл. 21).

Момент инерции тела человека имеет большое значение для анализа спортивных движений. Произведем расчет момента инерции J человека. Вес «стандартного человека» $Q = 70$ *кГ*, рост $H = 1{,}7$ *м*. Этому телу соответствует эквивалентный цилиндр высотой $H = 1{,}7$ *м*, диаметром $d = 23$ *см*, плотностью $\rho = 1 \frac{г}{см^3}$, массой $M = \frac{70}{9{,}81} = 7{,}13$ *т. е. м.*

На рис. 175 показан цилиндр, вращающийся около оси, проходящей через центр тяжести. Момент инерции J_z цилиндра равен:

$$J_z = \frac{2\,\frac{M}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2}{3} = \frac{M \cdot 1{,}7^2}{12} = 1{,}7\ кГм\ сек^2 = 16{,}8\ кГм^2.$$

Если ось y проходит через дно цилиндра (т. е. на уровне головы или подошв человека), то момент инерции J_y равен:

$$J_y = \frac{MH^2}{3} = 6{,}8\ кГмсек^2$$

В позиции «большой оборот» момент инерции будет: $J_x = J_z + Ml^2 = 1{,}7 + 7{,}13 \cdot (1{,}2)^2 = 12{,}3$ *кГмсек*^{2}.

Эти расчетные данные довольно хорошо совпадают с экспериментальными (табл.

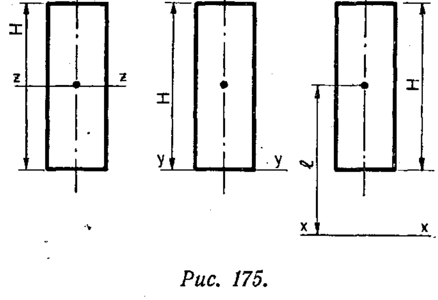
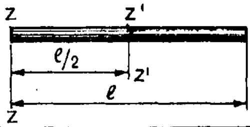
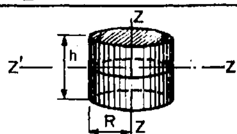
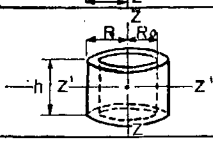
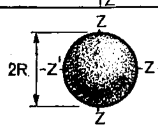
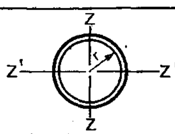
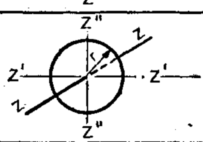
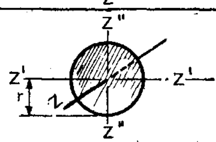


Рис. 175.

Таблица 21

Моменты инерции некоторых тел

Тело		Моменты инерции	
		J_z	$J_{z'}$
	Стержень	$\frac{Ml^2}{3}$	$\frac{Ml^2}{12}$
	Сплошной цилиндр	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{M}{12}(h^2+3R^2)$
	Полый цилиндр	$\frac{M(R^2+R_0^2)}{2}$	—
	Сплошной шар	$0{,}4\ MR^2$	$0{,}4\ MR^2$
	Полый шар	$\frac{2}{3}Mr^2$	$\frac{2}{3}Mr^2$
	Круговое кольцо	Mr^2	—
	Диск	$\frac{Mr}{4}$	—

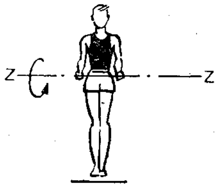
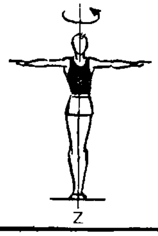
22). Полученные ориентировочные значения момента инерции тела человека показывают, что в процессе физических упражнений значение момента инерции может измениться в несколько раз.

К экспериментальным методам определения моментов инерции тела человека относятся: метод качелей, метод монофилярного подвеса и метод крутильных колебаний.

Метод качелей (физического маятника). Твердое тело, закреплен-

Таблица 22

Моменты инерции (кГм сек²) тела человека (мужчины нормального телосложения Q=70 кг, H=1,7)

Поза, в которой определялся момент инерции	Определенные экспериментально	Вычисленные по цилиндрической модели
	1,25–1,50	1,70
 Ось Z ⊥ плоскости чертежа	0,45–0,60	0,60
	0,10–0,15	0,17
	0,20–0,25	0,25

ное на горизонтальной оси так, что оно может качаться относительно нее под действием собственного веса, называется *физическим маятником* (рис. 176).

Если J_0 момент инерции этого тела относительно оси (O), d расстояние от оси до центра маятника, то период малых колебаний T будет равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Qd}}.$$

Следовательно, если определить период колебаний T, то, зная вес тела Q и положение центра тяжести (d), можно определить момент инерции тела J:

$$J = Qd\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2. \qquad (234)$$

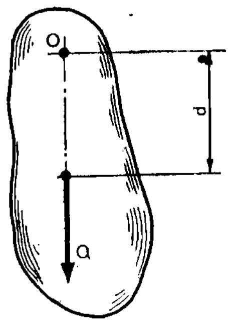


Рис. 176.

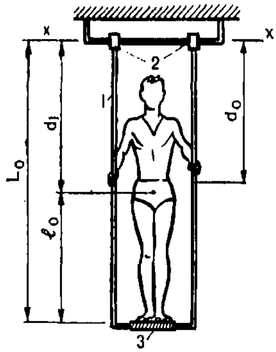


Рис. 177.

Прибор, применяемый в лабораториях для определения момента инерции тела человека (рис. 177), состоит из рамы (1), подвешенной на горизонтальной оси $x — x$ с помощью шариковых подшипников (2) (поэтому практически трение рама—ось сведено к нулю). Положение центра тяжести рамы известно, расстояние до него от оси $x — x$ равно d_0, вес рамы (качелей) также известен: Q_0. Измеряя период качаний T_0, можно определить момент инерции качелей J_x^0 относительно оси $x — x$.

На нижней части рамы укреплена площадка (3), на которую встает человек. Необходимо определить момент инерции J_x^1 его тела. Вес человека Q_1 и положение о.т.ц. l_0 известно по предварительным измерениям. По величине l_0 можно определить центр тяжести человека относительно оси $x — x$, $d_1 = L_0 — l_0$. Теперь имеется система (качели + человек), вес которой $Q_{сист} = Q_0 + Q_1$; расстояние от оси до центра тяжести системы $x — x$ равно:

$$d_{сист} = \frac{Q_0 d_0 + Q_1 d_1}{Q_0 + Q_1}.$$

Заставив систему качаться, определим период $T_{сист}$ и момент инерции системы.

$$J_x^c = (Q_0 + Q_1) \cdot d_{сист}\left(\frac{T_{сист}}{2\pi}\right)^2.$$

Момент инерции системы J_x^c равен сумме момента инерции качелей J_x^0 и момента инерции человека J_x^1. Отсюда имеем: $J_x' = J_x^c - J_x^0$. Метод качелей прост и удобен. Недостаток его в необходимости предварительного определения о.ц.т. человека.

Зная момент инерции J_x' относительно оси $x - x$, можно по формуле определить момент инерции J_y' около другой параллельной оси, например проходящей через центр тяжести человека.

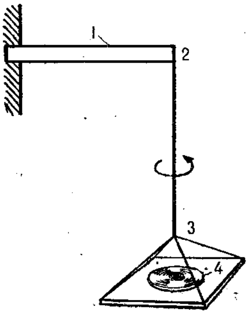


Рис. 178.

Метод монофилярного подвеса. Монофилярным называется подвес в виде одной нити (в отличие от других систем подвеса в виде нескольких нитей).

Прибор (рис. 178) состоит из кронштейна (1), жестко укрепленного на стене, проволоки, неподвижно защемленной на кронштейне (2), и рамки, которая укреплена на нижнем конце проволоки (3). На рамку можно подвесить исследуемую деталь, например диск (4).

Системе (подвес — деталь) можно сообщить крутильные колебания. При этом период колебания будет определяться взаимодействием сил упругости закручиваемой проволоки и сил инерции исследуемого тела. В случае симметричного тела, на основании принципа Даламбера можно написать следующее уравнение: $M_у + M_н = 0$, где $M_у$ — момент сил упругости проволоки; $M_н$ — момент сил инерции. Сделав соответствующие подстановки и решив полученное уравнение, найдем, что период крутильных колебаний T_0 будет равен:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{J_0 k}\,. \tag{235}$$

Отсюда искомый момент инерции тела будет:

$$J_0 = \frac{T_0^2 k}{4\pi^2} = \frac{T_0^2}{39,44} k,$$

где k — константа, зависящая от размеров проволоки и материала, из которого она изготовлена.

Значение k можно определить, подвешивая предмет, момент инерции которого известен:

$$k = J_0 \frac{39,44}{T_0^2}, \quad J_0 = \frac{kT_0^2}{39,44}\,. \tag{236}$$

Практически к проволоке всегда подвешено некоторое тело, момент инерции (J_0) которого известен. На него и подвешивают тело, момент инерции которого следует определить.

Момент инерции системы (подвес + исследуемое тело) будет равен:

$$J_{\text{сист}} = J_0 + J_1 = k\,\frac{T_c^2}{39{,}44}. \tag{237}$$

Деля почленно уравнение 237 на уравнение 236, найдем:

$$\frac{J_0 + J_1}{J_0} = \frac{T_{\text{сист}}^2}{T_0^2}.$$

Отсюда

$$J_1 = J_0\left(\frac{T_{\text{сист}}^2}{T_0^2} - 1\right). \tag{238}$$

Метод крутильных колебаний. Определить момент инерции тела относительно заданной оси при различных его положениях удобнее всего, если человека в заданной позе положить на горизонтальную крышку стола, совмещая ось стойки стола и ось, относительно которой определяется момент инерции тела (рис. 179).

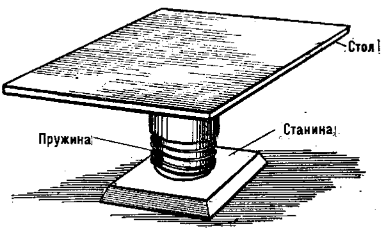


Рис. 179.

На систему (стол — исследуемое тело) действуют два взаимно противоположных момента: момент упругих сил, создаваемых спиральной пружиной M_y, и момент, создаваемый силами инерции $M_и$. Момент инерции J_0 стола равен:

$$J_0 = k\,\frac{T_0^2}{39{,}44}.$$

Момент инерции J_1 человека равен:

$$J_1 = J_0\left(\frac{T_{\text{сист}}^2}{T_{\text{сист}}^2} - 1\right). \tag{241}$$

Пример XV.9. Определить момент инерции J_z мяча около оси, проходящей через его диаметр, если диаметр мяча $2r = 22$ *см* $= 0{,}22$ *м*; вес $Q = 0{,}450$ *кГ*.

Решение. Считаем, что вся масса мяча расположена на поверхности. Момент инерции для сферической оболочки (см. табл. 21) равен:

$$J_z = \frac{2Mr^2}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{0{,}45}{9{,}8}(0{,}11)^2 = 3{,}7\cdot 10^{-4}\ кГм\ сек^2$$

Пример XV.10. На рис. 180 дан разрез диска для метания. Определить момент инерции диска относительно оси z. Размеры диска удовлетворяют правилам соревнований для мужчин.

Решение. Определим вес диска. Обод и пластины сделаны из стали, $\rho = 7{,}8$ $Г/см^3$; основание диска — из дуба, $\rho = 1{,}0$ $Г/см^3$. Сечение обода равно $1{,}38\,см^2$; объем обода — приблизительно равен длине обода (при его диаметре $20{,}8$ $см$), умноженной на сечение: $V_{об} = 20{,}8 \cdot \pi \cdot 1{,}38 = 91$ $см^3$. Вес обода равен: $Q = \rho V_{об} = 7{,}8 \cdot 91 = 830$ $Г$ ($0{,}83$ $кГ$).

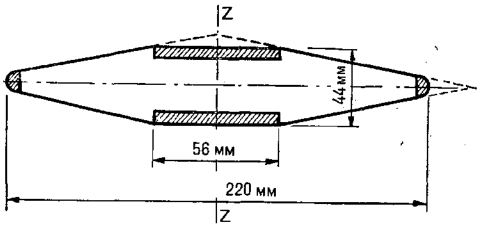


Рис. 180.

Объем пластин равен:

$$V_{пл} = 2\,\frac{\pi D^2}{4}h = 2 \cdot \frac{3{,}14\,(5{,}60)^2 \cdot 0{,}4}{4} = 19{,}4\ см^3$$

Вес пластин равен $Q_{пл} = \rho V_{пл} = 7{,}8 \cdot 19{,}4 = 151$ $Г = 0{,}151$ $кГ$.

Для определения объема и веса деревянной части диска продолжим на чертеже наклонную линию диска до пересечения с горизонтальной осью. Тогда деревянную часть диска можно будет рассматривать как конус. Нижнее основание его имеет диаметр $d = 27$ $см$. Высота конуса $h = 2{,}7$ $см$.

$$V_{кон} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{h}{3} = \frac{3{,}14\,(27)^2 \cdot 2{,}7}{12} = 575\ см^3.$$

Объем деревянной части состоит из 2 таких конусов, поэтому

$$2V_{кон} = 2 \cdot 575 = 1030\ см^3;$$

при $\rho = 1{,}0$ $Г/см^3$, вес дерева $Q_{дер} = \rho \cdot 2V_{кон} = 1 \cdot 1030 = 1030$ $Г$.

Общий вес диска равен:

$Q_{диска} = 830 + 151 + 1030 = 2010$ $Г$.

Момент инерции относительно оси вращения z диска можно рассмотреть как сумму моментов инерции: $J_{об}$ — момент инерции обода; $2J_{диска}$ — момент инерции дисков; $J_{дер}$ — момент инерции деревянной части диска: $J_z = J_{об} + 2J_{диска} + J_{дер}$.

При определении момента инерции железного обода можно считать, что вся масса его сосредоточена в кольце с некоторым средним диаметром (в данном случае $\varnothing = 10{,}4$ $см$). Момент инерции J_z кольца равен: $J_z = M_k r^2$.

В данном случае $M_k = \frac{0{,}830}{9{,}8}$; $r = 10{,}4$ $см = 0{,}104$ $м$.

$$J_z = \frac{0{,}83}{9{,}8}(0{,}104)^2 = \frac{0{,}83}{9{,}8} \cdot 0{,}0108 = 0{,}00091\ кГмсек^2 =$$

$$= 9{,}1 \cdot 10^{-4}\ кГмсек^2.$$

Момент инерции деревянной части:

$$J_{\text{дер}} = 2J_{\text{кон}} = 2 \cdot \frac{3}{10} Mr^2 = 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1,030}{2 \cdot 9,8} \cdot (0,135)^2 =$$

$$= 0,00057 \text{ кГмсек}^2 = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ кГмсек}^2.$$

Момент инерции металлического диска очень мал, поэтому его величиной можно пренебречь. Итак, имеем $J_z = 0,00091 + 0,00057 = 0,00148$ *кГмсек*^{2} $= 14,8 \cdot 10^{-4}$ *кГмсек*^{2}.

З а м е ч а н и я. Если бы преобладающую массу диска сосредоточить на ободе, то момент инерции его был бы значительно больше. Сосредоточив массу диска около его оси, взяв тяжелые сплавы ($\rho = 19$ *кГ/см*^{3}), можно понизить J_z до $3 \cdot 10^{-4}$ *кГмсек*^{2}.

Интересно определить кинетическую энергию, если известно, что диск делает до 500 *об/мин*;

$$\omega = \frac{500}{60} \cdot 2\pi = 52,3 \text{ рад/сек}.$$

$$T_{\text{кин}} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{0,00148 \cdot 52,3^2}{2} = 2 \text{ кГм}.$$

По-видимому, изменяя конфигурацию обода и металла, можно в значительной степени изменять момент инерции диска, оставляя размеры его и вес в пределах требований правил соревнований.

ЛИТЕРАТУРА

Р а з д е л III

Д о н с к о й Д. Д. Биомеханика с основами спортивной техники. ФиС, 1971, стр. 81—114.

П е т р о в В. А. Методические указания к биомеханическому анализу спортивной техники. Л., ГДОИФК им. П. Ф. Лесгафта, 1970, стр. 22—50.

Т а р г С. М. Краткий курс теоретической механики. М., «Наука», 1967, стр. 242 — 472.

Х а й к и н С. Э. Физические основы механики. М., «Наука», 1971, стр. 122—205, 297—310, 332—459.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
§ 1. Предмет и метод общей механики (стр. 3)
§ 2. Основные законы механики (стр. 7)
§ 3. Понятие силы (стр. 8). § 4. Скалярные и векторные величины (стр. 9)

Раздел I. Статика

Глава I. **Введение в статику** 11
§ 5. Предмет и аксиомы статики (стр. 11). § 6. Связи и реакции связей (стр. 13)

Глава II. **Плоская система сходящихся сил** 17
§ 7. Сложение двух сил, приложенных в одной точке (стр. 17). § 8. Разложение силы на две сходящиеся составляющие (стр. 18). § 9. Силовой многоугольник (стр. 20). § 10. Определение вектора по его проекциям (стр. 21). § 11. Проекция геометрической суммы векторов на ось (стр. 23). § 12. Определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил (стр. 24). § 13. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил (стр. 25). § 14. Решение задач о равновесии плоской системы сходящихся сил (стр. 26)

Глава III. **Параллельные силы. Пара сил и моменты сил** . . . 30
§ 15. Сложение параллельных сил. Пара сил и ее действие на тело (стр. 30). § 16. Сложение пар сил (стр. 31). § 17. Момент силы относительно точки (стр. 33). § 18. Момент силы относительно оси (стр. 34). § 19. Рычаги. Равновесие рычага (стр. 35). § 20. Составные рычаги (стр. 36).

Глава IV. **Система произвольно расположенных на плоскости сил** 40
§ 21. Приведение силы к точке (стр. 40). § 22. Приведение плоской системы сил к данной точке (стр. 42). § 23. Уравнение равновесия плоской системы сил (стр. 43). § 24. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил (стр. 44). § 25. Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил (стр. 45). § 26. Порядок решения задач на равновесие плоской системы сил (стр. 46).

Глава V. **Трение** 51
§ 27. Виды трения (стр. 51). § 28. Трение скольжения (стр. 51). § 29. Угол и конус трения (стр. 54). § 30. Трение качения (стр. 56).

Глава VI. **Центр тяжести тела** 58
§ 31. Понятие о центре параллельных сил (стр. 58). § 32. Центр тяжести твердого тела (стр. 60). § 33. Определение центров тя-

жести тел (стр. 62). § 34. О центре тяжести тела человека (стр. 66). § 35. Определение центра тяжести тела человека (стр. 66).

Глава VII. **Устойчивость равновесия** 68
§ 36. Понятие об устойчивости равновесия тела (стр. 68). § 37. Устойчивость равновесия тела, имеющего точку опоры или ось вращения (стр. 69). § 38. Устойчивость равновесия тела, опирающегося на плоскость (стр. 70). § 39. Статическая устойчивость равновесия тела человека (стр. 72).

Раздел II. **Кинематика**

Глава VIII. **Введение в кинематику** 76
§ 40. Основные понятия (стр. 76). § 41. Способы задания движения точки (стр. 78).

Глава IX. **Кинематика точки** 83
§ 42. Скорость точки (стр. 83). § 43. Определение скорости точки по уравнениям ее движения в прямоугольных координатах (стр. 86). § 44. Изменение скорости во времени (стр. 93). § 45. Ускорение точки (стр. 96). § 46. Определение ускорения точки при криволинейном движении (стр. 98). § 47. Определение ускорения точки при координатном способе задания движения (стр. 104). § 48. Частные случаи движения точки (стр. 109). § 49. Исследование кинематики точки методом графического дифференцирования (стр. 113).

Глава X. **Кинематика твердого тела** 116
§ 50. Поступательное движение (стр. 116). § 51. Вращательное движение (стр. 117). § 52. Равномерное и равнопеременное вращение (стр. 120). § 53. Скорости и ускорения точек вращающегося тела (стр. 122). § 54. Плоскопараллельное движение твердого тела (стр. 125)

Глава XI. **Составное движение точки** 127
§ 55. Абсолютное, относительное и переносное движение точки (стр. 127). § 56. Сложение скоростей при составном движении (стр. 129). § 57. Сложение ускорений при составном движении (стр. 130). Литература (стр. 136).

Раздел III. **Динамика**

Глава XII. **Введение в динамику** 137
§ 58. Предмет динамики и ее основные задачи (стр. 137). § 59. Основные законы динамики (стр. 138). § 60. Системы единиц (стр. 141). § 61. Классификация сил, действующих на механическую систему (стр. 142). § 62. Динамическая характеристика механических связей (стр. 143).

Глава XIII. **Дифференциальные уравнения движения точки и их интегрирование** 145
§ 63. Прямолинейное движение точки (стр. 145). § 64. Движение тела в сопротивляющейся среде (стр. 150). § 65. Движение тела, брошенного под углом к горизонту (стр. 171).

Глава XIV. **Общие теоремы движения точки** 176
§ 66. Понятие о количестве движения и кинетической энергии (стр. 176). § 67. Теорема о количестве движения материальной точки (стр. 177). § 68. Работа (стр. 182). § 69. Потенциальная и кинетическая энергия (стр. 185). § 70. Теорема о кинетической энергии материальной точки (стр. 186). § 71. Теорема о моменте

Петров Валентин Александрович
Гагин Юрий Александрович

МЕХАНИКА СПОРТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Зав. редакцией Л. И. Кулешова
Редактор А. С. Иванова
Художник В. Д. Карандашов
Художественный редактор О. И. Айзман
Технический редактор Г. А. Федотова
Корректор Л. А. Пономарева

А05397. Сдано в производство 19/XII 73 г. Подписано к печати 15/IV 74 г. Бумага типографская № 3. Формат 60×90¹/₁₆. Печ. л. 14,5. Усл. п. л. 14,5. Уч.-изд. л. 12,54. Бум. л. 7,25. Тираж 19 000 экз. Издат. № 5104. Цена 54 коп. Зак. 19.

Издательство «Физкультура и спорт» Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, К-6, Каляевская ул., 27.

Ярославский полиграфкомбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ярославль, ул. Свободы, 97.