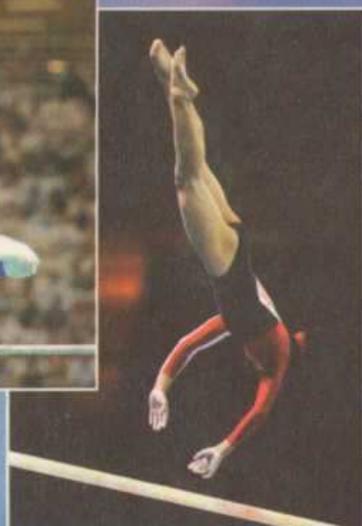


А. Е. Покатилов

**БИОМЕХАНИКА
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
СПОРТСМЕНА
С УПРУГОЙ ОПОРОЙ**



А. Е. Покатилов

**БИОМЕХАНИКА
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
СПОРТСМЕНА
С УПРУГОЙ ОПОРОЙ**

*Под редакцией
доктора педагогических наук,
профессора В. И. Загrevского*

Минск
«Издательский центр БГУ»
2006

УДК 796.01;612.766
ББК 75.0
П48

Рецензенты:

кафедра «Биомеханика» Белорусского государственного университета
физической культуры;
зав. каф. «Теоретическая механика» Белорусско-Российского
университета, д-р техн. наук, проф. *Р. М. Игнатищев*;
проф. каф. «Основы проектирования машин» Белорусско-Российского
университета, д-р техн. наук *Л. А. Борисенко*

Рекомендовано

Научно-техническим советом Могилевского государственного
университета продовольствия
28 июня 2006 г., протокол № 10

Покатилов, А. Е.

П48 Биомеханика взаимодействия спортсмена с упругой опорой /
А. Е. Покатилов ; под ред. В. И. Загrevского. — Минск : Изд. центр
БГУ, 2006. — 351 с.
ISBN 985-476-455-9.

Монография содержит анализ управляемого движения спортсмена в условиях упругой опоры. Приведено теоретическое обоснование моделей кинематики и динамики движения, в которые кроме человека включен и спортивный снаряд. Модели ориентированы на использование ПЭВМ.

Адресуется преподавателям физической культуры высших учебных заведений, научным работникам, аспирантам, тренерам, а также будет полезна студентам факультета физического воспитания педагогических институтов и университетов.

УДК 796.01;612.766
ББК 75.0

ISBN 985-476-455-9

© Покатилов А. Е., 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	8
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНА С УЧЕТОМ УПРУГОЙ ОПОРЫ	10
1.1. О моделировании движения спортсмена	10
1.2. Реакции связей и уравнения движения механических систем	19
1.3. Постановка задачи	21
1.4. Спортивные снаряды	23
1.5. Маховые упражнения	24
1.6. Системы координат и правило знаков	28
1.7. Моделирование упругой опоры	30
1.8. Трехзвенная модель опорно-двигательного аппарата тела человека с учетом упругой опоры	31
1.9. Координаты центра масс звеньев тела и суставов	40
1.10. Оценка динамических свойств системы «человек – опора»	44
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАСЧЕТОВ	53
2.1. Особенности применения численных методов	53
2.2. Учет погрешности	55
2.3. Сглаживание экспериментальных данных	58
2.4. Точность расчетов на компьютерах	60
2.5. Численное дифференцирование	62
2.6. Численное интегрирование	71
ГЛАВА 3. МОДЕЛИ КИНЕМАТИКИ	80
3.1. Угловые кинематические характеристики движения биомеханической системы	80
3.2. Линейные скорости и ускорения суставов звеньев и кинематической пары «рука – опора»	81
3.3. Направление кинематических характеристик пары «рука – опора»	86
3.4. Линейные скорости и ускорения центров масс звеньев биомеханической системы	92
3.5. Обращение опоры и сравнительный анализ ее моделей по кинематическим характеристикам	96
ГЛАВА 4. МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ ОПОРЫ	100
4.1. Фазы маховых упражнений с учетом характера нагружения опоры	100
4.2. Понятие об упругих деформациях балки при изгибе	103
4.3. О выборе типа балки и ее нагружении	105

4.4. Модели деформации опоры при статическом нагружении	107
4.5. Статическая деформация опоры, вызываемая собственным весом	112
ГЛАВА 5. РЕАКЦИИ В СУСТАВАХ И НА ОПОРЕ	114
5.1. Общие соображения	114
5.2. Силы реакции связи в суставах и на опоре	115
5.3. Состав реакции связи в кинематической паре «рука – опора» ...	129
5.4. Оценка динамики полной системы при силовом анализе	133
5.5. Влияние реакций в кинематических парах «рука – опора» на обращение опоры	135
5.6. Изменение угловых параметров кинематики биомеханической системы упругой опорой	141
5.7. Трение в кинематической паре «рука – опора»	146
5.8. Особенности правила знаков в моделях кинематики и динамики	
5.9. Движение в кинематической паре «рука – опора» и учет в ней трения	161
5.10. Распределение опорной реакции между руками	162
ГЛАВА 6. ИНЕРЦИОННЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ УПРУГОЙ ОПОРЫ	168
6.1. Учет массы упругой опоры	168
6.2. Ограничение числа степеней свободы опоры	169
6.3. Получение системы с одной степенью свободы	173
6.4. Приведение к одной массе при колебаниях опоры в двух плоскостях	179
6.5. Общий случай приведения массы опоры к двум массам	181
6.6. Расчет параметров пружин, моделирующих упругие свойства опоры	185
ГЛАВА 7. ДЕФОРМАЦИЯ ОПОРЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ	192
7.1. Виды динамических нагрузок	192
7.2. Общие задачи при исследовании колебаний спортивных снарядов	193
7.3. Свободные колебания механических систем	194
7.4. Свободные колебания систем со многими степенями свободы ...	199
7.5. Метод сил	204
7.6. Динамические нагрузки и медленно изменяющиеся силы	209
7.7. Действие произвольной возмущающей силы на систему с одной степенью свободы	220
7.8. Вынужденные колебания системы со многими степенями свободы при действии произвольных возмущающих сил	223
7.9. Кинематические параметры обращения опоры	226
7.10. Деформация упругой опоры при ударных нагрузках	231
7.11. Замечания по поводу динамических нагрузок	237

ГЛАВА 8. ГЕОМЕТРИЯ МАСС ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА И ОПОРЫ	239
8.1. Общие положения и постановка задачи	239
8.2. Центр масс сегментов и звеньев тела человека, а также их вес ...	241
8.3. Общий центр масс биомеханической системы при упругой опоре	241
8.4. Общий центр масс биомеханической системы при моделировании опоры вращающейся пружины	244
8.5. Кинематические параметры общего центра масс биомеханической системы при моделировании опоры вращающейся пружины	246
8.6. Параметры общего центра масс тела спортсмена при моделировании опоры двумя пружинами	248
8.7. Моменты инерции массы звеньев тела и биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой вращающейся пружиной	250
8.8. Моменты инерции массы звеньев тела и биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой двумя пружинами	256
ГЛАВА 9. МОДЕЛИ ДИНАМИКИ	259
9.1. Динамическая структура спортивных упражнений	259
9.2. Кинетическая энергия биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой вращающейся пружины	259
9.3. Кинетическая энергия биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой двумя пружинами	264
9.4. Кинетический момент биомеханической системы относительно оси вращения в условиях опоры, моделируемой вращающейся пружиной	267
9.5. Кинетический момент биомеханической системы относительно оси вращения в условиях опоры, моделируемой двумя пружинами ...	272
9.6. Кинетический момент биомеханической системы относительно общего центра масс спортсмена	275
ГЛАВА 10. ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ОПОРЫ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПРУЖИНОЙ	281
10.1. Постановка задачи	281
10.2. Управляющие силы мышечного аппарата человека	282
10.3. Уравнения целенаправленного движения биомеханической системы	283
10.4. Влияние многосуставных мышц на реализацию целенаправленного движения биомеханической системы	289
10.5. Общий теоретический анализ уравнений целенаправленного движения биомеханической системы в условиях упругой опоры	297
10.6. Влияние упругой опоры на целенаправленное движение	300
10.7. Алгебраическая сумма моментов управляющих сил	302

относительно шарниров звена	
10.8. Уравнения Лагранжа второго рода для целенаправленного движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры	304
10.9. Сравнительный анализ различных типов уравнений целенаправленного движения биомеханических систем	306
10.10. Силовой анализ биомеханической системы в условиях целенаправленного движения	307
ГЛАВА 11. ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ОПОРЫ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ДВУМЯ ПРУЖИНАМИ	311
11.1. Уравнения целенаправленного движения биомеханической системы при моделировании опоры двумя пружинами	311
11.2. Анализ уравнений целенаправленного движения биомеханической системы	314
11.3. Исследование динамичности полной системы	315
11.4. Моменты управляющих сил относительно соседних шарниров одного звена	317
11.5. Уравнения движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры	318
11.6. Силовой анализ биомеханической системы при моделировании опоры двумя пружинами	319
11.7. Угловые координаты биомеханической системы в условиях упругой опоры	320
ГЛАВА 12. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНА В УСЛОВИЯХ УПРУГОЙ ОПОРЫ	323
12.1. Проблемы и перспективы моделирования движения биомеханической системы	323
12.2. Выбор моделей упругой опоры	326
12.3. Сравнительный анализ двух типов моделей целенаправленного движения биомеханической системы	329
12.4. Различие моделей целенаправленного и естественного движений биомеханической системы	332
12.5. Изменение количества звеньев биомеханической системы во время движения	334
12.6. Модели целенаправленного движения и методы их расчета	334
12.7. Исследование движения спортсмена с помощью уравнений Лагранжа второго рода	337
12.8. Методика расчета моделей целенаправленного движения	339
ЛИТЕРАТУРА	343

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представленная работа является результатом научных исследований, проведенных на кафедре «Прикладная механика» Могилевского государственного университета продовольствия в содружестве со специалистами кафедры «Теория и методика физического воспитания» Могилевского государственного университета им. А.А. Кулешова.

На сегодняшний день существуют модели в области биомеханики двигательных действий спортсмена в условиях жесткой опоры. Модели используются для опорно-двигательного аппарата человека с произвольным числом степеней свободы и предназначены для расчета на ПЭВМ при биомеханическом анализе движения.

Запросы практики в области спорта требуют более сложных исследований и соответственно более сложных моделей. Это обусловлено тем, что применяемые модели не учитывают влияние спортивного снаряжения как упругой опоры на движение спортсмена, имеющее место во многих видах спорта. Предлагаемая монография и показывает пути решения этой задачи для случая плоского движения спортсмена.

Автор выражает искреннюю признательность д-ру пед. наук, профессору Загревскому Валерию Иннокентьевичу, заведующему кафедрой «Теория и методика физического воспитания» Могилевского государственного университета им. А.А. Кулешова, без встречи с которым данная работа просто бы не состоялась. Ценные замечания и советы в области моделирования высказала к.т.н., доцент, зав. кафедрой «Автоматизация технологических процессов и производств» Могилевского государственного университета продовольствия Иванова Ирина Дмитриевна. В области современных методов расчета большую помощь оказали предложения к.ф.-м.н., доцента кафедры «Высшая математика» того же университета, Гальмака Александра Михайловича. Несомненно, что без обсуждения некоторых важных вопросов представляемого исследования и ряда ценных замечаний, полученных от сотрудников кафедры «Прикладная механика» Могилевского государственного университета продовольствия, работа имела бы совсем иной вид. Автор считает приятным долгом выразить свою глубокую благодарность всем коллегам.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий период развития человечества, который принято оценивать как прогресс, характеризуется интенсивным познанием себя, окружающей среды и практическим применением полученных знаний.

На протяжении всего 20-го века возникали новые науки и новые разделы уже известных дисциплин, занимающихся непосредственно человеком. Так, во второй половине прошлого столетия зародился и стал интенсивно развиваться новый раздел механики – *механика управляемого тела*. Весьма интересно и перспективно ее приложение применительно к механике человека, которая решает очень обширный круг задач, а именно: «построение теории движения человека в открытом космосе и под водой, ходьбы, бега, гимнастических упражнений и всевозможных рабочих движений» [77].

В данной работе рассмотрен ограниченный круг задач, имеющих отношение к спорту. Нас интересуют биомеханические закономерности двигательных действий человека при выполнении спортивных упражнений. Интерес к этому огромный. Причина кроется в растущем уровне спортивных достижений и, как следствие, в необходимости совершенствования технической подготовки спортсмена.

Отметим, что механика управляемого тела имеет дело с объектами и процессами исключительной сложности, зачастую значительно более сложными, чем те, которые являются предметом исследования в физике. И тут надо иметь в виду – потребности физики в основном определили развитие математических методов [26]. Это одна из причин сформировавшегося на сегодняшний день мнения о том, что существующие методы исследования техники спортивных упражнений весьма часто не в состоянии ответить на многие вопросы практики спорта [54, 56, 57, 76, 77].

Кроме неразвитого в нужной мере математического аппарата наши знания оказываются упрощенными и не полностью отражают реальную картину движения, так как отсутствуют необходимые технические средства для исследований, методики по их применению и интерпретации полученных результатов. А следствием является недостаточное теоретическое осмысление закономерностей движения человека и взаимодействия его с окружающей средой. Разработанные на сегодняшний день модели движения достаточно просты и зачастую не охватывают всех основных факторов, влияющих на движение человека.

И это несмотря на более чем трехсотлетнюю историю моделирования движения, которая в современном виде началась с работы итальянского

натуралиста Джованни Альфонсо Борелли, связанной с изучением движения конечностей при поднятии тяжестей, ходьбе, беге, пассивном расширении легких и т.д. [26]. Результаты были опубликованы в Риме в 1680-1681 гг. уже после смерти ученого. Отметим, что Борелли в своих исследованиях пользовался в основном геометрией, а доказательства строил на базе статики. При этом основополагающие работы И. Ньютона появились почти через 10 лет. Так, «Математические начала натуральной философии» были представлены им Королевскому обществу в 1686 г. и лишь в 1687 г. напечатаны [36].

В данном исследовании поставлена цель – *изучить закономерности взаимодействия человека с упругой опорой* во время выполнения спортивных упражнений. Спортивный снаряд активно влияет на все параметры, характеризующие движение биомеханической системы (БМС), т.е. спортсмена, существенным образом изменяя кинематические и динамические характеристики движения. Таким образом, *опора, влияя на величину биомеханических параметров, создает новое качество движения и входит составной частью в структуру спортивного упражнения.*

Следовательно, сложность задачи существенно возрастает. Биомеханика оказывается на стыке многих разделов механики. Кроме методов вычислительной математики, моделирования, теоретической механики, программирования мы должны рассматривать движение в условиях упругой опоры, используя методы сопротивления материалов, теории механизмов и машин, деталей машин, триботехники и даже строительной механики.

Еще одним характерным моментом является необходимость в обработке больших массивов данных по кинематике и биодинамике движения. Эти массивы включают в себя десятки параметров движения, вычисляются многократно на всей траектории биомеханической системы и в приемлемое время могут быть получены лишь с помощью компьютерной обработки [54-57]. При этом даже использование современных ПЭВМ не всегда позволяет выполнить расчеты, и может потребоваться упрощение ряда моделей, например, моделей динамической деформации опоры¹, чтобы или получить эти модели, или свести трудоемкость их расчетов к разумной величине.

В настоящее время при создании моделей движения БМС используется весьма перспективный подход, при котором получаются уравнения в форме независимой от количества степеней свободы опорно-двигательного аппарата человека [54-57, 76-78]. Это снимает множество проблем, т.к. модели позволяют компьютеру в каждом конкретном случае самостоятельно выполнить все расчеты по единой программе. Анализ

¹ Для краткости модели, описывающие упругие перемещения опоры при ее изгибе, назовем моделями деформации.

представляемых данных происходит в самой программе, а их объем ограничен лишь задачей, здравым смыслом и временем их получения экспериментатором. Программы, спроектированные на таком принципе, являются универсальными, и их достоинство уже заключено в этом определении.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНА С УЧЕТОМ УПРУГОЙ ОПОРЫ

1.1 О моделировании движения спортсмена

Методы моделирования в той или иной степени с успехом применяются фактически во всех областях человеческой деятельности. Моделирование помогает решать задачи управления различными системами, проектирования и исследования технических, экономических, биологических, организационных и других систем [70, 71, 96, 97, 110, 114, 124]. Отметим, что из-за сложности задач на современном этапе развития часто для создания моделей необходимо привлечение специалистов различных профилей.

Одним из важнейших инструментов анализа является моделирование на ЭВМ [88, 128, 129, 132]. Быстрое развитие вычислительной техники позволило резко увеличить сложность используемых моделей и расширить область их применения [24]. Современное состояние компьютеров и программного обеспечения дает возможность строить модели, учитывающие значительное разнообразие действующих факторов, ранее не используемых при анализе. Тем самым повышается точность моделирования, и мы, кроме этого, получаем новые знания при изучении систем.

Однако отмечено, что «... математические и программные средства, «поддерживающие» отдельные этапы, развиты пока еще недостаточно и не всегда нацелены на решение фундаментальных задач моделирования» [1]. И подобные проблемы, возникающие при использовании моделирования как инструмента исследования систем, существуют в различных областях науки.

В работах [54, 56, 57] показано, что уже в самом начале анализа метода моделирования исследователь встречается с отсутствием общепринятого определения понятия «*модель*». Например, Советский энциклопедический словарь предлагает 7 определений модели. Не рассматривая классификацию моделей и их особенности, остановимся

лишь на том, что моделирование может дать исследователю. При создании модели выделяется система в качестве объекта изучения с последующим ее формальным описанием в соответствии с поставленными целями [1]. В дальнейшем такая система анализируется через поведение модели, исследуются ее свойства, состояния, возможные изменения, разрешенные и запрещенные формы существования. Основное назначение модели – сделать некоторые выводы о поведении реальной системы.

На наш взгляд, такой подход к определению модели и ее назначению не является строгим и не раскрывает ряда существенных особенностей моделирования. Ранее уже отмечалось [56, 57], что одним из лучших определений является определение по Б.А. Штоффу: «... под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте» [131].

Данное определение позволяет отметить одну из важнейших функций моделирования – получение новой информации об объекте изучения. Причем новую информацию получают, изучая не сам объект исследования, а его модель, т.е. при моделировании между изучаемым объектом и исследователем появляется промежуточное звено – модель [56].

В наиболее общем виде процесс моделирования можно разбить на ряд этапов [1]:

- создание моделей;
- программирование;
- проведение экспериментов с моделями;
- обработка результатов моделирования;
- интерпретация результатов моделирования.

При создании моделей движения человека необходимо разделить понятия о моделях анализа и моделях синтеза движений биомеханических систем. Исторически сложилось, что методы исследования техники спортивных упражнений основывались в основном на данных фотоциклосъемки и киносъемки двигательных действий и имели характер биомеханического анализа, то есть сводились к изучению уже известных форм движения [2-4, 19, 35, 50, 51, 62-64]. Методы анализа развивались первыми, как более простые [9, 29, 51, 56, 81, 82].

Модели анализа предназначены для получения количественной информации о кинематической и динамической структуре спортивных упражнений с целью последующего анализа их техники [56].

Вторым направлением исследований является построение траектории движения биомеханической системы на основе математических моделей синтеза движений [57].

Модели синтеза позволяют разрабатывать технику спортивных

упражнений с заранее заданными свойствами и характеристиками. Следует отметить, что модели синтеза движений включают в себя этап использования расчетных моделей анализа движений человека.

Исследуя *целенаправленное (управляемое)* движение биомеханической системы в условиях упругой опоры, отметим, что, несмотря на ряд серьезных работ в области механики управляемого тела [54-57, 62, 75-78], в рамках которых предложены модели для анализа и синтеза движений человека, в них принято, в явном или неявном виде, одно существенное допущение: движение биомеханической системы рассматривается без учета упругих свойств опоры. А исключение последнего фактора существенно меняет картину движения в случаях взаимодействия человека с упругим спортивным снарядом.

В работах других исследователей [59, 67, 68, 94] предлагались модели опоры с учетом ее упругих свойств, но полученные уравнения являются упрощенными, показывают лишь принципиальную возможность учета влияния опоры на движение спортсмена и не раскрывают полностью всю сложную и многообразную картину влияния спортивного снаряда на движение человека.

Следствием этого мы имеем или незнание закономерностей целенаправленного движения при контакте с упругим спортивным снарядом, или знание, но в достаточно упрощенной форме, не включающей ряд существенных факторов, оказывающих влияние на движение человека.

Таким образом, модели анализа и синтеза движения человека требуют дальнейшего развития путем учета факторов, отражающих влияние упругих свойств опоры на параметры движения биомеханических систем. Первым этапом исследований является создание моделей анализа с учетом влияния деформации упругой опоры на движение человека. Включение моделей деформации опоры составной частью в общую картину при синтезе движений спортсмена является следующим этапом работы и в данной монографии не исследуется.

Рассмотрим более подробно суть задачи анализа.

При анализе движений спортсмена исследователь имеет дело с двумя большими группами биомеханических показателей: с кинематическими и динамическими параметрами. Они используются для количественной оценки изменений, происходящих с опорно-двигательным аппаратом человека в процессе выполнения спортивных упражнений.

Кинематические параметры движения создают картину двигательных действий спортсмена в пространстве и времени. Они по определению не в состоянии раскрыть причины возникновения и изменения движения, так как кинематика изучает движение тел без учета их массы и действующих сил.

Второй составной частью моделей анализа является *динамический*

анализ техники спортивных упражнений. Именно в динамике твердого тела изучается движение с учетом масс-инерционных, силовых и энергетических характеристик этих тел. И только динамический анализ позволяет объяснить причины возникновения и изменения движения.

Как в каждой науке, в биомеханике принято использовать ряд понятий и допущений, отражающих суть этой дисциплины. Отметим те из них, что описывают общие подходы к изучению движения управляемого тела и являются для нас основополагающими. Большое значение имеют такие понятия как *материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальный шарнир, идеальная связь, системы отсчета* и пр. [56, 77]. Не отказываясь от активного использования этих понятий при разработке моделей движения человека в условиях упругой опоры, расширим перечень применяемых терминов, абстракций и допущений.

Введение в модели движения параметров деформируемой опоры вызывает необходимость использования понятийного аппарата сопротивления материалов и методов исследования упругих перемещений материала как в статике, так и в динамике. В дополнение к абсолютно твердым телам, которыми мы будем считать звенья опорно-двигательного аппарата человека, отметим, что материал опоры обладает *упругими свойствами*, т.е. при снятии внешней нагрузки он полностью возвращает себе форму и размеры, которые имел до нагружения. Также отметим, что материал опоры является *сплошной однородной средой*. Это позволяет применить аппарат математического анализа при исследовании деформации опоры.

Изучение реальных спортивных упражнений, таких как маховые упражнения на перекладине в гимнастике, позволяет предположить заметное влияние *трения* в контакте человека с опорой. Во всех предложенных ранее моделях целенаправленного движения в условиях жесткой опоры [54-57, 76-78] возникает момент сил трения на опоре. При допущении, что мышечная система человека вырабатывает управляющие мышечные силы, момент сил трения появляется автоматически в правой части уравнения движения, записанного относительно опорного шарнира. При этом одним из исходных допущений, принятым в самом начале разработки моделей, является допущение об отсутствии трения во всех кинематических парах, в том числе и в опорной.

Необходимо прояснить этот момент, оценить влияние трения на движение спортсмена во время выполнения упражнения и раскрыть основные особенности данного явления, так как уравнения целенаправленного движения однозначно указывают на определенную роль трения в контакте «человек – спортивный снаряд» в исследуемом движении. Отметим, что изучением трения занимается такая наука как *трибоника*. Но когда речь идет о техническом приложении теории трения и износа к инженерным задачам, применяют термин *триботехника*. С

практической точки зрения удобнее всего использовать имеющиеся наработки в деталях машин и теории механизмов и машин, так как на данном этапе будет достаточно применить методики и модели, разработанные для проектирования и исследования подшипников скольжения и цилиндрических шарниров, используемых в технике.

С инженерной точки зрения ряд спортивных снарядов, используемых в качестве опоры при выполнении упражнений, представляет собой технические конструкции, изучаемые строительной механикой. Так, перекладина представляет собой *пространственную раму*, ригель которой нагружен динамическими силами. Методы расчета подобных сооружений существуют, но являются весьма сложными, громоздкими и трудоемкими. Тем не менее, имеются более простые модели упругих опор, позволяющие отразить поведение реальных конструкций спортивных снарядов и при этом сохранить приемлемую точность расчетов.

Привлекая для изучения движения человека с учетом упругих свойств опоры методы, разработанные в различных разделах механики в основном для технических конструкций, сооружений, узлов, механизмов и машин, необходимо различать цели и задачи, поставленные в этих дисциплинах и в биомеханике. В сопротивлении материалов, деталях машин, строительной механике, теории механизмов и машин и т.д. ставится задача изучения поведения конкретной конструкции при внешнем воздействии. Так, при изучении деформации заданной конструкции в сопротивлении материалов определяют напряжения, деформации, внутренние силы и пр., действующие на нее. Полученные параметры используют в прочностных, проектных или проверочных расчетах.

В биомеханике же *цель* иная – здесь изучается *влияние упругих деформаций опоры на движение биомеханических систем*, а не наоборот. Поэтому возникает необходимость в осмыслении данного момента, разработке новых моделей, отражающих данную цель, а также корректировке существующих в различных разделах механики моделей и методов применительно к новым задачам исследования.

При анализе движения человека в условиях упругой опоры необходимо расчленив систему, состоящую из упругой опоры и абсолютно твердых звеньев, представляющих собой биомеханическую систему, изучением движения которой мы занимаемся. Отдельно выделим область (упругая опора), которой занимаются такие разделы механики как сопротивление материалов, детали машин, триботехника, строительная механика. Для получения же уравнений целенаправленного движения человека необходимо рассмотреть как единое целое биомеханическую систему вместе с упругой опорой. В значительной степени это позволяют сделать методы теоретической механики и методы теории механизмов и машин. С технической точки зрения опорно-двигательный аппарат человека можно представить как *незамкнутую кинематическую цепь*,

состоящую из абсолютно твердых тел (звеньев), а упругую опору смоделировать одной или несколькими пружинами.

Именно применение методов исследования механизмов и машин позволяет рассмотреть движение человека с учетом трения на опоре и ее упругой динамической деформации как единое целое и выполнить расчет уравнений целенаправленного движения биомеханической системы методом итераций.

Таким образом, проведенный анализ проблемы позволяет сделать вывод, что при моделировании движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры модели анализа включают в себя две большие группы: *модели кинематики* и *модели динамики* [56, 77].

При моделировании же движения в условиях упругой опоры модели анализа разбиваются уже на три группы: *модели деформации опоры*, *модели кинематики* и *модели динамики* биомеханической системы.

Так как трение в контакте «человек-опора» является существенным фактором и входит в уравнение целенаправленного движения спортсмена в условиях жесткой опоры [56], то необходимо выделить отдельной группой *модели трения* в опорной кинематической паре (парах) биомеханической системы при движении в условиях как жесткой, так и упругой опор.

Отметим, что из-за сложности, а порой и невозможности получения аналитических решений, в ряде случаев необходимо широко использовать численные методы расчета.

Вышеуказанное разделение моделей на крупные и отдельные друг от друга группы позволяет представить модели деформации упругой опоры в виде черного ящика. Нас интересуют лишь выходные табличные данные, которые можно получить или непосредственным измерением, или из теоретического анализа. В последнем случае, используя аналитические решения и численные методы расчета, получают таблицы значений геометрических, кинематических и динамических параметров деформации опоры. Такой подход дает возможность разработать модели для расчета кинематических и динамических характеристик спортивных упражнений без учета конкретных моделей деформации упругой опоры. В любой момент, в зависимости от задачи, цели исследования и возможностей экспериментатора модель деформации упругой опоры можно изменить, не влияя в целом на исследуемые модели, включая и уравнения движения биомеханической системы.

В ряде случаев удобнее применять приближенные методы определения параметров деформации опоры. Так, при учете массы опоры как распределенной величины получаются достаточно громоздкие модели деформации, обсчет которых или трудоемок или способы их решения неизвестны. Привлекая методы приведения числа степеней свободы упругой опоры к конечному значению, получают уравнения деформации, значительно облегчающие расчеты.

Отметим, что при аналитическом определении упругих перемещений спортивного снаряда по моделям деформации для получения количественных решений уравнений движения используется *метод приближения (итераций)*, реализованный на ПЭВМ. Здесь последовательно рассчитывают модели кинематики биомеханической системы и получают исходные данные для проведения силового анализа. Результатом последнего являются реакции, возникающие при движении тела человека и вызывающие изгиб опоры. Найденные силы прикладывают к опоре, вычисляют ее деформацию и повторяют расчеты по всем моделям, включая и модели силового анализа. Последние дают уточненное значение опорных реакций. Необходимо вновь приложить к опоре найденные силы и повторить все расчеты, начиная с моделей кинематики. Количественный анализ по данной методике выполняют многократно, до достижения заданной точности вычислений.

Включение моделей деформации в общую картину движения человека и количественное решение моделей методом приближений значительно увеличивает массив обрабатываемых данных, качественно меняя подходы к решению уравнений и к их анализу. И здесь без применения вычислительной техники получить численные решения для ряда моделей было бы весьма проблематично.

Выделим общие требования, предъявляемые к моделям опорно-двигательного аппарата человека.

Рядом проведенных исследований показано, что на примере *трехзвенной модели* биомеханической системы можно вывести все основные закономерности движения. Во-первых, при этом получают необходимые уравнения движения, описывающие многие конкретные случаи движения. Так, большинство оборотовых упражнений в гимнастике, выполняемых на перекладине, построено на выполнении сгибательно-разгибательных движений в плечевых и тазобедренных суставах [32, 42, 54-57, 92, 93] и для их формализации достаточно применить трехзвенную модель опорно-двигательного аппарата человека.

Во-вторых, на основе трехзвенной модели можно получить уравнения в компактной форме для многозвенной системы с любым числом звеньев. В гимнастике существует широкий класс движений с использованием сгибательно-разгибательных движений помимо плечевых и тазобедренных суставов. Движения при выполнении ряда спортивных упражнений осуществляются в лучезапястных, локтевых, коленных, голеностопных суставах [32, 42, 54-57]. В этом случае опорно-двигательный аппарат человека представляют многозвенной моделью, причем отличительной особенностью ее является тот факт, что количество звеньев биомеханической системы на единицу больше числа суставов, в

которых происходят сгибательно-разгибательные движения².

Отметим еще один момент, возникающий при реализации необходимой техники конкретного спортивного упражнения. Так как характер исполняемого движения постоянно меняется во времени, и сгибательно-разгибательные движения между суставами могут как возникать, так и исчезать, то получается, что в общем случае модели опорно-двигательного аппарата человека меняются динамически, завися от схемы (техники выполнения упражнения) реализации целенаправленного движения в каждый конкретный момент времени.

Недостатки при разработке моделей для каждого варианта многозвенной модели биомеханической системы очевидны. Это трудоемкость выводов, их громоздкость, возможность технических ошибок при выводе, сложность как вычислительного алгоритма, реализуемого программно с помощью ЭВМ, так и его отладки в конкретной программе, большие затраты времени на получение необходимых моделей, сложность в анализе громоздких формул и выявлении факторов, влияющих на движение, а также характера этого влияния и т.д.

Используем подход, реализованный в работах [54-56] для процесса формирования необходимых уравнений с помощью ЭВМ на уровне произвольного количества элементов биомеханической системы, т.е. для любой многозвенной биосистемы. Предлагаемые на его основе модели кинематики и динамики биомеханической системы созданы для случая жесткой опоры без учета упругих свойств материала спортивного снаряда.

Любое искомое уравнение для i -го звена сводится к *рекуррентному соотношению* типа

$$f_i = f_{i-1} + u_i, \quad (1.1)$$

где f_i – уравнение, описывающее биомеханическое состояние i -го звена;
 f_{i-1} – уравнение, описывающее биомеханическое состояние $(i-1)$ -го звена;
 u_i – свободный параметр, определяемый масс-инерционными характеристиками i -го звена и наложенными кинематическими связями.

Достаточно определить структуры f_{i-1} и u_i , а после этого, используя соотношение (1.1), выполнить в программе циклические вычисления по i , от $i=1$ до $i=N$. Таким образом, можно автоматизировать процедуру вывода необходимых уравнений для биомеханических систем с произвольным количеством звеньев.

² Здесь не учтен опорный шарнир, т.е. кинематическая пара «рука-опора», которая суставом не является.

Подчеркнем, что данная гипотеза справедлива как для кинематического, так и для динамического анализов.

В этой же работе [56] биомеханическое состояние всей системы определялось через сумму состояний звеньев биомеханической системы. Запишем данный прием как

$$f_{БМС} = \sum_{i=1}^N f_i, \quad (1.2)$$

где $f_{БМС}$ – уравнение, описывающее биомеханическое состояние опорно-двигательного аппарата человека в целом.

При изучении движения человека в условиях упругой опоры выдвинем следующие гипотезы. Во-первых, описанное рекуррентное соотношение (1.1) относится непосредственно к звеньям биомеханической системы и поэтому применимо независимо от учета или не учета упругих свойств опоры.

Во-вторых, при исследовании движения биомеханической системы без опоры, но с учетом упругого воздействия последней, соотношение (1.2) тоже справедливо. В качестве примера приведем кинетическую энергию одного лишь спортсмена, выполняющего упражнение на упругом снаряде³.

В-третьих, в случае анализа движения биомеханической системы вместе с деформируемой опорой и при определении общего состояния системы, в соотношение (1.2) входит структура f_0 , отражающая состояние именно опоры

$$f_{ПС} = f_0 + \sum_{i=1}^N f_i = f_{ОП} + f_{БМС}, \quad (1.3)$$

где $f_{ПС}$ – уравнение, описывающее состояние опорно-двигательного аппарата человека вместе с упругой опорой;

f_0 – уравнение, описывающее состояние упругой опоры. $f_0 = f_{ОП}$;

$ПС$ – полная система;

$ОП$ – упругая опора.

Необходимо отметить, что в ряде случаев структура f_0 определяется методами отличными от структур f_i , но в любом случае на величину f_0 оказывают влияние параметры движения всей биомеханической системы.

Для соотношения (1.3) расчет структур f_i ведут в интервале от $i=1$ до $i=N$. Индекс $i=0$ означает опору и относится к структуре f_0 . Данный подход позволяет упростить вывод формул, разделить по индексам

³ Кинетическая энергия самого спортивного снаряда в уравнение не входит.

факторы влияния опоры и факторы влияния биомеханической системы, а также сохранить форму записи моделей в части, относящейся непосредственно к спортсмену такой же, как и в случае контакта с жесткой опорой.

Придерживаясь единой формы записи в уравнении (1.3), но, учитывая возможность применения при необходимости различных методов для расчета структур f_0 и всех остальных f_i , запишем

$$f_{ПС} = \sum_{i=0}^N f_i. \quad (1.4)$$

В уравнении (1.4) индекс меняется от $i=0$ до $i=N$, отражая влияние каждого элемента, участвующего в движении, будь то упругая опора или звено биомеханической системы.

Те же замечания относятся и к выражению (1.1) для описания состояния i -го звена. При отсчете от $i=0$ происходит учет влияния упругой опоры на исследуемое звено.

1.2 Реакции связей и уравнения движения механических систем

Введем понятие механической системы: систему материальных точек или тел, движение (или равновесие) которой рассматривается, будем называть *механической системой*. Если между точками (телами) механической системы действуют силы взаимодействия, то она обладает тем свойством, что в ней положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения и движения всех остальных [13, 15, 22, 45, 117]. В нашем случае такими системами являются *упругая опора* (спортивный снаряд) и *тело спортсмена*. Последняя система получила название *биомеханической*. Не всегда целесообразно выделять две системы. В ряде случаев упругую опору и биомеханическую систему целесообразно исследовать как одну целую систему.

Весьма важным моментом при разработке уравнений движения биомеханической системы в условиях упругой опоры является выбор методики составления этих уравнений. В настоящее время существует достаточно много методов, учитывающих определенные особенности движения и имеющих границы применимости, а есть и универсальные, используемые во всех случаях. Отметим, например, получение уравнений движения механических систем с помощью *основного закона динамики*, *общих теорем механики* или с помощью общих положений, получивших название *принципы механики*. Уравнениями, имеющими «ограниченное применение»⁴, являются *уравнения Лагранжа второго рода*, *уравнения*

⁴ Означает применимость для описания движения с определенными условиями.

Лагранжа с неопределенными множителями^{**}, уравнения Аппеля и т.д.

По сути дела надо решить вопрос как в той истории про зверей, которые задумали проложить мост, но не подумали, как это сделать – построить его вдоль или поперек реки? Чтобы разобраться в этом немаловажном вопросе и выбрать приемлемый метод, позволяющий разработать уравнения движения для нашего случая, вначале рассмотрим классификацию связей.

Связями называют ограничения, стесняющие движения системы и осуществляемые какими-либо другими материальными телами. Будем предполагать, что какими бы ни были материальные тела, осуществляющие связи, их действие на систему выражается силами, приложенными к системе и определенным образом направленными. Эти силы называются реакциями связей [10].

Связи могут быть *аналитически* представлены уравнениями, которым должны удовлетворять координаты точек системы и производные от координат по времени. Указано [10, 12, 118], что связи, представленные уравнениями⁵

$$f_k(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) = 0 \quad (1.5)$$

$(k = 1, 2, \dots, m; m < 3N),$

где N – число точек системы;

x_i, y_i, z_i – координаты точек системы,

не содержащими производных координат по времени, или уравнениями, содержащими производные, но интегрируемыми и приводящимися к виду (1.5), называются *голономными связями*. Эти связи главным образом ограничивают выбор возможных положений системы.

Связи, представленные уравнениями, содержащими производные от координат и являющимися неинтегрируемыми, называются *неголономными*. Неголономные связи, не налагая, как правило, ограничений на выбор положений системы, большей частью вынуждают последнюю двигаться из данного положения в некотором определенном направлении, т.е. ограничивают выбор величины и направления скоростей точек системы.

Реакции связей обычно неизвестны, лишь задаются или описываются способы осуществления связей. Указано [10, 73, 95, 116], что полное определение реакций связей, т.е. определение их точек приложения, направления и величины производится с помощью некоторых допущений

^{**} Иногда эти уравнения называют уравнениями Рауса-Феррерса.

⁵ Такие связи определяют как «удерживающие» или «двусторонние». Существуют связи и «неудерживающие» или «односторонние», они выражаются неравенствами.

из условий равновесия или уравнений движения системы. В последнем случае – после определения движения системы. Реакции, рассчитанные из условия равновесия с учетом других приложенных к системе сил, называются *статическими реакциями*. Эти другие силы, приложенные к системе, кроме реакций связей, принято называть *заданными* или *активными силами*. Реакции связей во время движения системы – реакции, определяемые из уравнений движения, – называются *динамическими реакциями*.

Если в уравнения связей (1.5) время явно не входит, то связи называются *стационарными* (неизменяемыми) или *склерономными*. Иначе их определяют как *нестационарные* или *реономные*.

Как ранее указывалось, при разработке уравнений движения биомеханической системы в условиях упругой опоры исследователь имеет ряд отдельных групп моделей. В данной работе будем ориентироваться на аналитическое, а не экспериментальное определение параметров деформации упругой опоры во время выполнения спортивного упражнения. В этом случае для решения уравнений движения биомеханической системы необходимо дополнительно иметь *уравнения движения опоры*.

Анализ литературы показывает [10, 101, 102, 113], что в разделах механики, таких как сопротивление материалов и строительная механика, рассматривающих динамическое нагружение опор, широко используются уравнения Лагранжа второго рода, применяемые при голономных связях. При этом динамическая нагрузка вызывает колебания. Отмечено, что модели деформации в виде уравнений Лагранжа второго рода представляют собой наиболее общую форму записи дифференциальных уравнений колебаний механических систем со многими степенями свободы [102]. Саму упругую опору моделируют балкой, а одним из методов перехода к конечномерным моделям является приведение распределенной массы к одной или более точкам. При этом различают две формы записи колебаний: прямую и обратную. Отметим, что обе формы можно получить, минуя процедуру составления уравнений Лагранжа.

Теперь, что касается непосредственно моделирования движения человека. Рядом исследователей разработаны модели кинематики и динамики биомеханических систем в случае взаимодействия с жесткой опорой [54-57, 76, 77]. Предложены уравнения естественного и целенаправленного движений, имеющие форму уравнений Лагранжа второго рода. Предпосылкой составления уравнений в данной форме является допущение идеальности связей, их голономности.

Отметим, что все эти уравнения движения выведены по отдельности для каждой из систем – отдельно для упругих опор, отдельно для биомеханических систем, моделирующих опорно-двигательный аппарат человека.

1.3 Постановка задачи

Во-первых, очертим область исследования биодинамических характеристик движения спортсмена в условиях упругой опоры, представленной в данной работе. За *предмет исследования* возьмем *выполнение маховых упражнений* в гимнастике. При этом ограничимся случаями контакта спортсмена со снарядом. Полетную часть затрагивать не будем. Случаи, выходящие за указанные рамки, оговорим особо. Кроме этого, рассмотрим только *плоское движение* спортсмена, но не пространственное.

Во-вторых, определимся в методах разработки уравнений движения биомеханической системы. Переходя от анализа деформации спортивного снаряда к учету ее влияния на движение биомеханической системы, необходимо изменить тип модели. В теоретической механике отработан прием, когда упругие свойства физического тела моделируют с помощью невесомой пружины [11, 12, 133]. В случае выполнения маховых упражнений на спортивном снаряде, обладающем упругими свойствами, последние можно моделировать одной вращающейся или двумя поступательно движущимися пружинами. В качестве спортивного снаряда выступают перекладина, женские бруссы и т.д.

По поводу пружин отмечено следующее: существуют системы *свободные* и *несвободные*. На движение несвободных систем наложены наперед заданные, т.е. не зависящие от закона движения системы, кинематические ограничения. Их называют связями или аналитическими связями. Этим подчеркивается, что не всякое ограничение, налагаемое на движение точек системы, есть аналитическая связь. Так «... пружина, поддерживающая груз, не является аналитической связью, т.к. ограничения, налагаемые пружиной на движение груза, зависят от закона движения груза».

В этом случае груз является как бы свободной материальной точкой, находящейся под действием силы, зависящей от ее движения» [73].

Это замечание является весьма важным, так как для исследования движения широко применяются уравнения Лагранжа второго рода, используемые при голономных, т.е. аналитических связях. В случае наличия неаналитической связи возникает множество вопросов по применению данного способа составления уравнений при исследовании взаимодействия спортсмена с упругой опорой.

Имеются проблемы и в изучении деформации упругого спортивного снаряда этим методом, т.е. с помощью непосредственного составления уравнений Лагранжа второго рода. Затруднение связано с построением выражения потенциальной энергии в форме, пригодной к использованию в уравнениях Лагранжа.

Представляется, что наиболее удобным и практичным вариантом в

данной ситуации окажется такой универсальный метод составления уравнений движения, как метод кинестатики. В основе его лежит один из общих принципов механики, называемый *принципом Даламбера*. В этом случае отпадают проблемы, связанные с классификацией типа связи и выбора способа составления уравнений движения – связи могут быть как голономными, так и неголономными [83], можно рассматривать как несвободные тела [118], так и системы, соединенные с опорой пружиной (например, груз, подвешенный на пружине [11, 12]), т.е. тела свободные.

Особенно удобно применение кинестатического принципа составления уравнений движения при необходимости учета сил трения в кинематических парах [81-83].

В-третьих, при выводе уравнений динамики необходимо использовать такой значимый фактор, как *масса опоры*. Дело в том, что ряд звеньев биомеханической системы имеет массу того же порядка, что и масса опоры. Это относится, например, к звеньям, составляющим руку. Приведем параметры руки по работе [56], указанные через вес. Так, кисть конкретного спортсмена весит 0,433 кгс, предплечье – 1,124 кгс, плечо – 1,899 кгс. Вес элемента спортивного снаряда, являющегося упругой опорой для спортсмена, может составлять более десяти килограмм. Сопоставляя веса звеньев и опоры, логично предположить, что влияние динамической деформации массивной опоры на движение биомеханической системы оказывается более существенным фактором по сравнению с влиянием просто невесомой опоры, и им нельзя пренебрегать.

Таким образом, при изучении целенаправленного движения необходимо разработать модели кинематики и динамики движения биомеханической системы в условиях упругой опоры, в которой последняя моделируется пружиной или пружинами. Параметры деформации реального спортивного снаряда⁶ определяют все геометрические и кинематические характеристики пружины. Масса же опоры необходима как при создании моделей деформации спортивного снаряда, так и при выводе уравнений динамики движения спортсмена.

Следует отметить еще один существенный момент. Любая реальная механическая система представима в виде бесконечного числа материальных точек, массы которых бесконечно малы. Поэтому число степеней свободы такой системы бесконечно велико и точное решение задачи о ее колебаниях удастся получить в замкнутой форме лишь в немногих, относительно простых случаях [102]. Так как в общем случае сделать это невозможно, то приходится упрощать расчетную модель, например, путем уменьшения числа степеней свободы. Трудоемкость расчетов падает на много порядков, и вычисления легко реализуются на любой персональной ЭВМ.

⁶ Моделью реального снаряда может служить балка с приведенной массой.

В-четвертых, классифицируем фазы спортивных упражнений с точки зрения характера нагружения упругой опоры и определим для них критерии как качественные, так и количественные, так как с этим связаны методы исследования деформации опоры и соответственно получаемые модели.

Исследования по механике управляемого тела в условиях упругой опоры находятся на стыке многих разделов механики, поэтому возникает проблема с терминологией и обозначениями. Так, при описании моделей динамики биомеханической системы используют *осевой момент инерции массы* **, обозначаемый в литературе, например, относительно оси OY , как I_y [12, 15, 45, 118]. При расчете изгибных перемещений в сопротивлении материалов оперируют *осевым моментом инерции сечения* как чисто геометрической характеристикой, не зависящей от массы, а только от размеров и формы поперечного сечения балки. Такой момент инерции сечения относительно оси OY обозначают аналогично I_y [40, 74, 117, 125]. Необходимо учитывать это при выводе уравнений и вводить соответствующие поправки в обозначения или оговаривать подобное различие.

1.4 Спортивные снаряды

Представим ряд спортивных снарядов [32], используемых для разработки моделей кинематики и динамики движения биомеханических систем в условиях упругой опоры. За основу взяты снаряды в гимнастике, на которых возможно выполнение маховых упражнений. Кроме них приведен и мостик, так как некоторые выводы в данной работе применимы и к нему⁷.

Брусья. Брусья подразделяются на мужские и женские.

1. *Мужские брусья.* Длина жердей составляет 350 см. Поперечное сечение в форме овала. Жерди соединены с вертлюгами и стойками, укрепленными на станине. Устанавливают их на высоте 160-170 см от пола; расстояние между жердями 42-62 см.

2. *Женские брусья* (разной высоты). Нижняя жердь располагается на высоте 130-150 см, верхняя – от 190 до 240 см, расстояние между жердями составляет от 43 до 55 см.

3. *Низкие (вспомогательные).* Высота жердей от 100 до 130 см.

4. *Перекладина.* Представлена на рисунке 1.1. Состоит из гладкого, шлифованного грифа 28 мм в диаметре, укрепленного горизонтально на двух стойках с помощью растяжек. Перекладину можно устанавливать на различную высоту, в зависимости от упражнения – от 120 до 240 см. Перекладина олимпийского образца имеет пустотелые стойки. К полу ее

** Масс-инерционная характеристика движения.

⁷ Например, удар.

крепят с помощью крюков.

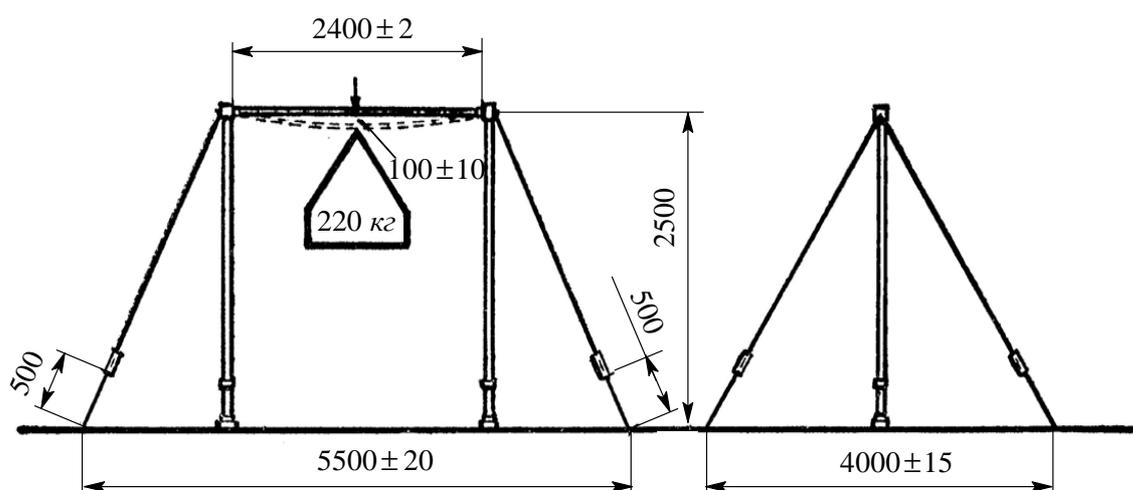


Рисунок 1.1 – Перекладина

Мостик. Применяют для прыжков, упражнений на бревне, на брусьях (одинаковой конструкции). Высота 12 см, ширина 60 см, длина 130 см.

Трамплин (пружинный мостик). Высота составляет 40 см, длина 120-130 см.

1.5 Маховые упражнения

Маховые гимнастические упражнения представляют собой сложные двигательные акты и при этом являются самой характерной группой гимнастических движений. От статических и силовых упражнений они отличаются разнообразием форм движения, динамичностью, сложностью техники. На сегодня известны тысячи маховых упражнений на снарядах [106, 108, 119, 120]. Они включаются в программы по гимнастике для всех спортивных разрядов и составляют главное содержание их учебного материала [32].

В общем случае при выполнении маховых упражнений тело спортсмена совершает сложные движения, имеющие пространственный характер. Спортсмен делает два типа движений: *переместительное* и *вращательное* [106, 108]. Например, гимнаст, выполняющий соскок сальто назад прогнувшись с перекладины или опорный прыжок через коня в длину (переворот вперед), перемещается по определенной траектории. При правильной технике траектория общего центра тяжести тела (ОЦТ) при безопорных перемещениях имеет форму параболы. Одновременно с этим спортсмен совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через ОЦТ.

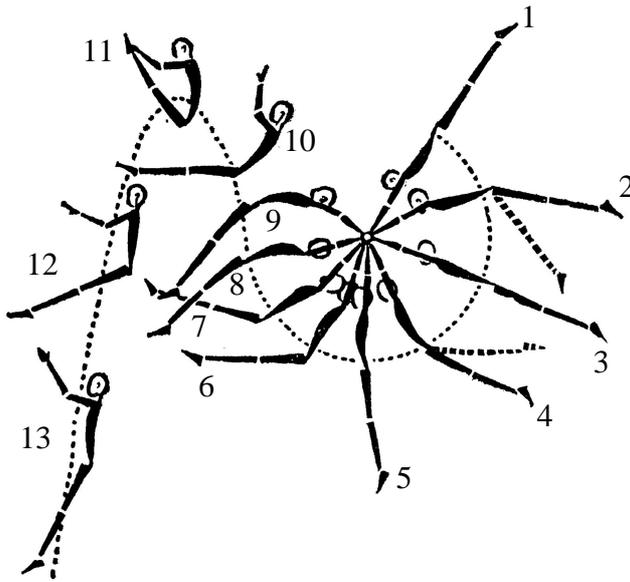


Рисунок 1.2 – Соскок махом вперед с перекладины

На рисунке 1.2 показан соскок махом вперед с перекладины. Спортсмен последовательно пользуется приемами управления амплитудой маха (кадры 1-7), отталкиванием, изменяющим первоначальное направление вращательного движения (кадры 7-9), а также изменяет в полете позу, ускоряя при этом вращение вперед (кадры 9-11), а затем его замедляя (кадры 11-12).

В ряде случаев ось вращения гимнаста совпадает с осью снаряда⁸.

При исполнении гимнастических упражнений тело спортсмена может вращаться вокруг трех основных осей. Большинство махов, оборотов, сальто, прыжков и множество других упражнений выполняются с вращением вокруг фронтальной (поперечной) оси. Широко используется и вращение вокруг продольной оси, с которым связано исполнение различных поворотов. Гимнаст может вращаться и вокруг передне-задней оси (в сальто, переворотах боком и др.). В ряде сложных гимнастических упражнений совмещается вращение вокруг нескольких осей. Это почти все движения с поворотами, при которых гимнаст одновременно вращается вокруг поперечной и продольной осей.

Для исследуемой темы интерес представляют все маховые упражнения гимнаста в контакте со спортивным снарядом, совершаемые в одной плоскости, т.е. имеющими в своей основе вращение тела вокруг фронтальной оси.

⁸ Например, на перекладине или брусьях разной высоты.

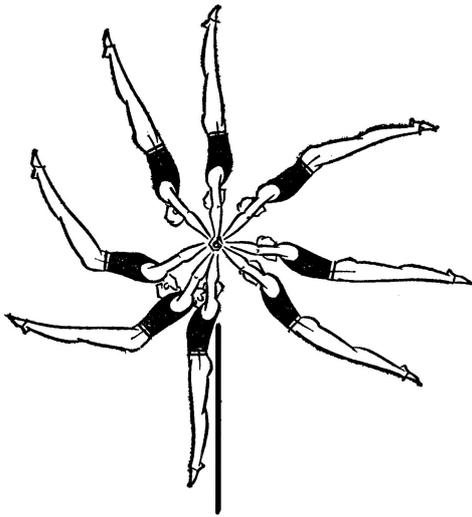


Рисунок 1.3 – Большой оборот назад на перекладине

На рисунке 1.3 показан *большой оборот назад на перекладине* в качестве махового гимнастического упражнения, содержащего вращение относительно фронтальной оси. Выполняется после оборота назад из упора в вис (или стойку), а также в соединении со многими движениями типа больших оборотов.

Очень разнообразны и упражнения на брусках разной высоты. Они подразделяются на статические и динамические⁹. Современные комбинации на данном снаряде состоят из динамичных маховых элементов и соединений, выполняемых с максимальной амплитудой.

В качестве примера махового упражнения, выполняемого на брусках разной высоты, покажем на рисунке 1.4 подъем разгибом.

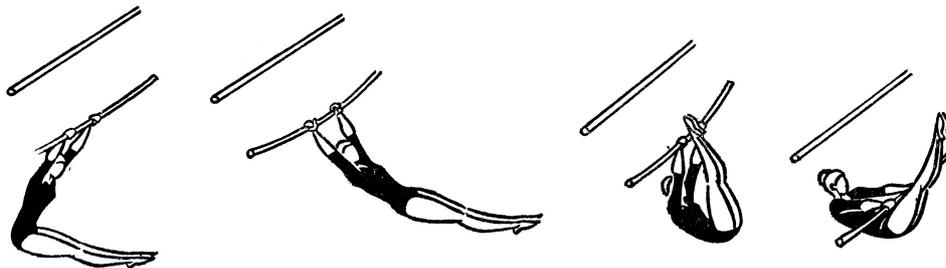


Рисунок 1.4 – Подъем разгибом

Приведем классификацию маховых упражнений на рисунке 1.5 по работе [32]. Здесь учитываются следующие структурные признаки упражнений: характер рабочего положения тела гимнаста на снаряде, наличие и направление исходного маха всем телом, характер основных действий.

⁹ К статическим относят разнообразные седы и их перемены, равновесия, стойки на руках, упоры, висы. Динамические упражнения включают в себя подъемы, перевороты, обороты, перемахи ногами, повороты, размахивания, перелеты, соскоки.

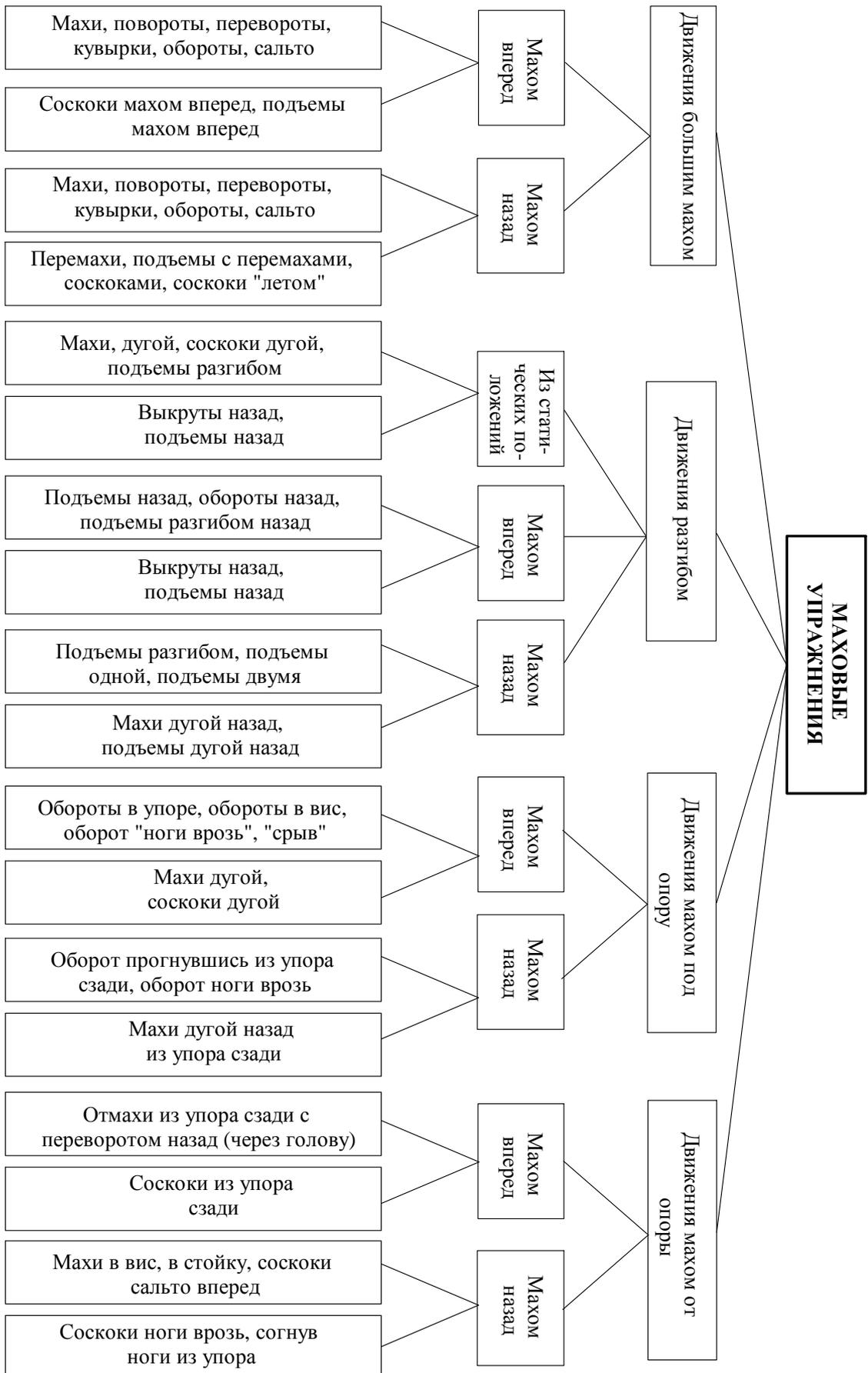


Рисунок 1.5 – Классификация маховых упражнений

1.6 Системы координат и правило знаков

При анализе маховых упражнений, даже если вращение тела спортсмена осуществляется только относительно фронтальной оси, декартовой координатной системы на плоскости недостаточно, так как сама опора¹⁰ перпендикулярна плоскости вращения. Значит, необходимо использовать *пространственную систему координат*.

Это первое требование к координатной системе для случая плоского движения спортсмена в условиях упругой опоры. Оно позволяет исследовать не только движение биомеханической системы, но и вывести уравнения движения для деформируемого в упругой области спортивного снаряда.

Такая координатная система представлена на рисунке 1.6.

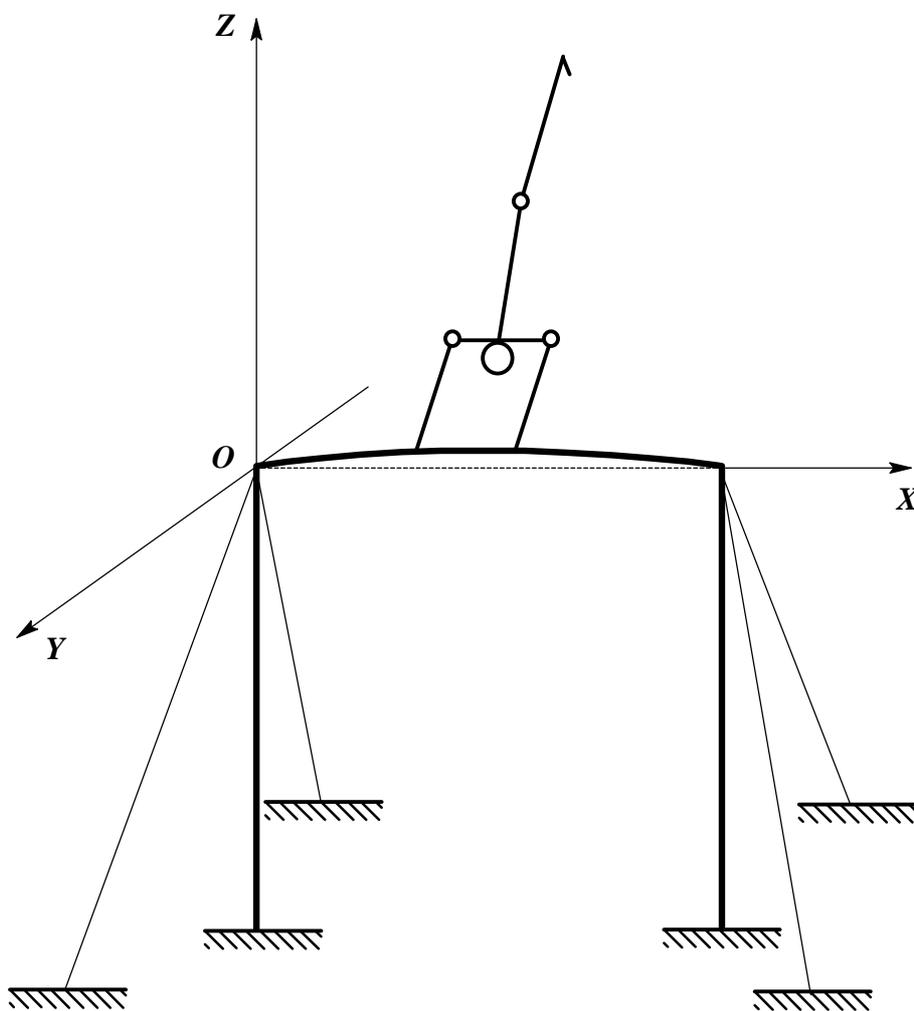


Рисунок 1.6 – Спортивный снаряд и основная система координат

С целью сохранения принятых в литературе обозначений для

¹⁰ Это может быть гриф перекладины или жердь женских брусев.

аргумента – x , а для функций – y и z применим левую прямоугольную систему координат.левой является система, в которой кратчайший поворот оси OX к оси OY совершается по часовой стрелке, если смотреть с положительного конца оси OZ .

Другим требованием является требование неподвижности координатных осей в пространстве. В случае жесткой опоры оно реализуется автоматически при привязке координатной системы к опоре. В нашем случае, когда опора упруго деформируется во время выполнения спортивного упражнения, необходимо на систему наложить ограничение: считаем систему координат неподвижной и привяжем ее к первоначальному (недеформированному) положению спортивного снаряда. В случае изучения маховых упражнений на перекладине необходимо поместить неподвижную прямоугольную пространственную систему координат таким образом, чтобы начало координат (точка O) располагалось на стойке, ось абсцисс (ось OX) шла вдоль грифа перекладины, а аппликата (ось OZ) была направлена по вертикали как продолжение стойки. Ордината (ось OY) окажется перпендикулярной грифу перекладины (рис. 1.6) и будет направлена по горизонтали. Положение системы координат неизменно в любой момент движения биомеханической системы. Такая координатная система носит название *основной*.

Основную (неподвижную) координатную систему используют для исследования *абсолютного* движения биомеханической системы. Уравнения движения биомеханической системы будем выводить относительно координатных осей основной системы, и в ней же удобно определять все параметры упругой деформации, включая геометрические, кинематические и динамические характеристики прогиба опоры.

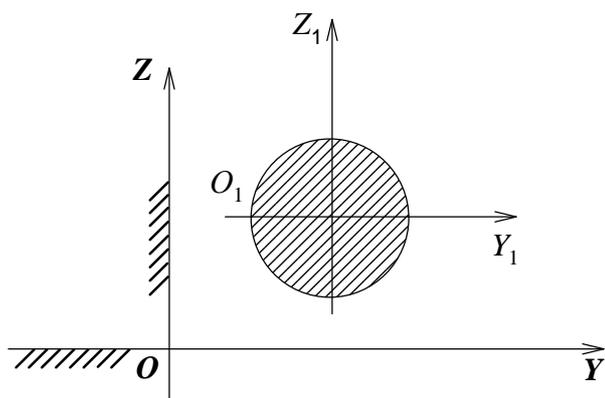


Рисунок 1.7 – Дополнительная координатная система $O_1Y_1Z_1$ и поперечное сечение грифа

перекладины Кроме неподвижной
удобно ввести и
дополнительную координатную систему, неотрывно связанную с деформированной опорой. Так, при рассмотрении грифа перекладины в поперечном сечении в каждом случае совмещаем начало координат с центром тяжести сечения (рис. 1.7). Это позволяет создавать менее сложные модели, упрощает вывод уравнений, уменьшает трудоемкость расчетов и служит дополнительной гарантией от ошибок.

При таком подходе физическая природа полученных моделей становится более наглядной, понятной, а само содержание уравнений прозрачным.

Дополнительные системы координат будут удобны и при рассмотрении звеньев опорно-двигательного аппарата человека. В теоретической механике подобные системы координат используются для исследования относительного движения в теме «Сложное движение». При необходимости записи уравнения относительно основной координатной системы надо лишь внести в модели дополнительные элементы, отражающие связь между подвижной и неподвижной координатными системами.

1.7 Моделирование упругой опоры

Упругие свойства физических тел при выводе уравнений движения биомеханической системы моделируются пружиной [12, 73, 118, 133]. Из анализа маховых упражнений на перекладине или брусьях разной высоты получаем несколько видов движения опоры. Ее упругие свойства, учитываемые в уравнениях движения биомеханической системы, можно смоделировать *одной вращающейся* или *двумя поступательно перемещающимися пружинами*: горизонтальной и вертикальной [58, 105].

Модели деформации в данной главе не рассматриваются, но независимо от целей моделирования и соответственно применяемого типа моделей под опорой всегда будем подразумевать только упругую часть спортивного снаряда, если иное не оговорено дополнительно. Эта часть также носит название рабочей части спортивного снаряда.

Отметим важную деталь: обе модели в виде пружин являются *эквивалентными*, т.е. замена одной на другую не влияет на конечный результат. Другое дело, что удобство работы, трудоемкость выводов формул и расчетов по ним у этих моделей разные. По поводу эквивалентности добавим лишь, что при решении ряда уравнений численными методами могут появиться дополнительные проблемы, связанные с точностью, устойчивостью, корректностью и пр. выбранных методик и даже с самой возможностью получения выводов. Все это в конечном итоге может повлиять на точность решений по первой и второй моделям.

Более подробно достоинства и недостатки каждой модели, а также их эквивалентность рассмотрены на протяжении всей книги и суммированы в главе 12, п. 12.2 и п. 12.3. Необходимость в применении сразу двух типов моделей упругой опоры в целях изучения движения биомеханической системы также обосновывается тем, что без сопоставления кинематических и динамических параметров этих моделей опоры сложно прояснить ряд физических закономерностей движения биомеханических систем в целом. А значит, появляются дополнительные проблемы при разработке моделей движения и выборе соответствующих методов решения. Затруднена и правильная интерпретация результатов расчетов. Возможны серьезные ошибки, ведущие к неправильным выводам.

Кроме вышесказанного на данной стадии исследований нельзя судить о том, какие модели опоры более приемлемы для использования при синтезе управляемого движения спортсмена.

1.8 Трехзвенная модель опорно-двигательного аппарата тела человека с учетом упругой опоры

На рисунке 1.9 показан скелет человека [20], который при создании моделей кинематики и динамики представляют в виде кинематической цепи. Звеньями этой цепи являются кости. В зависимости от задачи количество звеньев меняется.

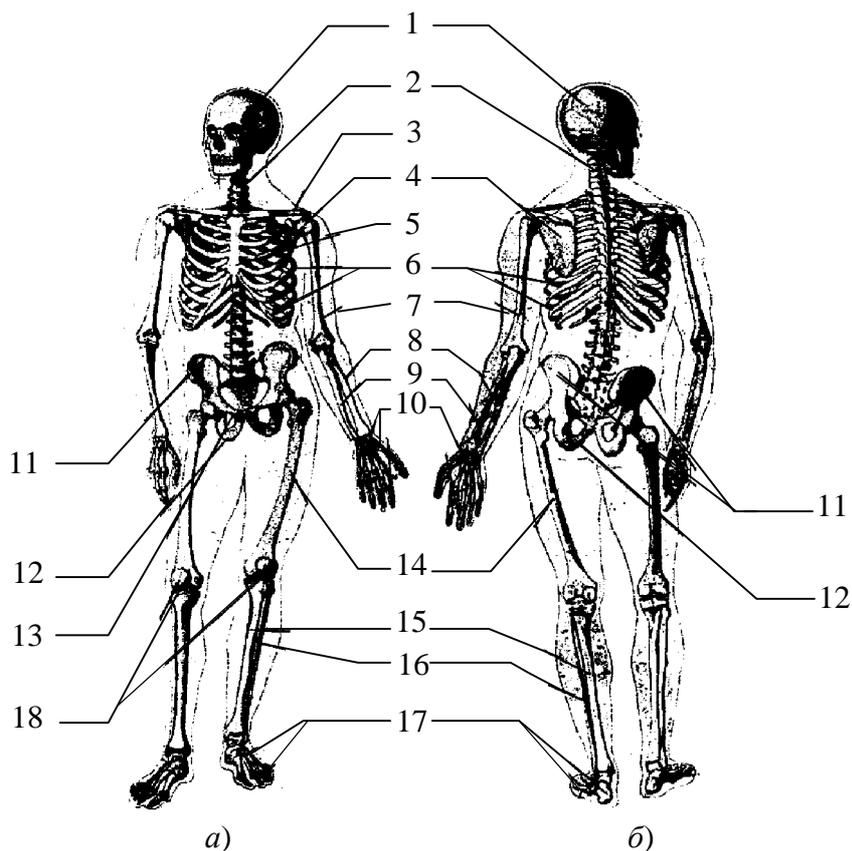


Рисунок 1.9 – Скелет человека: а) вид спереди; б) вид сзади

1 – череп; 2 – позвоночный столб; 3 – ключица; 4 – лопатка; 5 – грудина; 6 – ребра; 7 – плечевая кость; 8 – лучевая кость; 9 – локтевая кость; 10 – кости кисти; 11 – позвонковая кость; 12 – седалищная кость; 13 – лонная кость; 14 – бедренная кость; 15 – большая берцовая кость; 16 – малая берцовая кость; 17 – кости стопы; 18 – надколенник

Так, например, верхнюю конечность (руку) можно рассматривать как одно звено, как два звена и т.д.¹¹ Но чтобы представить такую цепь, а потом на ее основе разработать модели кинематики и динамики движения биомеханической системы, необходимо создать новую методику составления уравнений, отличную от принятой в механике для различных механизмов, состоящих из твердых тел.

Так, в теории механизмов и машин расчеты начинаются с вычерчивания схемы механизма, называемой кинематической. На ней выбирают линейные размеры и углы, необходимые для прорисовки по ним механизма в любой момент времени. Геометрические параметры механизма, изменяемые во времени, принимают за обобщенные

¹¹ Например, одно звено включает плечевую кость, кости предплечья (лучевая и локтевая) и кости кисти. Или же плечевая кость – это одно звено, а второе – кости предплечья и кости кисти.

координаты и из геометрических соображений находят соотношения между ними и другими параметрами [9, 77, 81-83, 87]. Полученные уравнения есть уравнения кинематики данного механизма. Метод удобен для сравнительно простых механизмов. Но если учесть, что скелет человека состоит из 206 костей, при этом 170 из них парные и 36 непарные [100], то при пространственном движении оказывается, что биомеханическая система имеет многие и многие сотни степеней свободы. Да и в случае плоскопараллельного движения число степеней свободы тоже измеряется сотнями. А это вызывает крайне уважительное отношение к проблеме разработки моделей целенаправленного движения. И не удивительно, что еще никому не удавалось построить кинематическую схему тела человека [77].

Но и это еще не все. Систему, представляющую собой агрегат твердых тел (звеньев), связанных между собой при помощи разного рода подвижных соединений, принято называть *базисной*. Такие модели хорошо себя показали при исследовании *локомоций*** . Но не все виды целенаправленного движения описываются с помощью базисных моделей. Например, для изучения движений языка или речевых артикуляций требуется более совершенная модель [77]. То же можно сказать и про модели, используемые в расчетах на удар. Ударными поверхностями тела человека в гимнастике являются живот, ладони и пр.

Поэтому необходимо предложить такой метод составления уравнений кинематики и динамики движения БМС в условиях упругой опоры, который не требовал бы вычерчивания кинематической схемы.

На сегодняшний день рядом исследователей [2-6, 50-52, 54-57, 76, 77] уже разработаны модели как опорно-двигательного аппарата, так и отдельных частей и органов человека, например, руки или зрительного аппарата. Воспользуемся трехзвенной моделью биомеханической системы, совершающей движение в условиях жесткой опоры. Именно такая модель положена в основу при выводе уравнений движения биомеханической системы с произвольным количеством звеньев и с использованием рекуррентных соотношений (1.1), что позволяет избежать как вычерчивания кинематических схем для конкретных задач, так и записи уравнений на бумаге – вывод необходимых выражений происходит непосредственно в компьютере [56].

Немного о терминологии. В исследованиях по биомеханике используется понятие *звена* [46-48, 53-58, 62, 75, 77]. Расширим его трактовку до применяемой в теории механизмов и машин [9, 83]. Звеном будем называть *любое твердое тело*, входящее в систему «человек – спортивный снаряд». Под твердыми телами подразумеваем как абсолютно

** Локомоциями называются перемещения тела как целого, движение отдельных конечностей и т.п.

твердые, так и деформируемые и гибкие тела. Таким образом, упругая опора тоже является звеном. При необходимости и упругие мышцы живота можно рассматривать в качестве звена.

Кроме подвижных звеньев существуют и неподвижные. Спортивный снаряд без упругого опорного элемента, закрепленный на какой-то поверхности, является неподвижным звеном и его можно называть стойкой.

Следовательно, систему, состоящую из трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата человека, дополняем одним или двумя упругими звеньями и стойкой. Количество упругих звеньев зависит от применяемой модели опоры в виде определенного количества пружин. Тогда полную систему можно назвать соответственно пяти- или шестизвенной с учетом стойки. Четырех- или пятизвенной – без учета стойки. И трехзвенной при учете только звеньев биомеханической системы.

При исследовании движения биомеханической системы в условиях упругой опоры нам понадобится такое понятие как *число степеней свободы механической системы*. В механике под ним понимают число возможных перемещений системы. В системах с голономными связями число степеней свободы, т.е. число независимых возможных перемещений, совпадает с числом обобщенных координат. *Обобщенными координатами* называют независимые между собой координаты, определяющие положения всех звеньев системы¹² относительно стойки [83].

В работах [81-83] вводится понятие о *цепных системах*, представляющих собой последовательное соединение жестких звеньев, соединенных упругими элементами. Отметим, что термин рассматривается для механизмов, в которых звенья имеют вращательное движение. Указано, что общее число степеней свободы цепной системы равно сумме числа степеней свободы механизма с жесткими звеньями и числа упругих элементов. Возьмем на вооружение этот принцип, но с некоторыми изменениями. Для биомеханической системы в условиях упругой опоры число степеней свободы складывается из числа степеней свободы БМС и числа степеней свободы упругих элементов. Таким образом, *трехзвенная* биомеханическая система вместе с упругим спортивным снарядом имеет *пять степеней свободы*. Здесь число степеней свободы не зависит от количества пружин, которыми моделируется выбранный нами спортивный снаряд¹³. Модель опоры в виде одной вращающейся пружины дает две степени свободы – ее растяжение-сжатие и вращение. Цепная система с двумя поступательно движущимися пружинами тоже дополнительно имеет две степени свободы за счет независимого движения пружин в двух направлениях.

¹² В первоисточнике – механизма.

¹³ В качестве такового используем перекладину.

Условимся отдельные модели, описывающие поведение опоры, называть *моделями опоры*. Модели для расчета параметров движения опорно-двигательного аппарата человека в целом, т.е. с учетом *полного влияния* упругого снаряда, получают название *моделей биомеханической системы в условиях упругой опоры*. А комплексные модели, включающие две системы (отдельно взятую опору и биомеханическую систему с учетом всего влияния спортивного снаряда), – *полными моделями биомеханической системы* или просто *полными моделями*. Соответственно систему, состоящую из механической и биомеханической систем, назовем *полной системой*.

Во все вышеуказанные модели параметры опоры входят в явном виде. Далее будет показано, что спортивный снаряд влияет на движение не только через изменение характеристик своего движения, но и путем изменения параметров движения самой биомеханической системы. Для описания этих процессов введем еще одно понятие – части моделей биомеханической системы в условиях упругой опоры, не содержащие параметры спортивного снаряда в явном виде, назовем *выделенными*. Сама биомеханическая система, для которой получены эти модели, тоже будет выделенной.

После выделения остаются части уравнений с параметрами спортивного снаряда в явном виде. Их назовем *выделенными моделями опоры*.

Рассматривая вопрос выделения конкретной исследуемой системы из более общей, необходимо различать модели кинематики и модели динамики. В соответствующих разделах книги эта классификация поясняется более подробно, здесь же покажем в виде общих закономерностей, что для моделей кинематики связь между введенными понятиями можно отразить как

$$f_K(ПС) = f_1(ОП) + f_2(БМС^B) = f_1(ОП^B) + f_2(БМС^B), \quad (1.6)$$

где $f_K(ПС)$ – полная модель кинематики (полная система);

$f_1(ОП)$ – модель кинематики опоры;

$f_1(ОП^B)$ – выделенная модель кинематики опоры;

$f_2(БМС^B)$ – выделенная модель кинематики биомеханической системы.

В этом случае модель кинематики опоры и ее выделенная модель есть одно и то же. Имеем

$$f_1(ОП) = f_1(ОП^B). \quad (1.7)$$

Для моделей динамики получим:

$$\begin{aligned} f_D(ПС) &= f_3(ОП) + f_4(БМС), \\ f_4(БМС) &= f_5(ОП^B) + f_6(БМС^B), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $f_D(ПС)$ – полная модель динамики;
 $f_3(ОП)$ – модель динамики опоры;
 $f_4(БМС)$ – модель динамики биомеханической системы (в условиях упругой опоры);
 $f_5(ОП^B)$ – выделенная модель динамики опоры;
 $f_6(БМС^B)$ – выделенная модель динамики биомеханической системы.

Это позволяет любую полную модель динамики представить как

$$f_D(ПС) = f_3(ОП) + f_5(ОП^B) + f_6(БМС^B). \quad (1.9)$$

А значит, параметры опоры в явном виде в уравнения динамики полной системы входят дважды. Первый раз – в качестве отдельно взятых формул $f_3(ОП)$, а второй – тоже в явном, то есть выделенном в отдельные зависимости $f_5(ОП^B)$, но уже составными частями моделей биомеханической системы в условиях упругой опоры.

Сравнительный анализ уравнений (1.6-1.9) показывает разные отношения между системами в моделях кинематики и динамики. При исследовании кинематики полная модель является моделью биомеханической системы в условиях упругой опоры. Подобное можно сказать и при сравнении модели опоры с ее выделенной моделью – это одно и то же. А в динамике полная модель включает в себя модель биомеханической системы в условиях упругой опоры и модель опоры. Модель же опоры и ее выделенная модель есть разные модели. Это различие будем использовать, опуская при возможности указание вида системы в случаях, когда это не мешает пониманию выводов.

В ряде случаев для анализа понадобится полностью отбросить влияние спортивного снаряда, поэтому будем оперировать как *биомеханической системой в условии упругой*, так и *в условии жесткой опор*. Модели биомеханической системы в условиях жесткой опоры полностью идентичны по форме моделям выделенной биомеханической системы. Это одни и те же выражения. Различаются они только значениями, подставляемыми в соответствующие формулы. Подробнее этот вопрос разобран в п. 1.10.

Модели с вращающейся пружиной. Примем в качестве *базисной модели* биомеханической системы, совершающей движение в условиях упругой опоры, трехзвенную незамкнутую, плоскую кинематическую

цепь [9, 56, 77, 83, 87], соединенную с осью вращения (абсцисса основной системы координат) в плоскости движения через вращающуюся пружину. Подобная модель показана на рисунке 1.10.

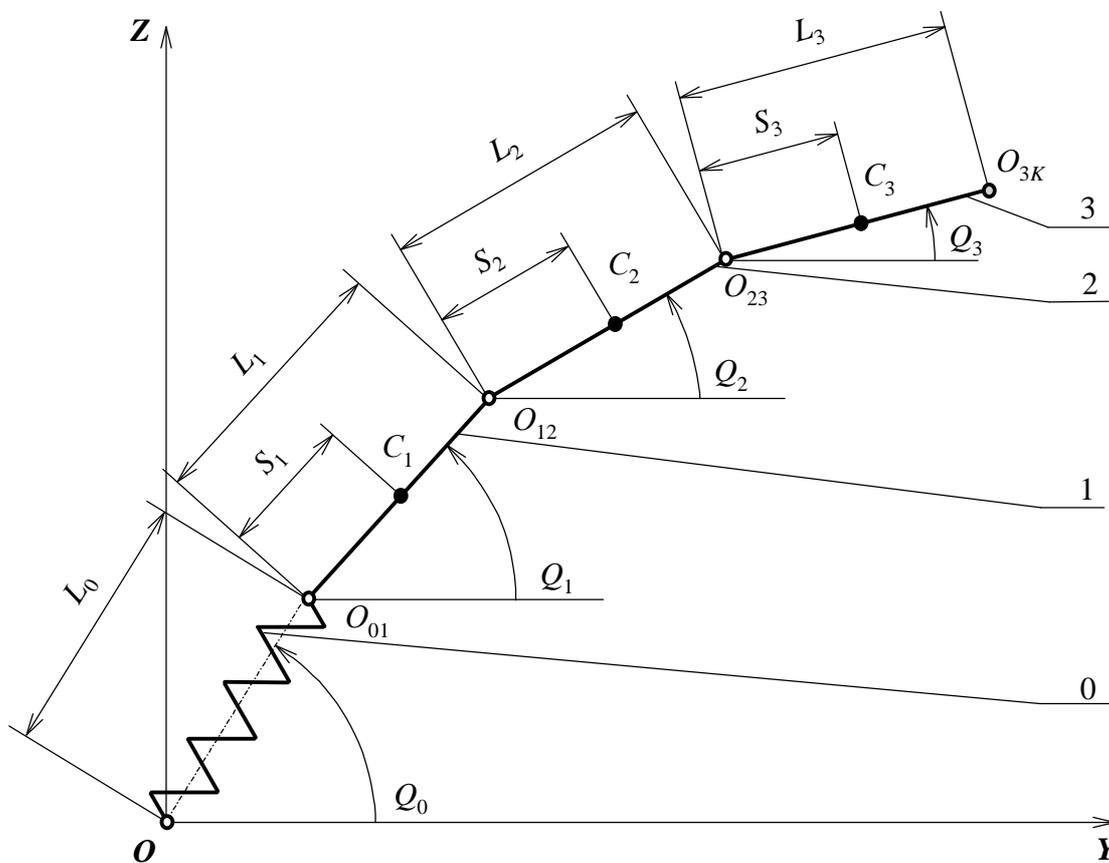


Рисунок 1.10 – Модель БМС с опорой, моделируемой вращающейся пружиной

Примем, что первое звено обозначает руки, второе – туловище с головой, третье – ноги. С помощью данной модели можно исследовать кинематику и динамику вращательных движений спортсмена в условиях опоры [54-57, 76, 77].

Наложим ограничения на модель:

1. Звенья тела человека считаются абсолютно твердыми телами.
2. Суставы, посредством которых звенья тела человека соединяются друг с другом, моделируются цилиндрическими шарнирами.
3. Трение в шарнирах отсутствует.
4. Центры масс звеньев модели расположены на прямой, соединяющей их оси вращения в шарнирах.
5. Упругая опора моделируется вращающейся пружиной.
6. Пружина не имеет массы (невесома).

7. Кинематические пары «рука – опора» моделируются цилиндрическими шарнирами.

8. Трение в кинематических парах «рука – опора» отсутствует.

9. Биомеханическая система представляет собой кинематическую цепь, но не соединение динамических цепей.

10. Движение биомеханической системы является плоскопараллельным.

Для пружины вводим следующие обозначения:

L_0 – длина пружины;

Q_0 – угол, образованный осью пружины с ординатой OY основной координатной системы.

Отметим следующие особенности полной модели биомеханической системы. На первом этапе исследования нет необходимости в учете как массы опоры, так и трения в кинематических парах «рука – опора». Эти вопросы требуют отдельного изучения из-за их сложности. В дальнейшем от этих ограничений придется отказаться.

Также начинать исследование взаимодействия человека со спортивным снарядом с динамических цепей, не разобравшись в кинематических, представляется нецелесообразным.

Появление нулевого звена дает возможность в каждом уравнении разделить по нумерации опору и звенья биомеханической системы. Это очень удобно, так как зачастую определение параметров движения опоры и биомеханической системы осуществляется разными методами. Деформируемые тела изучаются в сопротивлении материалов, а абсолютно твердые – в теоретической механике. Соответственно подходы и методы различны.

С другой стороны, при таком обозначении опоры модели кинематики и динамики биомеханической системы в условиях упругой опоры при нулевой деформации опорного звена имеют одинаковую форму записи с параметрами движения в условиях жесткой опоры, различаясь лишь значениями.

Для биомеханической системы введем обозначения [54, 56]:

L_1 – длина первого звена;

L_2 – длина второго звена;

L_3 – длина третьего звена;

S_1 – расстояние от оси вращения (опора, т.е. шарнир «рука – опора») до центра масс первого звена;

S_2 – расстояние от оси вращения (плечевые суставы) до центра масс второго звена;

S_3 – расстояние от оси вращения (тазобедренные суставы) до центра масс третьего звена;

Q_1 – угол, образованный первым звеном с осью OY ;

Q_2 – угол, образованный вторым звеном с осью OY ;

Q_3 – угол, образованный третьим звеном с осью OY .

Для модели с произвольным количеством звеньев полной системы введем *буквенную индексацию* для обозначения номера звена. При этом индекс может быть выражен, если это не оговорено заранее, любой буквой латинского алфавита.

Для принятой модели имеем:

L_i – длина i -го звена БМС (или длина пружины при $i = 0$);

S_i – расстояние от оси вращения i -го звена БМС до его центра масс;

Q_i – угол наклона i -го звена БМС или пружины к оси OY ;

i – буквенный индекс, используемый для обозначения номера звена полной системы. При $i=0$ обозначает пружину, при $i=1, 2, \dots, N$ – номер звена биомеханической системы;

N – количество звеньев модели.

Введем обозначения шарниров по следующему правилу: все шарниры всегда обозначаются буквой O с индексами, представляющими номера звеньев полной системы, соединенных в данной кинематической паре. Так, в шарнире O_{01} соединены пружина 0 и рука 1. Сустав O_{23} служит для контакта звеньев 2 (туловище) и 3 (ноги). Для сохранения единой формы записи в моделях необходимо ввести обозначение крайней точки тела, наиболее удаленной от опоры. Обозначим ее как O_{NK} . Здесь N – номер крайнего (последнего) звена. В нашем случае крайним звеном являются ноги, которые заканчиваются костями стопы (рис.1.9).

Интерес к кинематическим и динамическим характеристикам крайней точки O_{NK} обусловлен техникой выполнения упражнений во многих видах спорта. Например, в сосковых упражнениях в гимнастике, при выполнении определенных маховых элементов на брусьях разной высоты и т.д. [30, 31, 80].

Таким образом, каждое звено биомеханической системы образует две кинематические пары, за исключением последнего. Например, звено 2 имеет две пары: O_{12} и O_{23} , соединяясь, соответственно со звеньями 1 и 3, а звено 3 – одну кинематическую пару O_{23} и крайнюю точку O_{3K} .

Опорный шарнир O_{01} на самом деле является парным, так как представляет собой контакт обеих рук со спортивным снарядом. В пределах принятых допущений разделять его на левую и правую кинематические пары, согласно одноименным рукам, необходимо лишь при исследовании деформации самой упругой опоры.

В дальнейшем центры масс звеньев и центры шарниров будем называть *характерными точками* биомеханической системы. Их выбор обусловлен алгоритмами построения расчетных моделей динамической структуры спортивных упражнений.

Модели с двумя поступательно движущимися пружинами. Поведение упругой опоры моделируем одной горизонтальной Π_{Γ} и одной вертикальной Π_B пружинами. Их контакт с осями координат показан условно. Сама биомеханическая система изменений не претерпевает и моделируется трехзвенником. Наиболее удаленная точка человеческого тела обозначена как O_{3K} . Угловые координаты Q_i тоже остаются прежними. Расчетная схема представлена на рисунке 1.11.

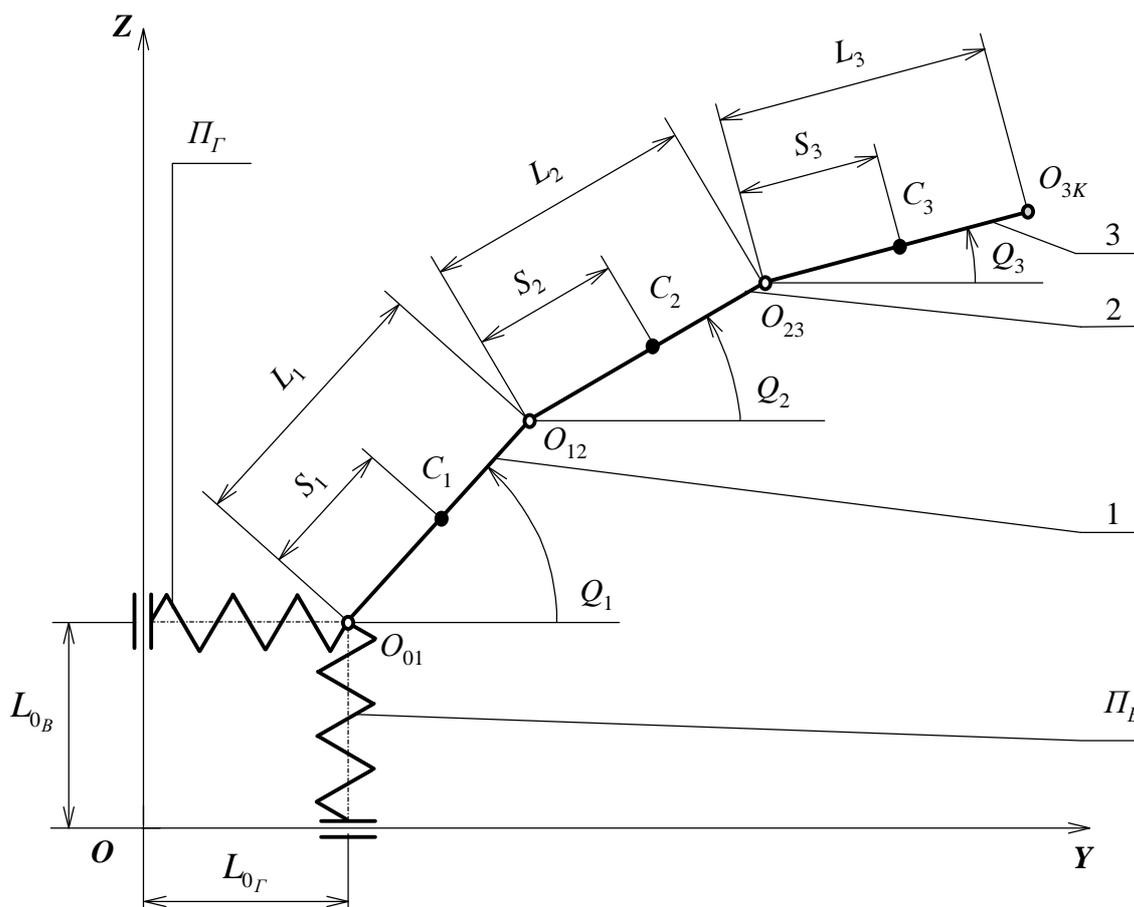


Рисунок 1.11 – Модель БМС с опорой, моделируемой двумя пружинами

Для пружин введем следующие обозначения:

$L_{0\Gamma}$ – длина горизонтальной пружины;

L_{0B} – длина вертикальной пружины.

1.9 Координаты центра масс звеньев тела и суставов

Модели с вращающейся пружиной. По одному из вариантов биомеханическая система в условиях упругой опоры моделируется

трехзвенником с одной вращающейся пружиной, закрепленной своим концом в начале координат (рис.1.10). В этом случае координаты центра масс (ЦМ) для каждого звена биомеханической системы определяются как:

$$\begin{aligned}
 Y_{C_1} &= L_0 \cos Q_0 + S_1 \cos Q_1, \\
 Z_{C_1} &= L_0 \sin Q_0 + S_1 \sin Q_1, \\
 Y_{C_2} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2, \\
 Z_{C_2} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2, \\
 Y_{C_3} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3, \\
 Z_{C_3} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для N -звенной модели получим в общем виде координаты Y_{C_i} и Z_{C_i} :

$$\begin{aligned}
 Y_{C_i} &= L_0 \cos Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j + S_i \cos Q_i, \\
 Z_{C_i} &= L_0 \sin Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j + S_i \sin Q_i, \quad i=1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

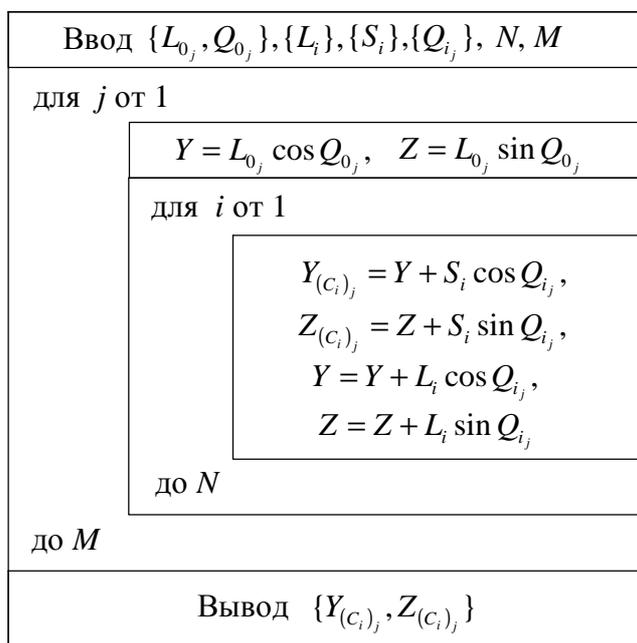


Рисунок 1.12 – Структурограмма алгоритма определения координат ЦМ звеньев

системы (т.е. по всем кадрам видеосъемки). Здесь число M – количество

Отметим, что расчет начинается с первого звена биомеханической системы. Параметры опоры здесь не определяются, а только используются. Общий вид выражений для биомеханической системы с упругой опорой отличается от моделей биомеханической системы с жесткой опорой по работе [56] лишь добавочным членом в начале уравнения. На рисунке 1.12 представлена структурограмма алгоритма определения координат ЦМ звеньев биомеханической системы на всей траектории движения биомеханической системы

кадров. Переменные Y и Z используются для накопления сумм по выражениям (1.11).

В литературе по биомеханике исследователями [56, 77] предложены уравнения для определения линейных координат суставов биомеханической системы в условиях жесткой опоры. Уравнения представляют собой уравнения связей и в то же время являются уравнениями кинематики естественного движения многозвенника с одной неподвижной точкой, помещенной в начале основной системы координат.

Запишем выражения для координат шарниров биомеханической системы и для крайней точки K опорно-двигательного аппарата человека. Получим:

$$\begin{aligned}
 Y_{O_{01}} &= L_0 \cos Q_0, \\
 Z_{O_{01}} &= L_0 \sin Q_0, \\
 Y_{O_{12}} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1, \\
 Z_{O_{12}} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1, \\
 Y_{O_{23}} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2, \\
 Z_{O_{23}} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2, \\
 Y_{O_{3K}} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3, \\
 Z_{O_{3K}} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Для N -звенной модели имеем в общем виде:

$$\begin{aligned}
 Y_{O_{i-1,i}} &= \sum_{j=0}^{i-1} L_j \cos Q_j, \\
 Z_{O_{i-1,i}} &= \sum_{j=0}^{i-1} L_j \sin Q_j, \\
 i &= 1, 2, \dots, N+1,
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $Y_{O_{i-1,i}}$ – координаты проксимального шарнира для i -го звена по оси ординат OY ;
 $Z_{O_{i-1,i}}$ – координаты проксимального шарнира для i -го звена по оси аппликат OZ .

Если ограничиться верхним значением индекса $i=N$, то при этом значении получают координаты крайнего (последнего) сустава биомеханической системы. В противном случае, т.е. при $i=N+1$ рассчитывают координаты крайней точки O_{NK} биомеханической системы. Положение этой точки необходимо в случае определения ее кинематических характеристик в сосковых упражнениях и т.д..

Расчет по формулам (1.13) начинается с $i = 1$. Это дает возможность вычислить координаты опорного шарнира, представляющего собой контакт рук спортсмена со спортивным снарядом.

Остальные шарниры, т.е. шарниры при $1 < i \leq N$ являются суставами человеческого тела.

Рассмотрим алгоритм, позволяющий определить координаты шарниров биомеханической системы на всей траектории ее движения. Исходными данными должны служить координаты центров масс биомеханической системы с учетом деформации опоры по каждому кадру видеосъемки.

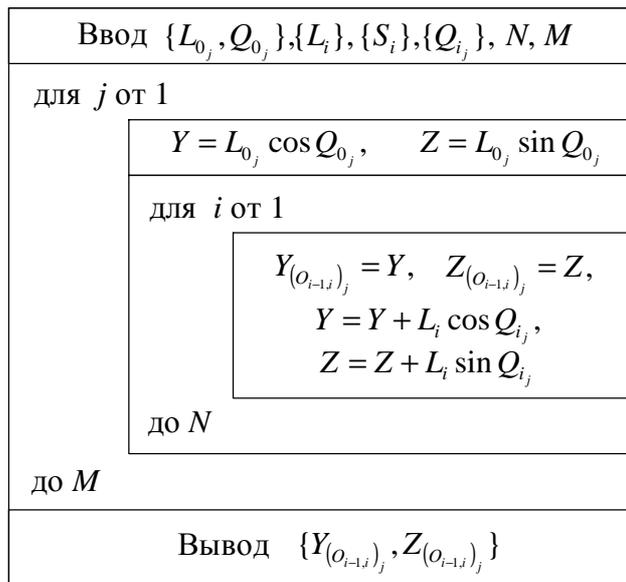


Рисунок 1.13 – Алгоритм определения координат шарниров

Алгоритм представлен на рисунке 1.13.

Анализ уравнений показывает, что *опора* влияет на координаты характерных точек звеньев, но ее параметры рассчитываются по моделям деформации. Исследования в этой области выполняют в рамках раздела механики, изучающего деформацию упругих тел, т.е. в рамках сопротивления материалов.

Модели с двумя поступательно движущимися пружинами. Координаты центра масс для каждого звена

биомеханической системы определим как:

$$\begin{aligned}
 Y_{C_1} &= L_{0_G} + S_1 \cos Q_1, \\
 Z_{C_1} &= L_{0_B} + S_1 \sin Q_1, \\
 Y_{C_2} &= L_{0_G} + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2, \\
 Z_{C_2} &= L_{0_B} + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2, \\
 Y_{C_3} &= L_{0_G} + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3, \\
 Z_{C_3} &= L_{0_B} + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Для N -звенной модели получим в общем виде:

$$\begin{aligned}
Y_{C_i} &= L_{0_G} + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j + S_i \cos Q_i, \\
Z_{C_i} &= L_{0_B} + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j + S_i \sin Q_i, \\
i &= 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

Расчет ограничен $i = N$. Параметры пружины представлены одним членом. При этом теряется однотипность уравнений, которая присуща случаю представления рабочей части спортивного снаряда в виде одной вращающейся пружины.

Структурограмма по моделям (1.15) показана на рисунке 1.14.

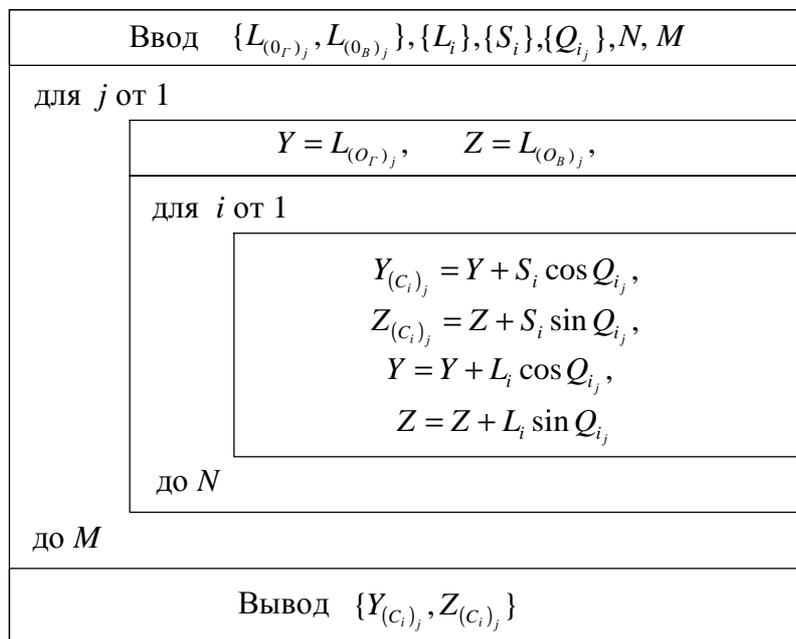


Рисунок 1.14 – Алгоритм определения координат ЦМ звеньев (опора в виде двух пружин)

Координаты шарниров биомеханической системы запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
Y_{O_{01}} &= L_{0_G}, \\
Z_{O_{01}} &= L_{0_B}, \\
Y_{O_{12}} &= L_{0_G} + L_1 \cos Q_1, \\
Z_{O_{12}} &= L_{0_B} + L_1 \sin Q_1, \\
Y_{O_{23}} &= L_{0_G} + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2, \\
Z_{O_{23}} &= L_{0_B} + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{O_{3K}} &= L_{0_{\Gamma}} + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + L_3 \cos Q_3, \\
Z_{O_{3K}} &= L_{0_B} + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + L_3 \sin Q_3.
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

Для N -звенной модели получим в общем виде:

$$\begin{aligned}
Y_{O_{i-1,i}} &= L_{0_{\Gamma}} + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j, \\
Z_{O_{i-1,i}} &= L_{0_B} + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j, \quad i=1, 2, \dots, N+1.
\end{aligned}
\tag{1.17}$$

Ввод $\{L_{(O_{\Gamma})_j}, L_{(O_B)_j}\}, \{L_i\}, \{S_i\}, \{Q_i\}, N, M$
для j от 1
$Y = L_{(O_{\Gamma})_j}, \quad Z = L_{(O_B)_j},$
для i от 1
$Y_{(O_{i-1,i})_j} = Y, \quad Z_{(O_{i-1,i})_j} = Z,$ $Y = Y + L_i \cos Q_{ij},$ $Z = Z + L_i \sin Q_{ij}$
до N
до M
Вывод $\{Y_{(O_{i-1,i})_j}, Z_{(O_{i-1,i})_j}\}$

Рисунок 1.15 – Определение координат суставов (опора в виде двух пружин)

Алгоритм вычисления уравнений (1.17) по варианту с двумя пружинами показан на рисунке 1.15.

Алгоритмы для вариантов опоры, моделируемой одной вращающейся и двумя поступательно движущимися пружинами, почти идентичны друг другу по форме записи. Различие лишь в одном члене, отражающем деформацию одной из пружин в каждой паре формул (1.11) и (1.15), а также в (1.13) и (1.17).

В обоих случаях при расчете положения шарниров сумма сверху ограничена индексом $i-1$, принимающим при $i = N + 1$ максимальное значение равное N . В этом случае получают координаты крайней точки последнего звена биомеханической системы, суставом не являющейся. При $i=N$ вычисляют положение крайнего сустава $O_{N-1,N}$.

1.10 Оценка динамических свойств системы «человек – опора»

Во многих разделах механики используют такое понятие как *коэффициент динамичности*¹⁴. В общем случае под ним понимают отношение какой-либо величины, характеризующей динамику системы, к

¹⁴ Или по-другому, динамический коэффициент, а также коэффициент динамического усиления.

значению этой величины в статике [40, 81]. Так, *коэффициентом динамичности по перемещениям* в теории механизмов и машин называют отношение амплитуды вынужденных колебаний к максимальному перемещению, вызываемому статическим действием силы.

Существует еще одна трактовка данного понятия – принято также определять *коэффициент динамичности по ускорениям*, под которым понимают отношение максимального модуля ускорения выходного звена с учетом упругости звеньев к максимальному модулю ускорения этого же звена без учета упругости звеньев [81-83].

Отметим, что, во-первых, во многих случаях требуется анализировать динамику каждого звена. Так, для гимнаста при выполнении маховых упражнений представляет практический интерес движение и верхних конечностей, и нижних, и туловища, и пр. Во-вторых, коэффициенты динамичности по ускорениям определяются по данным различных экспериментов (или расчетов). Находят ускорения для механизма с упругими связями и отдельно для механизма без них. По ним и производят расчеты.

В биомеханике же нет возможности сравнить выполнение спортивного упражнения на упругом снаряде и на абсолютно жестком, так как последнего не существует, как и не существует техники выполнения необходимых движений на нем. Да этого и не требуется. Ведь нас интересуют не просто общие закономерности взаимодействия спортсмена с упругой опорой, но и оценка каждого конкретного исполнения упражнения каждым спортсменом. И на этом пути имеются весьма серьезные препятствия. Рассмотрим их и в меру возможностей постараемся обойти или хотя бы уменьшить.

Отметим, что оба принципа анализа динамики объектов для изучения полной системы нам подходят, разумеется, с корректировкой там, где необходимо. Но в данном разделе сравнение динамических и статических систем не понадобится, так как оно применимо, прежде всего, к деформационному поведению спортивного снаряда, исследуемому в главах 4, 6, 7. А здесь разрабатывается методика оценки динамичности движения самой биомеханической системы, что и является конечной целью, на пути к которой изучение опоры лишь необходимый этап.

Анализ полученных в данной главе моделей показывает возможность разделения любых параметров движения q_w по принадлежности к разным системам¹⁵ согласно выражению (1.6) в виде

$$q_w = f_{w,1}(ОП^B) + f_{w,2}(ОП, БМС) , \quad (1.18)$$

¹⁵ Имеются в виду механическая система – упругий спортивный снаряд, и биомеханическая – опорно-двигательный аппарат человека.

где q_w – исследуемый параметр движения;
 $f_{w,1}(OP^B)$ – модель кинематики выделенной опоры. Отражает ее поведение в явном виде;
 $f_{w,2}(OP, БМС)$ – модель выделенной биомеханической системы. Отражает движение спортсмена и влияние на него опоры. С обозначениями выражения (1.6) связана отношением

$$f_{w,2}(OP, БМС) = f_2(БМС^B) . \quad (1.19)$$

Наиболее просто выделить часть уравнения, напрямую отражающую влияние упругой опоры, в виде зависимости $f_{w,1}(OP)$. Для биомеханической системы такая зависимость представляет выделенную модель опоры. В оставшуюся часть общего выражения параметры спортивного снаряда в явном виде не входят. Но анализ показывает, что обобщенные координаты Q_i , характеризующие положение спортсмена, и параметры \dot{Q}_i , \ddot{Q}_i , представляющие кинематику его движения, в определенной степени зависят и от упругости спортивного снаряда. Их значения при движении биомеханической системы в условиях жесткой опоры имели бы иную величину, чем при выполнении упражнения на спортивном снаряде с упругими свойствами. Поэтому такая зависимость показана как $F_{w,2}(OP, БМС)$.

Учитывая эти выводы, перепишем обобщенную координату Q_i биомеханической системы как

$$Q_i = Q_i^{БМС} + \Delta Q_i = Q_i^{БМС} + Q_i^{OP} , \quad (1.20)$$

$$i=1, 2, \dots, N,$$

где $Q_i^{БМС}$ – часть угла, образованная i -ым звеном с осью OY и зависящая только от движения биомеханической системы, без учета упругих свойств спортивного снаряда;
 ΔQ_i – часть угла, образованная i -ым звеном с осью OY и зависящая от упругих свойств спортивного снаряда. Она равна $\Delta Q_i = Q_i^{OP}$.

Про углы $Q_i^{БМС}$ можно сказать и так: это обобщенные координаты биомеханической системы в условиях жесткой опоры.

Подобный прием наложения различных видов движения или внезапного изменения начальных условий широко используется при анализе колебательных процессов в теории механизмов и машин. Например, при исследовании вынужденных колебаний рычажных механизмов, кулачковых механизмов с упругим толкателем, устойчивости

возмущенных движений в механизмах и т.д. [81-83].

Для выделенных моделей биомеханической системы выполнить разделение обобщенных координат согласно уравнению (1.20) и оценить *все* динамическое усиление, привносимое упругим спортивным снарядом, не представляется возможным, так как пока неизвестно как это можно сделать.

С использованием выражения (1.20) уравнения связи N -звенной биомеханической системы по формулам (1.13) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Y_{O_{i-1,i}} &= L_0 \cos Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos(Q_j^{BMC} + Q_j^{OP}) = \\
 &= L_0 \cos Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j^{BMC} \cos Q_j^{OP} - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j^{BMC} \sin Q_j^{OP}, \\
 Z_{O_{i-1,i}} &= L_0 \sin Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin(Q_j^{BMC} + Q_j^{OP}) = \\
 &= L_0 \sin Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j^{BMC} \cos Q_j^{OP} + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j^{BMC} \sin Q_j^{OP}, \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Появление углов Q_0 и Q_j^{OP} связано с наличием упругих свойств спортивного снаряда, выступающего в качестве опоры. Если бы движение совершалось в условиях жесткой опоры, то уравнения связи имели бы вид [56]:

$$\begin{aligned}
 Y_{O_{i-1,i}}^{\mathcal{K}} &= \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j^{\mathcal{K}}, \\
 Z_{O_{i-1,i}}^{\mathcal{K}} &= \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j^{\mathcal{K}}, \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

где $Q_j^{\mathcal{K}}$ – обобщенные координаты для биомеханической системы в условиях жесткой опоры.

Такая же форма записи и у моделей связи выделенной БМС, т.е. без учета параметров опоры, представленной в явном виде. Это следует из уравнений (1.13). Но по величине параметры здесь другие, что понятно из следующего заключения: для жесткой опоры имеем $Q_j = Q_j^{\mathcal{K}}$, а для выделенной биомеханической системы из выражения (1.20) формулы:

$$\begin{aligned}
Y_{O_{i-1,i}}^{BMC^B} &= \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos(Q_j^{BMC} + Q_j^{OP}) = \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos(Q_j^K + Q_j^{OP}), \\
Z_{O_{i-1,i}}^{BMC^B} &= \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin(Q_j^{BMC} + Q_j^{OP}) = \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin(Q_j^K + Q_j^{OP}), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (1.23)
\end{aligned}$$

В уравнениях (1.22) и (1.23) имеем равенство $Q_j^K = Q_j^{BMC}$. Анализ выражений (1.23) показывает, что выделенные модели кинематики БМС представляют собой уравнения относительно деформированной, а не жесткой опоры.

Проиллюстрируем проблему влияния упругой опоры на биомеханическую систему следующим образом: по упругой пружинящей доске, поднятой над полом, идет человек, для равновесия покачивая руками и туловищем. Иногда взмахи могут быть резкими, если прогибы большие или неожиданные и существует опасность для устойчивого положения всего тела во время передвижения. В уравнения движения обязательно должны войти параметры опоры в явном виде, но также ясно, что и быстрые взмахи рук появились только из-за ее упругости. Не будь пружинящих движений доски, не было бы и резких взмахов рук, т.е. углы, описывающие положение конечностей (да и самого туловища), оказались бы другими, а некоторые вообще могли бы оставаться постоянными. Например, руки можно прижать к телу и идти без покачивания по абсолютно жесткой опоре.

Пример не является строгим, так как здесь кроме задачи движения тела выполняется еще и дополнительная задача сохранения его равновесия. В случае выполнения маховых упражнений в гимнастике следовать еще и этой задаче непосредственно во время движения не требуется. Задача на равновесие появляется лишь в определенных фазах спортивного упражнения – при переходе биомеханической системы в статическое положение.

Теперь, применив выражение (1.18) для записи функциональных связей в формуле (1.13), приходим к виду:

$$\begin{aligned}
Y_{O_{i-1,i}} &= f_{Y,1}(OP) + f_{Y,2}(OP, BMC), \\
f_{Y,1}(OP) &= L_0 \cos Q_0, \quad f_{Y,2}(OP, BMC) = \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j, \\
Z_{O_{i-1,i}} &= f_{Z,1}(OP) + f_{Z,2}(OP, BMC), \\
f_{Z,1}(OP) &= L_0 \sin Q_0, \quad f_{Z,2}(OP, BMC) = \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j, \quad (1.24) \\
& \quad i=1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Разумеется, при вводе зависимости $f_{w,1}(ОП)$, отражающей поведение упругой опоры, имеется в виду, что на опору влияет биомеханическая система и можно бы показать это как $f_{w,1}(ОП, БМС)$. В дальнейшем будет видно, что при описании ряда характеристик движения функцией типа $f_{w,1}(ОП)$ последняя может напрямую включать и параметры биомеханической системы. Но не будем усложнять ситуацию, нагромождая буквенные обозначения. Принцип и так понятен: **ограничения, налагаемые спортивным снарядами на движение человека, зависят от закона движения этого человека.**

На разобранных примерах показано действие введенных отношений (1.6) и (1.7). Сформулируем их следующим образом и сделаем определенные выводы:

- модели полной системы можно показать в виде суммы моделей механической системы, т.е. спортивного снаряда, и биомеханической, с измененными упругой опорой параметрами;
- модели биомеханической системы разбиваются на две части по наличию в явном виде параметров опоры. В кинематике модели механической системы и выделенные модели опоры суть одно и то же. В динамике это разные модели;
- полностью разделить модели по влиянию человека и спортивного снаряда на общее движение систем, в которых это влияние предстает в виде отдельных функциональных зависимостей, не представляется возможным.

Сказанное относится не только к системам в целом, но справедливо и для моделей характерных точек опорно-двигательного аппарата человека, т.е. для отдельных звеньев.

Исходя из этих принципов и необходимо анализировать динамическое влияние опоры. Оценить его в полной мере нет возможности, но в части, отражающей в явном виде поведение спортивного снаряда, вполне удастся во всех случаях. Поэтому по аналогии с коэффициентом динамичности по ускорениям для механизмов введем понятие коэффициента опоры для биомеханической системы с указанием параметра, для которого он рассчитывается.

К сожалению, пришлось уйти от емкого и ясного определения подобного коэффициенту динамичности по ускорениям во избежание смысловой путаницы.

Коэффициент опоры по исследуемому параметру позволяет оценить в сумме следующие факторы:

а) влияние на деформацию опоры движения биомеханической системы, которое последняя имела бы в условиях жесткой опоры (жесткая составляющая движения опоры);

б) влияние спортивного снаряда на самое себя через *дополнительное*

изменение параметров движения биомеханической системы (упругая составляющая движения опоры).

В общем виде коэффициент опоры по параметру q_w запишем как

$$\chi_{q_w} = \frac{q_w}{f_{2w}(ОП, БМС)} = \frac{f_w}{f_{2w}(ОП, БМС)}, \quad (1.25)$$

где f_w – функциональная зависимость, отражающая поведение полной системы по исследуемому параметру q_w . Запишем $f_w = q_w$.

Такой подход дает возможность определить влияние спортивного снаряда не только на величину изучаемых параметров движения, но и разделить это влияние по важнейшим направлениям, к которым относятся вертикальная OZ и горизонтальная OY оси декартовой системы координат. Эти направления различаются действующими на них силами – в горизонтальной плоскости силы тяжести отсутствуют.

Таким образом, зная проекции кинематических и динамических параметров всех характерных точек полной системы, можно оценить явно выраженные во всех моделях упругие свойства спортивного снаряда по каждому кадру видеосъемки, т.е. в пределах одного эксперимента как по полной величине, так и по направлению.

Выполним анализ динамики системы по указанной методике на примере модели опоры в виде вращающейся пружины.

Коэффициенты опоры по проекциям перемещения ЦМ i -го звена найдем как

$$\begin{aligned} \chi_{C_i}^Y &= \frac{Y_{C_i}}{Y_{C_i}^{БМС^B}} = \frac{L_0 \cos Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j + S_i \cos Q_i}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j + S_i \cos Q_i} = \\ &= \frac{L_0 \cos Q_0}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j + S_i \cos Q_i} + 1 = \chi_{C_i, Д}^Y + 1, \\ \chi_{C_i}^Z &= \frac{Z_{C_i}}{Z_{C_i}^{БМС^B}} = \frac{L_0 \sin Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j + S_i \sin Q_i}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j + S_i \sin Q_i} = \\ &= \frac{L_0 \sin Q_0}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j + S_i \sin Q_i} + 1 = \chi_{C_i, Д}^Z + 1, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$i=1, 2, \dots, N,$$

где $Y_{C_i}^{БМС^B}$, $Z_{C_i}^{БМС^B}$ – части уравнений, отражающие только параметры биомеханической системы без учета упругих свойств спортивного снаряда в явном виде.

Здесь динамические поправки $\chi_{C_i,Д}^Y$ и $\chi_{C_i,Д}^Z$ отражают поведение спортивного снаряда по исследуемому параметру, показывая изменения выбранной характеристики движения в случае проявления опорой упругих свойств. Поправки равны:

$$\begin{aligned}\chi_{C_i,Д}^Y &= \frac{L_0 \cos Q_0}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j + S_i \cos Q_i}, \\ \chi_{C_i,Д}^Z &= \frac{L_0 \sin Q_0}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j + S_i \sin Q_i}.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Коэффициенты опоры по проекциям перемещения шарнира $O_{i-1,i}$ рассчитывают по выражениям:

$$\begin{aligned}\chi_{O_{i-1,i}}^Y &= \frac{Y_{O_{i-1,i}}}{Y_{O_{i-1,i}}^{БМС^B}} = \frac{L_0 \cos Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j} = \frac{L_0 \cos Q_0}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j} + 1 = \chi_{O_{i-1,i},Д}^Y + 1, \\ \chi_{O_{i-1,i}}^Z &= \frac{Z_{O_{i-1,i}}}{Z_{O_{i-1,i}}^{БМС^B}} = \frac{L_0 \sin Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j} = \frac{L_0 \sin Q_0}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j} + 1 = \chi_{O_{i-1,i},Д}^Z + 1,\end{aligned}\quad (1.28)$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Динамические поправки $\chi_{O_{i-1,i},Д}^Y$ и $\chi_{O_{i-1,i},Д}^Z$ отражают характер поведения спортивного снаряда по перемещению шарнира в проекциях. Поправки равны:

$$\chi_{O_{i-1,i},Д}^Y = \frac{L_0 \cos Q_0}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j},$$

$$\chi_{O_{i-1,i},D}^Z = \frac{L_0 \sin Q_0}{\sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j}. \quad (1.29)$$

Коэффициент опоры по перемещению ЦМ i -го звена, т.е. полный коэффициент составит:

$$\chi_{C_i} = \sqrt{\frac{(Y_{C_i})^2 + (Z_{C_i})^2}{(Y_{C_i}^{BMC^B})^2 + (Z_{C_i}^{BMC^B})^2}} = \frac{R_{C_i}}{R_{C_i}^{BMC^B}}, \quad (1.30)$$

где R_{C_i} – радиус для ЦМ i -го звена относительно оси абсцисс основной системы координат;

$R_{C_i}^{BMC^B}$ – радиус для ЦМ i -го звена относительно опорных шарниров (деформированной упругой опоры).

Полный коэффициент опоры по перемещениям шарнира $O_{i,i+1}$ по j -му кадру составит:

$$\chi_{O_{i-1,i}} = \sqrt{\frac{(Y_{O_{i-1,i}})^2 + (Z_{O_{i-1,i}})^2}{(Y_{O_{i-1,i}}^{BMC^B})^2 + (Z_{O_{i-1,i}}^{BMC^B})^2}} = \frac{R_{O_{i-1,i}}}{R_{O_{i-1,i}}^{BMC^B}}, \quad (1.31)$$

где $R_{O_{i-1,i}}$ – радиус для сустава $O_{i-1,i}$ относительно оси абсцисс основной системы координат;

$R_{O_{i-1,i}}^{BMC^B}$ – радиус для сустава $O_{i-1,i}$ относительно опорных шарниров (деформированной упругой опоры).

Полный коэффициент опоры по исследуемому параметру есть положительная величина во всех случаях. Это следует из принципа его вычисления.

Таким образом, констатируем, что *коэффициент опоры показывает, во сколько раз исследуемый параметр движения биомеханической системы в условиях упругой опоры отличается от такого же параметра, но рассчитанного относительно деформированного состояния спортивного снаряда.*

Все вышеизложенное в полной мере относится и к случаю моделирования опоры двумя поступательно движущимися пружинами. В уравнения (1.26-1.31) необходимо лишь подставить соответствующие параметры для выбранной модели опоры.

Полученная таблица коэффициентов опоры по всем кадрам позволяет

оценить изменение значений за время выполнения спортивного упражнения, выбрать максимальные и минимальные величины и сопоставить их с направлением осей координатной системы, а также с фазами упражнения, т.е. проследить динамику упругого спортивного снаряда на всей траектории движения биомеханической системы.

Предлагаемая методика исследования движения биомеханической системы в условиях упругой опоры применима ко всем моделям кинематики и динамики. Например, она будет полезна при исследовании уравнений ускорений характерных точек биомеханической системы, уравнений естественного и целенаправленного движений, при силовом анализе опорно-двигательного аппарата и т.д.

ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАСЧЕТОВ

Приступая к разработке моделей кинематики и динамики движения биомеханических систем с учетом деформации опоры, необходимо показать математический аппарат, применяемый в данных исследованиях. Это обусловлено тем, что при выполнении расчетов по предлагаемым моделям очень широко используются методы вычислительной математики и статистической обработки данных. При этом все методы должны быть ориентированы на применение ПЭВМ. Отсюда появляется потребность указать их особенности применительно как к задачам, определяемым названием работы, так и к методикам использования вычислительной техники.

2.1 Особенности применения численных методов

В работе [122] отмечается, что численные методы в настоящее время являются основным инструментом для решения сложных математических задач. Под численными методами подразумеваются методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и некоторым логическим действиями над числами.

Существуют два важнейших отличия численных методов от аналитических. Во-первых, численные методы обычно дают приближенное решение задачи. Во-вторых, они позволяют получить лишь решение задачи с конкретными значениями параметров и исходных данных. Поэтому, работая с конкретными числами, необходимо осветить следующие вопросы:

- подготовка данных для вычислительного эксперимента (сглаживание экспериментальных данных);
- учет погрешностей приближенных решений по предлагаемым моделям;
- методы численного дифференцирования и их точность;
- методы численного интегрирования и их точность.

При этом имеет смысл при учете погрешностей вопросы точности расчетов на ПЭВМ рассмотреть более основательно, выделив в отдельный параграф из-за его важности.

Предваряя подробный анализ методов численного дифференцирования и интегрирования, укажем на ряд достоинств и

недостатков методов в сравнении друг с другом, позволяющих очертить область наиболее предпочтительного применения каждого из них.

Отмечено [132], что численное дифференцирование табличных функций может дать совершенно бессмысленные результаты, по этой причине его следует по возможности избегать. Имеются две причины подобных затруднений.

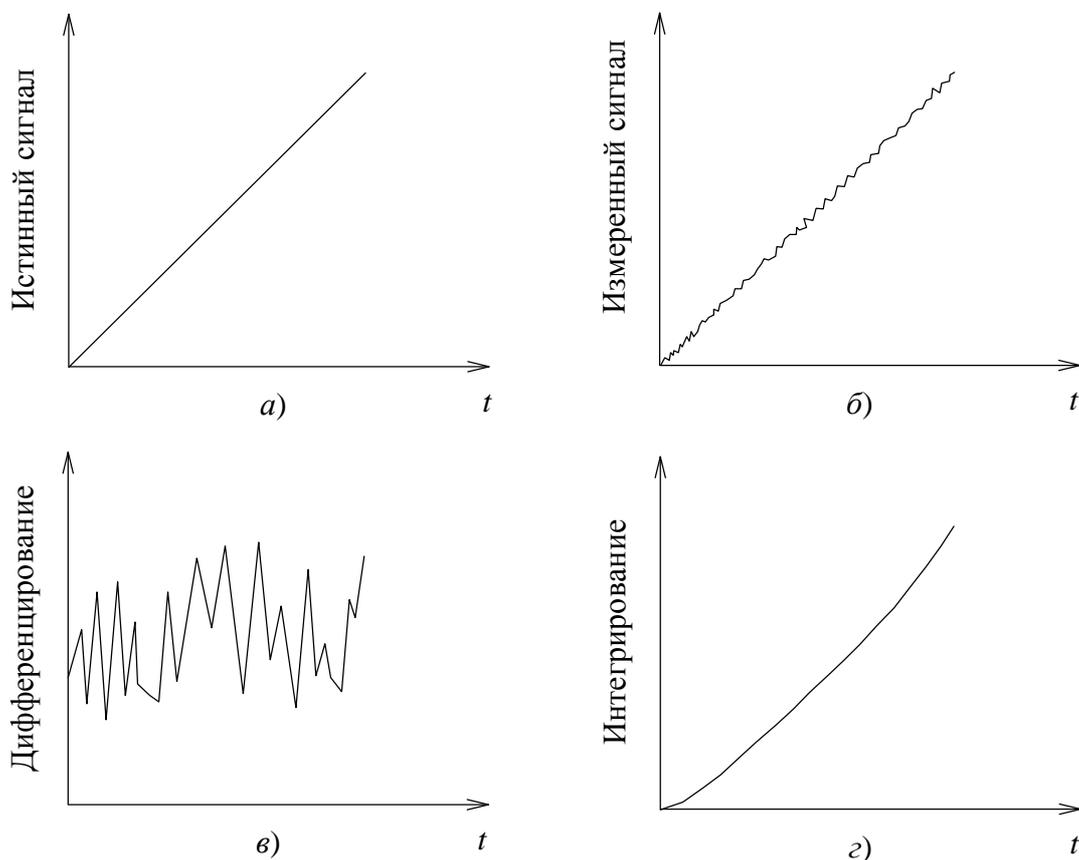


Рисунок 2.1 – Численное дифференцирование и интегрирование

Первая причина заключается в сопровождении полезной информации более или менее сильным шумом, который тоже регистрируется при измерении истинного сигнала (рис. 2.1, а, б). При численном дифференцировании погрешность резко возрастает (рис. 2.1, в). При интегрировании же сигнала, содержащего шум, погрешность убывает (рис. 2.1, г).

Подобная ситуация является весьма вероятной при исследовании движения биомеханической системы. Например, при анализе параметров кинематики в случае получения координат спортсмена путем видеосъемки широко применяются методы численного

дифференцирования [56]. При этом практика показывает, что применяемое однократное сглаживание экспериментальных данных недостаточно.

Вывод следующий: *интегрирование является процессом гораздо более устойчивым, чем численное дифференцирование.*

Второй причиной является следующий факт: даже если интерполяционный многочлен хорошо аппроксимирует табличную функцию, его производные высших порядков могут не иметь ничего общего с производными аппроксимируемой функции. Этот момент представлен на рисунке 2.2.

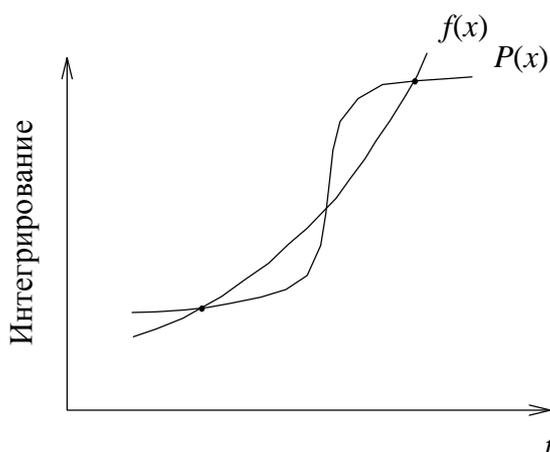


Рисунок 2.2 – Проблема, встречающаяся при использовании интерполяционных многочленов для численного дифференцирования

Вывод получен путем сравнения наклона и кривизны двух кривых [132].

2.2 Учет погрешности

Численные методы дают приближенное решение с некоторой погрешностью. Источниками погрешности такого решения являются [27]:

1. Несоответствие математической модели изучаемому явлению.
2. Погрешность исходных данных.
3. Погрешность метода решения.
4. Ошибки округлений в арифметических и других действиях над числами.

Часто основным источником погрешности являются исходные данные. Вместе с погрешностями, вносимыми математическими моделями, их называют *неустраняемыми погрешностями*, так как с точки зрения вычислителя они не могут быть уменьшены ни до начала решения задачи, ни в процессе ее решения. Так оно и есть, но лишь с точки зрения

вычислителя. С точки же зрения исследователя проблемы в целом имеется возможность замены принятой модели моделью более адекватной реальному явлению и применения более точных методов получения исходных данных для расчетов. В дальнейшем будем это использовать при наличии такой возможности.

Укажем также на существующие рекомендации для исходных данных: при выполнении арифметических операций они должны быть примерно одинаковой точности [122]. Нет смысла иметь исходные данные, значительно более точные по сравнению с другими, применяемыми в этом же эксперименте.

Рассмотрим свойства, которыми должна обладать задача, решаемая численными методами.

Устойчивость. Понятие устойчивости относится к погрешности исходных данных, которые являются неустранимыми. Несмотря на то, что данный вид погрешности вычислителем относится к неустранимым, необходимо иметь представление о влиянии данного фактора на точность окончательных результатов. Не всегда порядок погрешности результатов совпадает с порядком погрешности исходных данных. Ряд задач весьма чувствителен к неточности исходных данных. Эта чувствительность характеризуется устойчивостью.

Например, если исходная величина x имеет абсолютную погрешность, Δx , то решение y имеет погрешность Δy . Задача называется устойчивой по исходному параметру x , если решение y непрерывно от него зависит, т.е. малое приращение искомой величины Δx приводит к малому приращению искомой величины Δy .

При наличии устойчивости малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в решении. Отсутствие устойчивости означает, что малые погрешности в исходных данных дают большие погрешности в решении или даже неверный результат. Таким образом, неустойчивые задачи чувствительны к погрешностям исходных данных.

Корректность. Понятие корректности говорит о том, что для любых исходных данных из некоторого класса решение задачи существует единственно и устойчиво по исходным данным. В этом случае задача считается поставленной корректно. Применять численные методы для решения некорректно поставленной задачи нецелесообразно из-за возрастания погрешностей округления в ходе вычислений и соответственно значительного искажения полученных результатов.

Неустойчивость методов. Кроме устойчивости исходных данных рассматривают и устойчивость методов решения поставленной задачи. Сам алгоритм решения задачи может оказаться чувствительным к погрешностям и будет позволять накапливаться неточности результатов.

Численный алгоритм (метод) называется *корректным* в случае существования и единственности численного решения при любых

значениях исходных данных, а также в случае устойчивости этого решения относительно погрешностей исходных данных [122].

Для того чтобы сделать вывод о корректности и устойчивости метода, необходимо внимательнейшим образом выполнить анализ конкретной задачи, исходных данных для нее, полученные модели и численные результаты по ним, а также применяемые алгоритмы решения.

Сходимость. Сходимость является одним из важнейших критериев точности вычислительного метода. Она означает близость получаемого численного решения задачи к ее истинному решению. В случае применения численных методов для решения поставленной задачи сходимость необходимо рассматривать применительно к конкретному методу, использованному для расчетов. В работе [122] отмечено, что строгие определения разных оценок близости могут быть даны лишь с привлечением аппарата функционального анализа.

Рассмотрим понятие *сходимости итерационного процесса*. Его сходимость заключается в последовательном приближении при определении искомого параметра. Многократное повторение этого процесса (итераций) дает последовательность значений $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которая сходится к точному решению $x=a$, если при неограниченном возрастании числа итераций предел этой последовательности существует и равен a : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Это пример сходящегося численного метода.

Наш интерес к итерационному процессу связан, с тем, что данный метод широко применяется для расчета фактически всех параметров движения биомеханических систем в условиях упругой опоры¹⁶.

Последовательность действий заключается в нахождении реакций, действующих на опору и возникающих при выполнении спортсменом упражнения, определении прогибов опоры при изгибе под действием этих сил, уточнении кинематических и частично динамических параметров движения биомеханической системы, повторного определения прогибов под действием уточненных реакций и многократного повторения (уточнения) этих операций до достижения заданной точности вычислений.

В методах дискретизации понятие сходимости трактуется иначе. Сами методы заключаются в замене задачи с непрерывными параметрами на задачу, в которой вычисляются значения функций в фиксированных точках. Так поступают при численном дифференцировании, интегрировании, при решении дифференциальных уравнений и пр. В этом случае сходимостью метода считается стремление значений решения дискретной модели задачи к соответствующим значениям решения исходной задачи при стремлении к нулю параметра дискретизации (шага интегрирования и пр.).

¹⁶ При экспериментальном определении параметров деформации опоры нет необходимости в применении метода итераций.

В литературе [27, 38, 122] отмечена важность таких понятий как вид сходимости, ее порядок и ряд других параметров, характеризующих сходимость.

Вывод: для получения решения задачи с необходимой точностью ее постановка должна быть корректной, а используемый численный метод обладать устойчивостью (корректностью) и сходимостью.

2.3 Сглаживание экспериментальных данных

При получении исходных данных появляется случайная ошибка. Эта ошибка является причиной разброса данных. Для получения плавной кривой необходимо провести сглаживание. Существуют различные способы сглаживания. Применим один из них, основанный на методе наименьших квадратов [122].

Предполагаем, что:

- значения аргумента x_i являются равноотстоящими;
- значения опытных данных y_i имеют одинаковую точность;
- на произвольной части отрезка $[x_0, x_n]$ функция достаточно хорошо аппроксимирована многочленом некоторой степени m .

По результатам эксперимента получена таблица данных с искомой функцией $y=f(x)$ в виде значений y_0, y_1, \dots, y_n в точках x_0, x_1, \dots, x_n .

Сглаженное значение \bar{y}_i в точке x_i определяется следующим образом: по обе стороны от нее выбирается $k+1$ значений аргумента от $x_{i-k/2}$ до $x_{i+k/2}$. При этом k является четным. По опытным значениям исследуемой функции в этих точках $x_{i-k/2}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k/2}$ строится многочлен степени m по методу наименьших квадратов. При этом $m \leq k$. Значение многочлена \bar{y}_i в точке x_i и есть сглаженное значение. Подобную операцию проводят для всех внутренних точек исследуемого интервала. Сглаживание значений, расположенных вблизи концов отрезка $[x_0, x_n]$, производится с помощью крайних точек [122]. Указано [27], что для этого используют другие формулы, получаемые из выражения многочлена, построенного по соответствующим крайним узлам (точкам).

В работах [27, 49, 122] предлагаются формулы для различного количества точек k внутри заданного интервала и для многочлена различной степени m . Занесем формулы в таблицу 2.1. Здесь N – общее количество узлов дискретизации.

В работе [27] указаны причины большей плавности сглаженной кривой. Они следующие:

1. Если наблюдаемые значения содержат случайные ошибки, являющиеся случайными независимыми величинами с нулевым средним значением и дисперсией, не зависящей от расположения на заданном интервале, то дисперсия ошибки в сглаженных значениях уменьшается. Так, для формулы (2.2) при $k=6$ имеем

$$\bar{\delta}^2 = \frac{1}{3} \delta^2, \quad \left(\bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta \right), \quad (2.7)$$

где $\bar{\delta}$ - среднеквадратичное значение ошибки сглаженных значений;
 δ - среднеквадратичная ошибка наблюдений.

2. Ошибки в сглаженных значениях \bar{y}_i становятся сильно коррелированными.
3. Если функция $f(y)$ не является алгебраическим многочленом степени m , то происходит «размазывание» ее графика.

Таблица 2.1

Формулы для сглаживания внутренних точек заданного интервала

$m=1$		
$k=2$	$\bar{y}_i = \frac{1}{3}(y_{i-1} + y_i + y_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq N-1,$	(2.1)
$k=4$	$\bar{y}_i = \frac{1}{5}(y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}), \quad 2 \leq i \leq N-2,$	
$k=6$	$\bar{y}_i = \frac{1}{7}(y_{i-3} + y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2} + y_{i+3}), \quad 3 \leq i \leq N-3.$	
$m=3$		
$k=4$	$\bar{y}_i = \frac{1}{35}(-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2}), \quad 2 \leq i \leq N-2,$	(2.2)
$k=6$	$\bar{y}_i = \frac{1}{21}(-2y_{i-3} + 3y_{i-2} + 6y_{i-1} + 7y_i + 6y_{i+1} + 3y_{i+2} - 2y_{i+3}),$ $3 \leq i \leq N-3,$	
$k=8$	$\bar{y}_i = \frac{1}{231}(-21y_{i-4} + 14y_{i-3} + 39y_{i-2} + 54y_{i-1} + 59y_i + 54y_{i+1} +$ $+ 39y_{i+2} + 14y_{i+3} - 21y_{i+4}),$ $4 \leq i \leq N-4.$	
$m=5$		
$k=6$	$\bar{y}_i = \frac{1}{231}(5y_{i-3} - 30y_{i-2} + 75y_{i-1} + 131y_i + 75y_{i+1} - 30y_{i+2} + 5y_{i+3}),$ $3 \leq i \leq N-3.$	(2.3)
$k=8$	$\bar{y}_i = \frac{1}{429}(15y_{i-4} - 55y_{i-3} + 30y_{i-2} + 135y_{i-1} + 179y_i + 135y_{i+1} +$ $+ 30y_{i+2} - 55y_{i+3} + 15y_{i+4}),$ $4 \leq i \leq N-4.$	

Для крайних точек можно воспользоваться предлагаемыми формулами и алгоритмами решений по работе [49]. При соответствующих k и m формулы для внутренних точек интервала указаны в предыдущей таблице 2.1, а для крайних точек – в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Формулы для сглаживания крайних точек заданного интервала

$m=1$		
$k=2$	$\bar{y}_0 = \frac{1}{6}(5y_0 + 2y_1 - y_2),$	(2.4)
	$\bar{y}_N = \frac{1}{6}(5y_N + 2y_{N-1} - y_{N-2}),$	
$k=4$	$\bar{y}_0 = \frac{1}{5}(3y_0 + 2y_1 + y_2 - y_4),$	(2.5)
	$\bar{y}_1 = \frac{1}{10}(4y_0 + 3y_1 + 2y_2 + y_3),$	
	$\bar{y}_{N-1} = \frac{1}{10}(y_{N-3} + 2y_{N-2} + 3y_{N-1} + 4y_N),$	
	$\bar{y}_N = \frac{1}{5}(3y_N + 2y_{N-1} + y_{N-2} - y_{N-4}),$	
$m=3$		
$k=6$	$\bar{y}_0 = \frac{1}{42}[39y_0 + 8y_1 - 4(y_2 + y_3 - y_4) + y_5 - 2y_6],$	(2.6)
	$\bar{y}_1 = \frac{1}{42}(8y_0 + 19y_1 + 16y_2 + 6y_3 - 4y_4 - 7y_5 + 4y_6),$	
	$\bar{y}_2 = \frac{1}{42}(-4y_0 + 16y_1 + 19y_2 + 12y_3 + 2y_4 - 4y_5 + y_6),$	
	$\bar{y}_{N-2} = \frac{1}{42}(y_{N-6} - 4y_{N-5} + 2y_{N-4} + 12y_{N-3} + 19y_{N-2} + 16y_{N-1} - 4y_N),$	
	$\bar{y}_{N-1} = \frac{1}{42}(4y_{N-6} - 7y_{N-5} - 4y_{N-4} + 6y_{N-3} + 16y_{N-2} + 19y_{N-1} + 8y_N),$	
	$\bar{y}_N = \frac{1}{42}(-2y_{N-6} + 4y_{N-5} + y_{N-4} - 4y_{N-3} - 4y_{N-2} + 8y_{N-1} + 39y_N).$	

Сглаженные значения \bar{y}_i , как правило, с достаточной степенью точности близки к истинным значениям. Иногда сглаживание повторяют [122]. Однако это все же не рекомендуется, так как может привести к существенному искажению истинного характера исследуемой функциональной зависимости [27, 38, 79, 122].

2.4 Точность расчетов на компьютерах

Сложность моделей, описывающих движение человека и объем данных, которыми при этом необходимо оперировать, требует привлечение вычислительных мощностей современной компьютерной техники. Для биомеханических исследований в ряде случаев за короткое время объем вычислений может составить миллионы операций и даже больше.

В связи с этим особого внимания требует точность выполнения вычислительных операций на современных компьютерах [17, 129]. В работе [27] указано, что наиболее сложным технически является учет погрешностей округления в арифметических действиях. При решении задач на ЭВМ характерны две ситуации. При небольшом количестве арифметических действий ошибки округления обычно не проявляются. Причина в том, что современная вычислительная техника позволяет работать с числами с 10 и более значащими цифрами, а результат обычно нужен не более чем с 5 значащими цифрами.

В сложных задачах может потребоваться большое количество арифметических действий. В этом случае нереально учитывать влияние погрешностей округления в каждом действии, так как идет накопление и получается завышенная оценка погрешностей, соответствующая самому неблагоприятному случаю. На самом деле ошибки округления ведут себя достаточно случайно как по величине, так и по знаку. При большом объеме вычислений происходит компенсация ошибок округления. Однако с ними в сложных задачах все равно приходится считаться [27].

При выборе метода расчета кроме учета его точности необходимо отдавать предпочтение методам, обладающим следующими характеристиками:

- реализуются меньшим числом действий;
- экономят память ЭВМ;
- логически более просты.

Так как требования в определенной степени противоречат друг другу, то между ними необходимо искать компромисс.

Как правило, погрешность численного метода регулируема. Теоретически ее можно уменьшить до любого значения за счет изменения некоторого параметра (шага интегрирования, числа членов усеченного ряда и пр.). Но существует порог точности, выше которого нет смысла уменьшать погрешность расчетного метода. Принято погрешность метода доводить до величины в несколько раз меньшей неустранимой погрешности. Дальнейшее ее снижение не приводит к повышению точности, а только увеличивает объем вычислений и, как следствие, их стоимость.

Разрядная сетка компьютеров ограничена, что приводит к погрешностям округления. Ее называют *вычисленной погрешностью* и она должна быть, по крайней мере, в несколько раз меньше погрешности метода. Указано [122], что на современных компьютерах, как правило, реализовано обычное округление, при котором максимальная относительная погрешность определяется как

$$\delta_{\max} = 0,5\alpha^{1-k}, \quad (2.8)$$

где α - основание системы счисления;
 k – количество разрядов мантииссы числа.

Если лишние разряды просто отбрасывать, то погрешность увеличивается вдвое.

Для чисел, представленных в форматах с одинарной и двойной точностью стандарта IEEE 754, получается $\alpha=2$ в обоих случаях, для одинарной точности $k=24$ и $\delta_{\max} \approx 6 \cdot 10^{-8}$, для двойной точности $k=53$ и $\delta_{\max} \approx 6 \cdot 10^{-16}$.

Имеется еще одна причина увеличения относительной погрешности. Вычислительная техника, получившая широкое распространение, оперирует числами в двоичной системе, а люди имеют дело с десятичными числами. Это означает, что при всех вычислениях происходит переход из десятичной в двоичную систему. В этом случае в новой системе счисления число может стать иррациональным.

Существуют различные приемы для уменьшения погрешностей результатов арифметических операций. Например, следует избегать вычитания близких чисел; сложение чисел необходимо проводить по мере их возрастания, так как в машинной арифметике существенен порядок выполнения операций: из-за погрешности округления известные в алгебре законы коммутативности и дистрибутивности не всегда выполняются. Причина в том, что вырастает вероятность сложения большого числа с малым, но из-за разрядной сетки сложение не происходит ($a+b=a$ при $a \gg b$). Подробнее эти и другие приемы разобраны в работе [122].

2.5 Численное дифференцирование

При расчете многих моделей, описывающих параметры целенаправленного движения, необходимо применение методов численного анализа, в частности, численного дифференцирования. Например, при анализе видео- и киноматериалов значения угловых кинематических характеристик можно получить, лишь применяя численное дифференцирование. Такая ситуация возможна и при определении кинематических параметров деформации упругой опоры. При

этом исходными (табличными) данными для их получения являются результаты теоретических расчетов либо экспериментальные данные.

Для нахождения производных любого порядка существуют формулы численного дифференцирования любого порядка точности [17, 27, 28, 38, 39, 41, 49, 122, 132]. Тем не менее, универсальных формул в литературе нет, что затрудняет применение численного дифференцирования при использовании ПЭВМ, так как надо или ограничиться конкретными алгоритмами, т.е. выполнять расчет по определенному количеству точек, выбранному заранее, или же вводить в программу все (или большинство) существующие уравнения [59]. Понятно, что как первое, так и второе является ограничением, иногда существенным.

Выведем формулы для производных первого и второго порядка для произвольного числа точек. Ограничимся случаем задания функции в равноотстоящих точках (узлах) x_0, x_1, \dots, x_n . При этом шаг h равен

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad h > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

Узлы интерполяции можно записать и так

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Суть численного дифференцирования аналитически или таблично заданной функции $f(x)$ заключается в замене функции интерполяционным полиномом Лагранжа $L(x)$ [41]. Приближенно полагают

$$f^{(m)}(x) \approx L_n^{(m)}(x), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (2.11)$$

Полином Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = L_n(x_0 + qh) = \sum_{i=0}^n p_{ni}(q) f(x_i), \quad (2.12)$$

где q – безразмерная независимая переменная.

$$q = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{и} \quad x = x_0 + qh. \quad (2.13)$$

Тогда узлу x_i будет соответствовать

$$q = q_i = \frac{x_i - x_0}{h} = \frac{x_0 + ih - x_0}{h} = i, \quad (2.14)$$

где $p_{ni}(q)$ – лагранжевы коэффициенты.

$$p_{ni}(q) = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n). \quad (2.15)$$

$f(x_i)$ – заданные значения функции.

В работах [27, 86] дается формула для производной любого порядка:

$$L_n^{(m)}(x) = \frac{1}{h^m} \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{d^m}{dq^m} [p_{ni}(q)] h^{n+1}, \quad (2.16)$$

где m -я производная слева взята по x .

На основании вышеизложенного интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x_i)$ представим как

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(x_i)}{i!(n-i)!} q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n) h^{n+1}. \quad (2.17)$$

Так как ряд разрывается из-за отсутствия члена $(q-i)$, то обозначим ряд как произведение двух функций uv , где

$$\begin{aligned} u &= q(q-1)\dots(q-i+1), \\ v &= (q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда

$$L_n'(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(x_i)}{i!(n-i)!} (uv)' h^{n+1} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(x_i)}{i!(n-i)!} (u'v + uv') h^{n+1}. \quad (2.19)$$

Запишем в краткой форме

$$u = \prod_{k=0}^{i-1} (q-k), \quad v = \prod_{p=i+1}^n (q-p). \quad (2.20)$$

Для производной функции u имеем

$$\begin{aligned} u' &= [q(q-1)\dots(q-i+1)]' = 1(q-1)\dots(q-i+1) + q(1)\dots(q-i+1) + \dots + \\ &+ q(q-1)\dots(q-i+2)(1) = \frac{(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)}{(q-0)} + \frac{(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)}{(q-1)} + \end{aligned}$$

$$+ \dots + \frac{(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)}{(q-i+1)} = \sum_{s=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-s}. \quad (2.21)$$

Для производной функции v соответственно получим

$$\begin{aligned} v' &= [(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)]' = 1(q-i-2)\dots(q-n) + (q-i-1)(1)\dots(q-n) + \dots + \\ &+ (q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n-1)(1) = \frac{(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)}{(q-i-1)} + \\ &+ \frac{(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)}{(q-i-2)} + \dots + \frac{(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)}{(q-n)} = \sum_{m=i+1}^n \frac{\prod_{p=i+1}^n (q-p)}{q-m}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Получим производную первого порядка

$$L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(x_i)}{i!(n-i)!} \left[\sum_{s=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-s} \prod_{p=i+1}^n (q-p) + \prod_{k=0}^{i-1} (q-k) \sum_{m=i+1}^n \frac{\prod_{p=i+1}^n (q-p)}{q-m} \right] h^{n+1} \quad (2.23)$$

Аналогично получим производную второго порядка

$$L''_n(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{d^2}{dq^2} [p_{ni}(q)] h^{n+1}. \quad (2.24)$$

Запишем все последовательные шаги

$$\begin{aligned} L''_n(x) &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(x_i)}{i!(n-i)!} (u'v + uv')' h^{n+1} = \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(x_i)}{i!(n-i)!} \times \\ &\times (u''v + 2u'v' + uv'') h^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь с учетом уравнений (2.21) и (2.22) имеем

$$\begin{aligned} u'v' &= \sum_{s=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-s} \cdot \sum_{m=i+1}^n \frac{\prod_{p=i+1}^n (q-p)}{q-m}, \quad (2.26) \\ u'' &= [q(q-1)\dots(q-i+1)]'' = [1(q-1)\dots(q-i+1)]' + [q(1)\dots(q-i+1)]' + \dots + \end{aligned}$$

$$+ [q(q-1)\dots(q-i+2)(1)]'. \quad (2.27)$$

Для упрощения вывода изменим форму записи в квадратных скобках:

$$u'' = \left\{ \frac{[(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)]'}{q-0} \right\} + \left\{ \frac{[(q-0)(q-1)(1)\dots(q-i+1)]'}{q-1} \right\} + \\ + \dots + \left\{ \frac{[q(q-1)\dots(q-i+2)(q-i+1)]'}{q-i+1} \right\}. \quad (2.28)$$

Производная частного двух дифференцируемых функций [21] равна:

$$\left(\frac{w}{l} \right)' = \frac{w'l - wl'}{l^2}.$$

На этом основании для формулы (2.28) имеем:

$$u'' = \frac{[(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)]' (q-0) - [(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)](q-0)'}{(q-0)^2} + \\ + \frac{[(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)]' (q-1) - [(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)](q-1)'}{(q-1)^2} + \dots + \\ + \frac{[(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)]' (q-i+1) - [(q-0)(q-1)\dots(q-i+1)](q-i+1)'}{(q-i+1)^2}, \quad (2.29)$$

или

$$u'' = \frac{[q(q-1)\dots(q-i+1)]' q - [q(q-1)\dots(q-i+1)]1}{q^2} + \\ + \frac{[q(q-1)\dots(q-i+1)]' (q-1) - [q(q-1)\dots(q-i+1)]1}{(q-1)^2} + \dots + \\ + \frac{[q(q-1)\dots(q-i+1)]' (q-i+1) - [q(q-1)\dots(q-i+1)]1}{(q-i+1)^2}. \quad (2.30)$$

В компактной форме запишем

$$u'' = \frac{\sum_{p=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-p} \cdot q - \prod_{r=0}^{i-1} (q-r)}{q^2} + \frac{\sum_{p=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-p} \cdot (q-1) - \prod_{r=0}^{i-1} (q-r)}{(q-1)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{\sum_{p=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-p} \cdot (q-i+1) - \prod_{r=0}^{i-1} (q-r)}{(q-i+1)^2} = \sum_{m=0}^{i-1} \frac{(q-m) \sum_{p=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-p} - \prod_{r=0}^{i-1} (q-r)}{(q-m)^2}. \quad (2.31)$$

По аналогии получим и вторую производную для v :

$$\begin{aligned} v'' &= \left\{ \frac{[(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)]'}{(q-i-1)} \right\} + \left\{ \frac{[(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)]'}{(q-i-2)} \right\} + \\ &\quad + \dots + \left\{ \frac{[(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)]'}{(q-n)} \right\} = \\ &= \frac{[(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)]' (q-i-1) - [(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)](q-i-1)'}{(q-i-1)^2} + \\ &+ \frac{[(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)]' (q-i-2) - [(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)](q-i-2)'}{(q-i-2)^2} + \\ &+ \dots + \frac{[(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)]' (q-n) - [(q-i-1)(q-i-2)\dots(q-n)](q-n)'}{(q-n)^2}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Используя свертку по однотипным параметрам, в общем и компактном виде формулу (2.32) запишем как

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{\sum_{p=i+1}^n \frac{\prod_{k=i+1}^n (q-k)}{q-p} (q-i-1) - \prod_{t=i+1}^n (q-t)}{(q-i-1)^2} + \frac{\sum_{p=i+1}^n \frac{\prod_{k=i+1}^n (q-k)}{q-p} (q-i-2) - \prod_{t=i+1}^n (q-t)}{(q-i-2)^2} + \dots + \\ &+ \frac{\sum_{p=i+1}^n \frac{\prod_{k=i+1}^n (q-k)}{q-p} (q-n) - \prod_{t=i+1}^n (q-t)}{(q-n)^2} = \sum_{m=i+1}^n \frac{(q-m) \sum_{p=i+1}^n \frac{\prod_{k=i+1}^n (q-k)}{q-p} - \prod_{t=i+1}^n (q-t)}{(q-m)^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Соединим отдельные части общего выражения (2.24) для производной второго порядка. Для этого подставим формулы (2.26), (2.31) и (2.33) в уравнение (2.25).

Запишем выражение для определения производной второго порядка:

$$\begin{aligned}
L_n''(x) = & \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(x_i)}{i!(n-i)!} \left[\sum_{m=0}^{i-1} \frac{(q-m) \sum_{p=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-p} - \prod_{r=0}^{i-1} (q-r)}{(q-m)^2} \cdot \prod_{t=i+1}^n (q-t) + \right. \\
& + 2 \sum_{s=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-s} \cdot \sum_{m=i+1}^n \frac{\prod_{p=i+1}^n (q-k)}{q-m} + \\
& \left. + \prod_{k=0}^{i-1} (q-k) \cdot \sum_{m=i+1}^n \frac{(q-m) \sum_{p=i+1}^n \frac{\prod_{k=i+1}^n (q-k)}{q-p} - \prod_{t=i+1}^n (q-t)}{(q-m)^2} \right] h^{n+1}. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

По правде говоря, то, что мы получили, выглядит громоздко и оптимизма не внушает. Выражения оказались довольно сложными. Но у них есть определенное достоинство: программы, использующие данные формулы, могут создавать уравнения для конкретного числа узлов самостоятельно, автоматически подстраиваясь под фактический набор табличных данных в каждом эксперименте. При этом имеется возможность изменять формулы для численного дифференцирования во время расчета, выводя уравнения для каждого конкретного набора значений исследуемого в данный момент параметра таким образом, чтобы минимизировать погрешность.

Кроме того, обнаруживается следующий момент: использование ЭВМ в целях автоматического вывода необходимого набора уравнений позволяет значительно упростить процесс расчета по полученным формулам, приводя трудоемкость его к разумным величинам, так как ряд вычислений можно организовать с помощью всего лишь нескольких простейших функций или подпрограмм, написанных самим разработчиком. С этой точки зрения можно выделить две типовых подпрограммы (функции): для определения произведений по формулам (2.20), а также для суммирования по выражениям (2.21) и (2.22). Такой подход переводит теоретический интерес к универсальным алгоритмам численного дифференцирования в практическую плоскость их реализации.

Введя обозначения по типу

$$[F_{\Sigma}]_{0,i-1} = \sum_{s=0}^{i-1} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (q-k)}{q-s}, [F_{\Pi}]_{i+1,n} = \prod_{p=i+1}^n (q-p), [F_i] = \frac{(-1)^{n-i} f(y_i)}{i!(n-i)!}, \quad (2.35)$$

упростим запись. Здесь индексы могут меняться в зависимости от интервала, в котором происходит суммирование или определяются произведение.

Тогда по уравнению (2.23) имеем производную первого порядка

$$L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n [F_i] \left\{ [F_{\Sigma}]_{0,i-1} [F_{\Pi}]_{i+1,n} + [F_{\Pi}]_{0,i-1} [F_{\Sigma}]_{i+1,n} \right\} h^{n+1}, \quad (2.36)$$

а по (2.34) второго порядка

$$L''_n(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^n [F_i] \left\{ \sum_{m=0}^{i-1} \frac{(q-m)[F_{\Sigma}]_{0,i-1} - [F_{\Pi}]_{0,i-1}}{(q-m)^2} [F_{\Pi}]_{i+1,n} + 2[F_{\Sigma}]_{0,i-1} [F_{\Sigma}]_{i+1,n} + [F_{\Pi}]_{0,i-1} \sum_{s=i+1}^n \frac{(q-s)[F_{\Sigma}]_{i+1,n} - [F_{\Pi}]_{i-1,n}}{(q-s)^2} \right\} h^{n+1}. \quad (2.37)$$

Можно упрощение использовать и дальше. Например, в интервале $0, 1, \dots, (i-1)$ введем подпрограмму вида

$$[F_{\Sigma\Pi}]_{0,i-1} = \sum_{m=0}^{i-1} \frac{(q-m)[F_{\Sigma}]_{0,i-1} - [F_{\Pi}]_{0,i-1}}{(q-m)^2}. \quad (2.38)$$

В интервале $(i+1), (i+2), \dots, n$ имеем ту же подпрограмму, но с соответствующими индексами:

$$[F_{\Sigma\Pi}]_{i+1,n} = \sum_{m=i+1}^n \frac{(q-m)[F_{\Sigma}]_{i+1,n} - [F_{\Pi}]_{i+1,n}}{(q-m)^2}. \quad (2.39)$$

Тогда производная второго порядка упростится до выражения

$$L''_n(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^n [F_i] \left\{ [F_{\Sigma\Pi}]_{0,i-1} [F_{\Pi}]_{i+1,n} + 2[F_{\Sigma}]_{0,i-1} \cdot [F_{\Sigma}]_{i+1,n} + [F_{\Pi}]_{0,i-1} [F_{\Sigma\Pi}]_{i+1,n} \right\} h^{n+1}. \quad (2.40)$$

Для упрощения выводов нами использованы условия (2.11). Расширим их [27]. Запишем узлы интерполяции как

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \pm 1, \dots, \quad h > 0. \quad (2.41)$$

Тогда, применяя условия (2.11) и (2.41), мы можем использовать формулы (2.23), (2.34) для производных первого и второго порядков заданного узла, находящегося в любом месте выбранного интервала. Если начало отсчета q поместить в крайний левый узел x_0 , то мы получим формулы для точки крайней слева и будем выполнять расчеты вперед. При размещении q в крайнем справа узле x_0 расчеты выполняются назад. При выполнении условия (2.41) получим производные для любой промежуточной точки интервала.

Для производных различного порядка (m) и разного числа узлов (n) обнаруживаются следующие закономерности:

- точность возрастает с ростом числа точек (узлов), по которым строится оценка;
- с ростом порядка производной (m) точность уменьшается;
- при четном числе узлов (n) в среднем узле точность для четной производной порядок точности формулы на единицу больше, чем в остальных узлах.

Из последнего пункта следует рекомендация по возможности использовать формулы численного дифференцирования с узлами, расположенными симметрично относительно той точки, в которой ищется производная [27]. Кроме того, так как точность численного дифференцирования существенно уменьшается с ростом порядка производной, то на практике так обычно определяют производные не выше второго порядка [127]. Данным порядком мы и ограничились в работе.

Можно предложить ряд алгоритмов, основывающихся на выведенных формулах и с учетом высказанных замечаний.

Рассмотрим один из важнейших вопросов, появляющихся при численном дифференцировании: вопрос оценки погрешности метода. Как ранее указывалось, численное дифференцирование может давать значительный разброс данных, уменьшая точность. Порядок точности растет с увеличением числа узлов. Обратной стороной является громоздкость выражений, рост объема вычислений и усложнение оценки точности получаемых результатов.

Погрешность вычисления производной складывается из погрешностей усечения и погрешностей округления [127]. Первые вызваны заменой функции $f(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$, а вторые – неточным заданием значений $f(x_i)$. С уменьшением шага h погрешность усечения уменьшается, а погрешность округления увеличивается.

В работе [122] предложен простой и эффективный способ уточнения решения при фиксированном числе узлов, используемых в

аппроксимирующих конечно-разностных соотношениях. Метод называется методом Рунге-Ромберга. Он используется при конечно-разностных аппроксимациях производной на равномерной сетке с шагом h .

Формула Рунге дает уточненное решение с порядком точности $p+1$ по результатам двух расчетов значений производной и имеет вид:

$$f^{(m)}(x) = f^{(m)}(x, h) + \frac{f^{(m)}(x, h) - f^{(m)}(x, kh)}{k^p - 1} + O(h^{p+1}), \quad (2.42)$$

где $f^{(m)}(x, h)$ – производная, рассчитанная с шагом h ;

$f^{(m)}(x, kh)$ – производная, рассчитанная с шагом kh ;

$O(h^{p+1})$ – погрешность аппроксимации производной.

Здесь производные $f^{(m)}(x, h)$ и $f^{(m)}(x, kh)$ определены с порядком точности p .

В случае выполнения расчетов с шагами h_1, h_2, \dots, h_r уточненное решение для производной $f^{(m)}(x)$ можно получить по формуле Ромберга. Порядок точности возрастает на $r-1$. Указано [122], что условием применимости уточняющих формул является наличие у исходной функции непрерывных производных достаточно высоких порядков. Формула Ромберга имеет вид:

$$f^{(m)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f^{(m)}(x, h_1) & h_1^p & h_1^{p+1} & \dots & h_1^{p+r-2} \\ f^{(m)}(x, h_2) & h_2^p & h_2^{p+1} & \dots & h_2^{p+r-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(m)}(x, h_r) & h_r^p & h_r^{p+1} & \dots & h_r^{p+r-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & h_1^p & h_1^{p+1} & \dots & h_1^{p+r-2} \\ 1 & h_2^p & h_2^{p+1} & \dots & h_2^{p+r-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & h_r^p & h_r^{p+1} & \dots & h_r^{p+r-2} \end{vmatrix}} + O(h^{p+1}). \quad (2.43)$$

Используем формулу при максимальном значении $m=2$.

2.6 Численное интегрирование

Интегрирование с помощью компьютеров можно производить различными методами. Большинство из них своим происхождением обязано интерполяционному полиному Лагранжа, хотя и в неявном виде. Приближенные методы вычисления интеграла позволяют определить значения интегралов непосредственно по

значениям подынтегральной функции и не зависят от способа ее задания. Суть метода заключается в том, что подынтегральная функция приближенно заменяется более простой (горизонтальной или наклонной прямой, параболой 2-го, 3-го или более высокого порядка), от которой интеграл легко берется [23]. В результате получаются так называемые *квадратурные формулы*:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n q_i f(x_i) + R, \quad (2.44)$$

где a, b – пределы интегрирования;
 x_i – узлы интерполяции;
 q_i – коэффициенты (веса);
 R – остаточный член, погрешность метода.

Отбрасывание остаточного члена R приводит к погрешности усечения. К ней добавляется погрешность округления, появляющаяся при выполнении расчетов.

Существует два подхода к построению квадратурных формул в зависимости от способа разбиения отрезка интегрирования $[a, b]$. По первому используются равноотстоящие узлы и произвольное разбиение отрезка интегрирования. По второму местоположение и длина интервалов подбираются исходя из достижения максимальной точности.

Так как мы используем результаты анализа видеоматериалов для получения исходных данных и расчета моделей деформации, кинематики и динамики, то у нас автоматически получаются равноотстоящие узлы по причине оптической регистрации движения через равные промежутки времени¹⁷.

Рассмотрим метод по первому способу, получивший название *метода Ньютона-Котеса* [23, 86], предполагающий замену подынтегральной функции параболой k -го порядка. Учитываем, что алгоритм устойчив лишь при сравнительно небольших значениях k ($k < 11$). Частными случаями метода являются такие широко известные методы, как метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона.

Отметим существенную деталь: расчетная формула применяется для одного участка. В случае разбиения

¹⁷ Видеосъемка выполняется с постоянной частотой.

всего интервала $[a, b]$ на r участков, формулу применяют для каждого участка и суммируют результаты. При этом можно определять интегралы на каждом из участков по своим методам (аппроксимировать параболами различных порядков). Полученная таким образом общая формула для интеграла на всем интервале $[a, b]$ называется *усложненной квадратурной формулой* [23].

Рассмотрим интегрирование функции $f(t)$. В дальнейшем при конкретных расчетах вместо этого общего выражения будем иметь в виду функции для соответствующих параметров характерных точек БМС или упругой опоры. Например, такая ситуация складывается при определении прогибов балки по Дюамелю. Модели, разработанные согласно данному способу, показаны дальше, в главе 7.

Разобьем исходный отрезок $[a, b]$ на r участков. При исследовании закономерностей движения БМС на основании результатов оптической съемки мы имеем дело с таблицей данных по каждому параметру, заданных с *равным шагом*. Шаг определяется временным интервалом Δt между двумя ближайшими видеокдрами:

$$\Delta t = \frac{1}{W_c}, \quad (2.45)$$

где W_c – частота кадров в секунду.

При использовании методов, повышающих точность вычислений, необходимо использовать формулы с двойным $2h$ и половинным $h/2$ шагами. По этой причине примем за шаг h следующее выражение:

$$h = 2\Delta t = t_{i+2} - t_i, \quad i=0, 2, \dots, n-2. \quad (2.46)$$

Тогда половинный шаг равен

$$\frac{h}{2} = \Delta t = t_{i+1} - t_i, \quad i=0, 1, \dots, n-1, \quad (2.47)$$

а удвоенный

$$2h = 4\Delta t = t_{i+4} - t_i, \quad i=0, 4, \dots, n-4. \quad (2.48)$$

Номера узлов обозначим для половинного шага $h/2$ через i , начиная от 0 и до n , и эту нумерацию оставим неизменной при любом шаге. Тогда количество узлов в таблице данных при шаге $h/2$ запишем как $(n+1)$.

Обозначим частичные отрезки через $[t_{jk}, t_{jk+k}]$, где $t_{jk}=a+jkh$, $t_{jk+k}=a+(jk+k)h$, $j=0, 1, \dots, r-1$, $t_r=b$. Здесь j является номером текущего участка, начиная с 0.

Расчетная формула для одного участка, где данные распределены с шагом h , выглядит следующим образом:

$$I_{j(h)} = \int_{t_{jk}}^{t_{jk+k}} f(t) dt \approx (t_{jk+k} - t_{jk}) \sum_{s=0}^k f(t_{jk+s}) H_s = \sum_{s=0}^k q_{s(h)} f(t_{j+s}),$$

$$q_{s(h)} = (t_{jk+k} - t_{jk}) H_s, \quad (2.49)$$

где t_{jk+s} – значения абсциссы на текущем участке;

k – число используемых ординат (аппликат) на участке j (начиная с 0), которые применяются для аппроксимации подынтегральной функции (порядок параболы);

H_s – коэффициенты Ньютона-Котеса;

$q_{s(h)}$ – веса при соответствующем шаге разбиения интервала. В данном случае принят шаг h .

При этом на каждом участке можно аппроксимировать функцию параболой разного порядка, т.е. порядок k ряда участков будет отличаться друг от друга. Но мы так делать не будем. Для упрощения вычислительных алгоритмов примем, что парабола для любого частичного отрезка $[t_{jk}, t_{jk+k}]$ имеет неизменный порядок k . А в качестве пояснения укажем, что при использовании параболы второй степени требуется три точки (начиная с 0). В этом случае $k=2$, и мы получаем частный вариант формулы Ньютона-Котеса – формулу Симпсона, для которого коэффициенты Ньютона-Котеса равняются [23]:

$$H_0=H_2=1/6, \quad H_1=2/3.$$

При $k=1$ имеем другой частный вариант формулы Ньютона-Котеса – формулу трапеций. Коэффициенты Ньютона-Котеса для случаев $k \leq 5$ приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Коэффициенты Ньютона-Котеса

k	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
1	1/2	1/2	---	---	---	---
2	1/6	2/3	1/6	---	---	---
3	1/8	3/8	3/8	1/8	---	---
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90	---
5	19/288	25/96	25/144	25/144	25/96	19/288

Упростим выражение для весов и приведем его к виду

$$q_{s(h)} = (t_{jk+k} - t_{jk})H_s = \{[a + (jk + k)h] - [a + jkh]\}H_s = khH_s. \quad (2.50)$$

Погрешность интегрирования и уточненное значение интеграла можно определить путем интегрирования с исходным h , двойным $2h$ и половинным $h/2$ шагами. Достоинство данного подхода заключается в том, что значение функции $f(t)$ определяется один раз для шага $h/2$ и используется при вычислении остальных интегралов при совпадении узлов (при h и $2h$).

В случае разбиения интервала на участки с двойным $2h$ и половинным $h/2$ шагами интегралы на участках определим по формулам (2.51), заменяя в первом случае шаг h на $2h$ и на $h/2$ во втором.

Тогда для двойного шага имеем ту же форму записи, но с несколько измененным содержанием:

$$I_{j(2h)} = \int_{t_{jk}}^{t_{jk+k}} f(t)dt \approx (t_{jk+k} - t_{jk}) \sum_{s=0}^k f(t_{jk+s})H_s = \sum_{m=0}^k q_{s(2h)}f(t_{j+s}),$$

$$q_{s(2h)} = (t_{jk+k} - t_{jk})H_s = 2khH_s, \quad (2.53)$$

где $j=0, 1, \dots, l-1$; $t_l = b$;

l – количество участков на всем интервале $[a, b]$ при двойном шаге $2h$.

$$l = \frac{r}{2}.$$

Границы интервала в принятых ранее обозначениях запишем как

$$t_{jk}=a+2jkh, t_{jk+k}=a+2(jk+k)h. \quad (2.54)$$

Для половинного шага соответственно получим границы участков:

$$t_{jk} = a + jk \frac{h}{2}, t_{jk+k} = a + (jk + k) \frac{h}{2} \quad (2.55)$$

и интеграл с учетом нового диапазона изменения номеров участков:

$$I_{j(h/2)} = \int_{t_{jk}}^{t_{jk+k}} f(t)dt \approx (t_{jk+k} - t_{jk}) \sum_{s=0}^k f(t_{jk+s})H_s = \sum_{s=0}^k q_{s(h/2)}f(t_{j+s}),$$

$$q_{s(h/2)} = (t_{jk+k} - t_{jk})H_s = \frac{khH_s}{2}, \quad (2.56)$$

где $j=0, 1, \dots, e-1$; $x_e = b$;

e – количество участков на всем интервале $[a, b]$ при половинном шаге $h/2$. Имеем

$$e = 2r.$$

Интегралы для всего заданного интервала $[a, b]$ при одинарном h , двойном $2h$ и половинном $\frac{h}{2}$ шагах составят соответственно

$$I_h = \sum_{j=0}^{r-1} I_{j(h)}, \quad I_{2h} = \sum_{j=0}^{l-1} I_{j(2h)} = \sum_{j=0}^{\left(\frac{r}{2}\right)-1} I_{j(2h)}, \quad I_{h/2} = \sum_{j=0}^{e-1} I_{j(h/2)} = \sum_{j=0}^{2r-1} I_{j(h/2)}. \quad (2.57)$$

Мы специально применили форму записи интегралов через первоначальное обозначение количества участков r , хотя она и не является строгой, так как при разбиении интервала $[a, b]$ на участки с разным шагом меняется не только количество участков, но и их границы, т.е. это уже другие участки. Но именно такая запись показывает, что количество участков r должно быть четным, иначе получим нецелое число участков $r/2$ при разбиении интервала с двойным шагом. Усложненные квадратурные формулы примут вид:

$$I_h = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{s=0}^k q_{s(h)} f(t_{j+s}), \quad I_{2h} = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{s=0}^k q_{s(2h)} f(t_{j+s}), \quad I_{h/2} = \sum_{j=0}^{e-1} \sum_{s=0}^k q_{s(h/2)} f(t_{j+s}). \quad (2.58)$$

Напомним, что k может быть разным в пределах одного и того же выражения при разных j .

Для оценки погрешности используют соотношение

$$I = I_h + ch^k + O(h^{k+m}), \quad (2.59)$$

где I - неизвестное точное значение интеграла;

I_h - известное приближенное значение интеграла, зависящее от шага h ;

c – неизвестная, не зависящая от h , постоянная;

$k, m > 0$ - известные числа;

$O(h^{k+m})$ - погрешность.

В этом случае погрешность оценивают по методу Рунге. Условием его применимости является выполнение отношения

$$\left| 2^k \frac{I_h - I_{h/2}}{I_{2h} - I_h} - 1 \right| < 0,1. \quad (2.60)$$

Неравенство может не выполняться по следующим причинам:

- h велико, при этом влияет неучитываемый член $O(h^{k+m})$;
- h слишком мало, тогда могут сказаться погрешности округлений при вычислениях на реальной ЭВМ;
- $c=0$ или близко к нулю.

Погрешность метода по правилу Рунге оценивается как [27, 122]:

$$R \approx \frac{|I_{h/2} - I_h|}{2^k - 1}. \quad (2.61)$$

Для формулы Симпсона показатель степени составит $k=4$ [23] и тогда получим величину погрешности:

$$R \approx \frac{|I_{h/2} - I_h|}{15}, \quad (2.62)$$

т.е. при увеличении числа разбиений в два раза погрешность падает в 15 раз [27]. Предложенные формулы удобны тем, что при переходе от $2h$ к h могут быть использованы все вычисленные ранее значения функции [23].

В работе [127] отмечено, что интегрирование по квадратурным формулам сопровождается также и ошибками округления, носящими случайный характер: «С увеличением числа интервалов разбиения n ошибки округления растут в среднем пропорционально \sqrt{n} . Вследствие этого общая погрешность, равная сумме погрешностей усечения и округления, с ростом числа интервалов разбиения уменьшается за счет уменьшения ошибки усечения лишь до некоторого значения n . Затем погрешности округления преобладают, и общая погрешность увеличивается».

При необходимости после оценки погрешности можно найти уточненное по Ричардсону значение интеграла I_h^* :

$$I_h^* = \frac{2^k I_{h/2} - I_h}{2^k - 1} \quad (2.63)$$

с погрешностью $I - I_h^* = O(h^{k+m})$.

На начальном этапе численного интегрирования в качестве исходных данных задаются значения подынтегральной функции $\{f(t_i)\}$ для одной из характерных точек исследуемого звена или упругой опоры, частота кадров видеосъемки W_c и таблица коэффициентов Ньютона-Котеса $\{H_s, p\}$.

Таблицу требуемых коэффициентов можно расширить. Для этого необходимо воспользоваться работами [17, 39, 41].

Вторым этапом является ввод порядка параболы k и количества исследуемых кадров N_{kd} . Требования к этим данным таковы, что при разбиении всего интервала на участки с разным шагом: $h/2$, h , $2h$, количество участков e , r , l должно оставаться целым. Для этого достаточно, чтобы $e = \frac{N_{kd} - 1}{k}$ и $l = \frac{N_{kd} - 1}{4k}$ были целыми числами.

Указывать границы заданного интервала $[a, b]$ нет необходимости, так как все расчетные формулы для наших задач преобразованы к виду, где границы интервала учитываются в косвенной форме, а не напрямую. Так, частота кадров W_c дает нам постоянный по величине половинный шаг $h/2$, а количество кадров N_{kd} однозначно определяет начало интервала $a = t_0 = 0$ и его конец $b = t_N = \frac{hN_{kd}}{2}$.

Шаг h , с которым разбивается заданный интервал, определяется в программе. В дальнейшем расчеты ведутся при разбиении всего интервала с разным шагом отдельно друг от друга. При выполнении условия по правилу Рунге (2.61) интеграл на всем интервале уточняется по формуле Ричардсона (2.64). Если условие по правилу Рунге не выполняется, то значение ошибки помечаем как -1 , а значением интеграла будет интеграл, вычисленный при шаге h .

Для оценки погрешности удобно использовать правило Рунге с последующим уточнением значения интеграла по Ричардсону.

Укажем, что возможности современной вычислительной техники таковы, что численное интегрирование задач по биомеханике управляемого движения человека полностью и легко реализуется на любой ПЭВМ.

На рисунке 2.3 показан алгоритм численного интегрирования по методу Ньютона-Котеса.

Отметим, что предложенный алгоритм, во-первых, предназначен для численного интегрирования только одного из параметров выбранной характерной точки звена или опоры. Во-вторых, он не является оптимальным: при вычислении каждого приближения $I_{h,i}$ не используются значения функции $f(t)$, уже найденные на предыдущем этапе.

В работе [122] приведена еще одна схема уточнения значения интеграла – процесс Эйткена. Метод дает возможность оценить погрешность $O(h^{k+m})$ и указывает алгоритм уточнения результатов. Расчет необходимо проводить три раза при различных шагах разбиения h_1 , h_2 , h_3 . При этом отношение шагов постоянны: $h_2/h_1 = h_3/h_2 = q_{ун}$. Например, $q_{ун}$ можно выбрать равным $q_{ун} = 0,5$. В результате расчетов получают три интеграла: I_1 , I_2 , I_3 . Для нашего случая примем: $I_1 = I_{2h}$, $I_2 = I_h$, $I_3 = I_{h/2}$.

Уточненное значение интеграла определяется по формуле

$$I \approx I_1 - \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_1 - 2I_2 + I_3} = I_{2h} - \frac{(I_{2h} - I_h)^2}{I_{2h} - 2I_h + I_{h/2}}. \quad (2.64)$$

Порядок точности $(k+m)$ метода численного интегрирования оценивают по соотношению

$$k + m = \frac{1}{\ln q_{un}} \ln \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1} = \frac{1}{\ln q_{un}} \ln \frac{I_{h/2} - I_h}{I_h - I_{2h}}. \quad (2.65)$$

Уточненное значение интеграла можно определить и методом Рунге-Ромберга, описанным нами при рассмотрении численного дифференцирования в п.2.5.

Предлагаемая методика интегрирования не является единственно возможной. Одним из методов численного интегрирования, особенно эффективным при строго ограниченном числе узлов, является *метод сплайнов*, использующий интерполяцию сплайнами. Отметим, что квадратурные формулы с постоянными коэффициентами представляют собой линейную комбинацию табличных значений функции.

Ввод $\{f(t_i)\}, W_C, \{H_{ip}\}, k, N_{kd}$	
$t = 1/W_C, \quad h = 2t, \quad e = (N_{kd} - 1)/k, \quad l = (N_{kd} - 1)/(4k)$	
$r = 2e$	
для i от 1	
$I_{h/2} = 0, \quad I_h = 0, \quad I_{2h} = 0$	
для j от 0	
$I_3 = 0$	
для s от 0	
$q_3 = khH_{sk}/2, \quad I_3 = q_3 f(t_{j+s}), \quad I_{h/2j} = I_{h/2j} + I_3$	
до k	
до $e-1$	
для j от 0	
$I_2 = 0$	
для s от 0	
$q_2 = khH_{sk}, \quad I_2 = q_2 f(t_{j+s}), \quad I_{hj} = I_{hj} + I_2$	
до k	
до $r-1$	
для j от 0	
$I_1 = 0$	
для s от 0	
$q_1 = 2khH_{sk}, \quad I_1 = q_1 f(t_{j+s}), \quad I_{2hj} = I_{2hj} + I_1$	
до k	
до $l-1$	
$B_i = \left 2^k (I_{hi} - I_{h/2i}) / (I_{2hi} - I_{hi}) - 1 \right $	
$B_i < 0,1$	
Да	Нет
$R_t = \frac{ I_{h/2i} - I_{hi} }{2^k - 1}$	$R_t = -1$
$I_{hi}^* = \frac{2^k I_{h/2i} - I_{hi}}{2^k - 1}$	$I_{hi}^* = I_{hi}$
до N_{kd}	
Вывод $\{I_{hi}, R_t\}$	

Рисунок 2.3 – Метод Ньютона-Котеса

При использовании сплайнов коэффициенты зависят от всех значений функции, и поэтому последняя является нелинейной.

ГЛАВА 3

МОДЕЛИ КИНЕМАТИКИ

3.1 Угловые кинематические характеристики движения биомеханической системы

Исходными данными для исследования закономерностей целенаправленного движения биомеханической системы в условиях упругой опоры служат экспериментальные и расчетные параметры, описывающие положение тела человека и спортивного снаряда и их кинематику. Методы определения этих данных, применяемые в каждом конкретном анализе, могут меняться в зависимости от поставленной задачи, возможностей исследователя, существующих методик и технических средств для съема и обработки параметров движения. Например, для получения значений линейных и угловых скоростей и ускорений звеньев биомеханической системы можно применить специальные датчики. То же относится и к деформируемой опоре. В качестве таких датчиков для нее можно использовать тензодатчики, но существуют и другие методы непосредственного измерения параметров деформации упругой опоры. В случае использования электротензометрии после определенных расчетов получают кинематические и силовые характеристики взаимодействия опоры с телом спортсмена.

Но наиболее удобным и доступным способом получения исходных данных является *метод оптической регистрации* параметров движения биомеханической системы. И уже на их основе по соответствующим моделям находят значения всех кинематических и динамических параметров спортивного упражнения. Отметим, что для определения угловых скоростей и ускорений звеньев тела в этом случае используют численные методы дифференцирования.

Что касается параметров деформации спортивного снаряда, то прогибы при изгибе получают методами сопротивления материалов или в результате промеров на видеокадрах. Дальнейшую обработку полученных табличных значений осуществляют численными методами. Например, кинематические параметры движения упругой опоры можно рассчитать с помощью численных методов – численного дифференцирования и интегрирования. Подробнее эти вопросы рассмотрены при изучении колебаний спортивного снаряда в главе 7.

Как указывалось в п. 2.5, от количества узлов зависит точность результата. В то же время их число может варьироваться от эксперимента к эксперименту. Поэтому в сложных моделях, использующих

универсальные алгоритмы построения моделей с заранее неизвестным числом исходных данных, для уменьшения трудоемкости, громоздкости программ и соответственно количества ошибок применяют наиболее простые формулы, например, для трех узлов [56]. Но существует и другой путь, позволяющий создать алгоритм, и на его основе программу для определения производной функции с произвольным числом узлов. Он предложен в уравнениях (2.23) и (2.34). В качестве функции $f(x_i)$ выступают углы Q_i . При этом шаг таблицы данных h_c определится выражением

$$h_c = \Delta t = \frac{1}{W_c} = t_{i+1} - t_i, \quad i=0, 1, \dots, n-1. \quad (3.1)$$

Подставляя углы Q_i в соответствующие уравнения для выбранных кадров, взятых для анализа, определяют угловую скорость \dot{Q}_i каждого i -го звена и его угловое ускорение \ddot{Q}_i .

3.2 Линейные скорости и ускорения суставов звеньев и кинематической пары «рука – опора»

В оборотовых упражнениях, выполняемых в гимнастике на спортивных снарядах, реакции в кинематических парах «рука – опора» вызывают изгиб опоры, и, как следствие этого, появляется *обращение*¹⁸ опоры вокруг неподвижной оси абсцисс (рис. 3.1, а, б). Это понятие рассмотрено в работе [10]. Применим его к спортивным снарядам.

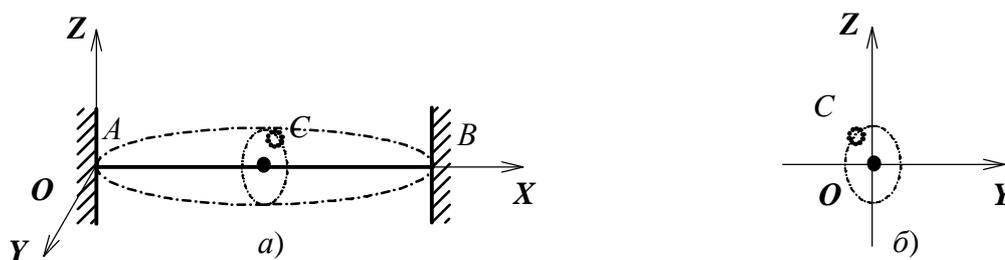


Рисунок 3.1 – Обращение опоры: а) опора в пространстве; б) вид слева

Вторым моментом, который необходимо предварительно обозначить, является форма записи уравнений кинематики. Выражения, написанные

¹⁸ Под *обращением* опоры подразумевается вращение изогнутой оси балки (грифа перекладины, жерди женских брусьев) ACB вокруг неподвижной оси абсцисс OX . Обращение следует отличать от *вращения*, происходящего вокруг собственной оси под действием вращающего момента.

через производные и их проекции, позволяют представить модели в виде, удобном для расчетов, а вот основные кинематические закономерности, следующие из законов механики, лучше видны при использовании уравнений в векторной форме. Именно это дает возможность выявить ряд особенностей, ускользающих от внимания при записи моделей кинематики через проекции скоростей и ускорений.

Модели с вращающейся пружиной. Определим линейную скорость суставов звеньев и кинематической пары «рука – опора», продифференцировав уравнения координат шарниров (1.12) по времени. При этом учитываем, что дифференцируемые функции являются сложными.

Отметим по поводу кинематической пары «рука – опора» следующее: в общем случае мы имеем две пары¹⁹, но для вычислений принимается как одна из них, так и обе. Более подробно выбор расчетного сечения балки и соответственно количества опорных шарниров для определения параметров движения биомеханической системы и принятие по выбранному сечению параметров пружины исследован в главах 5 и 6.

Для шарнира «рука – опора» имеем:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{O_01} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0, \\ \dot{Z}_{O_01} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Здесь учтено, что пружина, моделирующая опору, имеет переменные длину L_0 и угол наклона Q_0 к оси OY . Для шарниров биомеханической системы и крайней точки K получим:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{O_{12}} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1, \\ \dot{Z}_{O_{12}} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1, \\ \dot{Y}_{O_{23}} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2, \\ \dot{Z}_{O_{23}} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2, \\ \dot{Y}_{O_{3K}} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3, \\ \dot{Z}_{O_{3K}} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Распространяя эти уравнения на N -звенную модель тела человека, получим следующие выражения для определения скорости дистального сустава i -го звена, кинематической пары «рука – опора» и крайней точки K :

¹⁹ По количеству рук.

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{o_{i-1,i}} &= (\dot{L}_0 \cos Q_0) - \sum_{j=0}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \sin Q_j, \\ \dot{Z}_{o_{i-1,i}} &= (\dot{L}_0 \sin Q_0) + \sum_{j=0}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \cos Q_j,\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K.$$

Первые члены обоих уравнений в круглых скобках появляются только при учете упругих свойств материала спортивного снаряда и отражают прогиб опоры в радиальном направлении (растяжение-сжатие пружины). Остальные члены имеют форму записи, присущую моделям кинематики независимо от типа опоры – жесткая она или упругая. Отличие лишь в звене, с которого начинается отсчет параметров. При жесткой опоре нулевое звено отсутствует.

Выделим квадратными скобками [...] все параметры, характеризующие обращение спортивного снаряда:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{o_{i-1,i}} &= [\dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0] - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \sin Q_j, \\ \dot{Z}_{o_{i-1,i}} &= [\dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0] + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \cos Q_j,\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K.$$

При расчете линейных ускорений осей шарниров рассматриваемой модели опорно-двигательного аппарата тела человека необходимо найти вторую производную по времени от значений координат осей шарниров. Тогда для кинематической пары «рука – опора» имеем:

$$\begin{aligned}\ddot{Y}_{o_{01}} &= \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0, \\ \ddot{Z}_{o_{01}} &= \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Для шарниров звеньев и крайней точки K биомеханической системы с учетом динамической деформации спортивного снаряда получим:

$$\begin{aligned}\ddot{Y}_{o_{12}} &= \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\ &\quad - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1, \\ \ddot{Z}_{o_{12}} &= \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\ &\quad + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1, \\ \ddot{Y}_{o_{23}} &= \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\ &\quad - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{Z}_{O_{23}} &= \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\
&\quad + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2, \\
\ddot{Y}_{O_{3K}} &= \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - \\
&\quad - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - L_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - L_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
\ddot{Z}_{O_{3K}} &= \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - \\
&\quad - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + L_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - L_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

В общем виде для дистального сустава i -го звена, кинематической пары «рука – опора» и крайней точки K получим:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_{O_{i-1,i}} &= [\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0] - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j^2 \cos Q_j, \\
\ddot{Z}_{O_{i-1,i}} &= [\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0] + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j^2 \sin Q_j,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K.$$

Здесь квадратными скобками [...] выделены параметры, характеризующие кинематику опоры, т.е. пружины. Если придерживаться единообразия в записи членов каждого уравнения, то, группируя остальные слагаемые, начиная с нулевого звена, в более компактной записи получим:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_{O_{i-1,i}} &= (\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0) - \sum_{j=0}^{i-1} L_j \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=0}^{i-1} L_j \dot{Q}_j^2 \cos Q_j, \\
\ddot{Z}_{O_{i-1,i}} &= (\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0) + \sum_{j=0}^{i-1} L_j \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=0}^{i-1} L_j \dot{Q}_j^2 \sin Q_j, \\
i &= 1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

В круглых скобках уравнений (3.9) показаны параметры, присущие только деформируемой опоре. Отметим, что удвоенные произведения в формулах (3.6)-(3.9) обозначают проекции кориолисова ускорения на оси OY и OZ . Оно возникает всегда, когда имеется относительное поступательное движение в системе координат, совершающей вращательное движение. При этом синус угла между вектором угловой и вектором поступательной скоростей не должен быть равным нулю. В нашем случае пружина, сжимаясь или растягиваясь, совершает

относительное поступательное движение и при этом постоянно меняет свое угловое положение по отношению к оси OY в переносном вращательном движении.

Члены уравнения (3.8), относящиеся к кинематике пружины и отмеченные квадратными скобками, являются кинематическими характеристиками деформационного движения реальной опоры биомеханической системы, т.е. обращения упругого элемента спортивного снаряда, и рассчитываются методами сопротивления материалов, исходя из моделей деформации.

Модели с двумя поступательно движущимися пружинами. Таким же образом, как и для случая одной пружины дифференцируем теперь уже уравнения (1.14) для координат суставов, опорной кинематической пары и крайней точки K в случае задания упругой опоры в виде двух поступательно движущихся пружин. Получим:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_{O_{01}} &= \dot{L}_{0\Gamma}, \\
 \dot{Z}_{O_{12}} &= \dot{L}_{0B}, \\
 \dot{Y}_{O_{12}} &= \dot{L}_{0\Gamma} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1, \\
 \dot{Z}_{O_{12}} &= \dot{L}_{0B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1, \\
 \dot{Y}_{O_{23}} &= \dot{L}_{0\Gamma} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2, \\
 \dot{Z}_{O_{23}} &= \dot{L}_{0B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2, \\
 \dot{Y}_{O_{3K}} &= \dot{L}_{0\Gamma} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - L_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3, \\
 \dot{Z}_{O_{3K}} &= \dot{L}_{0B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + L_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Распространяя эти уравнения на N -звенную модель тела человека, получим следующие выражения для определения скорости дистального сустава i -го звена, или кинематической пары «рука – опора», или крайней точки K :

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_{O_{i-1,i}} &= [\dot{L}_{0\Gamma}] - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \sin Q_j, \\
 \dot{Z}_{O_{i-1,i}} &= [\dot{L}_{0B}] + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \cos Q_j,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K.$$

Дифференцируя уравнения (3.10) один раз или дважды выражения (1.14), получим ускорения шарниров биомеханической системы с учетом обращения опоры :

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_{O_{01}} &= \ddot{L}_{0_{\Gamma}}, \\
\ddot{Z}_{O_{12}} &= \ddot{L}_{0_B}, \\
\ddot{Y}_{O_{12}} &= \ddot{L}_{0_{\Gamma}} - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1, \\
\ddot{Z}_{O_{12}} &= \ddot{L}_{0_B} + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1, \\
\ddot{Y}_{O_{23}} &= \ddot{L}_{0_{\Gamma}} - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2, \\
\ddot{Z}_{O_{23}} &= \ddot{L}_{0_B} + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2, \\
\ddot{Y}_{O_{3K}} &= \ddot{L}_{0_{\Gamma}} - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
&\quad - L_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - L_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
\ddot{Z}_{O_{3K}} &= \ddot{L}_{0_B} + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
&\quad + L_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - L_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В общем виде для дистального шарнира i -го звена, или кинематической пары «рука – опора», или крайней точки K получим:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_{O_{i-1,i}} &= [\ddot{L}_{0_{\Gamma}}] - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j^2 \cos Q_j, \\
\ddot{Z}_{O_{i-1,i}} &= [\ddot{L}_{0_B}] + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j^2 \sin Q_j,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K.$$

Как и ранее, квадратными скобками [...] выделены параметры, характеризующие кинематику горизонтальной и вертикальной пружин.

3.3 Направление кинематических характеристик пары «рука – опора»

Для определения направления кинематических параметров области контакта спортсмена со снарядом необходимо преобразовать уравнения кинематики, выведенные в п. 3.2, в векторную форму.

Модели с вращающейся пружиной. Для данного случая введем следующие обозначения, принятые в механике:

$\bar{v}_{O_{01}}^{p-c}$ - относительная скорость оси шарнира «рука – опора»²⁰ (скорость растяжения-сжатия пружины). Скалярная величина равна

$$v_{O_{01}}^{p-c} = \dot{L}_0. \tag{3.14}$$

²⁰ Или же кинематическая пара «рука – пружина».

$\bar{v}_{O_{j-1,j}}^{ep}$ - линейная (окружная) скорость оси шарнира «рука – опора» во вращательном движении пружины при $j=0$ или оси дистального сустава j -го звена при $j \geq 1$. Это переносная скорость и ее скалярная величина составляет

$$v_{O_{j-1,j}}^{ep} = L_j \dot{Q}_j = L_j \omega_j, \quad (3.15)$$

где ω_j – угловая скорость во вращательном движении опоры (пружины) при $j=0$ или j -го звена при $j \geq 1$. $\dot{Q}_j = \omega_j$.

Преобразуем выражения (3.4) с учетом введенных обозначений. Получим уравнения для проекций абсолютной скорости шарнира $O_{i-1,i}$:

$$\begin{aligned} v_{(O_{i-1,i})Y}^{abc} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - \sum_{j=0}^{i-1} L_j \omega_j \sin Q_j, \\ v_{(O_{i-1,i})Z}^{abc} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + \sum_{j=0}^{i-1} L_j \omega_j \cos Q_j, \end{aligned} \quad (3.16)$$

или

$$\begin{aligned} v_{(O_{i-1,i})Y}^{abc} &= v_{O_{01}}^{p-c} \cos Q_0 - \sum_{j=0}^{i-1} v_{O_{j,j+1}}^{ep} \sin Q_j, \\ v_{(O_{i-1,i})Z}^{abc} &= v_{O_{01}}^{p-c} \sin Q_0 + \sum_{j=0}^{i-1} v_{O_{j,j+1}}^{ep} \cos Q_j, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K.$$

В векторной форме уравнение для абсолютной скорости шарнира $O_{i-1,i}$ биомеханической системы выглядит следующим образом:

$$\bar{v}_{O_{i-1,i}}^{abc} = \bar{v}_{O_{01}}^{p-c} + \sum_{j=0}^{i-1} \bar{v}_{O_{j,j+1}}^{ep}, \quad (3.18)$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K.$$

Или, группируя члены уравнения для выделенных систем, получим

$$\bar{v}_{O_{i-1,i}}^{abc} = [\bar{v}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{v}_{O_{01}}^{ep}] + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{v}_{O_{j-1,j}}^{ep} = [\bar{v}_{O_{01}}^{abc}] + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{v}_{O_{j-1,j}}^{ep}, \quad (3.19)$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K,$$

где $\bar{v}_{O_{01}}^{abc}$ - абсолютная скорость кинематической пары «рука – опора».

$$\bar{v}_{O_{01}}^{abc} = \bar{v}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{v}_{O_{01}}^{ep}. \quad (3.20)$$

Как и в случае со скоростями, введем для линейных ускорений обозначения, принятые в теоретической механике:

$\bar{a}_{O_{01}}^{p-c}$ - относительное ускорение при растяжении-сжатии пружины в месте ее контакта с биомеханической системой. Скалярная величина составит

$$a_{O_{01}}^{p-c} = \ddot{L}_0. \quad (3.21)$$

$\bar{a}_{O_{01}}^{kop}$ - кориолисово ускорение в сложном движении пружины в месте ее контакта с биомеханической системой. Скалярная величина равна

$$a_{O_{01}}^{kop} = 2\dot{L}_0\dot{Q}_0. \quad (3.22)$$

$\bar{a}_{O_{j-1,j}}^n$ - нормальное ускорение во вращательном движении опоры в месте ее контакта с биомеханической системой при $j=0$ или дистального сустава j -го звена при $j \geq 1$. Величина составит

$$a_{O_{j-1,j}}^n = L_j\dot{Q}_j^2 = L_j\omega_j^2. \quad (3.23)$$

$\bar{a}_{O_{j-1,j}}^\tau$ - касательное ускорение во вращательном движении опоры в месте ее контакта с биомеханической системой при $j=0$ или дистального сустава j -го звена при $j \geq 1$. Скалярная величина составит

$$a_{O_{j-1,j}}^\tau = L_j\ddot{Q}_j = L_j\varepsilon_j. \quad (3.24)$$

где ε_j – угловое ускорение j -го звена или пружины. $\varepsilon_j = \ddot{Q}_j$.

Проекции абсолютных ускорений из уравнений (3.9) получим в виде:

$$\begin{aligned} a_{(O_{i-1,i})Y}^{abc} &= \left(a_{O_{01}}^{p-c} \cos Q_0 - a_{O_{01}}^{kop} \sin Q_0 \right) - \sum_{j=0}^{i-1} a_{O_{j-1,j}}^\tau \sin Q_j - \sum_{j=0}^{i-1} a_{O_{j-1,j}}^n \cos Q_j, \\ a_{(O_{i-1,i})Z}^{abc} &= \left(a_{O_{01}}^{p-c} \sin Q_0 + a_{O_{01}}^{kop} \cos Q_0 \right) + \sum_{j=0}^{i-1} a_{O_{j-1,j}}^\tau \cos Q_j - \sum_{j=0}^{i-1} a_{O_{j-1,j}}^n \sin Q_j. \end{aligned} \quad (3.25)$$

В векторной форме запишем

$$\bar{a}_{O_{i-1,i}}^{abc} = (\bar{a}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{a}_{O_{01}}^{kop}) + \sum_{j=0}^{i-1} \bar{a}_{O_{j-1,j}}^{\tau} + \sum_{j=0}^{i-1} \bar{a}_{O_{j-1,j}}^n. \quad (3.26)$$

При выделении всех кинематических параметров обращения опоры запишем

$$\begin{aligned} \bar{a}_{O_{i-1,i}}^{abc} &= [\bar{a}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{a}_{O_{01}}^{kop} + \bar{a}_{O_{01}}^{\tau} + \bar{a}_{O_{01}}^n] + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{O_{j-1,j}}^{\tau} + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{O_{j-1,j}}^n = \\ &= [\bar{a}_{O_{01}}^{abc}] + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{O_{j-1,j}}^{\tau} + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{O_{j-1,j}}^n, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$i=1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K,$$

где $\bar{a}_{O_{01}}^{abc}$ - абсолютное ускорение опоры в кинематической паре «рука – опора».

$$\bar{a}_{O_{01}}^{abc} = \bar{a}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{a}_{O_{01}}^{kop} + \bar{a}_{O_{01}}^{\tau} + \bar{a}_{O_{01}}^n. \quad (3.28)$$

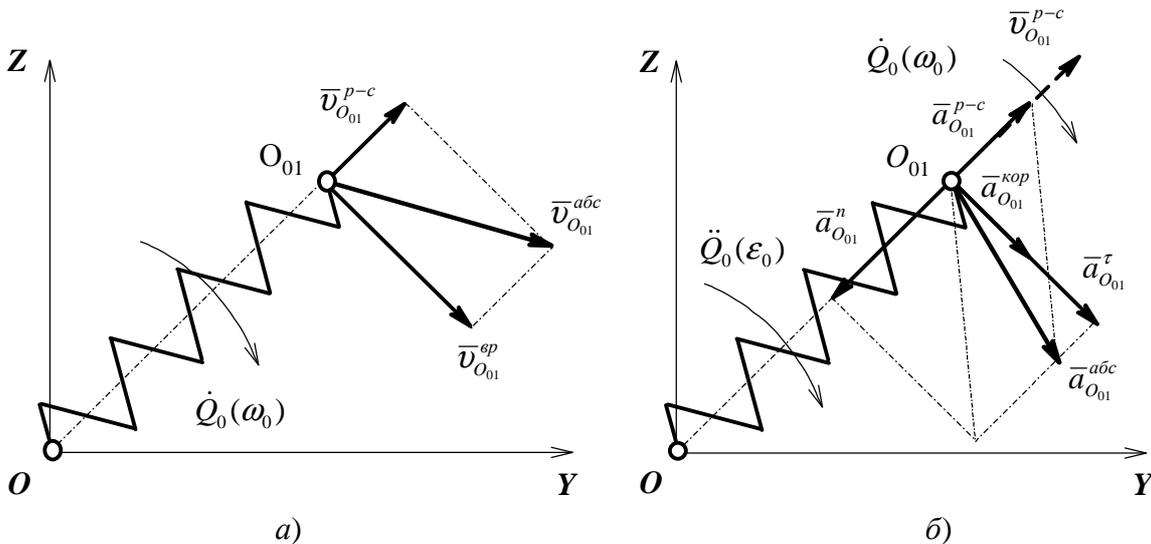


Рисунок 3.2 – Направление скоростей и ускорений в кинематической паре "рука – опора"

Направление изучаемых скоростей по уравнению (3.20) показано на рисунке 3.2, а. Векторы ускорений по выражениям (3.28) представлены на рисунке 3.2, б.

Модели с двумя поступательно движущимися пружинами. Рассмотрим скорости в поступательных движениях оси шарнира «рука – опора». Введем обозначения:

$\bar{v}_{(O_{01})\Gamma}$ - скорость при растяжении-сжатии горизонтальной пружины в месте контакта с биомеханической системой. Скалярная величина равна

$$v_{(O_{01})\Gamma} = \dot{L}_{0\Gamma} . \quad (3.29)$$

$\bar{v}_{(O_{01})B}$ - скорость при растяжении-сжатии вертикальной пружины в месте контакта с биомеханической системой. Скалярная величина составит

$$v_{(O_{01})B} = \dot{L}_{0B} . \quad (3.30)$$

$\bar{v}_{O_{j-1,j}}^{ep}$ - линейная скорость во вращательном движении дистального сустава j -го звена. В отличие от моделей кинематики с вращающейся пружиной в качестве опоры, где использовано такое же обозначение, здесь оно относится только к суставам биомеханической системы. Скалярная величина скорости определяется по уравнению (3.15), но при $j \geq 1$.

Подставляя введенные обозначения в уравнения (3.11), получим выражения для определения проекций абсолютной скорости шарнира $O_{i-1,i}$:

$$\begin{aligned} v_{(O_{i-1,i})Y}^{abc} &= v_{(O_{01})\Gamma} - \sum_{j=1}^{i-1} v_{O_j}^{ep} \sin Q_j , \\ v_{(O_{i-1,i})Z}^{abc} &= v_{(O_{01})B} + \sum_{j=1}^{i-1} v_{O_j}^{ep} \cos Q_j . \end{aligned} \quad (3.31)$$

В векторной форме уравнение примет вид

$$\bar{v}_{O_{i-1,i}}^{abc} = \bar{v}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{v}_{(O_{01})B} + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{v}_{O_j}^{ep} . \quad (3.32)$$

Сгруппируем члены уравнения, относящиеся к опоре и к биомеханической системе по отдельности, и получим

$$\bar{v}_{O_{i-1,i}}^{abc} = [\bar{v}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{v}_{(O_{01})B}] + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{v}_{O_{j-1,j}}^{ep} = [\bar{v}_{O_{01}}^{abc}] + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{v}_{O_{j,j+1}}^{ep} , \quad (3.33)$$

где $\bar{v}_{O_{01}}^{abc}$ - абсолютная скорость кинематической пары «рука – опора».

$$\bar{v}_{O_{01}}^{abc} = \bar{v}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{v}_{(O_{01})B} . \quad (3.34)$$

Сравнивая выражение (3.19) и выражение (3.33) для скорости $\bar{v}_{O_{01}}^{abc}$ при разных моделях опоры, убедимся в полной идентичности уравнений для

выделенной биомеханической системы.

Как и в случае со скоростями, введем обозначения, принятые в теоретической механике для ускорений:

$\bar{a}_{(O_{01})\Gamma}$ - относительное ускорение при растяжении-сжатии горизонтальной пружины в месте ее контакта с биомеханической системой. Скалярная величина составит

$$\bar{a}_{(O_{01})\Gamma} = \ddot{L}_{0\Gamma}. \quad (3.35)$$

$\bar{a}_{(O_{01})B}$ - относительное ускорение при растяжении-сжатии вертикальной пружины в месте ее контакта с биомеханической системой. Скалярная величина равна

$$a_{(O_{01})B} = \ddot{L}_{0B}. \quad (3.36)$$

Расшифровка обозначений $\bar{a}_{O_{j-1,j}}^n$ и $\bar{a}_{O_{j-1,j}}^\tau$ остается прежней, с учетом того, что теперь они отражают параметры только суставов звеньев.

Проекции абсолютных ускорений получим в виде:

$$\begin{aligned} a_{(O_{i-1,i})Y}^{abc} &= [a_{(O_{01})\Gamma}] - \sum_{j=1}^{i-1} a_{O_{j-1,j}}^\tau \sin Q_j - \sum_{j=1}^{i-1} a_{O_{j-1,j}}^n \cos Q_j, \\ a_{(O_{i-1,i})Z}^{abc} &= [a_{(O_{01})B}] + \sum_{j=1}^{i-1} a_{O_{j-1,j}}^\tau \cos Q_j - \sum_{j=1}^{i-1} a_{O_{j-1,j}}^n \sin Q_j. \end{aligned} \quad (3.37)$$

При выделении кинематических параметров деформации опоры запишем в векторной форме

$$\begin{aligned} \bar{a}_{O_{i-1,i}}^{abc} &= [\bar{a}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{a}_{(O_{01})B}] + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{O_{j-1,j}}^\tau + \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{O_{j-1,j}}^n = [\bar{a}_{O_{01}}^{abc}] + \sum_{j=1}^i \bar{a}_{O_{j-1,j}}^\tau + \sum_{j=1}^i \bar{a}_{O_{j-1,j}}^n, \\ i &= 1, 2, \dots, N+1; \quad N+1=K, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где
$$\bar{a}_{O_{01}}^{abc} = \bar{a}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{a}_{(O_{01})B}. \quad (3.39)$$

На рисунке 3.3 показано направление абсолютного ускорения кинематической пары «рука – опора» по уравнению (3.39).

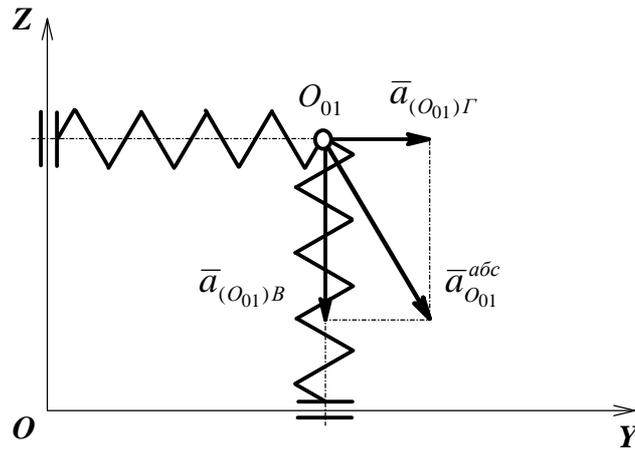


Рисунок 3.3 – Направление ускорений в кинематической паре "рука – опора" (опора в виде двух пружин)

В уравнении (3.39) квадратными скобками представлена кинематика выделенной опоры. Под опорой подразумевается упругая часть спортивного снаряда.

3.4 Линейные скорости и ускорения центров масс звеньев биомеханической системы

Модели с вращающейся пружиной. Линейные скорости и ускорения центров масс (ЦМ) звеньев тела определяются аналогично кинематическим характеристикам шарниров биомеханической системы. С этой целью дифференцируем уравнения (1.10) координат центров масс звеньев биомеханической системы по времени.

Первая производная является величиной линейной скорости ЦМ звена вдоль соответствующих осей декартовой системы координат, а вторая – величиной линейного ускорения. После несложных преобразований для трехзвенной модели с одной пружиной получим:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_{C_1} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - S_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1, \\
 \dot{Z}_{C_1} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + S_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1, \\
 \dot{Y}_{C_2} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - S_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2, \\
 \dot{Z}_{C_2} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + S_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2, \\
 \dot{Y}_{C_3} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - S_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3, \\
 \dot{Z}_{C_3} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + S_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3.
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

Для N -звенной модели тела человека имеем следующие выражения

для определения скорости центра масс i -го звена:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{C_i} &= (\dot{L}_0 \cos Q_0) - \sum_{j=0}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \sin Q_j - S_i \dot{Q}_i \sin Q_i, \\ \dot{Z}_{C_i} &= (\dot{L}_0 \sin Q_0) + \sum_{j=0}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \cos Q_j + S_i \dot{Q}_i \cos Q_i, \\ &i=1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Круглыми скобками выделены члены уравнения, присущие только деформируемому спортивному снаряду. При выделении же квадратными скобками всех слагаемых, отражающих движение опоры, получим:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{C_i} &= [\dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0] - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \sin Q_j - S_i \dot{Q}_i \sin Q_i, \\ \dot{Z}_{C_i} &= [\dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0] + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \cos Q_j + S_i \dot{Q}_i \cos Q_i, \\ &i=1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Для определения линейного ускорения ЦМ звеньев выполним дифференцирование первой производной по времени от декартовых координат ЦМ звеньев модели по методике, использованной выше. Получим:

$$\begin{aligned}\ddot{Y}_{C_1} &= \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\ &\quad - S_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - S_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1, \\ \ddot{Z}_{C_1} &= \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\ &\quad + S_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - S_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1, \\ \ddot{Y}_{C_2} &= \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\ &\quad - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - S_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - S_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2, \\ \ddot{Z}_{C_2} &= \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\ &\quad + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + S_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - S_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2, \\ \ddot{Y}_{C_3} &= \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - \\ &\quad - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\ \ddot{Z}_{C_3} &= \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - \\ &\quad - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Уравнения для N -звенной модели выглядят как

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_{C_i} &= (\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0) - \sum_{j=0}^{i-1} L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) - \\
&\quad - S_i (\ddot{Q}_i \sin Q_i + \dot{Q}_i^2 \cos Q_i), \\
\ddot{Z}_{C_i} &= (\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0) + \sum_{j=0}^{i-1} L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) + \\
&\quad + S_i (\ddot{Q}_i \cos Q_i - \dot{Q}_i^2 \sin Q_i), \quad i=1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Выделяя все параметры опоры, получим:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_{C_i} &= [\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0] - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{i-1} L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) - S_i (\ddot{Q}_i \sin Q_i + \dot{Q}_i^2 \cos Q_i), \\
\ddot{Z}_{C_i} &= [\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0] + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i-1} L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) + S_i (\ddot{Q}_i \cos Q_i - \dot{Q}_i^2 \sin Q_i).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$i=1, 2, \dots, N.$

Ввод $\{L_{(0)_k}, Q_{(0)_k}\}, \{\dot{L}_{(0)_k}, \dot{Q}_{(0)_k}\}, \{\ddot{L}_{(0)_k}, \ddot{Q}_{(0)_k}\}, \{L_i\}, \{S_i\}, \{Q_{(i)_k}\}, \{\dot{Q}_{(i)_k}\}, \{\ddot{Q}_{(i)_k}\}, N, M$
для k от 1
$Y = \ddot{L}_{(0)_k} \cos Q_{(0)_k} - 2\dot{L}_{(0)_k} \dot{Q}_{(0)_k} \sin Q_{(0)_k}, \quad Z = \ddot{L}_{(0)_k} \sin Q_{(0)_k} + 2\dot{L}_{(0)_k} \dot{Q}_{(0)_k} \cos Q_{(0)_k}$
для i от 1
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> <div style="padding: 5px;">для j от 0</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $Y = Y - L_j \ddot{Q}_{(j)_k} \sin Q_{(j)_k} - L_j \dot{Q}_{(j)_k}^2 \cos Q_{(j)_k},$ $Z = Z + L_j \ddot{Q}_{(j)_k} \cos Q_{(j)_k} + L_j \dot{Q}_{(j)_k}^2 \sin Q_{(j)_k}$ </div> <div style="padding: 5px;">до $i-1$</div> </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $\ddot{Y}_{(C_i)_k} = Y - S_i \ddot{Q}_{(i)_k} \sin Q_{(i)_k} - S_i \dot{Q}_{(i)_k}^2 \cos Q_{(i)_k},$ $\ddot{Z}_{(C_i)_k} = Z + S_i \ddot{Q}_{(i)_k} \cos Q_{(i)_k} - S_i \dot{Q}_{(i)_k}^2 \sin Q_{(i)_k},$ </div>
до N
до M
Вывод $\{\ddot{Y}_{(C_i)_k}, \ddot{Z}_{(C_i)_k}\}$

Рисунок 3.4 – Определение ускорений ЦМ звеньев БМС (опора в виде вращающейся пружины)

Алгоритм расчета ускорений по уравнениям (3.45) представлен на рисунке 3.4.

Рекуррентная структура уравнений позволяет автоматизировать процесс формирования уравнений (3.44) на ЭВМ.

Модели с двумя поступательно перемещающимися пружинами. В случае моделирования движения спортивного снаряда двумя пружинами, одной вертикальной и одной горизонтальной, выражения для скоростей и ускорений ЦМ звеньев биомеханической системы примут более простой вид, но разобьются на два типа моделей: в одной используются параметры горизонтальной пружины, во второй – вертикальной. Продифференцировав уравнения (1.14) для центров масс звеньев биомеханической системы, получим для скоростей:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_{C_1} &= \dot{L}_{0_G} - S_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1, \\
 \dot{Z}_{C_1} &= \dot{L}_{0_B} + S_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1, \\
 \dot{Y}_{C_2} &= \dot{L}_{0_G} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - S_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2, \\
 \dot{Z}_{C_2} &= \dot{L}_{0_B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + S_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2, \\
 \dot{Y}_{C_3} &= \dot{L}_{0_G} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - S_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3, \\
 \dot{Z}_{C_3} &= \dot{L}_{0_B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + S_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Используя полученные уравнения, запишем для N -звенной модели тела человека выражения для проекций скорости центра масс i -го звена:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_{C_i} &= [\dot{L}_{0_G}] - \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \sin Q_j - S_i \dot{Q}_i \sin Q_i, \\
 \dot{Z}_{C_i} &= [\dot{L}_{0_B}] + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{Q}_j \cos Q_j + S_i \dot{Q}_i \cos Q_i,
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Сравнение с моделями кинематики для биомеханической системы, совершающей движение в условиях жесткой опоры [56], показывает различие лишь в одном члене для каждого уравнения: добавляются проекции скоростей \dot{L}_{0_G} и \dot{L}_{0_B} .

После выполнения дифференцирования выражений (3.46) получим модели ускорений центров масс звеньев биомеханической системы, которые примут вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{Y}_{C_1} &= \ddot{L}_{0_G} - S_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - S_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1, \\
 \ddot{Z}_{C_1} &= \ddot{L}_{0_B} + S_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - S_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1, \\
 \ddot{Y}_{C_2} &= \ddot{L}_{0_G} - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - S_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - S_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{Z}_{C_2} &= \ddot{L}_{0_B} + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + S_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - S_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2, \\
\ddot{Y}_{C_3} &= \ddot{L}_{0_G} - L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
&\quad - S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
\ddot{Z}_{C_3} &= \ddot{L}_{0_B} + L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
&\quad + S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Для N -звенной модели имеем общие уравнения:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_{C_i} &= [\ddot{L}_{0_G}] - \sum_{j=1}^{i-1} L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) - S_i (\ddot{Q}_i \sin Q_i + \dot{Q}_i^2 \cos Q_i), \\
\ddot{Z}_{C_i} &= [\ddot{L}_{0_B}] + \sum_{j=1}^{i-1} L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) + S_i (\ddot{Q}_i \cos Q_i - \dot{Q}_i^2 \sin Q_i), \\
&\quad i=1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Как и для скоростей, сравнение с моделями ускорений для биомеханической системы в условиях жесткой опоры показывает, что мы получили лишь по одному добавочному члену в каждом уравнении, а именно \ddot{L}_{0_G} и \ddot{L}_{0_B} .

3.5 Обращение опоры и сравнительный анализ ее моделей по кинематическим характеристикам

Выясним основные кинематические закономерности движения деформируемой части спортивного снаряда во время выполнения упражнения, а также сравним направление линейных скоростей и ускорений кинематической пары «рука – опора», полученные по моделям опоры в виде одной вращающейся и двух поступательно перемещающихся пружин.

Анализ движения деформируемой части спортивного снаряда выполним на примере грифа перекладины или жерди брусьев разной высоты. Фиксация снаряда в спортивном зале осуществляется таким образом, что исключается любое движение материала опоры биомеханической системы, кроме деформационного. Другими словами, опора может лишь прогибаться при нагружении, следуя за движением спортсмена. Это означает отсутствие вращательного движения грифа вокруг собственной оси. Такое движение называется обращением. Отметим, что из-за малости угловых деформаций грифа перекладины сферическим движением поперечных сечений²¹ можно пренебречь. Также

²¹ Поперечные сечения балки при ее пространственном изгибе поворачиваются на определенные углы одновременно в двух плоскостях основной системы координат.

пренебрегаем и их деформациями, т.е. считаем, что подтверждается *гипотеза плоских сечений* – сечения, плоские до деформации, остаются таковыми и после нее. В этом случае любое поперечное сечение опоры смещается в поступательном движении относительно своего первоначального, т.е. недеформированного положения (рис. 3.5).

Таким образом, скорости и ускорения точек в любом поперечном сечении равны между собой** по величине и направлению. Для сечения опоры в шарнире «рука – опора» кинематические параметры определяются при $i=0$ по уравнениям (3.4), (3.9) или (3.11), (3.13), в зависимости от выбранной модели опоры.

Отметим, что здесь не затрагивается вопрос распределения кинематических параметров упругой опоры по ее длине, так как это уже связано с деформацией спортивного снаряда, исследуемой в главах 4, 5, 6 и 7 различными методами, включая и методы сопротивления материалов.

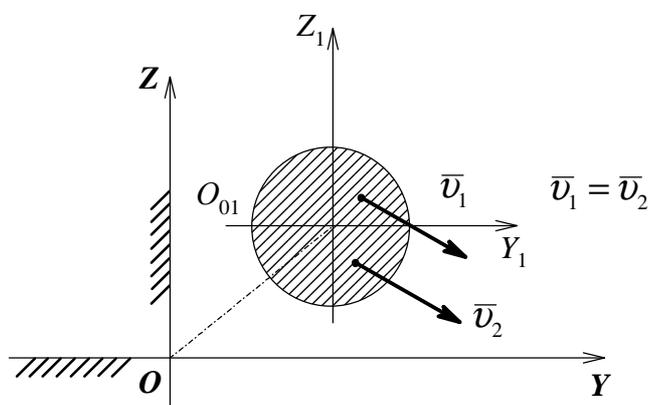


Рисунок 3.5 – Дополнительная координатная система $O_1Y_1Z_1$ и поперечное сечение грифа перекладины

Проанализируем модели кинематики, рассматривая опору в форме вращающейся пружины. Ранее получены уравнения (3.20), (3.28) для кинематической пары «рука – опора»

$$\bar{v}_{O_{01}}^{abc} = \bar{v}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{v}_{O_{01}}^{ep}, \quad \bar{a}_{O_{01}}^{abc} = \bar{a}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{a}_{O_{01}}^{kop} + \bar{a}_{O_{01}}^{\tau} + \bar{a}_{O_{01}}^n.$$

Из формул следует, что *деформационное движение опоры состоит из ее прогиба и вращения плоскости изгиба*. Прогиб отражают скорость $\bar{v}_{O_{01}}^{p-c}$ и сумма ускорений $\bar{a}_{O_{01}}^{np} = \bar{a}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{a}_{O_{01}}^n$, а вращение – $\bar{v}_{O_{01}}^{ep}$ и $\bar{a}_{O_{01}}^{ep} = \bar{a}_{O_{01}}^{kop} + \bar{a}_{O_{01}}^{\tau}$. Здесь нормальное ускорение $\bar{a}_{O_{01}}^n$ показано вместе с

** Только для этого сечения. Для любого другого кинематические характеристики иные. Направление же векторов скоростей и ускорений едины для любой точки.

ускорением, зависящим от растяжения-сжатия опоры, и связано с прогибом, хотя возникает во вращательном движении опоры. Причиной являются силы инерции, используемые при расчете прогиба опоры и соответствующим образом направленные.

По модулю абсолютная скорость равна

$$v_{O_{01}}^{abc} = \sqrt{(v_{O_{01}}^{p-c})^2 + (v_{O_{01}}^{ep})^2}, \quad (3.50)$$

а ускорение

$$\begin{aligned} a_{O_{01}}^{abc} &= \sqrt{(a_{O_{01}}^{p-c})^2 + (a_{O_{01}}^{kop})^2 + (a_{O_{01}}^{\tau})^2 + (a_{O_{01}}^n)^2}, \\ a_{O_{01}}^{np} &= \sqrt{(a_{O_{01}}^{p-c})^2 + (a_{O_{01}}^n)^2}, \\ a_{O_{01}}^{ep} &= \sqrt{(a_{O_{01}}^{kop})^2 + (a_{O_{01}}^{\tau})^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

В случае представления упругой опоры в виде двух поступательно движущихся пружин по уравнениям (3.34) и (3.39) имеем:

$$\bar{v}_{O_{01}}^{abc} = \bar{v}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{v}_{(O_{01})B}, \quad \bar{a}_{O_{01}}^{abc} = \bar{a}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{a}_{(O_{01})B}.$$

Сопоставление моделей кинематики для биомеханической системы с опорой в виде вращающейся пружины и опорой в виде двух поступательно движущихся пружин по уравнениям (3.19), (3.26), и (3.33), (3.38) показывает неизменность частей, отражающих кинематические параметры движения спортсмена. Отличие проявляется лишь для параметров опоры. При этом разной является форма записи, а выражения равны между собой, так как отражают одну и ту же величину в каждом случае – абсолютные скорости и ускорения или их проекции в основной системе координат $OXYZ$. Приравняем друг другу члены уравнений, выражающие одни и те же параметры для разных моделей опоры. Получим для абсолютных скоростей выделенной опоры

$$\bar{v}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{v}_{O_{01}}^{ep} = \bar{v}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{v}_{(O_{01})B}, \quad (3.52)$$

а для абсолютных ускорений

$$\bar{a}_{O_{01}}^{p-c} + \bar{a}_{O_{01}}^{kop} + \bar{a}_{O_{01}}^{\tau} + \bar{a}_{O_{01}}^n = \bar{a}_{(O_{01})\Gamma} + \bar{a}_{(O_{01})B}. \quad (3.53)$$

Представленная форма записи уравнений кинематики позволяет лучше понять основные зависимости движения характерных точек спортивного снаряда. Выражения показывают в явном виде каждый кинематический параметр, что дает возможность представить физическую

картину происходящих процессов во время взаимодействия человека с рабочей частью спортивного снаряда. Но в практических целях удобнее использовать формулы, записанные через проекции скоростей и ускорений.

Направление скоростей для двух типов моделей опоры показано на рисунке 3.6, а ускорений – на рисунке 3.7.

Таким образом, в этом параграфе показаны:

- эквивалентность двух типов моделей опоры по кинематическим параметрам;

- направление кинематических параметров опоры и положение плоскости ее изгиба.

Знание ускорений по величине и направлению для вращающейся пружины и для случая двух поступательно движущихся пружин является необходимым при динамическом анализе, начиная с силового, выполняемого методами кинетостатики.

Кроме этого, кинематические параметры используются в расчетах кинетической энергии и кинетических моментов звеньев и самой биомеханической системы.

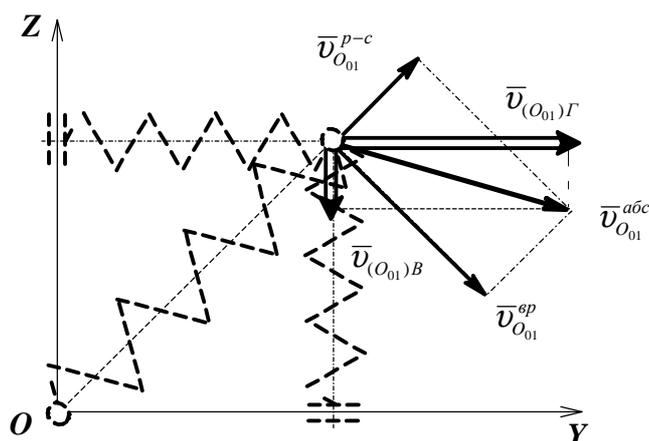


Рисунок 3.6 – Направление скоростей в кинематической паре "рука – опора" для двух типов моделей

В этом пункте получен вывод, что абсолютные скорости и ускорения характерных точек опоры при ее обращении не лежат в плоскости изгиба спортивного снаряда.

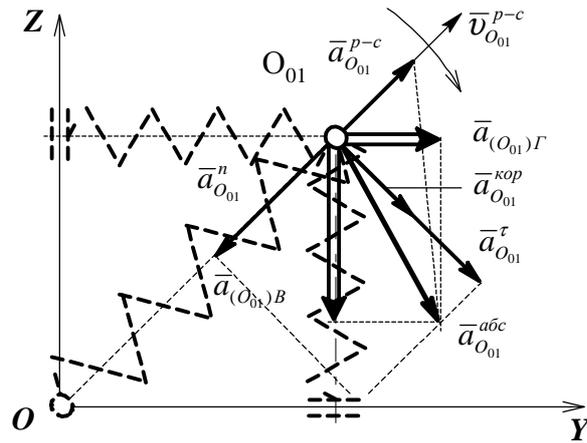


Рисунок 3.7 – Направление ускорений в кинематической паре "рука – опора" для двух типов моделей

Данная глава не смогла ответить на ряд вопросов об эквивалентности двух типов моделей упругой опоры в виде пружин. Для этого надо разобраться в причинах движения, а это уже задача динамики. Поэтому окончательные выводы будут представлены в главе 5.

ГЛАВА 4

МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ ОПОРЫ

4.1 Фазы маховых упражнений с учетом характера нагрузки опоры

Прежде чем приступить к изучению деформации конструктивного элемента упругой опоры спортивного снаряда, необходимо классифицировать возможные виды нагрузки рабочей части спортивного снаряда в зависимости от фазы упражнения. Для анализа возьмем маховые упражнения на перекладине или женских брусках. Биомеханическая система влияет на спортивный снаряд, вызывая его деформацию, которая, в свою очередь, изменяет параметры движения самой биомеханической системы. Поэтому для того чтобы провести анализ видов нагрузки спортивного снаряда, в первую очередь требуется классифицировать фазы маховых упражнений и показать их влияние на нагрузки, которые испытывает опора в эти моменты. Таким образом, каждому конкретному элементу спортивного упражнения поставим в соответствие определенный вид нагрузки спортивного снаряда.

Возможные фазы маховых упражнений с учетом характера нагрузки опоры запишем в следующем порядке:

- *статическая* или близкая к ней фаза упражнения²²;
- *динамическое* выполнение упражнения в контакте с опорой^{**};
- *полетная* часть упражнения;
- *удар* при появлении контакта биомеханической системы с опорой.

Статическая или близкая к ней фаза упражнения. Кроме маховых упражнений существует еще одна большая группа упражнений на спортивных снарядах – это статические и силовые упражнения. Они имеют не только самостоятельное значение – разнообразные статические и силовые упражнения служат также необходимой базой для разучивания маховых гимнастических упражнений. Наиболее характерные статические положения типа висов, упоров, стоек являются одновременно важнейшими рабочими положениями многих маховых движений. Поэтому, исследуя маховые упражнения, представляющие собой сложные *двигательные акты*, необходимо выделить такую фазу как *статическая фаза или близкая к ней*.

²² Близкой к статической нагрузке будет *медленное нагружение* опоры.

^{**} Что означает движение спортсмена с ускорением.

При появлении статических элементов во время выполнения маховых упражнений силы, действующие на спортивный снаряд, тоже становятся статическими или мало изменяются во времени $-\bar{R}_{01} \approx const$. Соответственно деформация рабочей части спортивного снаряда тоже становится статической или близкой к ней, а, значит, ускорения точек опоры равны или близки нулю. Значимые динамические нагрузки, учитываемые через силы инерции, отсутствуют.

Отметим, что данное описание статической фазы нагружения не является строгим и, тем более, не дает количественных оценок. Подробно этот вопрос рассмотрен в главе 7, п. 7.3.

Кроме этого, подчеркнем, что даже в статической фазе могут наблюдаться моменты динамического нагружения опоры – это начало и конец фазы²³.

Динамическое выполнение упражнения. Анализ видеоматериалов позволяет предположить наличие различных режимов в динамической части упражнения при непрерывном контакте спортсмена с опорой. Так, на многих записях с выполнением спортивных упражнений на перекладине отчетливо наблюдаются вынужденные колебания грифа относительно деформированного положения, а не относительно оси абсцисс OX (рис. 1.9). Причем данный режим является ограниченным во времени, так как проявляется не при каждом динамическом воздействии тела человека на снаряд. Одновременно с этим существует обращение опоры, вызываемое переменными по величине и направлению реакциями связи в кинематических парах «рука – опора». Как всякая динамическая нагрузка, она вызывает колебания относительно ненагруженного положения опоры [101, 102, 112, 113]. Предварительный анализ позволяет сделать вывод, что еще один возможный режим, который можно назвать движение с равномерным или постоянным ускорением, т.е. без колебания системы, здесь невозможен, так как мы имеем дело с пространственным нагружением спортивного снаряда и постоянным изменением силовых факторов, вызывающих неравномерные ускорения по величине и направлению.

Поэтому считаем, что *динамической фазе упражнения соответствуют вынужденные колебания спортивного снаряда, возможно, имеющие достаточно сложный характер.*

Полетная часть упражнения. По поводу полетной части отметим сразу, что ее анализ выходит за рамки темы монографии. Мы рассматриваем движение биомеханической системы непосредственно в контакте с упругой опорой, и именно это вносит существенные

²³ При приложении к ненагруженному спортивному снаряду статических сил они изменяются от нуля до заданного значения. То же происходит и при их снятии. Можно эту динамическую часть отнести к соседним динамическим фазам упражнения.

коррективы в модели движения. Полет же в данном случае ничем не отличается от полета в условиях жесткой опоры, кроме начальных параметров. Поэтому уже существующие на сегодняшний день модели движения биомеханической системы для данной фазы спортивного упражнения [55] полностью применимы для анализа движения в условиях упругой опоры. Необходимо лишь сделать определенный акцент на тех моделях, результаты расчетов которых дают начальные параметры движения для полетной части.

Следует отметить, что момент потери контакта спортсмена с опорой представляет интерес не только по причине влияния на полет спортсмена. Параметры свободных затухающих колебаний опоры, наступающих при освобождении контакта, задаются именно в этот момент времени. По окончании полета и возобновлении контакта параметры движения спортивного снаряда оказывают влияние как на сам контакт, т.е. на удар биомеханической системы по опоре, так и на последующее движение спортсмена. Правда, анализ видеоматериалов, например, записей чемпионатов мира и Европы, показывает, что подобный сценарий является одним из возможных, но не обязательных. Сопротивление колебаниям таково, что более реальным оказывается вариант полного отсутствия колебаний опоры перед ударом. Тем не менее, теоретический интерес к этому механизму сохраняется.

Удар. Удар тела спортсмена является еще одной фазой маховых упражнений. Он может произойти при окончании полетной фазы упражнения, или, например, при выполнении упражнения на брусьях разной высоты, являясь элементом этого упражнения без потери контакта гимнастки с опорой.

Особенностью удара является тот факт, что, в отличие от нечувствительных тел, удар которых рассматривается в теоретической механике и в сопротивлении материалов, движение тела спортсмена, например, рук, является целенаправленным, внося тем самым, во-первых, дополнительные осложнения в модели деформации, а, во-вторых, изменяя начальные условия, учитываемые при расчетах на удар²⁴.

В разделах механики, изучающих удар, признано, что *импульс силы удара* (изменение количества движения) можно определить с достаточно высокой точностью, а вот продолжительность и зависящая от нее сила удара определяются исходя из целого ряда допущений, поэтому расчеты на удар относятся к условным [25].

В случае же удара нескольких тел, одно из которых является многосвязной системой, находящейся в целенаправленном движении, ряд допущений применяется и к движению последней, т.е. расчеты на удар являются условными еще и по этой причине.

²⁴ Имеется в виду скорость ударной части тела, т.е. ее величина и направление.

Рассматривая полетную часть упражнения, отметим, что она может заканчиваться ударом не одного, а нескольких звеньев системы: например, полет прекращается ударом двумя руками. В этом случае звенья, которыми являются руки, уже представляют собой динамическую цепь, а не кинематическую.

При ударе туловищем²⁵ получим удар на большой поверхности. По аналогии с распределенной нагрузкой его можно назвать распределенным ударом.

Кроме этого, тело человека не является абсолютно твердым телом при ударе. Это во-первых. А во-вторых, при ударе руками о спортивный снаряд неотъемлемой частью махового упражнения является дохват руками опоры.

Таким образом, представляется, что закономерности движения спортсмена при ударе являются весьма сложными и трудно изучаемыми. В данной работе мы лишь обозначим проблему в первом приближении и наметим некоторые подходы к исследованию этой фазы спортивного упражнения.

4.2 Понятие об упругих деформациях балки при изгибе

В данной главе рассмотрим только *статическое действие нагрузки* на спортивный снаряд. При выводе уравнений статической деформации для определения перемещений при изгибе балки будем использовать *метод начальных параметров*. Упругое перемещение спортивного снаряда при выполнении спортсменом упражнения с опорой на руки на перекладине, брусках и пр. опишем с помощью модели, построенной *на балке, подвергающейся изгибу*. Подчеркнем: для описания движения биомеханической системы в условиях упругой опоры принимаются модели опоры в виде одной или нескольких пружин (глава 1, п. 1.7). Для описания же деформации упругой опоры принимаются модели в виде балки, подвергающейся изгибу. При этом параметры ее деформации в выбранном сечении являются параметрами пружины для целей описания движения тела человека.

Прежде чем приступить к уравнениям перемещения балки при изгибе, необходимо напомнить основные понятия, принятые для описания деформации изгиба и уточнить некоторую терминологию.

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки, называется ее *прогибом* в данной точке^{**}. Угол, на который сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, есть *угол поворота*. Кривая, в которую

²⁵ Например, удар телом (животом) на женских брусках.

^{**} Перемещения также называют прогибами оси балки или прогибами сечений балки.

обращается ось балки при упругой работе материала после приложения нагрузки, называется *упругой линией* [25].

Балка, защемленная обоими концами и деформируемая пространственно, показана на рисунке 4.1, а. Прогибы в i -ом сечении обозначим с указанием оси, относительно которой они определяются. Например, Y_i и Z_i (рис. 4.1, а, б).

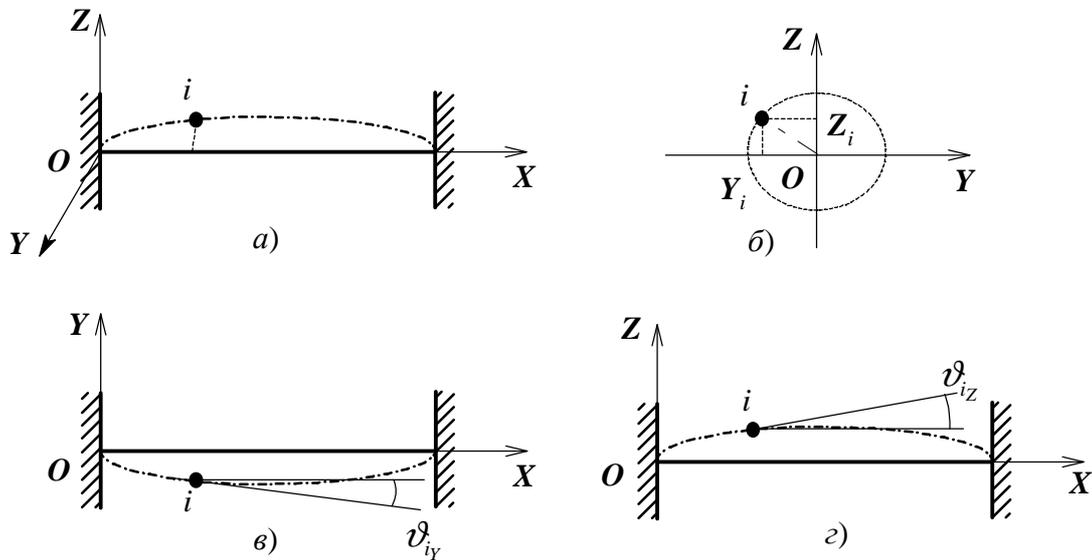


Рисунок 4.1 – Перемещение балки при изгибе: а) пространственная схема; б) проекция прогибов на плоскость OYZ ; в) горизонтальная плоскость OXY ; г) вертикальная плоскость OXZ

При деформации балки ее поперечные сечения не только поступательно смещаются, но и поворачиваются. Это угловые деформации. Их обозначим, как ϑ_{iy} , ϑ_{iz} (рис. 4.1 в, г) в соответствии с теми плоскостями, в которых они определяются.

Существует много методов вычислений перемещений в балках при изгибе. Предварительный анализ показывает, что наиболее удобным для расчетов с помощью ЭВМ является *метод начальных параметров*. Именно в этом случае можно разработать алгоритм решения задачи таким образом, чтобы компьютер самостоятельно составлял модели деформации независимо от того, где и какие силовые факторы действуют на опору. Иначе исследователю пришлось бы это делать самостоятельно для каждого участка и в каждом конкретном случае нагружения. Метод начальных параметров позволяет записать в компактной форме по условию (1.1) общее уравнение деформации, включающее все участки и все виды приложенных нагрузок, и обнулять те силовые факторы, что лежат правее сечения, исследуемого в данный момент.

При расчете перемещений балки будем предъявлять определенные требования к системе координат: ее начало всегда выбираем на крайней левой опоре в точке, в которой прогиб равен нулю.

Литература по самому методу весьма обширна. Материал изложен практически в любом учебнике по сопротивлению материалов [14, 25, 40, 104, 109, 112, 117, 125].

Условимся реакции, возникающие в опорах балки, называть *реакциями в опорах*, а реакции, возникающие при движении биомеханической системы в кинематических парах «рука – опора», называть *реакциями на опоре* (на балке, на спортивном снаряде и пр.) или *опорными реакциями биомеханической системы*. То есть понятие «опора» имеет двойной смысл – в сопротивлении материалов это защемление, шарнирно-подвижная или шарнирно-неподвижная опоры, в зависимости от типа заданной балки. Исследуя перемещения при изгибе, будем использовать данное понятие. А при изучении движения биомеханической системы под опорой понимается рабочая часть спортивного снаряда, на которую опирается спортсмен при выполнении упражнения.

4.3 О выборе типа балки и ее нагружении

Рассмотрим типы балок, которые можно использовать для моделирования рабочей части реального спортивного снаряда. Предварительный анализ показывает, что упругие элементы, с которыми контактирует спортсмен, для многих снарядов имеют одну или две опоры (стойки и пр.). Для спортивных гимнастических снарядов с двумя точками опоры наиболее близкой моделью является балка, защемленная обоими концами (рис. 4.1). Данная схема подходит для перекладины и женских брусьев. Для параллельных брусьев необходимо рассматривать раму с несколькими консольными участками (рис. 4.2). Балка, защемленная одним концом, может служить моделью для гимнастического мостика (рис. 4.3). Вероятно, для получения эквивалентной балки в ряде случаев требуется ее приведение.

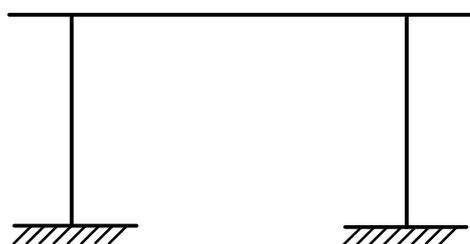


Рисунок 4.2 – Схема рамы с консольными участками по концам ригеля, моделирующая

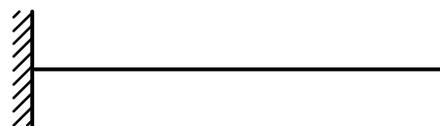


Рисунок 4.3 – Консольная балка

Разберем более подробно вопрос об эквивалентности модели балки, защемленной обоими концами, грифу перекладины. Расчет конструкций, подобных перекладине в гимнастике, рассматривает раздел механики, называемый «Строительная механика». Такие сооружения получили название рам [113]. Расчет рамы, нагруженной пространственно, является сложной и трудоемкой задачей. При этом возникают сомнения в необходимости применения точных аналитических методов, разработанных в строительной механике. Причины в следующем:

1. Концы грифа перекладины защемлены в жестких Г-образных конструкциях, предохраняющих от линейных (прогибы) и угловых (повороты сечений) перемещений в любом направлении пространственной системы координат.
2. Применяемые жесткие конструкции, представляющие собой Г-образные элементы, в свою очередь зафиксированы в пространстве растяжками. Это дополнительно предотвращает линейные перемещения концов грифа в пространстве.
3. Вертикальные стойки перекладины представляют собой трубы большого диаметра, жесткость которых выше жесткости грифа перекладины, что добавляет жесткости раме в местах соединения вертикальных стоек с Г-образными элементами, фиксирующими как единое целое, и стойки, и горизонтально расположенный гриф перекладины.
4. Результаты оптической регистрации движения спортсменов показывают отсутствие видимых линейных и угловых перемещений грифа перекладины в местах закрепления.

Те же соображения применимы и к жердям брусьев разной высоты.

Рассмотрим деформацию поперечных сечений опоры. Для этого необходимо определить соотношение между длиной балки ℓ и размерами поперечного сечения d . Выполним расчет при следующих исходных данных: $\ell = 2400$ мм; $d = 28$ мм. Получим

$$\frac{\ell}{d} = \frac{2400}{28} \approx 86. \quad (4.1)$$

В сопротивлении материалов установлено, что при многократном превышении длины балки над размерами поперечного сечения (для прямоугольного сечения и статически определимой балки в 4 раза) можно пренебречь касательными напряжениями в продольных сечениях, которые деформируют поперечные сечения балки [40, 74]. В этом случае считают, что любое поперечное сечение, плоское до деформации, остается плоским и после нее.

Таким образом, мы подтвердили расчетом правомочность принятого ранее допущения о том, что для поперечных сечений балки подтверждается гипотеза плоских сечений.

Статическое нагружение балки проявляет себя в вертикальной плоскости²⁶. В ряде случаев будем использовать рассматриваемый метод начальных параметров и для определения перемещения сечений балки в плоскостях, отличных от вертикальной при динамическом нагружении.

Если в поперечных сечениях возникают не менее двух внутренних силовых факторов, то такое нагружение называют сложным сопротивлением. Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, несмотря на возникновение двух внутренних силовых факторов – изгибающего момента и поперечной силы [40]. Изгиб грифа перекладины и есть случай прямого поперечного изгиба.

Так как опора биомеханической системы в поперечном сечении (гриф перекладины, жерди женских брусьев) представляет собой круг, то все центральные оси его являются главными [74]. Это означает, что перемещения точек упругой линии балки совпадают с плоскостью действия нагрузки при любом направлении последней.

4.4 Модели деформации опоры при статическом нагружении

Плоскость, в которой реализуется изгиб балки, назовем плоскостью изгиба.

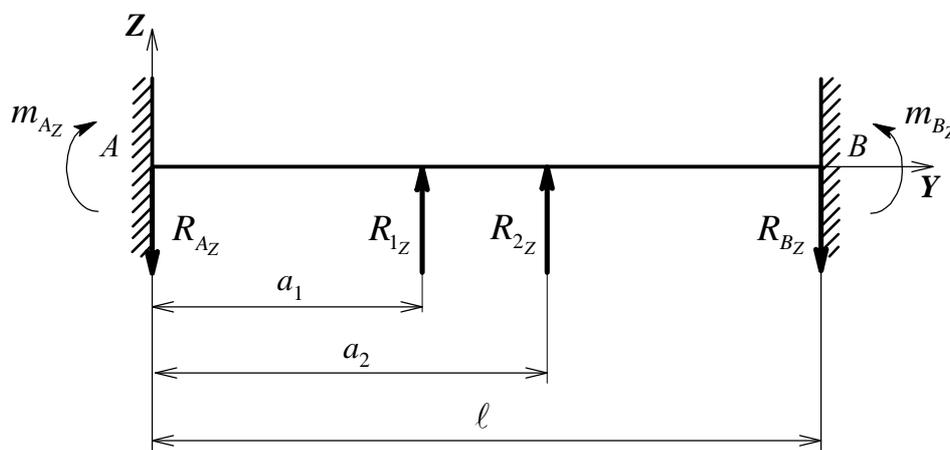


Рисунок 4.4 – Схема нагружения балки в плоскости изгиба

Модели статической деформации балки при нагружении

²⁶ Применительно к женским брусьям и перекладине человек принимает статическое положение именно в вертикальной плоскости – висы, упоры, стойки.

произвольным числом сосредоточенных сил рассмотрим на примере двух сил, действующих на балку, защемленную обоими концами (рис. 4.4). Для вывода используем плоскость OXZ . Полученные результаты применимы для записи моделей статической деформации в проекции на любую из координатных осей, например, на ось OY .

Составим уравнения равновесия для определения реакций. Имеем:

$$\sum F_{kz} = 0, \quad -R_{Az} + R_{1z} + R_{2z} - R_{Bz} = 0, \quad (4.2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_{kz}) = 0, \quad -m_{Az} + R_{1z} a_1 + R_{2z} a_2 - R_{Bz} \ell + m_{Bz} = 0, \quad (4.3)$$

где a_1, a_2 – расстояния от начала координат (точка A) до точки приложения сил R_{1z} и R_{2z} соответственно;

ℓ – длина балки.

На расчетной схеме принято положительное направление сил R_{1z} и R_{2z} , хотя более вероятно, что они направлены противоположно²⁷. Но такой подход дает возможность получить выражения для расчета на ЭВМ – при подстановке значений сил или их проекций со своими знаками автоматически получаются правильные модели деформации опоры.

Для деформационных моделей воспользуемся методом начальных параметров. При одновременном действии нескольких внешних сил на основании принципа независимости их действия [25, 117] уравнения для определения углов поворота и прогибов имеют следующий вид:

- прогиб Z_B в защемлении B

$$Z_B = \frac{1}{I_y E} \left[\frac{m_{Az} \ell^2}{2} - \frac{R_{Az} \ell^3}{6} + \frac{R_{1z} (\ell - a_1)^3}{6} + \frac{R_{2z} (\ell - a_2)^3}{6} \right], \quad (4.4)$$

где I_y – осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно оси OY ;

E – модуль упругости материала.

Угловая деформация ϑ_{zB} в том же защемлении составит

$$\vartheta_{zB} = \frac{1}{I_y E} \left[m_{Az} \ell - \frac{R_{Az} \ell^2}{2} + \frac{R_{1z} (\ell - a_1)^2}{2} + \frac{R_{2z} (\ell - a_2)^2}{2} \right]. \quad (4.5)$$

Из условия, что угол наклона касательной и прогиб в защемлении B

²⁷ Статическими элементами упражнения являются висы, упоры и пр., а в этом случае в вертикальной плоскости действует сила тяжести биомеханической системы.

равны нулю, т.е. $Z_B = 0$ и $\vartheta_{Z_B} = 0$, получим:

$$\frac{m_{Az} \ell^2}{2} - \frac{R_{Az} \ell^3}{6} + \frac{R_{1z} (\ell - a_1)^3}{6} + \frac{R_{2z} (\ell - a_2)^3}{6} = 0, \quad (4.6)$$

$$m_{Az} \ell - \frac{R_{Az} \ell^2}{2} + \frac{R_{1z} (\ell - a_1)^2}{2} + \frac{R_{2z} (\ell - a_2)^2}{2} = 0. \quad (4.7)$$

Решая полученную систему из уравнений (4.2), (4.3), (4.6), (4.7), выразим из последней формулы момент в защемлении A :

$$m_{Az} = \frac{R_{Az} \ell}{2} - \frac{R_{1z} (\ell - a_1)^2}{2\ell} - \frac{R_{2z} (\ell - a_2)^2}{2\ell}. \quad (4.8)$$

В общем виде для произвольного числа сил n можно записать уравнение момента в опоре A как

$$m_{Az} = \frac{R_{Az} \ell}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{R_{iz} (\ell - a_i)^2}{2\ell}. \quad (4.9)$$

Подставляем значение момента по уравнению (4.9) в выражение (4.6):

$$\left[\frac{R_{Az} \ell}{2} - \frac{R_{1z} (\ell - a_1)^2}{2\ell} - \frac{R_{2z} (\ell - a_2)^2}{2\ell} \right] \frac{\ell^2}{2} - \frac{R_{Az} \ell^3}{6} + \frac{R_{1z} (\ell - a_1)^3}{6} + \frac{R_{2z} (\ell - a_2)^3}{6} = 0. \quad (4.10)$$

Решая уравнение относительно реакции R_{Az} в защемлении A , получим

$$R_{Az} = \frac{12}{\ell^3} \left[-\frac{R_{1z} \ell}{4} (\ell - a_1)^2 - \frac{R_{2z} \ell}{4} (\ell - a_2)^2 + \frac{R_{1z}}{6} (\ell - a_1)^3 + \frac{R_{2z}}{6} (\ell - a_2)^3 \right]. \quad (4.11)$$

В компактной форме выражение при произвольном числе сил:

$$R_{Az} = \frac{12}{\ell^3} \left[-\sum_{i=1}^n \frac{R_{iz} \ell}{4} (\ell - a_i)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{R_{iz}}{6} (\ell - a_i)^3 \right]. \quad (4.12)$$

В частном случае принимаем равенство реакций, возникающих в обоих шарнирах «рука – опора», т.е. $R_z = R_{1z} = R_{2z} = \frac{R_{01z}}{2}$. Тогда при

подстановке значения m_{Az} в выражение (4.12) получим реакцию

$$R_{Az} = \frac{12}{\ell^3} \left\{ -\frac{R_Z \ell}{4} [(\ell - a_1)^2 + (\ell - a_2)^2] + \frac{R_Z}{6} [(\ell - a_1)^3 + (\ell - a_2)^3] \right\} =$$

$$= \frac{12}{\ell^3} \left\{ -\frac{R_{01Z} \ell}{8} [(\ell - a_1)^2 + (\ell - a_2)^2] + \frac{R_{01Z}}{12} [(\ell - a_1)^3 + (\ell - a_2)^3] \right\}. \quad (4.13)$$

Из условия (4.2) следует, что реакция в заземлении B составит

$$R_{Bz} = R_{1z} + R_{2z} - R_{Az} = \frac{R_{01z}}{2} + \frac{R_{01z}}{2} - R_{Az} = R_{01z} - R_{Az}. \quad (4.14)$$

Из второго условия равновесия (4.3) получим момент в заземлении B

$$m_{Bz} = m_{Az} - \frac{R_{01z}}{2} (a_1 + a_2) + R_{Bz} \ell. \quad (4.15)$$

Введем коэффициент δ_i , учитывающий местоположение конкретного силового фактора относительно расчетного сечения. Такой подход позволяет создавать модели деформации балки, по которым ЭВМ самостоятельно рассчитывает перемещения в любом сечении при любой схеме нагружения любыми силовыми факторами по одному уравнению для линейных и одному уравнению для угловых перемещений. Силовыми факторами являются сосредоточенные силы, моменты пар сил и распределенная нагрузка. Уравнения начальных параметров корректируются с учетом этой нагрузки.

Уравнение для определения угла поворота j -го сечения балки в плоскости Oxz будет выглядеть как

$$\vartheta_{jz} = \frac{1}{I_y E} \left[m_{Az} X - \frac{R_{Az} X^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{R_{iz} (X - a_i)^2}{2} \delta_i \right], \quad (4.16)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } (X - a_i) \leq 0, \\ 1, & \text{если } (X - a_i) > 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Если сила, входящая в уравнение, окажется за пределами расчетного участка, т.е. на расстоянии $a_i > X$, то часть выражения с данной силой обнулится и не будет учтена в общей сумме [68].

Для расчета прогиба балки в j -ом сечении уравнение по методу начальных параметров запишем в общем виде как

$$Z_j = \frac{1}{I_y E} \left[\frac{m_{AZ} X^2}{2} - \frac{R_{AZ} X^3}{6} + \sum_{i=1}^n \frac{R_{iZ} (X - a_i)^3}{6} \delta_i \right], \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} &\leq 0, \\ &> 0. \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta_i = & 0, \quad \text{если } (x - a_i) \\ & 1, \quad \text{если } (x - a_i) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Алгоритм расчета параметров перемещения показан на рисунке 4.5.

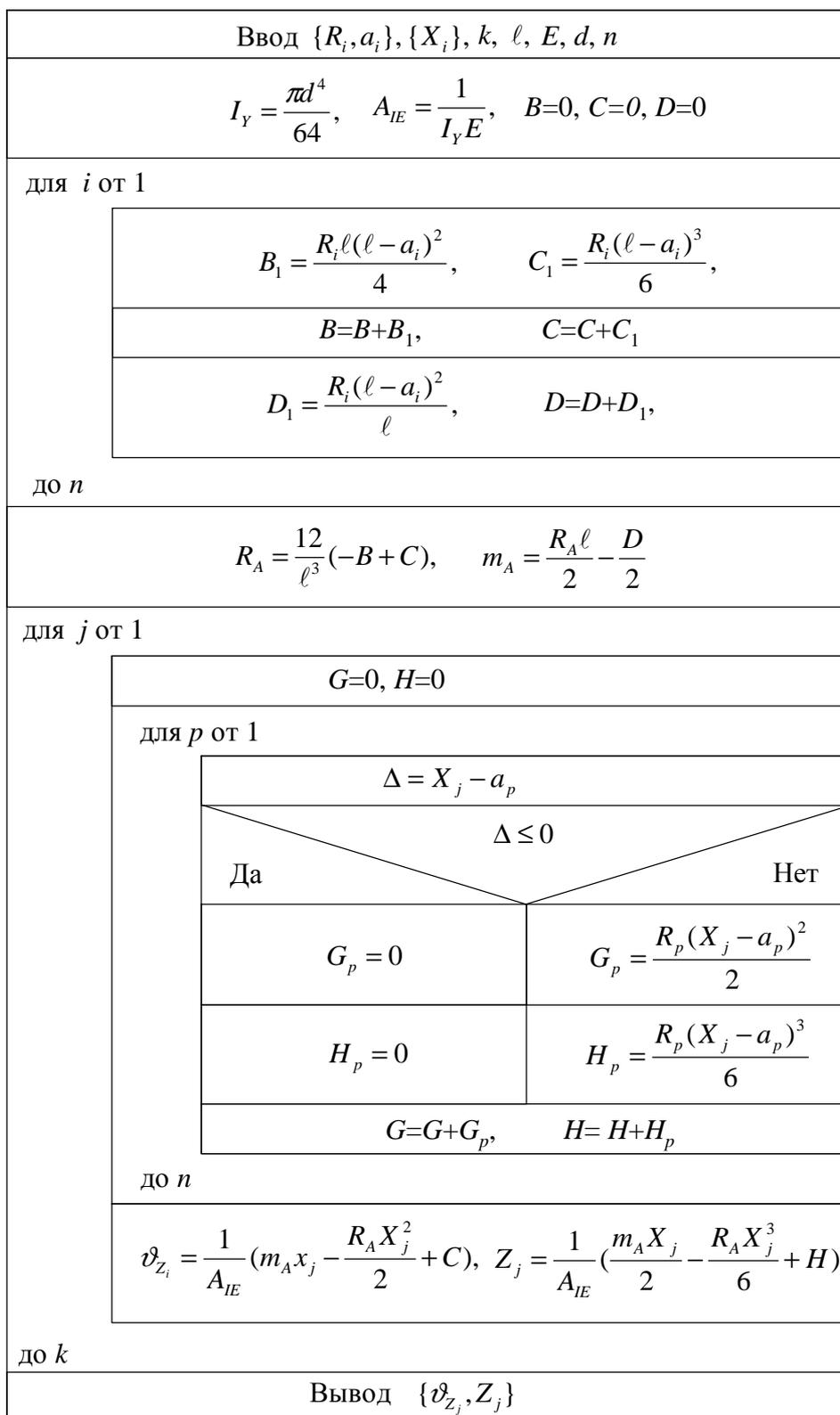


Рисунок 4.5 – Расчет статических перемещений балки, заземленной обоими концами

Структурограмма алгоритма позволяет создать программу для вычисления параметров статической деформации в любом сечении.

Символ δ_i в явном виде не использован, так как те же цели решаются за счет прямого обнуления параметров G_p и H_p , представляющих искомые произведения и входящих в накопители сумм G и H .

Жесткость при изгибе $I_y E$ определяется один раз в начале программы. Для расчетов прогибов Z_j и углов поворота ϑ_{jz} в заданных сечениях, определяемых по размерам $\{X_j\}$, применяется два цикла. В цикле от $p=1$ до n происходит накопление сумм тех членов уравнений (4.16) и (4.18), в которых имеются внешние силы R_p , расположенные левее исследуемого сечения. Во внешнем цикле от $j=1$ до k определяются параметры деформации балки Z_j и ϑ_{z_j} для каждого из k исследуемых сечений. Все силовые факторы учитываются со знаком плюс, если они вызывают в рассматриваемом сечении положительный изгибающий момент, и минус, если отрицательный [25].

Для ряда расчетов необходимо иметь выражение для прогиба балки на ее середине при действии одной силы R . Сила приложена к исследуемому сечению. Имеем $X = \frac{\ell}{2}$ и $a_1 = \frac{\ell}{2}$. По работе [74] сразу запишем

$$Z_{\max} = -\frac{R\ell^3}{192EI_y}. \quad (4.20)$$

Данное уравнение также применимо при расчете перемещений при изгибе от единичной силы.

4.5 Статическая деформация опоры, вызываемая собственным весом

На защемленную двумя концами балку действует равномерно распределенная нагрузка – вес балки (рис. 4.6).

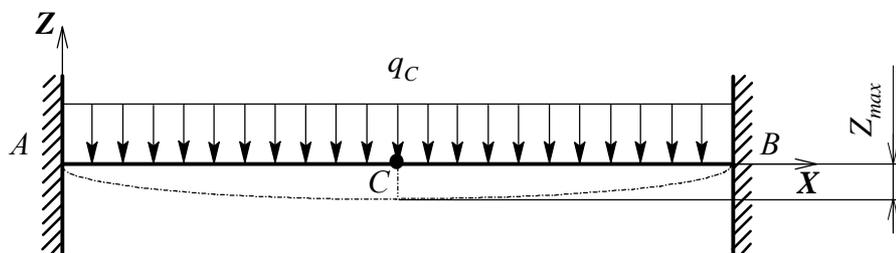


Рисунок 4.6 – Деформация опоры под действием собственного веса

Воспользуемся решением задачи по работе [74].
Имеем наибольший прогиб балки при $X = \ell/2$

$$Z_{\max} = -\frac{q_G \ell^4}{384EI_y}, \quad (4.21)$$

где q_G – распределенная нагрузка (вес, приходящийся на единицу длины)

$$q_G = \frac{m_0 g}{\ell},$$

m_0 – масса балки, кг;

g – ускорение свободного падения, $g=9,81 \text{ м/с}^2$.

Подставляя значения, получим

$$Z_{\max} = -\frac{m_0 g \ell^4}{384 \ell EI_y} = -\frac{m_0 g \ell^3}{384 EI_y}. \quad (4.22)$$

Выполним расчет для грифа перекладки со следующими параметрами: диаметр $d=28 \text{ мм}$, модуль упругости $E=220000 \text{ Н/мм}^2$, длина балки $\ell = 2400 \text{ мм}$. Имеем осевой момент инерции поперечного сечения:

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 28^4}{64} = 30171,86 \text{ мм}^4. \quad (4.23)$$

В справочнике [8] приведена масса одного метра стали. Для нашего случая имеем

$$m_0 = 4,83 \frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot 2,4 \text{ м} = 11,592 \approx 12 \text{ кг}. \quad (4.24)$$

Тогда максимальный статический прогиб балки составит

$$Z_{\max} = -\frac{12 \cdot 9,81 \cdot 2400^3}{384 \cdot 220000 \cdot 30171,86} = -0,638 \approx -0,64 \text{ мм}. \quad (4.25)$$

Знак минус означает лишь то, что прогиб от действия собственного веса направлен в сторону отрицательных значений аппликаты (вниз) и ничего более. Величина же самой деформации столь незначительна, что ею в дальнейшем можно пренебречь. Это относится ко всем видам и типоразмерам опоры, что позволяет значительно упростить расчеты.

Таким образом, делаем вывод: *в случае статического нагружения спортивного снаряда его вес в моделях деформации не учитывается.*

ГЛАВА 5

РЕАКЦИИ В СУСТАВАХ И НА ОПОРЕ

5.1 Общие соображения

Исследование динамической структуры спортивных упражнений необходимо начинать с проведения силового анализа биомеханической системы. Дело в том, что движение упругой опоры, включаемое в модели естественного и целенаправленного движений биомеханической системы, реализуется только за счет деформации материала спортивного снаряда. А сама деформация возникает по причине действия на снаряд подвижной биомеханической системы. Появляются реакции в кинематических парах «рука – опора». Они вызывают деформацию рабочей части спортивного снаряда, т.е. ее движение, которое в свою очередь влияет на движение биомеханической системы. Это движение опять же оказывает влияние на опорные реакции, изменяя их величину и направление. И картина повторяется: скорректированные реакции на опоре будут корректировать движение всей биомеханической системы и т.д. То есть, как уже ранее отмечалось, биомеханическая система находится под действием сил, зависящих от ее движения [73]. Поэтому, не разобравшись в том, какие и почему возникают силовые факторы, действующие на человека и спортивный снаряд, говорить о дальнейшем анализе причин и закономерностей целенаправленного движения биомеханической системы в условиях упругой опоры не имеет смысла.

Начнем с того, что современные технические средства и исследовательские методики не позволяют измерить реакции, возникающие в суставах. Единственным методом, решающим данную задачу, является расчетный [56].

С реакциями, возникающими на опоре в месте контакта с телом спортсмена, ситуация иная. Существующие методы, например, электротензометрический, дают возможность экспериментальным путем изучить опорные реакции [85]. Но с другой стороны, за последние несколько сот лет развития теории упругости были исследованы силовые факторы и перемещения, возникающие в телах почти всех мыслимых форм при действии самых разнообразных нагрузок [33]. Такие разделы механики как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, строительная механика и детали машин давно и широко используют аналитические методы определения сил, возникающих в различных системах. Именно на основе этих методов можно создать модели для проведения полного анализа движения

спортсмена в условиях упругой опоры. Кроме того, именно они позволяют выявить физическую картину взаимодействия биомеханической системы со спортивным снарядом и раскрывают все закономерности влияния опоры на движение человека.

Таким образом, оказывается, что знание опорных реакций является важнейшей задачей при анализе движения биомеханической системы с учетом упругой опоры, если параметры деформации спортивного снаряда определяются теоретически, а не экспериментально. Подчеркнем еще раз, что именно эти силы вызывают динамическую деформацию опоры, влияющую на параметры кинематики и динамики движения человека. Так как изогнутая опора (гриф перекладины и т.д.) закреплена и не может сама вращаться, а реакции на опоре вращаются, то вследствие этого появляется обращение опоры.

Методики силового анализа биомеханических систем создаются с конца 60-х годов [56], постоянно совершенствуясь. На сегодняшний день уже разработаны компактные модели, предназначенные для систем с произвольным количеством звеньев, и имеются компьютерные программы для их реализации. Недостатком используемых алгоритмов является анализ силовых факторов, возникающих в биомеханических системах, без учета динамически деформируемой опоры.

Отметим существенные отличия в определении опорных реакций и реакций в суставах при естественном и целенаправленном видах движения. Эти отличия заключаются в появлении управляющих сил, которые входят в уравнения кинетостатики, и существенно меняют всю силовую картину движения.

Для силового анализа используем методы кинетостатики. Выделим два возможных пути разработки моделей:

- 1) кинематическую цепь биомеханической системы можно рассчитывать, как принято в силовом анализе механизмов и машин: начиная с самого дальнего от опоры звена, т.е. с ног, двигаясь в сторону опоры. В нашем случае звенья необходимо исследовать по одному;
- 2) силовой анализ опорно-двигательного аппарата человека выполняют со стороны опоры, последовательно двигаясь к самому дальнему звену, к ногам. Анализ выполняют, последовательно отбрасывая звенья биомеханической системы со стороны опоры один за другим, заменяя их действие реакциями связи.

Более удобным представляется последняя методика, так как сразу же определяются опорные реакции, позволяющие методом итераций уточнить все кинематические характеристики движения звеньев биомеханической системы. И только после этого приступают к расчету реакций в суставах.

5.2 Силы реакции связи в суставах и на опоре

Условимся в обозначении реакций связи на опоре и в суставах. Для этого воспользуемся законом равенства действия и противодействия [118]. На рисунках 5.1 *а*, *б* на примере нормально работающего сустава O_{12} показано, что реакции, действующие на звено 1 и звено 2, компенсируют друг друга. Реакции равны и противоположно направлены [87]:

$$\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}, \quad (5.1)$$

где \bar{R}_{12} – реакция в шарнире O_{12} , действующая на звено 1 со стороны звена 2;
 \bar{R}_{21} – реакция в шарнире O_{12} , действующая на звено 2 со стороны звена 1.

Обозначение реакций в шарнире выполняют по следующему правилу: первой цифрой показывают звено, на которое действует реакция. Вторая цифра указывает звено, со стороны которого действует сила. Так, реакция R_{12} расшифровывается следующим образом: это сила, действующая на звено 1 со стороны звена 2.

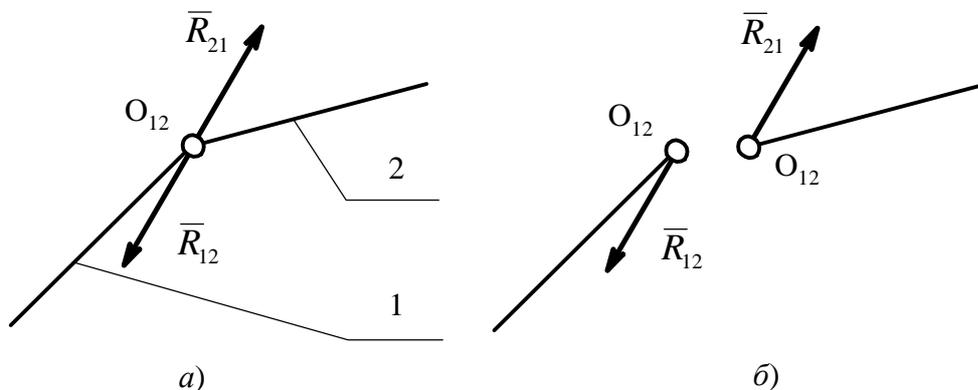


Рисунок 5.1 – Действие реакций в суставе: а) сустав O_{12} ; б) звенья 1 и 2 в суставе O_{12} условно разделены

Укажем также, что расчет начинается с определения проекций R_{10y} и R_{10z} общей реакции R_{10} , действующей на звено 1 биомеханической системы со стороны опоры. Реакции, вызывающие изгиб опоры, равны им по модулю и противоположно направлены:

$$\bar{R}_{01} = -\bar{R}_{10}, R_{01y} = -R_{10y}, R_{01z} = -R_{10z}. \quad (5.2)$$

Модели с вращающейся пружиной. Применим метод кинетостатики для определения силовых факторов, возникающих при движении биомеханической системы. Он основан на принципе Даламбера, который для системы гласит: *если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять уравнения статики* [118].

Приложим к звеньям все внешние (активные) силы, фиктивные силы инерции масс звеньев, а также реакцию связи в каждой исследуемой кинематической паре биомеханической системы (рис. 5.2). Составим уравнения кинетостатического равновесия в форме суммы проекций сил на соответствующие координатные оси.

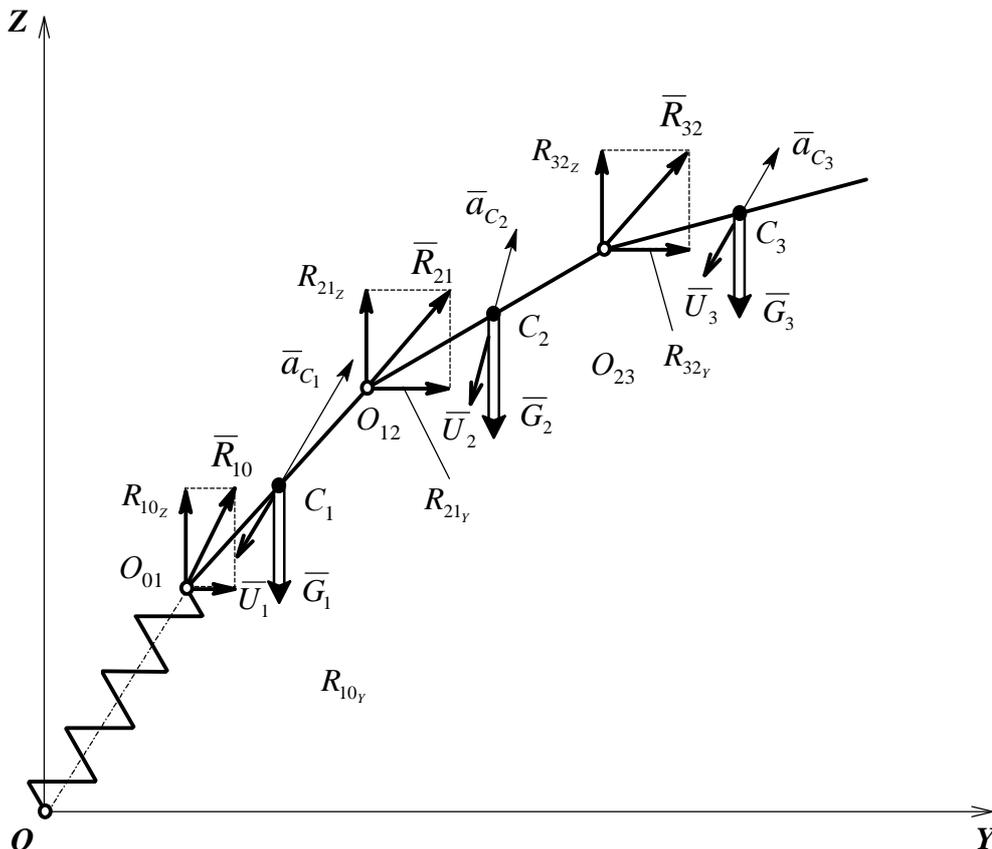


Рисунок 5.2 – Кинематическая схема биомеханической системы с силовыми факторами, используемыми в силовом анализе

Укажем на принципиальный момент при составлении расчетной схемы. Проекция ускорений ЦМ звеньев показаны исходя из их формального представления по выражениям (3.43), (3.44), в которых вывод выполнен для положительного направления векторов. Действительное положение ускорений, т.е. их знак, во внимание не принимается.

В общем виде условие кинетостатического равновесия запишем как

$$\sum Y = 0, \quad \sum Z = 0. \quad (5.3)$$

Для проекций реакций в каждом шарнире имеем:

$$\begin{aligned} R_{10Y} - m_1 \ddot{Y}_{C_1} - m_2 \ddot{Y}_{C_2} - m_3 \ddot{Y}_{C_3} &= 0, \\ R_{10Z} - m_1 \ddot{Z}_{C_1} - m_2 \ddot{Z}_{C_2} - m_3 \ddot{Z}_{C_3} - G_1 - G_2 - G_3 &= 0, \\ R_{21Y} - m_2 \ddot{Y}_{C_2} - m_3 \ddot{Y}_{C_3} &= 0, \\ R_{21Z} - m_2 \ddot{Z}_{C_2} - m_3 \ddot{Z}_{C_3} - G_2 - G_3 &= 0, \\ R_{32Y} - m_3 \ddot{Y}_{C_3} &= 0, \\ R_{32Z} - m_3 \ddot{Z}_{C_3} - G_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Решив уравнения относительно искомым реакций, запишем следующее:

$$\begin{aligned} R_{10Y} &= m_1 \ddot{Y}_{C_1} + m_2 \ddot{Y}_{C_2} + m_3 \ddot{Y}_{C_3}, \\ R_{10Z} &= m_1 \ddot{Z}_{C_1} + m_2 \ddot{Z}_{C_2} + m_3 \ddot{Z}_{C_3} + G_1 + G_2 + G_3, \\ R_{21Y} &= m_2 \ddot{Y}_{C_2} + m_3 \ddot{Y}_{C_3}, \\ R_{21Z} &= m_2 \ddot{Z}_{C_2} + m_3 \ddot{Z}_{C_3} + G_2 + G_3, \\ R_{32Y} &= m_3 \ddot{Y}_{C_3}, \\ R_{32Z} &= m_3 \ddot{Z}_{C_3} + G_3. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Покажем расчетную схему третьего звена со всеми приложенными силами на рисунке 5.3.

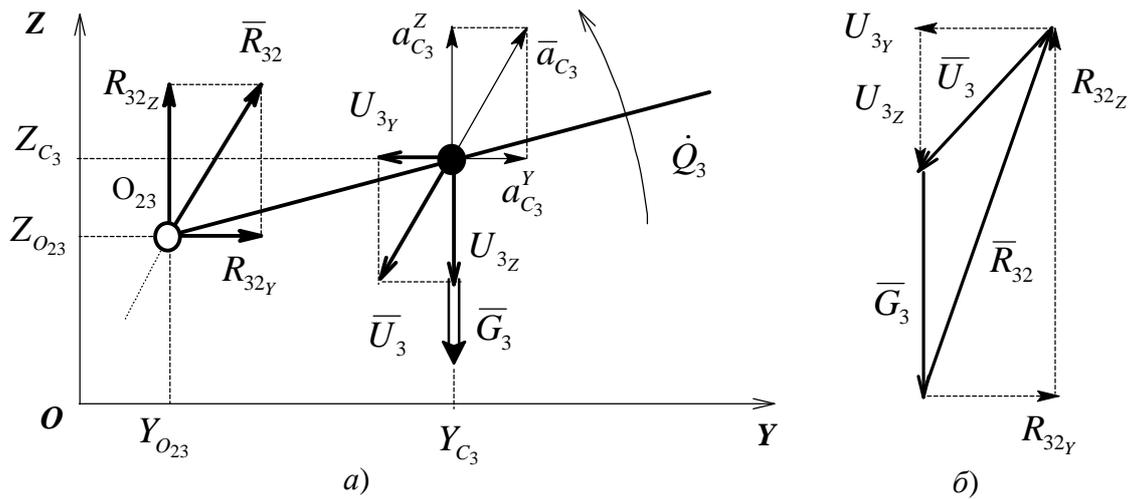


Рисунок 5.3 – Расчетная схема для определения реакции в суставе O_{23}

Запишем уравнение кинестатического равновесия третьего звена в векторной форме и покажем его графически, используя многоугольник сил. По рисунку 5.3, *a* имеем

$$\bar{R}_{32y} + \bar{R}_{32z} + \bar{U}_{3y} + \bar{U}_{3z} + \bar{G}_3 = 0 \quad (5.6)$$

или же в более общей форме

$$\bar{R}_{32} + \bar{U}_3 + \bar{G}_3 = 0. \quad (5.7)$$

Векторный многоугольник сил, построенный по уравнениям (5.6) и (5.7), показан на рисунке 5.3, *б*.

Проанализировав формулы (5.5) для N -звенной биомеханической системы, получим:

$$R_{(i,i-1)y} = \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Y}_{C_j},$$

$$R_{(i,i-1)z} = \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Z}_{C_j} + \sum_{j=i}^N G_j, \quad (5.8)$$

$$i=1, 2, \dots, N,$$

где m_j – масса j -го звена;

G_j – вес j -го звена.

Здесь i сверху ограничено значением N , так как точка K при $i=N+1$ является окончанием биомеханической системы без образования

кинематической пары, и соответственно R_{NK} и R_{KN} не существуют.

Если представить вес j -го звена через его массу

$$G_j = m_j g, \quad (5.9)$$

то в этом случае второе выражение в (5.8) примет вид

$$R_{(i,i-1)z} = \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Z}_{C_j} + g \sum_{j=i}^N m_j. \quad (5.10)$$

Подставим в уравнения (5.5) проекции ускорений по выражениям (3.43) для случая моделирования упругой опоры одной вращающейся пружины. Получим уравнения:

$$\begin{aligned} R_{10y} &= m_1 \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2m_1 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - m_1 L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - m_1 L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\ &\quad - m_1 S_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_1 S_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 + m_2 \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2m_2 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - \\ &\quad - m_2 L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - m_2 L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - m_2 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_2 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - \\ &\quad - m_2 S_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - m_2 S_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 + m_3 \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2m_3 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - \\ &\quad - m_3 L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - m_3 L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - \\ &\quad - m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\ R_{10z} &= m_1 \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2m_1 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + m_1 L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - m_1 L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\ &\quad + m_1 S_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_1 S_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_2 \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2m_2 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + \\ &\quad + m_2 L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - m_2 L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + m_2 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_2 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + \\ &\quad + m_2 S_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - m_2 S_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2m_3 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + \\ &\quad + m_3 L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - m_3 L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + \\ &\quad + m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + \\ &\quad + G_1 + G_2 + G_3, \\ R_{21y} &= m_2 \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2m_2 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - m_2 L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - m_2 L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\ &\quad - m_2 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_2 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - m_2 S_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - m_2 S_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 + \\ &\quad + m_3 \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2m_3 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - m_3 L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - m_3 L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\ &\quad - m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\ &\quad - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\ R_{21z} &= m_2 \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2m_2 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + m_2 L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - m_2 L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\ &\quad + m_2 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_2 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_2 S_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - \\ &\quad - m_2 S_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2m_3 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + m_3 L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - \\ &\quad - m_3 L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_2 + G_3, \\
R_{32y} &= m_3 \ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2m_3 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - m_3 L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - \\
& -m_3 L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\
& -m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{32z} &= m_3 \ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2m_3 \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + m_3 L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - m_3 L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\
& + m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
& + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_3. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Необходимо сгруппировать члены при тригонометрических функциях. Получим:

$$\begin{aligned}
R_{10y} &= (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{L}_0 \cos Q_0 - (m_1 + m_2 + m_3) L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\
& - 2(m_1 + m_2 + m_3) \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - (m_1 + m_2 + m_3) L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - \\
& - (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - \\
& - (m_2 S_2 + m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
& - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{10z} &= (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{L}_0 \sin Q_0 - (m_1 + m_2 + m_3) L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\
& + 2(m_1 + m_2 + m_3) \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + (m_1 + m_2 + m_3) L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 + \\
& + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + \\
& + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
& + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_1 + G_2 + G_3, \\
R_{21y} &= (m_2 + m_3) \ddot{L}_0 \cos Q_0 - (m_2 + m_3) L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - \\
& - 2(m_2 + m_3) \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - (m_2 + m_3) L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - \\
& - (m_2 L_1 + m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - (m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - \\
& - (m_2 S_2 + m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
& - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{21z} &= (m_2 + m_3) \ddot{L}_0 \sin Q_0 - (m_2 + m_3) L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + \\
& + 2(m_2 + m_3) \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + (m_2 + m_3) L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 + \\
& + (m_2 L_1 + m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - (m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + \\
& + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
& + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_1 + G_2 + G_3, \\
R_{32y} &= (m_3) \ddot{L}_0 \cos Q_0 - (m_3) L_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - 2(m_3) \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - \\
& - (m_3) L_0 \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - (m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - (m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - (m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{32z} = & (m_3) \ddot{L}_0 \sin Q_0 - (m_3) L_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + 2(m_3) \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + \\
& + (m_3) L_0 \ddot{Q}_0 \cos Q_0 + (m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - (m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + \\
& + (m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - (m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - \\
& - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_1 + G_2 + G_3.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Для сохранения единой формы записи выражений некоторые члены уравнений умножим на величину $\frac{L_0}{L_0}$. Тогда, введя обозначение членов при

тригонометрических функций через коэффициенты C_{ij} , получим:

$$\begin{aligned}
R_{10y} = & \frac{C_{10}}{L_0} \ddot{L}_0 \cos Q_0 - C_{10} \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - 2 \frac{C_{10}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - C_{10} \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - \\
& - C_{11} \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{11} \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{12} \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{12} \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
& - C_{13} \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{13} \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{10z} = & \frac{C_{10}}{L_0} \ddot{L}_0 \sin Q_0 - C_{10} \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + 2 \frac{C_{10}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + C_{10} \ddot{Q}_0 \cos Q_0 + \\
& + C_{11} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - C_{11} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + C_{12} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - C_{12} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
& + C_{13} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - C_{13} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_1 + G_2 + G_3, \\
R_{21y} = & \frac{C_{20}}{L_0} \ddot{L}_0 \cos Q_0 - C_{20} \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - 2 \frac{C_{20}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - C_{20} \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - \\
& - C_{21} \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{21} \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{22} \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{22} \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
& - C_{23} \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{23} \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{21z} = & \frac{C_{20}}{L_0} \ddot{L}_0 \sin Q_0 - C_{20} \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + 2 \frac{C_{20}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + C_{20} \ddot{Q}_0 \cos Q_0 + \\
& + C_{21} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - C_{21} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + C_{22} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - C_{22} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
& + C_{23} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - C_{23} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_2 + G_3, \\
R_{32y} = & \frac{C_{30}}{L_0} \ddot{L}_0 \cos Q_0 - C_{30} \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - 2 \frac{C_{30}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - C_{30} \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - \\
& - C_{31} \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{31} \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{32} \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - C_{32} \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - \\
& - C_{33} \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{33} \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{32z} = & \frac{C_{30}}{L_0} \ddot{L}_0 \sin Q_0 - C_{30} \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + 2 \frac{C_{30}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + C_{30} \ddot{Q}_0 \cos Q_0 + \\
& + C_{31} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - C_{31} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + C_{32} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - C_{32} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
& + C_{33} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - C_{33} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_3.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Здесь в уравнениях обозначены коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 C_{10} &= (m_1 + m_2 + m_3)L_0 = m_{БМС}L_0, \\
 C_{11} &= m_1S_1 + m_2L_1 + m_3L_1, \\
 C_{12} &= m_2S_2 + m_3L_2, \\
 C_{13} &= m_3S_3, \\
 C_{20} &= (m_2 + m_3)L_0, \\
 C_{21} &= (m_2 + m_3)L_1, \\
 C_{22} &= m_2S_2 + m_3L_2, \\
 C_{23} &= m_3S_3, \\
 C_{30} &= m_3L_0, \\
 C_{31} &= m_3L_1, \\
 C_{32} &= m_3L_2, \\
 C_{33} &= m_3S_3.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Анализ формул показывает, что коэффициенты при $i \leq j$ находятся в следующем отношении между собой: $C_{ij} = C_{i+1,j} = \dots = C_{jj}$.

В общем виде для любого i -го звена получим проекции реакции в кинематической паре $O_{i-1,i}$:

$$\begin{aligned}
 R_{(i,i-1)_Y} &= \frac{C_{i,0}}{L_0} (\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0\dot{Q}_0 \sin Q_0) - \sum_{j=0}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=0}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j, \\
 R_{(i,i-1)_Z} &= \frac{C_{i,0}}{L_0} (\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0\dot{Q}_0 \cos Q_0) + \sum_{j=0}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \\
 &\quad - \sum_{j=0}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{p=i}^N G_p,
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$i=1, 2, \dots, N.$

Здесь коэффициенты равны:

$$C_{ij} = \begin{cases} m_j S_j + L_j \sum_{s=j+1}^N m_s, & \text{если } i \leq j, \\ L_j \sum_{s=i}^N m_s, & \text{если } i > j, \end{cases} \tag{5.16}$$

$s \leq N.$

В дальнейшем будем использовать соотношение по типу (5.2) для получения величины и

направления реакции, действующей на соседнее звено:

$$R_{(i-1,i)_Y} = -R_{(i,i-1)_Y}, \quad R_{(i-1,i)_Z} = -R_{(i,i-1)_Z}. \quad (5.17)$$

Удобнее начинать расчет с определения силы реакции, действующей со стороны звена $i-1$ на текущее звено. Следующим шагом будет использование уравнений (5.17).

Отметим, что коэффициенты C_{ij} при $j > 0$ относятся непосредственно к биомеханической системе. Они постоянны, и их достаточно определить один раз для конкретного спортсмена. Коэффициенты C_{ij} при $j = 0$ относятся к опоре (пружине), являются переменными и рассчитываются для каждого кадра.

Алгоритм расчета реакций в кинематических парах представлен структурограммой на рисунке 5.4.

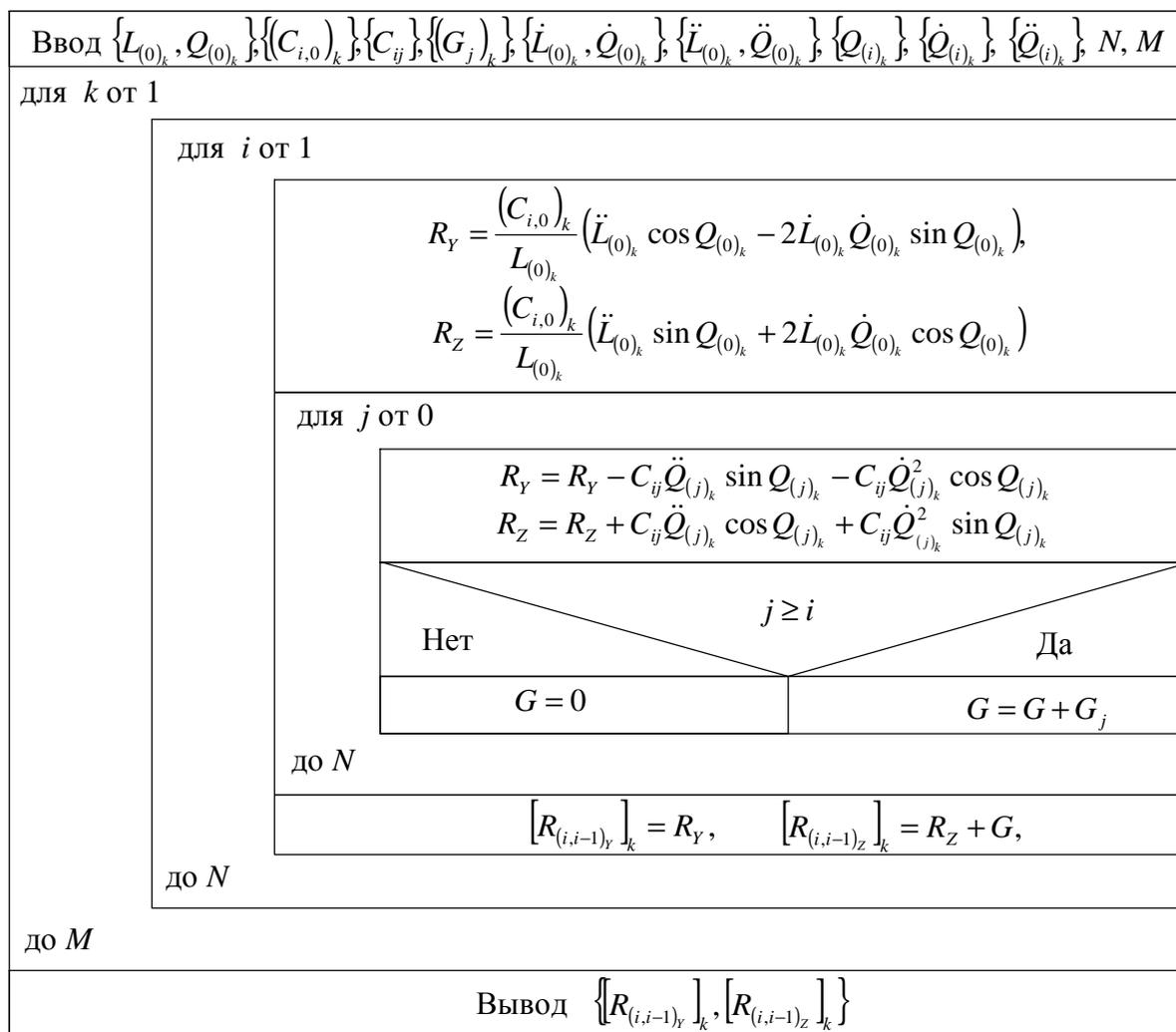


Рисунок 5.4 – Определение реакций в шарнирах (опора в

виде

вращающейся пружины)

Можно выбрать другую форму записи для уравнений проекций реакции в кинематической паре $O_{i-1,i}$:

$$\begin{aligned}
 R_{(i,i-1)_Y} &= m_{БМС} (\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0) - \sum_{j=0}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=0}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j, \\
 R_{(i,i-1)_Z} &= m_{БМС} (\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0) + \sum_{j=0}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \\
 &\quad - \sum_{j=0}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{p=i}^N G_p, \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Выведенные здесь уравнения силового анализа применимы для естественного движения, т.е. предполагается, что движущийся объект не вырабатывает управляющих воздействий. Иначе говоря, получены модели для неуправляемого движения, не предусматривающего достижение цели [77].

Выделим опору из уравнений (5.15). Тогда ее выделенные силовые параметры окажутся равными:

$$\begin{aligned}
 R_{(i,i-1)_Y}^{ОП} &= \frac{C_{10}}{L_0} (\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0) - C_{i,0} \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - C_{i,0} \dot{Q}_0^2 \cos Q_0, \\
 R_{(i,i-1)_Z}^{ОП} &= \frac{C_{10}}{L_0} (\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0) + C_{i,0} \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - C_{i,0} \dot{Q}_0^2 \sin Q_0, \\
 &\quad i=1, 2, \dots, N. \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

А выделенная биомеханическая система примет вид:

$$\begin{aligned}
 R_{(i,i-1)_Y}^{БМС} &= -\sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j, \\
 R_{(i,i-1)_Z}^{БМС} &= \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{p=i}^N G_p, \\
 &\quad i=1, 2, \dots, N. \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

И соответственно для всей реакции в любом шарнире можно записать через выделенные системы:

$$\begin{aligned}
R_{(i,i-1)_Y} &= R_{(i,i-1)_Y}^{OP} + R_{(i,i-1)_Y}^{BMC}, \\
R_{(i,i-1)_Z} &= R_{(i,i-1)_Z}^{OP} + R_{(i,i-1)_Z}^{BMC}.
\end{aligned}
\tag{5.21}$$

При использовании уравнений (5.18), получим выделенные модели опоры в следующей записи

$$\begin{aligned}
R_{(i,i-1)_Y}^{OP} &= m_{BMC} (\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0) - C_{i,0} \ddot{Q}_0 \sin Q_0 - C_{i,0} \dot{Q}_0^2 \cos Q_0, \\
R_{(i,i-1)_Z}^{OP} &= m_{BMC} (\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0) + C_{i,0} \ddot{Q}_0 \cos Q_0 - C_{i,0} \dot{Q}_0^2 \sin Q_0.
\end{aligned}
\tag{5.22}$$

Выделенная биомеханическая система остается прежней.

Модели с двумя поступательно движущимися пружинами. Общий вид уравнений кинетостатики (5.3)-(5.5) не меняется. Необходимо лишь подставить в полученные модели соответствующие уравнения ускорений (3.48) для двух пружин и получить выражения для реакций:

$$\begin{aligned}
R_{10_Y} &= m_1 \ddot{L}_{0\Gamma} - m_1 S_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_1 S_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 + m_2 \ddot{L}_{0\Gamma} - \\
&- m_2 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_2 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - m_2 S_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - m_2 S_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 + \\
&+ m_3 \ddot{L}_{0\Gamma} - m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\
&- m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{10_Z} &= m_1 \ddot{L}_{0B} + m_1 S_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_1 S_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_2 \ddot{L}_{0B} + m_2 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - \\
&- m_2 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_2 S_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - m_2 S_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 \ddot{L}_{0B} + \\
&+ m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + \\
&+ m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_1 + G_2 + G_3, \\
R_{21_Y} &= m_2 \ddot{L}_{0\Gamma} - m_2 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_2 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - m_2 S_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\
&- m_2 S_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 + m_3 \ddot{L}_{0\Gamma} - m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - \\
&- m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{21_Z} &= m_2 \ddot{L}_{0B} + m_2 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_2 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_2 S_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - \\
&- m_2 S_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 \ddot{L}_{0B} + m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + \\
&+ m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - \\
&- m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_2 + G_3, \\
R_{32_Y} &= m_3 \ddot{L}_{0\Gamma} - m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\
&- m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{32_Z} &= m_3 \ddot{L}_{0B} + m_3 L_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - m_3 L_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + m_3 L_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 -
\end{aligned}$$

$$-m_3 L_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_3. \quad (5.23)$$

Это промежуточные выражения. Сгруппировав члены уравнений при тригонометрических функциях, получим:

$$\begin{aligned} R_{10_Y} &= (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{L}_{0_G} - (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - \\ &- (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - (m_2 S_2 + m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\ &- (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\ R_{10_Z} &= (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{L}_{0_B} + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - \\ &- (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - \\ &- (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + \\ &+ G_1 + G_2 + G_3, \\ R_{21_Y} &= (m_2 + m_3) \ddot{L}_{0_G} - (m_2 L_1 + m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - \\ &- (m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - (m_2 S_2 + m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\ &- (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\ R_{21_Z} &= (m_2 + m_3) \ddot{L}_{0_B} + (m_2 L_1 + m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - \\ &- (m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - \\ &- (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_2 + G_3, \\ R_{32_Y} &= (m_3) \ddot{L}_{0_G} - (m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - (m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - \\ &- (m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - (m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\ R_{32_Z} &= (m_3) \ddot{L}_{0_B} + (m_3 L_1) \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - (m_3 L_1) \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + \\ &+ (m_3 L_2) \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - (m_3 L_2) \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + m_3 S_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - m_3 S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_3. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Как и в случае вращающейся пружины, моделирующей опору, для получения единой формы коэффициентов при тригонометрических функциях необходимо умножить некоторые члены уравнений на величину $\frac{L_{0_G}}{L_{0_G}}$ – для плоскости OXY , и на $\frac{L_{0_B}}{L_{0_B}}$ – для плоскости OXZ . Умножаются те члены, которые не содержат в произведении параметры длины какого-либо звена²⁸. Тогда имеем:

²⁸ Это первый член каждого уравнения (5.24), содержащий производную \ddot{L}_{0_G} или \ddot{L}_{0_B} .

$$\begin{aligned}
R_{10_Y} &= \frac{C_{10\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \ddot{L}_{0\Gamma} - C_{11} \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{11} \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{12} \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\
&\quad - C_{12} \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - C_{13} \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{13} \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{10_Z} &= \frac{C_{10B}}{L_{0B}} \ddot{L}_{0B} + C_{11} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - C_{11} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + C_{12} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - \\
&\quad - C_{12} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + C_{13} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - C_{13} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_1 + G_2 + G_3, \\
R_{21_Y} &= \frac{C_{20\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \ddot{L}_{0\Gamma} - C_{21} \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{21} \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{22} \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\
&\quad - C_{22} \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - C_{23} \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{23} \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{21_Z} &= \frac{C_{20B}}{L_{0B}} \ddot{L}_{0B} + C_{21} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - C_{21} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + C_{22} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - \\
&\quad - C_{22} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + C_{23} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - C_{23} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_2 + G_3, \\
R_{32_Y} &= \frac{C_{30\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \ddot{L}_{0\Gamma} - C_{31} \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - C_{31} \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - C_{32} \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - \\
&\quad - C_{32} \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - C_{33} \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - C_{33} \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\
R_{32_Z} &= \frac{C_{30B}}{L_{0B}} \ddot{L}_{0B} + C_{31} \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - C_{31} \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + C_{32} \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - \\
&\quad - C_{32} \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + C_{33} \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - C_{33} \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 + G_3. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Здесь новые коэффициенты равны:

$$\begin{aligned}
C_{10\Gamma} &= m_1 L_{0\Gamma} + m_2 L_{0\Gamma} + m_3 L_{0\Gamma} = m_{БМС} L_{0\Gamma}, \\
C_{10B} &= m_1 L_{0B} + m_2 L_{0B} + m_3 L_{0B} = m_{БМС} L_{0B}, \\
C_{20\Gamma} &= (m_2 + m_3) L_{0\Gamma}, \\
C_{20B} &= (m_2 + m_3) L_{0B}, \\
C_{30\Gamma} &= m_3 L_{0\Gamma}, \\
C_{30B} &= m_3 L_{0B}. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

В общем виде для произвольного звена биомеханической системы получим:

$$\begin{aligned}
R_{(i,i-1)_Y} &= \frac{C_{(i,0)\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \ddot{L}_{0\Gamma} - \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j, \\
R_{(i,i-1)_Z} &= \frac{C_{(i,0)B}}{L_{0B}} \ddot{L}_{0B} + \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{p=i}^N G_p.
\end{aligned}$$

$$i=1, 2, \dots, N. \quad (5.27)$$

Коэффициенты в общем виде определяются по уравнениям (5.16). При расчетах необходимо учесть, что для $j=0$ имеем разделение коэффициентов на горизонтальные и вертикальные. В этом случае подставляем $L_0 = L_{0\Gamma}$ и $L_0 = L_{0B}$.

Коэффициенты $C_{i,0\Gamma}$, $C_{i,0B}$, в которые входят параметры опоры, являются переменными и рассчитываются для каждого кадра и для каждой пружины. Остальные же остались неизменными и их достаточно определить один раз.

Обозначим силовые параметры выделенной опоры как

$$R_{(i,i-1)\Gamma}^{OP} = \frac{C_{(i,0)\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \ddot{L}_{0\Gamma}, \quad R_{(i,i-1)B}^{OP} = \frac{C_{(i,0)B}}{L_{0B}} \ddot{L}_{0B}. \quad (5.28)$$

При этом силы для выделенной биомеханической системы определяют по уравнениям (5.20), выведенным для опоры в виде вращающейся пружины. Общие выражения (5.21) для реакции в любом шарнире свою форму не меняют.

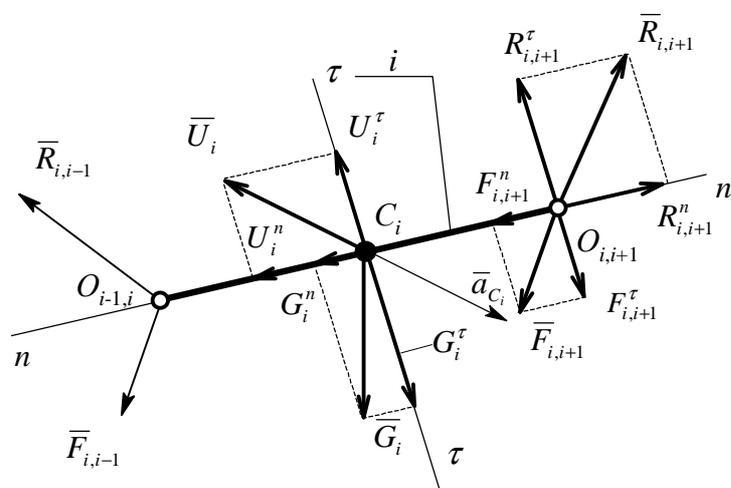


Рисунок 5.5 – Характер действия сил на i -ое звено

Отметим, что от направления по отношению к звену сил зависит характер их действия. Возьмем проекции сил на нормальное $n-n$ (вдоль звена) и касательное $\tau-\tau$ (перпендикулярно звену) направления для i -го звена по рисунку 5.5. На схеме показаны все нагрузки, используемые при силовом анализе исследуемого звена.

Имеем две группы сил: нормальные проекции G_i^n силы тяжести, U_i^n - силы инерции, $R_{i,i+1}^n$ - реакции в паре $O_{i,i+1}$, $F_{i,i+1}^n$ - равнодействующей управляющих сил, приведенной к исследуемой паре, и соответствующие касательные проекции - G_i^τ , U_i^τ , $R_{i,i+1}^\tau$, $F_{i,i+1}^\tau$. Силы в нормальном направлении связаны

с растяжением или сжатием звена. Их необходимо рассматривать, прежде всего, с прочностной точки зрения, а также как фактор, учитываемый при исследовании движения внутренних тканей и органов человека вдоль звена (деформация в этом направлении мускул, сосудов, движение крови, лимфы и пр.). Силы в касательном направлении, т.е. перпендикулярном звену, непосредственно используются при анализе движения биомеханической системы, представляющего собой вращение звеньев тела относительно суставов.

5.3 Состав реакции связи в кинематической паре «рука – опора»

Модели с вращающейся пружиной. Проанализируем уравнения (5.19) и (5.22) для выделенной опоры. Представим их в виде векторной суммы следующим образом:

$$\bar{R}_{10}^{OP} = \bar{R}_{BMC,OP}^{p-c} + \bar{R}_{BMC,OP}^k + \bar{R}_{BMC,OP}^{\tau} + \bar{R}_{BMC,OP}^n, \quad (5.29)$$

где $\bar{R}_{OP,BMC}^{p-c}$ - сила инерции биомеханической системы при растяжении-сжатии пружины. Скалярная величина силы составит

$$R_{OP,BMC}^{p-c} = \frac{C_{10}}{L_0} \ddot{L}_0 = m_{BMC} \ddot{L}_0, \quad (5.30)$$

$\bar{R}_{OP,BMC}^k$ - кориолисова сила инерции биомеханической системы в сложном движении пружины. Скалярная величина составит

$$R_{OP,BMC}^k = \frac{C_{10}}{L_0} 2\dot{L}_0\dot{Q}_0 = m_{BMC} 2\dot{L}_0\dot{Q}_0, \quad (5.31)$$

$\bar{R}_{OP,BMC}^{\tau}$ - касательная сила инерции биомеханической системы во вращательном движении пружины. Скалярная величина составит:

$$R_{BMC,OP}^{\tau} = C_{10} \ddot{Q}_0 = m_{BMC} L_0 \ddot{Q}_0, \quad (5.32)$$

$\bar{R}_{OP,BMC}^n$ - нормальная (центробежная) сила инерции биомеханической системы во вращательном движении пружины. Ее величина составит

$$R_{OP,BMC}^n = C_{10} \dot{Q}_0^2 = m_{BMC} L_0 \dot{Q}_0^2. \quad (5.33)$$

Переход к векторной форме от уравнений (5.19), (5.22) к (5.29) покажем на примере силы $\bar{R}_{OP,BMC}^{p-c}$. Выделяя составляющие ее силы, получим

$$R_{ОП,БМС}^{p-c} = \sqrt{\left(\frac{C_{10}}{L_0} \ddot{L}_0 \cos Q_0\right)^2 + \left(\frac{C_{10}}{L_0} \ddot{L}_0 \sin Q_0\right)^2} = \frac{C_{10}}{L_0} \ddot{L}_0 = m_{БМС} \ddot{L}_0. \quad (5.34)$$

Выполнив этот прием и для остальных сил, получим для каждой их скалярные величины. Это уравнения (5.31-5.33). В формулах также раскрыт коэффициент C_{10} по уравнениям (5.14). Направление вектора $\bar{R}_{ОП,БМС}^{p-c}$ указано на рисунке 5.6, а, как и направление остальных составляющих силы $\bar{R}_{ОП}^{ОП}$. На рисунке 5.6, б даны направления ускорений, по которым определяют составляющие выделенной реакции связи на опоре. Векторы показаны исходя из их физической природы, а не законов математики, используемых для их представления в соответствующих уравнениях²⁹.

На основании уравнений (5.17) здесь и в дальнейшем имеем:

$$\begin{aligned} R_{ОП}^{ОП} &= -R_{10}^{ОП}, \quad R_{ОП,БМС}^{p-c} = -R_{БМС,ОП}^{p-c}, \quad R_{ОП,БМС}^{\kappa} = -R_{БМС,ОП}^{\kappa}, \\ R_{ОП,БМС}^{\tau} &= -R_{БМС,ОП}^{\tau}, \quad R_{ОП,БМС}^n = -R_{БМС,ОП}^n, \quad R_{ОП}^{БМС} = -R_{10}^{БМС}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

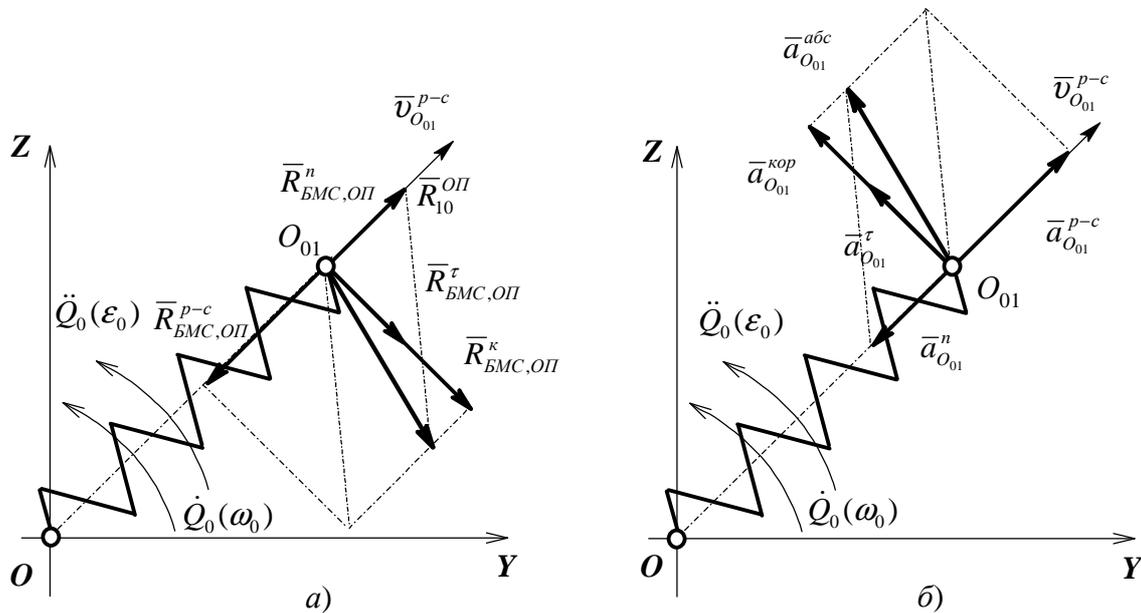


Рисунок 5.6 – Составляющие выделенной опорной реакции (опора в виде вращающейся пружины): а) направление сил; б) направление ускорений

²⁹ Т.е. учитываются реальные знаки каждого члена, входящего в уравнения кинематики или кинетостатики.

Таким образом, отмечаем общий характер расчетной схемы по рисунку 5.2. При подстановке конкретных значений членов уравнений кинестатики со своими знаками, т.е. с учетом направлений сил, получим биомеханическую систему в определенном положении.

Суммируя вышеизложенное, запишем общее выражение для реакции в кинематической паре «рука – опора» через составляющие силы, отражающие виды движений опоры. Имеем:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{10} &= \bar{R}_{10}^{OP} + \bar{R}_{10}^{BMC} = \bar{R}_{BMC,OP}^{p-c} + \bar{R}_{BMC,OP}^{\kappa} + \bar{R}_{BMC,OP}^{\tau} + \bar{R}_{BMC,OP}^n + \bar{R}_{10}^{BMC}, \\ \bar{R}_{01} &= \bar{R}_{01}^{OP} + \bar{R}_{01}^{BMC} = \bar{R}_{OP,BMC}^{p-c} + \bar{R}_{OP,BMC}^{\kappa} + \bar{R}_{OP,BMC}^{\tau} + \bar{R}_{OP,BMC}^n + \bar{R}_{01}^{BMC}.\end{aligned}\quad (5.36)$$

Анализ формул (5.36) показывает, что первоначальную деформацию осуществляет жесткая составляющая³⁰ силы \bar{R}_{01}^{BMC} выделенной биомеханической системы, так как именно движение человека вызывает упругую деформацию спортивного снаряда. Сама реакция \bar{R}_{01}^{BMC} рассчитывается по уравнению (5.20) и включает в себя лишь параметры движения спортсмена, измененные снарядом, но никак не его параметры деформации. Сила \bar{R}_{01}^{BMC} является переменной не только по величине, но и по направлению, так как биомеханическая система вращается относительно опоры, постоянно меняя направление реакции связи в контакте. Так как пружина, моделирующая спортивный снаряд, при этом растягивается или сжимается, то при наличии вращательного движения дополнительно необходимо учитывать следующие ускорения пружины: нормальное, касательное и ускорение Кориолиса. Через них определяют соответствующие инерционные нагрузки.

Модели с двумя поступательно движущимися пружинами. Воспользуемся выражениями (5.28) для проекций реакции связи выделенной опоры в случае двух поступательно движущихся пружин. Преобразуем уравнения в векторную форму. Тогда составляющая \bar{R}_{10}^{OP} равна

$$\bar{R}_{10}^{OP} = \bar{F}_G + \bar{F}_B, \quad (5.37)$$

где \bar{F}_G - сила инерции биомеханической системы в поступательном движении горизонтальной пружины. Ее скалярная величина составит

³⁰ Жесткой составляющей силы \bar{R}_{01}^{BMC} будет та ее часть, что возникала бы при жестком спортивном снаряде.

$$F_{\Gamma} = \frac{C_{10\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \ddot{L}_{0\Gamma} = m_{\text{БМС}} \ddot{L}_{0\Gamma}, \quad (5.38)$$

\bar{F}_B - сила инерции биомеханической системы в поступательном движении вертикальной пружины. Ее скалярная величина составит

$$F_B = \frac{C_{10B}}{L_{0B}} \ddot{L}_{0B} = m_{\text{БМС}} \ddot{L}_{0B}. \quad (5.39)$$

Направление составляющих силы \bar{R}_{10}^{OP} показано на рисунке 5.7 исходя

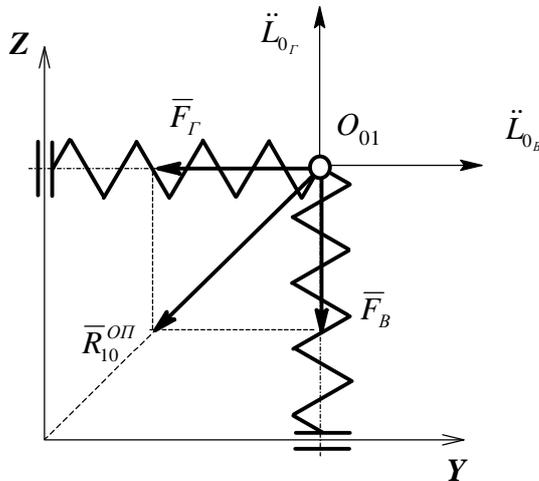


Рисунок 5.7 - Составляющие выделенной опорной реакции (опора в виде вращающейся пружины)

из их физической природы, а не формального представления в уравнениях согласно принятому правилу знаков, дающего формальное положение каждого вектора без учета действительного направления сил. Модели силового анализа выделенной биомеханической системы остаются прежними.

Запишем общее выражение для реакций в кинематической паре «рука – опора» через составляющие силы, отражающие движение различных систем (выделенная опора и выделенная

биомеханическая система), как

$$\bar{R}_{10} = \bar{R}_{10}^{OP} + \bar{R}_{10}^{БМС} = \bar{F}_{\Gamma} + \bar{F}_B + \bar{R}_{10}^{БМС}. \quad (5.40)$$

Модели для случая представления упругой опоры в виде двух поступательно движущихся пружин имеют более компактный вид.

5.4 Оценка динамики полной системы при силовом анализе

Упругая опора изменяет реакции связи во всех кинематических парах по сравнению с упражнением, выполняемым в условиях жесткой опоры. При этом спортивный снаряд влияет как на величину, так и на направление каждой реакции. Необходимо оценить значимость этих изменений. Введем понятие *коэффициента опоры по проекциям* и *полного коэффициента*

опоры для реакции связи. В дальнейшем этот термин уточним (главы 10 и 11), так как на самом деле силовой анализ целенаправленного движения биомеханической системы на сегодняшний день позволяет определить лишь алгебраическую сумму реакции и равнодействующей управляющих сил, приведенной к исследуемому суставу. Разделить силы пока не получается. Опорных шарниров данное замечание не касается.

Коэффициенты опоры по реакции связи в шарнире $O_{i-1,i}$ в проекции составят:

$$\begin{aligned} \chi_{R_{(i,i-1)}}^Y &= \frac{R_{(i,i-1)Y}}{R_{(i,i-1)Y}^{БМС}}, \\ \chi_{R_{(i,i-1)}}^Z &= \frac{R_{(i,i-1)Z}}{R_{(i,i-1)Z}^{БМС}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Величины опорных реакций для расчета полного коэффициента опоры по силам в шарнире $O_{i-1,i}$ найдем следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{i,i-1} &= \sqrt{\left(R_{(i,i-1)Y}^{БМС,ОП}\right)^2 + \left(R_{(i,i-1)Z}^{БМС,ОП}\right)^2}, \\ R_{(i,i-1)}^{БМС} &= \sqrt{\left(R_{(i,i-1)Y}^{БМС}\right)^2 + \left(R_{(i,i-1)Z}^{БМС}\right)^2}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Сам *полный коэффициент опоры по реакции в шарнире* рассчитаем как

$$\chi_{R_{i,i-1}} = \frac{R_{i,i}}{R_{i,i}^{БМС}}. \quad (5.43)$$

Формулы (5.41)-(5.43) применимы к любому шарниру $O_{i-1,i}$ биомеханической системы, включая опорные.

Здесь проведена оценка влияния движения опоры на величину силы в шарнире, но сила – это вектор. Поэтому определим, как влияют упругие свойства спортивного снаряда и на направление реакции связи. Выполним такое исследование для опорного шарнира O_{01} . Так как все модели опоры эквивалентны друг другу, то для окончательных расчетов можно воспользоваться любыми выражениями: или для одной вращающейся, или для двух поступательно движущихся пружин.

Расчет влияния упругой опоры на изменение направления опорной реакции выполним по направляющим косинусам. С учетом отношения (5.2) они составят [21, 37]:

$$\cos \alpha_{01} = \frac{R_{01Y}}{R_{01}} = \frac{R_{01Y}}{\sqrt{(R_{01Y})^2 + (R_{01Z})^2}},$$

$$\cos \beta_{01} = \frac{R_{01Y}^{BMC}}{R_{01}^{BMC}} = \frac{R_{01Y}^{(BMC)}}{\sqrt{[R_{01Y}^{BMC}]^2 + [R_{01Z}^{BMC}]^2}}, \quad (5.44)$$

где α_{01} – угол между опорной реакцией \bar{R}_{01} и осью OY . Здесь $\alpha_{01} = Q_0$;
 β_{01} – угол между опорной реакцией \bar{R}_{01}^{BMC} и осью OY .

Покажем направления сил в шарнире через углы α_{01} и β_{01} (рис. 5.8).

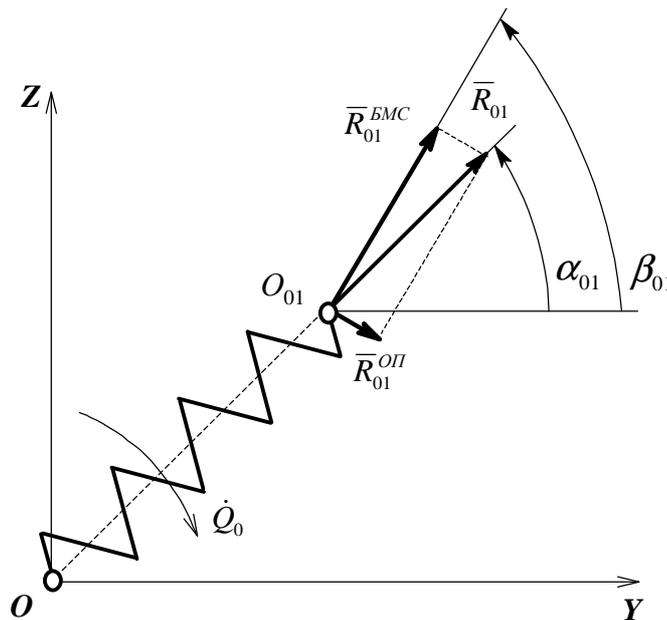


Рисунок 5.8 – Направление сил в опорном шарнире O_{01}

Имеем коэффициент опоры по направлению опорной реакции

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{\arccos \alpha_{01}}{\arccos \beta_{01}}. \quad (5.45)$$

Расчеты выполняются для каждого кадра. Понятно, что при выполнении маховых упражнений в гимнастике углы имеют возможность принимать значения во всем возможном диапазоне ($0 \leq \alpha_{01} \leq 2\pi$ и $0 \leq \beta_{01} \leq 2\pi$), поэтому при реализации алгоритма в программе для ПЭВМ необходимо предусмотреть ситуацию «деление на ноль».

5.5 Влияние реакций в кинематических парах «рука – опора» на обращение опоры

При изучении кинематики движения биомеханической системы в главе 3 получены выражения для скоростей и ускорений кинематической пары «рука – опора». Анализ уравнений для всех вариантов моделей упругой опоры показывает достаточно сложный характер движения. Но кинематика не раскрывает причин движения, их изучает динамика. Причинами же деформационного движения опоры, которое нами названо обращением, являются реакции связей в опорных шарнирах. Именно эти силы, действующие со стороны человека, заставляют упруго деформироваться спортивный снаряд в динамике.

Модели с вращающейся пружиной. Ранее было выяснено, что поперечные сечения опоры, представляющей собой заземленную обоими концами балку, совершают лишь поступательное движение. Вращательное же движение относится ко всей опоре, причем не к ее физическим точкам (реально существующим), а к мнимой плоскости изгиба, которая проходит через упругую линию балки и координатную ось OX . Изгиб упругой линии вместе с ее вращением относительно неподвижной оси абсцисс есть обращение опоры.

Согласно уравнениям (5.36), реакция \bar{R}_{01} имеет составляющие \bar{R}_{01}^{OP} и \bar{R}_{01}^{BMC} . В формулу для силы \bar{R}_{01}^{BMC} в явном виде входят только параметры движения биомеханической системы, и нет ни одного параметра спортивного снаряда³¹.

Используя метод итераций, необходимо выполнить ряд последовательных действий. Кинетостатический расчет биомеханической системы позволяет определить первоначальную реакцию \bar{R}_{01}^{BMC} , которую необходимо приложить к рабочей части спортивного снаряда. Такое действие отражено в деформации опоры. Сама реакция является реакцией выделенной биомеханической системы. Этот случай показан на рисунке 5.9, а. В первоначальный момент опора считается жестким телом. После нагружения превратим спортивный снаряд из жесткой опоры в опору с упругими свойствами (рис. 5.9, б). При этом движение биомеханической системы вызовет деформацию снаряда – пружина растянется. Угол Q_0^{BMC} для выделенной БМС определим как

$$Q_0^{BMC} = \arctg \frac{R_{01z}^{BMC}}{R_{01y}^{BMC}}. \quad (5.46)$$

³¹ На самом деле зависимость осуществляется через корректировку параметров движения биомеханической системы.

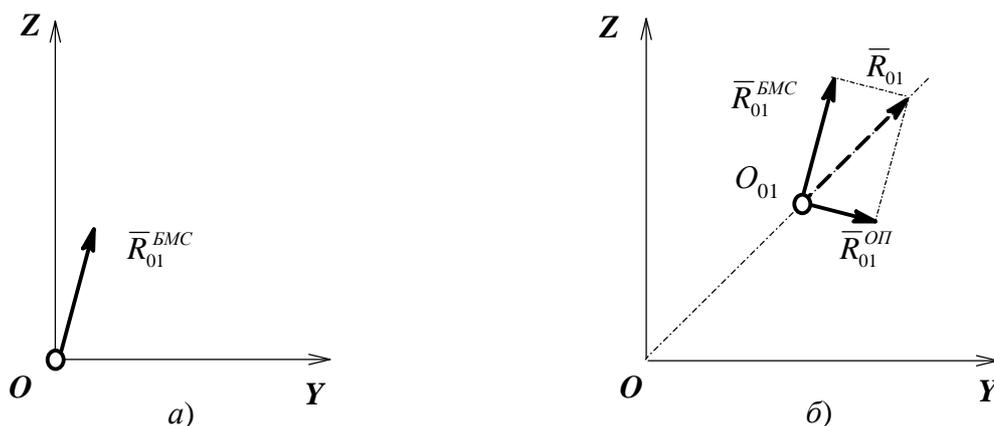


Рисунок 5.9 – Действие реакции выделенной биомеханической системы на: а) жесткую опору; б) упругую опору

Первая часть уравнений (5.36) отражает движение самого спортивного снаряда. Переходя от влияния биомеханической системы на опору к влиянию опоры на спортсмена, в свою очередь представим силу \bar{R}_{10}^{OP} в виде двух частей как

$$\bar{R}_{10}^{OP} = \bar{R}_{BMC,OP}^{p-c} + (\bar{R}_{BMC,OP}^{\kappa} + \bar{R}_{BMC,OP}^{\tau} + \bar{R}_{BMC,OP}^n) = \bar{R}_{BMC,OP}^{p-c} + \bar{R}_{BMC,OP}^{ep}. \quad (5.47)$$

Здесь сила $\bar{R}_{BMC,OP}^{p-c}$ является силой инерции, используемой при учете прогиба спортивного снаряда (растяжение-сжатие пружины), а остальные составляющие общей силы \bar{R}_{10}^{OP} , записываемые как

$$\bar{R}_{BMC,OP}^{ep} = \bar{R}_{BMC,OP}^{\kappa} + \bar{R}_{BMC,OP}^{\tau} + \bar{R}_{BMC,OP}^n, \quad (5.48)$$

тоже представляют собой инерционную нагрузку, но уже во вращательном движении плоскости изгиба опоры (вращение пружины). При этом нормальная сила инерции $\bar{R}_{BMC,OP}^n$ направлена по радиусу вращения и совпадает с направлением $\bar{R}_{BMC,OP}^{p-c}$, а касательная и кориолисова силы инерции – по касательной к траектории. Используя это замечание, запишем сумму сил, направленных по радиусу вращения, т.е. по оси пружины 0, как

$$\bar{R}_{BMC,OP}^{L_0} = \bar{R}_{BMC,OP}^{p-c} + \bar{R}_{BMC,OP}^n, \quad (5.49)$$

а по касательной к траектории движения

$$\bar{R}_{БМС,ОП}^{Q_0} = \bar{R}_{БМС,ОП}^{\kappa} + \bar{R}_{БМС,ОП}^{\tau} \quad (5.50)$$

В этом случае реакция выделенной опоры примет вид

$$\bar{R}_{10}^{ОП} = \bar{R}_{БМС,ОП}^{L_0} + \bar{R}_{БМС,ОП}^{Q_0} \quad (5.51)$$

Реакцию на опоре \bar{R}_{10} запишем через составляющие, используемые при анализе причин прогиба спортивного снаряда и поворота плоскости его изгиба (вращение пружины), как

$$\bar{R}_{10} = [\bar{R}_{БМС,ОП}^{L_0} + \bar{R}_{БМС,ОП}^{БМС}] + \bar{R}_{БМС,ОП}^{Q_0} \quad (5.52)$$

Предложим следующий порядок проведения кинетостатического анализа при определении реакции на опоре в случае моделирования последней вращающейся пружины (метод итераций). Необходимо:

1. определить угловые кинематические параметры \dot{Q}_i , \ddot{Q}_i всех звеньев биомеханической системы по уравнениям;
2. определить проекции реакции $\bar{R}_{10}^{БМС}$ выделенной биомеханической системы на каждом кадре видео- или кино съемки;
3. найти реакцию $\bar{R}_{01}^{БМС}$ со стороны БМС, используя отношение (5.2) и приложить ее к опоре. Найти прогиб L_0 по моделям деформации;
4. определить углы $Q_0^{БМС}$ наклона пружины к оси OY ;
5. рассчитать линейные и угловые кинематические параметры для вращающейся пружины \dot{L}_0 , \ddot{L}_0 , $\dot{Q}_0^{БМС}$, $\ddot{Q}_0^{БМС}$;
6. определить в проекциях реакцию $\bar{R}_{01}^{ОП}$ выделенной опоры, отражающую обращение спортивного снаряда;
7. уточнить проекции опорной реакции \bar{R}_{01} , используя данные п. 5;
8. рассчитать параметры перемещения опоры при изгибе L_0 по моделям деформации, используя уточненные проекции опорной реакции \bar{R}_{01} ;
9. определить углы наклона пружины Q_0 к оси OY уже с использованием проекций опорной реакции \bar{R}_{01} ;
10. рассчитать линейные и угловые кинематические параметры для вращающейся пружины \dot{L}_0 , \ddot{L}_0 , \dot{Q}_0 , \ddot{Q}_0 , используя данные по всем кадрам видеосъемки;
11. уточнить ускорения ЦМ звеньев;
12. уточнить проекции опорной реакции \bar{R}_{01} по соответствующим уравнениям

13. повторить п.8-п.12 до достижения заданной точности расчетов.

Продемонстрируем на рисунке 5.10 изменение направлений сил, вызывающих деформацию опоры в разных направлениях, и моделирование действие последних пружинами.

Сила $\bar{R}_{01}^{БМС}$ приложена к жесткой опоре и является выделенной реакцией биомеханической системы.

Сила $\bar{R}_{01}^{ОП}$ является выделенной реакцией спортивного снаряда и отражает движение опоры и спортсмена.

Особо следует подчеркнуть вопрос о направлении составляющих опорной реакции. Удобнее всего выполнять *все* расчеты через проекции

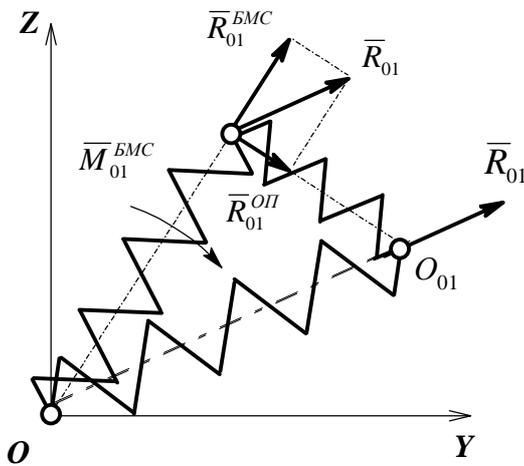


Рисунок 5.10 – Моделирование деформации опоры пружинами

сил – тогда задумываться о направлении векторов не надо. Все получается автоматически, так как и величина, и направление общей реакции будут зависеть от величины и знака проекций сил по известным направлениям – осям основной системы координат. Иначе получается следующая картина: так как любое движение упругой опоры есть на самом деле деформация, то и моделировать ее необходимо пружиной. Это означает, что не только

растяжение-сжатие моделируется пружиной, но и вращение тоже.

А это неудобно, так как пружины расположены вдоль радиуса вращения и перпендикулярно ему. И мы имеем постоянную смену направлений, по которым проектируется деформация. Используется для этого дополнительная, т.е. подвижная система координат, а не основная.

Суммируя вышеизложенное, отметим, что:

- сила реакции $\bar{R}_{01}^{БМС}$ выделенной биомеханической системы вызывает прогиб опоры;
- дополнительные прогибы определяются расчетом деформации от:
 - а) сил инерции биомеханической системы $\bar{R}_{ОП,БМС}^{p-c}$ в поступательном движении опоры³²;
 - б) кориолисовой силы инерции биомеханической системы в сложном движении опоры $\bar{R}_{ОП,БМС}^k$. Отражает поворот (вращение)

³² Для пружины это ее растяжение-сжатие.

- плоскости изгиба**;
- в) касательной силы инерции биомеханической системы во вращательном движении опоры $\bar{R}_{ОП,БМС}^t$. Отражает вращение плоскости изгиба;
- г) нормальной силы инерции биомеханической системы во вращательном движении опоры $\bar{R}_{ОП,БМС}^n$. Отражает дополнительный прогиб балки (растяжение-сжатие пружины);
- причиной вращения плоскости изгиба является момент $\bar{M}_{10}^{БМС}$, создаваемый всей биомеханической системой относительно опоры.

Резюмируем:

1. любое движение опоры есть ее деформация;
2. при изучении движения биомеханической системы деформация в любом направлении может моделироваться пружиной.

Отметим, что в силовом анализе масса опоры не использовалась. Этот вопрос подробно разобран в главах 6, 7. Для прояснения влияния биомеханической системы на спортивный снаряд необходимости в учете масс-инерционных характеристик упругой опоры на данном этапе нет.

Модель опоры в виде двух поступательно движущихся пружин. Два типа моделей в виде разного количества пружин отражают одну и ту же деформационную картину для конкретного спортивного снаряда. Выделенная сила биомеханической системы $\bar{R}_{01}^{БМС}$, отражающая движение самой БМС, для обеих моделей определяется из уравнений (5.20). Это означает, что методика определения сил для модели в виде двух поступательно движущих пружин не меняется по сравнению с методикой для вращающейся пружины. Преобразуются лишь конкретные уравнения для вычисления параметров кинематики и динамики опоры, необходимые для проведения силового анализа. И по этой же причине не требуется выполнение некоторых пунктов расчета.

Таким образом, порядок проведения кинетостатического анализа для двух пружин окажется следующим:

1. определить угловые кинематические параметры \dot{Q}_i, \ddot{Q}_i всех звеньев биомеханической системы;
2. определить проекции реакции $\bar{R}_{01}^{БМС}$ для выделенной БМС по каждому кадру видео- или кино съемки;
3. приложить полученные проекции силы $\bar{R}_{01}^{БМС}$ к опоре в виде балки и найти прогибы $L_{0Г}$ по горизонтальной и $L_{0В}$ по вертикальной осям;
4. рассчитать линейные кинематические параметры для пружин $\dot{L}_{0Г},$

** Плоскости, но не самой балки!

- \dot{L}_{0B} по уравнениям, используя данные по всем кадрам оптической съемки;
5. определить составляющие реакции \bar{R}_{01}^{OP} выделенной опоры;
 6. уточнить проекции опорной реакции \bar{R}_{01} ;
 7. рассчитать параметры перемещения опоры при изгибе $L_{0Г}$, L_{0B} по моделям деформации, используя уточненные проекции опорной реакции \bar{R}_{01} ;
 8. рассчитать линейные кинематические параметры для двух пружин $\dot{L}_{0Г}$, \dot{L}_{0B} , используя данные по всем кадрам оптической съемки;
 9. уточнить ускорения ЦМ звеньев;
 10. уточнить общие опорные реакции \bar{R}_{01} ;
 11. повторить п.7-п.10 до достижения заданной точности расчетов.

Покажем опорные реакции и изменение положения балки при моделировании опоры одной вращающейся пружиной – на рисунке 5.11, а и двумя поступательно движущимися пружинами – на рисунке 5.11, б.

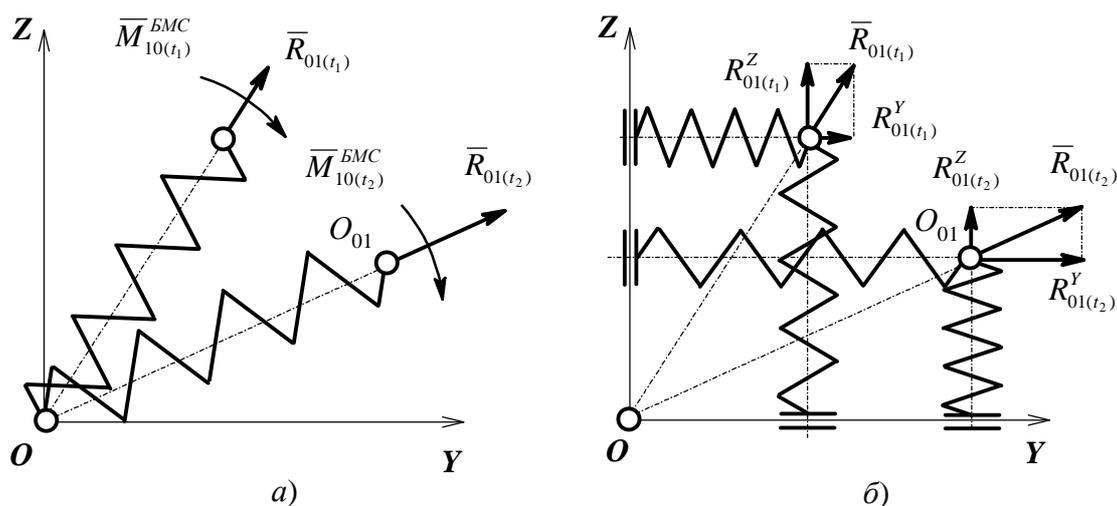


Рисунок 5.11 – Составляющие опорной реакции и виды движений опоры: а) обращение опоры; б) поступательные движения опоры – горизонтальные и вертикальные

По варианту на рисунке 5.11, а опора изгибается под действием реакции \bar{R}_{01} , причем сила вращается с угловой скоростью \dot{Q}_0 под действием момента \bar{M}_{10}^{BMC} относительно этой опоры (например, грифа переключателя). Опора показана в два момента времени – при t_1 и t_2 , причем $t_1 < t_2$. В данной главе мы выяснили все необходимое о происхождении силы \bar{R}_{01} , ее величине, направлении, методике

определения и закономерностях ее действия для того, чтобы провести кинетостатический анализ. По поводу же момента $\bar{M}_{10}^{БМС}$ скажем следующее – его, как и реакцию на опоре, можно определить методами кинетостатики, но это отдельная и большая тема, так как представляет собой ни что иное, как исследование естественного и целенаправленного движений в полном объеме, а не по отдельным разделам. Указанные виды движений будут рассмотрены лишь в главах 10-12. Там же введем и некоторые дополнения по поводу реакций на опоре.

По второму варианту на рисунке 5.11, б имеем опору и реакцию связи \bar{R}_{01} в шарнире O_{01} , представленную в виде суммы двух сил $\bar{R}_{01Г}$ и $\bar{R}_{01В}$. Каждая из них отражает движение упругого спортивного снаряда в своем направлении, т.е. в горизонтальном и вертикальном.

Таким образом, мы связали модели опоры в виде разного количества пружин с силами, используемыми при расчете параметров движения биомеханической системы.

Особо отметим, что в разрабатываемой методике силового анализа окончательное положение деформированной опоры, а соответственно и пружин (пружины), можно определить лишь через приближение (метод итераций), начиная с жесткой опоры.

Из материала, изложенного в данном параграфе, следует еще один важный для всей работы вывод: *модель с вращающейся пружиной и модель с двумя поступательно движущимися пружинами полностью эквивалентны друг другу. Т.е. одна заменяет другую без изменения результата, так как обе отражают в каждый момент времени одно и то же положение динамически деформируемого спортивного снаряда.*

5.6 Изменение угловых параметров кинематики биомеханической системы упругой опорой

Докажем гипотезу о влиянии упругих свойств спортивного снаряда на величину углов Q_i , выраженную зависимостью (1.20). Рассмотрим естественное движение, то есть движение, при котором не происходит управления со стороны мышечной системы человека [56, 77].

Составим уравнение кинетостатического равновесия третьего звена относительно сустава O_{23} для двух вариантов биомеханической системы – в условиях упругой и жесткой опор. В обоих случаях учитываются действующая сила тяжести \bar{G}_3 и присоединенная фиктивная сила инерции \bar{U}_3 , а также момент пары сил инерции $\bar{M}_{ин3}$ [73, 81]. Он равен

$$M_{ин3} = -I_3 \ddot{Q}_3, \quad (5.53)$$

где I_3 - центральный момент инерции массы третьего звена.

Расчетная схема для двух вариантов представлена на рисунке 5.12. При этом расчетные схемы ничем не отличаются друг от друга, кроме модели спортивного снаряда, на рисунке не показанного.

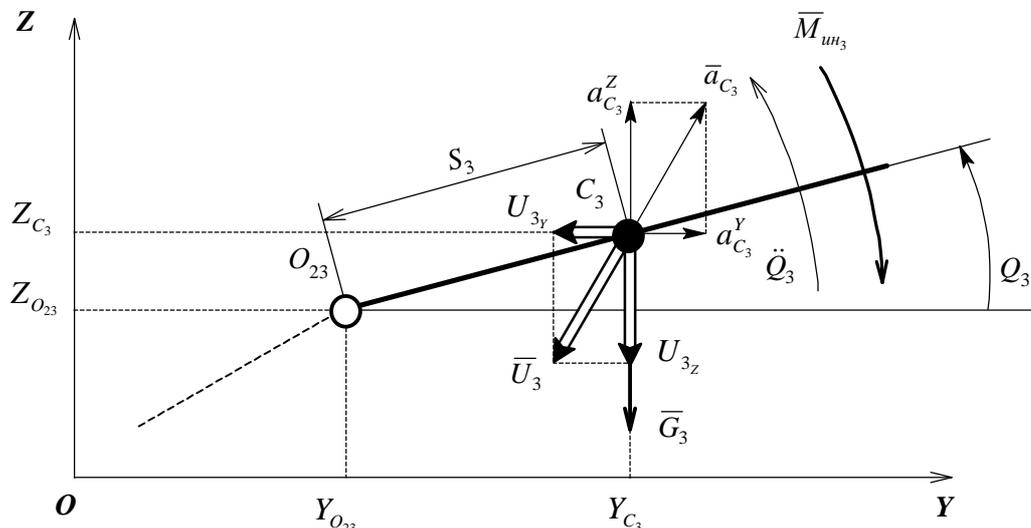


Рисунок 5.12 – Расчетная схема третьего звена биомеханической системы при естественном движении

Направление проекций U_{3y} и U_{3z} силы инерции противоположно проекциям ускорения \bar{a}_{C_3} центра масс звена. На данном этапе анализа, кроме единой расчетной схемы, используем и одинаковое обозначение угловых характеристик движения вне зависимости от проявления опорой упругих свойств.

В обоих случаях уравнение кинетостатического равновесия примет вид

$$\sum M_{O_{23}} = 0, \\ -G_3 S_3 \cos Q_3 + U_{3y} S_3 \sin Q_3 - U_{3z} S_3 \cos Q_3 - M_{ин3} = 0. \quad (5.54)$$

Подставляя проекции силы инерции и выражение (13) в уравнение (14), получим

$$-G_3 S_3 \cos Q_3 + m_3 \ddot{Y}_{C_3} S_3 \sin Q_3 - m_3 \ddot{Z}_{C_3} S_3 \cos Q_3 - I_3 \ddot{Q}_3 = 0. \quad (5.55)$$

Здесь использованы выражения

$$U_{3y} = -m_3 \ddot{Y}_{C_3}, U_{3z} = -m_3 \ddot{Z}_{C_3}. \quad (5.56)$$

Знак «минус» в уравнениях (5.53) и (5.56) относится к направлению рассматриваемых силовых факторов и уже реализован на рисунке 5.12. Для биомеханической системы в условиях упругой опоры используем уравнения для третьего звена по (3.48). Имеем $i=3$, тогда

$$\begin{aligned}
 & -G_3 S_3 \cos Q_3 + m_3 S_3 \sin Q_3 \left[\ddot{L}_{0r} - \sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) - \right. \\
 & \left. - S_3 (\ddot{Q}_3 \sin Q_3 + \dot{Q}_3^2 \cos Q_3) \right] - m_3 S_3 \cos Q_3 \left[\ddot{L}_{0B} + \sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) + \right. \\
 & \left. + S_3 (\ddot{Q}_3 \cos Q_3 - \dot{Q}_3^2 \sin Q_3) \right] - I_3 \ddot{Q}_3 = 0. \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

Решим полученное выражение относительно \ddot{Q}_3 :

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_3 [I_3 + m_3 S_3^2 (\sin Q_3 \sin Q_3 + \cos Q_3 \cos Q_3)] = & -G_3 S_3 \cos Q_3 + m_3 S_3 \sin Q_3 \times \\
 & \times \left[\ddot{L}_{0r} - \sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) - S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3 \right] - \\
 & - m_3 S_3 \cos Q_3 \left[\ddot{L}_{0B} + \sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) - S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 \right]. \quad (5.58)
 \end{aligned}$$

Введем коэффициент, аналогичный одноименному коэффициенту по работе [56]:

$$A_{33} = I_3 + m_3 S_3^2.$$

После преобразования тригонометрических функций в левой части формулы (5.58), а также учитывая, что имеем равенство

$$\sin Q_3 \sin Q_3 + \cos Q_3 \cos Q_3 = \cos(Q_3 - Q_3) = 1,$$

окончательно запишем:

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_3 = \frac{S_3}{A_{33}} \left\{ -G_3 \cos Q_3 - m_3 \sin Q_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) + S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3 \right] - \right. \\
 \left. - m_3 \cos Q_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) - S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 \right] \right\} + \\
 + \frac{m_3 S_3}{A_{33}} (\ddot{L}_{0r} \sin Q_3 - \ddot{L}_{0B} \cos Q_3). \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$H_3 = \frac{S_3}{A_{33}} \left\{ -G_3 \cos Q_3 - m_3 \sin Q_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) + S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3 \right] - m_3 \cos Q_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) - S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 \right] \right\}, \quad (5.60)$$

$$b_3 = \frac{m_3 S_3}{A_{33}} (\ddot{L}_{0r} \sin Q_3 - \ddot{L}_{0b} \cos Q_3), \quad (5.61)$$

то при наличии упругой опоры угловое ускорение записывается как

$$\ddot{Q}_3 = H_3 + b_3. \quad (5.62)$$

Здесь H_3 представляет выделенную биомеханическую систему, а b_3 – выделенную опору.

Аналогичные преобразования формулы (5.55) выполним и для биомеханической системы в условиях жесткой опоры. Для этого воспользуемся моделями (3.48) при $\ddot{L}_{0r} = 0$ и $\ddot{L}_{0b} = 0$. Получим равенство

$$\ddot{Q}_3^{\mathcal{J}} = \frac{S_3}{A_{33}} \left\{ -G_3 \cos Q_3 - m_3 \sin Q_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) + S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3 \right] - m_3 \cos Q_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) - S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 \right] \right\}, \quad (5.63)$$

где $\ddot{Q}_3^{\mathcal{J}}$ – угловое ускорение третьего звена при движении биомеханической системы в условиях жесткой опоры.

Введем обозначение

$$\ddot{Q}_3^{\mathcal{J}} = H_3^{\mathcal{J}}. \quad (5.64)$$

Причем формально имеем равенство выражений (5.60) и (5.63).

Анализ выражений (5.59) и (5.63) или (5.62) и (5.64) показывает неравенство угловых ускорений третьего звена при упругой и жесткой опорах:

$$\ddot{Q}_3 \neq \ddot{Q}_3^{\mathcal{J}}. \quad (5.65)$$

Но для этого должно выполняться условие

$$b_3 \neq 0. \quad (5.66)$$

Для доказательства неравенства (5.65) достаточно хотя бы одного случая выполнения условия (5.66) на всей траектории движения. Используя формулу (5.61), запишем в развернутой форме

$$\frac{m_3 S_3}{A_{33}} (\ddot{L}_{0Г} \sin Q_3 - \ddot{L}_{0В} \cos Q_3) \neq 0. \quad (5.67)$$

Здесь достаточно проанализировать выражение

$$\ddot{L}_{0Г} \sin Q_3 - \ddot{L}_{0В} \cos Q_3 \neq 0. \quad (5.68)$$

Теоретически слагаемые в выражении могут иметь любой знак. Зависит это от направления ускорений $\ddot{L}_{0Г}$ и $\ddot{L}_{0В}$ и расположения звена в определенном квадранте, что влияет на знаки тригонометрических функций. При одинаковых знаках слагаемых получим сумму или разность, и неравенство (5.68) выполнится. Но чтобы сделать окончательный вывод, необходимы действительные сочетания направлений ускорений и положений звеньев, реализуемых на практике, а не общетеоретический анализ.

Для рассмотрения возможных вариантов проще всего пойти от противного: возьмем случай $b_3 = 0$, что означает равенство обобщенных ускорений в условиях жесткой и упругой опор. Выражение (5.68) примет вид

$$\ddot{L}_{0Г} \sin Q_3 - \ddot{L}_{0В} \cos Q_3 = 0 \quad (5.69)$$

или

$$\ddot{L}_{0Г} \sin Q_3 = \ddot{L}_{0В} \cos Q_3. \quad (5.70)$$

Преобразуем последнюю формулу к виду

$$\operatorname{tg} Q_3 \frac{\ddot{L}_{0Г}}{\ddot{L}_{0В}} = 1. \quad (5.71)$$

Данное уравнение при определенных значениях ее членов существовать не может. Так при $Q_3 = \pm \frac{\pi}{2}$ имеем $\operatorname{tg} Q_3 = \pm \infty$, а при $Q_3 = 0$ получаем $\operatorname{tg} Q_3 = 0$. При $\ddot{L}_{0В} = 0$ имеем деление на ноль. При

$\ddot{L}_{0r} = 0$ равенство (5.71) также не выполняется. То есть анализ показывает наличие положений третьего звена на траектории движения, для которых в уравнении (5.62) с учетом упругой опоры **обязательно** присутствует дополнительный член b_3 , отличающий рассматриваемую модель от модели в условиях жесткого спортивного снаряда. А значит, опора оказывает воздействие на звено путем изменения его угловых параметров движения.

Запишем в общем виде для угловых кинематических параметров звена известные соотношения [11, 15, 45]:

$$\ddot{Q}_3 = \frac{d\dot{Q}_3}{dt}, \quad \dot{Q}_3 = \frac{dQ_3}{dt} \quad \text{и} \quad \ddot{Q}_3 = \frac{d^2 Q_3}{dt^2}. \quad (5.72)$$

Они не зависят от вида опоры, поэтому подходят как для жесткого, так и упругого снаряда. Проинтегрируем уравнения (5.72) соответствующее число раз, с указанием вида опоры.

Разбирать этот случай только лишь с помощью законов математики было бы некорректно. Причина показана на рисунке 2.2 в п.2.2 – при равенстве значений аппроксимирующего многочлена $P(x)$ и табличной функции $f(x)$ их производные высших порядков могут не иметь ничего общего друг с другом. Подключим представления о реальных процессах, происходящих при движении биомеханической системы.

Неравенство угловых ускорений $\ddot{Q}_3 \neq \ddot{Q}_3^{\text{ж}}$ означает, по сути дела, неравенство угловых скоростей $\dot{Q}_3 \neq \dot{Q}_3^{\text{ж}}$, с которыми вращается третье звено в условиях упругой и жесткой опор. В свою очередь неравенство угловых скоростей однозначно приведет к тому, что даже при движении из одинаковых положений, т.е. при $Q_3 = Q_3^{\text{ж}}$, в следующий момент времени звено получит изменение угловой координаты на разную величину. Поэтому в рассматриваемом случае можно утверждать, что, так как согласно сделанным выводам неравны вторые производные от функций, то неравны и сами функции. В результате для остальных угловых параметров кинематики получим неравенства вида (5.65)

$$\dot{Q}_3 \neq \dot{Q}_3^{\text{ж}}, \quad Q_3 \neq Q_3^{\text{ж}}. \quad (5.73)$$

Мы доказали влияние спортивного снаряда на угловые параметры кинематики биомеханической системы при естественном движении. Вывод выполнен с использованием моделей для третьего звена и упругой опоры в виде двух пружин. Это наименее трудоемкий путь. Но раз гипотеза о влиянии спортивного снаряда на величину угловых параметров движения звеньев подтверждается для третьего звена, то она

справедлива и для всех остальных. В общем виде имеем:

$$Q_i \neq Q_i^{\text{ж}}, \dot{Q}_i \neq \dot{Q}_i^{\text{ж}}, \ddot{Q}_i \neq \ddot{Q}_i^{\text{ж}}. \quad (5.74)$$

Теперь можно указать на *необходимость использования отличающегося друг от друга обозначения угловых (обобщенных) координат для биомеханической системы в условиях упругой и жесткой опор, чтобы избежать путаницы, так как это разные параметры.*

5.7 Трение в кинематической паре «рука – опора»

Ранее в качестве допущения было принято, что все шарниры биомеханической системы, включая и опорные, являются *идеальными*, т.е. трением в них пренебрегали. Это позволяет создать достаточно работоспособные модели силового анализа, хотя и в неполной мере отражающие действительную картину взаимодействия биомеханической системы и спортивного снаряда.

Многими исследователями отмечалась сложность задачи учета трения в суставах человека [76, 77, 89]. В рамках данной работы оно исследовано не будет. Отметим лишь его малую величину и относительно сложный характер. Определено [89], что коэффициент трения в суставе здорового человека составляет 0,001–0,03. Это очень малые значения. Природа создает устройства, более совершенные, чем придумывает человек. Например, коэффициент трения в гидродинамических и прецизионных подшипниках качения существенно выше. Установлено, что гидродинамический эффект, позволяющий полностью разделить кости в суставе за счет слоя смазки, не может объяснить столь малые величины, так как относительная скорость скольжения между поверхностями костей никогда не превышает нескольких сантиметров в секунду. А это слишком мало для создания разделяющего смазочного слоя. Поэтому дополнительно были предложены теории граничной смазки, просачивания и упругодинамической смазки. Эти механизмы являются основными в действии смазки. Дополнительной формой смазки является сдавливание пленки между сочленяющимися хрящами. Это сдавливание противодействует относительному сближению костных поверхностей, особенно при малой толщине пленки (~0,25 мкм).

По поводу трения в контакте биомеханической системы и спортивного снаряда отметим, что исследовать эту проблему хотя бы в первом приближении просто необходимо. Причина в том, что управляемое движение в условиях опоры без трения невозможно. Это показывают уравнения движения, записанные для случая целенаправленного движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры [56].

При описании процессов фрикционного взаимодействия человека и спортивного снаряда применим ряд упрощенных моделей.

В разделах механики, занимающихся исследованием механизмов и машин, имеются устройства, которые могут служить если и не в качестве аналогов, то, по крайней мере, в качестве отправных точек для наших исследований трения. Это всевозможные подшипники скольжения, изучаемые в деталях машин [66, 130], теории механизмов и машин [9, 81-83] и в триботехнике [89]. В этом же ряду находятся тормоза и ременные передачи.

Введем ограничения. Считаем, что:

1. объемные деформации спортивного снаряда (опоры) пренебрежимо малы по сравнению с объемными деформациями тела (руки);
2. площадь контакта в паре «рука – опора» в общем случае является величиной переменной;
3. деформации контр-тела (руки) упругие;
4. сила трения имеет молекулярно-механическую природу;
5. сила трения равномерно распределена по ширине ладони;
6. фрикционное взаимодействие руки с опорой происходит в отсутствии смазки.

В работе [9] рассмотрено трение во вращательной кинематической паре в условиях сухого трения. Принятые допущения по трению в паре «рука – опора» несколько отличаются от допущений, используемых при анализе трения в теории механизмов и машин, но сам подход является весьма полезным и его можно взять на вооружение.

На опору в шарнире со стороны каждой руки действует реакция $R_{01}^{II_i}$ (рис. 5.13, а). Так как имеем два таких шарнира³³, то возникающие реакции обозначим как $R_{01}^{II_1}$ и $R_{01}^{II_2}$. Здесь II_1 и II_2 – это кинематические пары, т.е. шарниры. Они показаны на рисунке 5.13, б.

³³ По количеству рук.

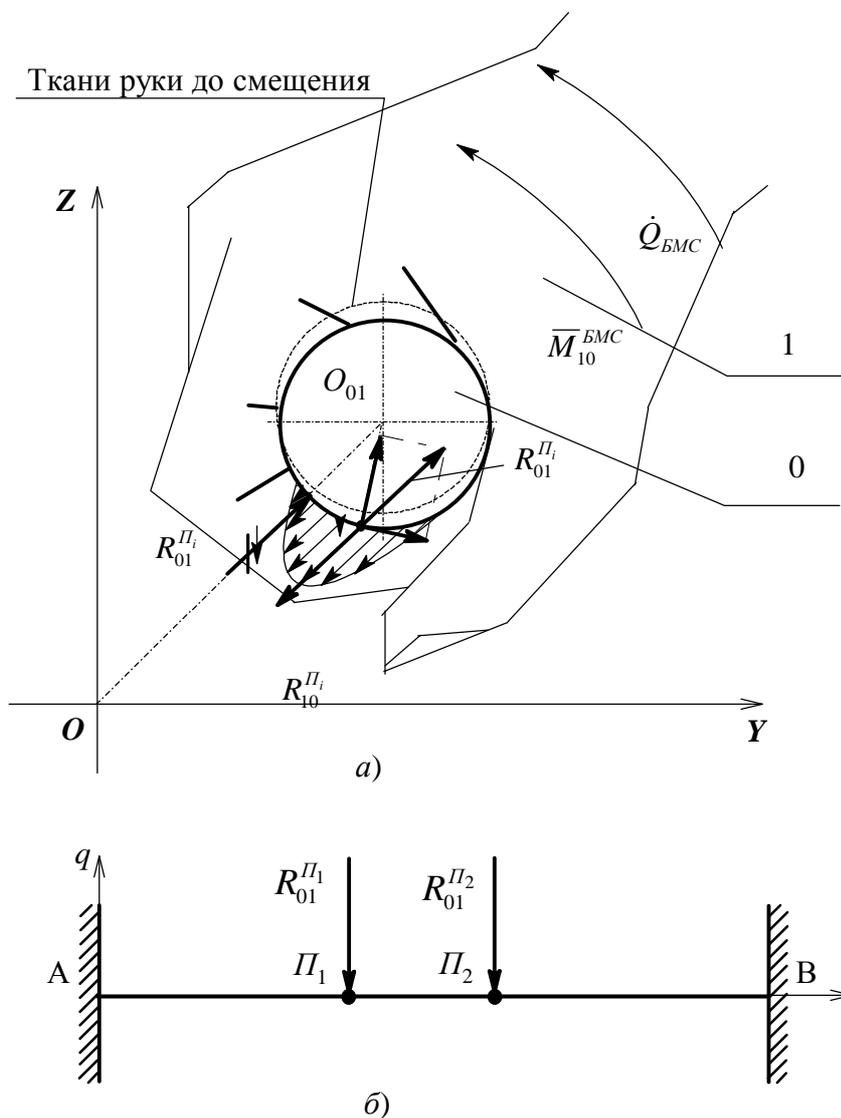


Рисунок 5.13 – Рука на опоре: а) поперечное сечение балки; б) хват двумя руками

В общем случае, когда не надо конкретизировать пару, реакцию будем записывать с верхним индексом II_i . Те же цифровые индексы относятся и к соответствующим параметрам трения. Для анализа возьмем общий случай, считая реакции и трение в шарнирах «рука – опора» различными. Также отметим, что опорные реакции вращаются из-за вращения самой биомеханической системы, вызывая обращение спортивного снаряда.

Реакции в каждом опорном шарнире компенсированы $R_{10}^{II_i} = -R_{01}^{II_i}$. Здесь $R_{10}^{II_i}$ есть сила, действующая со стороны опоры 0 на руку спортсмена 1 в шарнире Π_i , а реакция $R_{01}^{II_i}$ – результат действия руки 1 на опору 0 в том же шарнире. Рассматривая направление сил, легко убедиться, что реакции связей $R_{01}^{II_i}$ действуют на балку со стороны вогнутости упругой

линии – ведь именно они и вызывают этот прогиб. А как же иначе?

Направление сил трения найдем следующим образом: пусть рука вращается против часовой стрелки с угловой скоростью \dot{Q}_{1_i} (рис. 5.14, а). В ту же сторону по касательной к опоре направлены и линейные скорости \bar{v}_k точек k , принадлежащих руке. Сила трения является распределенной силой. Для начала примем, что ее равнодействующая $F_{10}^{mp_i}$ находится в точке B_1 . Направлена она будет против скорости \bar{v}_{B_1} (рис. 5.14, б).

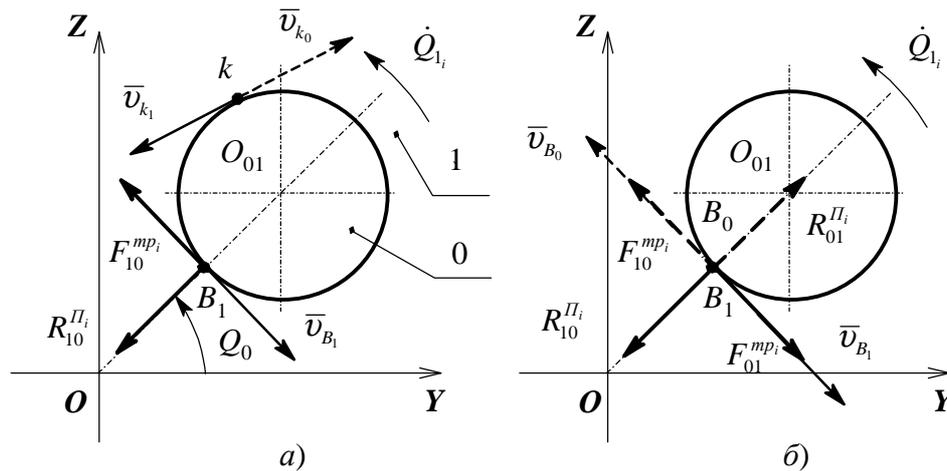


Рисунок 5.14 – Направление сил трения в опорном шарнире:

а) для точек руки 1; б) для точек опоры 0

Если необходимо определить, в каком направлении действует сила $F_{01}^{mp_i}$, приложенная к спортивному снаряду, то надо рассмотреть движение опоры 0 относительно рук 1. Для этого сообщим обоим телам скорость $-\dot{Q}_{1_i}$, противоположную \dot{Q}_{1_i} , что отразится и на линейных скоростях. Рука 1 станет неподвижной, а точка B_0 , контактирующая с B_1 и ранее неподвижная, вместе с опорой 0 начнет двигаться относительно рук 1, имея линейную скорость $-\bar{v}_{B_1}$. Следовательно, сила трения $F_{01}^{mp_i}$ будет направлена в сторону, противоположную скорости $-\bar{v}_{B_1}$. Силы трения $F_{10}^{mp_i}$ и $F_{01}^{mp_i}$ равны между собой по модулю и имеют противоположные направления.

Таким образом, сила трения всегда имеет направление, противоположное относительной скорости движения [9].

Указано [9, 87], что при изучении явления сухого трения во вращательной кинематической паре пользуются различными гипотезами о законах распределения нагрузки на поверхности элементов этой

пары³⁴. Но у них есть общий недостаток – отсутствует достаточное количество экспериментального материала по вопросам распределения давления. Поэтому вывод ограничивается простейшими формулами, сделанными на основе элементарнейших предположений, схематизирующих явление.

Представим расчетную схему на рисунке 5.15.

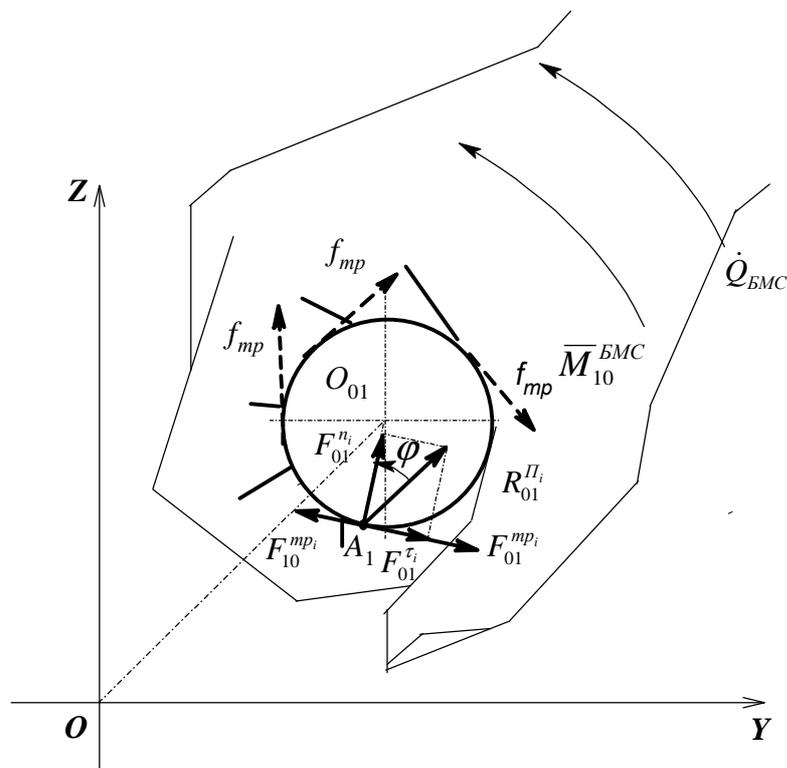


Рисунок 5.15 – Смещение опорной реакции

Силовые возможности и конструктивные особенности руки таковы, что боковой зазор между нею и опорой отсутствует³⁵. Тем не менее, его роль играет податливость тела. Поэтому предположим, что, как и в случае с подшипниками скольжения, но только вследствие податливости тканей руки, реакция $R_{01}^{II_i}$ смещается параллельно самой себе (и реакции $R_{10}^{II_i}$) и оказывается в точке A_1 из-за «набегания» руки на опору (рис. 5.15). Установленные при изучении механизмов и машин закономерности трения таковы, что реакция $R_{01}^{II_i}$ должна быть отклонена от нормали на угол

³⁴ Гипотеза Вейсбаха о постоянных давлениях, гипотеза Рейе о постоянных износах и пр.

³⁵ В отличие от радиальных подшипников скольжения, кисть человека не является жесткой конструкцией ни по материалу, ни по устройству. А, кроме того, за счет управления мышцами имеется возможность прижимать руку к опоре, убирая зазор.

трения φ_i , и величина силы трения $F_{01}^{mp_i}$ получается равной

$$F_{01}^{mp_i} = f_{mp_i} F_{01}^{n_i} = f_{mp_i} R_{01}^{\Pi_i} \cos \varphi_i. \quad (5.75)$$

где f_{mp_i} - коэффициент трения скольжения в i -ом опорном шарнире.

Здесь f_{mp_i} есть коэффициент трения для плоских поверхностей из того же материала. Нормальная составляющая $F_{01}^{n_i}$ реакции $R_{01}^{\Pi_i}$ по рисунку 5.15 равна

$$F_{01}^{n_i} = R_{01}^{\Pi_i} \cos \varphi_i. \quad (5.76)$$

Обозначение нормальной $F_{01}^{n_i}$ и касательной $F_{01}^{z_i}$ составляющих специально изменено на букву F вместо R , так как в уравнение входит не общая реакция на опоре R_{01} , а реакция $R_{01}^{\Pi_i}$ в одном из двух шарниров Π_i . Подобный шаг позволяет в дальнейшем избежать путаницы, разграничивая общую опорную реакцию и реакции в отдельных шарнирах «рука – опора» и их проекции.

Для использования в дальнейшем разрабатываемых моделей необходимо помнить, что силы трения и их моменты, приложенные к руке и опоре, равны и противоположно направлены:

$$F_{10}^{mp_i} = -F_{01}^{mp_i}, \quad M_{10}^{mp_i} = -M_{01}^{mp_i}. \quad (5.77)$$

Движущий момент, приложенный к руке \overline{M}_{10}^{BMC} , уравнивается моментом трения $M_{10}^{mp_i}$. Найдем моменты, действующие на опору со стороны спортсмена:

$$M_{01}^{BMC} = R_{01}^{\Pi_i} \frac{d}{2} \sin \varphi_i, \quad (5.78)$$

$$M_{01}^{mp_i} = F_{01}^{mp_i} \frac{d}{2} = f_{mp_i} R_{01}^{\Pi_i} \frac{d}{2} \cos \varphi_i = R_{01}^{\Pi_i} \rho_i. \quad (5.79)$$

Приравняв моменты, получим

$$f_{mp_i} R_{01}^{\Pi_i} \frac{d}{2} \cos \varphi_i = R_{01}^{\Pi_i} \frac{d}{2} \sin \varphi_i = R_{01}^{\Pi_i} \rho_i, \quad (5.80)$$

где ρ_i - радиус круга трения.

$$\rho_i = \frac{d}{2} \sin \varphi_i.$$

Указано [9, 83], что если из центра O_{01} описать радиусом ρ окружность (рис. 5.16), то реакция R_{01}^{II} окажется направленной по касательной к этой окружности. Получившийся круг радиуса ρ называется *кругом трения*.

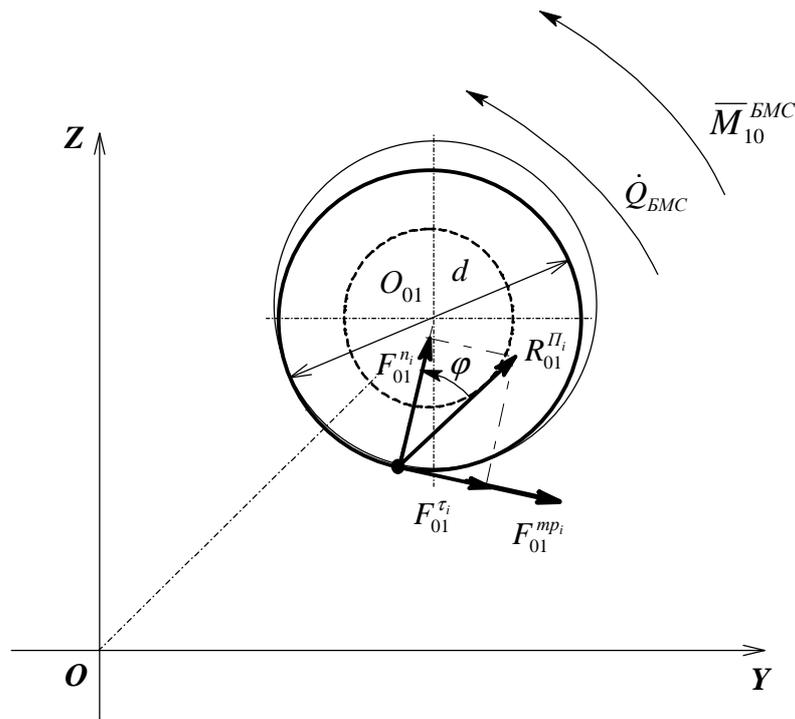


Рисунок 5.16 – Круг трения

Считается, что углы трения малы, поэтому можно принять $\sin \varphi_i \approx \operatorname{tg} \varphi_i$. На наш взгляд, данное положение применительно к кинематической паре «рука – опора» нуждается в дополнительной проверке, тем более, что для компенсации потоотделения и соответственно для увеличения трения применяются специальные присыпки³⁶. Но в качестве первого приближения данное утверждение можно принять. Учитывая известное соотношение $f_{mp} = \operatorname{tg} \varphi$ для плоских поверхностей [9, 72, 87, 116],

запишем приближенное значение радиуса круга трения как $\rho_i = \frac{d}{2} f_{mp_i}$.

При силовом анализе биомеханической системы, определении деформации опоры и расчете уравнения движения, записанного относительно спортивного снаряда, удобнее считать опорную реакцию

³⁶ Современным средством является магнезия.

$R_{01}^{II_i}$ проходящей через центр O_{01} . Тогда надо дополнительно учесть момент сил трения $M_{01}^{mp_i}$ во вращательной паре:

$$M_{01}^{mp_i} = R_{01}^{II_i} \frac{d}{2} f'_{mp_i}, \quad (5.81)$$

где d - диаметр цилиндрического элемента вращательной пары;
 f'_{mp_i} - коэффициент трения во вращательной паре.

Сила трения $F_{01}^{mp_i}$ необходима для более точного расчета деформации спортивного снаряда при теоретическом нахождении его прогибов, а момент $M_{01}^{mp_i}$ вычисляется по уравнениям целенаправленного движения и через него можно найти ряд параметров трения, если перемещения опоры при изгибе определялись экспериментально.

На рисунке 5.17 показан случай вращения спортсмена по часовой стрелке и возникающие при этом в опорной кинематической паре силы. Момент \bar{M}_{10}^{BMC} и сила $R_{01}^{II_i}$ действуют на разные тела.

Для формулы (5.81) коэффициент трения f'_{mp_i} находится экспериментально для различных условий работы. Он носит еще одно название – приведенный коэффициент трения [87]. В работе [81] указано, что для случая внутреннего касания цилиндрических поверхностей коэффициенты трения получаются больше, чем для плоских поверхностей, приблизительно на 30%. К этому замечанию необходимо отнестись достаточно критично, так как данные относятся, скорее всего, к металлам. Ряд теорий, изложенных в работах [9, 87] для вращательных пар, дают приведенный коэффициент трения в пределах $(1,27 - 1,57)f_{mp}$. Это тоже спорная для нас цифра, так как не учитывает специфику контакта живого организма со снарядом. Тем не менее, тенденция хорошо видна.

Запишем проекции силы трения через проекции опорной реакции в шарнире. При этом необходимо рассмотреть два возможных случая движения биомеханической системы относительно опоры.

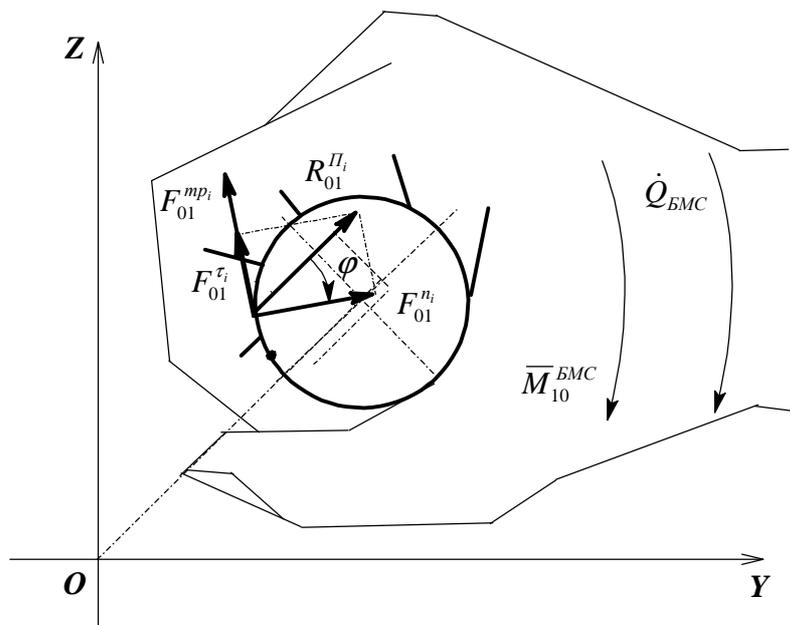


Рисунок 5.17 – Силы в шарнире "рука – опора" в случае вращения спортсмена по часовой стрелке

На рисунке 5.18, *а* показан случай вращения рук против часовой стрелки. Выполняется условие $\dot{Q}_{l_i} > 0$. На рисунке 5.18, *б* выполняется условие $\dot{Q}_{l_i} < 0$, так как руки вращаются по часовой стрелке. Точка приложения реакции $R_{01}^{\Pi_i}$ смещается в зависимости от направления вращения.

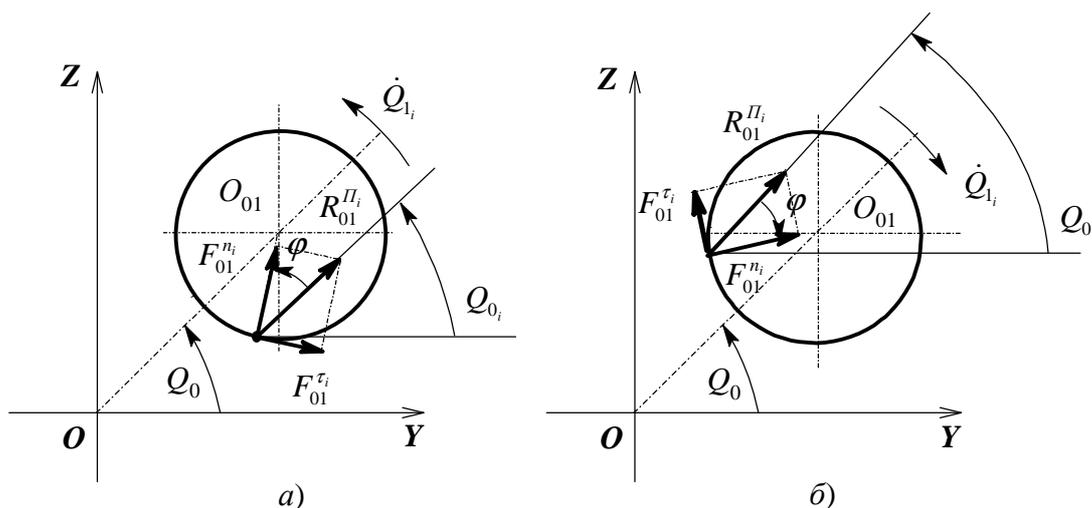


Рисунок 5.18 – Правило знаков для угла трения: а) положительное – при вращении БМС против часовой стрелки; б) отрицательное – при вращении БМС по

Проекции нормальной силы $F_{01}^{n_i}$ по рисунку 5.18, а при $\dot{Q}_{l_i} > 0$ определим как

$$F_{01Y}^{n_i} = F_{01}^{n_i} \cos(Q_{0_i} + \varphi_i), \quad F_{01Z}^{n_i} = F_{01}^{n_i} \sin(Q_{0_i} + \varphi_i). \quad (5.82)$$

Запишем угол, используемый для определения проекций на соответствующие оси как $\gamma_i = Q_{0_i} + \varphi_i$.

При $\dot{Q}_{l_i} < 0$ и угле $\gamma_i = Q_{0_i} - \varphi_i$ по рисунку 5.18, б получим:

$$F_{01Y}^{n_i} = F_{01}^{n_i} \cos(Q_{0_i} - \varphi_i), \quad F_{01Z}^{n_i} = F_{01}^{n_i} \sin(Q_{0_i} - \varphi_i). \quad (5.83)$$

В уравнениях использовано правило знаков, показанное на рисунках 5.18, а, б. Для подстановки в эти выражения нормальной силы $F_{01}^{n_i}$ по формуле (5.76) необходимо значение реакции $R_{01}^{II_i}$ в шарнире «рука – опора». Удобнее ее выразить через проекции по рисунку 5.19, а для случая вращения рук по часовой стрелке и по рисунку 5.19, б для случая вращения против часовой стрелки как

$$R_{01}^{II_i} = \frac{R_{01Y}^{II_i}}{\cos Q_{0_i}} = \frac{R_{01Z}^{II_i}}{\sin Q_{0_i}}. \quad (5.84)$$

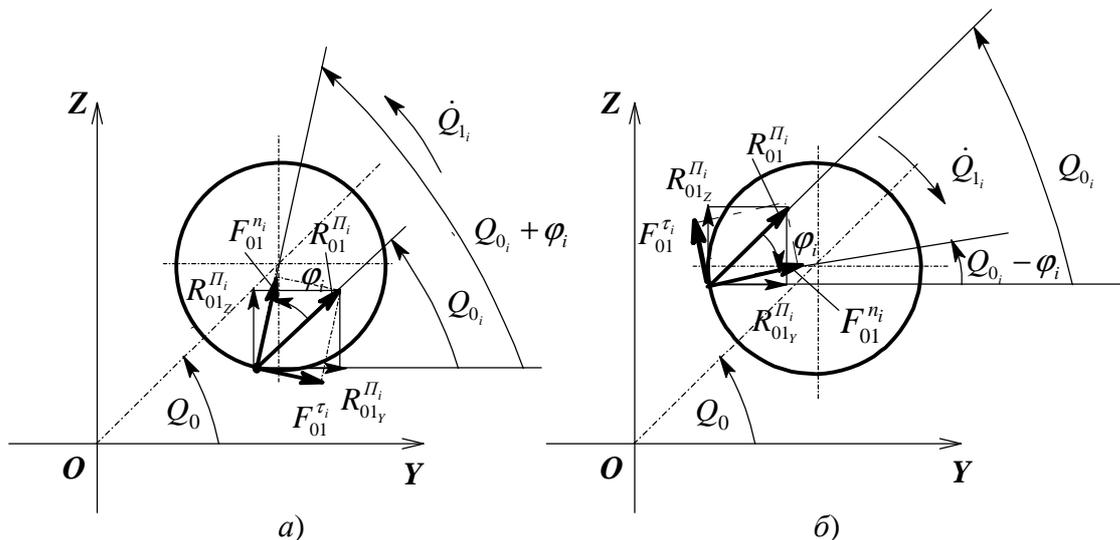


Рисунок 5.19 – Опорная реакция и ее проекции

После подстановки получим:

- при $\dot{Q}_{l_i} > 0$

$$F_{01Y}^{n_i} = \frac{R_{01Y}^{II_i} \cos \varphi_i}{\cos Q_{0_i}} \cos(Q_{0_i} + \varphi_i) \text{ или } F_{01Y}^{n_i} = \frac{R_{01Z}^{II_i} \cos \varphi_i}{\sin Q_{0_i}} \cos(Q_{0_i} + \varphi_i),$$

$$F_{01Z}^{n_i} = \frac{R_{01Z}^{II_i} \cos \varphi_i}{\sin Q_{0_i}} \sin(Q_{0_i} + \varphi_i) \text{ или } F_{01Z}^{n_i} = \frac{R_{01Y}^{II_i} \cos \varphi_i}{\cos Q_{0_i}} \sin(Q_{0_i} + \varphi_i);$$

(5.85)

- при $\dot{Q}_{1_i} < 0$

$$F_{01Y}^{n_i} = \frac{R_{01Y}^{II_i} \cos \varphi_i}{\cos Q_{0_i}} \cos(Q_{0_i} - \varphi_i) \text{ или } F_{01Y}^{n_i} = \frac{R_{01Z}^{II_i} \cos \varphi_i}{\sin Q_{0_i}} \cos(Q_{0_i} - \varphi_i),$$

$$F_{01Z}^{n_i} = \frac{R_{01Z}^{II_i} \cos \varphi_i}{\sin Q_{0_i}} \sin(Q_{0_i} - \varphi_i) \text{ или } F_{01Z}^{n_i} = \frac{R_{01Y}^{II_i} \cos \varphi_i}{\cos Q_{0_i}} \sin(Q_{0_i} - \varphi_i).$$

(5.86)

Можно уменьшить количество моделей за счет выбора направления отсчета угла φ_i . Согласно рисунку 5.19, а при $\dot{Q}_{1_i} > 0$ имеем $+\varphi_i$, а по рисунку 5.19, б при $\dot{Q}_{1_i} < 0$ угол принимает значение $-\varphi_i$. Тогда в уравнения подставляются углы φ_i со своим знаком. Общие выражения имеют вид (5.85).

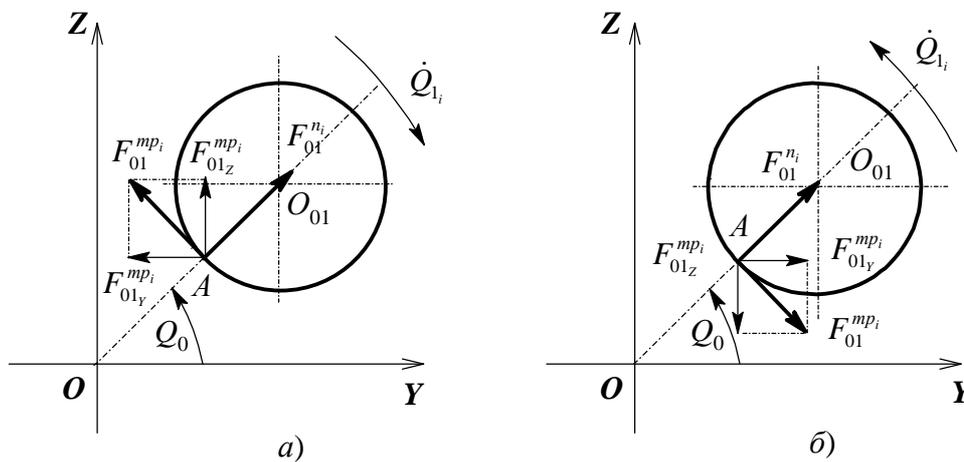


Рисунок 5.20 – Силы в опорном шарнире без смещения: а) вращение руки по часовой стрелке; б) против часовой стрелки

По поводу знаков проекций силы трения необходимо отметить следующее: в работе [77] показано, что коэффициенты трения для проекций силы трения в плоской декартовой прямоугольной системе

координат всегда имеют разные знаки. Это правило можно записать как $\pm f_{mp_i}$.

Приведем для иллюстрации этой зависимости расчетные схемы на рисунках 5.20, а, б. Их особенностью является тот факт, что реакция связи, действующая на опору, показана без смещения относительно точки А, которую назовем *точкой несмещенного нагружения*. Мы же приняли гипотезу о параллельном смещении опорных реакций $R_{01}^{II_i}$ в каждой руке относительно точки А.

Проекции силы трения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} F_{01Y}^{mp_i} &= \pm f_{mp_i} F_{01Z}^{n_i}, \\ F_{01Z}^{mp_i} &= \mp f_{mp_i} F_{01Y}^{n_i}. \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

Здесь возможно два варианта: $\pm f_{mp_i}$ и $\mp f_{mp_i}$. Выбор конкретного знака зависит от направления вращения рук спортсмена. При расчетах необходимо помнить, что противоположность знаков относится к коэффициентам трения, а не к проекциям $F_{01Y}^{mp_i}$ и $F_{01Z}^{mp_i}$. Подставляя в уравнения (5.87) проекции $F_{01Y}^{n_i}$ и $F_{01Z}^{n_i}$ со своими знаками, получим конкретные значения сил как совпадающие по знаку, так и противоположные.

На рисунках 5.20, а, б видно, что используемая для определения проекций силы трения нормальная составляющая опорной реакции $F_{01}^{n_i}$ всегда направлена по радиусу исследуемого шарнира. Поэтому выводы о противоположности знаков коэффициента трения при расчете проекций сил трения подтверждаются и для случая параллельного переноса реакции.

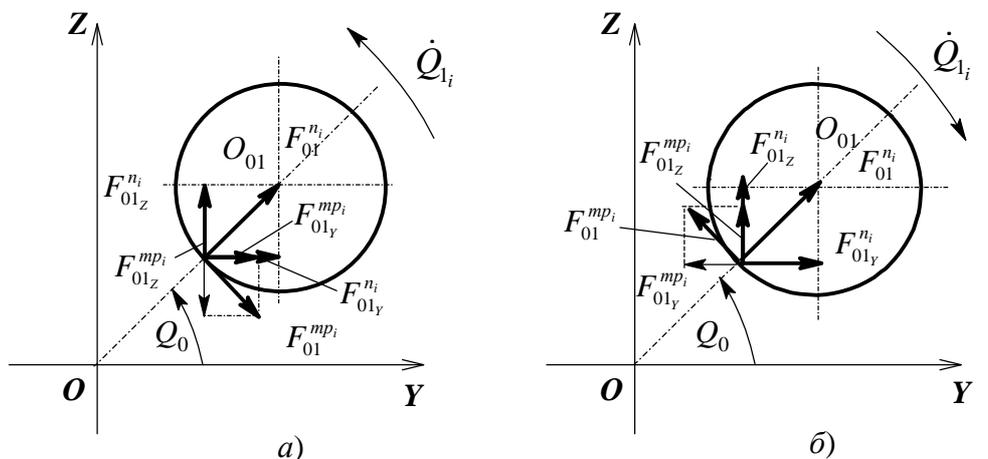


Рисунок 5.21 – Проекция сил трения при вращении рук:

а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке

Найдем соответствие между направлением вращения рук относительно спортивного снаряда и применяемой системой знаков для коэффициента трения (рис. 5.21, а, б). По рисунку 5.21, а при $\dot{Q}_{1_i} > 0$ получим проекции силы трения в виде

$$\begin{aligned} F_{01_Y}^{mp_i} &= (+ f_{mp_i})(+ F_{01_Z}^{n_i}) = f_{mp_i} F_{01_Z}^{n_i}, \\ F_{01_Z}^{mp_i} &= (- f_{mp_i})(+ F_{01_Y}^{n_i}) = -f_{mp_i} F_{01_Y}^{n_i}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Имеем вариант $\pm f_{mp_i}$ соответственно для проекций на оси OY/OZ . В случае действия реакции на опору со стороны биомеханической системы в любом другом квадранте полученное правило для знаков остается таким же.

По рисунку 5.21, б при $\dot{Q}_{1_i} < 0$ имеем проекции силы трения в виде

$$\begin{aligned} F_{01_Y}^{mp_i} &= (- f_{mp_i})(+ F_{01_Z}^{n_i}) = -f_{mp_i} F_{01_Z}^{n_i}, \\ F_{01_Z}^{mp_i} &= (+ f_{mp_i})(+ F_{01_Y}^{n_i}) = f_{mp_i} F_{01_Y}^{n_i}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Здесь реализуется вариант $\mp f_{mp_i}$ соответственно для проекций на оси OY/OZ при осуществлении контакта в любом квадранте. Занесем данные в таблицу 5.1.

Таблица 5.1

Правило знаков проекций силы трения

Направление вращения рук	Коэффициент трения скольжения для осей OY/OZ	Проекция силы трения
$\dot{Q}_{1_i} > 0$	$\pm f_{mp_i}$	$F_{01_Y}^{mp_i} = f_{mp_i} F_{01_Z}^{n_i},$ $F_{01_Z}^{mp_i} = -f_{mp_i} F_{01_Y}^{n_i}$
$\dot{Q}_{1_i} < 0$	$\mp f_{mp_i}$	$F_{01_Y}^{mp_i} = -f_{mp_i} F_{01_Z}^{n_i},$ $F_{01_Z}^{mp_i} = f_{mp_i} F_{01_Y}^{n_i}$

Еще раз подчеркнем, что знаки проекций силы трения, приложенной к спортивному снаряду, определяются по направлению вращения рук спортсмена.

Подставим в уравнения (5.87) выражения (5.85) с учетом правила знаков коэффициента трения. Имеем:

$$F_{01Y}^{mp_i} = \pm f_{mp_i} F_{01Z}^{n_i} = \pm f_{mp_i} \frac{R_{01Z}^{II_i} \cos \varphi_i}{\sin Q_{0_i}} \cos(Q_{0_i} + \varphi_i)$$

ИЛИ

$$F_{01Y}^{mp_i} = \pm f_{mp_i} \frac{R_{01Y}^{II_i} \cos \varphi_i}{\cos Q_{0_i}} \cos(Q_{0_i} + \varphi_i),$$

$$F_{01Z}^{mp_i} = \mp f_{mp_i} F_{01Y}^{n_i} = \mp f_{mp_i} \frac{R_{01Y}^{II_i} \cos \varphi_i}{\cos Q_{0_i}} \sin(Q_{0_i} + \varphi_i)$$

ИЛИ

$$F_{01Z}^{mp_i} = \mp f_{mp_i} \frac{R_{01Z}^{II_i} \cos \varphi_i}{\sin Q_{0_i}} \sin(Q_{0_i} + \varphi_i). \quad (5.90)$$

В полученные выражения **все параметры подставляются со своими знаками**.

Полную величину силы трения в шарнире «рука – опора» найдем как

$$F_{01}^{mp_i} = \sqrt{(F_{01Y}^{mp_i})^2 + (F_{01Z}^{mp_i})^2}. \quad (5.91)$$

На самом деле фрикционное взаимодействие биомеханической системы и спортивного снаряда носит более сложный характер. Так, следует отметить вероятное перераспределение давления в контакте человека с опорой. Причем на данной стадии исследования сложно судить о законе, которому подчиняется это давление. В качестве примера приведем решение контактной задачи теории упругости о сжатии цилиндрических поверхностей с близкими радиусами [43]. Закон распределения давления по контактной поверхности приближенно, но с достаточной для практики точностью, аппроксимируют параболической зависимостью:

$$p_\varphi = p_0 \cos^2 \varphi_{o\sigma}, \quad (5.92)$$

где p_φ – давление в любой точке контактной поверхности, определяемой углом $\varphi_{o\sigma}$, отсчитываемым от линии действия усилия;
 p_0 – давление при $\varphi_{o\sigma} = 0$.

В случае действия радиальной силы R суммарная сила трения и ее момент определяются как

$$F_{mp} = mf_{mp} R, \quad M_{mp} = mf_{mp} R \frac{d}{2}, \quad (5.93)$$

где m – коэффициент, зависящий от угла обхвата $\varphi_{об_0}$ и коэффициента трения $f_{тр}$.

Покажем параболическую зависимость на рисунке 5.22. Конечно же, использовать формулы (5.93) и методики определения коэффициента m для случая, когда одно из контр-тел является эластичным, неправомочно. Мы лишь показали непростой характер взаимодействия двух тел, в определенной степени подобных нашей задаче, по геометрическим признакам.

Отметим, что мягкие ткани руки являются податливой средой, поэтому возможно образование валика перед контактной зоной. Валик значительно влияет на трение. Такое поведение, например, демонстрируют полимерные подшипники качения [121]. Причем для образования валика совсем не обязательно движение в подшипнике – достаточно просто радиальных усилий.

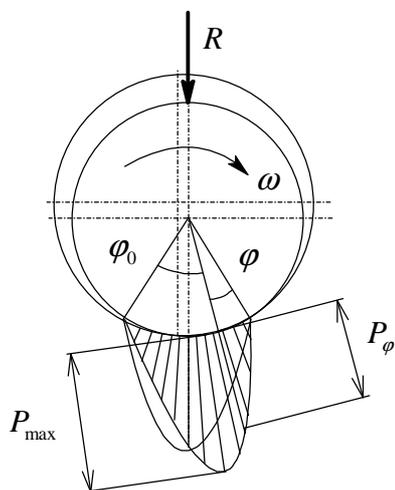


Рисунок 5.22 –
Распределение давления в
контакте

Несомненно, что при контакте руки со спортивным снарядом тоже появляется валик во время движения, так как поверхность руки в большей степени податлива и очень легко деформируется, образуя складки, бугры и валики. В этом легко убедиться самостоятельно, просто согнув ладонь. Использование специальных приспособлений, надеваемых на руки, также может иметь свою специфику с точки зрения трения. Кроме того, в работе условно принято, что ткани руки проявляют только упругие свойства. На самом деле деформационное поведение человеческого тела более сложное, чем

упругое.

Отметим следующие моменты: во-первых, при расчете параметров трения нет необходимости в разделении моделей опоры по количеству пружин. Физическая природа фрикционного контакта такова, что нам необходимо знание угла Q_0 . Безразлично, с помощью каких моделей будет получен данный параметр, но нужен именно он. Если используются две поступательно движущиеся пружины, то угловую координату определяют как

$$Q_0 = \operatorname{arctg} \frac{R_{10z}}{R_{10y}}. \quad (5.94)$$

Во-вторых, контакт спортсмена со снарядом может как локализоваться на ограниченной площадке, так и быть максимально большим, охватывая по периметру всю опору³⁷. Соответственно на этой же площади распределены и силы трения по какому-то закону (конечно же, сложному).

В-третьих, в данном параграфе сделаны выводы с определенными допущениями, т.е. они приближительны, а также обозначены еще не решенные проблемы фрикционного контакта человека со спортивным снарядом.

5.8 Особенности правила знаков в моделях кинематики и динамики

При разработке моделей кинематики и динамики движения биомеханической системы проявляется проблема сочетания действительных направлений исследуемых характеристик движения с их формальным представлением в уравнениях с точки зрения математики. Недопустимо путать эти разные понятия.

Для примера рассмотрим определение знаков проекций силы инерции, присоединенной к первому звену. Анализ выполним для случая движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры, так как это наиболее наглядный и яркий случай, позволяющий понять и решить возникающую проблему.

Положение звена 1 по рисунку 5.23, а) показано в первом квадранте при положительных значениях Y , Z и Q_1 . Уравнения для проекций центра масс первого звена в условиях упругой опоры, моделируемой вращающейся пружиной, выведены в главе 1 для положительных значений координат. Воспользуемся первыми выражениями из системы уравнений (1.10), приняв для жесткой опоры $L_0 = 0$ и $Q_0 = 0$. Дважды продифференцировав уравнения, получим проекции ускорений по формулам (3.43). При этом учтем отсутствие кинематических параметров опоры.

³⁷ Например, хват рукой за гриф перекладины.

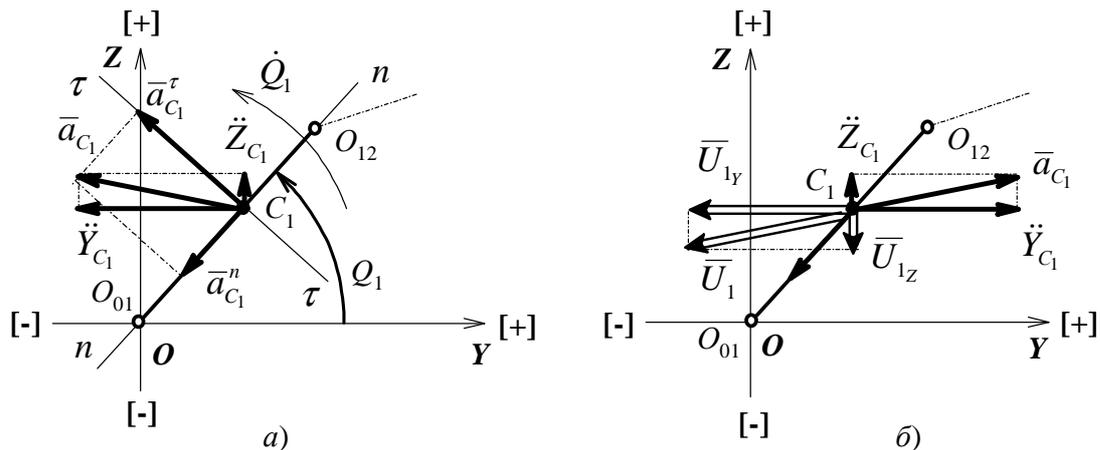


Рисунок 5.23 – Направление проекций ускорения ЦМ звена 1 и присоединенной к нему силы инерции

Действительное направление ускорений показано на рисунке 5.23, *a* исходя из законов механики – нормальное ускорение $\bar{a}_{C_1}^n$ направлено всегда к центру вращения, поэтому оно и показано вектором, действующим от ЦМ первого звена C_1 в сторону опорного шарнира O_{01} . Касательное ускорение ЦМ звена $\bar{a}_{C_1}^\tau$ направлено по касательной к траектории, т.е. перпендикулярно радиусу вращения³⁸, в ту или иную сторону. Конкретное направление зависит от знака углового ускорения \ddot{Q}_1 . На рисунке 5.23, *a* угловое ускорение положительно, так как при выводе всех уравнений мы исходим из их положительного направления, если иное не диктуется законами механики^{**}. Соответственно и проекции ускорений имеют отрицательное значение по оси OY и положительное для оси OZ .

Следуя же формальному описанию параметров движения по уравнениям (1.10), но для движения в условиях жесткой опоры, получим

$$\begin{aligned} Y_{C_1} &= S_1 \cos Q_1, \\ Z_{C_1} &= S_1 \sin Q_1, \end{aligned} \quad (5.95)$$

и по (3.43)

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_{C_1} &= -S_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - S_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1, \\ \ddot{Z}_{C_1} &= S_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - S_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1. \end{aligned} \quad (5.96)$$

³⁸ Таким радиусом вращения является само первое звено.

^{**} Это касается, например, сил и моментов сил трения, которые направляют противоположно движению звена, с каким бы знаком не были его кинематические и динамические параметры движения..

Для первого звена имеем положительные значения как координат ЦМ звена 1, так и проекций его ускорения (рис. 5.23, б). Это именно формальное представление ускорений, которые абстрактно выводим исходя из их положительного направления, о чем свидетельствует знак плюс в левой части уравнений. Подстановка же конкретных значений параметров дает уже реальное положение ускорений, показанных на рисунке 5.23, б. Здесь по первой формуле выражения (5.96) однозначно имеем $\ddot{Y}_{C_1} < 0$.

Соответствующие проекции фиктивной силы инерции, присоединенной к ЦМ первого звена, направляем противоположно положительному значению проекций ускорения центра инерции, т.е. исходя из формального описания и учета знаков по законам математики. Иное представление, т.е. направление сил инерции согласно их физическому представлению, противоположно реально направленным ускорениям, приводит к ошибке: применяемый для выводов в данной работе метод кинестатического анализа не позволяет получить уже существующие на сегодняшний день модели движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры [6, 35, 56, 77], и тем более использовать их для расчета на ПЭВМ. И только рассмотренное правило знаков на основе формального описания моделей через законы математики дает возможность разрешить противоречие.

Таким образом, устанавливаем, что *модели кинематики и динамики формально дают положительные значения параметров, несмотря на их реальную направленность.*

5.9 Движение в кинематической паре «рука – опора» и учет в ней трения

Возникновение трения в кинематических парах «рука – опора» исследовано из предположения, что руки непрерывно скользят по поверхности спортивного снаряда, т.е. без задержки. Но особенность контакта такова, что руки не являются в полной мере аналогом шарнира (подшипника скольжения) – они осуществляют хват не оставляя зазора между телом и металлом, а мышцы могут изменять силу, с которой спортсмен удерживает опору. По этой причине выдвинем две гипотезы о сути движения в контакте «рука – опора»:

1. движение в кинематической паре «рука – опора» при вращении биомеханической системы осуществляется непрерывно;
2. движение в кинематической паре «рука – опора» при вращении биомеханической системы осуществляется скачкообразно.

Последняя гипотеза предполагает наличие режима относительного движения в контакте «рука – опора» и режима фиксации рук на опоре при одновременном движении биомеханической системы. При этом во время

фиксации тело спортсмена начинает вращаться вокруг суставов³⁹. Каждая рука (или ее часть, т.е. звено) и опора превращаются в одно целое (новое звено). Обращение же опоры и движение всей биомеханической системы относительно оси OX основной системы координат сохраняется.

Более подробно изменение количества звеньев биомеханической системы во время движения рассмотрено в главе 12. Здесь же отметим следующее – при прекращении движения в паре «рука – опора» трение на опоре, конечно же, учитываться не должно.

Силу трения можно определить по методике, описанной в работе [9]. Это *метод итераций или метод приближений*. При учете трения порядок расчета заключается в следующем:

1. определяют реакции в шарнирах методами кинестатики без учета трения;
2. зная реакции в шарнирах, находят силы трения по формуле (5.75);
3. составляют уравнение кинестатики с учетом трения и уточняют реакции в шарнирах;
4. вычисляют перемещения опоры при изгибе;
5. повторяют расчет, начиная с п.2. Эти действия выполняют до получения результата с заданной точностью.

Отметим, что метод является приближенным, и применим лишь при сходимости результата, т.е. каждое последующее приближение должно давать меньшее изменение приращения силы, чем предыдущее. Указано [9, 81-83], что для сходимости результата необходимо, чтобы в кинематической паре отсутствовало самоторможение. *Самоторможением* называется случай, когда относительное движение звена в требуемом направлении *не может начаться* независимо от значения движущей силы [82]. Если же система находится в движении, то под действием сил вредных сопротивлений она постепенно будет замедлять свой ход, пока не остановится [9].

Чтобы пояснить термин *вредные сопротивления*, необходимо дать ряд определений. Введем понятие *движущих сил* – это силы, которые стремятся *ускорить* движение биомеханической системы, или иначе – это силы, приложенные к звеньям БМС, совершающие *положительную работу*.

Силами сопротивления будем называть силы, стремящиеся замедлить движение биомеханической системы, или иначе – это те силы, приложенные к звеньям БМС, которые совершают отрицательную работу.

Силами полезного сопротивления считаем те силы сопротивления, преодоление которых необходимо для выполнения требуемого движения (спортивного упражнения) [9].

³⁹ Это парные суставы, например, лучезапястные, локтевые и пр.

Силами вредного сопротивления будем называть те силы сопротивления, на преодоление которых *затрачивается дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления полезного сопротивления*

Отметим условность в разделении сил. Например, силы тяжести звеньев при подъеме их центров масс оказываются силами сопротивления, а при опускании центров масс – силами движущими. Управляющие силы мышечного аппарата человека в зависимости от выполняемой работы могут быть как силами движущими, так и силами сопротивления.

5.10 Распределение опорной реакции между руками

Модели для определения опорной реакции \bar{R}_{01} , полученные в данной главе, дают суммарное значение сил, возникающих в контакте биомеханической системы с опорой.

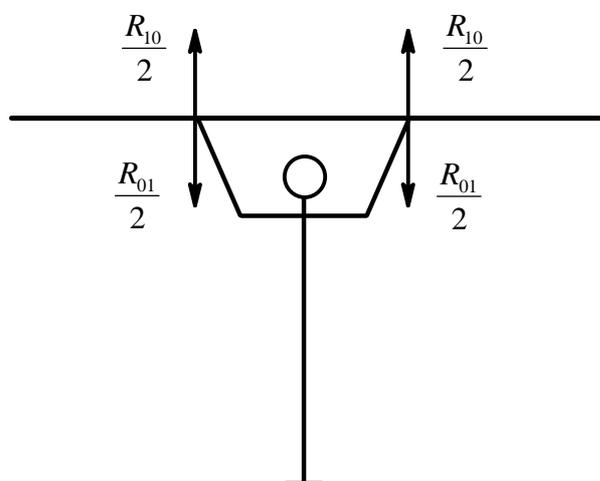


Рисунок 5.25 – Силовое взаимодействие спортсмена с жесткой опорой

Если контакт представляет собой две кинематические пары «рука – опора», то необходимо полную реакцию \bar{R}_{01} распределить между руками.

В работе [75] показана схема распределения сил в контакте гимнаста с перекладиной аналогично рисунку 5.24. Примем ее в качестве принципиальной. Так как спортивный снаряд, на самом деле являясь упругой опорой, в общем случае получает разные перемещения

под левой и правой руками, то звенья биомеханической цепи⁴⁰ должны подстроиться под новые координаты контактов рук с опорой. Необходимо выявить влияние данного факта на величину сил, с которыми гимнаст действует на гриф перекладины.

⁴⁰ Имеется в виду левая и правая сторона тела как отдельные части всей биомеханической системы.

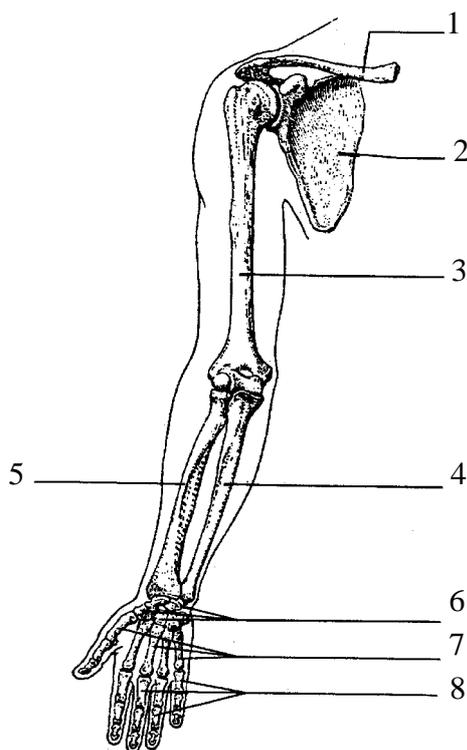


Рисунок 5.25 – Скелет верхней конечности:

1 – ключица; 2 – лопатка; 3 – плечевая кость; 4 – локтевая кость; 5 – лучевая кость; 6 – кости запястья; 7 – кости пястья; 8 – кости пальцев кисти

друга.

Строение скелета верхних конечностей показано на рисунке 1.9 и рисунке 5.25.

Представим одну из гипотез о совместной работе правой и левой частей пояса верхних конечностей на рисунках 5.26, а, б.

Будем считать, что обе половины верхнего пояса работают как одно целое, представляя собой одно звено, т.е. жесткое тело. Их совместное движение при изгибе опоры показано на рисунках 5.26, а, б.

На рисунке 5.26, а показан случай, когда хват осуществлен параллельными руками. Образуется прямоугольник $ABDE$. Тело находится в вертикальном положении, поэтому линия действия опорной реакции \bar{R}_{01} проходит через точку C , делящую отрезок AB пополам.

Для дальнейшего анализа более подробно рассмотрим скелет человека. Конкретно нас интересует скелет верхних конечностей, в котором выделяют пояс и свободный отдел. Пояс верхних конечностей состоит из двух парных костей: ключицы и лопатки. Скелет свободной верхней конечности включает плечевую кость, кости предплечья (лучевую и локтевую) и кости кисти [20, 100, 126]. Такое строение пояса позволяет рукам двигаться и оказывать силовое воздействие независимо друг от друга.

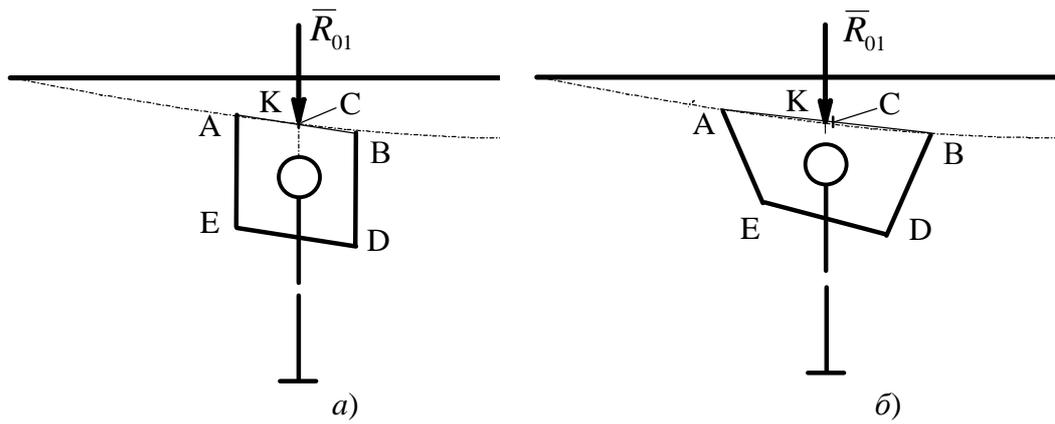


Рисунок 5.26 – Работа пояса верхних конечностей, как одного звена, при хвате: а) руки параллельны; б) руки разведены

На рисунке 5.26, б представлен случай хвата непараллельными руками, при этом руки шире плеч. Образуется трапеция $ABDE$. Если длина рук EA и DB не меняется, и они остаются жесткими звеньями, то сохраняется равенство размеров $l_{EA} = l_{DB}$. Подобная трапеция называется равнобочной. При сохранении вертикального положения тела спортсмена линия действия опорной реакции \bar{R}_{01} сместится относительно середины отрезка AB точки C и пересечет точку K .

Преобразуем расчетную схему на рисунке 5.26, а к виду по рисункам 5.27, а, б, переместив опорную реакцию, определяемую кинетостатическим анализом, по линии ее действия из точки C' в точку C .

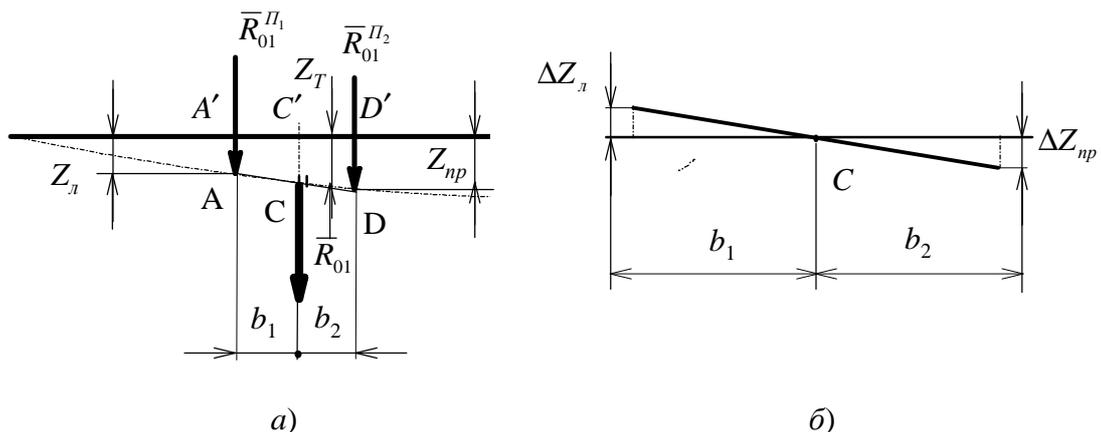


Рисунок 5.27 – Работа пояса верхних конечностей, как жесткого тела, при параллельном хвате: а) расчетная схема; б) поворот плечевого пояса

По рисункам 5.27, а, б руки получают равные линейные вертикальные перемещения, но разных знаков. Левая рука переместилась на величину $\Delta Z_{л}$ вверх по отношению к телу, а правая на $\Delta Z_{пр}$ вниз. Здесь

$$\Delta Z = \Delta Z_{л} = \Delta Z_{пр}. \quad (5.97)$$

Из анализа силовой схемы по рисунку 5.27, а видно, что опорная реакция \bar{R}_{01} распределяется поровну между кинематическими парами «рука – опора» даже в случае наклона линии AB . В этом легко убедиться, составив уравнения равновесия для данной схемы, считая силу \bar{R}_{01} приложенной в точке C , и решив выражения относительно реакций в кинематических парах «рука – опора».

Обозначим реакции в контактах опоры с левой и правой рукой как $\bar{R}_{01}^{II_1}$ и $\bar{R}_{01}^{II_2}$ соответственно. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\bar{F}_{kz}) &= 0, & -R_{01}b_1 - R_{01}^{II_1}(b_1 + b_2) &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_{kz}) &= 0, & R_{01}b_2 + R_{01}^{II_2}(b_1 + b_2) &= 0, \end{aligned} \quad (5.98)$$

где $(b_1 + b_2)$ – база рук B_p .

Решая уравнения относительно неизвестных реакций, получим:

$$\begin{aligned} R_{01}^{II_1} &= \left| \frac{R_{01}b_1}{(b_1 + b_2)} \right| = \left| R_{01} \frac{b_1}{B_p} \right|, \\ R_{01}^{II_2} &= \left| \frac{R_{01}b_2}{(b_1 + b_2)} \right| = \left| R_{01} \frac{b_2}{B_p} \right|. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Так, сила \bar{R}_{01} приложена в точке C условно, и направление реакций в левом и правом опорных шарнирах совпадает с ней, то в уравнениях (5.99) значения взяты по модулю. При выполнении условия $b_1 = b_2 = \frac{B_p}{2}$ следует

$$R_{01}^{II_1} = R_{01}^{II_2} = \frac{R_{01}}{2}. \quad (5.100)$$

Формулы (5.99) показывают, что *распределение общей опорной реакции между шарнирами «рука – опора» зависит только от взаимного расположения тела человека и этих пар, т.е. от соотношения $\frac{b_1}{b_2}$.*

Смещение самой биомеханической системы в месте соединения пояса верхних конечностей с телом равно:

$$Z_T = Z_{\text{л}} + \Delta Z = Z_{\text{пр}} - \Delta Z = \frac{Z_{\text{л}} + Z_{\text{пр}}}{2}. \quad (5.101)$$

Формулы (5.99) справедливы и для случая непараллельного хвата руками. Необходимо лишь предварительно найти смещение $KС$ по рисунку 5.27, б.

По второй гипотезе правая и левая половины пояса верхних конечностей работают отдельно друг от друга. Введем понятие «динамической цепи», используемое в силовом анализе. Оно означает систему последовательно и параллельно соединенных силовых звеньев.

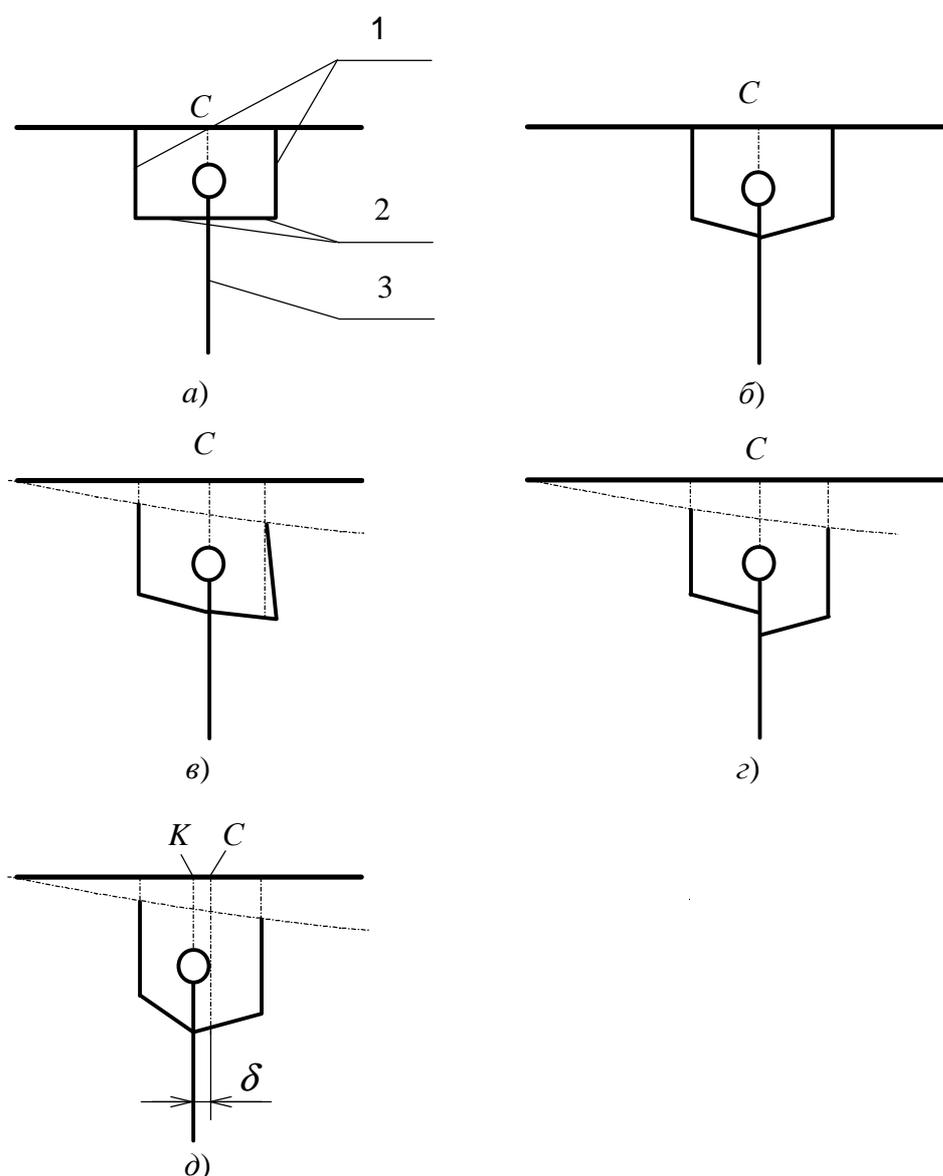


Рисунок 5.28 – Пояс верхних конечностей как две динамические цепи

Представим на рисунках 5.28, *a* – *д* работу пояса верхних конечностей исходя из того, что левая и правая его части есть динамические цепи.

На рисунке 5.28, *a*, *б* руки обозначены цифрой 1, цифрой 2 – пояс верхних конечностей, 3 – это тело спортсмена. Схема 5.28, *a* нарисована в предположении, что левая и правая части пояса верхних конечностей 2 находятся на одной линии, т.е. не повернуты относительно тела 3. На схеме 5.28, *б* правая и левая части 2 повернуты относительно тела 3 под действием сил, приложенных к биомеханической системе. Последний вариант является более вероятным. Его и примем за основу, хотя на самом деле никаких дополнительных выводов в наше решение это не внесет.

На рисунках 5.28, *в* – 5.28, *д* показан ряд возможных вариантов приспособления верхних конечностей к прогибу опоры. Все они сводятся к одному моменту – смещается ли тело спортсмена относительно контакта рук с опорой или нет. А это, в свою очередь, зависит от того, каким способом разница в прогибах опоры под руками 1 компенсируется телом спортсмена. Определяет же данный факт работа ключиц и лопаток 2.

В случае сохранения длины выпрямленных рук одинаковой произойдет или поворот правой руки 1 вместе с правой частью 2 плечевого пояса по рисунку 5.28, *в*, или же более сложное смещение правой части плечевого пояса верхних конечностей. В зависимости от конкретной реализации движения получим или схему по рисунку 5.28, *г* без смещения тела относительно расположения рук на опоре, или же со смещением *δ* по рисунку 5.28, *д*. Отметим условность схемы 5.28, *г*, так как мы не вдаемся в анатомическую возможность смещения правой части пояса верхних конечностей (лопатки и ключицы) способом, показанным на рисунке.

Возможны и другие варианты компенсации различия в прогибах спортивного снаряда под левой и правой руками. При этом расчетная схема будет отличаться от представленных на рисунках. Так, мы не рассматривали разные хваты руками, компенсацию за счет разбиения одного звена на несколько⁴¹ и пр.

Конкретная реализация механизма компенсации разницы в величине прогибов опоры под руками спортсмена требует своего отдельного изучения. Здесь приведены лишь возможные схемы. Но в любом случае, распределение опорной реакции \bar{R}_{01} между кинематическими парами

«рука – опора» все также определяется соотношением $\frac{b_1}{b_2}$ и уравнениями (5.99).

По ряду признаков динамические цепи классифицируются аналогично кинематическим. И те, и другие могут быть простыми и разветвленными. Но не все понятия применимы к динамическим цепям. Например,

⁴¹ Например, сгиб руки в локтевом суставе и т.д.

кинематические цепи бывают открытыми (незамкнутыми) и замкнутыми. Использование такой классификации для динамических цепей не вносит ничего нового.

ГЛАВА 6

ИНЕРЦИОННЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ УПРУГОЙ ОПОРЫ

6.1 Учет массы упругой опоры

При анализе статической деформации массой спортивного снаряда можно и нужно пренебречь из-за малости перемещений, возникающих в опоре биомеханической системы по этой причине. В моделях динамической деформации этого лучше не делать, так как в противном случае отбрасывается один из значимых факторов, влияющий на движение биомеханической системы, и картина получается искаженной. Обоснуем – расчеты в главе 4 показывают, что, например, гриф перекладины стандартного размера весит около 12 кгс. А это величина сопоставимая или даже на порядок превышающая массу отдельных звеньев биомеханической системы. Это означает, что при деформации опоры учитываемые инерционные нагрузки, которые необходимо приложить к спортивному снаряду, могут достигать весьма больших величин.

Здесь же встает вопрос о центре масс деформированного спортивного снаряда. Нужен ли он? Давайте разберемся.

Во-первых, центр масс используется в динамических расчетах абсолютно твердых тел. Автоматически распространять теорему о движении центра масс системы на упругие тела неправомерно. Необходим скрупулезный анализ.

Во-вторых, расчеты динамической деформации весьма сложны и поэтому выполняются с определенными допущениями, при принятии которых не возникает необходимости в вычислении положения центра масс деформированного спортивного снаряда.

Балка, моделирующая упругую опору в условиях изгиба, представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. *Степени свободы равны числу независимых параметров, определяющих положение любой точки оси системы при колебаниях.* Для полного определения перемещений, возникающих в подобных сложных системах при динамическом нагружении, необходимо знать перемещения всех точек системы. В работах [10, 113] указано, что в этом случае необходимо найти в виде некоторых функций времени и положения точек бесконечное число величин (координат), определяющих эти перемещения в любой момент времени.

Динамическое нагружение вызывает колебания упругой системы, изучение которых для систем с бесконечным числом степеней свободы

связано с большими затруднениями. Возможность математической трактовки задачи о колебаниях зачастую становится осуществимой только при условии введения в расчет решительных упрощений. На сегодняшний день существует много различных приемов целесообразного построения упрощенных схем, для которых выполняют расчеты при динамическом нагружении [10, 101, 102].

В литературе [10, 40, 101, 113] рассматривается один из подобных приемов, получивший наиболее широкое распространение в технической практике. Это замена данной сложной системы другой, более простой, с другим распределением масс и жесткостей, но «близкой» к данной в том смысле, что ее расчет приводит к знаниям искомым величин, не слишком сильно отличающихся от действительных для данной системы. Подобная упрощенная система получила название приведенной системы [10].

Замена систем осуществляется приведением массы упругой опоры к любой выбранной нами точке (точкам) на спортивном снаряде.

В-третьих, при анализе движения непосредственно биомеханической системы знание центра масс упругой опоры не требуется, так как его параметры не входят в уравнения, описывающие различные стороны динамического поведения спортсмена. Центр масс может понадобиться лишь при расчете координат общего центра масс полной системы. Но, с другой стороны, при определении параметров центра масс биомеханической системы вместе с опорной частью спортивного снаряда можно использовать как реальную массу опоры и реальное положение ее центра масс, так и приведенную к определенной точке опоры.

Отсюда вывод: для определения центра масс полной системы, а также в случае расчета параметров колебаний опорной части спортивного снаряда достаточно привести массу опоры к одной из ее точек. Поэтому знание реального положения центра масс изогнутой опоры не обязательно, хотя и существует возможность использования методики учета положения ЦМ опоры в ряде динамических расчетов, но это более сложный и трудоемкий путь. Кроме того, не все задачи поддаются решению с использованием реальной массы спортивного снаряда и реальным ее распределением.

6.2 Ограничение числа степеней свободы опоры

Так как реальная механическая система представляет собой систему из бесконечного числа материальных точек, массы которых малы, а связи между точками не являются жесткими, то такая система имеет бесконечное число степеней свободы. В работе [102] отмечается, что точное решение задач о колебаниях подобных деформируемых систем можно получить в замкнутой форме лишь в немногих, относительно простых случаях. В общем же случае для решения приходится упрощать расчетную модель уменьшением числа степеней свободы. Существует три

основных способа образования конечномерных моделей [102].

Первый способ. Наиболее жесткие части конструкции считают абсолютно жесткими телами. Если размеры последних малы, то их принимают за материальные точки. Массой относительно менее массивных частей системы пренебрегают и представляют их в виде безинерционных элементов. Эти элементы могут быть как жесткими, так и деформируемыми. Данный способ показан на рисунках 6.1, а – з.

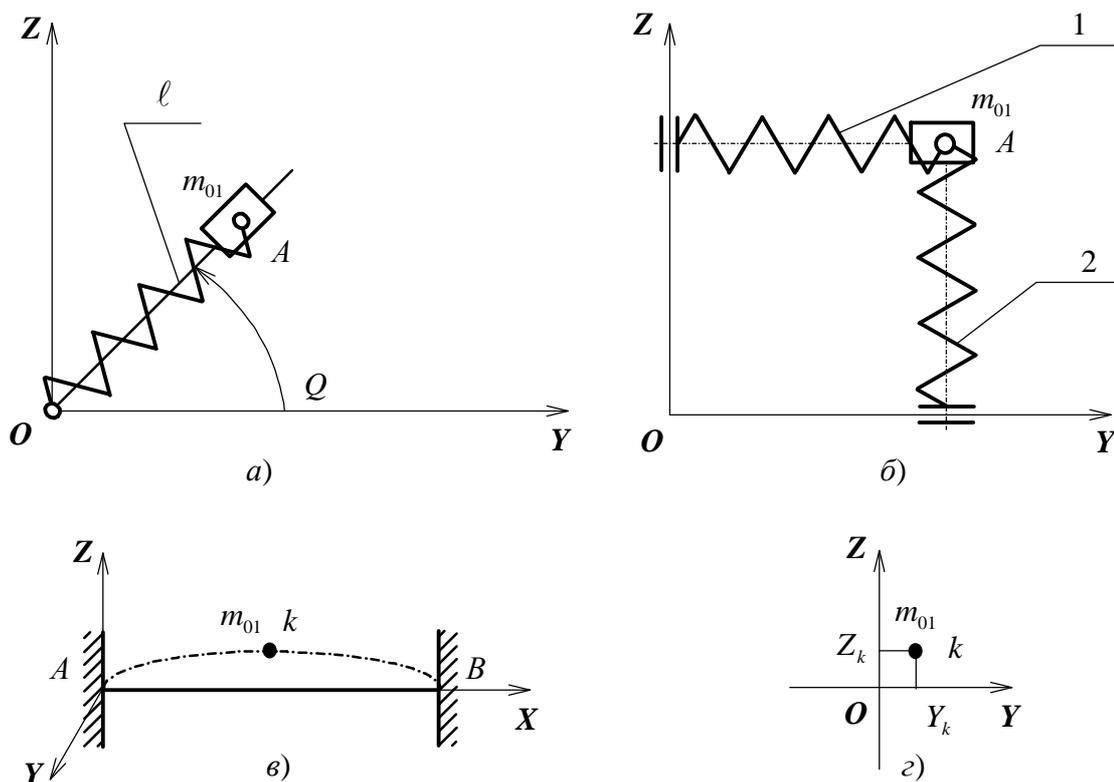


Рисунок 6.1 – Первый способ получения конечномерных систем

Отметим, что упругий элемент в виде пружины 1 и стержень OA на рисунке 6.1, а являются безмассовыми. То же относится и к пружинам 1 и 2 на рисунке 6.1, б, и к упругой балке на рисунке 6.1, в. На рисунке 6.1, з показаны проекции прогибов балки в сечении k на плоскость OYZ . Груз m_{01} во всех случаях считается сосредоточенным, т.е. материальной точкой. Все представленные системы являются системами с двумя степенями свободы. В качестве обобщенных координат принято:

- на рисунке 6.1, а – линейное перемещение пружины OA длиной l и ее поворот на угол Q ;
- на рисунке 6.1, б – горизонтальное перемещение Y пружины 1 и вертикальное перемещение Z пружины 2;
- на рисунке 6.1, в и з – горизонтальное Y_k и вертикальное Z_k

перемещения точки k .

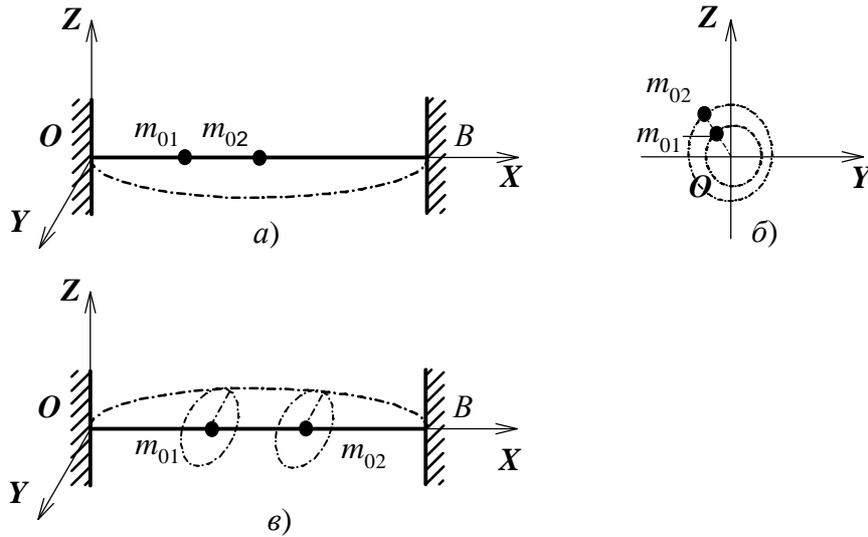


Рисунок 6.2 – Приведение к системе со многими степенями свободы по первому способу

На рисунке 6.2, *а* изображена система с двумя степенями свободы. Балка деформируется в вертикальной плоскости. Рисунок 6.2, *б* показывает колебания масс m_{01} и m_{02} во взаимно перпендикулярных направлениях в проекции на плоскость OYZ . На рисунке 6.2, *в* балка уже колеблется в двух плоскостях: OXY и OXZ . Это система с четырьмя степенями свободы.

Второй способ.

Система представляется как совокупность упруго (или вязкоупруго)

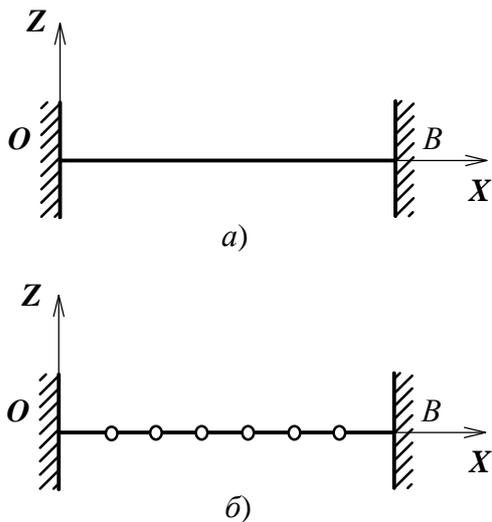


Рисунок 6.3 – Второй способ получения конечномерных систем

Рисунок 6.3 – Второй способ получения конечномерных систем

сочлененных жестких элементов. То есть распределенные по всему объему системы свойства *податливости* локализируются в

конечном числе точек (или линий).

Для нашего случая⁴² это могла бы быть упругая балка с цепочкой жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами (рис. 6.3). Число шарниров определяется требуемым уровнем точности.

Третий способ.

Используются некоторые априорные предположения об изменениях конфигурации системы в процессе колебаний.

Для балки, защемленной обоими концами, принимается, что в любой момент процесса колебаний форма изогнутой оси остается неизменной – меняется только ее масштаб. В работе [102] указано, что если заранее задать форму упругой линии балки в виде «подходящей» координатной функции $f(x)$, то прогибы оси балки будут описаны произведением двух функций

$$y(x,t) = q(t)f(x) , \quad (6.1)$$

где $q(t)$ – функция времени.

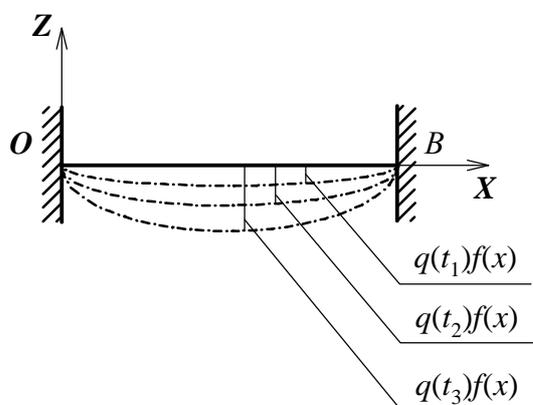


Рисунок 6.4 – Третий способ получения конечномерных систем

В правой части уравнения неизвестна лишь функция $q(t)$. На рисунке 6.4 показана упругая линия балки в моменты времени t_1, t_2, t_3 . Форма упругой линии в любой момент одна и та же, различие лишь в масштабе. Другими словами, мы приняли, что отношения между перемещениями неизменны во времени, что, конечно же, делает решение приблизительным. Таким образом, при фиксированном выборе функции $f(x)$ уравнение (6.1) определяет переход к системе с одной

степенью свободы. Здесь функция $q(t)$ представляет собой обобщенную координату.

Представленный метод носит название *метода Рэлея*. Существует

⁴² Защемленная обоими концами балка с непрерывно распределенной массой.

доказанная лордом Рэлеем теорема, что собственная частота системы, вычисленная данным способом, больше точного значения.

Точность данного метода повышают, заменив выражение (6.1) суммой произведений:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) f_i(x) , \quad (6.2)$$

где $f_i(x)$ – задаваемые координатные функции;

$q_i(t)$ – искомые функции времени;

s – сохраняемое в модели число степеней свободы системы.

Здесь $q_i(t)$ играют роль обобщенных координат для i -ой точки, расположенной на балке.

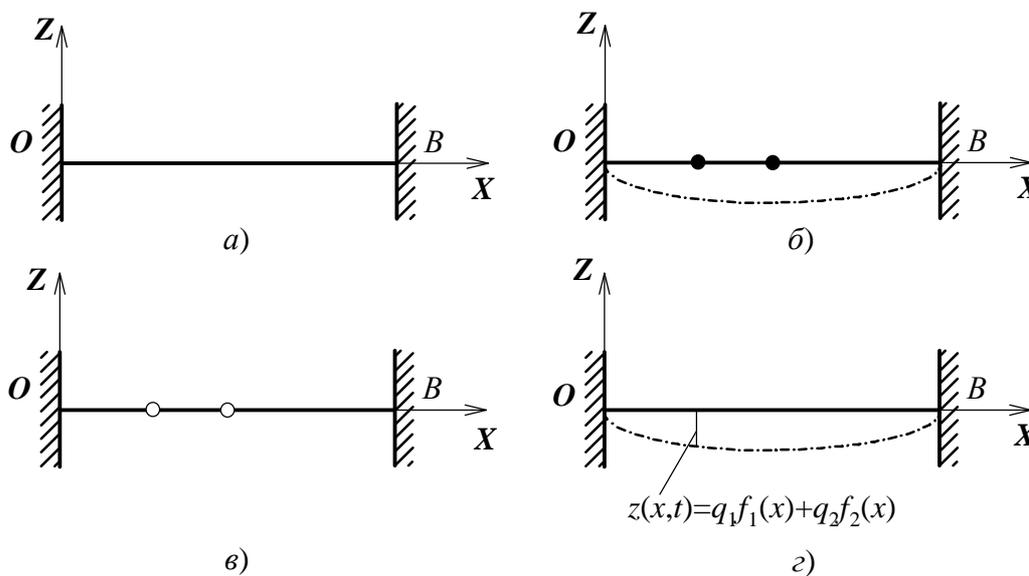


Рисунок 6.5 – Приведение балки тремя способами: а) схема балки; б) приведение к точечным массам; в) локализация податливости в конечном числе точек; г) метод Рэлея

Все три способа равноправны в том смысле, что любым из них можно привести заданную систему к системе с несколькими степенями свободы. На рисунках 6.5, а – г представлена балка, защемленная двумя концами, с распределенной массой и три варианта приведения к балке с двумя степенями свободы. Деформация осуществляется в вертикальной плоскости.

6.3 Получение системы с одной степенью свободы

Выполним замену балки, заземленной обоими концами, с равномерно распределенной по ее длине массой и имеющей бесконечное число степеней свободы, системой с одной степенью свободы. Вид балки не меняется, но масса теперь приведена к заданной точке k системы и имеет величину m_{npk} [14, 104, 112, 125]. Такая масса называется приведенной.

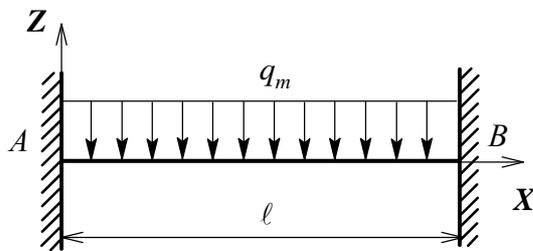


Рисунок 6.6 – Схема распределения собственной массы балки

Приведенная масса представляет собой сосредоточенную массу, для которой полученная система с одной степенью свободы динамически эквивалентна заданной системе со многими степенями свободы. Существует несколько методов приведение массы к нужной точке.

Начнем со случая приведения массы по условию равенства кинетических энергий систем – заданной и заменяемой [113].

На рисунке 6.6 показано непрерывное распределение собственной массы балки.

Здесь q_m – погонная (распределенная) масса балки. Она определяется как

$$q_m = \frac{m_0}{l}. \quad (6.3)$$

Заменяем распределенную массу сосредоточенной m_{npk} , приведенной к произвольной точке k недеформированной опоры биомеханической системы. Приведение массы показано на рисунке 6.7.

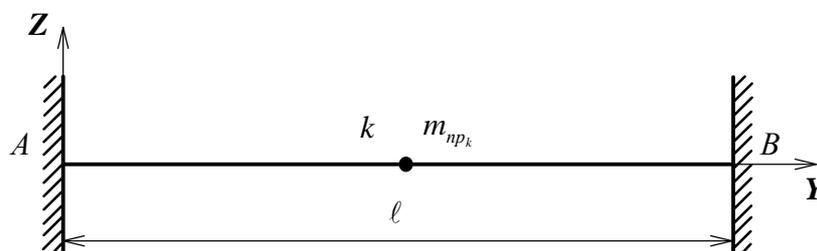


Рисунок 6.7 – Приведение массы к точке k

Кинетическая энергия приведенной системы составит

$$T_{0np} = \frac{m_{npk} v_k^2}{2}. \quad (6.4)$$

До приведения массы кинетическая энергия балки равнялась

$$T_0 = \int_0^\ell \frac{q_m v_i^2}{2} dx, \quad (6.5)$$

где v_i – скорость точки приложения i -ой элементарной массы.

Приравниваем кинетические энергии этих двух систем $T_{0np} = T_0$ и имеем

$$\frac{m_{npk} v_k^2}{2} = \int_0^\ell \frac{q_m v_i^2}{2} dx. \quad (6.6)$$

Преобразуя, получим

$$m_{npk} = \int_0^\ell \frac{q_m v_i^2}{v_k^2} dx = \int_0^\ell \frac{m_0 v_i^2}{\ell v_k^2} dx = \frac{m_0}{\ell} \int_0^\ell \frac{v_i^2}{v_k^2} dx. \quad (6.7)$$

Но данными формулами воспользоваться затруднительно, так как неизвестны скорости движения точек балки.

Приближенно отношение скоростей можно заменить отношением единичных перемещений Z_i и Z_k , вызванных статическим действием единичной силы $F=1$ в точке k (рис. 6. 8).

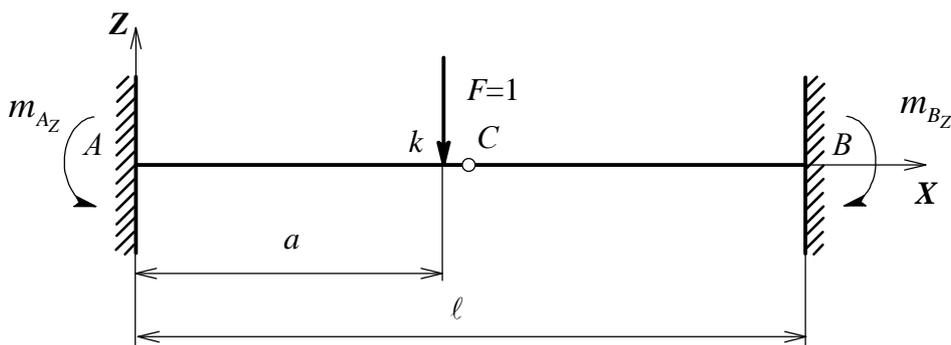


Рисунок 6.8 – Схема нагружения балки единичной силой в точке k

Получим выражение

$$m_{npk} = \frac{m_0}{\ell} \int_0^\ell \frac{Z_i^2}{Z_k^2} dx = \frac{m_0}{\ell Z_k^2} \int_0^\ell Z_i^2 dx. \quad (6.8)$$

Так как масса сосредоточена в произвольной точке k , то последнюю всегда можно поместить в нужном месте на балке. Например, можно сделать это таким образом, чтобы приведенная масса (массы) оказалась в месте контакта опоры с биомеханической системой.

Уравнение упругой линии для любого участка балки, заземленной обоими концами, выведено ранее в главе 4 для случая нагружения произвольным количеством сосредоточенных сил. При действии одной силы по рисунку 6.8 коэффициент δ_1 для первого участка от A до k по уравнению (4.18) равен нулю. Тогда имеем

$$Z_k = \frac{1}{I_y E} \left[\frac{m_{Az} X^2}{2} - \frac{R_{Az} X^3}{6} \right]. \quad (6.9)$$

Подставим в уравнения (4.9) и (4.12) силу F и расстояние a . Получим реакции m_A и R_A в заземлении A :

$$m_A = F \frac{a(\ell - a)^2}{\ell^2}, \quad R_A = F \frac{(\ell - a)^2 (\ell + 2a)}{\ell^3}. \quad (6.10)$$

С учетом нагружения единичной силой $F=1$ получим

$$m_A = 1 \frac{a(\ell - a)^2}{\ell^2}, \quad R_A = 1 \frac{(\ell - a)^2 (\ell + 2a)}{\ell^3}. \quad (6.11)$$

Если точкой приведения является середина балки, т.е. $a = \frac{\ell}{2}$, то имеем частный случай:

$$m_A = 1 \frac{\frac{\ell}{2} (\ell - \frac{\ell}{2})^2}{\ell^2} = \frac{\ell}{8}, \quad R_A = 1 \frac{(\ell - \frac{\ell}{2})^2 (\ell + 2 \frac{\ell}{2})}{\ell^3} = \frac{1}{2}. \quad (6.12)$$

Прогиб в сечении k , где действует сила F , определяется по уравнению (4.18):

$$Z_k = -\frac{Fa^3 (\ell - a)^3}{3\ell^3 EI_y}. \quad (6.13)$$

Во все уравнения знаки силовых факторов берутся согласно правилу

для метода начальных параметров, рассмотренного в главе 4.

Если приведение осуществляется к середине балки (точка C , $k=C$), то получим два симметричных участка, что позволяет записать формулу (6.8) для первого участка от точки A до C и удвоить результат. В этом случае математическую модель приведенной массы можно записать как

$$m_{npC} = \frac{2m_0}{\ell Z_c^2} \int_0^{\ell/2} Z_i^2 dx. \quad (6.14)$$

Здесь $Z_c = Z_k$.

Для дальнейшего анализа применим модель деформации балки при нагружении произвольной силой точно по середине балки по уравнению (4.20). Сила F является единичной. Имеем

$$Z_c = -\frac{F\ell^3}{192EI_y} = -\frac{\ell^3}{192EI_y}. \quad (6.15)$$

Выполним подстановку:

$$\begin{aligned} m_{npC} &= \frac{2m_0}{\ell Z_c^2} \int_0^{\ell/2} Z_i^2 dx = \frac{2m_0(192EI_y)^2}{\ell(\ell^3)^2} \times \int_0^{\ell/2} \left(\frac{1}{EI_y} \left[-m_{Az} \frac{X^2}{2} + R_{Az} \frac{X^3}{6} \right] \right)^2 dx = \\ &= \frac{73728m_0(EI_y)^2}{\ell^7(EI_y)^2} \cdot \int_0^{\ell/2} \left(\left[-\frac{\ell X^2}{8 \cdot 2} + \frac{X^3}{2 \cdot 6} \right] \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Окончательное решение дает следующую величину приведенной к середине балки массы:

$$m_{npC} = 0,37143m_0 \approx 0,371m_0. \quad (6.17)$$

Отношение приведенной массы m_{npk} к полной массе системы называется коэффициентом приведения k_{np} :

$$k_{np} = \frac{m_{npk}}{m_0}. \quad (6.18)$$

Запишем в общем виде выражение для приведенной массы:

$$m_{npk} = k_{np} m_0. \quad (6.19)$$

Коэффициент приведения по уравнению (6.17) равен $k_{np} \approx 0,371$.

Таким образом, в сложных моделях динамической деформации опоры,

представленной балкой, заземленной обоими концами, ее массу, равномерно распределенную по длине, можно заменить сосредоточенной массой. В случае принятия за точку приведения середину балки получим приведенную массу примерно в 3 раза меньшую общей массы балки.

Для другого способа определения приведенной массы необходимо знание точного значения частоты системы с распределенной массой для данной формы ее отклонения [113]. В этом случае приравнивают точное значение частоты p_m значению частоты системы с одной степенью свободы, имеющей приведенную массу в выбранной точке k . Имеем

$$p_m = \sqrt{\frac{c_k}{m_{npk}}} = \sqrt{\frac{1}{m_{npk} Z_k}}, \quad (6.20)$$

где Z_k – единичное перемещение для точки k от действия силы $F_k=1$;
 c_k – жесткость системы, т.е. сила упругости, соответствующая перемещению, равному единице:

$$c_k = \frac{1}{Z_k}.$$

Из формулы, зная частоту колебаний и единичное перемещение, найдем выражение для приведенной массы:

$$m_{npk} = \frac{1}{p_m^2 Z_k}. \quad (6.21)$$

Для середины балки, заземленной обоими концами, взяв значение частоты колебаний по справочнику [25], $p_m^2 = \frac{500EI_y}{m_0 \ell^3}$, а перемещение от единичной силы из формулы (4.20), $Z_k = \frac{\ell^3}{192EI_y}$, получим для второго способа по уравнению (6.21):

$$m_{npC} = \frac{m_0 \ell^3 192EI_y}{500EI_y \ell^3} = \frac{192}{500} m_0 \approx 0,384 m_0. \quad (6.22)$$

Здесь коэффициент приведения оказался равен $k_{np} \approx 0,384$.

Кроме указанных способов, можно воспользоваться уже готовыми формулами, предлагаемыми в справочной литературе для конкретных типов балок. Например, по работе [25] для балки, заземленной обоими концами, по рисунку 6.9 имеем коэффициент приведения k_{np} :

$$k_{np} = \frac{24(1-\alpha) - 4\alpha^2 + \alpha^3(8-\alpha)}{35\alpha^2(5\alpha - 4 - \alpha^2)^2}, \quad (6.23)$$

где α – расстояние от начала координат до точки k в долях от длины балки ℓ .

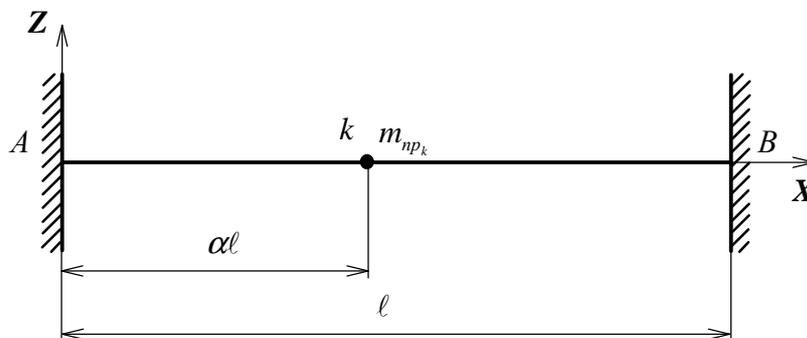


Рисунок 6.9 – Система с одной степенью свободы

Для середины балки имеем $\alpha=0,5$. Подставляя α , получим

$$k_{np} = \frac{24(1-0,5) - 4 \cdot 0,5^2 + 0,5^3(8-0,5)}{35 \cdot 0,5^2(5 \cdot 0,5 - 4 - 0,5^2)^2} = 0,44548.$$

Коэффициент приведения равняется $k_{np} \approx 0,445$.

Отметим, что коэффициенты приведения, полученные разными способами, несколько отличаются друг от друга. В принципе, это нормальная ситуация, так как при анализе модели опоры упрощаются, а это означает потерю точности (должна же в чем-то проявиться приближенность). В механике имеются примеры, когда появляющиеся конфликты в решении задач на колебания показывают более существенное несоответствие с действительностью – «идеализация мстит за себя».

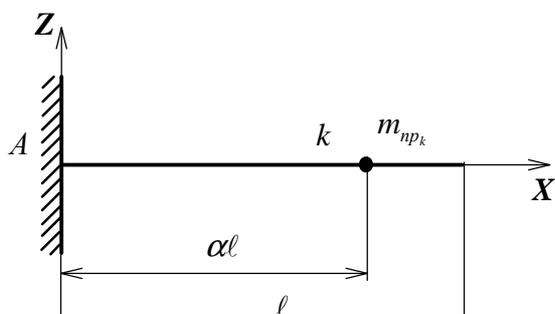


Рисунок 6.10 – Приведение массы к точке k для

консольной балки Тем не менее, отметим, что именно для нашего случая справочная формула дает явно завышенное значение. По другим методам (по равенству кинетических энергий или равенству частот собственных колебаний систем) получают коэффициенты k_{np} , незначительно отличающиеся друг от друга.

Приведем формулу для консольной балки по рисунку 6.10:

$$k_{np} = \frac{105(1-\alpha)}{140\alpha^2} + \frac{\alpha^2(35-2\alpha)}{140\alpha^2}. \quad (6.24)$$

Анализ методов для остальных типов балок показывает, что для них все методы дают близкие величины.

6.4 Приведение к одной массе при колебаниях опоры в двух плоскостях

В случае приведения массы спортивного снаряда при нагружении опоры силами, действующими одновременно в двух плоскостях, необходимо дополнительно проанализировать условия эквивалентности заданной и заменяемой систем. Здесь мы имеем систему со многими степенями свободы.

Начнем с наиболее простого случая – с приведения массы балки к одной точке k , совершающей колебания в двух плоскостях одновременно. Такая система является системой с двумя степенями свободы. Рассмотрим условие эквивалентности по равенству частот собственных колебаний опоры. Аналогично формуле (6.20) получим:

$$p_m^y = \sqrt{\frac{c_k^y}{m_{npk}^y}} = \sqrt{\frac{1}{m_{npk}^y Y_k}}, \quad (6.25)$$

$$p_m^z = \sqrt{\frac{c_k^z}{m_{npk}^z}} = \sqrt{\frac{1}{m_{npk}^z Z_{kk}}}, \quad (6.26)$$

где p_m^y , p_m^z – частоты собственных колебаний балки при изгибе соответственно в плоскостях OXY и OXZ ;

Y_k , Z_k – единичное перемещение для точки k от действия единичной силы $F_k^y = 1$ в плоскости OXY и $F_k^z = 1$ в плоскости OXZ , соответственно;

c_k^y , c_k^z – жесткость балки при изгибе соответственно в плоскостях OXY и OXZ ;

m_{npk}^y , m_{npk}^z – приведенные массы балки при ее изгибе соответственно в плоскостях OXY и OXZ .

Из формул (6.25), (6.26), зная частоту колебаний и единичное перемещение в каждой из плоскостей, получим приведенные массы в виде:

$$m_{npk}^{(y)} = \frac{1}{[p_m^{(y)}]^2 Y_k}, \quad (6.27)$$

$$m_{npk}^{(z)} = \frac{1}{[p_m^{(z)}]^2 Z_k}. \quad (6.28)$$

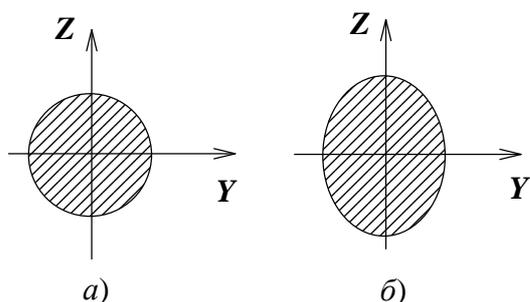


Рисунок 6.11 – Поперечные сечения спортивных снарядов

Для грифа перекладины и жердей брусьев разной высоты жесткость при изгибе в разных плоскостях одинакова. Причина кроется в равенстве единичных перемещений $Y_k = Z_k$. А они равны, так как равны моменты инерции относительно главных центральных осей (рис. 6.11 а):

$$I_Y = I_Z. \quad (6.29)$$

Для параллельных брусьев ситуация иная, так как жерди в поперечном сечении представляют овал, а не правильную фигуру в виде круга (рис. 6.11, б). Поэтому данные выводы для этого спортивного снаряда неприменимы.

Также равны и частоты. Круговая частота собственных незатухающих колебаний системы с распределенной массой [25, 113] определяется как

$$p_m^2 = \frac{c_k}{m_0}. \quad (6.30)$$

При одинаковой жесткости системы независимо от выбранного направления и одной и той же массе балки будет наблюдаться и независимость частоты колебания системы при поперечном изгибе.

Расчеты по моделям, в которых используются полученные выводы по приведению массы в случае колебания в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, применяются в дальнейшем как для модели опоры в виде одной вращающейся пружины, так и для модели в виде двух поступательно перемещающихся пружин. Ведь обе модели можно представить в виде изгиба балки в соответствующих взаимно

перпендикулярных плоскостях.

С другой стороны, данный вывод означает независимость методик приведения массы к точке k от выбранного способа для такого сложного случая как одновременные колебания опоры в разных плоскостях. Подходят модели, основанные на формуле (6.8) по равенству кинетических энергий, и модели (6.27), (6.28) по равенству частот.

6.5 Общий случай приведения массы опоры к двум массам

Рассмотрим случай, когда контакт спортивного снаряда и биомеханической системы осуществляется в двух точках. Это может быть хват спортивного снаряда, осуществляемый двумя руками. Такая постановка задачи вызывает необходимость в использовании двух приведенных масс. Кроме задач на колебания опоры две приведенные массы могут быть использованы при расчете удара спортсмена о снаряд.

В общем случае при плоскопараллельном движении реакции в контакте имеют горизонтальную и вертикальную составляющие. А это означает и деформацию в соответствующих направлениях.

Таким образом, приведя массу к двум точкам, мы получим систему с четырьмя степенями свободы. Для приведения используем метод переноса приведенных масс (метод наложения) [113]. Метод был предложен Донкерлеем. Отметим, что при расчете собственной частоты этот метод дает значение меньшее, чем точное.

Рассмотрим два состояния простой балки. В первом к точке 1 на расстоянии X_1 приложена сосредоточенная масса m_1 . Частота p_0 определяется через единичное перемещение Z_1 по рисунку 6.12, а. Во втором состоянии приводим массу балки к точке на расстоянии X_2 (рис. 6.12, б).

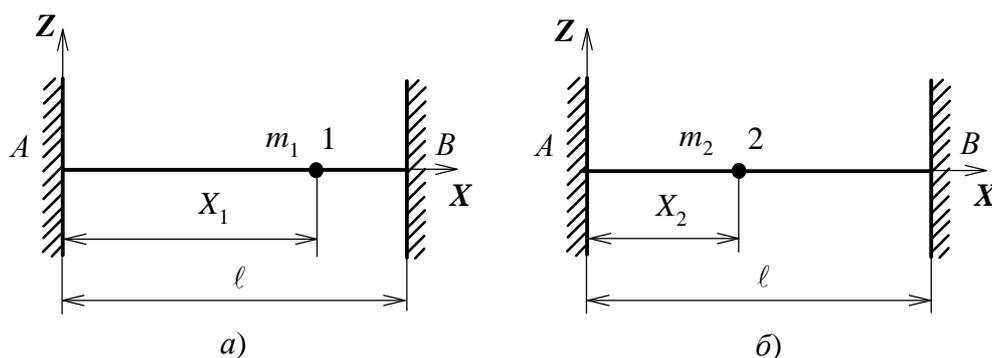


Рисунок 6.12 – Метод переноса приведенных масс

Используем формулу (6.19). Для второго случая имеем

$$m_2 = k_{np} m_1. \quad (6.31)$$

Равенство частот обоих состояний дает выражение

$$\frac{1}{p_0^2} = m_1 Z_1 = m_2 Z_2 = k_{np} m_1 Z_2. \quad (6.32)$$

Из данного отношения получим коэффициент приведения

$$k_{np} = \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (6.33)$$

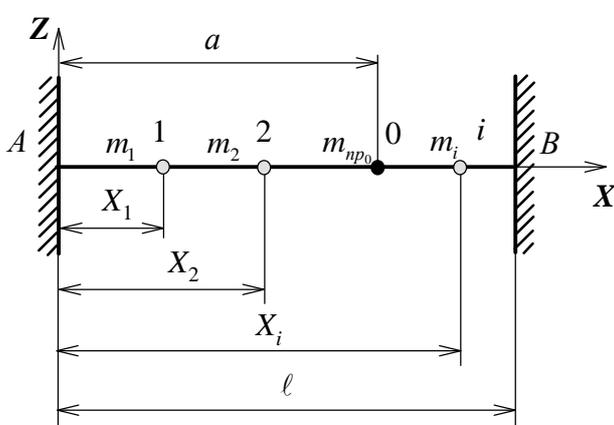


Рисунок 6.13 – Замена системы масс одной массой

Таким образом, исходя из равенства частот, массу m_1 , приложенную в точке 1, можно перенести в точку 2, выполнив условия (6.31) и (6.33), т.е. умножая массу m_1 на коэффициент приведения k_{np} .

На рисунке 6.13 представлен случай замены системы масс одной приведенной массой. Балка несет i масс m_1, m_2, \dots, m_i .

Используем приближенный принцип взаимной независимости этих масс при замене системы масс одной массой в точке 0 на расстоянии a . Условие тождественности частоты для одной массы и системы масс по аналогии с условием (6.32) дает выражение

$$\frac{1}{p_0^2} = m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_i Z_i \quad (6.34)$$

или же

$$m_i Z_i = k_{npi} m_i Z_0, \quad k_{npi} = \frac{Z_i}{Z_0}. \quad (6.35)$$

Если имеем распределенную по длине балки массу q_m , то выражение (6.35) принимает вид

$$\frac{1}{p_0^2} = \int_0^\ell (q_m dx) Z_x \quad (6.36)$$

и носит название формулы Донкерлея.

Используем уравнение (6.34) для приведения к двум массам m_{np1} и m_{np2} . Пусть мы осуществляем переход от случая равномерного распределения массы по длине балки. Применив равенство выражений (6.34) и (6.36), получим

$$\int_0^\ell (q_m dx) Z_x = m_{np1} Z_1 + m_{np2} Z_2. \quad (6.37)$$

Пусть соотношение между приведенными массами λ_{np} заданно тем или иным способом [10, 16, 102]. Имеем

$$m_{np2} = \lambda_{np} m_{np1}. \quad (6.38)$$

Тогда выражение (6.37) примет вид

$$\int_0^\ell (q_m dx) Z_x = m_{np1} Z_1 + \lambda_{np} m_{np1} Z_2. \quad (6.39)$$

Или же, преобразуя и используя выражение (6.3), получим

$$\frac{m_0}{\ell} \int_0^\ell Z_x dx = m_{np1} (Z_1 + \lambda_{np} Z_2). \quad (6.40)$$

Выразив одну из искоемых приведенных масс, запишем формулу

$$m_{np1} = \frac{m_0 \int_0^\ell Z_x dx}{\ell (Z_1 + \lambda_{np} Z_2)}. \quad (6.41)$$

Для расчета данного выражения необходимо использовать уравнение (4.18).

Теперь массу m_{np2} легко найдем по формуле (6.38).

В случае перехода от одной приведенной массы в точке 0 на расстоянии a к двум массам 1 и 2 на расстоянии X_1 и X_2 , имеем

$$m_{np0} Z_0 = m_{np1} Z_1 + m_{np2} Z_2 \quad (6.42)$$

или

$$m_{np0} Z_0 = m_{np1} Z_1 + \lambda_{np} m_{np1} Z_2. \quad (6.43)$$

Отсюда следует, что

$$m_{np1} = m_{np0} \frac{Z_0}{Z_1 + \lambda_{np} Z_2}. \quad (6.44)$$

Используя соотношение (6.19), по которому получили приведенную массу m_{np0} , запишем

$$m_{np1} = k_{np} m_0 \frac{Z_0}{Z_1 + \lambda_{np} Z_2} = k_{np} m_{оп} \frac{Z_0}{Z_1 + \lambda_{np} Z_2}. \quad (6.45)$$

Здесь $m_{оп}$ есть масса всей упругой опоры. Действия по определению второй приведенной массы m_{np2} остаются прежними.

Отметим, что при использовании условия эквивалентности в виде равенства кинетических энергий двух состояний балки⁴³ для перехода к многомерным системам с конечным числом степеней свободы выводы выражений оказались бы более громоздкими и сложными.

Анализ моделей приведения массы (масс), а также моделей статической деформации балки в главе 4 показывает, что *приведенная масса (массы) зависит от массы балки, ее длины, относительного положения точек приведения.*

Случай приведения к нескольким массам рассмотрен на примере балки, нагруженной в одной плоскости. Так как поперечное сечение рассматриваемой опоры представляет собой правильную геометрическую фигуру в форме круга, то соблюдается равенство частот, а значит, как и для одной массы, определение приведенных масс от выбранной плоскости не зависит. В каждой из них величина используемых приведенных масс одна и та же. Для расчетов можно использовать все рассмотренные способы определения приведенных масс с параметрами, соответствующими выбранной плоскости.

6.6 Расчет параметров пружин, моделирующих упругие свойства опоры

В модели кинематики и динамики биомеханической системы входят параметры деформации опоры в виде размера пружины L_0 и угла ее наклона Q_0 к оси OY или же в виде размеров двух пружин $L_{0Г}$ и $L_{0Б}$. Эти

⁴³ Имеется в виду состояния балки до и после приведения массы.

параметры являются характеристиками деформации конкретного спортивного снаряда. Например, длина пружины L_0 представляет собой величину прогиба в радиальной плоскости при обращении грифа перекладины в какой-то конкретный момент времени и входит во все уравнения для определения координат характерных точек биомеханической системы.

Таким образом, формальные параметры пружины L_0 и Q_0 или $L_{0Г}$ и $L_{0В}$ на самом деле являются параметрами деформации реального спортивного снаряда и определяются по нему.

В модели динамической структуры спортивных упражнений входят и масс-инерционные параметры опоры. Не во все, но, например, определение положения общего центра масс полной системы, т.е. биомеханической системы вместе с деформированной опорой, требует знания величины и положения ЦМ упругих элементов спортивного снаряда во время деформации последнего. Знание это необходимо при анализе тех фаз упражнений на женских брусках, при которых происходит контакт спортсменки одновременно с двумя жердями, причем об одну из них она ударяется телом. Здесь в контакте участвует не только сама биомеханическая система, т.е. тело человека, но и одна из упруго деформированных жердей со всей своей массой.

Еще одним важным моментом при расчете параметров пружины является фактическая схема нагружения опоры биомеханической системы. Схема характеризуется величиной и направлением действующих на спортивный снаряд сил, возникающих в месте контакта с биомеханической системой. При нагружении сосредоточенными силами, еще и точками их приложения⁴⁴. Случаи же распределенной нагрузки в данной работе не исследуются. Кроме этого, важна динамика силового взаимодействия человека с опорой, что будет показано в главах, посвященных динамическому расчету.

Анализ фактической схемы нагружения опоры биомеханической системы необходим по следующей причине: так как параметры упругой деформации опоры в каждом ее сечении разные⁴⁵, то, очень важно представлять, как соотносятся параметры изгиба характерных точек опоры между собой, какие из них удобнее всего использовать в моделях движения биомеханической системы и насколько допустимо упрощение модели без риска потери точности расчетов, удовлетворяющих исследователя.

В данной работе изучается плоскопараллельное движение человека.

⁴⁴ Реакции в паре «рука – опора» условно представляем сосредоточенными силами.

⁴⁵ Параметры обращения балки по ее длине разные в один и тот же момент времени.

Несмотря на это, необходимо рассматривать пространственную схему нагружения спортивного снаряда. Например, при выполнении упражнения на перекладине плоскость (плоскости), в которой реализуется деформация опоры, и плоскость, в которой совершается движение биомеханической системы, перпендикулярны друг другу.

Не затрагивая динамику силового взаимодействия спортсмена со спортивным снарядом, отметим такой существенный фактор как изменение положения рук спортсмена во время выполнения упражнения. Меняется расстояние между руками и положение рук по отношению к заземлению балки, моделирующей гриф перекладины или жердь женских брусьев. *Расстояние между руками назовем базой*. База V_p не является постоянной величиной, так как характеризует индивидуальные особенности каждого человека и может меняться не только от спортсмена к спортсмену, но и при каждом выполнении одного и того же упражнения одним и тем же человеком.

Что касается рук спортсмена, то их расположение на опоре удобнее начать анализировать по отношению к середине грифа. С этой точки зрения середина может располагаться между руками человека, слева или справа от него. Именно расположение рук относительно данной точки дает нам предварительную информацию о том, под какой рукой проявится максимальный прогиб.

Таким образом, исходя из всего вышеизложенного в данной работе материала, включая и данную главу, констатируем, что:

- в уравнения связи, уравнения кинематики, уравнения динамики, включая и уравнения движения биомеханической системы, параметры упругой опоры входят в качестве длины пружины растяжения-сжатия L_0 (или пружин $L_{0Г}$ и $L_{0В}$);
- при моделировании обращения опоры вращающейся пружиной положение последней в пространстве определяется углом наклона Q_0 к ординате OY ;
- прогиб опоры и его положение в пространстве определяется отдельно от параметров движения биомеханической системы. При этом используются методы, разработанные в сопротивлении материалов и строительной механике;
- расположение рук спортсмена относительно центра масс опоры влияет на параметры деформации балки;
- вес опоры является величиной значимой и его влияние на динамическую деформацию желательно учесть;
- деформация грифа перекладины меняется по его длине, а значит, параметры перемещения характерных точек опоры имеют разную

величину⁴⁶;

- середина опоры может находиться в стороне от плоскости движения спортсмена, и соответственно не лежать в одной плоскости с прогибом опоры, учитываемым в уравнениях движения биомеханической системы;
- силы, приложенные к опоре, не лежат в плоскости, в которой осуществляется движение тела спортсмена, но ей параллельны.

Для более подробного анализа вариантов схем нагружения балки, моделирующей спортивный снаряд, и для определения параметров пружины (пружин) рассмотрим три случая приложения сил к упругой опоре.

Положение реакций, возникающих в контакте «рука – опора», и положение середины самой упругой опоры, могут сочетаться в следующем порядке** (рис. 6.14, *a – в*):

- контакт рук спортсмена осуществляется до середины опоры (рис. 6.14, *a*), т.е. база расположена до ЦМ опоры;
- середина опоры расположена между руками (рис. 6.14, *б*), т.е. ЦМ опоры расположен на базе;
- контакт рук спортсмена осуществляется за серединой опоры (рис. 6.14, *в*), т.е. база расположена за ЦМ опоры.

В общем случае ЦМ опоры не лежит в плоскости, в которой реализуется движение биомеханической системы. Кроме этого, используя приведение массы опоры к одной или нескольким точкам с произвольным расположением на опоре, можно выбирать сечение балки, параметры которой используются в уравнениях движения биомеханической системы. С этой точки зрения привязки к середине балки нет.

Для случая контакта спортсмена с опорой двумя руками длина пружины L_0 определяется по одному из следующих вариантов:

1. принимаем за длину пружины L_0 (или пружин $L_{0Г}$ и $L_{0В}$) величину прогиба середины балки;
2. длина пружины L_0 (или пружин $L_{0Г}$ и $L_{0В}$) равна прогибу опоры в сечении, лежащем в плоскости движения спортсмена;
3. длина пружины L_0 (или пружин $L_{0Г}$ и $L_{0В}$) равна максимальному прогибу опоры в одной из точек контакта опоры с биомеханической системой, т.е. под одной из рук спортсмена;
4. длина пружины L_0 (или пружин $L_{0Г}$ и $L_{0В}$) равна средней величине прогиба опоры, определяемой по перемещениям сечений

⁴⁶ Так, в общем случае, отличаются параметры деформации опоры в контакте с левой и правой руками, а также посередине балки.

** Расположение системы координат соответствует методу начальных параметров [26].

балки в точках контакта с биомеханической системой.

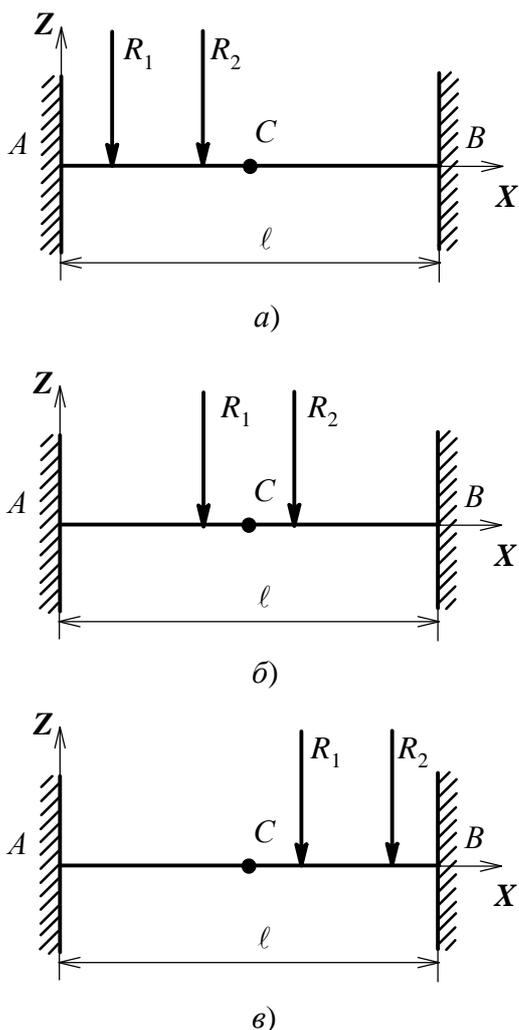


Рисунок 6.14 – Положение рук на опоре: а) до ЦМ опоры; б) ЦМ опоры находится на базе; в) за ЦМ опоры

величина ее прогиба посередине отличается от стрелы прогиба не более чем на 5%. Отметим, что в инженерной практике данная величина считается приемлемой погрешностью, и многие расчеты при разработке технических конструкций выполняются исходя из нее. Поэтому в случае принятия за длину пружины прогиба в середине балки расчет выполняется по максимальному, или близкому к нему, упругому перемещению спортивного снаряда.

В работе [14] приводится расчет двухопорной статически определимой балки, нагруженной на шарнирно-подвижной опоре парой сил. Анализ показывает, что даже в таком несимметричном случае

Добавим, что для варианта с вращающейся пружиной ее положение дополнительно рассчитывается по углу наклона Q_0 к оси OY . Но данный параметр не зависит от выбранного сечения балки.

Кинематические характеристики обращения опоры рассчитываются по параметрам прогибов для выбранного варианта. Проанализируем каждый из вариантов.

1. Длина пружины равна величине прогиба середины балки.

Середина балки является весьма удобной точкой для того, чтобы модели деформации имели простой компактный вид. Это существенно при ручных расчетах, но не так актуально при использовании ЭВМ. Хотя в ряде моделей, например, при изучении вынужденных колебаний такой подход снимает много проблем.

В сопротивлении материалов известно соотношение прогибов середины балок разных типов и стрелы прогиба для них же [14, 25, 40, 104, 109, 112, 125]. При действии нагрузки в любой точке балки постоянного сечения,

нагрузки прогиб по середине балки отличается всего на 2,5 % от максимального.

Применяя данный подход к упрощению моделей, мы учитывали существующие рекомендации – методы должны иметь умеренную сложность (трудоемкость), соответствовать возможностям исследователя и уровню строгости модели [34]. Замечание относится ко всем разделам данной работы и отражает общие подходы к решению сложных задач.

Что касается соотношения прогиба в середине балки Δ_C и в местах контакта с биомеханической системой Δ_i , то эта величина требует уточнения в каждом конкретном случае нагружения, так как зависит от многих факторов. Оценку можно выполнить по формуле

$$\delta\% = \frac{\Delta_i - \Delta_C}{\Delta_C} 100\% \leq |\delta\%|, \quad (6.46)$$

где $\delta\%$ – относительная погрешность;
 $|\delta\%|$ – заданная погрешность метода.

Величина погрешности $\delta\%$ не должна превышать заданное значение $|\delta\%|$. Здесь использовано обозначение прогибов как Δ_C , так как в общем случае это радиальная плоскость, в которой лежит упругая линия при обращении опоры (рис. 6.15, а, б). Если же прогибы рассматривать отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях, то имеем $Y_C = \Delta_C^Y$ и $Z_C = \Delta_C^Z$ (рис. 6.15, б).

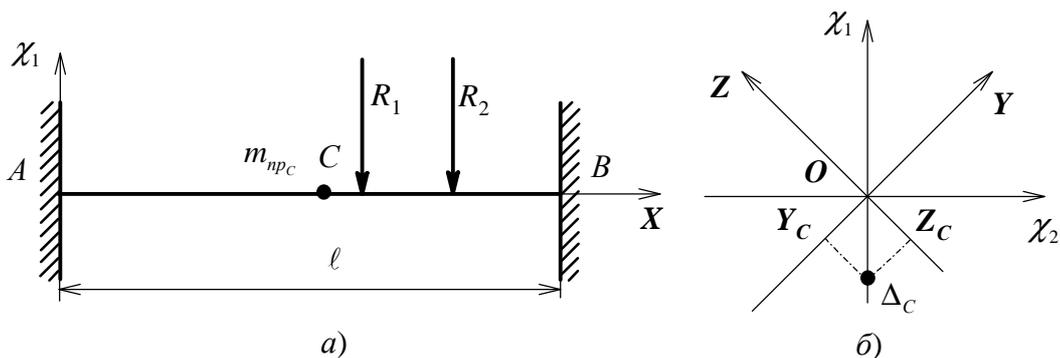


Рисунок 6.15 – Расчетная схема для определения прогибов в: а) плоскости изгиба; б) основной системе координат

Рассматривая середину балки, легче изучать физическую сторону взаимодействия человека с упругой опорой.

2. Длина пружины равна прогибу опоры в сечении, лежащем в плоскости движения спортсмена.

Этот вариант является не совсем корректным и удобным. Во-первых,

расчет моделей деформации не упрощается. Во-вторых, на перемещения биомеханической системы будет оказывать влияние величина деформации опоры в месте контакта с руками человека, но не в плоскости движения. Это означает, что, не упрощая модели, мы теряем еще и в их точности.

Тем не менее, этот пункт необходимо было рассмотреть, так как формально прогиб опоры реализуется в той же плоскости, в которой происходит плоскопараллельное движение биомеханической системы.

3. Длина пружины равна максимальному прогибу опоры под одной из рук спортсмена.

Данный вариант, как и в первом пункте, позволяет упростить многие модели. Но тут необходимы уточнения и введение определенных ограничений в виде допущений, применяемых к моделям. Эти вопросы были разобраны в п. 5.8, при исследовании кинематических и динамических цепей.

При выборе данного варианта целесообразно за длину пружины L_0 (или $L_{0Г}$ и $L_{0В}$) принять величину упругого прогиба опоры равной максимальному прогибу под одной из рук. Анализ деформации грифа перекладины показывает, что максимальным оказывается перемещение упругой линии опоры под той рукой, которая ближе к середине балки.

Таким образом, *в моделях пружин можно использовать деформацию опоры в месте ее нагружения от руки, ближе всего расположенной к середине опоры.*

4. Длина пружины равна средней величине прогиба опоры под руками спортсмена.

В данном случае имеется в виду среднеарифметическая величина. Используем допущение о жесткости пояса верхних конечностей, рассмотренное в п. 5.8. Если хват осуществляется параллельными руками, то тело спортсмена окажется точно посередине между приложенными к спортивному снаряду силами. Расчетный прогиб равен:

$$\Delta_p = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}, \quad (6.47)$$

где Δ_p – расчетный прогиб балки;

Δ_1 – прогиб опоры в месте ее контакта с первой рукой;

Δ_2 – прогиб опоры в месте ее контакта со второй рукой.

Вывод: большую точность в пределах принятых допущений к моделям обеспечивает вариант определения параметров пружины (пружин) по средней величине прогиба опоры под руками спортсмена.

Таким образом, длина пружины равна:

$$L_0 = \Delta_P. \quad (6.48)$$

Модели с вращающейся пружиной. Для практического определения длины пружины L_0 и угла ее наклона к ординате OY необходимо рассчитать прогибы спортивного снаряда под руками спортсмена. Имеем:

$$\Delta_1 = \sqrt{Y_1^2 + Z_1^2}, \Delta_2 = \sqrt{Y_2^2 + Z_2^2}, Q_0 = \arctg \frac{Z_1}{Y_1} = \arctg \frac{Z_2}{Y_2}. \quad (6.49)$$

Кинематические параметры равны для скорости:

$$\dot{\Delta}_1 = \sqrt{\dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2}, \dot{\Delta}_2 = \sqrt{\dot{Y}_2^2 + \dot{Z}_2^2}; \quad (6.50)$$

для ускорения:

$$\ddot{\Delta}_1 = \sqrt{\ddot{Y}_1^2 + \ddot{Z}_1^2}, \ddot{\Delta}_2 = \sqrt{\ddot{Y}_2^2 + \ddot{Z}_2^2}. \quad (6.51)$$

Модели с двумя поступательно движущимися пружинами. Размеры пружин определяем как среднеарифметическое проекций прогибов балки в месте контакта с руками спортсмена:

$$L_{0r} = \Delta_P^Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}, L_{0b} = \Delta_P^Z = \frac{Z_1 + Z_2}{2}. \quad (6.52)$$

Кинематические параметры, принимаемые в качестве расчетных для оси условного шарнира биомеханической системы в виде кинематической пары «рука – пружина», определяют по формулам аналогичным (6.47), (6.48), (6.50), но с подстановкой соответствующих кинематических параметров реальных опорных шарниров «рука – опора». Для скоростей имеем:

$$\dot{L}_{0r} = \dot{\Delta}_P^Y = \frac{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2}{2}, \dot{L}_{0b} = \dot{\Delta}_P^Z = \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}{2}, \quad (6.53)$$

для ускорений

$$\ddot{L}_{0r} = \ddot{\Delta}_P^Y = \frac{\ddot{Y}_1 + \ddot{Y}_2}{2}, \ddot{L}_{0b} = \ddot{\Delta}_P^Z = \frac{\ddot{Z}_1 + \ddot{Z}_2}{2}. \quad (6.54)$$

При этом учитываем, что все модели по (6.47)-(6.54) отражают одну и ту же картину движения реального спортивного снаряда.

ГЛАВА 7

ДЕФОРМАЦИЯ ОПОРЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

7.1 Виды динамических нагрузок

Изменение нагрузки, приложенной к опоре, вызывает заметные ускорения при деформации последней, а также меняет параметры движения биомеханической системы. В зависимости от времени действия различают *кратковременно* приложенную нагрузку, когда продолжительность действия τ *ударных сил* мала по сравнению с периодом собственных колебаний системы T_c (если $\tau \leq T_c / 4$), и *продолжительную динамическую нагрузку* (если $\tau > T_c / 4$) [113].

Известно, что *все* динамические нагрузки вызывают колебания. *Колебания* определяют как движения, обладающие известной повторяемостью. Сведем все возможные виды колебаний, классифицируемые в зависимости от выбранного признака, в таблицу 7.1.

Таблица 7.1

Виды колебаний

№	Колебания	Классификация
1	по наличию динамической нагрузки	- собственные - вынужденные
2	по виду деформаций, возникающих при колебаниях	- продольные - поперечные - крутильные - смешанные изгибно-крутильные
3	в зависимости от учета сил сопротивления	- затухающие - незатухающие
4	по виду функции отклонений при колебании	- периодические - непериодические
5	по характеру закона изменения восстанавливающей силы при колебании	- линейные - нелинейные
6	по числу степеней свободы	- с одной степенью свободы - со многими степенями свободы - с бесчисленным количеством степеней свободы

7.2 Общие задачи при исследовании колебаний спортивных

снарядов

Анализ выполнения маховых упражнений на снарядах с упругим элементом в качестве опоры показывает наличие двух видов колебаний – свободных и вынужденных.

При *свободных колебаниях* упругая система совершает колебания относительно положения статического равновесия без вмешательства внешних силовых воздействий, т.е. предоставлена самой себе. Другими словами, состояние свободных колебаний опоры наступает в том случае, если балку вывести из состояния равновесия, приложив силу, затем эту силу мгновенно удалить. Под действием сил упругости балка переместится в положение статического равновесия и в некоторый момент достигнет крайнего положения по другую сторону от равновесного состояния. Затем вернется в первоначальное положение, снова изогнется в другую сторону от положения статического равновесия и т.д. Эти колебательные движения упругой системы с переходом ее от одного крайнего положения к другому происходят при отсутствии переменных внешних сил и называются свободными или собственными колебаниями.

Вынужденные же колебания упругих систем происходят под действием изменяющихся внешних сил, называемых вынуждающими или возмущающими. В нашем случае возмущающими силами являются реакции в кинематических парах «рука – опора».

Необходимость исследования свободных колебаний обусловлена тем, что во время выполнения ряда упражнений на спортивных снарядах, например, на перекладине, спортсмен теряет контакт с опорой, которая начинает колебаться при отсутствии нагрузки. Это состояние может оказывать влияние на движение человека в целом, так как спортсмен находится в полетной части упражнения, после которой он вновь входит в контакт со спортивным снарядом (например, грифом перекладины), и продолжает выполнение упражнения.

Возобновление движения человека в контакте со спортивным снарядом может произойти в определенный момент свободного колебания последнего. Отметим, что, во-первых, состояние опоры во время касания человека оказывает влияние на сам контакт: как на кинематические и динамические параметры контакта, так и на возможность его осуществления, а значит, на продолжение упражнения. Данная фаза упражнения является довольно опасной и при недостаточной тренированности, квалификации или просто волнении именно в этот момент происходит падение спортсмена. Практика показывает, что подобное случается достаточно часто и даже на чемпионатах мира спортсмены экстра квалификации не застрахованы от падения. Во-вторых, параметры колебания перекладины в момент контакта с человеком влияют на его дальнейшее движение, т.е. от этого зависит техника выполнения

элементов спортивного упражнения, следующих непосредственно за контактом.

Здесь описана лишь одна из проблем, для решения которой используются модели свободных колебаний механических систем. Второй проблемой, а точнее целью, является создание моделей вынужденных колебаний систем со многими степенями свободы при действии произвольных возмущающих сил. Для их разработки, а также понимания физических закономерностей происходящих процессов, необходимо наличие моделей свободных колебаний. Это фундамент, на котором строятся наши исследования.

Теперь отметим важную особенность вынужденных колебаний спортивного снаряда – эти колебания есть неустановившийся процесс. Подобный характер проявляется вследствие того, что действующая нагрузка является непериодической. При каждом обороте даже в рамках выполнения спортивного упражнения одним спортсменом закон изменения внешних сил может быть разным. По крайней мере, надо исходить из наиболее худшего предположения. Оно усложняет задачу, но зато охватывает все возможные случаи изменения сил на опоре.

Характерной чертой колебаний является то, что в общем случае это колебания пространственные. Рабочая часть спортивного снаряда одновременно деформируется по различным направлениям. В механике для таких случаев используют разложение силовых схем и соответственно деформаций по двум взаимно перпендикулярным плоскостям. Так рассчитывают валы [66, 130].

Для того чтобы математически описать процесс колебаний, т.е. разработать его модель, необходимо разобраться в таком понятии как степень свободы упругой системы, что уже рассматривалось в главе 6. Одним из важнейших выводов, полученных при анализе проблемы, явилось осознание необходимости приведения степени свободы опоры к конечному числу. Приемлемым методом оказался метод замены массы балки одной или несколькими приведенными к определенным точкам массами. Изложенный материал позволяет сделать вывод, что *при выполнении маховых упражнений в гимнастике число степеней свободы спортивного снаряда* при его колебаниях равно удвоенному количеству приведенных масс.*

7.3 Свободные колебания механических систем

Характеристики свободных колебаний, к которым относят *собственные частоты и собственные формы*, полностью определяют индивидуальные динамические свойства механической системы и имеют

* Этот тезис применим к перекладине и женским брусьям. Для мужских брусьев требуется уточнение.

первостепенное значение при анализе ее вынужденных колебаний. Предлагаемый ниже материал ориентируется на работы [10, 12, 101, 102, 112, 113, 118]. Начнем с рассмотрения линейных систем с одной степенью свободы при отсутствии трения*. Причем нами взят случай *малых колебаний* системы около положения ее равновесия. Отсчет обобщенной координаты q будем вести от него же.

Основное дифференциальное уравнение и его решение.

Из теоретической механики известно, что для изучения движения любой механической системы с голономными связями, независимо от количества тел или точек, входящих в систему, подходят уравнения Лагранжа второго рода [118]. С этого и начнем.

Анализ задач, исследованных в различных разделах механики** при расчете на колебания систем, показывает, что балка, защемленная обоими концами, и есть такая голономная система [10, 12, 40, 101, 102, 118]. Добавим, что она является консервативной системой*** со стационарными связями.

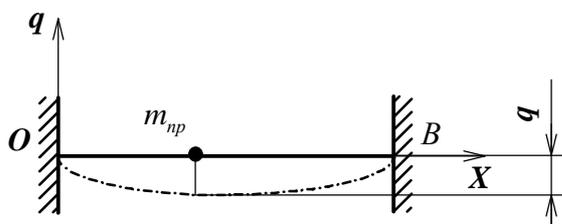


Рисунок 7.1 – Расчетная схема для свободных колебаний балки

Если положение механической системы в пространстве однозначно определено одной величиной q , называемой обобщенной координатой, то это система с одной степенью свободы. Для балки, моделирующей упругую опору, такая расчетная схема показана на рисунке 7.1. Это

балка с приведенной к выбранной точке массой m_{np} , совершающей колебания в одной плоскости. При этом движение системы описывается зависимостью обобщенной координаты q от времени [12] и может принимать в частных случаях значение линейной координаты Y_1 или Z_1 для плоскостей OXY или OXZ , а также оставаться q для произвольной плоскости.

Для консервативной механической системы с одной степенью свободы уравнение Лагранжа имеет форму

* Имеется в виду внутреннее трение, а не внешнее, исследованное в главе 5.

** Теория колебаний, теоретическая и строительная механики, сопротивление материалов и т.д.

*** Консервативной системой называется механическая система, для которой выполняется закон сохранения *механической* энергии.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (7.1)$$

где t – время;
 q – обобщенная координата;
 \dot{q} – обобщенная скорость;
 T – кинетическая энергия;
 Π – потенциальная энергия.

Кинетическая энергия системы со стационарными связями выражается через обобщенные координаты и скорости как

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2, \quad (7.2)$$

где $A(q)$ – положительная функция обобщенной координаты q .

Дальнейшие преобразования основаны на разложении в ряд Маклорена функции обобщенной координаты q в окрестности значения $q=0$. Получим

$$A(q) = A(0) + A'(0)q + \frac{A''(0)}{2!} q^2 + \dots \quad (7.3)$$

Производные функции $A(q)$ являются производными по обобщенной координате q . При малых значениях q в уравнении (7.3) оставляем только первый член, который обозначим через a . В этом случае уравнение (7.2) для кинетической энергии примет вид, сходный с выражением кинетической энергии одной материальной точки:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (7.4)$$

где a – коэффициент инерции (называют также инерционным коэффициентом, а также обобщенной или приведенной массой).

Величина a всегда положительна. Для линейных обобщенных координат коэффициент a имеет *размерность массы*, для угловых координат – *размерность момента инерции* твердого тела.

Потенциальная энергия представляет собой функцию обобщенной координаты q :

$$P = P(q). \quad (7.5)$$

Чаще всего потенциальная энергия обладает свойствами непрерывности и дифференцируемости. Тогда она разлагается в ряд Маклорена в окрестности значения $q=0$:

$$P(q) = P(0) + P'(0)q + \frac{P''(0)}{2!}q^2 + \dots \quad (7.6)$$

Как и для кинетической энергии, члены со штрихами обозначают дифференцирование по обобщенной координате q . Так как положение равновесия выбрано за нулевой уровень потенциальной энергии [10, 12, 16, 101, 118], то $P(0) = 0$. В выражении (7.6) второй член тоже равен нулю, по причине равенства нулю в положении равновесия обобщенной силы:

$$Q = -P' = 0. \quad (7.7)$$

В этом случае разложение (7.6) начнется с третьего члена, т.е. с члена, содержащего вторую степень координаты q . Пренебрегая членами более высокого порядка, получим

$$P = \frac{1}{2}cq^2, \quad (7.8)$$

где c – обобщенный коэффициент жесткости (называют также квазиупругим коэффициентом). Он равен

$$c = P''(0). \quad (7.9)$$

Согласно теореме Лагранжа-Дирехле, потенциальная энергия консервативной системы в положении устойчивого равновесия имеет минимум, т.е. $P''(0) > 0$, что означает $c > 0$ вблизи этого положения.

Подставим в уравнение Лагранжа (7.1) выражения (7.4) и (7.8) для кинетической и потенциальной энергий. Полученное уравнение и есть *основное дифференциальное уравнение* задачи о свободных колебаниях:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \quad (7.10)$$

Для рассматриваемых нами линейных систем с одной степенью свободы без трения уравнения Лагранжа второго рода не являются единственным методом исследования колебаний. Есть и иные способы, иногда более удобные, но все они приводят к формуле (7.10).

Введя обозначение

$$p = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad (7.11)$$

где p - угловая частота незатухающих гармонических колебаний (по другому – собственная частота колебаний),

преобразуем основное дифференциальное уравнение к виду

$$\ddot{q} + p^2 q = 0. \quad (7.12)$$

В теории колебаний известно общее решение подобных уравнений:

$$q = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt. \quad (7.13)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяют, подставляя начальные условия $q(0) = q_0$ и $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Получим

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0}{p}, \quad C_2 = q_0. \quad (7.14)$$

И решение уравнения (7.13) примет вид

$$q = \frac{\dot{q}_0}{p} \sin pt + q_0 \cos pt. \quad (7.15)$$

Существует и вторая форма записи решения основного дифференциального уравнения (7.12). Она является более сжатой:

$$q = A \sin(pt + \alpha), \quad (7.16)$$

где A – амплитуда незатухающих гармонических колебаний.

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{q}_0}{p}\right)^2 + q_0^2}, \quad (7.17)$$

α – начальная фаза колебаний.

$$\alpha = \arctg \frac{pq_0}{\dot{q}_0}, \quad (7.18)$$

$(pt + \alpha)$ – фаза колебаний.

Кинематические параметры. Для получения кинематических

параметров колебания механической системы продифференцируем уравнение (7.16) [40]. На данном этапе отнесем к A как к постоянной интегрирования, которую необходимо определить. Из уравнения (7.16) можно найти величины q_{\max} и q_{\min} наибольших и наименьших прогибов системы в месте размещения массы m_{np} , соответствующие значениям $\sin(pt + \alpha) = 1$ и $\sin(pt + \alpha) = -1$:

$$q_{\max} = -q_{\min} = A. \quad (7.19)$$

Таким образом, амплитуда для конкретных условий колебаний является величиной постоянной (рис. 7.2). В этом случае выражения для скорости и ускорения примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{dq}{dt} = Ap \cos(pt + \alpha), \\ \ddot{q} &= \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{d\dot{q}}{dt} = -Ap^2 \sin(pt + \alpha). \end{aligned} \quad (7.20)$$

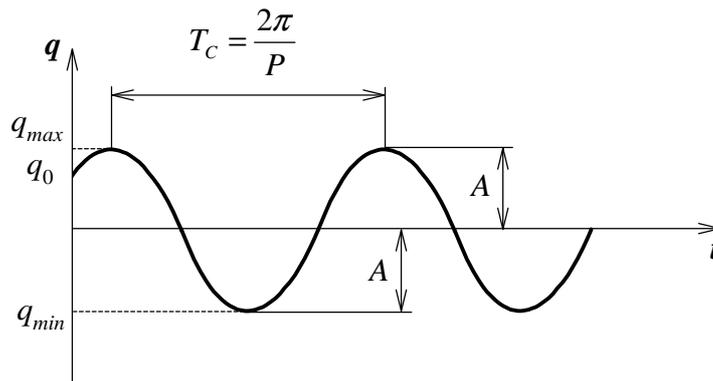


Рисунок 7.2 – График свободных незатухающих колебаний

Снаряд испытывает свободные колебания при наступлении фазы полета спортсмена.

7.4 Свободные колебания систем со многими степенями свободы

Колебания системы со многими степенями свободы отличаются от колебаний системы с одной степенью свободы рядом существенных особенностей. Рассмотрим их на примере линейной механической системы с s степенями свободы при отсутствии трения.

Способы составления дифференциальных уравнений движения. *Основной способ (уравнения Лагранжа).* Для консервативных систем с s степенями свободы имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (7.21)$$

где q_j – обобщенные координаты;
 \dot{q}_j – обобщенные скорости;
 j – номер координаты. $j=1, 2, \dots, s$;
 s – число степеней свободы.

В теории колебаний выведены зависимости между кинетической и потенциальной энергиями и обобщенными координатами. При малых движениях голономной системы со стационарными связями около положения равновесия имеем:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s c_{jk} q_j q_k, \quad (7.22)$$

где $j=1, 2, \dots, s$; $k=1, 2, \dots, s$;
 $a_{jk} = a_{kj}$ – инерционные коэффициенты;
 $c_{jk} = c_{kj}$ – квазиупругие коэффициенты (обобщенные коэффициенты жесткости).

Подстановка выражений (7.22) в уравнение (7.21) дает систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (7.23)$$

Систему дифференциальных уравнений свободных колебаний (7.23) можно составить и без применения уравнений Лагранжа. Для этого есть ряд способов. Получаемые при этом выражения эквивалентны друг другу, но трудоемкость расчетов по ним, связанная с вычислением коэффициентов, может оказаться различной.

Упростим уравнения (7.23) за счет грамотного выбора обобщенных координат. Начнем с рассмотрения в рамках схемы Лагранжа двух важных частных случаев.

1. При составлении системы уравнений выберем обобщенные координаты такими, чтобы $a_{jk} = 0$ при $j \neq k$. Кинетическая энергия определится как

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s a_k \dot{q}_k^2, \quad (7.24)$$

и система дифференциальных уравнений малых свободных колебаний (7.23) примет вид

$$a_j \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^s c_{jk} q_k = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (7.25)$$

В формулах (7.25) вместо a_{jj} записано a_j , так как второй индекс становится лишним.

Такая форма выражений называется *прямой*. Здесь каждое дифференциальное уравнение содержит только по одному члену с обобщенным ускорением \ddot{q}_j .

Получить уравнения в виде (7.25) можно минуя процедуру составления уравнений Лагранжа. Для этого из системы выделяют сосредоточенные массы (твердые тела) и каждая из них рассматривается в качестве свободной материальной точки (свободного тела), находящейся под действием восстанавливающих сил, которые выражаются через выбранные обобщенные координаты. На основании этого записываются соответствующие дифференциальные уравнения движения для материальных точек или тел.

Прямой способ особенно удобен для систем *цепной структуры*^{*}, если в таких системах упругие силы несложно выражаются через перемещения двух соседних тел.

2. Обобщенные координаты выбирают таким образом, чтобы $c_{jk} = 0$ при $j \neq k$. Тогда уравнение потенциальной энергии не будет содержать произведений координат:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s c_k q_k^2, \quad (7.26)$$

а выражение (7.23) примет вид

$$\sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k + c_j q_j = 0, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (7.27)$$

Здесь вместо c_{jj} записано c_j по той же причине, что и в прямом способе. В каждое уравнение входит только по одному члену, содержащему обобщенную координату q_j .

* Таковыми структурами являются пружины и грузы, соединенные в одну цепочку.

Мы получили так называемую *обратную форму* уравнений малых колебаний. Способ противоположен прямому. Приведение системы к обратной форме может быть выполнено и без использования уравнений Лагранжа, например, *методом сил*^{**} [113]. После отделения сосредоточенных масс или твердых тел исследуется безынерционная система жестких и упругих связей, т.е. безмассовый скелет, находящийся под действием сил инерции отделенных частей системы, выражаемых через обобщенные ускорения. После этого составляются статические соотношения для перемещений безмассового (безынерционного) скелета системы. Метод подробно разобран в п. 7.5 и п. 7.8.

Обратная форма уравнений малых колебаний прежде всего удобна для *балочных систем с сосредоточенными массами*, так как для них построение выражения потенциальной энергии в виде квадратичной формы от обобщенных координат представляет некоторые затруднения.

Решение системы дифференциальных уравнений. При выполнении условия устойчивости состояния равновесия (критерии Сильвестра) частное решение системы уравнений записывают как [102]

$$q_j = A_j \sin(pt + \alpha), \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (7.28)$$

Уравнения описывают моногармонический колебательный режим с частотой p , общей для всех координат q_j .

При подстановке выражения (7.28) в уравнения (7.27) получаем систему *алгебраических* уравнений:

$$\begin{aligned} -p^2 a_{11} A_1 - p^2 a_{12} A_2 - \dots - p^2 a_{1s} A_s + c_{11} A_1 + c_{12} A_2 + \dots + c_{1s} A_s &= 0, \\ -p^2 a_{21} A_1 - p^2 a_{22} A_2 - \dots - p^2 a_{2s} A_s + c_{21} A_1 + c_{22} A_2 + \dots + c_{2s} A_s &= 0, \\ -p^2 a_{s1} A_1 - p^2 a_{s2} A_2 - \dots - p^2 a_{ss} A_s + c_{s1} A_1 + c_{s2} A_2 + \dots + c_{ss} A_s &= 0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Такая система линейных однородных алгебраических уравнений всегда имеет тривиальное решение

$$A_1 = A_2 = \dots = A_s = 0, \quad (7.30)$$

соответствующее равновесию системы. При колебаниях все амплитуды не могут равняться нулю, другими словами система уравнений имеет и иные, отличные от нуля, решения для A_s . Математическим условием этого является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов системы^{*} (7.29):

^{**} Это есть метод кинетостатики, основанный на принципе Даламбера.

^{*} По общему свойству однородных систем.

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & c_{12} - a_{12}p^2 & \dots & c_{1s} - a_{1s}p^2 \\ c_{21} - a_{21}p^2 & c_{22} - a_{22}p^2 & \dots & c_{2s} - a_{2s}p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} - a_{s1}p^2 & c_{s2} - a_{s2}p^2 & \dots & c_{ss} - a_{ss}p^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.31)$$

После разворачивания определителя получим *уравнение частот* или *вековое** уравнение

$$b_0 - b_1 p^2 + b_2 p^4 - b_3 p^6 + \dots + (-1)^s b_s p^{2s} = 0, \quad (7.32)$$

где b_j – коэффициенты. Являются положительными величинами.

Вековое уравнение является уравнением степени s относительно p^2 и определяет s значений квадратов собственных частот системы при условии положительности потенциальной энергии. Корни располагают в порядке возрастания и обозначают как $p_1^2, p_2^2, \dots, p_s^2$. Таким образом, значения s частот связаны отношением

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_s \quad (7.33)$$

и образуют спектр собственных частот системы.

Собственные формы. Имеется возможность выразить все амплитуды в каждом уравнении (7.29) через какую-либо из них, например, через первую. При этом используют общее свойство однородных систем алгебраических уравнений, по которому одна из формул становится следствием остальных, и независимых уравнений останется только $s - 1$. Получается, что уравнения (7.29) связывают между собой s амплитуд $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{si}$ [102]. Совокупность отношений

$$\kappa_{2i} = \frac{A_{2i}}{A_{1i}}, \quad \kappa_{3i} = \frac{A_{3i}}{A_{1i}}, \quad \dots, \quad \kappa_{si} = \frac{A_{si}}{A_{1i}} \quad (7.34)$$

определяет относительные амплитуды рассматриваемой i -ой гармоники, т.е. описывает *конфигурацию системы* в процессе свободных колебаний с i -ой собственной частотой. Так как конфигурация определена с точностью до одного произвольного множителя, то масштаб конфигурации остается неопределенным.

Системы, зависящие только от свойств самой системы, получили

* Наименование связано с тем, что в теоретической астрономии аналогичные уравнения служат для определения периодических отклонений в движении планет от эллиптической траектории. Такие периоды исчисляются сотнями лет.

название *собственных форм*. Каждому корню векового уравнения соответствует своя собственная форма, определяемая отношениями (7.34), т.е. число собственных форм равно числу степеней свободы системы [102].

Коэффициенты κ_{ji} называются *коэффициентами собственных форм* и определяются только параметрами самой системы. Их размерность зависит от размерности обобщенных координат. В связи с произвольностью общего масштаба каждой из собственных форм можно любой, но только один, коэффициент формы положить равным единице. Число остальных коэффициентов κ_{ji} равно $s-1$ для каждой собственной формы, т.е. составляет $s(s-1)$ для всех собственных форм.

Так как общее решение представляет собой сумму частных решений типа уравнений (7.28) с p_i , то в конечном итоге перепишем систему уравнений (7.28) через коэффициенты формы как

$$q_j = \sum_{i=1}^s \kappa_{ji} A_{1i} \sin(p_i t + \alpha_i), \quad j=1, 2, \dots, s, \quad p_{1i} = 1; \quad i=1, 2, \dots, s. \quad (7.35)$$

Для определения s амплитуд A_{1i} и стольких же начальных фаз α_i служат $2s$ начальных условия, выражающих значения обобщенных координат и обобщенных скоростей в начальный момент времени.

При подстановке i -го частного решения в систему (7.25) получаем

$$-a_j p_i^2 \kappa_{ji} + \sum_{r=1}^s c_{jr} \kappa_{ri} = 0; \quad j=1, 2, \dots, s; \quad i=1, 2, \dots, s. \quad (7.36)$$

Такое же действие для системы (7.27) дает

$$-p_i^2 \sum_{r=1}^s a_{jr} \kappa_{ri} + c_j \kappa_{ji} = 0; \quad j=1, 2, \dots, s; \quad i=1, 2, \dots, s. \quad (7.37)$$

Отметим несколько моментов, необходимых для изучения в дальнейшем вынужденных колебаний:

1. Любую конфигурацию системы можно разложить по собственным формам колебаний некоторой системы с s степенями свободы.
2. Главные формы взаимно ортогональны, т.е. возможная работа сил каждой формы на перемещениях для любой другой равна нулю. Запишем свойство ортогональности по обратному способу между амплитудами A_{rm} и A_{rn} , определяющими две какие-либо собственные формы, как

$$\sum_{r=1}^s c_r A_{rm} A_{rn} = 0. \quad (7.38)$$

Последний пункт справедлив для n -й и m -й собственных форм.

7.5 Метод сил

Составим уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы, используя метод сил (метод инерционной нагрузки). Он широко применяется в строительной механике, сопротивлении материалов и, во-первых, раскрывает физическую природу колебаний балки, моделирующей спортивный снаряд, а во-вторых, дает возможность определить ряд параметров вынужденных колебаний балки. Используя метод, получают обратную форму уравнений свободных колебаний (7.27).

Расчетная схема представлена на рисунке 7.3. Это случай собственных поперечных колебаний балки в произвольной плоскости, несущей две точечные массы m_{np1} и m_{np2} .

Для метода сил применим известный принцип независимости действия: перемещение, вызванное системой сил, представим в виде суммы перемещений, вызванных отдельными силами \bar{U}_1 и \bar{U}_2 [113]. Перемещения для точек 1 и 2 запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_{11} + q_{12}; \\ q_2 &= q_{21} + q_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

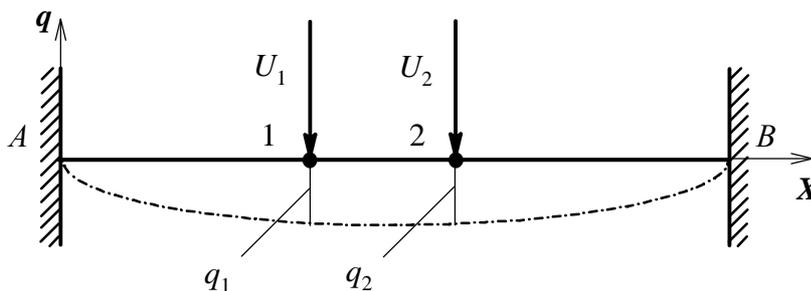


Рисунок 7.3 – Свободные колебания системы с двумя степенями свободы

Для линейно-деформируемой упругой системы перемещения q_{11} , q_{12} , q_{21} , q_{22} , вызванные соответственно силами \bar{U}_1 и \bar{U}_2 , представляем по обобщенному закону Гука как:

$$\begin{aligned} q_{11} &= U_1 \delta_{11}, & q_{12} &= U_2 \delta_{12}, \\ q_{21} &= U_1 \delta_{21}, & q_{22} &= U_2 \delta_{22}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

где δ_{11} - перемещение в точке 1 по направлению силы \bar{U}_1 , вызванное единичной силой $\bar{P}_1=1$;

δ_{12} - перемещение в точке 1 по направлению силы \bar{U}_1 , вызванное единичной силой $\bar{P}_2=1$;

δ_{22} - перемещение в точке 2 по направлению силы \bar{U}_2 , вызванное единичной силой $\bar{P}_2=1$;

δ_{21} - перемещение в точке 2 по направлению силы \bar{U}_2 , вызванное единичной силой $\bar{P}_1=1$.

Уточним: в методе сил используют перемещения от действия единичной силы, приложенной поочередно в каждой из точек. Для нас это точки 1 и 2 (рис. 7.3). Так как параметры деформации балки в любой плоскости от единичных сил, приложенных в одних и тех же точках, одинаковы, то нет необходимости разделять их индексами по плоскостям.

Из свойств коэффициентов при неизвестных вытекает равенство перемещений от единичных сил $\bar{P}_1=1$ и $\bar{P}_2=1$ с различными индексами

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (7.41)$$

Это соотношение называется *теоремой о взаимности перемещений* и формулируется в общем виде следующим образом: *единичные перемещения не меняются от перестановки индексов*. В теории колебаний эти «единичные» перемещения также называются *коэффициентами влияния*. Они подразделяются на два вида. Единичные перемещения с одинаковыми индексами δ_{11} , δ_{22} называются *главными*. Единичные перемещения с различными индексами δ_{12} , δ_{21} называются *побочными*.

Запишем уравнения деформаций (7.39) в развернутой записи как

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= U_1 \delta_{11} + U_2 \delta_{12}; \\ q_2 &= U_1 \delta_{21} + U_2 \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

Подставим выражение каждой силы инерции

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= m_{np1} \ddot{q}_1, \\ U_2 &= m_{np2} \ddot{q}_2, \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

и запишем дифференциальные уравнения колебания системы с двумя степенями свободы в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= m_{np1} \ddot{q}_1 \delta_{11} + m_{np2} \ddot{q}_2 \delta_{12}; \\ q_2 &= m_{np1} \ddot{q}_1 \delta_{21} + m_{np2} \ddot{q}_2 \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

Используя частное решение системы дифференциальных уравнений

вида (7.28)

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(pt + \alpha); \\ q_2 &= A_2 \sin(pt + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Полагаем, что все отклонения происходят в одной фазе. После сокращения на $\sin(pt + \alpha)$ выражения (7.44) примут вид

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= m_{np1} A_1 p^2 \delta_{11} + m_{np2} A_2 p^2 \delta_{12}; \\ A_2 &= m_{np1} A_1 p^2 \delta_{21} + m_{np2} A_2 p^2 \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

Выделим максимальные по времени силы инерции:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= m_{np1} A_1 p^2; \\ U_2 &= m_{np2} A_2 p^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.47)$$

Тогда вместо выражений (7.46) по рекомендации [113] для системы с двумя степенями свободы запишем

$$\left. \begin{aligned} A_{1i} &= U_1 \delta_{11} + U_2 \delta_{12}; \\ A_{2i} &= U_1 \delta_{21} + U_2 \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

Подставим силы инерции

$$\left. \begin{aligned} (m_{np1} p^2 \delta_{11} - 1)A_{1i} + m_{np2} p^2 \delta_{12} A_{2i} &= 0; \\ m_{np1} p^2 \delta_{21} A_{1i} + (m_{np2} p^2 \delta_{22} - 1)A_{2i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

Приравняв определитель системы уравнений нулю, получим

$$(m_{np1} p^2 \delta_{11} - 1)(m_{np2} p^2 \delta_{22} - 1) - m_{np1} m_{np2} p^4 \delta_{12}^2 = 0. \quad (7.50)$$

Раскрытие скобок дает выражение

$$p^4 m_{np1} m_{np2} (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) - p^2 (m_{np1} \delta_{11} + m_{np2} \delta_{22}) + 1 = 0. \quad (7.51)$$

Обозначим $D = (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)$ и $B = (m_{np1} \delta_{11} + m_{np2} \delta_{22})$. Тогда уравнение (7.51) примет компактный вид

$$p^4 m_{np1} m_{np2} D - p^2 B + 1 = 0. \quad (7.52)$$

Решая его относительно p^2 , находим низшую

$$p_1 = \sqrt{\frac{1}{2Dm_{np1}m_{np2}} \left(B - \sqrt{B^2 - 4Dm_{np1}m_{np2}} \right)} \quad (7.53)$$

и высшую

$$p_2 = \sqrt{\frac{1}{2Dm_{np1}m_{np2}} \left(B + \sqrt{B^2 - 4Dm_{np1}m_{np2}} \right)} \quad (7.54)$$

частоты.

Общее решение системы дифференциальных уравнений собственных колебаний складывается из частных решений вида (7.45) и отражают сложное движение (рис. 7.4). Имеем

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_{11} \sin(p_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(p_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= A_{21} \sin(p_1 t + \alpha_1) + A_{22} \sin(p_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

где A_{11} , A_{21} – частные амплитуды колебаний, соответствующие первой форме колебаний с частотой p_1 ;

A_{12} , A_{22} – частные амплитуды колебаний, соответствующие второй форме колебаний с частотой p_2 .

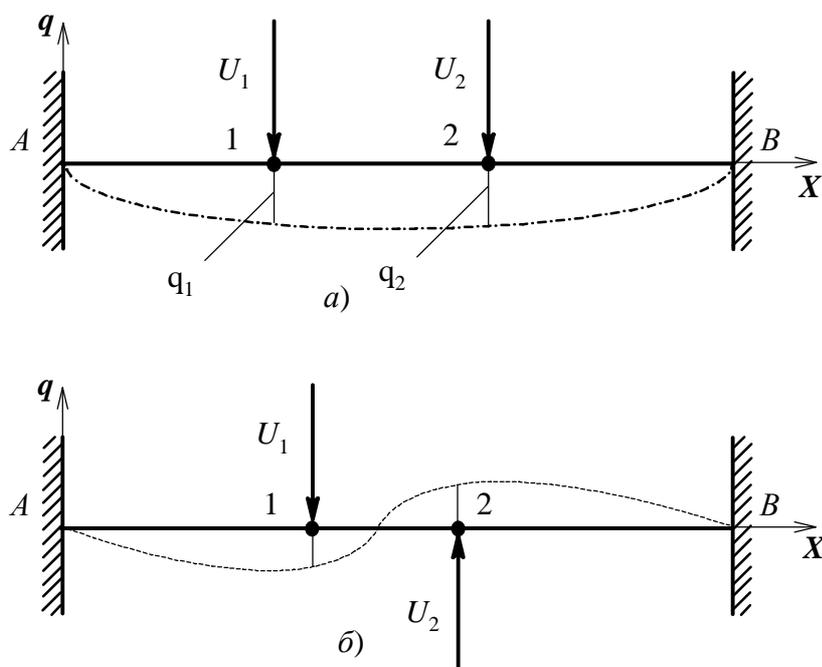


Рисунок 7.4 – Главные формы колебаний: а) первая форма;

б) вторая форма

Под главной формой колебаний понимают форму отклонений системы, соответствующую данной частоте, для которой $\sin(p_i t + \alpha) = 1$.

Запишем выражения для коэффициентов собственных форм, следующих из уравнений (7.49):

$$\kappa_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{\delta_{21} m_{np1} p_1^2}{\delta_{22} m_{np2} p_1^2 - 1}, \quad \kappa_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{\delta_{21} m_{np1} p_2^2}{m_{np2} p_2^2 \delta_{22} - 1}. \quad (7.56)$$

Используя в дальнейшем эти коэффициенты, получают колебания системы, определяемые изменением только одной нормальной координаты.

7.6 Динамические нагрузки и медленно изменяющиеся силы

При рассмотрении случаев действия динамической нагрузки, ничего не говорилось о критериях, по которым конкретную нагрузку относят к статическому или к динамическому нагружению. В теории механических колебаний этот вопрос является немаловажным, так как при неверной оценке задачи можно вместо простого расчета при статическом нагружении затеять громоздкий и ненужный динамический анализ. В работе [101] указывается, что ни длительность действия нагрузки, ни темп ее изменения во времени сами по себе ничего не означают, так как не меньшую роль играют и собственные свойства механической системы, к которой нагрузка прикладывается.

Сошлемся на пример расчета одного весьма интересного случая, приведенного там же со ссылкой на А.Н. Крылова*. При выстреле из артиллерийского орудия длительность давления газов на стенки орудия составляет 0,01 секунды, но при изучении радиальных колебаний ствола такое нагружение можно считать статическим! Существуют и противоположные случаи, когда за динамическую принимают нагрузку, монотонно возрастающую и затем монотонно в течение нескольких секунд убывающую до нуля.

В работе [101] дан анализ различных случаев нагружения и расчет некоторых количественных характеристик. Для лучшего понимания вопроса начнем с простого случая, позволяющего легко понять используемый принцип. Пусть изучается механическая система с одной

* Алексей Николаевич Крылов (1863-1945) – кораблестроитель, механик и математик. Академик (с 1916 г.), преподавал в течение почти пятидесяти лет в Морской академии в Петербурге (Ленинграде). Пример взят из книги «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах» (§ 123).

степенью свободы, нагруженная длительно действующей гармонической вынуждающей силой $F_0 \sin \omega t$. Перемещения системы в процессе установившихся вынужденных колебаний обозначим через обобщенную координату $q(t)$, т.е. через перемещения системы в процессе вынужденных колебаний. Такое обозначение выбрано специально, чтобы не привязываться к конкретной плоскости, в которой происходят колебания. Уравнение вынужденных гармонических колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + p^2 q = F_0 \sin \omega t. \quad (7.57)$$

Тогда в качестве решения дифференциального уравнения получим

$$q(t) = A \sin \omega t. \quad (7.58)$$

Амплитуду вынужденных колебаний запишем как

$$A = \frac{F_0}{c(1 - \omega^2 / p^2)}. \quad (7.59)$$

Отношение амплитуды колебаний к перемещению F_0 / c , вызванному статически действующей силой F_0 (т.е. при $\omega \rightarrow 0$):

$$K_A = \frac{c|A|}{F_0} = \left| \frac{1}{1 - \omega^2 / p^2} \right| \quad (7.60)$$

назовем *коэффициентом динамичности по амплитуде*. Указано [101], что при малых значениях отношения ω/p коэффициент K_A мало отличается от единицы. Предлагается *пренебрегать* динамическими эффектами, составляющими *менее 5%* от статических. В этом случае статической можно считать такую силу, при действии которой коэффициент динамичности по амплитуде не превосходит значения 1,05. Решение уравнения (7.60) с учетом этой величины дает значение $\omega/p < 0,218$ или

$$\frac{T_B}{T_C} > 4,59, \quad (7.61)$$

где T_B – период вынуждающей силы;

T_C – собственный период системы.

Округляя последний результат, авторы [101] отмечают, что гармоническую вынуждающую силу можно считать статической, если ее период, по крайней мере, в пять раз превосходит собственный период колебаний системы.

Приведенный пример дает ясное представление о том, в каких случаях гармоническую вынуждающую силу можно считать статической.

Теперь разберем случай действия на систему с одной степенью свободы силы, возрастающей по линейному закону $F = \beta t$, а затем при $t > t_*$ остающейся постоянной. В работе [101] эту силу при достаточно больших значениях времени t_* считают статической, а при весьма малых значениях t_* – внезапно приложенной. Указано, что при постепенном убывании t_* коэффициент динамичности будет увеличиваться от единицы до двух.

Данную задачу необходимо разбить на несколько вспомогательных. Воспользуемся принципом независимости действия сил. Считаем воздействие, показанное на рисунке 7.5, а, суммой воздействий, представленных на рисунках 7.5, б, в. Для случая действия силы по закону, изображенному на рисунке 7.5, б, дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + cq = \beta t. \quad (7.62)$$

При записи общего решения с нулевыми начальными условиями получим для $t > 0$:

$$q = \frac{\beta t}{c} - \frac{\beta \sin pt}{cp}. \quad (7.63)$$

Данное выражение можно использовать и во второй вспомогательной задаче, при изменении силы по закону, представленному на рисунке 7.5, в. В этом случае необходимо изменить знак q и вместо t подставить $t - t_*$. Для $t > t_*$ получим

$$q = - \left[\frac{\beta(t - t_*)}{c} - \frac{\beta \sin p(t - t_*)}{cp} \right]. \quad (7.64)$$

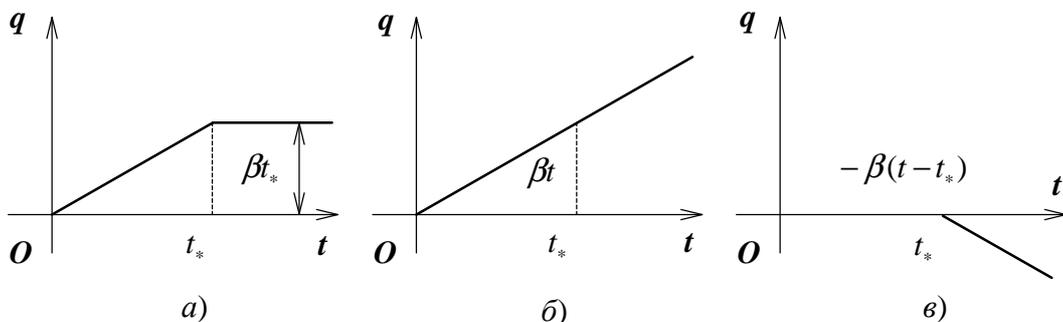


Рисунок 7.5 – а) сила, действующая на систему с одной степенью свободы; б) первая составляющая силы; в) вторая составляющая силы

Вернемся к исходной задаче, когда прикладывают статическую нагрузку, в первоначальный период изменяющуюся по линейному закону. Движение, соответствующее воздействию по рисунку 7.5, а и определяемое как сумма воздействий по рисункам 7.5, б, в, находится сложением решений (7.63) и (7.64) как:

при $0 < t < t_*$

$$q = \frac{\beta t}{c} - \frac{\beta \sin pt}{cp}, \quad (7.65)$$

при $t > t_*$

$$q = \frac{\beta t_*}{c} - \frac{\beta}{cp} 2 \sin \frac{pt_*}{2} \cos p(t - \frac{t_*}{2}). \quad (7.66)$$

Первое слагаемое есть деформация, вызываемая статической силой βt_* , а второе слагаемое – динамическая добавка с максимальным значением $\left| \frac{2\beta}{cp} \sin \frac{pt_*}{2} \right|$. Понятно, что при любых значениях pt_* ее величина не превосходит $\left| \frac{2\beta}{cp} \right|$, поэтому относительная динамическая добавка составляет не более чем

$$\frac{2\beta/(cp)}{\beta t_*/c} = \frac{2}{pt_*}. \quad (7.67)$$

Как и ранее, считаем силу статической, если найденная величина не превосходит 0,05. Данное условие выполняется при $pt_* > 40$, т.е.

$$\frac{t_*}{T_c} > 6,37. \quad (7.68)$$

Полученное отношение показывает, что *длительность линейного возрастания силы должна превосходить не менее чем в 6,4 раза собственный период колебаний системы*. Оценка впервые получена И.Г. Бубновым.

В разрезе исследуемой темы выражение (7.68) имеет практический интерес. При выполнении спортивных упражнений имеются моменты,

когда снаряд нагружен одной или несколькими силами, которые без предварительного анализа трудно классифицировать как статические или как динамические. Например, в гимнастике при выполнении упражнений на перекладине или брусках* происходит изменение положения одной или двух рук (для двух рук одновременно или последовательно) на спортивном снаряде [91, 98, 106]. Часто в этот момент тело спортсмена находится в неподвижном состоянии. Возникает вопрос – снятие или приложение нагрузки от одной руки и увеличение нагрузки на оставшуюся в контакте с опорой считать динамическим или статическим нагружением?

Для случая перекладины, если принять линейный закон изменения статической силы в момент приложения, время t_* для статического нагружения должно составлять

$$t_* > 6,37T_c. \quad (7.69)$$

Пример. Выполним расчет для перекладины с типовыми параметрами. Результаты сравнения с критериями динамичности нагрузки по условию (7.69) сведем в таблицу 7.2. Период собственных колебаний балки, жестко заземленной обоими концами, найдем по [25]:

$$T_c \approx \frac{\pi}{5} \sqrt{\frac{m_0 \ell^3}{5EI}} = \frac{\pi}{5} \sqrt{\frac{11,6 \cdot 2400^3}{5 \cdot 2,2 \cdot 10^5 \cdot 30172}} = 1,38 \text{ с}. \quad (7.70)$$

За исходные данные для этой задачи взяты результаты расчета балки в главе 4, п. 4.6. Полученное значение T_c занесем в таблицу 7.2.

Таблица 7.2

Критерии динамического нагружения

$d, \text{ мм}$	$T_c, \text{ с}$	$t_* < 6,37T_c, \text{ с}$
28	1,38	< 8,8

Анализ показывает, что для перекладины при любой разумной скорости приложения нагрузки последнюю следует считать динамической. Поэтому даже простой вис в статическом положении при постепенном нагружении создает динамическую силу.

* Любых, мужских или женских.

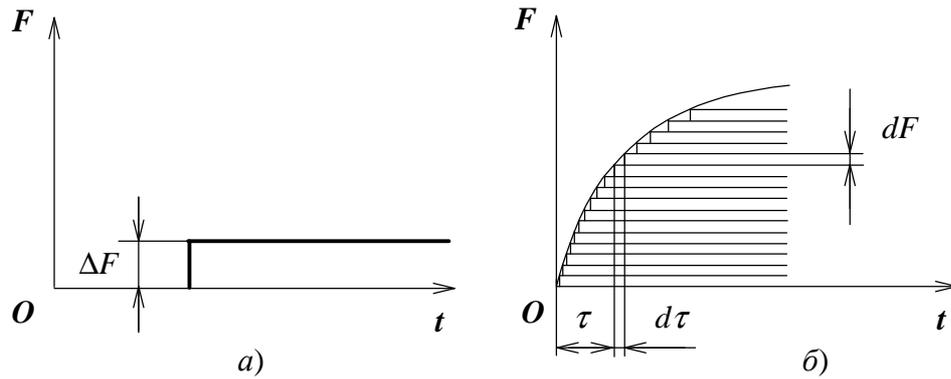


Рисунок 7.6 – а) Скачок внешней силы; б) замена непрерывной силы последовательностью бесконечно малых скачков

Перед анализом общего случая, исследованного А.Н. Крыловым, рассмотрим вспомогательную задачу о действии произвольной вынуждающей силы $F(t)$. Изучим действие скачка (рис. 7.6, а, б), представляющего собой силу $\Delta F = const$, прикладываемую к системе в момент времени τ . Движение системы описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + p^2 q = \frac{\Delta F}{a} \quad \text{при } t \geq \tau. \quad (7.71)$$

Его общее решение имеет вид

$$q = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt + \frac{\Delta F}{c}. \quad (7.72)$$

После подстановки начальных условий $q = 0$, $\dot{q} = 0$, при $t = \tau$ можно найти постоянные интегрирования. Получим:

$$C_1 = -\frac{\Delta F}{c} \sin p\tau, \quad C_2 = -\frac{\Delta F}{c} \cos p\tau. \quad (7.73)$$

Вместо выражения (7.72) получим

$$q = \frac{\Delta F}{c} [1 - \cos p(t - \tau)] \quad (t \geq \tau). \quad (7.74)$$

Теперь представим произвольную вынуждающую силу F на рисунке 7.6, а в виде последовательности бесконечно малых скачков, соответствующих горизонтальным полоскам на рисунке 7.6, б. Для одного

скачка в решение (7.74) подставим выражение

$$\Delta F = \dot{F}(\tau)d\tau \quad (7.75)$$

и проинтегрируем полученное уравнение. В итоге имеем решение:

$$q = \frac{F(t)}{c} - \frac{1}{c_0} \int_0^t \dot{F}(\tau) \cos p(t-\tau) d\tau. \quad (7.76)$$

Анализ выражений показывает, что первый член представляет собой перемещение, которое было бы вызвано силой $F(t)$ при ее статическом действии, а второе слагаемое имеет смысл динамической поправки. В общем виде имеем

$$q = q_c - \Delta q_d, \quad (7.77)$$

где q_c – статический прогиб.

$$q_c = \frac{F(t)}{c}, \quad (7.78)$$

Δq_d – динамическая поправка.

$$\Delta q_d = \frac{1}{c_0} \int_0^t \dot{F}(\tau) \cos p(t-\tau) d\tau. \quad (7.79)$$

Выражения получены из предположения непрерывности, т.е. отсутствия разрывов (конечных скачков). При наличии же таких разрывов их необходимо особо выделить. При этом в уравнения (7.76) дополнительно вводят слагаемые типа (7.74). Тогда ΔF есть значение конечного скачка.

Данный вариант был предложен А.Н. Крыловым в 1909 г. Для того чтобы получить его оценку динамичности, преобразуем абсолютное значение динамической поправки:

$$\begin{aligned} \Delta q_d = \frac{1}{c} \left| \int_0^t \dot{F}(\tau) \cos p(t-\tau) d\tau \right| &= \left| \frac{\cos pt}{c} \int_0^t \dot{F}(\tau) \cos(p\tau) d\tau + \right. \\ &\left. + \frac{\sin pt}{c} \int_0^t \dot{F}(\tau) \sin(p\tau) d\tau \right|. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Положим в уравнении

$$A_D = \int_0^t \dot{F}(\tau) \cos(p\tau) d\tau, \quad B_D = \int_0^t \dot{F}(\tau) \sin(p\tau) d\tau. \quad (7.81)$$

Перепишем выражение (7.80) в виде

$$\Delta q_D = \left| \frac{A_D}{c} \cos(pt) + \frac{B_D}{c} \sin(pt) \right|. \quad (7.82)$$

Наибольшее значение поправки удовлетворяет условию

$$\Delta q_D \leq \frac{1}{c} \sqrt{A_D^2 + B_D^2}. \quad (7.83)$$

Последуем за рассуждениями А.Н. Крылова дальше. Им рассмотрен случай, когда период свободных колебаний системы значительно меньше продолжительности нарастания силы. Предположим, что сила в течение некоторого времени t_* монотонно растет до максимального значения, а потом постепенно убывает.

Определим наибольшее абсолютное значение динамической поправки Δq_D для некоторого момента $t \leq t_*$, т.е. на восходящей ветви кривой $F = F(t)$. В подынтегральных произведениях выражений (7.81) первый множитель на интервале $[0, t_*]$ положительный, а вторые множители периодически меняют знаки.

Покажем закон изменения силы на рисунке 7.7, а. Тогда зависимость производной от времени укажем на рисунке 7.7, б.

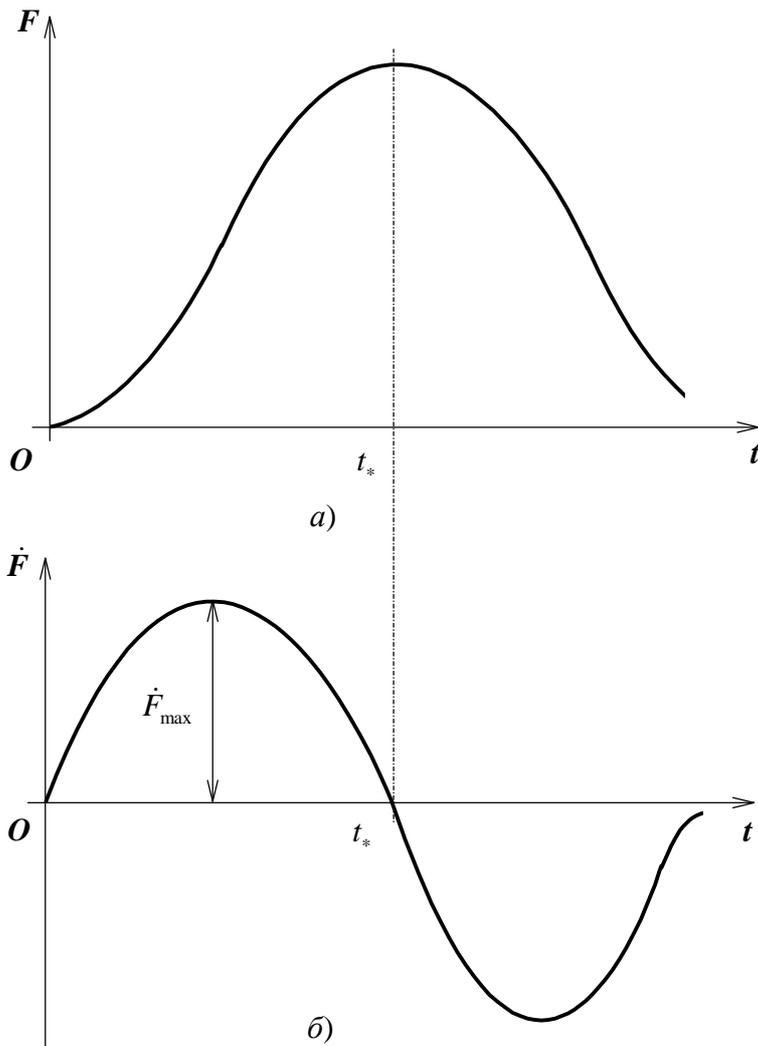


Рисунок 7.7 - а) зависимость силы от времени; б) зависимость производной силы от времени

Разобьем исследуемый промежуток времени на частные промежутки, в которых функции $\cos pt$ и $\sin pt$ сохраняют знак. Период свободных колебаний системы составляет $T_C = \frac{2\pi}{p}$. Тогда для вычисления A_D примем следующие промежутки:

$$\left[0, \frac{T_C}{4}\right], \left[\frac{T_C}{4}, \frac{3T_C}{4}\right], \left[\frac{3T_C}{4}, \frac{5T_C}{4}\right], \dots \quad (7.84)$$

Для B_D такими промежутками являются

$$\left[0, \frac{T_C}{2}\right], \left[\frac{T_C}{2}, T_C\right], \left[T_C, \frac{3T_C}{2}\right], \dots \quad (7.85)$$

Согласно выражению (7.81) получим

$$\begin{aligned} A_D = \int_0^t \dot{F}(\tau) \cos p\tau d\tau &= \int_0^{\frac{T_C}{4}} \dot{F}(\tau) \cos p\tau d\tau + \int_{\frac{T_C}{4}}^{\frac{3T_C}{4}} \dot{F}(\tau) \cos p\tau d\tau + \\ &+ \int_{\frac{3T_C}{4}}^{\frac{5T_C}{4}} \dot{F}(\tau) \cos p\tau d\tau + \dots \end{aligned} \quad (7.86)$$

Видно, что в первом интеграле величина $\cos p\tau$ все время положительная, во втором отрицательная, в третьем положительная и т.д. Функция $\dot{F}(\tau)$ своего знака не меняет и все время положительная. Это дает возможность применить для каждого интеграла теорему о среднем значении. Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{T_C}{4}} \dot{F}(\tau) \cos p\tau d\tau &= \dot{F}(\tau_1) \int_0^{\frac{T_C}{4}} \cos p\tau d\tau = \frac{T_C}{\pi} \dot{F}(\tau_1), \\ \int_{\frac{T_C}{4}}^{\frac{3T_C}{4}} \dot{F}(\tau) \cos p\tau d\tau &= \dot{F}(\tau_2) \int_{\frac{T_C}{4}}^{\frac{3T_C}{4}} \cos p\tau d\tau = -\frac{T_C}{\pi} \dot{F}(\tau_2) \end{aligned} \right\} \quad (7.87)$$

и т.д. Здесь $0 < \tau_1 < \frac{T_C}{4}$, $\frac{T_C}{4} < \tau_2 < \frac{3T_C}{4}$, ..., т.е. τ_1, τ_2, \dots - некоторые промежуточные значения времени внутри последовательных интервалов. Значит, имеем

$$A_D = \frac{T_C}{\pi} \left[\frac{1}{2} \dot{F}(\tau_1) - \dot{F}(\tau_2) + \dot{F}(\tau_3) - \dots \right]. \quad (7.88)$$

Скорость изменения нагрузки $\dot{F}(\tau)$ в интервале $[0, t_*]$ имеет лишь один максимум, что видно на рисунке 7.7, б. Это позволяет утверждать, что абсолютная величина суммы, записанной в квадратных скобках уравнения (7.88), не может превысить наибольшего из слагаемых. Последнее, в свою очередь, не превосходит максимального значения производной \dot{F} , которую удобно обозначить как \dot{F}_{\max} . В этом случае

можно записать в краткой форме

$$|A_D| \leq \frac{T_c}{\pi} \dot{F}_{\max}. \quad (7.89)$$

Выполнив для B_D такие же выкладки, получим

$$|B_D| \leq \frac{T_c}{\pi} \dot{F}_{\max}. \quad (7.90)$$

Тогда имеем

$$\sqrt{A_D^2 + B_D^2} \leq \frac{T_c}{\pi} \sqrt{2} \dot{F}_{\max}. \quad (7.91)$$

Уравнение (7.83) примет вид

$$\Delta q_D \leq \frac{T_c}{\pi c} \sqrt{2} \dot{F}_{\max}. \quad (7.92)$$

В выражении можно записать для одного из отношений следующее:

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} < \frac{1}{2}$$

и тогда имеем

$$\Delta q_D < \frac{T_c}{2c} \dot{F}_{\max}. \quad (7.93)$$

Отмечено, что величина $\frac{T_c}{2} \dot{F}_{\max}$ имеет размерность силы и представляет собой наибольшее возможное приращение силы F за промежуток времени $\frac{T_c}{2}$, т.е. за полупериод свободных колебаний. А.Н. Крылов, обозначив эту величину через ΔF_{\max} , получил окончательную формулу для оценки динамической добавки:

$$\Delta q_D < \frac{\Delta F_{\max}}{c}. \quad (7.94)$$

Выражение (7.94) носит название формулы А.Н. Крылова. Ее правая часть есть перемещение, которое могла бы вызвать статически действующая сила ΔF_{\max} . Чем меньше период свободных колебаний, тем

меньше величина ΔF_{\max} , а значит, и величина Δq_D . А.Н. Крылов сделал следующий вывод: «Следовательно, если период свободных колебаний системы настолько мал по сравнению с продолжительностью нарастания силы, действующей на систему, что наибольшая величина действующего усилия за промежуток времени, равный полупериоду свободных колебаний системы, может быть пренебрегаема, то отклонение системы может быть расчисляемо «статически», и погрешность не превосходит той величины, которая соответствует сказанному изменению давления» [101].

Анализ такого предположения применительно к случаю нагружения грифа перекладки показывает следующее. Период собственных колебаний системы составляет 1,38 с (табл. 7.2). Интенсивность же нагружения можно оценить по работе [56]. Приведем расчеты реакций в опорном шарнире в условиях жесткой опоры и их проекции на координатные оси (табл. 7.3) на основании анализа трех кадров, снятых с частотой 20 кадров в секунду.

Таблица 7.3

Значение реакций на жесткой опоре

№ кадра	R_{10} , кгс	R_{10y} , кгс	R_{10z} , кгс
1	333,64	82,31	323,33
2	383,38	-15,14	383,08
3	430,30	-151,8	402,64

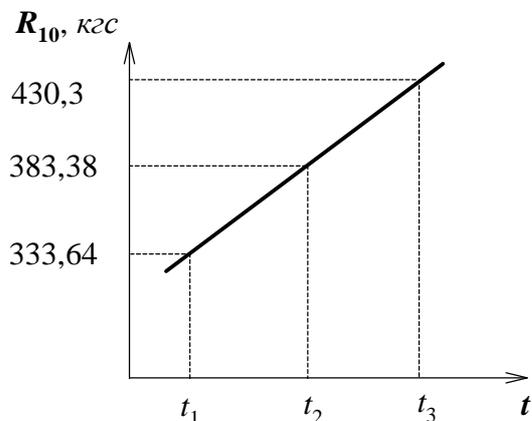


Рисунок 7.8 – Изменение общей опорной реакции R_{10}

Данные примера в таблице 7.3 показывают монотонность возрастания нагрузки, во-первых, и многократное превышение периода собственных колебаний системы по сравнению со временем роста опорной реакции, во-вторых. На рисунке 7.8 показан график изменения общей опорной реакции в кинематических парах «рука – опора». Время монотонного роста силы при заданной частоте кадров равно $3/20=0,15$ с. В относительных величинах изменение силы R_{01} за

расчетное время составит

$$\varepsilon_{R_{01}} = \frac{430,3 - 333,64}{333,64} 100\% = 28,97\% \quad (7.95)$$

по отношению к первоначальной величине. Тем более за полупериод,

составляющий 0,69 с для рассматриваемого типоразмера спортивного снаряда, изменения будут еще больше.

Такая же картина характерна и для изменений проекций силы R_{10y} и R_{10z} , используемых при изучении одновременного колебания упругой опоры в разных плоскостях.

Случай нагружения спортивного снаряда является прямо противоположным по сравнению с рассмотренным А.Н. Крыловым. Период свободных колебаний системы настолько превышает продолжительность нарастания силы, действующей на систему, что *наибольшая величина действующего усилия за промежуток времени, равный полупериоду свободных колебаний системы, не может быть пренебрегаема, и отклонение системы не может быть расчисляемо «статически», а непременно «динамически»*. Погрешность превосходит ту величину, которая соответствует условию (7.94).

Таким образом, обобщая все рассмотренные случаи приложения медленной нагрузки, делаем вывод: ***любая реальная сила, действующая на гриф перекладины и изменяющаяся во времени, является нагрузкой динамической.***

Изложенный в данном параграфе материал для случаев динамического нагружения систем с одной степенью свободы силами, изменяющимися по различным законам, позволяет, с одной стороны, разобраться в подходах, применяемых при оценке динамичности, на наиболее простых случаях нагружения, а, с другой стороны, применить их на практике при анализе деформации упругой опоры от одной произвольной силы для определения параметров прогибов в любой момент времени.

7.7 Действие произвольной возмущающей силы на систему с одной степенью свободы

При выполнении упражнения спортсмен двигается с переменной скоростью, то совершая маховые движения, то замирая, например, в стойке на руках, переходя из динамической части упражнения в статическую. Во время движения спортсмена на опору действуют переменные силы, которые, безусловно, будут вызывать колебания. Эти колебания являются вынужденными, так как деформация спортивного снаряда происходит под действием внешних вынуждающих сил. Силы, вызывающие колебания, меняются по сложному закону, который для каждого выполнения упражнения свой. Несмотря на возможную периодичность упражнения, например, неоднократное выполнение большого оборота вперед или назад на перекладине, закон изменения нагрузки на спортивный снаряд в общем случае не является периодическим, а сами колебания не являются установившимися.

Нас интересуют условия, при которых появляются вынужденные колебания, их параметры, а также влияние на целенаправленное движение биомеханической системы.

Кроме выводов А.Н. Крылова, показанных в предыдущем параграфе, имеются и другие подходы при анализе деформации балки с одной степенью свободы, нагруженной произвольной силой. Применим метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения движения, описанный в [101, 102, 113].

Пусть на систему с одной степенью свободы действует произвольная вынуждающая сила $F(t)$. Сила приложена к точечной массе и предполагается, что закон изменения силы от времени известен. Решение задачи может быть представлено в двух вариантах. Первый рассмотрен в параграфе 7.6. Вторым исследуем здесь.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний представлено формулой (7.10), а его решение формулой (7.13).

Пусть движение вызывается однократным мгновенным импульсом S , прикладываемым к системе в момент времени τ . Начальные условия относятся к моменту времени непосредственно после приложения импульса S и имеют вид

$$q = 0, \quad \dot{q} = \frac{S}{a} \text{ при } t = \tau. \quad (7.96)$$

Подставляя начальные условия, получим постоянные

$$C_1 = \frac{S}{ap} \cos p\tau, \quad C_2 = -\frac{S}{ap} \sin p\tau. \quad (7.97)$$

Решение дифференциального уравнения запишем как

$$q = \frac{S}{ap} \sin p(t - \tau). \quad (7.98)$$

Здесь функция

$$R(t, \tau) = \frac{\sin p(t - \tau)}{ap}, \quad (7.99)$$

описывающая движение, вызываемое единичным импульсом, называется *импульсной реакцией системы*.

Теперь произвольную вынуждающую силу $F = F(t)$ представим в виде последовательности бесконечно малых импульсов $F(t)d\tau$, показанных вертикальными полосками на рисунке 7.9. Тогда получим

$$S = F(\tau)d\tau. \quad (7.100)$$

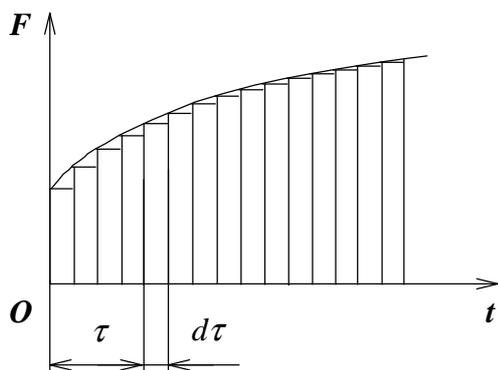


Рисунок 7.9 – Замена непрерывной силы последовательностью бесконечно малых импульсов

В этом случае по уравнению (7.98) рассчитывают колебания, вызванные действием одного из импульсов. Так как силу можно представить в качестве суммы импульсов, то для определения движения, вызываемого заданной силой, необходимо наложить все влияния всех элементарных импульсов*. Получим, что перемещение в момент времени t равно

$$q = \frac{1}{ap_0} \int_0^t F(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau. \quad (7.101)$$

Приведем формулу к виду, позволяющему выполнить вычисления для вынужденных колебаний спортивного снаряда. Преобразуем к следующему равенству:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{ap_0} \int_0^t F(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau = \frac{1}{ap_0} \int_0^t F(\tau) [\sin pt \cos p\tau - \cos pt \sin p\tau] d\tau = \\ &= \frac{\sin pt}{ap} \int_0^t F(\tau) \cos p\tau d\tau - \frac{\cos pt}{ap} \int_0^t F(\tau) \sin p\tau d\tau. \end{aligned} \quad (7.102)$$

Для упрощения расчетов введем дополнительные обозначения. Примем в качестве коэффициентов

$$a_t = \frac{\sin pt}{ap}, \quad b_t = \frac{\cos pt}{ap}. \quad (7.103)$$

В нашем случае имеем $a = m_{np}$. Вместо формулы (7.102) получаем более компактное выражение

* Этот способ вывода указан Дюамелем в 1834 г.

$$q = a_t \int_0^t F(\tau) \cos p \tau d\tau - b_t \int_0^t F(\tau) \sin p \tau d\tau. \quad (7.104)$$

Здесь время изменяется в пределах $0 \leq \tau \leq t$. Уравнение решается с применением численного интегрирования. Можно применить метод Ньютона-Котеса по п. 2.6 главы 2.

7.8 Вынужденные колебания системы со многими степенями свободы при действии произвольных возмущающих сил

Если линейная колебательная система без трения с s степенями свободы нагружена внешними силами, являющимися заданными функциями времени, то уравнения Лагранжа для нее принимают вид [102]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (7.105)$$

где $Q_j = Q_j(t)$ – обобщенные вынуждающие силы, соответствующие избранным обобщенным координатам q_j .

Подставляя общие выражения для кинетической и потенциальной энергии [10, 102] имеем следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (7.106)$$

Можно упростить выражения двумя разными способами и соответственно им получить две разные формы записи формул – прямую и обратную.

Прямая форма имеет вид

$$a_j \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^s c_{jk} q_k = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (7.107)$$

А обратная форма записывается как

$$\sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k + c_j q_j = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (7.108)$$

Нас интересует второй случай. Перейдем от общих уравнений к более конкретным случаям, когда механическая система нагружена произвольными вынуждающими силами. Здесь целесообразен переход к *нормальным (главным) координатам*. При этом вместо системы

дифференциальных уравнений (7.106) или систем (7.107) и (7.108) переходят к системам независимых дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\eta}_j + p_j^2 \eta_j = Q_j^*, \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (7.109)$$

где η_j – нормальные координаты;

p_j – собственные частоты;

Q_j^* – приведенные обобщенные силы.

Теперь решение системы (7.108) сводится к исследованию колебаний ряда независимых систем с одной степенью свободы, изученной в предыдущем п. 7.7 данной главы.

Для перехода от системы (7.108) к системе (7.109) необходимо предварительно найти собственные частоты p_i и коэффициенты собственных форм κ_{ri} . Далее положим

$$q_r = \sum_{i=1}^s \kappa_{ri} \eta_i. \quad (7.110)$$

В этом случае уравнение (7.110) запишем в виде

$$\sum_{r=1}^s a_{jr} \sum_{i=1}^s \kappa_{ri} \ddot{\eta}_i + c_j \sum_{i=1}^s \kappa_{ji} \eta_i = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (7.111)$$

Изменим порядок суммирования в первом слагаемом:

$$\sum_{r=1}^s a_{jr} \sum_{i=1}^s \kappa_{ri} \ddot{\eta}_i = \sum_{i=1}^s \ddot{\eta}_i \sum_{r=1}^s a_{jr} \kappa_{ri} \quad (7.112)$$

и заметим, что входящая сюда сумма по r согласно (7.37) равна

$$\sum_{r=1}^s a_{jr} \kappa_{ri} = \frac{c_j \kappa_{ji}}{p_i^2}, \quad (7.113)$$

$$j=1, 2, \dots, s; \quad i=1, 2, \dots, s.$$

Теперь уравнения (7.109) принимают вид

$$\sum_{i=1}^s \ddot{\eta}_i \frac{c_j \kappa_{ji}}{p_i^2} + c_j \sum_{i=1}^s \kappa_{ji} \eta_i = Q_j \quad (7.114)$$

или в компактной форме

$$c_j \sum_{i=1}^s \kappa_{ji} \left(\frac{\dot{\eta}_i}{p_i^2} + \eta_i \right) = Q_j. \quad (7.115)$$

Умножим каждое из этих равенств на κ_{jm} и затем сложим их:

$$\sum_{j=1}^s \kappa_{jm} c_j \sum_{i=1}^s \kappa_{ji} \left(\frac{\dot{\eta}_i}{p_i^2} + \eta_i \right) = \sum_{j=1}^s Q_j \kappa_{jm}, \quad (7.116)$$

или

$$\sum_{i=1}^s \left(\frac{\dot{\eta}_i}{p_i^2} + \eta_i \right) \sum_{j=1}^s c_j \kappa_{ji} \kappa_{jm} = \sum_{j=1}^s Q_j \kappa_{jm}. \quad (7.117)$$

Согласно свойству ортогональности собственных функций, показанному в п. 7.4, равны нулю все входящие в левую часть суммы по j , кроме той, в которой индекс i совпадает с индексом m . Поэтому запишем (7.117) в виде

$$\left(\frac{\dot{\eta}_m}{p_m^2} + \eta_m \right) \sum_{j=1}^s c_j \kappa_{jm}^2 = \sum_{j=1}^s Q_j \kappa_{jm}. \quad (7.118)$$

Умножим уравнения на p_m^2 . Получим

$$\left(\dot{\eta}_m + p_m^2 \eta_m \right) \sum_{j=1}^s c_j \kappa_{jm}^2 = p_m^2 \sum_{j=1}^s Q_j \kappa_{jm}. \quad (7.119)$$

Окончательно дифференциальные уравнения предстанут в нормальных координатах как

$$\dot{\eta}_m + p_m^2 \eta_m = Q_m^*, \quad m=1, 2, \dots, s, \quad (7.120)$$

где

$$Q_m^* = \frac{p_m^2 \sum_{j=1}^s Q_j \kappa_{jm}}{\sum_{j=1}^s c_j \kappa_{jm}^2}. \quad (7.121)$$

Алгоритм решения следующий:

- определяют собственные формы, т.е. коэффициенты κ_{jm} по (7.34) и собственные частоты p_m по (7.32);

- образуют выражения (7.121);
- составляют независимые уравнения (7.120), каждое из которых описывает движение некоторой системы с одной степенью свободы;
- интегрируют выражения (7.120);
- переходят к первоначальным обобщенным координатам q_r по уравнению (7.110).

Для частного случая, такого как вынужденные колебания механической системы с двумя степенями свободы, можно воспользоваться уравнениями (7.51)-(7.54).

Отметим следующий факт: систему с четырьмя степенями свободы, являющейся балкой с двумя приведенными массами, и одновременно колеблющуюся в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, можно представить в виде двух независимых систем с двумя степенями свободы, испытывающих колебания в своих плоскостях.

Резонанс. В случае равенства частоты возмущающей силы ω одной из собственных частот системы, например, p_s , происходит явление резонанса. Такая частота называется *критической частотой*.

Определение возможных для системы резонансных состояний, т.е. *проверка системы на резонанс*, является одной из важнейших задач расчетов на колебания. При ее решении необходимо представлять, что случай колебаний спортивного снаряда типа перекладины или брусьев разной высоты под воздействием биомеханической системы есть *параметрический резонанс* [102].

7.9 Кинематические параметры обращения опоры

Составим уравнения вынужденных колебаний балки, совершающей движение одновременно в двух плоскостях: OXY и OXZ . Это даст возможность определить линейные скорости и ускорения характерных точек упругой опоры.

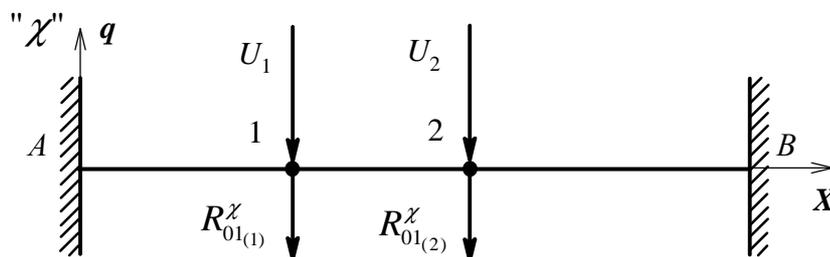


Рисунок 7.10 – Расчетная схема балки с двумя степенями свободы

Пусть масса балки приведена к двум точкам – к опорным шарнирам биомеханической системы 1 и 2 (рис. 7.10). Используем метод

инерционной нагрузки. Получим уравнения вынужденных колебаний в общем виде

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= U_1 \delta_{11} + U_2 \delta_{12} + R_{01(1)}^{\chi} \delta_{11} + R_{01(2)}^{\chi} \delta_{12}; \\ q_2 &= U_1 \delta_{21} + U_2 \delta_{22} + R_{01(1)}^{\chi} \delta_{21} + R_{01(2)}^{\chi} \delta_{22}. \end{aligned} \right\}, \quad (7.122)$$

где $R_{01(1)}^{\chi}$, $R_{01(2)}^{\chi}$ – реакции в опорных шарнирах 1 и 2, соответственно.

Здесь использована произвольная плоскость « χ », и уравнения записаны в проекции на нее. Возбуждающие силы приложены в точках приведения массы балки 1 и 2. Тогда запишем дифференциальные уравнения колебания системы с двумя степенями свободы (в каждой из своих плоскостей) как

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= U_1^Y \delta_{11} + U_2^Y \delta_{12} + R_{01(1)}^Y \delta_{11} + R_{01(2)}^Y \delta_{12}; \\ Y_2 &= U_1^Y \delta_{21} + U_2^Y \delta_{22} + R_{01(1)}^Y \delta_{21} + R_{01(2)}^Y \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.123)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= U_1^Z \delta_{11} + U_2^Z \delta_{12} + R_{01(1)}^Z \delta_{11} + R_{01(2)}^Z \delta_{12}; \\ Z_2 &= U_1^Z \delta_{21} + U_2^Z \delta_{22} + R_{01(1)}^Z \delta_{21} + R_{01(2)}^Z \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.124)$$

Подставим выражение каждой проекции сил инерции

$$\begin{aligned} U_1^Y &= m_{np1} \ddot{Y}_1, & U_2^Y &= m_{np2} \ddot{Y}_2, \\ U_1^Z &= m_{np1} \ddot{Z}_1, & U_2^Z &= m_{np2} \ddot{Z}_2. \end{aligned} \quad (7.125)$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= m_{np1} \ddot{Y}_1 \delta_{11} + m_{np2} \ddot{Y}_2 \delta_{12} + R_{01(1)}^Y \delta_{11} + R_{01(2)}^Y \delta_{12}; \\ Y_2 &= m_{np1} \ddot{Y}_1 \delta_{21} + m_{np2} \ddot{Y}_2 \delta_{22} + R_{01(1)}^Y \delta_{21} + R_{01(2)}^Y \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.126)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= m_{np1} \ddot{Z}_1 \delta_{11} + m_{np2} \ddot{Z}_2 \delta_{12} + R_{01(1)}^Z \delta_{11} + R_{01(2)}^Z \delta_{12}; \\ Z_2 &= m_{np1} \ddot{Z}_1 \delta_{21} + m_{np2} \ddot{Z}_2 \delta_{22} + R_{01(1)}^Z \delta_{21} + R_{01(2)}^Z \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7.127)$$

К этому моменту величины прогибов Y_1 , Y_2 , Z_1 , Z_2 рассчитаны по выражениям (7.110). Решим систему уравнений (7.126), (7.127) относительно ускорений \ddot{Y}_1 , \ddot{Y}_2 , \ddot{Z}_1 , \ddot{Z}_2 . Получим в виде конкретных значений кинематические параметры движения. Для упрощения уравнений введем обозначения

$$\begin{aligned}
d_{11} &= m_{np1} \delta_{11}, & d_{12} &= m_{np2} \delta_{12}, \\
d_{21} &= m_{np1} \delta_{21}, & d_{22} &= m_{np2} \delta_{22}, \\
e_1 &= R_{01(1)}^Y \delta_{11} + R_{01(2)}^Y \delta_{12}, & e_2 &= R_{01(1)}^Y \delta_{21} + R_{01(2)}^Y \delta_{22}, \\
e_3 &= R_{01(1)}^Z \delta_{11} + R_{01(2)}^Z \delta_{12}, & e_4 &= R_{01(1)}^Z \delta_{21} + R_{01(2)}^Z \delta_{22}.
\end{aligned} \tag{7.128}$$

Здесь коэффициенты $d_{ij} = const$, а $e_i = var$. Последние определяются для каждого анализируемого кадра видеосъемки. Заметим, что $d_{12} = d_{21}$ при равенстве приведенных масс $m_{np1} = m_{np2}$. Выразим из вторых уравнений в каждой системе (7.126) и (7.127) соответственно \ddot{Y}_2 и \ddot{Z}_2 :

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_2 &= \frac{Y_2 - d_{21}\ddot{Y}_1 - e_2}{d_{22}} = \frac{Y_2 - e_2}{d_{22}} - \frac{d_{21}}{d_{22}}\ddot{Y}_1 = g_1 - g_2\ddot{Y}_1, \\
\ddot{Z}_2 &= \frac{Z_2 - d_{21}\ddot{Z}_1 - e_4}{d_{22}} = \frac{Z_2 - e_4}{d_{22}} - \frac{d_{21}}{d_{22}}\ddot{Z}_1 = g_3 - g_2\ddot{Z}_1
\end{aligned} \tag{7.129}$$

и подставим значение в первые выражения уравнений (7.126) и (7.127):

$$\begin{aligned}
Y_1 &= d_{11}\ddot{Y}_1 + d_{12}(g_1 - g_2\ddot{Y}_1) + e_1 = \ddot{Y}_1(d_{11} - d_{12}g_2) + d_{12}g_1 + e_1, \\
Z_1 &= d_{11}\ddot{Z}_1 + d_{12}(g_3 - g_2\ddot{Z}_1) + e_3 = \ddot{Z}_1(d_{11} - d_{12}g_2) + d_{12}g_3 + e_3.
\end{aligned} \tag{7.130}$$

Здесь обозначено:

$$g_1 = \frac{Y_2 - e_2}{d_{22}}, \quad g_2 = \frac{d_{21}}{d_{22}} = \frac{m_{np1} \delta_{12}}{m_{np2} \delta_{22}} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}, \quad g_3 = \frac{Z_2 - e_4}{d_{22}}. \tag{7.131}$$

Коэффициенты g_i являются переменными величинами. Решим уравнения (7.130) относительно \ddot{Y}_1 и \ddot{Z}_1 соответственно. Имеем:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_1 &= \frac{Y_1 - d_{12}g_1 - e_1}{d_{11} - d_{12}g_2}, \\
\ddot{Z}_1 &= \frac{Z_1 - d_{12}g_3 - e_3}{d_{11} - d_{12}g_2}.
\end{aligned} \tag{7.132}$$

После этого проекции \ddot{Y}_2 и \ddot{Z}_2 ускорения второго сечения найдем из выражений (7.129).

Отметим, что ускорения соответствующих точек балки можно определить не только аналитически, но и с использованием численных методов дифференцирования. После этого скорости находят одним из

численных методов интегрирования.

Рассмотренный случай расчета параметров колебания механической системы подходит для варианта приведения массы балки к двум точкам, в которых действуют вынуждающие силы. Аналогичным образом можно составить дифференциальные уравнения вынужденных колебаний балки и для других случаев. Например, для случая действия возбуждающих сил в одних точках, при приведении массы балки к одной, причем другой, точке (к центру масс балки и т.д.).

Случай колебания механической системы, моделируемой в дальнейшем вращающейся пружиной, не рассматривается, как более сложный в исследовании. Здесь вероятен вариант получения системы дифференциальных уравнений, решить которых современными методами или сложно или невозможно.

Проанализируем разработанные в данной главе модели вынужденных колебаний механической системы с методической точки зрения, т.е. нас интересует порядок расчета. Предложим следующий вариант:

1. выполнить кинетостатический расчет биомеханической системы в части определения реакций в кинематических парах «рука – опора», действующих на спортивный снаряд, для всех кадров видео- или кино съемки;
2. привести массу опоры к одной или двум точкам, в зависимости от выбранной модели динамической деформации;
3. по выражениям п. 7.7, п. 7.8 найти прогибы характерных точек упругой опоры в плоскостях OXY и OXZ ;
4. для расчета ускорений характерных точек опоры в двух плоскостях использовать уравнения п. 7.9;
5. зная ускорения, вычислить скорости характерных точек опоры, используя численное интегрирование;
6. определить размеры, положение и кинематические параметры пружины (пружин) по моделям п. 5.9, п. 6.6;
7. уточнить новое значение сил реакции в парах «рука – опора» по моделям глав 5 и 10 или 11;
8. повторить п.3-п.7 до достижения заданной точности.

Пункт 1 дает исходные данные для расчета моделей динамической деформации. Получив реакции $R_{01(1)}^Y$, $R_{01(1)}^Z$, $R_{01(2)}^Y$, $R_{01(2)}^Z$ на опоре для каждого кадра, вводят их в дальнейшие расчеты в качестве произвольных вынуждающих сил, действующих на упругую систему и вызывающих колебания последней.

В пункте 2 необходимо выбрать модели динамической деформации, используемые для получения в дальнейшем параметров пружины или пружин и в зависимости от выбора выполнить приведение распределенной массы опоры к одной или двум точкам. Для этого используют

соответствующие модели главы 6.

В пункте 3 определяются прогибы опоры по уравнению (7.104), а также формулам п. 7.8. Характерной особенностью используемых уравнений является их применимость для нахождения только деформаций спортивного снаряда при его колебании, но не кинематических параметров. Это связано с тем, что решение каждого дифференциального уравнения представляет собой интеграл, определяемый численным методом. Продифференцировать уравнение (7.104) в общем виде не представляется возможным. Определение производных первого и второго порядка (расчет скоростей и ускорений) на основе численных решений вышеуказанных моделей является достаточно трудоемкой и сложной задачей. Причем как при всяком численном дифференцировании возможна значительная потеря точности (глава 2, п. 2.1), и этого желательно избегать.

На момент расчета ускорений $\ddot{Y}_1, \ddot{Z}_1, \ddot{Y}_2, \ddot{Z}_2$ характерных точек опоры в плоскостях OXY и OXZ по уравнениям п. 7.9 в пункте 4 мы уже имеем прогибы упругой опоры Y_1, Z_1, Y_2, Z_2 . Поэтому решение дифференциальных уравнений представляет собой простую задачу: в каждой плоскости необходимо решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными (7.126) и (7.127).

В пункте 5 определяются скорости $\dot{Y}_1, \dot{Z}_1, \dot{Y}_2, \dot{Z}_2$ характерных точек опоры методом численного интегрирования, описанным в п. 2.6 главы 2. Именно в этих двух пунктах (п.4 и п.5) видно достоинство предлагаемой методики: мы не дифференцируем полученные значения прогибов Y_1, Z_1, Y_2, Z_2 , теряя в точности, а интегрируем значения, рассчитанные по уравнениям (7.129), (7.132), автоматически сглаживая возможный разброс данных.

Пункт 6 необходим для определения размеров, положения и кинематических параметров пружины, используемой в дальнейшем для описания целенаправленного движения биомеханической системы в условиях упругой опоры. Если пружину, моделирующую движение опоры, размещают в сечении, к которому приводят массу балки, то параметры деформации опоры в нем принимают за параметры пружины. В противном случае необходимо выполнить достаточно простой расчет размеров и кинематических параметров пружины согласно рекомендациям п. 6.6 главы 6.

В пункте 7 снова проводят кинетостатический анализ и уточняют проекции полных реакций на опоре $R_{01(1)}^Y, R_{01(1)}^Z, R_{01(2)}^Y, R_{01(2)}^Z$, т.е. в кинематических парах «рука – опора» по моделям глав 5 и 10 или 11. Конкретный выбор уравнений силового анализа зависит от принятой модели опоры в виде одной или нескольких пружин. И здесь учитывается

сила трения в контакте человека со спортивным снарядом.

Данные расчеты, начиная с п.3, повторяют до достижения необходимой точности ε . Это метод итераций.

7.10 Деформация упругой опоры при ударных нагрузках

Во время выполнения маховых упражнений в гимнастике может наступить фаза удара. При этом опора получит деформацию под действием биомеханической системы, т.е. тела человека. Изменяются кинематические и динамические характеристики не только снаряда, но и параметры движения самого спортсмена.

Ранее отмечался сложный характер взаимодействия человека с опорой при ударе. Это связано как с геометрическими параметрами контакта и следующими из этого методическими сложностями расчета динамического взаимодействия спортивного снаряда с человеком, так и с определением начальных условий контакта со стороны биомеханической системы, определяемых из конечной фазы полетной части упражнения.

Для того чтобы разобраться в механизме явления, начнем анализ с наиболее простого случая. При расчете на удар с учетом массы упругой системы, подвергающейся динамическому воздействию, примем за основу вариант, при котором груз ударяет по невесомой балке в место, где сосредоточена точечная масса. В нашем случае в качестве груза предстает биомеханическая система, а в качестве точечной массы – приведенная масса балки.

Для вывода уравнений применим закон сохранения энергии. В работе [125] отмечено, что энергетический подход является более предпочтительным в тех случаях, когда нужно получить только максимальные значения динамических сил и динамических прогибов, и не ставится задача определения законов движения масс.

В механике различают три вида удара в зависимости от степени восстановления недеформированного состояния – *неупругий удар*, *частично упругий* и *упругий* [12]. При неупругом ударе ударяющее тело не отскакивает от конструкции, а перемещается вместе с ней. В результате центры тяжести соударяющихся тел движутся с одинаковыми скоростями.

Кроме такого разделения ударов существует классификация ударов по взаимному расположению центров масс, направлению их скоростей и положению точки соприкосновения ударяющихся тел. Для того, чтобы определиться в характеристиках удара для нашего случая, введем несколько понятий. Линию, соединяющую центры тяжести соударяющихся тел, назовем линией центров. Тогда центральным будет удар, если точка соприкосновения тел лежит на линии центров, а касательная плоскость, проведенная в точке соприкосновения к поверхностям этих тел, перпендикулярна к данной линии. Если скорости

центров тяжести соударяющихся тел в начале удара лежат на линии центров, то такой удар назовем прямым. Если же один из векторов скорости ЦМ тел в начале удара не лежит на линии центров, удар считается косым.

На рисунке 7.11 представлен прямой центральный удар.

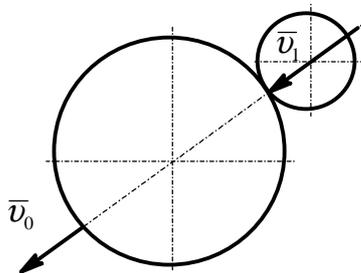


Рисунок 7.11 – Прямой центральный удар

Отметим особенность удара биомеханической системы по окончании полетной части упражнения – в момент касания происходит захват руками опоры, и в дальнейшем, даже при косом ударе, система тел начинает двигаться как одно целое, т.е. векторы скоростей опоры и рук (кистей) становятся равными по величине и направлению. Более сложный случай, когда при ударе происходит одновременное скольжение (вращение) рук вокруг круглой

опоры или на контакт влияет нежесткость элементов рук и тела, не рассматривается. На данном этапе начальные параметры удара конкретизировать не будем, просто укажем массу груза как $m_{гр}$, а скорость его центра тяжести как $v_{гр}$.

При выполнении упражнения спортсмен может удариться о спортивный снаряд двумя руками или телом. Несмотря на то, что поверхность по которой наносится удар, может быть соизмерима с поверхностью балки, примем допущение, что удар сосредоточен в точке.

Проанализируем взаимодействие тела спортсмена с неподвижной опорой. При таких допущениях можно рассматривать удар в качестве *центрального, прямого и неупругого*, и это удар в одной точке. В этом случае различают три характерных момента [12, 40, 113]:

1. Момент, предшествующий соприкосновению груза весом $G_{гр}$ с упругой опорой, когда его скорость равна $v_{гр}$, а скорость массы опоры $m_{оп}$ равна нулю, $v_{оп}=0$.
2. Момент соприкосновения груза весом $G_{гр}$ с опорой. Скорость груза v_c равна скорости движения спортивного снаряда в месте удара.
3. Момент реализации упругой опорой максимального перемещения.

При этом скорости груза весом $G_{гр}$ и опоры весом $G_{оп}$ равны нулю.

Скорость биомеханической системы $v_{гр}$, представленной в виде груза, определяется из условия, что при неупругом ударе количество движения до удара равно количеству движения после удара, т.е.

$$m_{гр} v_{гр} = (m_{гр} + m_{оп}) v_c, \quad (7.133)$$

или через вес

$$\frac{G_{zp} v_{zp}}{g} = \frac{G_{zp} + G_{np}}{g} v_C. \quad (7.134)$$

Из данного уравнения получим

$$v_C = \frac{G_{zp}}{(G_{zp} + G_{np})} v_{zp}. \quad (7.135)$$

Рассмотрим удар груза, имеющий две составляющие скорости – вертикальную и горизонтальную. Другими словами, тело человека одновременно бьет в вертикальной плоскости и сбоку по горизонтали.

Обозначим наибольшее перемещение сечения в месте удара по направлению вектора скорости груза v_{zp} как Δ_{max} . На рисунке 7.12, а представлена пространственная схема балки. Рисунок 7.12, б показывает удар в плоскости OYZ . Потенциальная энергия, накопленная системой в момент максимальных деформаций Δ_{max} , равна сумме кинетической энергии системы T в момент соприкосновения с ней груза G_{zp} и работе W , которую произведут силы G_{zp} и G_{np} на вертикальном перемещении $\Delta_{max} \sin \gamma$ после удара (в потенциальном поле) [40]. Здесь первоначальным прогибом опоры под действием собственного веса пренебрегаем из-за его малости. Тогда кинетическую энергию запишем как

$$T = \frac{(G_{zp} + G_{np}) v_C^2}{2g}, \quad (7.136)$$

а работу найдем через произведение сил на вертикальное перемещение

$$W = (G_{zp} + G_{np}) \Delta_{max} \sin \gamma. \quad (7.137)$$

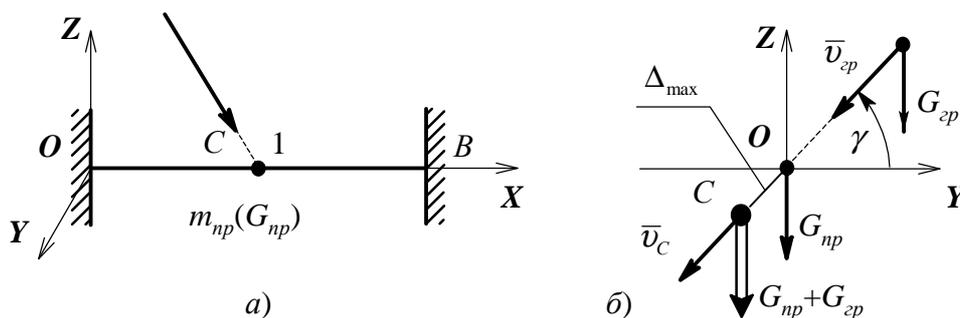


Рисунок 7.12 – Боковой удар под углом в плоскости OYZ

Тогда получим общее выражение для потенциальной энергии системы после удара:

$$U = T + W = \frac{(G_{zp} + G_{np})v_C^2}{2g} + (G_{zp} + G_{np})\Delta_{\max} \sin \gamma. \quad (7.138)$$

В работе [40] указано, что в момент времени, когда система получает наибольшее перемещение Δ_{\max} , грузы G_{zp} и G_{np} оказывают на систему максимальное давление, равное $(G_{zp} k_D + G_{np})$, где k_D – динамический коэффициент.

Выразим ту же потенциальную энергию, запасенную системой после удара, через силу $(G_{zp}k_D+G_{np})$ и полное перемещение Δ_{\max} . Имеем

$$U = \frac{G_{zp}k_D + G_{np}}{2} \Delta_{\max}. \quad (7.139)$$

Приравняем уравнения (7.138) и (7.139):

$$\frac{(G_{zp} + G_{np})v_C^2}{2g} + (G_{zp} + G_{np})\Delta_{\max} \sin \gamma = \frac{G_{zp}k_D + G_{np}}{2} \Delta_{\max}. \quad (7.140)$$

После подстановки в последнее выражение скорости v_C по уравнению (7.135) получим

$$\frac{G_{zp}^2 v_{zp}^2}{g(G_{zp} + G_{np})} + 2(G_{zp} + G_{np})\Delta_{\max} \sin \gamma - (G_{zp}k_D + G_{np})\Delta_{\max} = 0. \quad (7.141)$$

Введем обозначение прогиба системы под грузом G_{zp} от статического действия этого груза $\Delta_{ст}$. Зависимость между статическими и динамическими перемещениями определяется гипотезой лорда Рэля о подобии эпюр перемещений при ударе и от статического нагружения [40]. Запишем

$$\Delta_{\max} = \Delta_{ст} k_D. \quad (7.142)$$

Подставим выражение (7.142) в уравнение (7.141)

$$\frac{G_{zp}^2 v_{zp}^2}{g(G_{zp} + G_{np})} + 2(G_{zp} + G_{np})k_D \Delta_{ст} \sin \gamma - (G_{zp}k_D + G_{np})k_D \Delta_{ст} = 0 \quad (7.143)$$

и приведем его к виду

$$k_{\text{д}}^2 - \left[2 \sin \gamma + \frac{G_{\text{нп}}}{G_{\text{зп}}} (2 \sin \gamma - 1) \right] k_{\text{д}} - \frac{v_{\text{зп}}^2}{g \Delta_{\text{см}} \left(1 + \frac{G_{\text{нп}}}{G_{\text{зп}}} \right)} = 0. \quad (7.144)$$

Для упрощения формулы удобнее ввести коэффициент, зависящий от угла, под которым груз ударяет по балке, а также от соотношения приведенной массы балки и массы груза. Обозначим

$$h_{\gamma} = 2 \sin \gamma + \frac{G_{\text{нп}}}{G_{\text{зп}}} (2 \sin \gamma - 1). \quad (7.145)$$

Если использовать запись приведенной массы через коэффициент приведения, то h_{γ} можно записать как

$$h_{\gamma} = 2 \sin \gamma + \frac{k_{\text{нп}} G_0}{G_{\text{зп}}} (2 \sin \gamma - 1). \quad (7.146)$$

В более компактной форме имеем квадратное уравнение

$$k_{\text{д}}^2 - h_{\gamma} k_{\text{д}} - \frac{v_{\text{зп}}^2}{g \Delta_{\text{см}} \left(1 + \frac{G_{\text{нп}}}{G_{\text{зп}}} \right)} = 0. \quad (7.147)$$

Решая его, получим

$$k_{\text{д}} = \frac{h_{\gamma}}{2} + \sqrt{\frac{h_{\gamma}^2}{4} + \frac{v_{\text{зп}}^2}{g \Delta_{\text{см}} \left(1 + \frac{k_{\text{нп}} G_0}{G_{\text{зп}}} \right)}}. \quad (7.148)$$

Отметим, что полученное уравнение для динамического коэффициента отличается от случаев вертикального или горизонтального ударов, рассмотренных в [40]. Оно охватывает оба варианта.

В частном случае, когда можно пренебречь массой упругой опоры и считать $G_0=0$, получим для удара по неподвижной опоре

$$k_{\text{д}} = \sin \gamma + \sqrt{\sin^2 \gamma + \frac{v_{\text{зп}}^2}{g \Delta_{\text{см}} \left(1 + \frac{k_{\text{нп}} G_0}{G_{\text{зп}}} \right)}}. \quad (7.149)$$

Если начальная скорость удара биомеханической системы $v_{zp} = 0$, то получаем динамическую деформацию, отличающуюся от статической в $k_D = \sin \gamma + |\sin \gamma|$ раз*, а именно:

$$\Delta_{\max} = (\sin \gamma + |\sin \gamma|) \Delta_{cm}. \quad (7.150)$$

Для удара сверху под произвольным углом имеем $0 \leq \gamma \leq \pi$, и $\sin \gamma \geq 0$. Тогда получим

$$\Delta_{\max} = 2\Delta_{cm} \sin \gamma. \quad (7.151)$$

При $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$ происходит удар снизу под произвольным углом. Имеем $\sin \gamma \leq 0$ и тогда

$$k_D = 0, \quad \Delta_{\max} = 0. \quad (7.152)$$

Ничего неожиданного в полученном решении нет, так как при анализе физической стороны проблемы понятно, что никакой деформации при ударе снизу вверх (под углом или строго вертикально) при нулевой скорости нет, как и нет самого удара. Есть просто касание двух тел.

В случае горизонтального удара при $\gamma = 0$ имеем

$$k_D = \frac{v_{zp}}{\sqrt{g\Delta_{cm} \left(1 + \frac{k_{np} G_0}{G_{zp}} \right)}}. \quad (7.153)$$

Для вертикального удара при $\gamma = \frac{\pi}{2}$ получим

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_{zp}^2}{g\Delta_{cm} \left(1 + \frac{k_{np} G_0}{G_{zp}} \right)}}. \quad (7.154)$$

Уравнения (7.153) и (7.154) описывают частные случаи, рассмотренные в любой учебной литературе по сопротивлению материалов или строительной механике.

Таким образом, при изменении угла удара γ в диапазоне от 0 до 2π , получается весь спектр возможных деформационных состояний балки. Для принятых допущений уравнение (7.144) и его решение (7.148) являются

* Случай внезапного приложения нагрузки.

универсальными, т.е. подходят для удара под любым углом к опоре.

Констатируем, что для определения максимальных динамических перемещений системы, возникающих при ударе, необходимо перемещения, найденные при статическом действии внешнего веса (веса биомеханической системы), умножить на динамический коэффициент k_d .

Из анализа уравнений (7.144) и (7.148) можно также сделать вывод: при всех прочих условиях коэффициент динамичности, а значит, динамическая сила и деформация опоры зависят от угла удара.

7.11 Замечания по поводу динамических нагрузок

Прежде всего отметим общий момент для всех фаз любого спортивного упражнения: *геометрические, кинематические и динамические параметры**, характеризующие поведение упругой опоры в конце каждой фазы спортивного упражнения, являются начальными условиями для каждой последующей фазы этого же упражнения.

Например, для полетной части упражнения начальные условия определяются по моменту отрыва от спортивного снаряда. Таким образом, движение биомеханической системы с ускорением при ее контакте с упругой опорой повлияет на весь полет.

Несомненно, что на элементах упражнения следующих за полетной фазой скажутся все кинематические и динамические характеристики, которые описывают движение спортсмена перед появлением контакта тела со снарядом.

Переход из динамической фазы в фазу статическую во многом определяется параметрами движения биомеханической системы до этого момента.

Второй важнейший вывод, следующий из анализа динамических и статических нагрузок, которым подвергается спортивный снаряд во время выполнения упражнения, следующий: *статическими силами можно считать только неизменные во времени нагрузки, а любые иные случаи** нагружения вызывают колебания и являются динамическим нагружением. Отсюда все модели динамической деформации в условиях непрерывной нагрузки*** связаны с расчетом упругой опоры на колебания.*

Отметим, что колебания спортивного снаряда в данной работе определены как вынужденные и, соответственно, использована методика расчета геометрических и кинематических параметров механической системы, испытывающей вынужденные колебания под действием произвольных возмущающих сил. На самом деле взятые для исследования спортивные снаряды получают параметрические колебания. В работе

* Динамические параметры рассматриваются в главах 8-11.

** Например, медленное нагружение и пр.

*** Удар в данной работе так подробно не исследуется.

[101] указаны следующие причины параметрического возбуждения механических систем:

- периодическое изменение *жесткости*;
- периодическое изменение *параметрических нагрузок*;
- периодическое изменение *инерции системы*.

Существуют и смешанные случаи, когда причиной параметрического возбуждения одновременно являются периодические изменения жесткости и инерции. Для лучшего понимания сути колебаний снарядов, взятых в данной работе для исследования движения спортсмена, приведем в качестве разобранного случая параметрических колебаний смешанного характера задачу о колебаниях качелей. Раскачивание колебаний происходит благодаря периодическим приседаниям человека, стоящего на качелях [101], при этом центр масс системы перемещается в радиальном направлении.

Рассматривая колебания системы «спортсмен-опора», отметим вероятность не только периодического действия опорных реакций – это лишь частный случай. В общем же случае внешняя нагрузка является произвольной, что серьезно усложняет задачу. Применение оптических методов получения параметров движения спортсмена, позволяет использовать методы силового анализа для определения опорных реакций в любой момент времени съема информации. Поэтому упругую опору можно рассмотреть в качестве системы, испытывающей вынужденные колебания под действием произвольных сил, закон изменения которых известен.

Что касается удара, то для него получается следующая картина: *многие случаи кратковременного приложения нагрузки могут оказаться ударом*. Т.е. даже простой перехват руками (смена положения рук на спортивном снаряде) или выполнение вися на перекладине, возможно, есть удар. Такой, на первый взгляд необычный вывод, следует из сравнения продолжительности действия ударных сил τ с периодом собственных колебаний системы T_c . Для удара необходимо выполнение соотношения $\tau \leq T_c / 4$. В таблице 7.4 приведены критерии удара для грифа перекладины стандартных размеров. Период собственных колебаний T_c балки, защемленной обоими концами, взят из примера в п. 4.6 главы 4.

Таблица 7.4

Критерии удара

$d, \text{мм}$	$T_c, \text{с}$	$t_* \leq \frac{T_c}{4}, \text{с}$
28	1,38	$\leq 0,345$

Так как максимальное время действия ударных сил может приближаться к 0,35 с, то, конечно же, вероятность, что конкретный

случай кратковременного нагружения внешними силами спортивного снаряда типа перекладина, вписывается в понятие удар, весьма высока.

В качестве дополнительного замечания укажем о необходимости соизмерения времени удара и времени его фиксации при видеосъемке. Это касается тех случаев, когда длительность удара ощутимо меньше времени получения одного кадра или имеет тот же порядок.

ГЛАВА 8

ГЕОМЕТРИЯ МАСС ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА И ОПОРЫ

8.1 Общие положения и постановка задачи

Если кинематический анализ рассматривает движение тел безотносительно причин, их вызывающих, т.е. изучает лишь геометрические характеристики механического движения, то динамический анализ имеет дело с причинами, порождающими его. В динамике на основе сведений из статики и кинематики и специальных законов динамики решаются задачи о связи сил и движения. Соответствующие уравнения динамики включают ряд параметров, характеризующих геометрию масс тела человека. Эти параметры показывают распределение массы как всего тела, так и его отдельных сегментов. Для биомеханического анализа движения спортсмена необходимо знание масс, положений их центров, моментов инерции и длин сегментов и звеньев, составляющих опорно-двигательный аппарат человека.

Предваряя подробное изучение вопроса, уточним некоторые формулировки и понятия.

В расчетах по динамике часто используют вес спортсмена, выраженный в *кгс*. Известно [115], что вес тела G представляет собой силу, с которой тело притягивается к Земле, т.е. силу, которая сообщает телу ускорение $9,81 \text{ м/с}^2$. При этом *вес тела, выраженный в кгс, численно совпадает с массой тела, выраженной в кг*.

В системе СИ вес измеряется в ньютонах (H), а масса – в килограммах ($кг$), поэтому соотношение между массой и весом следующее:

$$G = mg, \quad (8.1)$$

где g – ускорение свободного падения, $g=9,81 \text{ м/с}^2$.

Исходя из этого укажем, что спортсмен весом, например 70 кгс , имеет массу равную 70 кг и его вес в системе СИ составляет $686,7 \text{ Н}$ ($\approx 700 \text{ Н}$).

Следующим моментом, требующим объяснения, является понятие центра масс и центра тяжести тела. Согласно определению, *центр тяжести твердого тела есть неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующих всех сил тяжести частиц данного тела при любом его положении в*

пространстве.

Масса является мерой инертности. В уравнениях динамики часто используют параметры центра масс. Понятия *центр масс* и *центр тяжести* тождественны в однородном поле тяготения как для абсолютно твердых тел (звенья биомеханической системы), так и для упруго деформированных динамической нагрузкой (опора). В последнем случае центр масс и центр тяжести меняют свои координаты во времени по отношению к деформируемому телу, все также совпадая по местоположению друг с другом.

Если бы движение происходило в отсутствии поля тяготения, как в условиях невесомости, то в этом случае отсутствовали бы силы тяжести частиц тела, а значит, их равнодействующая равнялась бы нулю. Центра тяжести нет, как нет и самой силы тяжести. Поэтому говорить о центре тяжести тела не приходится, а понятие центра масс остается, т.к. масса является инерционной характеристикой тела и имеет место в любой инерционной системе отсчета независимо от наличия или отсутствия полей тяготения. Не имеет смысла говорить о центре тяжести тела и в поле тяготения, не являющемся однородным.

Отметим, что, несмотря на тождественность понятий центра тяжести и центра масс, последнее является более корректным.

Также необходимо указать, что исследование геометрии масс тела человека является достаточно сложной и трудоемкой задачей, требует отдельного анализа, сложных методик, но при этом без моделей, описывающих основные параметры распределения масс тела человека и их кинематические характеристики, динамический анализ невозможен.

При исследовании целенаправленного движения в условиях упругой опоры встает вопрос об изучении не только инерционных характеристик биомеханической системы, но и геометрии массы деформируемого спортивного снаряда, а также влияние последней на ряд параметров, характеризующих как кинематику отдельных звеньев биомеханической системы, так и распределение массы полной системы в целом. Анализируя динамику движения биомеханической системы в зависимости от поставленной задачи, а также от конкретного элемента упражнения, необходимо учитывать или не учитывать масс-инерционные характеристики спортивного снаряда.

Например, необходимо оценить динамические параметры биомеханической системы в контакте с опорой и в полетной части упражнения. Когда тело спортсмена находится в полете, то параметры опоры на него уже не влияют и не входят в уравнения движения. Опора лишь изменяет начальные условия полета. Что касается динамических параметров биомеханической системы в условиях контакта (кинетической энергии, кинетического момента), так нас именно это и интересует, именно динамические характеристики движения тела и их сравнение с движением

биомеханической системы в условиях жесткой опоры является одной из задач при анализе моделей. Влияние опоры учитывается через параметры движения тела спортсмена, которые изменяет упругость материала спортивного снаряда. Но параметры движения самой опоры не нужны, только их воздействие на движение человека (изменение скоростей и ускорений ЦМ звеньев биомеханической системы).

А вот при выполнении перехода из виса на верхней жерди оборотом назад в упор на нижнюю жердь на женских брусьях для оценки удара тела о нижнюю жердь необходимо учесть кинетический момент и кинетическую энергию полной системы, т.е. биомеханической системы и верхней жерди, так как последняя находится в контакте со спортсменом и при динамическом изгибе участвует в ударе.

8.2 Центр масс сегментов и звеньев тела человека, а также их вес

Определение масс-инерционных характеристик сегментов тела живого человека представляет собой весьма сложную задачу. До недавнего времени серьезных методик решения этого вопроса не существовало, а пользовались данными, полученными во второй половине 19 века при исследовании замороженных трупов. Сегменты тел рассекались по осям вращения суставов (Harless в 1860 году; Braune, Fisher в 1889 и др.), взвешивались, а после экспериментально определялись координаты центра масс сегментов и их моменты инерции [54-56]. Методика являлась единственной на протяжении фактически ста лет.

Точность данного способа не удовлетворяла потребности биомеханики. Лишь с развитием экспериментальных исследований на основе современных знаний появились достаточно корректные методы получения более точной информации о геометрии масс тела человека при его жизни. В лаборатории ГЦОЛИФК кафедры биомеханики был разработан радиоизотопный метод определения масс-инерционных характеристик тела человека [111]. Предложен ряд методик по его использованию. Сошлемся на их подробный анализ, выполненный в работе [56]. Разработанные способы дают возможность выполнить расчеты не только для сегментов, но и для звеньев биомеханической системы. Повторять этот материал не будем, хотя он является не только весьма важным, но и, во-первых, необходимым, а во-вторых, незаменимым.

8.3 Общий центр масс биомеханической системы при упругой опоре

Распределение масс в системе определяется значениями масс ее точек и их взаимными положениями, т.е. координатами. Однако для решения многих задач динамики достаточно знать координаты центра масс элементов, составляющих систему. Для биомеханической системы такими

точками являются центры масс звеньев тела человека.

В теоретической механике разработаны методы определения центра масс для тел, находящихся в однородном поле тяжести при постоянном ускорении свободного падения $g = const$, когда вес любой частицы тела пропорционален ее массе. Основой метода является представление о силах тяжести как системе параллельных сил [45, 95, 118].

На основе этого метода выведены уравнения для определения положения центра масс системы тел, связанных между собой. В теории механизмов и машин эти выражения применяются для нахождения общего центра масс (ОЦМ) рычажных механизмов [9].

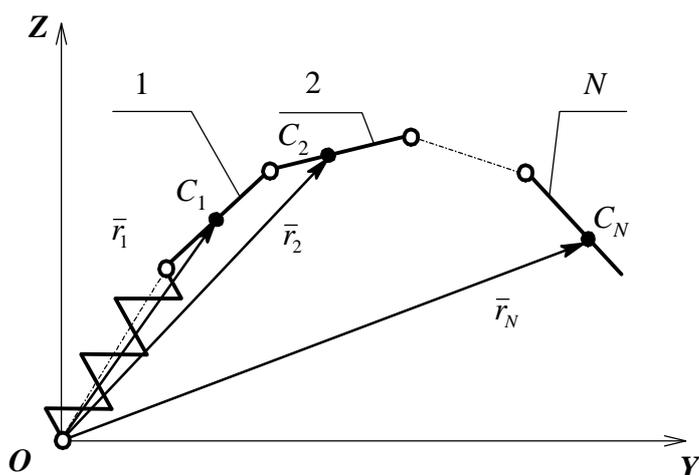


Рисунок 8.1 – Незамкнутая кинематическая цепь, моделирующая биомеханическую систему

кинематической цепи опорно-двигательного аппарата человека или звена, состоящего из сегментов, выведено уравнение для определения положения общего центра масс. Уравнение записано в векторной форме. Для вектора \bar{r}_C , определяющего положение общего центра масс C отдельных точечно-сосредоточенных масс m_1, m_2, \dots, m_N для N -звенной системы (рис. 8.1), имеем:

$$\bar{r}_C = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots + m_N \bar{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (8.2)$$

Произведения $m_1 \bar{r}_1, m_2 \bar{r}_2, \dots, m_N \bar{r}_N$ представляют собой статические моменты точечно-сосредоточенных масс относительно произвольно

В биомеханике уравнения для координат центра масс сегмента, звена или общего центра масс опорно-двигательного аппарата человека имеют тот же вид, что и для рычажных механизмов [56].

Рассмотрим суть вопроса в изложении по работе [9]. Для многозвенного рычажного механизма, представляющего собой кинематическую цепь, аналогичную

выбранной точки.

Известно, что уравнения координат центров масс могут быть записаны как в векторной форме, так и через проекции на соответствующие оси [9, 56, 118].

Расположим кинематическую цепь, представляющую биомеханическую систему или звено, состоящее из сегментов, таким образом, чтобы продольные оси звеньев (сегментов) приняли горизонтальное положение, т.е. все координаты биомеханической системы представляли собой проекции лишь на ось ординат OY (рис. 8.2). Тогда все векторные величины в уравнении окажутся равными их проекциям, и мы получим

$$Y_C = \frac{m_1 Y_{C_1} + m_2 Y_{C_2} + \dots + m_N Y_{C_N}}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i Y_{C_i}}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (8.3)$$

Аналогичная форма записи получится и для проекции координаты центра масс на аппликату OZ :

$$Z_C = \frac{m_1 Z_{C_1} + m_2 Z_{C_2} + \dots + m_N Z_{C_N}}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i Z_{C_i}}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (8.4)$$

Формулы (8.3) и (8.4) можно получить, просто спроектировав уравнение для \bar{r}_C (8.2) в векторной форме на соответствующие координатные оси.

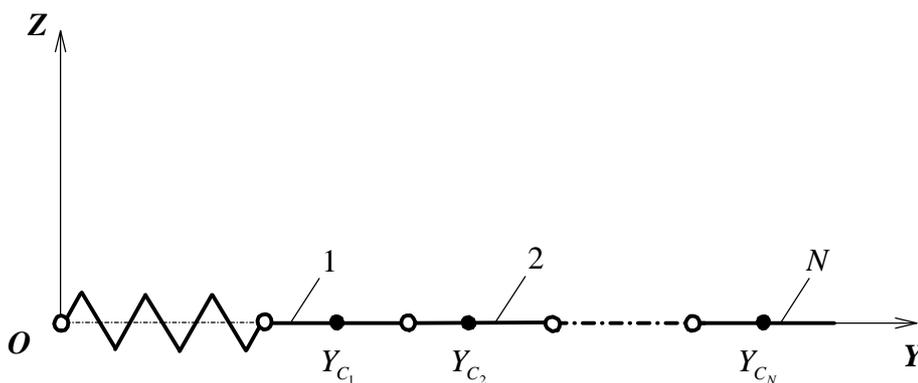


Рисунок 8.2 – Проекция биомеханической системы на ось OY

При определении центра масс звена, состоящего из ряда сегментов, необходимо предварительно найти координаты их центров масс в

декартовой системе координат. Для многозвенной модели сегменты тоже могут являться звеньями [56]. Например, при выполнении сгибательных движений ноги в голеностопном, коленном и тазобедренном суставах звеньями являются сегменты: стопа, голень, бедро.

8.4 Общий центр масс биомеханической системы при моделировании опоры вращающейся пружины

Уравнения (8.2)-(8.4) представляют координаты ОЦМ кинематической цепи, состоящей из звеньев в виде жестких тел. Рассмотрим коррективы, вносимые упругой опорой. При анализе будем использовать геометрические параметры пружины*, но не ее масс-инерционные характеристики, так как в данный момент представляет интерес положение ОЦМ лишь самой биомеханической системы.

Отметим, что формулы для определения положения ОЦМ полной системы охватывают все возможные случаи. Так, обнуляя массу опоры, перейдем к моделям ОЦМ только биомеханической системы, но в условиях упругой опоры. Убирая нулевое звено, рассчитываем параметры БМС в условиях жесткой опоры. В ином случае вычисления дадут положение ОЦМ полной системы.

Таким образом, в общем случае имеются два ОЦМ: полной системы и непосредственно биомеханической.

Используем уравнения (8.3) и (8.4) для вывода уравнений координат ОЦМ биомеханической системы в условиях упругой опоры.

Ранее получены модели координат ЦМ звеньев по выражениям (1.10):

$$\begin{aligned} Y_{C_1} &= L_0 \cos Q_0 + S_1 \cos Q_1, \\ Z_{C_1} &= L_0 \sin Q_0 + S_1 \sin Q_1, \\ Y_{C_2} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2, \\ Z_{C_2} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2, \\ Y_{C_3} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3, \\ Z_{C_3} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3. \end{aligned}$$

Подставим их в выражения (8.3), (8.4). Получим:

$$\begin{aligned} Y_C &= [m_1(L_0 \cos Q_0 + S_1 \cos Q_1) + m_2(L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2) + \\ &\quad + m_3(L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3)] / \sum_{i=1}^N m_i, \\ Z_C &= [m_1(L_0 \sin Q_0 + S_1 \sin Q_1) + m_2(L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2) + \end{aligned}$$

* Точнее опоры, т.е. спортивного снаряда.

$$+ m_3(L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3)] / \sum_{i=1}^N m_i . \quad (8.5)$$

Запишем в общей форме для ОЦМ только для биомеханической системы:

$$Y_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i S_i \cos Q_i + \sum_{k=1}^N m_k \sum_{j=0}^{k-1} L_j \cos Q_j \right)}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

$$Z_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i S_i \sin Q_i + \sum_{k=1}^N m_k \sum_{j=0}^{k-1} L_j \sin Q_j \right)}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (8.6)$$

Введем обозначение массы биомеханической системы:

$$m_{БМС} = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (8.7)$$

где $m_{БМС}$ – масса биомеханической системы (человека).

Рассмотрим более подробно полученные уравнения. Выполняя группировку членов при тригонометрических функциях, запишем:

$$Y_C = [(m_1 L_0 + m_2 L_0 + m_3 L_0) \cos Q_0 + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \cos Q_1 + (m_2 S_2 + m_3 L_3) \cos Q_2 + (m_3 S_3) \cos Q_3] / m_{БМС},$$

$$Z_C = [(m_1 L_0 + m_2 L_0 + m_3 L_0) \sin Q_0 + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \sin Q_1 + (m_2 S_2 + m_3 L_3) \sin Q_2 + (m_3 S_3) \sin Q_3] / m_{БМС}. \quad (8.8)$$

Обозначим коэффициенты при тригонометрических функциях:

$$A_0 = (m_1 L_0 + m_2 L_0 + m_3 L_0) / m_{БМС},$$

$$A_1 = (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) / m_{БМС},$$

$$A_2 = (m_2 S_2 + m_3 L_3) / m_{БМС},$$

$$A_3 = (m_3 S_3) / m_{БМС}. \quad (8.9)$$

Здесь коэффициент A_0 , в котором учитываются изменяющиеся параметры пружины, является величиной переменной, т.е. $A_0 = var$. Его можно записать и в другой форме:

$$A_0 = (m_{БМС} L_0) / m_{БМС} = L_0. \quad (8.10)$$

Отсюда следует, что коэффициент A_0 рассчитывается для каждого кадра видеосъемки. Коэффициенты же, относящиеся непосредственно к биомеханической системе, являются величинами постоянными, поэтому их достаточно определить один раз и применять на всей траектории движения.

На основании выражений для коэффициентов A_i получим

$$A_i = \begin{cases} \frac{L_0 \sum_{k=1}^N m_k}{m_{БМС}}, & \text{если } i=0; \\ A_i = \frac{\left(m_i S_i + L_i \sum_{j=i+1}^N m_j \right)}{m_{БМС}}, & \text{если } i \geq 1. \end{cases} \quad (8.11)$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Используя форму записи через коэффициенты A_i , координаты ОЦМ перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y_C &= A_0 \cos Q_0 + A_1 \cos Q_1 + A_2 \cos Q_2 + A_3 \cos Q_3, \\ Z_C &= A_0 \sin Q_0 + A_1 \sin Q_1 + A_2 \sin Q_2 + A_3 \sin Q_3. \end{aligned} \quad (8.12)$$

В форме удобной для расчетов на ЭВМ окончательно запишем:

$$\begin{aligned} Y_C &= \sum_{i=0}^N A_i \cos Q_i, \\ Z_C &= \sum_{i=0}^N A_i \sin Q_i. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Общее расстояние от оси вращения до общего центра масс БМС найдем как

$$R_C = \sqrt{Y_C^2 + Z_C^2}. \quad (8.14)$$

Представление координат общего центра масс биомеханической системы через коэффициенты A_i делает их расчеты на ПЭВМ весьма компактными.

8.5 Кинематические параметры общего центра масс биомеханической системы при моделировании опоры вращающейся пружиной

Скорость ОЦМ тела в момент потери контакта спортсмена с опорой является одним из основных факторов, определяющих полетную фазу упражнений и связанных с траекторией ОЦМ биомеханической системы в безопорном положении [56].

Линейная скорость ОЦМ. Продифференцируем уравнения координат ОЦМ в развернутом виде (8.12) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_C &= \dot{A}_0 \cos Q_0 - A_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - A_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - A_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - A_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3, \\ \dot{Z}_C &= \dot{A}_0 \sin Q_0 + A_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + A_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + A_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + A_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Имеется отличие от моделей биомеханической системы в условиях жесткой опоры. В условиях упругой опоры коэффициент A_0 зависит от параметров ее деформации, переменных во времени, поэтому тоже дифференцируется:

$$\dot{A}_0 = \dot{L}_0. \quad (8.16)$$

В свернутой форме уравнения для проекций линейных скоростей ОЦМ биомеханической системы примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_C &= \dot{A}_0 \cos Q_0 - \sum_{i=0}^N A_i \dot{Q}_i \sin Q_i, \\ \dot{Z}_C &= \dot{A}_0 \sin Q_0 + \sum_{i=0}^N A_i \dot{Q}_i \cos Q_i. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Линейное ускорение ОЦМ. Выполнив дифференцирование уравнений для проекций линейных скоростей ОЦМ (8.15) по времени, получим выражения:

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_C &= \ddot{A}_0 \cos Q_0 - \dot{A}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - \dot{A}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - A_0 \dot{Q}_0^2 \cos Q_0 - A_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 - \\ &- A_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - A_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 - A_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - A_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 - A_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3, \\ \ddot{Z}_C &= \ddot{A}_0 \sin Q_0 + \dot{A}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + \dot{A}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 - A_0 \dot{Q}_0^2 \sin Q_0 + A_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 - \\ &- A_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 + A_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 - A_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 + A_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 - A_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Для N -звенной биомеханической системы в компактной форме имеем уравнения:

$$\begin{aligned}\ddot{Y}_C &= \ddot{A}_0 \cos Q_0 - 2\dot{A}_0\dot{Q}_0 \sin Q_0 - \sum_{i=0}^N A_i \ddot{Q}_i \sin Q_i - \sum_{i=0}^N A_i \dot{Q}_i^2 \cos Q_i, \\ \ddot{Z}_C &= \ddot{A}_0 \sin Q_0 + 2\dot{A}_0\dot{Q}_0 \cos Q_0 + \sum_{i=0}^N A_i \ddot{Q}_i \cos Q_i - \sum_{i=0}^N A_i \dot{Q}_i^2 \sin Q_i.\end{aligned}\quad (8.19)$$

Здесь

$$\ddot{A}_0 = \ddot{L}_0 \quad (8.20)$$

и считается для каждого кадра.

8.6 Параметры общего центра масс тела спортсмена при моделировании опоры двумя пружинами

Рассмотрим геометрические и кинематические параметры ОЦМ тела спортсмена по варианту моделирования упругой опоры двумя поступательно движущимися пружинами. Как и в предыдущем параграфе, массу опоры не учитываем, т.е. определяем положение общего центра масс только тела спортсмена, но с учетом деформации спортивного снаряда.

Уравнения в общем виде, описывающие положение ОЦМ, остаются прежними, принимая после подстановки в них координат ЦМ несколько иной вид. Модели координат ЦМ звеньев по уравнениям (1.14) имели вид:

$$\begin{aligned}Y_{C_1} &= L_{0_\Gamma} + S_1 \cos Q_1, \\ Z_{C_1} &= L_{0_B} + S_1 \sin Q_1, \\ Y_{C_2} &= L_{0_\Gamma} + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2, \\ Z_{C_2} &= L_{0_B} + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2, \\ Y_{C_3} &= L_{0_\Gamma} + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3, \\ Z_{C_3} &= L_{0_B} + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3.\end{aligned}$$

Подставим эти уравнения в выражения (8.3), (8.4). Получим:

$$\begin{aligned}Y_C &= [m_1(L_{0_\Gamma} + S_1 \cos Q_1) + m_2(L_{0_\Gamma} + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2) + \\ &+ m_3(L_{0_\Gamma} + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3)] / \sum_{i=1}^N m_i, \\ Z_C &= [m_1(L_{0_B} + S_1 \sin Q_1) + m_2(L_{0_B} + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2) + \\ &+ m_3(L_{0_B} + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3)] / \sum_{i=1}^N m_i.\end{aligned}\quad (8.21)$$

Уравнения определяют положение ОЦМ биомеханической системы. Запишем в общей форме:

$$Y_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i L_{0\Gamma} + \sum_{i=1}^N m_i S_i \cos Q_i + \sum_{k=2}^N m_k \sum_{j=1}^{k-1} L_j \cos Q_j \right)}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

$$Z_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i L_{0B} + \sum_{i=1}^N m_i S_i \sin Q_i + \sum_{k=2}^N m_k \sum_{j=1}^{k-1} L_j \sin Q_j \right)}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (8.22)$$

Рассмотрим более подробно полученные уравнения. Выполним группировку членов при тригонометрических функциях:

$$Y_C = [(m_1 L_{0\Gamma} + m_2 L_{0\Gamma} + m_3 L_{0\Gamma}) + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \cos Q_1 + (m_2 S_2 + m_3 L_3) \cos Q_2 + (m_3 S_3) \cos Q_3] / m_{БМС},$$

$$Z_C = [(m_1 L_{0B} + m_2 L_{0B} + m_3 L_{0B}) + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \sin Q_1 + (m_2 S_2 + m_3 L_3) \sin Q_2 + (m_3 S_3) \sin Q_3] / m_{БМС}. \quad (8.23)$$

Обозначим коэффициенты при тригонометрических функциях:

$$A_{0\Gamma} = \frac{(m_1 L_{0\Gamma} + m_2 L_{0\Gamma} + m_3 L_{0\Gamma})}{m_{БМС}} = L_{0\Gamma},$$

$$A_{0B} = \frac{(m_1 L_{0B} + m_2 L_{0B} + m_3 L_{0B})}{m_{БМС}} = L_{0B}, \quad (8.24)$$

оставив A_i прежними при $i \geq 1$.

Здесь нет единого коэффициента A_0 . Он разбивается на два: $A_{0\Gamma}$ для проекций на ординату OY , и A_{0B} для проекций на аппликату OZ . Сравнение с выражениями для коэффициентов (8.9), при моделировании опоры вращающейся пружины, позволяет сделать вывод о независимости A_i при $i > 0$, т.е. для биомеханической системы, от моделей опоры.

Используя форму записи через коэффициенты A_i , получим координаты ОЦМ в следующем виде:

$$Y_C = A_{0\Gamma} + A_1 \cos Q_1 + A_2 \cos Q_2 + A_3 \cos Q_3,$$

$$Z_C = A_{0B} + A_1 \sin Q_1 + A_2 \sin Q_2 + A_3 \sin Q_3. \quad (8.25)$$

В форме удобной для расчетов на ЭВМ окончательно запишем:

$$Y_C = A_{0\Gamma} + \sum_{i=1}^N A_i \cos Q_i,$$

$$Z_C = A_{0B} + \sum_{i=1}^N A_i \sin Q_i . \quad (8.26)$$

Общее расстояние от оси вращения до общего центра масс R_C определяется, как и ранее, по уравнению (8.14).

Линейные скорости ОЦМ. Запишем выражения для определения проекций линейных скоростей, имея в виду, что:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{0G} &= \dot{L}_{0G} , \\ \dot{A}_{0B} &= \dot{L}_{0B} . \end{aligned} \quad (8.27)$$

В свернутой форме уравнения линейных скоростей ОЦМ биомеханической системы примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_C &= \dot{L}_{0G} - \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i \sin Q_i , \\ \dot{Z}_C &= \dot{L}_{0B} + \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i \cos Q_i . \end{aligned} \quad (8.28)$$

Линейные ускорения ОЦМ. Дважды дифференцируя коэффициенты A_{0G} , A_{0B} , получим:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{0G} &= \ddot{L}_{0G} , \\ \ddot{A}_{0B} &= \ddot{L}_{0B} . \end{aligned} \quad (8.29)$$

Линейные ускорения ОЦМ для N -звенной системы в компактной форме примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_C &= \ddot{A}_{0G} - \sum_{i=1}^N A_i \ddot{Q}_i \sin Q_i - \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i^2 \cos Q_i , \\ \ddot{Z}_C &= \ddot{A}_{0B} + \sum_{i=1}^N A_i \ddot{Q}_i \cos Q_i - \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i^2 \sin Q_i . \end{aligned} \quad (8.30)$$

Здесь члены уравнений разбиваются на три группы.

8.7 Моменты инерции массы звеньев тела и биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой вращающейся пружиной

В динамике изучается движение с учетом инертности тел. Инертность поступательного движения оценивают через массу тела, а при вращательном движении мерой инертности является осевой момент

инерции. Это аналог массы для поступательного движения. Само же свойство можно определить как сопротивление изменению скорости.

Знание моментов инерции звеньев, составляющих опорно-двигательный аппарат тела человека, необходимо для динамических расчетов и, в конечном итоге, для вычислений по уравнениям целенаправленного движения биомеханической системы.

Моменты инерции сегментов тела человека и опоры дают представление о распределении массы изучаемого элемента системы относительно заданной оси.

Отметим, что центральные моменты инерции сегментов и звеньев тела при учете упругой опоры не меняются по сравнению с моментами инерции тех же элементов биомеханической системы, совершающей движение в условиях жесткой опоры. Причина в том, что спортивный снаряд не оказывает влияния ни на геометрические параметры человека, ни на его массу, ни на распределение этой массы внутри тела спортсмена*. *Изменяются лишь модели для моментов инерции всей биомеханической системы относительно неподвижной оси абсцисс и относительно ОЦМ полной системы*, т.к. в моментах инерции каждого звена расстояние до исследуемой оси корректируется на величину прогиба спортивного снаряда.

Согласно определению, *моментом осевым моментом инерции твердого тела (системы) относительно данной оси OX называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси* [118, 123]:

$$I_{OX} = \sum m_k h_k^2, \quad (8.31)$$

где I_{OX} – момент инерции тела относительно оси OX;

m_k – масса k -ой материальной точки;

h_k – расстояние от k -ой материальной точки до оси вращения OX.

В механике *момент инерции материальной системы, состоящей из нескольких твердых тел с известными моментами инерции, определяют как сумму моментов инерции всех твердых тел, входящих в систему, относительно той же оси* [15, 118, 133].

Начнем исследование с анализа центральных моментов инерции звеньев. Дадим определение: *центральным моментом инерции называется момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести тела*. Расчет центральных моментов инерции сегментов и звеньев тела подробно рассмотрен в работе [56]. Как и в случае определения масс, размеров сегментов и звеньев биомеханической системы, наиболее точной методикой является радиоизотопный метод. Будем пользоваться

* В рамках принятых допущений.

указанным разделом работы [56] в качестве справочного материала.

Определим момент инерции трехзвенной биомеханической системы относительно абсолютной оси ординат при произвольных, анатомически допустимых углах между звеньями тела. Система рассматривается во взаимодействии со спортивным снарядом, но без учета его масс-инерционных характеристик. Для вывода воспользуемся моделью опоры в виде одной вращающейся пружины.

Также нам понадобится теорема Гюйгенса о параллельном переносе осей. Она гласит, что *момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между ними* [118].

Для дальнейшего анализа воспользуемся случаем, разобранным в работе [56]. Он применим как для нахождения центрального момента инерции звена, состоящего из сегментов, так и для самой биомеханической системы, состоящей из звеньев. Расчетная схема тела спортсмена дана на рисунке 8.3. Все звенья расположены параллельно оси OY . Определим центральный момент тела относительно начала координат O (ось OX).

На основании теоремы Гюйгенса получим

$$I_{OX} = I_1 + m_1 Y_{C_1}^2 + I_2 + m_2 Y_{C_2}^2 + I_3 + m_3 Y_{C_3}^2, \quad (8.32)$$

где I_1, I_2, I_3 – центральные моменты инерции звеньев 1, 2, 3.

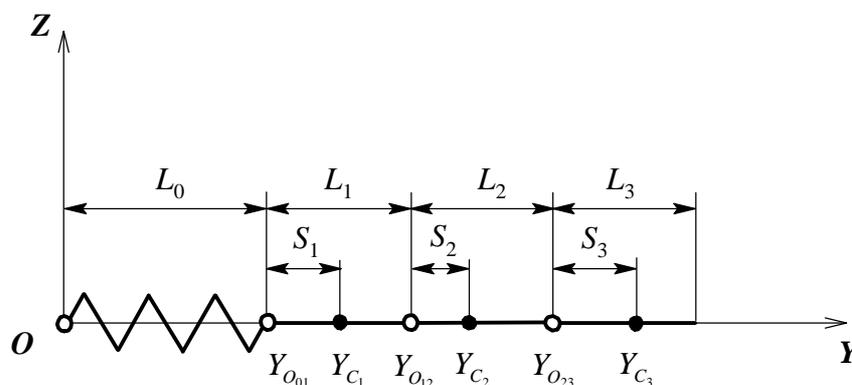


Рисунок 8.3 – Кинематическая схема биомеханической системы

С другой стороны, для всей биосистемы можно записать

$$I_{OX} = I_C + m_{БМС} Y_C^2, \quad (8.33)$$

где I_C – центральный момент инерции биомеханической системы.

Решая совместно уравнения (8.32) и (8.33), имеем

$$\begin{aligned}
I_C &= I_1 + m_1 Y_{C_1}^2 + I_2 + m_2 Y_{C_2}^2 + I_3 + m_3 Y_{C_3}^2 - m_{BMC} Y_C^2 = \\
&= \sum_{i=1}^N I_i + \sum_{i=1}^N m_i Y_{C_i}^2 - m_{BMC} Y_C^2.
\end{aligned}
\tag{8.34}$$

На самом деле при анализе необходимы полные расстояния до ЦМ звеньев. Обозначим через r_1, r_2, r_3 расстояние от неподвижной оси абсцисс до ЦМ соответствующих звеньев.

Тогда момент инерции биосистемы в условиях упругой опоры относительно неподвижной оси абсцисс OX определим из выражения

$$I_{OX}^{BMC} = I_1 + m_1 r_1^2 + I_2 + m_2 r_2^2 + I_3 + m_3 r_3^2. \tag{8.35}$$

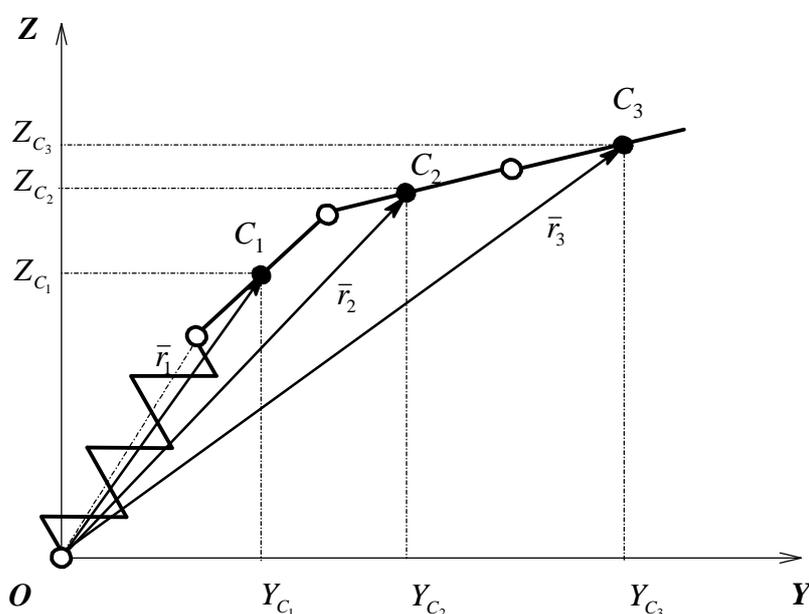


Рисунок 8.4 – Расчетная схема биомеханической системы с упругой опорой

Представим расчетную схему на рисунке 8.4. Биомеханическая система находится в произвольном положении.

Выразим расстояния r_1, r_2, r_3 через их проекции на соответствующие оси:

$$r_1^2 = Y_{C_1}^2 + Z_{C_1}^2, \quad r_2^2 = Y_{C_2}^2 + Z_{C_2}^2, \quad r_3^2 = Y_{C_3}^2 + Z_{C_3}^2. \tag{8.36}$$

Подставив координаты, запишем:

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= (L_0 \cos Q_0 + S_1 \cos Q_1)^2 + (L_0 \sin Q_0 + S_1 \sin Q_1)^2, \\
r_2^2 &= (L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2)^2 + (L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2)^2,
\end{aligned}$$

$$r_3^2 = (L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3)^2 + (L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3)^2. \quad (8.37)$$

Выполнив преобразования, получим:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= L_0^2 + 2L_0S_1 \cos(Q_1 - Q_0) + S_1^2, \\ r_2^2 &= L_0^2 + L_1^2 + S_2^2 + 2L_0L_1 \cos(Q_1 - Q_0) + 2L_0S_2 \cos(Q_2 - Q_0) + \\ &\quad + 2L_1S_2 \cos(Q_2 - Q_1), \\ r_3^2 &= L_0^2 + L_1^2 + L_2^2 + S_3^2 + 2L_0L_1 \cos(Q_1 - Q_0) + 2L_0L_2 \cos(Q_2 - Q_0) + \\ &\quad + 2L_0S_3 \cos(Q_3 - Q_0) + 2L_1L_2 \cos(Q_2 - Q_1) + 2L_1S_3 \cos(Q_3 - Q_1) + \\ &\quad + 2L_2S_3 \cos(Q_3 - Q_2). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Подставляем полученные значения r_i в выражение (8.35), обозначая члены при тригонометрических функциях как коэффициенты A_{ij} :

$$\begin{aligned} I_{OX}^{BMC} &= A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} + 2A_{01} \cos(Q_1 - Q_0) + \\ &\quad + 2A_{02} \cos(Q_2 - Q_0) + 2A_{03} \cos(Q_3 - Q_0) + 2A_{12} \cos(Q_2 - Q_1) + \\ &\quad + 2A_{13} \cos(Q_3 - Q_1) + 2A_{23} \cos(Q_3 - Q_2), \end{aligned} \quad (8.39)$$

где коэффициенты A_{ij} равны:

$$\begin{aligned} A_{00} &= (m_1 + m_2 + m_3)L_0^2 = m_{BMC}L_0^2, \\ A_{01} &= (m_1S_1 + m_2L_1 + m_3L_1)L_0, \\ A_{02} &= (m_2S_2 + m_3L_2)L_0, \\ A_{03} &= m_3S_3L_0, \\ A_{11} &= I_1 + m_1S_1^2 + L_1^2(m_2 + m_3), \\ A_{12} &= (m_2S_2 + m_3L_2)L_1, \\ A_{13} &= m_3S_3L_1, \\ A_{22} &= I_2 + m_2S_2^2 + m_3L_2^2, \\ A_{23} &= m_3S_3L_2, \\ A_{33} &= I_3 + m_3S_3^2. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Коэффициенты, характеризующие опору, являются переменными $A_{0j} = var$, в отличие от коэффициентов для биосистемы $A_{ij} = const$, где $i > 0$.

Аналитическое выражение момента инерции для N -звенной биомеханической системы в условиях упругой опоры построим, введя символ Кронекера. Последний равен

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (8.41)$$

Здесь i, j – буквенные индексы, соответствующие цифровым индексам коэффициентов A_{ij} .

Удобнее разбить общую формулу на две, т.е. выделить коэффициенты, относящиеся непосредственно к упругой опоре и отдельно к биомеханической системе. С использованием символа Кронекера получим

$$A_{0j} = \delta_{0j} m_{БМС} L_0^2 + (1 - \delta_{ij}) m_j L_0 S_j + (1 - \delta_{ij}) \sum_{k=j+1}^N m_k L_0 L_j, \quad (8.42)$$

где $i=0$; $j=0, 1, \dots, N$; $k \leq N$

и

$$A_{ij} = \delta_{ij} (I_i + m_i S_i^2) + m_j L_i S_j (1 - \delta_{ij}) + \sum_{k=j+1}^N m_k L_i L_j, \quad (8.43)$$

где $i=1, 2, \dots, N$; $j=1, 2, \dots, N$; $k \leq N$.

На рисунке 8.5 представлен алгоритм определения коэффициентов A_{ij} по уравнению (8.43).

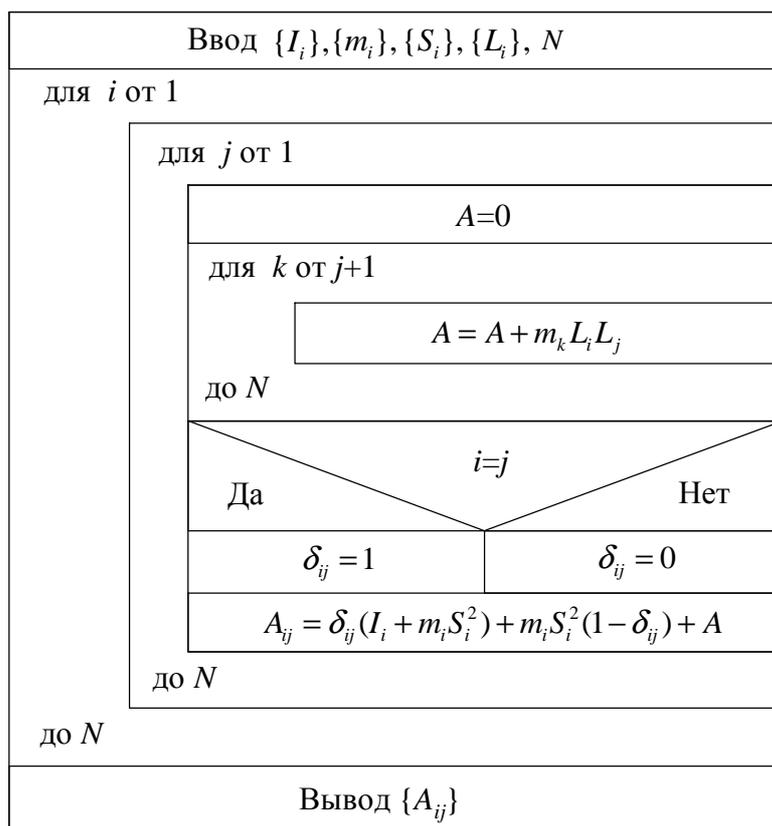


Рисунок 8.5 – Алгоритм расчета коэффициентов A_{ij}
(опора в виде вращающейся пружины)

Анализ уравнений (8.40), (8.42) и (8.43) показывает, что матрица, составленная из коэффициентов A_{ij} , является квадратной. По причине равенства симметричных элементов относительно главной диагонали имеем при $j > i$ коэффициенты $A_{ji}=A_{ij}$.

Сжатая форма записи коэффициентов позволяет легко автоматизировать расчеты на ЭВМ.

В окончательном виде получим значение момента инерции:

$$I_{OX}^{BMC} = \sum_{i=0}^N A_{ii} + 2 \sum_{i=0}^N A_{ij} \sum_{j=i+1}^N \cos(Q_j - Q_i). \quad (8.44)$$

Одним из важнейших параметров, характеризующих полетную часть спортивного упражнения, является центральный момент инерции биомеханической системы относительно оси, проходящей через общий центр масс. В работе [56] указано на необходимость получения количественной оценки момента инерции в момент потери спортсменом контакта со снарядом в соскоковых упражнениях.

Запишем центральный момент инерции биомеханической системы I_C :

$$I_C = I_{OX}^{BMC} - m_{BMC} R_C^2. \quad (8.45)$$

Здесь использована теорема Гюйгенса.

8.8 Моменты инерции массы звеньев тела и биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой двумя пружинами

Воспользуемся уравнениями (8.36), но подставим в них координаты ЦМ звеньев по выражениям (1.14) для модели опоры в виде двух пружин. Для звеньев БМС, с учетом соответствующих координат, запишем:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (L_{0r} + S_1 \cos Q_1)^2 + (L_{0b} + S_1 \sin Q_1)^2, \\ r_2^2 &= (L_{0r} + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2)^2 + (L_{0b} + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2)^2, \\ r_3^2 &= (L_{0r} + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3)^2 + \\ &+ (L_{0b} + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3)^2. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= L_{0r}^2 + 2L_{0r}S_1 \cos Q_1 + S_1^2 \cos^2 Q_1 + L_{0b}^2 + 2L_{0b}S_1 \sin Q_1 + S_1^2 \sin^2 Q_1 = \\ &= (L_{0r}^2 + L_{0b}^2) + (2L_{0r}S_1 \cos Q_1 + 2L_{0b}S_1 \sin Q_1) + (S_1^2 \cos^2 Q_1 + S_1^2 \sin^2 Q_1) + \\ &= (L_{0r}^2 + L_{0b}^2) + 2S_1(L_{0r} \cos Q_1 + L_{0b} \sin Q_1) + S_1^2(\cos^2 Q_1 + \sin^2 Q_1), \\ r_2^2 &= L_{0r}^2 + L_1^2 \cos^2 Q_1 + S_2^2 \cos^2 Q_2 + 2L_{0r}L_1 \cos Q_1 + 2L_{0r}S_2 \cos Q_2 + \\ &+ 2L_1 \cos Q_1 S_2 \cos Q_2 + L_{0b}^2 + L_1^2 \sin^2 Q_1 + S_2^2 \sin^2 Q_2 + 2L_{0b}L_1 \sin Q_1 + \\ &+ 2L_{0b}S_2 \sin Q_2 + 2L_1 \sin Q_1 S_2 \sin Q_2 = (L_{0r}^2 + L_{0b}^2) + \\ &+ (L_1^2 \cos^2 Q_1 + L_1^2 \sin^2 Q_1) + (S_2^2 \cos^2 Q_2 + S_2^2 \sin^2 Q_2) + \\ &+ (2L_{0r}L_1 \cos Q_1 + 2L_{0b}L_1 \sin Q_1) + (2L_{0r}S_2 \cos Q_2 + 2L_{0b}S_2 \sin Q_2) + \\ &+ (2L_1 \cos Q_1 S_2 \cos Q_2 + 2L_1 \sin Q_1 S_2 \sin Q_2) = \\ &= (L_{0r}^2 + L_{0b}^2) + L_1^2 + S_2^2 + 2L_1(L_{0r} \cos Q_1 + L_{0b} \sin Q_1) + \\ &+ 2S_2(L_{0r} \cos Q_2 + L_{0b} \sin Q_2) + 2L_1S_2 \cos(Q_2 - Q_1), \\ r_3^2 &= L_{0r}^2 + L_1^2 \cos^2 Q_1 + L_2^2 \cos^2 Q_2 + S_3^2 \cos^2 Q_3 + \\ &+ 2L_{0r}L_1 \cos Q_1 + 2L_{0r}L_2 \cos Q_2 + 2L_{0r}S_3 \cos Q_3 + \\ &+ 2L_1 \cos Q_1 L_2 \cos Q_2 + 2L_1 \cos Q_1 S_3 \cos Q_3 + 2L_2 \cos Q_2 S_3 \cos Q_3 + \\ &+ L_{0b}^2 + L_1^2 \sin^2 Q_1 + L_2^2 \sin^2 Q_2 + S_3^2 \sin^2 Q_3 + 2L_{0b}L_1 \sin Q_1 + \\ &+ 2L_{0b}L_2 \sin Q_2 + 2L_{0b}S_3 \sin Q_3 + 2L_1 \sin Q_1 L_2 \sin Q_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2L_1 \sin Q_1 S_3 \sin Q_3 + 2L_2 \sin Q_2 S_3 \sin Q_3 = (L_{0\Gamma}^2 + L_{0B}^2) + \\
& + (L_1^2 \cos^2 Q_1 + L_1^2 \sin^2 Q_1) + (L_2^2 \cos^2 Q_2 + L_2^2 \sin^2 Q_2) + \\
& + (S_3^2 \cos^2 Q_3 + S_3^2 \sin^2 Q_3) + (2L_{0\Gamma} L_1 \cos Q_1 + 2L_{0B} L_1 \sin Q_1) + \\
& + (2L_{0\Gamma} L_2 \cos Q_2 + 2L_{0B} L_2 \sin Q_2) + (2L_{0\Gamma} S_3 \cos Q_3 + 2L_{0B} S_3 \sin Q_3) + \\
& + (2L_1 \cos Q_1 L_2 \cos Q_2 + 2L_1 \sin Q_1 L_2 \sin Q_2) + (2L_1 \cos Q_1 S_3 \cos Q_3 + \\
& + 2L_1 \sin Q_1 S_3 \sin Q_3) + (2L_2 \cos Q_2 S_3 \cos Q_3 + 2L_2 \sin Q_2 S_3 \sin Q_3) = \\
& = (L_{0\Gamma}^2 + L_{0B}^2) + L_1^2 + L_2^2 + S_3^2 + 2L_1 (L_{0\Gamma} \cos Q_1 + L_{0B} \sin Q_1) + \\
& + 2L_2 (L_{0\Gamma} \cos Q_2 + L_{0B} \sin Q_2) + 2S_3 (L_{0\Gamma} \cos Q_3 + L_{0B} \sin Q_3) + \\
& + 2L_1 L_2 \cos(Q_2 - Q_1) + 2L_1 S_3 \cos(Q_3 - Q_1) + 2L_2 S_3 \cos(Q_3 - Q_2). \quad (8.47)
\end{aligned}$$

Подставляем полученные значения r_i в выражение момента инерции относительно оси вращения для всей системы с учетом опоры и, обозначая члены при тригонометрических функциях как коэффициенты A_{ij} , имеем

$$\begin{aligned}
I_{OX}^{BMC} = & A_{00\Gamma} + A_{00B} + A_{11} + A_{22} + A_{33} + 2A_{01\Gamma} \cos Q_1 + 2A_{01B} \sin Q_1 + \\
& + 2A_{02\Gamma} \cos Q_2 + 2A_{02B} \sin Q_2 + 2A_{03\Gamma} \sin Q_3 + 2A_{03B} \sin Q_3 + \\
& + 2A_{12} \cos(Q_2 - Q_1) + 2A_{13} \cos(Q_3 - Q_1) + 2A_{23} \cos(Q_3 - Q_2), \quad (8.48)
\end{aligned}$$

где коэффициенты A_{0j} равны:

$$\begin{aligned}
A_{00\Gamma} & = (m_1 + m_2 + m_3) L_{0\Gamma}^2 = m_{BMC} L_{0\Gamma}^2, \\
A_{00B} & = (m_1 + m_2 + m_3) L_{0B}^2 = m_{BMC} L_{0B}^2, \\
A_{01\Gamma} & = (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) L_{0\Gamma}, \\
A_{01B} & = (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) L_{0B}, \\
A_{02\Gamma} & = (m_2 S_2 + m_3 L_2) L_{0\Gamma}, \\
A_{02B} & = (m_2 S_2 + m_3 L_2) L_{0B}, \\
A_{03\Gamma} & = m_3 S_3 L_{0\Gamma}, \\
A_{03B} & = m_3 S_3 L_{0B}. \quad (8.49)
\end{aligned}$$

Коэффициенты A_{ij} при $i > 0$ не поменяли своего значения. Меняется лишь часть коэффициентов при $i=0$.

Универсальное выражение для определения коэффициентов A_{ij} получается громоздким. Поэтому разделим его на три части. Две из них равны:

$$A_{0j\Gamma} = \delta_{0j} (m_{BMC} L_{0\Gamma}^2) + (1 - \delta_{0j}) m_j L_{0\Gamma} S_j + (1 - \delta_{0j}) \sum_{k=j+1}^N m_k L_{0\Gamma} L_k, \quad (8.50)$$

$$A_{0jB} = \delta_{0j} (m_{БМС} L_{0B}^2) + (1 - \delta_{0j}) m_j L_{0B} S_j + (1 - \delta_{0j}) \sum_{k=j+1}^N m_k L_{0B} L_j,$$

где $j=0, 1, \dots, N$.

Символ Кронекера для этой части коэффициентов равен

$$\delta_{0j} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, \\ 0, & \text{если } j \neq 0. \end{cases} \quad (8.51)$$

Введя условное обозначение длины пружины в зависимости от выбранного направления как $L_{\Pi} = L_{0\Gamma}$ или $L_{\Pi} = L_{0B}$, получим

$$A_{0j\Pi} = \delta_{0j} (m_{БМС} L_{\Pi}^2) + (1 - \delta_{0j}) m_j L_{\Pi} S_j + (1 - \delta_{0j}) \sum_{k=j+1}^N m_k L_{\Pi} L_j, \quad (8.52)$$

где $\Pi = \Gamma, B$.

В окончательном виде момент инерции окажется равным

$$I_{OX}^{БМС} = A_{00\Gamma} + A_{00B} + \sum_{i=1}^N A_{ii} + 2 \sum_{j=1}^N A_{0j\Gamma} \cos Q_j + 2 \sum_{j=1}^N A_{0jB} \sin Q_j + 2 \sum_{i=1}^N A_{ij} \sum_{j=i+1}^N \cos(Q_j - Q_i). \quad (8.53)$$

Он включает в себя две выделенные системы – механическую и биомеханическую.

ГЛАВА 9

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ

9.1 Динамическая структура спортивных упражнений

В современной учебно-методической и научной литературе сделан вывод, что единственным направлением, успешно решающим задачу получения количественной информации о динамической структуре двигательных действий, является метод численных решений [54-56]. С помощью моделей динамических характеристик спортивных упражнений через вычислительные алгоритмы, использующие численные методы, определяют количественные значения биомеханических показателей движения на всей траектории системы. К динамической структуре движения биомеханической системы относят силы реакции на опоре, силы реакции связи в суставах, кинетическую и потенциальную энергии биомеханической системы, кинетический момент относительно оси вращения, проходящей через точку опоры или ОЦМ тела спортсмена, управляющие моменты мышечных сил относительно суставов и пр. [18, 69, 99].

В данной главе исследуются только кинетические энергии и кинетические моменты звеньев и всей биомеханической системы.

Отметим одну из особенностей вычислительных алгоритмов динамической структуры спортивных упражнений в условиях упругой опоры – при большом количестве звеньев модели получаются настолько громоздкими, что вызывает сомнение сам факт безошибочной записи уравнений, так как в процессе вывода возможны технические ошибки. Модели громоздки как в сравнении с моделями кинематики, так и сами по себе. В данной главе будем использовать методику вывода уравнений, позволяющую создавать модели динамики движения биомеханической системы, свободные от этих недостатков.

9.2 Кинетическая энергия биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой вращающейся пружиной

В механике известно, что кинетическая энергия является характеристикой и поступательного, и вращательного движений системы. Причем она является величиной скалярной и положительной. Поэтому кинетическая энергия не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменения этих направлений, в отличие от количества движения и кинетического момента (момента количества

движения) [118].

Движение биомеханической системы является сложным и складывается из движений ее звеньев. Анализируя полученные ранее модели кинематики, можно по составляющим, входящим в выражения скоростей или ускорений, сделать вывод, что имеется поступательная компонента движения центра масс каждого звена, и вращательная, определяемая через дифференциалы угла Q_i .

Таким образом, представим кинетическую энергию через сумму кинетических энергий поступательного и вращательного движений.

Модели кинетической энергии звеньев биомеханической системы T_1 , T_2 , T_3 , для соответствующих звеньев составят:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1 v_{C_1}^2}{2} + \frac{I_{C_1} \dot{Q}_1^2}{2} = \frac{m_1 (\dot{Y}_{C_1}^2 + \dot{Z}_{C_1}^2)}{2} + \frac{I_{C_1} \dot{Q}_1^2}{2}, \\ T_2 &= \frac{m_2 v_{C_2}^2}{2} + \frac{I_{C_2} \dot{Q}_2^2}{2} = \frac{m_2 (\dot{Y}_{C_2}^2 + \dot{Z}_{C_2}^2)}{2} + \frac{I_{C_2} \dot{Q}_2^2}{2}, \\ T_3 &= \frac{m_3 v_{C_3}^2}{2} + \frac{I_{C_3} \dot{Q}_3^2}{2} = \frac{m_3 (\dot{Y}_{C_3}^2 + \dot{Z}_{C_3}^2)}{2} + \frac{I_{C_3} \dot{Q}_3^2}{2}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Подставляя выражения для скоростей ЦМ звеньев (3.40) и выполняя преобразования, получим:

$$\begin{aligned} T_1 &= [(I_1 + m_1 S_1^2) \dot{Q}_1^2 + m_1 \dot{L}_0^2 + m_1 L_0^2 \dot{Q}_0^2 + 2m_1 \dot{L}_0 S_1 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + \\ &\quad + 2m_1 L_0 \dot{Q}_0 S_1 \dot{Q}_1 \cos(Q_0 - Q_1)] / 2, \\ T_2 &= [(I_2 \dot{Q}_2^2 + m_2 S_2^2 \dot{Q}_2^2) + m_2 \dot{L}_0^2 + m_2 L_0^2 \dot{Q}_0^2 + m_2 L_1^2 \dot{Q}_1^2 + 2m_2 \dot{L}_0 L_1 \dot{Q}_1 \times \\ &\quad \times \sin(Q_0 - Q_1) + 2m_2 L_0 S_2 \dot{Q}_2 \sin(Q_0 - Q_2) + 2m_2 L_0 \dot{Q}_0 L_1 \dot{Q}_1 \cos(Q_0 - Q_1) + \\ &\quad + 2m_2 L_0 \dot{Q}_0 S_2 \dot{Q}_2 \cos(Q_0 - Q_2) + 2m_2 L_1 \dot{Q}_1 S_2 \dot{Q}_2 \cos(Q_1 - Q_2)] / 2, \\ T_3 &= [(I_3 \dot{Q}_3^2 + m_3 S_3^2 \dot{Q}_3^2) + m_3 \dot{L}_0^2 + m_3 L_0^2 \dot{Q}_0^2 + m_3 L_1^2 \dot{Q}_1^2 + m_3 L_2^2 \dot{Q}_2^2 + \\ &\quad + 2m_3 \dot{L}_0 L_1 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + 2m_3 \dot{L}_0 \dot{Q}_2 L_2 \sin(Q_0 - Q_2) + \\ &\quad + 2m_3 \dot{L}_0 S_3 \dot{Q}_3 \sin(Q_0 - Q_3) + 2m_3 L_0 \dot{Q}_0 S_3 \dot{Q}_3 \cos(Q_0 - Q_3) + \\ &\quad + 2m_3 L_0 \dot{Q}_0 L_1 \dot{Q}_1 \cos(Q_0 - Q_1) + 2m_3 L_0 \dot{Q}_0 L_2 \dot{Q}_2 \cos(Q_0 - Q_1) + \\ &\quad + 2m_3 L_1 \dot{Q}_1 L_2 \dot{Q}_2 \cos(Q_1 - Q_2) + 2m_3 L_1 \dot{Q}_1 S_3 \dot{Q}_3 \cos(Q_1 - Q_3) + \\ &\quad + 2m_3 L_2 \dot{Q}_2 S_3 \dot{Q}_3 \cos(Q_2 - Q_3)] / 2. \end{aligned} \quad (9.2)$$

В общем виде для любого i -го звена биомеханической системы имеем:

$$T_i = \frac{(I_{C_i} + m_i S_i^2) \dot{Q}_i^2}{2} + m_i \frac{\sum_{k=0}^{i-1} L_k^2 \dot{Q}_k^2}{2} + m_i \sum_{k=0}^{i-1} L_k S_i \dot{Q}_i \dot{Q}_k \times$$

$$\begin{aligned} & \times \cos(Q_k - Q_i) + m_i \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} L_k L_j \dot{Q}_k \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_k) + \frac{m_i \dot{L}_0^2}{2} + \\ & + m_i \sum_{k=0}^{i-1} \dot{L}_0 L_k \dot{Q}_k \sin(Q_0 - Q_k) + m_i \dot{L}_0 S_i \dot{Q}_i \sin(Q_0 - Q_i), \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Кинетическая энергия полной системы равна сумме кинетических энергий всех звеньев, входящих в систему. Для четырехзвенной системы получим:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 = T_{ОП} + T_{БМС}, \quad (9.4)$$

где $T_{ОП}$ - кинетическая энергия опоры. $T_{ОП} = T_0$;

$T_{БМС}$ - кинетическая энергия собственно биомеханической системы.

Равняется сумме кинетических энергий звеньев опорно-двигательного аппарата:

$$T_{БМС} = T_1 + T_2 + T_3. \quad (9.5)$$

Раскрыв уравнение (9.5) с помощью выражений (9.2), запишем:

$$\begin{aligned} T_{БМС} = & [(m_1 + m_2 + m_3) \dot{L}_0^2 + (m_1 + m_2 + m_3) L_0^2 \dot{Q}_0^2 + \\ & + (I_1 + m_1 S_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2) \dot{Q}_1^2 + (I_2 + m_2 S_2^2 + m_3 L_2^2) \dot{Q}_2^2 + \\ & + (I_3 + m_3 S_3^2) \dot{Q}_3^2 + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) 2 \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + \\ & + 2 m_2 \dot{L}_0 S_2 \dot{Q}_2 \sin(Q_0 - Q_2) + (S_2 m_2 + m_3 L_2) 2 \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + \\ & + 2 m_3 \dot{L}_0 S_3 \dot{Q}_3 2 \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + 2 m_2 \dot{L}_0 S_2 \dot{Q}_2 \sin(Q_0 - Q_2) + \\ & + (S_2 m_2 + m_3 L_2) 2 \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + 2 m_3 \dot{L}_0 S_3 \dot{Q}_3 2 \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + \\ & + 2 m_2 \dot{L}_0 S_2 \dot{Q}_2 \sin(Q_0 - Q_2) + (S_2 m_2 + m_3 L_2) 2 \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + \\ & + 2 m_3 \dot{L}_0 S_3 \dot{Q}_3 2 \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + 2 m_2 \dot{L}_0 S_2 \dot{Q}_2 \sin(Q_0 - Q_2) + \\ & + (S_2 m_2 + m_3 L_2) 2 \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \sin(Q_0 - Q_1) + 2 m_3 \dot{L}_0 S_3 \dot{Q}_3 \sin(Q_0 - Q_3) + \\ & + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) 2 L_0 \dot{Q}_0 \dot{Q}_1 \cos(Q_0 - Q_1) + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \times \\ & \times 2 L_0 \dot{Q}_0 \dot{Q}_2 \cos(Q_0 - Q_2) + 2 L_0 \dot{Q}_0 S_3 \dot{Q}_3 \cos(Q_0 - Q_3) + \\ & + (m_2 S_2 + m_3 L_2) 2 L_1 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_1 - Q_2) + 2 m_3 L_1 \dot{Q}_1 S_3 \dot{Q}_3 \sin(Q_1 - Q_3) + \\ & + 2 m_3 L_2 \dot{Q}_2 S_3 \dot{Q}_3 \cos(Q_2 - Q_3)] / 2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Теперь выполним преобразования, заметив, что коэффициенты при тригонометрических функциях ранее обозначены как A_{ij} , по уравнениям (8.43). Тогда получается выражение:

$$\begin{aligned}
T_{БМС} = & \left[m_{БМС} (\dot{L}_0^2 + L_0^2 \dot{Q}_0^2) + A_{11} \dot{Q}_1^2 + A_{22} \dot{Q}_2^2 + A_{33} \dot{Q}_3^2 + 2 \frac{A_{01}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_1 \times \right. \\
& \times \sin(Q_0 - Q_1) + 2 \frac{A_{02}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_2 \sin(Q_0 - Q_2) + 2 \frac{A_{03}}{L_0} \dot{L}_0 \dot{Q}_3 \sin(Q_0 - Q_3) + \\
& + 2 A_{01} \dot{Q}_0 \dot{Q}_1 \cos(Q_0 - Q_1) + 2 A_{02} \dot{Q}_0 \dot{Q}_2 \cos(Q_0 - Q_2) + 2 A_{03} \dot{Q}_0 \dot{Q}_3 \times \\
& \times \cos(Q_0 - Q_3) + 2 A_{12} \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_1 - Q_2) + 2 A_{13} \dot{Q}_1 \dot{Q}_3 \cos(Q_1 - Q_3) + \\
& \left. + 2 A_{23} \dot{Q}_2 \dot{Q}_3 \cos(Q_2 - Q_3) \right] / 2. \tag{9.7}
\end{aligned}$$

Кинетическая энергия биомеханической системы в условиях упругой опоры в компактной форме для N -звенной системы выглядит как:

$$\begin{aligned}
T_{БМС} = & \left\{ m_{БМС} (\dot{L}_0^2 + L_0^2 \dot{Q}_0^2) + \sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i^2 + 2 \frac{\dot{L}_0}{L_0} \sum_{i=1}^N A_{0i} \dot{Q}_i \sin(Q_0 - Q_i) + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i=0}^N A_{ij} \sum_{j=i+1}^N \dot{Q}_i \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i) \right\} / 2, \quad j \leq N. \tag{9.8}
\end{aligned}$$

В этих формулах коэффициенты A_{0i} , относящиеся к опоре, являются переменной величиной $A_{0i} = var = f(L_0)$, в отличие от остальных коэффициентов A_{ii} и A_{ij} при $i > 0$.

Вторая форма записи кинетической энергии для биомеханической системы в условиях упругой опоры через коэффициенты D_{0i} будет следующей:

$$\begin{aligned}
T_{БМС} = & \left[m_{БМС} (\dot{L}_0^2 + L_0^2 \dot{Q}_0^2) + \sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i^2 + 2 \dot{L}_0 \sum_{i=1}^N D_{0i} \dot{Q}_i \sin(Q_0 - Q_i) + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i=0}^N A_{ij} \sum_{j=i+1}^N \dot{Q}_i \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i) \right] / 2, \quad j \leq N. \tag{9.9}
\end{aligned}$$

Для трехзвенной системы имеем коэффициенты:

$$D_{01} = \frac{A_{01}}{L_0} = m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1,$$

$$D_{02} = \frac{A_{02}}{L_0} = m_2 S_2 + m_3 L_2,$$

$$D_{03} = \frac{A_{03}}{L_0} = m_3 S_3. \quad (9.10)$$

Разделим выражения (9.8) и (9.9) на части, включающие параметры упругой опоры и включающие параметры только биомеханической системы. Имеем по первому варианту уравнения с параметрами упругой опоры в виде:

$$T_{БМС}^{ОП} = \left[m_{БМС} (\dot{L}_0^2 + L_0^2 \dot{Q}_0^2) + 2 \frac{\dot{L}_0}{L_0} \sum_{i=1}^N A_{0i} \dot{Q}_i \sin(Q_0 - Q_i) + \right. \\ \left. + 2A_{0j} \sum_{j=i+1}^N \dot{Q}_i \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i) \right] / 2, \quad j \leq N \quad (9.11)$$

и с параметрами только биомеханической системы:

$$T_{БМС}^B = \left[\sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N A_{ij} \sum_{j=i+1}^N \dot{Q}_i \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i) \right] / 2, \quad j \leq N. \quad (9.12)$$

По второму варианту меняется лишь форма записи выделенной опоры:

$$T_{БМС}^{ОП} = \left[m_{БМС} (\dot{L}_0^2 + L_0^2 \dot{Q}_0^2) + 2 \dot{L}_0 \sum_{i=1}^N D_{0i} \dot{Q}_i \sin(Q_0 - Q_i) + \right. \\ \left. + 2A_{0j} \sum_{j=i+1}^N \dot{Q}_i \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i) \right] / 2, \quad j \leq N. \quad (9.13)$$

Тогда в общем виде запишем уравнение кинетической энергии биомеханической системы через выделенные системы как:

$$T_{БМС} = T_{БМС}^{ОП} + T_{БМС}^B. \quad (9.14)$$

Коэффициент опоры по кинетической энергии для биомеханической системы определим по уравнению:

$$\chi_{T_{БМС}} = \frac{T_{БМС}^{ОП}}{T_{БМС}^B}. \quad (9.15)$$

В выражении (9.4) для полной системы кинетическая энергия спортивного снаряда записана в общем виде как T_0 . В зависимости от применяемой методики, например, моделировании опоры двумя или одной

пружиной, в уравнения кинетической энергии необходимо подставить соответствующие выражения.

В случае приведения массы упругой опоры к точке k имеем выражение для кинетической энергии:

$$T_0 = \frac{m_{npk} v_k^2}{2} = \frac{m_{npk} (\dot{Y}_k^2 + \dot{Z}_k^2)}{2}. \quad (9.16)$$

Если же выполняется приведение массы к точке 1 и точке 2, то уравнение кинетической энергии примет вид:

$$T_0 = T_{01} + T_{02} = \frac{m_{np1} v_1^2}{2} + \frac{m_{np2} v_2^2}{2}, \quad (9.17)$$

где T_{01} - кинетическая энергия груза массой m_{np1} . Она равна:

$$T_{01} = \frac{m_{np1} v_1^2}{2} = \frac{m_{np1} (\dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2)}{2}; \quad (9.18)$$

T_{02} - кинетическая энергия груза массой m_{np2} . Она равна:

$$T_{02} = \frac{m_{np2} v_2^2}{2} = \frac{m_{np2} (\dot{Y}_2^2 + \dot{Z}_2^2)}{2}. \quad (9.19)$$

В случае равенства приведенных масс $m_{np1} = m_{np2}$ уравнение (9.17) перепишем как

$$T_0 = \frac{m_{np1} (\dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2)}{2} + \frac{m_{np2} (\dot{Y}_2^2 + \dot{Z}_2^2)}{2} = \frac{m_{np1}}{2} [(\dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2) + (\dot{Y}_2^2 + \dot{Z}_2^2)]. \quad (9.20)$$

Выражения позволяют выполнить автоматизированный расчет на ЭВМ для N -звенной модели, состоящей из любого количества звеньев, по удобным и компактным формулам.

9.3 Кинетическая энергия биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой двумя пружинами

Подставим в выражения (9.1) скорости центров масс и выполним преобразования. По уравнениям (3.46) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{C_1} &= \dot{L}_{0\Gamma} - S_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1, \\ \dot{Z}_{C_1} &= \dot{L}_{0B} + S_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_{C_2} &= \dot{L}_{0_r} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - S_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2, \\
\dot{Z}_{C_2} &= \dot{L}_{0_B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + S_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2, \\
\dot{Y}_{C_3} &= \dot{L}_{0_r} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - S_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3, \\
\dot{Z}_{C_3} &= \dot{L}_{0_B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + S_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3.
\end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{m_1(\dot{Y}_{C_1}^2 + \dot{Z}_{C_1}^2)}{2} + \frac{I_{C_1} \dot{Q}_1^2}{2} = m_1 \left[(\dot{L}_{0_r} - S_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1)^2 + (\dot{L}_{0_B} + S_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1)^2 \right] / 2 + \\
&\quad + I_1 \dot{Q}_1^2 / 2 = m_1 \left[(\dot{L}_{0_r}^2 - 2\dot{L}_{0_r} S_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 + S_1^2 \dot{Q}_1^2 \sin^2 Q_1) + \right. \\
&\quad \left. + (\dot{L}_{0_B}^2 + 2\dot{L}_{0_B} S_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + S_1^2 \dot{Q}_1^2 \cos^2 Q_1) \right] / 2 + I_1 \dot{Q}_1^2 / 2 = m_1 \left[(\dot{L}_{0_r}^2 + \dot{L}_{0_B}^2) + \right. \\
&\quad \left. + 2S_1 \dot{Q}_1 (\dot{L}_{0_B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0_r} \sin Q_1) + (S_1^2 \dot{Q}_1^2 \sin^2 Q_1 + S_1^2 \dot{Q}_1^2 \cos^2 Q_1) \right] / 2 + I_1 \dot{Q}_1^2 / 2 = \\
&\quad = m_1 \left[(\dot{L}_{0_r}^2 + \dot{L}_{0_B}^2) + 2S_1 \dot{Q}_1 (\dot{L}_{0_B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0_r} \sin Q_1) + S_1^2 \dot{Q}_1^2 \right] + I_1 \dot{Q}_1^2 / 2, \\
T_2 &= \frac{m_2(\dot{Y}_{C_2}^2 + \dot{Z}_{C_2}^2)}{2} + \frac{I_{C_2} \dot{Q}_2^2}{2} = m_2 \left[(\dot{L}_{0_r} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - S_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (\dot{L}_{0_B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + S_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2)^2 \right] / 2 + I_{C_2} \dot{Q}_2^2 / 2 = m_2 \left[(\dot{L}_{0_r}^2 + \dot{L}_{0_B}^2) + \right. \\
&\quad \left. + 2L_1 \dot{Q}_1 (\dot{L}_{0_B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0_r} \sin Q_1) + 2S_2 \dot{Q}_2 (\dot{L}_{0_B} \cos Q_2 - \dot{L}_{0_r} \sin Q_2) + \right. \\
&\quad \left. + 2L_1 \dot{Q}_1 S_2 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1) + L_1^2 \dot{Q}_1^2 + S_2^2 \dot{Q}_2^2 \right] / 2 + I_{C_2} \dot{Q}_2^2 / 2, \\
T_3 &= \frac{m_3(\dot{Y}_{C_3}^2 + \dot{Z}_{C_3}^2)}{2} + \frac{I_{C_3} \dot{Q}_3^2}{2} = m_3 \left[(\dot{L}_{0_r} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - S_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3)^2 \right] / 2 + \\
&\quad + m_3 \left[(\dot{L}_{0_B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + S_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3)^2 \right] / 2 + I_{C_3} \dot{Q}_3^2 / 2 = \\
&\quad = m_3 \left[(\dot{L}_{0_r}^2 + \dot{L}_{0_B}^2) + 2L_1 \dot{Q}_1 (\dot{L}_{0_B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0_r} \sin Q_1) + 2L_2 \dot{Q}_2 (\dot{L}_{0_B} \cos Q_2 - \right. \\
&\quad \left. - \dot{L}_{0_r} \sin Q_2) + 2S_3 \dot{Q}_3 (\dot{L}_{0_B} \cos Q_3 - \dot{L}_{0_r} \sin Q_3) + 2L_1 \dot{Q}_1 L_2 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1) + \right. \\
&\quad \left. + 2L_1 \dot{Q}_1 S_3 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_1) + 2L_2 \dot{Q}_2 S_3 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_2) \right] / 2 + \\
&\quad + m_3 \left[L_1^2 \dot{Q}_1^2 + L_2^2 \dot{Q}_2^2 + S_3^2 \dot{Q}_3^2 \right] / 2 + I_{C_3} \dot{Q}_3^2 / 2. \tag{9.21}
\end{aligned}$$

В общем виде для любого i -го звена биомеханической системы получим:

$$\begin{aligned}
T_i &= \frac{(I_{C_i} + m_i S_i^2) \dot{Q}_i^2}{2} + m_i \frac{(\dot{L}_{0_r}^2 + \dot{L}_{0_B}^2)}{2} + m_i \frac{\sum_{k=1}^{i-1} (L_k^2 \dot{Q}_k^2)}{2} + m_i \sum_{k=1}^{i-1} L_k S_i \dot{Q}_i \dot{Q}_k \times \\
&\quad \times \cos(Q_k - Q_i) + m_i \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} L_k L_j \dot{Q}_k \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_k) +
\end{aligned}$$

$$+ m_i \sum_{k=1}^{i-1} L_k \dot{Q}_k (\dot{L}_{0B} \cos Q_k - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_k) + m_i S_i \dot{Q}_i (\dot{L}_{0B} \cos Q_i - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_i). \quad (9.22)$$

Выполним подстановку в уравнение (9.5) для трехзвенной биомеханической системы выражения (9.21):

$$\begin{aligned} T_{БМС} = & [(m_1 + m_2 + m_3)(\dot{L}_{0\Gamma}^2 + \dot{L}_{0B}^2) + (I_1 + m_1 S_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2) \dot{Q}_1^2 + \\ & + (I_2 + m_2 S_2^2 + m_3 L_2^2) \dot{Q}_2^2 + (I_3 + m_3 S_3^2) \dot{Q}_3^2 + 2(m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \times \\ & \times \dot{Q}_1 (\dot{L}_{0B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_1) + 2m_2 S_2 \dot{Q}_2 (\dot{L}_{0B} \cos Q_2 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_2) + \\ & + 2(S_2 m_2 + m_3 L_2) 2\dot{Q}_1 (\dot{L}_{0B} \cos Q_2 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_2) + 2m_3 S_3 \dot{Q}_3 (\dot{L}_{0B} \cos Q_3 - \\ & - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_3) + 2(m_2 S_2 + m_3 L_2) L_1 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1) + 2m_3 L_1 \dot{Q}_1 S_3 \dot{Q}_3 \sin(Q_3 - Q_1) + \\ & + 2m_3 L_2 \dot{Q}_2 S_3 \dot{Q}_3 \sin(Q_3 - Q_2)] / 2 = [m_{БМС} (\dot{L}_{0\Gamma}^2 + \dot{L}_{0B}^2) + A_{11} \dot{Q}_1^2 + A_{22} \dot{Q}_2^2 + A_{33} \dot{Q}_3^2 + \\ & + 2A_{12} \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1) + 2A_{13} \dot{Q}_1 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_1) + 2A_{23} \dot{Q}_2 \dot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_2) + \\ & + 2 \frac{A_{01}}{(L_{0\Gamma} + L_{0B})} \dot{Q}_1 (\dot{L}_{0B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_1) + 2 \frac{A_{02}}{(L_{0\Gamma} + L_{0B})} \dot{Q}_2 (\dot{L}_{0B} \cos Q_2 - \\ & - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_2) + 2 \frac{A_{03}}{(L_{0\Gamma} + L_{0B})} \dot{Q}_3 (\dot{L}_{0B} \cos Q_3 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_3)] / 2. \quad (9.23) \end{aligned}$$

Как и ранее, коэффициенты A_{ij} при тригонометрических функциях приняты по уравнениям (8.40). Добавим лишь коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_{01} &= (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1)(L_{0\Gamma} + L_{0B}), \\ A_{02} &= (m_2 S_2 + m_3 L_2)(L_{0\Gamma} + L_{0B}), \\ A_{03} &= (m_3 S_3)(L_{0\Gamma} + L_{0B}). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Кинетическая энергия биомеханической системы в условиях упругой опоры в компактной форме для N -звенной системы выглядит как:

$$\begin{aligned} T_{БМС} = & \left[m_{БМС} (\dot{L}_{0\Gamma}^2 + \dot{L}_{0B}^2) + \sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i^2 + \frac{2}{(L_{0\Gamma} + L_{0B})} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{i=1}^N A_{0i} \dot{Q}_i (\dot{L}_{0B} \cos Q_i - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_{ij} \dot{Q}_i \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i) \right] / 2, \quad (9.25) \\ & j \leq N. \end{aligned}$$

Вторая форма записи кинетической энергии для биомеханической системы в условиях упругой опоры будет следующей:

$$T_{БМС} = \left[m_{БМС} (\dot{L}_{0Г}^2 + \dot{L}_{0Б}^2) + \sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N D_{0i} \dot{Q}_i (\dot{L}_{0Б} \cos Q_i - \dot{L}_{0Г} \sin Q_i) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_{ij} \dot{Q}_i \dot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i) \right] / 2, \quad j \leq N. \quad (9.26)$$

При разделении кинетической энергии на части, включающие в явном виде параметры упругой опоры и параметры биомеханической системы, получим по уравнению (9.25) выражение:

$$T_{БМС}^{ОП} = \left[m_{БМС} (\dot{L}_{0Г}^2 + \dot{L}_{0Б}^2) + \frac{2}{(L_{0Г} + L_{0Б})} \sum_{i=1}^N A_{0i} \dot{Q}_i (\dot{L}_{0Б} \cos Q_i - \dot{L}_{0Г} \sin Q_i) \right] / 2. \quad (9.27)$$

По второму варианту формулы кинетической энергии меняется лишь форма записи выражения кинетической энергии для опоры:

$$T_{БМС}^{ОП} = \left[m_{БМС} (\dot{L}_{0Г}^2 + \dot{L}_{0Б}^2) + 2 \sum_{i=1}^N D_{0i} \dot{Q}_i (\dot{L}_{0Б} \cos Q_i - \dot{L}_{0Г} \sin Q_i) \right] / 2. \quad (9.28)$$

Уравнение (9.12) для $T_{БМС}^B$ остается прежним. Не меняется и формула (9.14) для кинетической энергии всей биомеханической системы в общем виде. То же относится и к расчету коэффициента опоры по кинетической энергии биомеханической системы исходя из выражения (9.15).

9.4 Кинетический момент биомеханической системы относительно оси вращения в условиях опоры, моделируемой вращающейся пружиной

Наряду с кинетической энергией одной из основных динамических характеристик является *количество движения*. В ряде случаев вместо самого вектора количества движения рассматривают его момент относительно некоторого центра или оси (*кинетический момент*) [12, 67, 118].

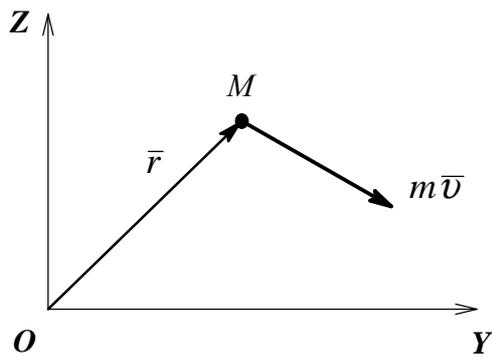


Рисунок 9.1 – Кинетический момент точки

Заметим, что количество движения характеризует поступательное движение, а кинетический момент – вращательное, т.е. кинетический момент является аналогом количества движения для тел, движущихся вращательно. Термины «*кинетический момент*» и «*момент количества движения*» являются эквивалентными.

Рассмотрим подробнее понятие кинетического момента. Кинетическим моментом точки относительно некоторого центра O (рис. 9.1) называется векторная величина

$$\bar{K}_O = \bar{M}_O(m\bar{v}), \quad (9.29)$$

которая определяется равенством

$$\bar{K}_O = \bar{M}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}, \quad (9.30)$$

где \bar{r} - радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра O .

Случай определения кинетического момента для системы связанных жестких тел применительно к движению биомеханической системы в условиях жесткой опоры подробно рассмотрен в работе [56]. Применим ту же методику.

Кинетический момент для тела, совершающего вращательное движение относительно закрепленной оси, например, для маятника, определяется из выражения

$$K_O = I_1 \dot{Q}_1 + m_1 (Y_{C_1} \dot{Z}_{C_1} - \dot{Y}_{C_1} Z_{C_1}), \quad (9.31)$$

где I_1 - центральный момент инерции;

\dot{Q}_1 - угловая скорость тела;

Y_{C_1} - координата ЦМ маятника по оси OY в основной системе координат;

\dot{Y}_{C_1} - проекция скорости ЦМ маятника на ось OY ;

Z_{C_1} - координата ЦМ маятника по оси OZ в основной системе координат;

\dot{Z}_{C_1} - проекция скорости ЦМ маятника на ось OZ ;

m_1 – масса маятника.

Выражение (9.31) определяет кинетический момент физического маятника относительно оси вращения, проходящей через точку опоры перпендикулярно плоскости движения. Полученная зависимость распространяется на любое из тел, образующих связанную систему и совершающих вращательное движение в одной плоскости [45, 56, 95, 116].

В случае анализа движения полной системы, т.е. с учетом пружины, влияние спортивного снаряда на момент количества движения всей системы необходимо рассмотреть отдельно. Чаще всего это и не требуется, так как кинетический момент необходим для исследования полетной части упражнения, в которой уже произошла потеря контакта со спортивным снарядом.

Для звеньев биомеханической системы имеем такую же форму записи, как и для маятника по уравнению (9.31):

$$\begin{aligned} K_{O_1} &= I_1 \dot{Q}_1 + m_1 (Y_{C_1} \dot{Z}_{C_1} - \dot{Y}_{C_1} Z_{C_1}), \\ K_{O_2} &= I_2 \dot{Q}_2 + m_2 (Y_{C_2} \dot{Z}_{C_2} - \dot{Y}_{C_2} Z_{C_2}), \\ K_{O_3} &= I_3 \dot{Q}_3 + m_3 (Y_{C_3} \dot{Z}_{C_3} - \dot{Y}_{C_3} Z_{C_3}). \end{aligned} \quad (9.32)$$

Используемая в обозначениях моментов индексация образуется по следующему правилу: первый индекс обозначает начало координат и для каждого звена это одна и та же точка O , второй является номером звена, для которого определяется момент.

Подставляем линейные координаты центров масс звеньев системы и их первые производные. Ранее получено:

$$\begin{aligned} Y_{C_1} &= L_0 \cos Q_0 + S_1 \cos Q_1, \\ Z_{C_1} &= L_0 \sin Q_0 + S_1 \sin Q_1, \\ \dot{Y}_{C_1} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - S_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1, \\ \dot{Z}_{C_1} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + S_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1, \\ Y_{C_2} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2, \\ Z_{C_2} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2, \\ \dot{Y}_{C_2} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - S_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2, \\ \dot{Z}_{C_2} &= \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + S_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2, \\ Y_{C_3} &= L_0 \cos Q_0 + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3, \\ Z_{C_3} &= L_0 \sin Q_0 + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3, \\ \dot{Y}_{C_3} &= \dot{L}_0 \cos Q_0 - L_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - S_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3, \end{aligned}$$

$$\dot{Z}_{c_3} = \dot{L}_0 \sin Q_0 + L_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + S_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3.$$

Эти параметры подставляем в уравнения кинетических моментов звеньев (9.32). После необходимых преобразований получим:

$$\begin{aligned} K_{o_1} &= I_1 \dot{Q}_1 + m_1 L_0^2 \dot{Q}_0 + m_1 S_1^2 \dot{Q}_1 + m_1 S_1 L_0 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_0) \cos(Q_0 - Q_1) + \\ &\quad + m_1 S_1 \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_1), \\ K_{o_2} &= I_2 \dot{Q}_2 + m_2 L_0^2 \dot{Q}_0 + m_2 L_1^2 \dot{Q}_1 + m_2 S_2^2 \dot{Q}_2 + m_2 L_1 L_0 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_0) \cos(Q_0 - Q_1) + \\ &\quad + m_2 S_2 L_0 (\dot{Q}_0 + \dot{Q}_2) \cos(Q_0 - Q_2) + m_2 L_1 \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_1) + \\ &\quad + m_2 S_2 L_1 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_1) \cos(Q_1 - Q_2) + m_2 S_2 \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_2), \\ K_{o_3} &= I_3 \dot{Q}_3 + m_3 L_0^2 \dot{Q}_0 + m_3 L_1^2 \dot{Q}_1 + m_3 L_2^2 \dot{Q}_2 + m_3 S_3^2 \dot{Q}_3 + m_3 L_1 L_0 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_0) \times \\ &\quad \times \cos(Q_0 - Q_1) + m_3 L_2 L_0 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_0) \cos(Q_0 - Q_2) + m_3 S_3 L_0 (\dot{Q}_0 + \dot{Q}_3) \cos(Q_0 - Q_3) + \\ &\quad + m_3 L_1 \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_1) + m_3 L_2 L_1 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_1) \cos(Q_1 - Q_2) + m_3 S_3 L_1 (\dot{Q}_3 + \dot{Q}_1) \times \\ &\quad \times \cos(Q_1 - Q_3) + m_3 L_2 \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_2) + m_3 S_3 L_2 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_2 - Q_3) + \\ &\quad + m_3 S_3 \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_3). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Проанализировав формулы, запишем в компактной форме для i -го звена:

$$\begin{aligned} K_{o_i} &= (I_i + m_i S_i^2) \dot{Q}_i + m_i \left\{ \sum_{s=0}^{i-1} L_s [L_s \dot{Q}_s + S_i (\dot{Q}_i + \dot{Q}_s) \cos(Q_i - Q_s)] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^N L_j (\dot{Q}_s + \dot{Q}_j) \cos(Q_j - Q_s) + \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_s) \right\} + \dot{L}_0 S_i \sin(Q_0 - Q_i), \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$i=1, 2, \dots, N; \quad j \leq N.$$

Так как кинетический момент системы, состоящей из произвольного количества тел, равен сумме кинетических моментов этих тел, то для трехзвенной биомеханической системы получим:

$$K_{OX} = K_{OX}^{BMC} = K_{o_1} + K_{o_2} + K_{o_3}, \quad (9.35)$$

где K_{OX}^{BMC} – кинетический момент биомеханической системы относительно неподвижной оси абсцисс OX .

Запишем в развернутом виде кинетический момент биомеханической системы, группируя параметры:

$$\begin{aligned} K_{OX}^{BMC} &= (I_1 + m_1 S_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2) \dot{Q}_1 + (I_2 + m_3 S_2^2 + m_3 L_2^2) \dot{Q}_2 + (I_3 + m_3 S_3^2) \dot{Q}_3 + \\ &\quad + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) L_0 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_0) \cos(Q_1 - Q_0) + (m_1 + m_2 + m_3) L_0^2 \dot{Q}_0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_1) + (m_2 S_2 + m_3 L_2) L_0 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_0) \times \\
& \times \cos(Q_2 - Q_0) + m_3 S_3 L_0 (\dot{Q}_3 + \dot{Q}_0) \cos(Q_3 - Q_0) + (m_2 S_2 + m_3 L_2) L_1 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \times \\
& \times \cos(Q_2 - Q_1) + m_3 S_3 L_1 (\dot{Q}_3 + \dot{Q}_1) \cos(Q_3 - Q_1) + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{L}_0 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_0) \times \\
& \times \cos(Q_0 - Q_2) + m_3 L_2 S_3 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2) + m_3 S_3 \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_3).
\end{aligned} \tag{9.36}$$

Заметим, что данное выражение можно преобразовать, введя коэффициенты A_{ij} по уравнениям (8.40) с некоторыми дополнениями:

$$\begin{aligned}
K_{OX}^{BMC} = & A_{11} \dot{Q}_1 + A_{22} \dot{Q}_2 + A_{33} \dot{Q}_3 + A_{01} (\dot{Q}_0 + \dot{Q}_1) \cos(Q_0 - Q_1) + A_{00} \dot{Q}_0 + \\
& + \frac{A_{01} \dot{L}_0}{L_0} \sin(Q_0 - Q_1) + A_{02} (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_0) \cos(Q_0 - Q_2) + A_{03} (\dot{Q}_3 + \dot{Q}_0) \cos(Q_0 - Q_3) + \\
& + A_{12} (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_1 - Q_2) + A_{13} (\dot{Q}_3 + \dot{Q}_1) \cos(Q_1 - Q_3) + \frac{A_{02} \dot{L}_0}{L_0} \sin(Q_0 - Q_2) + \\
& + A_{23} (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_2 - Q_3) + \frac{A_{03} \dot{L}_0}{L_0} \sin(Q_0 - Q_3).
\end{aligned} \tag{9.37}$$

Для N -звенной системы, моделирующей опорно-двигательный аппарат человека, запишем в компактной форме:

$$\begin{aligned}
K_{OX}^{BMC} = & \sum_{i=1}^N \frac{A_{0i} \dot{L}_0}{L_0} \sin(Q_0 - Q_i) + \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N A_{ij} (\dot{Q}_i + \dot{Q}_j) \cos(Q_j - Q_i) + \sum_{i=0}^N A_{ii} \dot{Q}_i, \\
& j \leq N.
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Другая форма записи через коэффициенты D_{0i} выглядит как:

$$\begin{aligned}
K_{OX}^{BMC} = & D_{00} L_0 \dot{Q}_0 + \sum_{i=1}^N D_{0i} \dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_i) + \\
& + \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N A_{ij} (\dot{Q}_i + \dot{Q}_j) \cos(Q_j - Q_i) + \sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i, \quad j \leq N.
\end{aligned} \tag{9.39}$$

Здесь имеем коэффициент D_{00} , равный

$$D_{00} = m_{BMC} L_0.$$

Выделим часть кинетического момента $K_{OX}^{BMC_0}$, в явном виде

зависящую от упругих свойств опоры. Вторая часть K_{OX}^{BMCN} будет характеризовать кинетический момент выделенной биомеханической системы. По форме записи она ничем не отличается от уравнения кинетического момента, выведенного для движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры. Имеем:

$$K_{OX}^{BMC_0} = A_{00}\dot{Q}_0 + \sum_{i=1}^N \frac{A_{0i}\dot{L}_0}{L_0} \sin(Q_0 - Q_i) + \sum_{i=1}^N A_{0i}(\dot{Q}_0 + \dot{Q}_i)\cos(Q_0 - Q_i) + \sum_{i=1}^N A_{0i}(\dot{Q}_0 + \dot{Q}_i)\cos(Q_0 - Q_i), \quad (9.40)$$

$$K_{OX}^{BMC_N} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_{ij}(\dot{Q}_i + \dot{Q}_j)\cos(Q_j - Q_i) + \sum_{i=1}^N A_{ii}\dot{Q}_i, \quad j \leq N. \quad (9.41)$$

В общем виде запишем

$$K_{OX}^{BMC} = K_{OX}^{BMC_0} + K_{OX}^{BMC_N}. \quad (9.42)$$

Для второй формы записи выражений имеем часть, зависящую только от свойств упругой опоры, в виде

$$K_{OX}^{BMC_0} = D_{00}L_0\dot{Q}_0 + \sum_{i=1}^N D_{00}\dot{L}_0 \sin(Q_0 - Q_i) + \sum_{i=1}^N A_{0i}(\dot{Q}_0 + \dot{Q}_i)\cos(Q_0 - Q_i). \quad (9.43)$$

Коэффициент опоры по кинетическому моменту биомеханической системы относительно оси OX найдем как:

$$\chi_{K_{OX}^{BMC}} = \frac{K_{OX}^{BMC}}{K_{OX}^{BMC_N}}. \quad (9.44)$$

Это полный коэффициент опоры по исследуемой характеристике.

9.5 Кинетический момент биомеханической системы относительно оси вращения в условиях опоры, моделируемой двумя пружинами

Используем общие положения, высказанные в п.9.4, для случая моделирования движения спортивного снаряда двумя поступательно движущимися пружинами.

Подставляем линейные координаты центров масс звеньев системы и

их первые производные. Ранее получено:

$$\begin{aligned}
Y_{C_1} &= L_{0\Gamma} + S_1 \cos Q_1, \\
Z_{C_1} &= L_{0B} + S_1 \sin Q_1, \\
\dot{Y}_{C_1} &= \dot{L}_{0\Gamma} - S_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1, \\
\dot{Z}_{C_1} &= \dot{L}_{0B} + S_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1, \\
\\
Y_{C_2} &= L_{0\Gamma} + L_1 \cos Q_1 + S_2 \cos Q_2, \\
Z_{C_2} &= L_{0B} + L_1 \sin Q_1 + S_2 \sin Q_2, \\
\dot{Y}_{C_2} &= \dot{L}_{0\Gamma} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - S_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2, \\
\dot{Z}_{C_2} &= \dot{L}_{0B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + S_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2, \\
\\
Y_{C_3} &= L_{0\Gamma} + L_1 \cos Q_1 + L_2 \cos Q_2 + S_3 \cos Q_3, \\
Z_{C_3} &= L_{0B} + L_1 \sin Q_1 + L_2 \sin Q_2 + S_3 \sin Q_3, \\
\dot{Y}_{C_3} &= \dot{L}_{0\Gamma} - L_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - L_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - S_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3, \\
\dot{Z}_{C_3} &= \dot{L}_{0B} + L_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + L_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + S_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3.
\end{aligned}$$

Эти параметры подставляем в уравнения кинетических моментов звеньев (9.32). После необходимых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
K_{O_1} &= (I_1 + m_1 S_1^2) \dot{Q}_1 + m_1 S_1 \dot{Q}_1 (L_{0\Gamma} \cos Q_1 + L_{0B} \sin Q_1) + \\
&+ m_1 S_1 (\dot{L}_{0B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_1) + m_1 (L_{0\Gamma} \dot{L}_{0B} - L_{0B} \dot{L}_{0\Gamma}), \\
K_{O_2} &= (I_2 + m_2 S_2^2) \dot{Q}_2 + m_2 \dot{L}_1^2 \dot{Q}_1 + m_2 L_1 S_2 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + \\
&+ m_2 (L_{0\Gamma} \dot{L}_{0B} - L_{0B} \dot{L}_{0\Gamma}) + m_2 L_1 \dot{Q}_1 (L_{0\Gamma} \cos Q_1 + L_{0B} \sin Q_1) + \\
&+ m_2 S_2 \dot{Q}_2 (L_{0\Gamma} \cos Q_2 + L_{0B} \sin Q_2) + m_2 L_1 (\dot{L}_{0B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_1) + \\
&+ m_2 S_2 (\dot{L}_{0B} \cos Q_2 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_2), \\
K_{O_3} &= (I_3 + m_3 S_3^2) \dot{Q}_3 + m_3 \dot{L}_1^2 \dot{Q}_1 + m_3 \dot{L}_2^2 \dot{Q}_2 + \\
&+ m_3 L_1 L_2 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + m_3 L_1 S_3 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_1) + \\
&+ m_3 L_2 S_3 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2) + m_3 (L_{0\Gamma} \dot{L}_{0B} - L_{0B} \dot{L}_{0\Gamma}) + \\
&+ m_3 L_1 \dot{Q}_1 (L_{0\Gamma} \cos Q_1 + L_{0B} \sin Q_1) + m_3 L_2 \dot{Q}_2 (L_{0\Gamma} \cos Q_2 + L_{0B} \sin Q_2) + \\
&+ m_3 S_3 \dot{Q}_3 (L_{0\Gamma} \cos Q_3 + L_{0B} \sin Q_3) + m_3 L_1 (\dot{L}_{0B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_1) + \\
&+ m_3 L_2 (\dot{L}_{0B} \cos Q_2 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_2) + m_3 S_3 (\dot{L}_{0B} \cos Q_3 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_3). \quad (9.45)
\end{aligned}$$

В развернутом виде для всей биомеханической системы запишем

$$\begin{aligned}
K_{OX}^{BMC} = & (I_1 + m_1 S_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2) \dot{Q}_1 + (I_2 + m_2 S_2^2 + m_3 L_2^2) \dot{Q}_2 + \\
& + (I_3 + m_3 S_3^2) \dot{Q}_3 + (m_2 L_1 S_2 + m_3 L_1 L_2) (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + \\
& + m_3 L_1 S_3 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_1) + m_3 L_2 S_3 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2) + \\
& + (m_1 + m_2 + m_3) (L_{0\Gamma} \dot{L}_{0B} - L_{0B} \dot{L}_{0\Gamma}) + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \dot{Q}_1 \times \\
& \times (L_{0\Gamma} \cos Q_1 + L_{0B} \sin Q_1) + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \dot{Q}_2 (L_{0\Gamma} \cos Q_2 + L_{0B} \sin Q_2) + \\
& + m_3 S_3 \dot{Q}_3 (L_{0\Gamma} \cos Q_3 + L_{0B} \sin Q_3) + (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \times \\
& \times (\dot{L}_{0B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_1) + (m_2 S_2 + m_3 L_2) \times \\
& \times (\dot{L}_{0B} \cos Q_2 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_2) + m_3 S_3 (\dot{L}_{0B} \cos Q_3 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_3). \quad (9.46)
\end{aligned}$$

Как и ранее, алгебраические выражения, входящие в состав сомножителей со скоростями, описываются коэффициентами A_{ij} или A_{ij} и D_{0j} с разделением горизонтальных и вертикальных коэффициентов по уравнениям (8.40), (9.10). Конкретный выбор символики зависит от желания исследователя, так как с теоретической точки зрения коэффициенты равноценны.

Запишем, используя коэффициенты A_{ij} и D_{0j} :

$$\begin{aligned}
K_{OX}^{BMC} = & A_{11} \dot{Q}_1 + A_{22} \dot{Q}_2 + A_{33} \dot{Q}_3 + A_{12} (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + \\
& + A_{13} (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_1) + A_{23} (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2) + \\
& + (D_{00\Gamma} \dot{L}_{0B} - D_{00B} \dot{L}_{0\Gamma}) + D_{01} \dot{Q}_1 (L_{0\Gamma} \cos Q_1 + L_{0B} \sin Q_1) + \\
& + D_{02} \dot{Q}_2 (L_{0\Gamma} \cos Q_2 + L_{0B} \sin Q_2) + D_{03} (L_{0\Gamma} \cos Q_3 + L_{0B} \sin Q_3) + \\
& + D_{01} (\dot{L}_{0B} \cos Q_1 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_1) + D_{02} (\dot{L}_{0B} \cos Q_2 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_2) + \\
& + D_{03} (\dot{L}_{0B} \cos Q_3 - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_3). \quad (9.47)
\end{aligned}$$

Меняя группировку членов последнего выражения, получим через коэффициенты A_{ij} :

$$\begin{aligned}
K_{OX}^{BMC} = & A_{11} \dot{Q}_1 + A_{22} \dot{Q}_2 + A_{33} \dot{Q}_3 + A_{12} (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + \\
& + A_{13} (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_1) + A_{23} (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2) + \\
& + m_{BMC} (L_{0\Gamma} \dot{L}_{0B} - L_{0B} \dot{L}_{0\Gamma}) + (A_{01\Gamma} \dot{Q}_1 \cos Q_1 + A_{01B} \dot{Q}_1 \sin Q_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A_{02\Gamma} \dot{Q}_2 \cos Q_2 + A_{02B} \dot{Q}_2 \sin Q_2) + (A_{03\Gamma} \dot{Q}_3 \cos Q_3 + A_{03B} \dot{Q}_3 \sin Q_3) + \\
& + \left(\frac{A_{01B}}{L_{0B}} \dot{L}_{0B} \cos Q_1 - \frac{A_{01\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_1 \right) + \left(\frac{A_{02B}}{L_{0B}} \dot{L}_{0B} \cos Q_2 - \frac{A_{02\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_2 \right) + \\
& + \left(\frac{A_{03B}}{L_{0B}} \dot{L}_{0B} \cos Q_3 - \frac{A_{03\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_3 \right). \tag{9.48}
\end{aligned}$$

Отметим, что, так как сохраняется отношение между коэффициентами

$$\frac{A_{0iB}}{L_{0B}} = \frac{A_{0i\Gamma}}{L_{0\Gamma}} = D_{0i}, \tag{9.49}$$

то их можно поменять местами.

Проанализировав формулы, запишем в компактной форме для i -го звена, исходя из тех же предпосылок, что и при выводе уравнений (9.34):

$$\begin{aligned}
K_{O_i} = & (I_i + m_i S_i^2) \dot{Q}_i + m_i \left\{ \sum_{s=1}^{i-1} L_s [L_s \dot{Q}_s + S_i (\dot{Q}_s + \dot{Q}_i) \cos(Q_i - Q_s) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=i+1}^N L_j (\dot{Q}_s + \dot{Q}_j) \cos(Q_j - Q_s) \right\} + m_i (L_{0\Gamma} \dot{L}_{0B} - L_{0B} \dot{L}_{0\Gamma}) + \\
& + m_i \left\{ \sum_{s=1}^{i-1} L_s \dot{Q}_s (L_{0\Gamma} \cos Q_s + L_{0B} \sin Q_s) + S_i \dot{Q}_i (L_{0\Gamma} \cos Q_i + L_{0B} \sin Q_i) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{i-1} (\dot{L}_{0B} \cos Q_k - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_k) + S_i (\dot{L}_{0B} \cos Q_i - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_i) \right\}, \tag{9.50}
\end{aligned}$$

$$i=1, 2, \dots, N; \quad j \leq N.$$

Для N -звенной системы, моделирующей опорно-двигательный аппарат человека, запишем в компактной форме:

$$\begin{aligned}
K_{OX}^{BMC} = & \sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_{ij} (\dot{Q}_i + \dot{Q}_j) \cos(Q_j - Q_i) + \\
& + m_{BMC} (L_{0\Gamma} \dot{L}_{0B} - L_{0B} \dot{L}_{0\Gamma}) + \sum_{i=1}^N A_{0i\Gamma} \dot{Q}_i \cos Q_i + \sum_{i=1}^N A_{0iB} \dot{Q}_i \sin Q_i + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{A_{0iB}}{L_{0B}} \dot{L}_{0B} \cos Q_i - \sum_{i=1}^N \frac{A_{0i\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_i, \quad j \leq N. \tag{9.51}
\end{aligned}$$

Другая форма записи через коэффициенты D_{0i} имеет вид:

$$K_{OX}^{BMC} = \sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_{ij} (\dot{Q}_i + \dot{Q}_j) \cos(Q_j - Q_i) + (D_{00\Gamma} \dot{L}_{0B} - D_{00B} \dot{L}_{0\Gamma}) + \sum_{i=1}^N D_{0i} \dot{Q}_i (L_{0\Gamma} \cos Q_i + L_{0B} \sin Q_i) + \sum_{i=1}^N D_{0i} (\dot{L}_{0B} \cos Q_i - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_i),$$

$$j \leq N. \quad (9.52)$$

Разделяя уравнения (9.51) и (9.52) на части, отражающие в явном виде движение опоры и биомеханической системы, получим:

$$K_{OX}^{BMC_0} = m_{BMC} (L_{0\Gamma} \dot{L}_{0B} - L_{0B} \dot{L}_{0\Gamma}) + \sum_{i=1}^N A_{0i\Gamma} \dot{Q}_i \cos Q_i + \sum_{i=1}^N A_{0iB} \dot{Q}_i \sin Q_i + \sum_{i=1}^N \frac{A_{0iB}}{L_{0B}} \dot{L}_{0B} \cos Q_i - \sum_{i=1}^N \frac{A_{0i\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_i, \quad (9.53)$$

$$K_{OX}^{BMC_N} = \sum_{i=1}^N A_{ii} \dot{Q}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_{ij} (\dot{Q}_i + \dot{Q}_j) \cos(Q_j - Q_i). \quad (9.54)$$

Формула (9.54) ничем не отличается от уравнения (9.41).

Для второй формы записи выражений имеем для выделенной опоры выражение:

$$K_{OX}^{BMC_0} = (D_{00\Gamma} \dot{L}_{0B} - D_{00B} \dot{L}_{0\Gamma}) + \sum_{i=1}^N D_{0i} \dot{Q}_i (L_{0\Gamma} \cos Q_i + L_{0B} \sin Q_i) + \sum_{i=1}^N D_{0i} (\dot{L}_{0B} \cos Q_i - \dot{L}_{0\Gamma} \sin Q_i). \quad (9.55)$$

Коэффициент опоры по кинетическому моменту БМС относительно оси OX не меняется.

Определение коэффициентов опоры для отдельных звеньев как по кинетической энергии, так и по кинетическому моменту возможно, но не показано в этой главе только из-за громоздкости получаемых выражений.

9.6 Кинетический момент биомеханической системы относительно общего центра масс спортсмена

При исследовании динамики вращательных движений спортсмена возникает необходимость оценить кинетический момент всей биомеханической системы относительно общего центра масс. Дело в

том, что кинетический момент относительно оси, проходящей через ОЦМ в момент потери спортсменом контакта с опорой, определяет полетную часть маховых упражнений.

Отметим, что в данном параграфе рассматривается движение спортсмена относительно ОЦМ тела с учетом деформации снаряда, но без учета ее массы.

Основная система координат расположена таким образом, что ось абсцисс проходит через ось недеформированной опоры. Пусть общий центр масс биомеханической системы без учета массы опоры расположен в точке «С» с координатами Y_C^{BMC} , Z_C^{BMC} (рис. 9.2, а, б).

Тогда выражения для координат ОЦМ трехзвенной модели и проекций его скорости по уравнениям (8.12), (8.15) будут иметь вид:

$$Y_C = A_0 \cos Q_0 + A_1 \cos Q_1 + A_2 \cos Q_2 + A_3 \cos Q_3,$$

$$Z_C = A_0 \sin Q_0 + A_1 \sin Q_1 + A_2 \sin Q_2 + A_3 \sin Q_3,$$

$$\dot{Y}_C = \dot{A}_0 \cos Q_0 - A_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0 - A_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - A_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - A_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3,$$

$$\dot{Z}_C = \dot{A}_0 \sin Q_0 + A_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0 + A_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + A_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + A_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3.$$

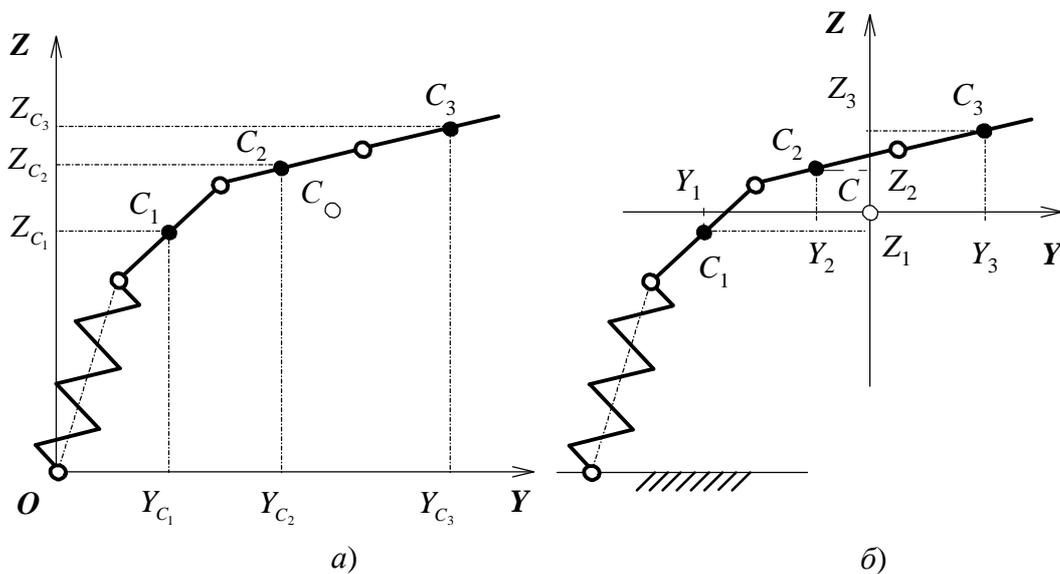


Рисунок 9.2 – Расчетная схема для определения кинетического момента БМС относительно общего центра масс биомеханической системы

При параллельном переносе системы координат $OXYZ$ из точки O (рис. 9.2, а) в точку C , т.е. в ОЦМ биомеханической системы (рис. 9.2, б), необходимо внести коррективы в формулы. Запишем выражения только

$$\begin{aligned}
& + (A_1 - S_1)\dot{Q}_1 \sin Q_1 - A_2\dot{Q}_2 \sin Q_2 - A_3\dot{Q}_3 \sin Q_3, \\
\dot{Y}_2 = & (\dot{L}_0 - \dot{A}_0)\cos Q_0 + (L_0 - A_0)\dot{Q}_0 \sin Q_0 + \\
& + (A_1 - L_1)\dot{Q}_1 \sin Q_1 + (A_2 - S_2)\dot{Q}_2 \sin Q_2 - A_3\dot{Q}_3 \sin Q_3, \\
\dot{Y}_3 = & (\dot{L}_0 - \dot{A}_0)\cos Q_0 + (L_0 - A_0)\dot{Q}_0 \sin Q_0 + \\
& + (A_1 - L_1)\dot{Q}_1 \sin Q_1 + (A_2 - L_2)\dot{Q}_2 \sin Q_2 + (A_3 - S_3)\dot{Q}_3 \sin Q_3, \\
\dot{Z}_1 = & (\dot{L}_0 - \dot{A}_0)\sin Q_0 - (L_0 - A_0)\dot{Q}_0 \cos Q_0 - \\
& - (A_1 - S_1)\dot{Q}_1 \cos Q_1 - A_2\dot{Q}_2 \cos Q_2 - A_3\dot{Q}_3 \cos Q_3, \\
\dot{Z}_2 = & (\dot{L}_0 - \dot{A}_0)\sin Q_0 - (L_0 - A_0)\dot{Q}_0 \cos Q_0 - \\
& - (A_1 - L_1)\dot{Q}_1 \cos Q_1 - (A_2 - S_2)\dot{Q}_2 \cos Q_2 - A_3\dot{Q}_3 \cos Q_3, \\
\dot{Z}_3 = & (\dot{L}_0 - \dot{A}_0)\sin Q_0 - (L_0 - A_0)\dot{Q}_0 \cos Q_0 - \\
& - (A_1 - L_1)\dot{Q}_1 \cos Q_1 - (A_2 - L_2)\dot{Q}_2 \cos Q_2 - (A_3 - S_3)\dot{Q}_3 \cos Q_3. \quad (9.60)
\end{aligned}$$

В этих выражениях обнуляются уже первые два члена, так как и $\dot{L}_0 = \dot{A}_0$. Таким образом, модели содержат только параметры биомеханической системы, но не опоры.

В компактном виде для i -го звена N -звенной модели биомеханической системы скорости запишем как:

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_i = & \sum_{j=1}^{i-1} (A_j - L_j)\dot{Q}_j \sin Q_j + (A_i - S_i)\dot{Q}_i \sin Q_i + \sum_{k=i+1}^N A_k \dot{Q}_k \sin Q_k - (\dot{A}_0 - \dot{L}_0)\cos Q_0, \\
\dot{Z}_i = & \sum_{j=1}^{i-1} (A_j - L_j)\dot{Q}_j \cos Q_j - (A_i - S_i)\dot{Q}_i \cos Q_i - \sum_{k=i+1}^N A_k \dot{Q}_k \cos Q_k - (\dot{A}_0 - \dot{L}_0)\sin Q_0.
\end{aligned}$$

$$i=1, 2, \dots, N; k \leq N. \quad (9.61)$$

Полученные выражения ничем не отличаются от уравнений кинетического момента биомеханической системы относительно ОЦМ в условиях жесткой опоры [56]. Поэтому и дальнейшие выводы такие же. В данной работе повторять их не будем. Сделаем лишь следующее замечание: параметры опоры не входят в разработанные нами модели, тем не менее, спортивный снаряд оказывает влияние на кинетический момент биомеханической системы через изменение значений кинематических параметров движения спортсмена.

Кинетический момент i -го звена N -звенной модели биомеханической системы удобно записать как:

$$K_{C_i} = I_i \dot{Q}_i + m_i (Y_i \dot{Z}_i - \dot{Y}_i Z_i), \quad (9.62)$$

где $i=1, 2, \dots, N$.

Так как кинетический момент биомеханической системы равен сумме кинетических моментов звеньев, составляющих эту систему, то получим:

$$K_{ОЦМ}^{БМС} = K_C^{БМС} = \sum_{i=1}^N K_{C_i}. \quad (9.63)$$

Вывод: кинетический момент БМС относительно ОЦМ непосредственно биомеханической системы зависит от наличия упругой опоры лишь в той мере, в какой последняя оказывает влияние на кинетические параметры движения спортсмена. При этом кинетический момент при осуществлении движения в условиях упругого и абсолютно жесткого спортивного снаряда определяется по одним и тем же моделям.

Запишем в развернутом виде для звеньев:

$$\begin{aligned} K_{C_1} &= I_1 \dot{Q}_1 + m_1 (A_1 - S_1)^2 \dot{Q}_1 + m_1 A_2^2 \dot{Q}_2 + m_1 A_3^2 \dot{Q}_2 + \\ &+ m_1 (A_1 - S_1) A_2 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + \\ &+ m_1 (A_1 - S_1) A_3 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_1) + \\ &+ m_1 A_2 A_3 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2), \\ K_{C_2} &= I_2 \dot{Q}_2 + m_2 (A_1 - L_1)^2 \dot{Q}_1 + m_2 (A_2 - S_2)^2 \dot{Q}_2 + m_2 A_3^2 \dot{Q}_3 + \\ &+ m_2 (A_1 - L_1) (A_2 - S_2) (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + \\ &+ m_2 (A_1 - L_1) A_3 (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_1) + \\ &+ m_1 (A_1 - S_2) A_3 (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2), \\ K_{C_3} &= I_3 \dot{Q}_3 + m_3 (A_1 - L_1)^2 \dot{Q}_1 + m_3 (A_2 - L_2)^2 \dot{Q}_2 + m_3 (A_3 - S_3)^2 \dot{Q}_3 + \\ &+ m_3 (A_1 - L_1) (A_2 - S_2) (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + \\ &+ m_3 (A_1 - L_1) (A_3 - S_3) (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_1) + \\ &+ m_3 (A_1 - L_2) (A_3 - S_3) (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2). \end{aligned} \quad (9.64)$$

Согласно уравнению (9.63) получаем кинетический момент всей биомеханической системы:

$$\begin{aligned}
K_{ОЦМ}^{БМС} = & I_1 \dot{Q}_1 + m_1 [(A_1 - S_1)^2 \dot{Q}_1 + A_2^2 \dot{Q}_2 + A_3^2 \dot{Q}_3] + I_2 \dot{Q}_2 + \\
& + m_2 [(A_1 - L_1)^2 \dot{Q}_1 + (A_2 - S_2)^2 \dot{Q}_2 + A_3^2 \dot{Q}_3] + I_3 \dot{Q}_3 + \\
& + m_3 [(A_1 - L_1)^2 \dot{Q}_1 + (A_2 - L_2)^2 \dot{Q}_2 + (A_3 - S_3)^2 \dot{Q}_3] + \\
& + [m_1 (A_1 - S_1) A_2 + m_2 (A_1 - L_1) (A_2 - S_2) + m_3 (A_1 - L_1) (A_2 - L_2)] \times \\
& \times (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \cos(Q_2 - Q_1) + [m_1 (A_1 - S_1) A_2 + m_2 (A_1 - L_1) A_3 + \\
& + m_3 (A_1 - L_1) (A_3 - S_3)] (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_1) + \\
& + [m_1 A_2 A_3 + m_2 (A_2 - S_2) A_3 + m_3 (A_2 - L_2) (A_3 - S_3)] \times \\
& \times (\dot{Q}_2 + \dot{Q}_3) \cos(Q_3 - Q_2). \tag{9.65}
\end{aligned}$$

Для произвольного i -го звена кинетический момент относительно оси, проходящей через ОЦМ N -звенной биосистемы, имеет вид

$$\begin{aligned}
K_{C_i} = & I_i \dot{Q}_i + m_i \left[\sum_{k=1}^{i-1} (A_k - L_k)^2 \dot{Q}_k + (A_i - S_i)^2 \dot{Q}_i + \sum_{j=i+1}^N A_j^2 \dot{Q}_j \right] + \\
& + m_i \left\{ \sum_{m=1}^{i-1} (A_m - L_m)^2 [(A_i - L_i) (\dot{Q}_m + \dot{Q}_i) \cos(Q_i - Q_m) + \right. \\
& + \sum_{z=m+1}^{i-1} (A_z - L_z) (\dot{Q}_m + \dot{Q}_z) \cos(Q_z - Q_m) + \\
& + \sum_{p=i+1}^N A_p (\dot{Q}_m + \dot{Q}_p) \cos(Q_p - Q_m) + \\
& + (A_i - S_i)^2 \sum_{s=i+1}^N A_s (\dot{Q}_i + \dot{Q}_s) \cos(Q_s - Q_i) + \\
& \left. + \sum_{r=i+1}^{N-1} A_r \sum_{t=r+1}^N A_t (\dot{Q}_r + \dot{Q}_t) \cos(Q_t - Q_r) \right\}, \tag{9.66}
\end{aligned}$$

$$i=1, 2, \dots, N; \quad j \leq N, \quad z \leq N, \quad p \leq N, \quad s \leq N, \quad r \leq N, \quad t \leq N.$$

Модели получаются довольно громоздкими. Лучше найти кинетические моменты каждого звена в отдельности, а значения сложить.

Напомним, что в данную модель кинетический момент опоры не включен, так как выражение для ОЦМ биомеханической системы в данной работе используется для оценки динамических параметров тела спортсмена в полетной части упражнения, где опора уже отсутствует.

Так как нами сделан вывод о независимости выражений кинетического

момента относительно ОЦМ биомеханической системы от наличия опоры, то можно также констатировать: *уравнения моментов количества движения для системы в целом и отдельно по звеньям одинаковы при любой модели упругой опоры.*

Принцип переноса координатных осей не меняется от того, на какое расстояние и до какой точки он осуществляется – до ОЦМ биомеханической системы или же только до контакта БМС с опорой*. Поэтому первые члены, выражающие параметры самой опоры, во всех уравнениях переноса кинетических моментов обнуляются, как показано для случая переноса координатной системы в ОЦМ спортсмена. Таким образом, констатируем, что и в модели кинетических моментов, записанных относительно контакта «человек – спортивный снаряд», параметры упругой опоры не входят.

Вывод: вид уравнений кинетических моментов относительно контакта «человек – спортивный снаряд» не зависит от типа опоры и является одинаковым для упругих и для жестких опор.

* Перенос системы координат осуществляется к оси условного опорного шарнира «рука – пружина».

ГЛАВА 10

ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ОПОРЫ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПРУЖИНОЙ

10.1 Постановка задачи

С точки зрения управления различают *естественное* и *целенаправленное* движения. Естественное движение определяют как неуправляемое [56]. Оно не зависит от воли человека и решаемых им задач. Независимость означает подчинение только объективным законам механики. При естественном движении объект не вырабатывает управляющих воздействий.

На самом деле, движение человека отличается от естественного тем, что для управления внутри тела вырабатываются мышечные силы. Эти силы называются управляющими, а само движение – целенаправленным. Отметим, что если бы естественные движения достигали цели, то управление было бы не нужным [76, 77].

Таким образом, *естественное* и *целенаправленное* движения *коренным образом различаются*.

На сегодняшний день нет ответов на многие вопросы, относящиеся к возникновению управляющих воздействий в мышечном аппарате человека. В работах [56, 57, 76, 77] проведен анализ проблем целенаправленного движения. Отмечен недостаток в литературе по биомеханике, анатомии и антропологии данных по расшифровке действий мышечного аппарата во время совершения целенаправленных движений. Это касается и определения усилий, которые должны развивать мышцы для достижения определенных целей движения. По этой причине необходимо ввести определенные ограничения на модели движения, связанные с отсутствием надежных данных по прикреплению мышц к костям и по распределению усилий внутри области прикрепления, по распределению массы при деформации мышц во время движения, по подвижности суставов, по упаковке мышц и взаимном влиянии при прикосновении друг с другом.

Для вывода уравнений движения биомеханической системы используем принцип Даламбера. Он уже применялся в главе 5 при силовом анализе. На данном этапе модели принимают вид уравнений кинетостатического равновесия системы в виде суммы моментов силовых факторов, приложенных к звеньям и записанных относительно шарниров.

Уравнения решаются относительно моментов управляющих сил мышечной системы.

Еще одним важным моментом, который надо осветить, является трение в контакте человека со спортивным снаряжением. Несмотря на подробный анализ проблемы в п.5.7, п.5.8 вопросы, требующие ответа, остались.

10.2 Управляющие силы мышечного аппарата человека

Работа мышечного аппарата человека представляется достаточно сложной и во многом неизвестной. Воспользуемся ограничениями, налагаемыми на модели мышечного аппарата и описанными в [77]. Считается, что они в основном правильно отражают суть проблемы, позволяя перевести исследование движения человека от общих рассуждений в практическую плоскость при нехватке точных знаний.

Принято:

- массой звена считать сумму масс костей скелета и мышц, примыкающих к кости;
- распределение масс внутри звена считать неизменным;
- тело мышц заменять линией действия мышечного усилия;
- считать, что движение обеспечивается минимальным количеством мышц, достаточным для обеспечения целенаправленного движения N -звенной системы;
- возможные взаимодействия между мышцами не учитывать.

Функция мышц заключается в их сокращении. При этом они становятся короче и толще, вызывая перемещение отдельных органов и звеньев человеческого тела. Мышца, участвующая в реализации движения опорно-двигательного аппарата человека, всегда прикреплена своими концами к разным костям. При мускульном сокращении одна из костей остается неподвижной, другая приближается к ней. Место прикрепления мышцы к кости, которая не приходит в движение, называется *неподвижной точкой* и *считается началом мышцы*. На кости, меняющей свое положение, лежит *подвижная точка*. Она считается *местом прикрепления мышцы*. Отметим также, что в организме мышца даже в ненагруженном состоянии находится в тоническом напряжении, она немного растянута, и это состояние отражено в названии мускулы* [100].

Рассмотрим случай прикрепления мышц к соседним звеньям биомеханической системы. Чаще всего управляющие воздействия

* Слово мускул произошло от латинского *musculus*, что означает мышонок. Причина в том, что мышечные волокна находятся в определенном тоне, и при перерезании мышцы поперек концы ее быстро скрываются под кожей напоподобие мыши, убегающей в норку.

обеспечиваются не одной, а несколькими мышцами. Поэтому можно говорить о действии на звено целой группы управляющих сил – по числу мышц, участвующих в данном движении. Им противодействует такое же количество равных по величине сил, направленных противоположно и возникающих на звене, к которому мышцы прикреплены вторым концом. Управляющие силы попарно компенсируют друг друга. Действуя на каждое из звеньев, они дают два главных вектора управляющих сил, равных и противоположно направленных по одной общей линии.

Таким образом, вместо группы управляющих сил, приложенных к звену, будем иметь дело с одним главным вектором управляющих сил. Точка звена, через которую он проходит, не обязательно является местом прикрепления мышцы к кости, но такое представление удобно при исследовании целенаправленного движения.

Необходимо иметь в виду, что в общем случае управляющие воздействия, испытываемые каждым звеном, разбиваются на две группы, так как кроме первого и последнего звеньев все остальные имеют по два сустава, относительно которых и реализуется движение человека. Другими словами, для промежуточных звеньев движение относительно дистального сустава создают одни мышцы, и их действие описывается соответствующими силами, приложенными к данному звену. Движение относительно проксимального сустава происходит за счет других мышц и появляется вторая группа управляющих сил, также приложенная к рассматриваемому звену.

Утверждение о разных группах мышц, создающих движение относительно проксимального и дистального суставов звена, является предварительным и более подробно анализируется в п.10.4.

10.3 Уравнения целенаправленного движения биомеханической системы

Так как ни величина, ни направление, ни точка приложения к звену

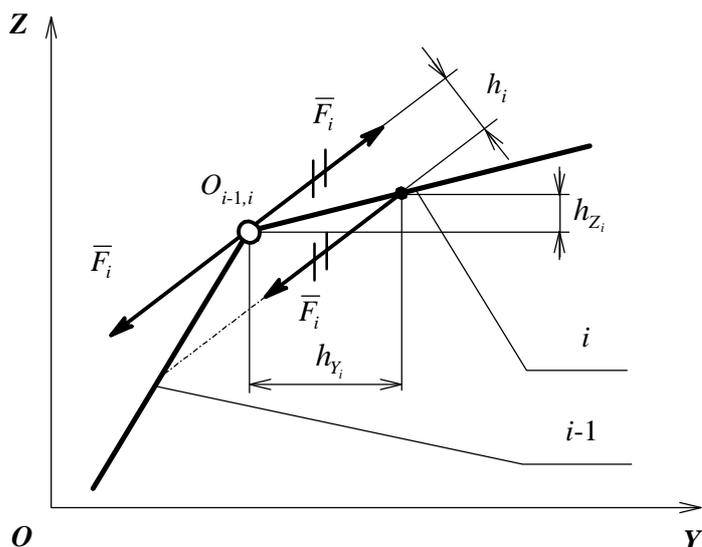


Рисунок 10.1 – Приведение управляющей силы к шарниру

управляющие силы, а также действующий на звено момент управляющих сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$:

$$M_{i,i-1} = -F_i h_i = F_{iy} Z_i - F_{iz} Y_i, \quad (10.1)$$

где $M_{i,i-1}$ – момент управляющей силы, действующей на i -ое звено относительно сустава $O_{i-1,i}$;

h_i – плечо управляющей силы на i -ом звене;

F_{iy} , F_{iz} – проекции управляющей силы на i -ом звене на соответствующие оси;

Y_i – плечо проекции F_{iz} управляющей силы на i -ом звене;

Z_i – плечо проекции F_{iy} управляющей силы на i -ом звене.

При этом на каждое звено также действует сила тяжести, и к нему присоединена инерционная нагрузка. Удобнее не приводить силу инерции i -го звена к точке качания, а показать ее приложенной в ЦМ звена. При этом возникает момент пары сил инерции.

каждой управляющей силы неизвестны, то необходимо привести эти силы к соответствующему шарниру. Это позволит определить относительно его моменты управляющих сил. Пример такого приведения подробно показан на рисунке 10.1.

В результате получим приложенные к шарниру силы реакции и

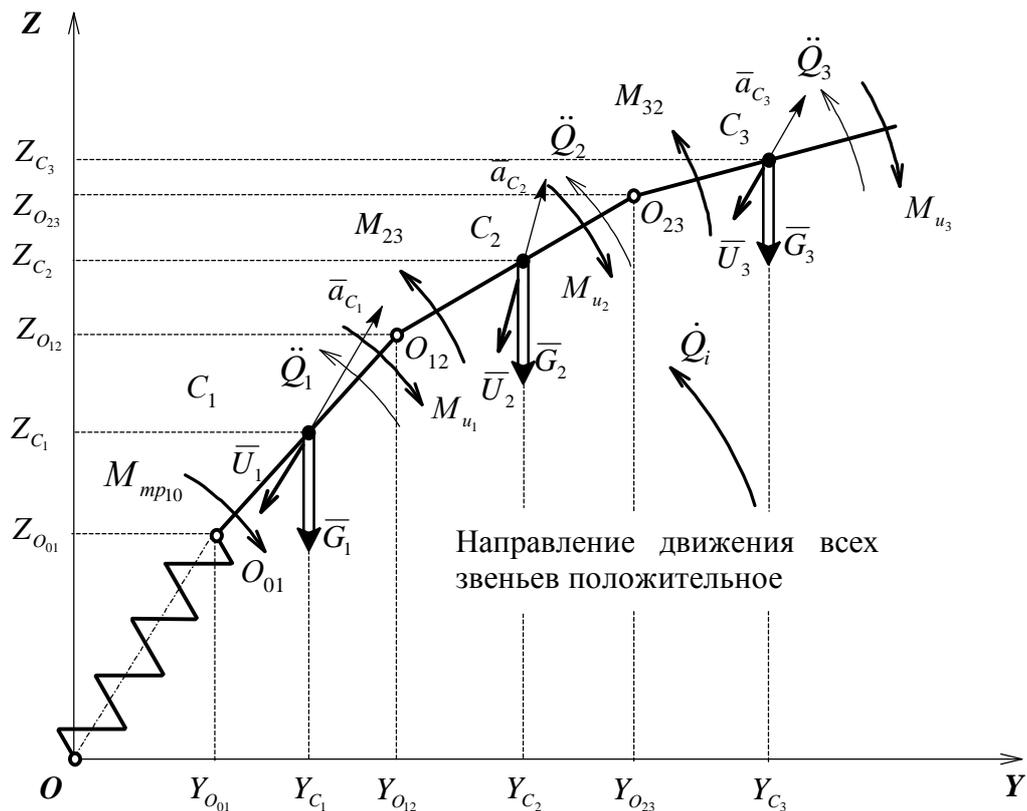


Рисунок 10.2 – Расчетная схема биомеханической системы (опора в виде вращающейся пружины)

Покажем на рисунке 10.2 все силовые факторы, используемые при выводе уравнений движения биомеханической системы. Здесь моменты управляющих сил относительно суставов O_{12} , O_{23} , а также момент трения в опорном суставе O_{01} показаны только со стороны анализируемой части биомеханической системы, и не показаны на соседних звеньях и на самой опоре.

Составим уравнения кинестатического равновесия исследуемой части системы в виде суммы моментов относительно освобожденной кинематической пары. В этом случае для получения расчетной схемы необходимо последовательно отбрасывать звенья биомеханической системы со стороны опоры, как и при силовом анализе.

Для трехзвенной биомеханической системы относительно ее шарниров имеем:

$$\begin{aligned} \sum M_{O_{01}} &= 0, \\ \sum M_{O_{12}} &= 0, \\ \sum M_{O_{23}} &= 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Сразу выражая управляющие моменты мышечных сил и момент сил

трения из уравнений кинестатики, получим:

$$\begin{aligned}
 -M_{mp10} &= I_1\ddot{Q}_1 + I_2\ddot{Q}_2 + I_3\ddot{Q}_3 + G_1(Y_{C_1} - Y_{O_{01}}) + G_2(Y_{C_2} - Y_{O_{01}}) + G_3(Y_{C_3} - Y_{O_{01}}) - \\
 &\quad - m_1\ddot{Y}_{C_1}(Z_{C_1} - Z_{O_{01}}) - m_2\ddot{Y}_{C_2}(Z_{C_2} - Z_{O_{01}}) - m_3\ddot{Y}_{C_3}(Z_{C_2} - Z_{O_{01}}) + \\
 &\quad + m_1\ddot{Z}_{C_1}(Y_{C_1} - Y_{O_{01}}) + m_2\ddot{Z}_{C_2}(Y_{C_2} - Y_{O_{01}}) + m_3\ddot{Z}_{C_3}(Y_{C_3} - Y_{O_{01}}), \\
 M_{21} &= I_2\ddot{Q}_2 + I_3\ddot{Q}_3 + G_2(Y_{C_2} - Y_{O_{12}}) + G_3(Y_{C_3} - Y_{O_{12}}) - m_2\ddot{Y}_{C_2} \times \\
 &\quad \times (Z_{C_2} - Z_{O_{12}}) - m_3\ddot{Y}_{C_3}(Z_{C_3} - Z_{O_{12}}) + m_2\ddot{Z}_{C_2}(Y_{C_2} - Y_{O_{12}}) + m_3\ddot{Z}_{C_3}(Y_{C_3} - Y_{O_{12}}), \\
 M_{32} &= I_3\ddot{Q}_3 + G_3(Y_{C_3} - Y_{O_{23}}) - m_3\ddot{Y}_{C_3}(Z_{C_3} - Z_{O_{23}}) + m_3\ddot{Z}_{C_3}(Y_{C_3} - Y_{O_{23}}),
 \end{aligned}
 \tag{10.3}$$

где $I_1\ddot{Q}_1$, $I_2\ddot{Q}_2$, $I_3\ddot{Q}_3$ - моменты пар сил инерции звеньев 1, 2 и 3 соответственно относительно центра масс своего звена.

Для проекций сил инерции использованы выражения:

$$U_{iy} = -m_i\ddot{Y}_{C_i}, \quad U_{iz} = -m_i\ddot{Z}_{C_i}.$$

Знак минус относится к направлению рассматриваемых силовых факторов и уже реализован на рисунке 10.2.

Уравнения (10.3) подходят для любой формы представления массы спортивного снаряда: как в виде распределенной, так и приведенной к определенной точке или точкам.

Опорный шарнир отличается от остальных, являющихся на самом деле суставами биомеханической системы. В отличие от них*, в кинематической паре O_{01} возникают силы трения, и нет управляющих сил, приводимых к опоре, а значит, нет момента этих сил.

При этом необходимо учесть, что *момент сил трения направлен против движения*, что и показано на рисунке 10.2.

Обозначим правую часть первого выражения системы (10.3) как M_{10} . Это есть движущий момент всей биомеханической системы относительно спортивного снаряда. Его надо отличать от момента движущих сил, так как первый есть сумма моментов движущих сил и сил сопротивления, а последний является моментов только движущих сил.

Имеем $\bar{M}_{10} = -\bar{M}_{mp10}$. Знак минус означает, что моменты имеют противоположные направления при равенстве их значений.

Для сохранения однотипности формы уравнений движения относительно всех шарниров будем использовать для первого уравнения системы (10.3) запись момента через M_{10} слева от знака равенства.

* В пределах принятых допущений.

Запишем в общем виде уравнение для момента управляющих мышечных сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$:

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + \sum_{j=i}^N G_j (Y_{C_j} - Y_{O_{i-1,i}}) - \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Y}_{C_j} (Z_{C_j} - Z_{O_{i-1,i}}) + \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Z}_{C_j} (Y_{C_j} - Y_{O_{i-1,i}}), \quad (10.4)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$.

Отметим, что точкой приведения инерционных нагрузок является центр инерции C_{i+1} , т.е. центр масс каждого звена. В этом случае дополнительно возникает момент пары сил инерции:

$$M_{u_j} = -I_{C_j} \ddot{Q}_j, \quad (10.5)$$

где I_{C_j} - центральный момент инерции j -го звена.

Знак минус означает, что направление дополнительного момента и углового ускорения звена противоположны. Выполнив преобразования, получим

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + \sum_{j=i}^N m_j \left[(g + \ddot{Z}_{C_j}) (Y_{C_j} - Y_{O_{i-1,i}}) - \ddot{Y}_{C_j} (Z_{C_j} - Z_{O_{i-1,i}}) \right], \quad (10.6)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$.

Подставим в формулы (10.3) координаты и ускорения соответствующих точек по уравнениям (1.10), (1.12) и (3.43). Преобразования, из-за их трудоемкости, опустим.

Для N -звенной системы момент управляющих сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$ равен:

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (10.7)$$

Здесь коэффициенты B_{jk} приняты как:

$$B_{01} = A_{01} = (m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) L_0,$$

$$\begin{aligned}
B_{02} &= A_{02} = (m_2 S_2 + m_3 L_2) L_0, \\
B_{03} &= A_{03} = m_3 S_3 L_0, \\
B_{11} &= A_{11} - I_1 = m_1 S_1^2 + L_1^2 (m_2 + m_3), \\
B_{12} &= A_{12} = (m_2 S_2 + m_3 L_2) L_1, \\
B_{13} &= A_{13} = m_3 S_3 L_1, \\
B_{22} &= A_{22} - I_2 = m_2 S_2^2 + m_3 L_2^2, \\
B_{23} &= A_{23} = m_3 S_3 L_2, \\
B_{33} &= A_{33} - I_3 = m_3 S_3^2.
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Учтем, что $B_{jk} = B_{kj}$ при $k > j$. По аналогии с коэффициентами A_{ij} получим общее выражение для B_{jk} :

$$B_{jk} = \delta_{jk} (m_k S_k^2) + m_j L_k S_j (1 - \delta_{jk}) + \sum_{s=k+1}^N m_s L_k L_j, \tag{10.9}$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases} \tag{10.10}$$

Здесь j, k – буквенные индексы. Они соответствуют цифровым индексам коэффициентов B_{jk} и равны:

$$j=1, 2, \dots, N; \quad k=0, 1, \dots, N.$$

Коэффициенты C_{ij} остаются прежними и определяются по уравнениям (5.16).

В случае определения момента M_{10} получим момент трения M_{mp10} в кинематических парах «рука – опора», т.е. $M_{mp10} = M_{10}$. С помощью методики, описанной в п. 5.7, 5.8, определяется сила трения и уточняется реакция на опоре.

Выполним преобразование уравнений целенаправленного движения по формулам (10.7) с использованием следующих выражений:

$$\sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j \cos(Q_j - Q_j) = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j, \tag{10.11}$$

$$\sum_{j=i}^N I_j \dot{Q}_j^2 \sin(Q_j - Q_j) = 0. \tag{10.12}$$

Здесь при любом Q_j имеем $\cos(Q_j - Q_j) = 1$ и $\sin(Q_j - Q_j) = 0$. В этом случае все коэффициенты B_{jk} преобразуются в A_{jk} , так как до этого момента имелось различие лишь в коэффициентах с одинаковыми первыми и вторыми индексами B_{jj} и A_{jj} , а при такой подстановке мы вводим моменты инерции I_j в коэффициенты B_{jj} . Теперь весь ряд B_{jk} идентичен A_{jk} . Имеем:

$$M_{i,i-1} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (10.13)$$

На рисунке 10.3 показан алгоритм расчета управляющих моментов мышечных сил. Переменные b, c, d, e, f служат для накопления сумм при вычислении групп из однотипных членов, составляющих каждое уравнение целенаправленного движения.

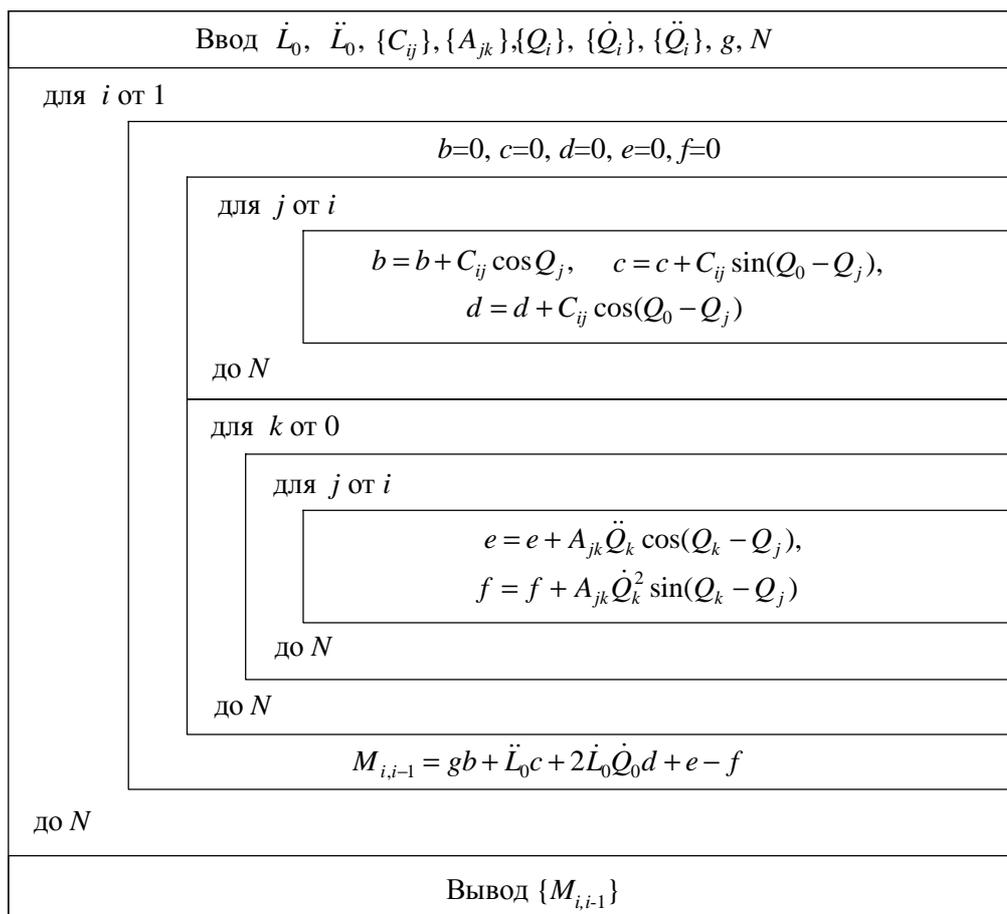


Рисунок 10.3 – Алгоритм расчета управляющих моментов мышечных сил

Используя четность косинусов и нечетность синусов, запишем

$$M_{i,i-1} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_j - Q_0) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_j - Q_0) + \\ + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_j - Q_k) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_j - Q_k). \quad (10.14)$$

Формула получила несколько иной вид, так как в тригонометрических функциях для разности углов за скобки вынесен знак минус.

10.4 Влияние многосуставных мышц на реализацию целенаправленного движения биомеханической системы

В предыдущем пункте исследовано целенаправленное движение без анализа функциональных возможностей мышечной системы. Отправной точкой полученных уравнений управляемого движения явилось приведе-

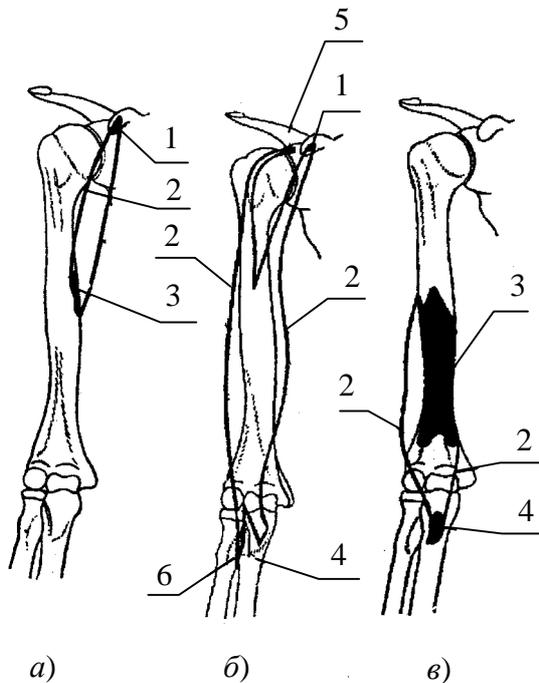


Рисунок 10.4 – Схема прикрепления мышц плеча: а) клювовидно-плечевой мышцы; б) плечевой мышцы; в) двуглавой мышцы плеча

1 - место прикрепления на клювовидном отростке; 2 - свободные края мышцы; 3 - место прикрепления на плечевой кости; 4 - место прикрепления на локтевой кости; 5 -

место прикрепления сухожилия длинной головки плечевой мышцы на верхнем крае суставной впадины лопатки; б - место прикрепления на лучевой кости.

ние управляющих сил к шарнирам и написание уравнений кинестатики с использованием моментов управляющих сил.

Но при внимательном рассмотрении возникают вопросы о правомочности такого подхода. И вот почему. Некоторые мышцы перекидываются через один сустав, другие - через два, а третьи – через три. Различают односуставные и многосуставные мышцы [75, 100].

Покажем на рисунках 10.4, а – в клювовидно-плечевую мышцу (рис. 10.4, а), плечевую мышцу (рис. 10.4, б) и двуглавую мышцу плеча (рис. 10.4, в). В качестве примера двусуставных мышц можно привести двуглавую мышцу плеча, которая обеспечивает движение в локтевом (сгибает руку) и в плечевом суставах, а также супинирует (вращает наружу) предплечье.

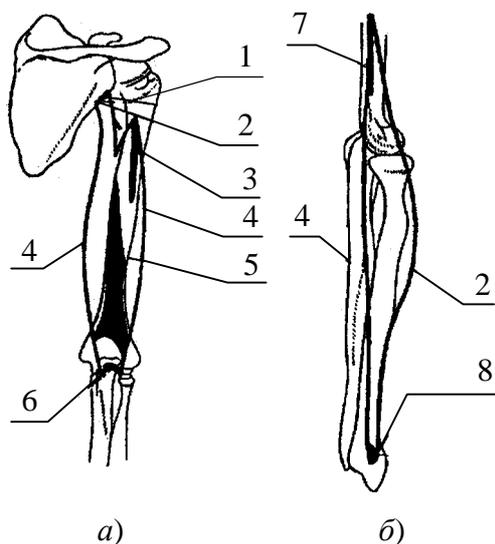


Рисунок 10.5 – Мышцы плеча и схемы их прикреплений:

а) трехглавая мышца плеча; б) плече-лучевая мышца

1, 2 – место прикрепления длинной головки на передней поверхности лопатки; 3 – место прикрепления латеральной головки трехглавой мышцы плеча; 4 – свободные края мышцы; 5 – место прикрепления медиальной головки трехглавой мышцы плеча; 6 – место прикрепления трехглавой мышцы плеча на локтевом отростке локтевой кости; 7 – место прикрепления на плечевой кости; 8 – прикрепление на лучевой кости

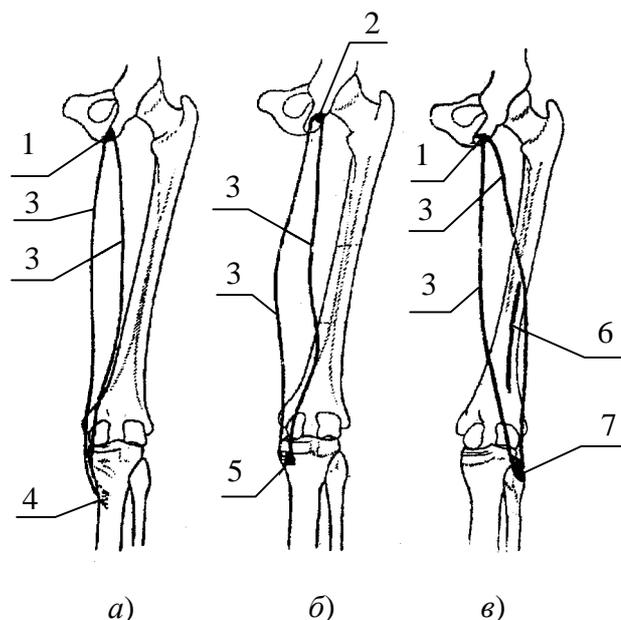


Рисунок 10.6 – Схемы прикрепления мышц задней поверхности бедра:
 а) полусухожильная мышца; б) полуперепончатая мышца; в) двуглавая мышца бедра

1, 2, 4, 5 – места прикреплений (1 и 2 – на седалищном бугре, 5 – на задней поверхности бедра); 3 – свободные края мышц; 6 – прикрепление короткой головки к бедренной кости; 7 – прикрепление к головке малоберцовой кости

Трехглавая мышца плеча, тоже являясь двусуставной, разгибает руку в локтевом суставе. Задние мышцы бедра, перекидываясь через два сустава, сгибают ногу в коленном суставе и разгибают в тазобедренном. К многосуставным мышцам относятся полусухожильная, полуперепончатая и двуглавая мышцы.

На рисунках 10.5, а, б представлены мышца плеча, а на рисунках 10.6, а – в показаны схемы прикрепления мышц задней поверхности бедра.

На рисунке 10.5, а показано прикрепление трехглавой мышцы плеча. Эта мышца двусуставная. А плече-лучевая мышца по рисунку 10.5, б является примером уже односуставной мышцы.

Задняя поверхность бедра представлена сразу тремя многосуставными мышцами. Это полусухожильная мышца (рис. 10,6 а), полуперепончатая мышца (рис. 10.6, б) и двуглавая мышца бедра (рис. 10.6, в).

На передней поверхности бедра находится портняжная мышца (*m. sartorius*) – самая длинная мышца человеческого тела, достигающая 50 см длины. Перекидываясь через два сустава, мышца при своем сокращении производит одновременное сгибание ноги в тазобедренном и коленном суставах, а при согнутом колене вращает голень внутрь. Свое название портняжная мышца получила от старых анатомов, предполагавших, что она производит перекидывание одной ноги на другую, как это делают портные за работой. На самом деле эту функцию выполняют несколько

мышц [100].

Мышцы, обеспечивающие совместно и одновременно то или иное движение тела, называются *синергистами*, а мышцы, вызывающие своим сокращением противоположные движения, называются *антагонистами*. Говоря в п.10.2 о действии на звено управляющих сил при сокращении нескольких мышц, мы имели в виду мышцы синергисты.

В качестве примера мышц антагонистов можно указать ранее упомянутые двуглавую и трехглавую мышцы плеча. Указано [100], что при одновременном и одинаковом по силе сокращении мышц антагонистов движение в суставе становится невозможным, и он при этом фиксируется. Представляется, что данная формулировка некорректна, так как, рассматривая любой сустав в качестве шарнира, мы допустили лишь один вид движения – вращательный (дуговой или круговой). Линейные смещения в самом суставе отсутствуют. Это означает, что для фиксации сустава необходимо равенство вращающих в противоположном направлении моментов, а не сил, их вызывающих. Поэтому нас интересуют силы и плечи, относительно суставов, а не одни лишь значения сил.

Не вдаваясь в анатомические особенности прикрепления мышц, исследуем действие мышц антагонистов. Силу мышц антагонистов, вызывающих движение звена (звеньев), обозначим как управляющую силу с соответствующим индексом, например, \bar{F}_{13}^{yn} . Силу, возникающую в мышцах антагонистах и компенсирующую полностью или частично действие соответствующих управляющих сил, обозначим, например, как \bar{F}_{13}^{an} . Здесь мышцы антагонисты, вызывающие целенаправленное движение, и мышцы антагонисты, препятствующие этому движению, есть разные мышцы. Например, двуглавая мышца плеча (*бицепс*) вызывает движение звеньев, а трехглавая мышца (*трицепс*) этому движению препятствует.

Рассмотрим трехзвенную систему и действие двусуставных мышц. Согласно схеме на рисунке 10.7, движение звеньев 2 и 3 обеспечивается управляющими мышечными силами \bar{F}_{13}^{yn} , \bar{F}_{31}^{yn} . При этом силы равны по модулю $|F_{13}^{yn}| = |F_{31}^{yn}|$ и противоположны по направлению.

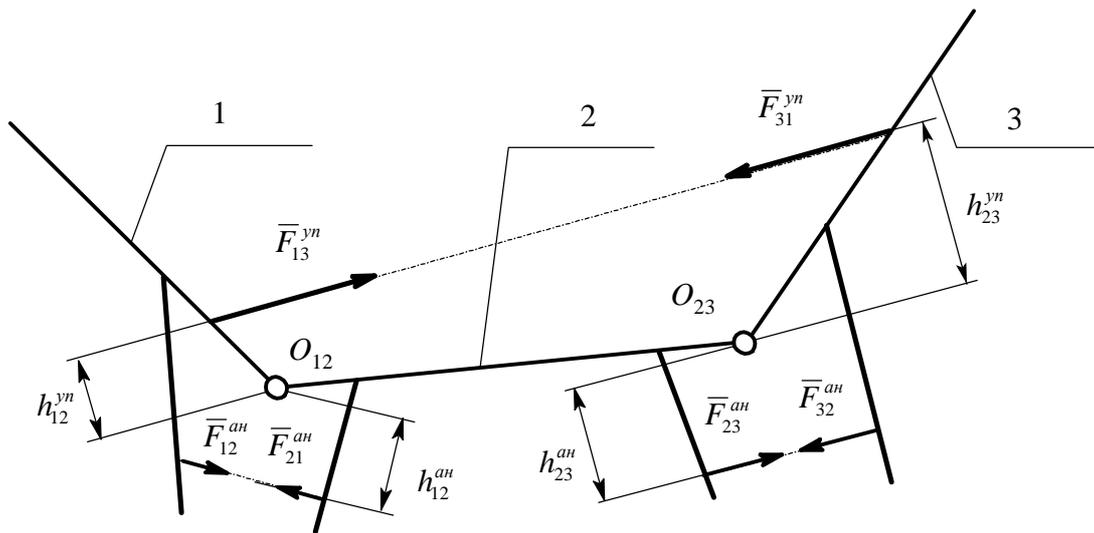


Рисунок 10.7 – Управляющее действие двусуставных мышц

Предположим следующие варианты реализации движения за счет этих сил:

1. движение звеньев 2 и 3 происходит относительно сустава O_{12} , при этом сустав O_{23} зафиксирован;
2. движение звена 3 происходит относительно сустава O_{23} , при этом сустав O_{12} зафиксирован;
3. зафиксированных суставов нет, звенья 2 и 3 находятся в движении относительно звена 1.

На рисунке 10.7 попарно обозначены силы \bar{F}_{12}^{an} , \bar{F}_{21}^{an} и \bar{F}_{23}^{an} , \bar{F}_{32}^{an} , возникающие в мышцах антагонистах, прикрепленных к соседним костям (звеньям). Здесь выбран вариант, когда управляющие мышцы антагонисты являются многосуставными, а мышцы антагонисты, препятствующие движению, – односуставные, так как это не принципиально. Получим следующую картину:

1. В случае равенства моментов $|M_{32}^{an}| = |M_{32}^{yn}|$ относительно сустава O_{23} , последний будет зафиксирован, и движение станет возможным лишь относительно сустава O_{12} . Здесь:

$$M_{32}^{an} = F_{32}^{an} h_{23}^{an}, M_{32}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{23}^{yn}. \quad (10.15)$$

2. В случае равенства моментов $|M_{21}^{an}| = |M_{31}^{yn}|$ относительно сустава O_{12} , теперь уже он окажется зафиксирован, а движение можно реализовать лишь относительно сустава O_{23} . Здесь:

$$M_{21}^{an} = F_{21}^{an} h_{12}^{an}, M_{31}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{12}^{yn}. \quad (10.16)$$

3. В случае, если ни один из суставов, через которые переброшены мышцы, вызывающие движение, не зафиксирован ($|M_{32}^{an}| \neq |M_{32}^{yn}|$, $|M_{21}^{an}| \neq |M_{31}^{yn}|$), то получим движение относительно обоих суставов одновременно. Можно записать моменты, создаваемые силой \bar{F}_{31}^{yn} , как:

$$M_{32}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{23}^{yn}, M_{31}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{12}^{yn}. \quad (10.17)$$

Для лучшего понимания п.3 воспользуемся правилом параллельного переноса силы. На рисунке 10.8 показан пример последовательного приведения управляющей силы \bar{F}_{31}^{yn} многосуставной мышцы к суставам O_{23} и O_{12} , через которые данная мышца переброшена.

Сила \bar{F}_{31}^{yn} вызывает вращение звена 3 относительно сустава O_{23} с моментом $M_{32}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{23}^{yn}$. Приведение выполнено в пределах одного звена, т.е. жесткого тела, на которое эта управляющая сила действует.

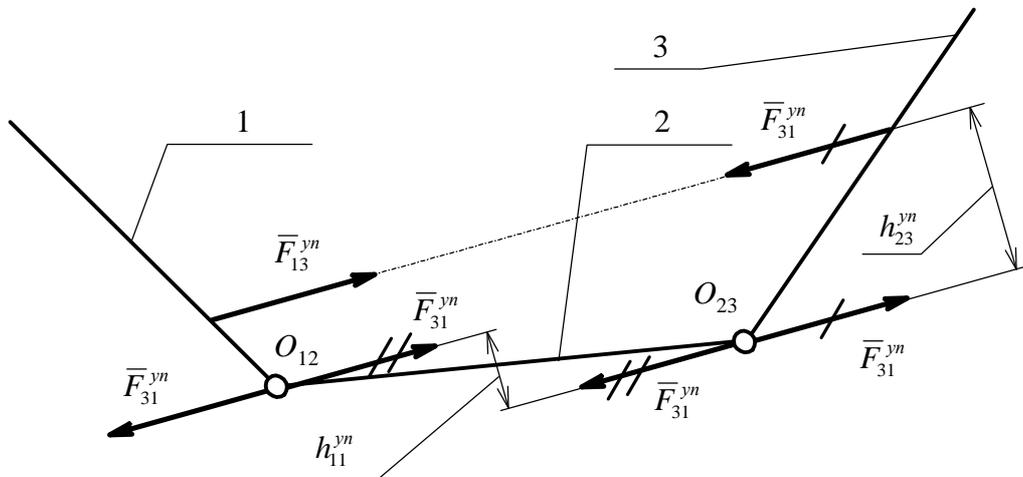


Рисунок 10.8 – Приведение управляющей силы многосуставной мышцы к разным суставам

Так как по рисунку 10.8 сила \bar{F}_{31}^{yn} , приложенная к суставу O_{23} , действует как на звено 3, так и на звено 2, то выполним перенос силы \bar{F}_{31}^{yn} в пределах уже этого звена в сустав O_{12} . Получим дополнительный момент пары сил $M_{21}^{yn} = -F_{31}^{yn} h_{11}^{yn}$ и управляющую силу мышечной системы \bar{F}_{31}^{yn} , приложенную в суставе O_{12} .

Таким образом, получен суммарный момент управляющих сил:

$$M_{31}^{yn} = M_{32}^{yn} - M_{21}^{yn} = F_{31}^{yn} (h_{23}^{yn} - h_{11}^{yn}) = F_{31}^{yn} h_{12}^{yn},$$

$$h_{12}^{yn} = h_{23}^{yn} - h_{11}^{yn}. \quad (10.18)$$

Тем самым показано, что одна и та же управляющая сила *одновременно* вызывает разные моменты относительно разных осей вращения, т.е. сила не распределяется между звеньями 2 и 3 – меняется лишь плечо соответствующего момента.

Во всех рассмотренных вариантах мы исходили из того, что моменты от сил в мышцах антагонистах, работающих на фиксацию сустава, меньше моментов управляющих сил или вообще отсутствуют. В противном случае картина не изменится, так как мышцы антагонисты, работающие на фиксацию сустава, начнут вырабатывать усилия, создающие целенаправленное движение. А управляющие мышцы антагонисты станут фиксировать движение в суставе или не будут оказывать никакого действия.

Здесь не исследовалась парадоксальная функция мышц, вследствие которой они косвенным путем производят движение в соседних суставах. Например, двуглавая мышца плеча, сокращаясь, сгибает руку в локтевом суставе, но при этом обычно натягивается трехглавая мышца, разгибающая руку в плечевом суставе [100].

Отметим, что при анализе работы мышечной системы мы не учитываем тоническое напряжение мышц, так как эти силы взаимно уравновешены.

Таким образом, *многосуставные мышцы участвуют в движении звеньев относительно суставов, через которые они переброшены. Следующий вывод относится к работе мышц антагонистов: они могут перераспределять управляющее воздействие между звеньями за счет фиксации необходимых суставов, но не влияют на общую величину необходимых для движения моментов, вычисленных по выражениям (10.7).*

На основании проведенного анализа работы мышечного аппарата сделаем следующий вывод: *уравнения целенаправленного движения (10.7), (10.13) отражают выполнение целей движения и не отражают напрямую работу мышц. Мозг человека сам решает, какими средствами и с помощью каких программ выполнить предложенные задачи целенаправленного движения.*

По поводу программ, используемых мозгом для управления движением, в данной работе ничего говорить не будем. Относительно же действия мышечного аппарата человека заметим следующее: *конкретная реализация необходимого движения зависит от многих факторов, например, от тренированности спортсмена, от спортивного упражнения и фазы, в которой находится спортсмен, его анатомических особенностей, его психологического состояния на данный момент времени*

и т.д. [60, 61, 65, 107].

На рисунке 10.9 представлен общий случай движения, когда используются как многосуставные мышцы, прикрепленные к разным звеньям

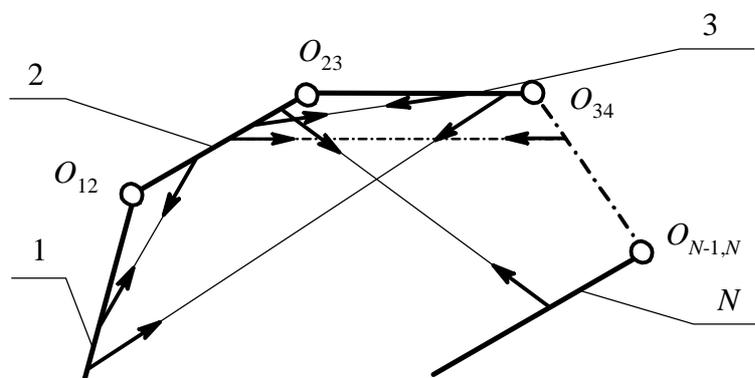


Рисунок 10.9 – Общий случай действия управляющих мышечных сил на биомеханическую систему

биомеханической системы, так и односуставные, прикрепленные к соседним костям человеческого тела.

Так как уравнения целенаправленного движения (10.7), (10.13), (10.14) позволяют найти моменты управляющих мышечных сил, которые являются суммой моментов одно-, двух- и многосуставных мышц,

переброшенных через данный сустав и реализующих необходимое движение, то запишем:

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{(1)} + M_{i,i-1}^{(2)} + \dots + M_{i,i-1}^{(u)} = \sum_{s=1}^u M_{i,i-1}^{(s)}, \quad (10.19)$$

где $M_{i,i-1}^{(1)}$, $M_{i,i-1}^{(2)}$, $M_{i,i-1}^{(u)}$ – управляющие моменты мышечных сил, вырабатываемые относительно данного сустава соответственно одно-, дву- и многосуставными мышцами;

u – максимальное количество суставов, через которые переброшена группа мышц, участвующая в создании момента относительно текущего сустава $O_{i-1,i}$;

s – счетчик, $s=1, 2, \dots, u$. При этом ряд не является непрерывным, так как в каждом конкретном случае необязательно наличие многосуставных мышц с промежуточным числом суставов от 1 до u , через которые они переброшены.

В наиболее общем случае каждый момент многосуставных мышц $M_i^{(s)}$ с конкретным числом s состоит из суммы моментов, количество которых равно числу мышечных групп, отличающихся звеньями (костями), к которым прикреплены начало и окончание мышцы. Замечание по поводу прикрепления мышц означает, что мышцы могут быть одинаковыми по количеству суставов, через которые они переброшены, но различаться звеньями, на которых крепятся (рис. 10.9). Запишем:

$$M_{i,i-1}^{(s)} = M_{i,i-1}^{(s,1)} + M_{i,i-1}^{(s,2)} + \dots + M_{i,i-1}^{(s,p)} = \sum_{k=1}^p M_{i,i-1}^{(s,k)}, \quad (10.20)$$

где $M_{i,i-1}^{(s,k)}$ – управляющие моменты мышечных сил, вырабатываемые относительно данного сустава многосуставными мышцами с одинаковым количеством суставов s , через которые они переброшены, но с разным прикреплением; $k=1, 2, \dots, p$. Порядковый номер мышечной группы с одинаковым числом s ;
 p – максимальное число мышечных групп с равным количеством суставов s , через которые они переброшены, но с разным прикреплением.

Тогда с учетом работы группы мышц относительно исследуемого сустава из уравнения (10.19) имеем:

$$M_{i,i-1} = \lambda_1 M_{i,i-1} + \lambda_2 M_{i,i-1} + \dots + \lambda_u M_{i,i-1} = \sum_{s=1}^u \lambda_s M_{i,i-1}, \quad (10.21)$$

где λ_s – коэффициент влияния групп мышц синергистов, отличающихся количеством суставов, через которые они переброшены, на движение относительно текущего сустава. Определяется как

$$\lambda_s = \frac{M_{i,i-1}^{(s)}}{M_{i,i-1}}. \quad (10.22)$$

При этом понятно, что группа односуставных мышц полностью реализует момент управляющих сил $\lambda_1 M_{i,i-1}^{(1)}$, приходящийся на ее долю, так как у этих мышц нет возможности влиять на движение относительно других суставов. Остальные группы мышц синергистов являются многосуставными и создают момент управляющих сил в пределах величины $\sum_{s=2}^u M_{i,i-1}^{(s)}$ согласно выражениям (10.19)-(10.21), но при этом имеют возможность участвовать в движении и относительно остальных суставов, через которые они переброшены.

Отметим также, что определение коэффициентов влияния λ_s групп мышц для управляющего момента мышечных сил, необходимого при реализации движения относительно конкретного сустава, и наличие фиксации сустава (перераспределение движения между суставами) выходит за рамки данной работы. Тем не менее, даже без подробного анализа проблемы видно, что сложность задачи определяется

способностью человека управлять напряжением мышц во время движения. Другими словами, коэффициенты λ_s и фиксация суставов не являются постоянными параметрами движения, что переводит проблему в разряд трудно решаемых современными средствами исследования.

Такие же коэффициенты влияния можно ввести и для отдельных мышц, обеспечивающих движение биомеханической системы.

Анализ полученных выражений, показывает следующие пути управления движением со стороны мышечной системы человека*: изменение плеч моментов и величин управляющих сил, включение в работу новых мышц или выключение из нее задействованных. Осуществить это можно за счет *избирательного напряжения и расслабления групп мышц*, переброшенных через каждый сустав [90, 107].

По поводу моментов отметим, что изменение расстояний от линий действия управляющих сил до суставов проявляется как результат управления напряжением мышечной системы, так и в качестве результата самого движения. Получается, что движение влияет на моменты управляющих сил, и наоборот. Другими словами, *движение есть и следствие управляющего воздействия мышечной системы человека, и само влияет на это управление*. Именно управляющие силы, вырабатываемые мышечной системой, и способы управления величиной и направлением их моментов относительно суставов являются причинами появления линейных и угловых скоростей и ускорений ЦМ звеньев биомеханических систем (т.е. движения), входящих в уравнения движения, а не наоборот. И во вторую очередь, кинематические параметры влияют на величину моментов управляющих сил.

10.5 Общий теоретический анализ уравнений целенаправленного движения биомеханической системы в условиях упругой опоры

Уравнение движения (10.7) разбивается на шесть групп. Обозначим:

1. $M_{I_j}^{\Sigma}$ - сумма моментов пар сил инерции во вращательном движении звеньев исследуемой части биомеханической системы. Характеризует дополнительные моменты сил инерции звеньев, отсчитываемые в направлении от рассматриваемого i -го звена к последнему звену биомеханической системы, т.е. в направлении от спортивного снаряда в сторону ног. Равна

$$M_{I_j}^{\Sigma} = \sum_{j=i}^N M_{I_j} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j. \quad (10.23)$$

2. $M_{G_j}^{\Sigma}$ - сумма моментов от сил тяжести звеньев исследуемой части

* Управлять движением означает изменять величины и направления моментов управляющих сил.

биомеханической системы. Характеризует влияние сил тяжести звеньев, начиная с текущего i -го звена и до крайнего (до ног). Имеем

$$M_{G_j}^{\Sigma} = \sum_{j=i}^N M_{G_j} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j. \quad (10.24)$$

3. $M_{a_j^0}^{\Sigma}$ - сумма моментов от касательных сил инерции звеньев исследуемой части биомеханической системы при прогибе опоры (растяжении-сжатии пружины). Характеризует часть движения, определяемую через касательные силы инерции звеньев при прямолинейном движении опоры, начиная с текущего i -го звена в сторону крайнего. Запишем сумму как

$$M_{a_j^0}^{\Sigma} = \sum_{j=i}^N M_{a_j^0} = \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j). \quad (10.25)$$

4. $M_{a_j^{\kappa}}^{\Sigma}$ - сумма моментов от кориолисовых сил инерции, прикладываемых к звеньям исследуемой части биомеханической системы. Характеризует часть движения звеньев, начиная с текущего i -го звена в сторону крайнего, состоящую из одновременного поступательного движения их ЦМ за счет прогиба опоры и вращения ее упругой линии, т.е. за счет обращения опоры. Имеем

$$M_{a_j^{\kappa}}^{\Sigma} = \sum_{j=i}^N M_{a_j^{\kappa}} = 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j). \quad (10.26)$$

5. $M_{a_j^{\tau}}^{\Sigma}$ - сумма моментов от касательных сил инерции, прикладываемых к звеньям исследуемой части биомеханической системы, во вращательном движении звеньев. Характеризует часть движения, определяемую через касательные силы инерции, начиная с текущего i -го звена в сторону крайнего, при вращении звеньев относительно шарниров. Определим как

$$M_{a_j^{\tau}}^{\Sigma} = \sum_{j=i}^N M_{a_j^{\tau}} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j). \quad (10.27)$$

6. $M_{a_j^n}^{\Sigma}$ - сумма моментов от центробежных сил инерции звеньев биомеханической системы. Характеризует часть движения, определяемую через центробежные силы инерции, начиная с текущего i -го звена в сторону крайнего, т.е. ног, при вращении звеньев относительно шарниров. Получим выражение для суммы моментов в виде

$$M_{a_j^n}^\Sigma = \sum_{j=i}^N M_{a_j^n} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (10.28)$$

Тогда момент управляющих сил мышечных групп относительно сустава $O_{i-1,i}$ запишем как

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N M_{\varepsilon_j} + \sum_{j=i}^N M_{G_j} + \sum_{j=i}^N M_{a_j^0} + \sum_{j=i}^N M_{a_j^k} + \sum_{j=i}^N M_{a_j^\tau} - \sum_{j=i}^N M_{a_j^n} \quad (10.29)$$

или в общем виде через факторы, влияющие на общую величину момента управляющих сил:

$$M_{i,i-1} = M_{I_j}^\Sigma + M_{G_j}^\Sigma + M_{a_j^0}^\Sigma + M_{a_j^k}^\Sigma + M_{a_j^\tau}^\Sigma - M_{a_j^n}^\Sigma. \quad (10.30)$$

Используем выражение (10.13). Введем обозначения:

1. $M_{\ddot{Q}_j}^\Sigma$ - сумма моментов инерции, характеризующих неравномерность вращения звеньев. Появляется при наличии угловых ускорений звеньев биомеханической системы \ddot{Q}_j . Равна

$$M_{\ddot{Q}_j}^\Sigma = \sum_{j=i}^N M_{\ddot{Q}_j} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j). \quad (10.31)$$

Можно записать исходя из прежних обозначений (10.23) и (10.27) в виде

$$M_{\ddot{Q}_j}^\Sigma = M_{I_j}^\Sigma + M_{a_j^\tau}^\Sigma. \quad (10.32)$$

2. $M_{a_j^n}^\Sigma$ - сумма моментов от центробежных сил инерции звеньев биомеханической системы останется по обозначению прежней, но форма записи через коэффициенты A_{kj} примет вид

$$M_{a_j^n}^\Sigma = \sum_{j=i}^N M_{a_j^n} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (10.33)$$

Последние преобразования по формулам (10.32) и (10.33) позволяют записать уравнение движения (10.13) через группы, отражающие виды движений относительно сустава $O_{i-1,i}$, как

$$M_{i,i-1} = M_{G_j}^\Sigma + M_{a_j^0}^\Sigma + M_{a_j^k}^\Sigma + M_{\ddot{Q}_j}^\Sigma - M_{a_j^n}^\Sigma. \quad (10.34)$$

10.6 Влияние упругой опоры на целенаправленное движение

Определим в уравнении движения (10.7) выделенную опору и выделенную биомеханическую систему. Получим:

$$\begin{aligned}
 M_{i,i-1} = & \left[\ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=i}^N B_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \sum_{j=i}^N B_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j) \right] + \\
 & + \left[\sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{kj} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \quad (10.35)
 \end{aligned}$$

Обозначим выделенную опору, как

$$\begin{aligned}
 M_{i,i-1}^{OP} = & \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \\
 & + \sum_{j=i}^N B_{0j} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \sum_{j=i}^N B_{0j} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j). \quad (10.36)
 \end{aligned}$$

Другая часть выражения показывает связь параметров движения непосредственно спортсмена с моментами управляющих сил. Это выделенная биомеханическая система:

$$\begin{aligned}
 M_{i,i-1}^{BMC} = & \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \\
 & - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (10.37)
 \end{aligned}$$

Запишем управляющий момент мышечных сил на i -ом звене как сумму моментов, отражающих влияние движения биомеханической системы и деформации опоры (ее движения):

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{OP} + M_{i,i-1}^{BMC}. \quad (10.38)$$

Для уравнения движения в виде формулы (10.13), записанной через коэффициенты A_{kj} , разделим выделенные опору и биомеханическую систему. При этом учтем, что $k=0$. В этом случае для выделенной опоры указанные коэффициенты примут вид коэффициентов A_{0j} , а сами уравнения предстанут как

$$\begin{aligned}
M_{i,i-1} = & \left[\ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=i}^N A_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \sum_{j=i}^N A_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j) \right] + \\
& + \left[g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right].
\end{aligned} \tag{10.39}$$

Обозначим часть момента, отражающую влияние деформации опоры на моменты управляющих сил, как

$$\begin{aligned}
M_{i,i-1}^{оп} = & \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \\
& + \sum_{j=i}^N A_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \sum_{j=i}^N A_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j).
\end{aligned} \tag{10.40}$$

Другая часть выражения показывает движение только биомеханической системы*:

$$M_{i,i-1}^{БМС} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \tag{10.41}$$

Содержание формул не поменялось, поэтому обозначения моментов в левых частях уравнений остались прежними, и при этом не изменилась модель (10.38).

Выполненное разделение параметров движения по системам** позволяет оценить влияние биомеханической системы на упругую опору через коэффициент опоры по моменту управляющих сил. Для каждого сустава он имеет вид

$$\chi_{M_{i,i-1}} = \frac{M_{i,i-1}}{M_{i,i-1}^{БМС}}. \tag{10.42}$$

В данную формулу необходимо подставлять значения из выражения (10.37), или (10.41). А также из любого уравнения (10.7), (10.13), (10.14). Такая запись позволяет проанализировать не только динамику систем в пределах одного кадра, но и определить изменение коэффициентов опоры

* Но с измененными упругой опорой параметрами движения.

** Имеется в виду механическая система – упругая опора и биомеханическая система – опорно-двигательный аппарат человека.

по моменту управляющих сил $\chi_{M_{i,i-1}}$ конкретных звеньев на всей траектории движения спортсмена.

10.7 Алгебраическая сумма моментов управляющих сил относительно шарниров звена

Уравнения движения выведены в виде уравнений кинетостатики для моментов управляющих сил по отношению к каждому шарниру биомеханической системы. Так как на сегодняшний день уже существуют модели движения биомеханических систем в условиях жесткой опоры, имеющие форму уравнений Лагранжа второго рода с разностью моментов относительно соседних суставов в правых частях выражений [56], то необходимо привести все полученные модели к единой форме записи для их сравнения и совместного анализа.

Справедливости ради отметим существование и уравнений движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры в форме динамических уравнений [77]. Но даже сокращенная форма их записи для N -звенной системы не так удобна для создания компьютерных программ из-за слишком большой свертки уравнений по исследуемым параметрам. Возможность ошибки резко возрастает, так как необходимо очень внимательно отслеживать, что означает тот или иной параметр в каждом уравнении при одном и том же обозначении.

Движение биомеханической системы осуществляется относительно обоих шарниров на звене. Поэтому появляется два момента управляющих сил, в которых участвуют мышцы, прикрепленные к текущему звену. В п.10.4 установлено, что моменты управляющих сил мышечной системы относительно рассматриваемого сустава, действующие со стороны соседних звеньев, необязательно равны друг другу. Значит, нет смысла говорить об алгебраической сумме моментов на звене, необходимо определять сумму моментов сил, реально управляющих движением рассматриваемой части биомеханической системы относительно суставов текущего звена, но приложенных к соседним звеньям i и $(i+1)$. Эти моменты относительно каждого сустава в конечном итоге и определяют движение тела.

Рассмотрим уравнения движения, записанные в виде алгебраической суммы этих моментов через коэффициенты A_{kj} . Индекс в разности моментов будет обозначать номер звена, а не шарнира, как ранее. Запишем

$$\Delta M_i = M_{i,i-1} - M_{i+1,i} = \left[g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) \right] + \\ + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \Big] - \left[g \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j + \ddot{L}_0 \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \sin(Q_0 - Q_j) + \right. \\
& + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i+1}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \\
& \left. - \sum_{k=0}^N \sum_{j=i+1}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \tag{10.43}
\end{aligned}$$

Выполним преобразования, учитывая, что для любого i -го звена сумму от i до N можно записать как сумму параметров для i -го звена и звеньев с $(i+1)$ по N . Тогда получим

$$\begin{aligned}
\Delta M_i = & \left\{ g C_{ii} \cos Q_{i+1} + g \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j + \right. \\
& + \ddot{L}_0 C_{ii} \sin(Q_0 - Q_i) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 C_{ii} \cos(Q_0 - Q_i) + \\
& + \ddot{L}_0 \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos(Q_0 - Q_j) + \\
& + \sum_{k=0}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i+1}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \\
& \left. - \sum_{k=0}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) - \sum_{k=0}^N \sum_{j=i+1}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right\} - \\
& - \left\{ g \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j + \ddot{L}_0 \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \sin(Q_0 - Q_j) + \right. \\
& + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i+1}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \\
& \left. - \sum_{k=0}^N \sum_{j=i+1}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right\}. \tag{10.44}
\end{aligned}$$

Здесь использовано отношение $C_{ij} = C_{i+1,j}$ между коэффициентами, полученное по выражениям (5.16). Фигурными скобками разделены части уравнения, записанные относительно разных суставов одного звена. Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
\Delta M_i = & g C_{ii} \cos Q_j + \ddot{L}_0 C_{ii} \sin(Q_0 - Q_i) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 C_{ii} \cos(Q_0 - Q_i) + \\
& + \sum_{k=0}^N A_{ki} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=0}^N A_{ki} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i). \tag{10.45}
\end{aligned}$$

Разделим уравнение (10.45) на две части, отражающие в непосредственном виде движение опоры и исследуемого звена. Получим

$$\begin{aligned} \Delta M_i = & \ddot{L}_0 C_{ii} \sin(Q_0 - Q_i) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 C_{ii} \cos(Q_0 - Q_i) + A_{0i} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_i) - \\ & - A_{0i} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_i) + g C_{ii} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) \end{aligned} \quad (10.46)$$

Часть уравнения, описывающая движение выделенной опоры, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta M_i^{OP} = & \ddot{L}_0 C_{ii} \sin(Q_0 - Q_i) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 C_{ii} \cos(Q_0 - Q_i) + \\ & + A_{0i} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_i) - A_{0i} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_i). \end{aligned} \quad (10.47)$$

Вторая часть зависит непосредственно от параметров движения биомеханической системы:

$$\Delta M_i^{BMC} = g C_{ii} \cos Q_i + \sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i). \quad (10.48)$$

В общем виде уравнение движения примет вид

$$\Delta M_i = \Delta M_i^{OP} + \Delta M_i^{BMC}. \quad (10.49)$$

Таким образом, момент ΔM_i является суммой выделенных моментов исследуемых систем.

10.8 Уравнения Лагранжа второго рода для целенаправленного движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры

В работе [56] выведены уравнения естественного и целенаправленного движений в условиях жесткой опоры в форме уравнений Лагранжа второго рода. Покажем их, одновременно приводя индексацию и обозначения к виду, принятому в данной работе. Имеем для естественного движения N -звенной системы уравнение в компактной форме:

$$\sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) = -Z_i \cos Q_i, \quad (10.50)$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Здесь правая часть представляет собой обобщенную силу F_i :

$$F_i = Z_i \cos Q_i. \quad (10.51)$$

Параметр Z_i равен

$$Z_i = + \left(\sum_{p=i+1}^N G_p L_i + G_i S_i \right), \quad (10.52)$$

т.к. внешней силой, приложенной к ЦМ звеньев, является сила тяжести.

В математической форме учет управляющих воздействий мышечных сил на биомеханику движения заключается во введении в правую часть уравнений естественного движения управляющих моментов мышечных сил в суставах $M_{i,i-1}$ [56, 57, 76, 77]. Уравнения предстают в форме алгебраической суммы слагаемых $M_{i,i-1} - M_{i+1,i}$, где

$$M_{i+1,i} \neq 0, \text{ если } i < N \text{ и } M_{i+1,i} = 0, \text{ если } i = N. \quad (10.53)$$

Приведем в развернутой форме уравнения целенаправленного движения человека в виде уравнений Лагранжа второго рода по работе [56]:

$$\begin{aligned} & A_{11} \ddot{Q}_1 \cos(Q_1 - Q_1) + A_{12} \ddot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_1) + A_{13} \ddot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_1) - \\ & - A_{11} \dot{Q}_1^2 \sin(Q_1 - Q_1) - A_{12} \dot{Q}_2^2 \sin(Q_2 - Q_1) - A_{13} \dot{Q}_3^2 \sin(Q_3 - Q_1) + \\ & + Z_1 \cos Q_1 = M_{10} - M_{21}, \\ & A_{21} \ddot{Q}_1 \cos(Q_1 - Q_2) + A_{22} \ddot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_2) + A_{23} \ddot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_2) - \\ & - A_{21} \dot{Q}_1^2 \sin(Q_1 - Q_2) - A_{22} \dot{Q}_2^2 \sin(Q_2 - Q_2) - A_{23} \dot{Q}_3^2 \sin(Q_3 - Q_2) + \\ & + Z_2 \cos Q_2 = M_{21} - M_{32}, \\ & A_{31} \ddot{Q}_1 \cos(Q_1 - Q_3) + A_{32} \ddot{Q}_2 \cos(Q_2 - Q_3) + A_{33} \ddot{Q}_3 \cos(Q_3 - Q_3) - \\ & - A_{31} \dot{Q}_1^2 \sin(Q_1 - Q_3) - A_{32} \dot{Q}_2^2 \sin(Q_2 - Q_3) - A_{33} \dot{Q}_3^2 \sin(Q_3 - Q_3) + \\ & + Z_3 \cos Q_3 = M_{32}. \end{aligned} \quad (10.54)$$

Указано, что для трехзвенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека, включающей звенья руки, туловище и ноги, получим: M_{32} - управляющие моменты мышечных сил в тазобедренных суставах, M_{21} - управляющие моменты мышечных сил в плечевых суставах, M_{10} - момент на опоре (здесь руки являются опорными звеньями).

Выражения (10.54) запишем в компактном виде:

$$\sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) + Z_i \cos Q_i = M_{i,i-1} - M_{i+1,i}.$$

(10.55)

Подставим в полученное выражение параметр Z_i из уравнения (10.52).
Получим

$$\sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) + \left(\sum_{p=i+1}^N G_p L_i + G_i S_i \right) \cos Q_i = M_{i,i-1} - M_{i+1,i}. \quad (10.56)$$

Решать систему уравнений можно как относительно правой, так и левой частей. В первом случае необходимы данные о положении характерных точек звеньев биомеханической системы в процессе выполнения спортивного упражнения. Их можно получить по материалам оптической регистрации движения. И здесь возможны два пути решения уравнений: при наличии измеренных или рассчитанных величин моментов сил трения $M_{mp_{10}}$, определяют M_{10} . И тогда можно решать систему уравнений или с первого момента, т.е. относительно M_{21} , или с последнего, т.е. относительно $M_{N,N-1}$. После этого система последовательно решается в сторону последнего или первого звеньев.

Запишем решение уравнения целенаправленного движения относительно последнего сустава $O_{N-1,N}$ последнего звена N биосистемы:

$$M_N = \sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_N) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_N) + Z_N \cos Q_N. \quad (10.57)$$

Для остальных уравнений получим в компактной форме:

$$M_{i,i-1} = \sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) + Z_i \cos Q_i + M_{i+1,i}, \quad i=N-1, N-2, \dots, 1. \quad (10.58)$$

В уравнениях (10.55) моменты $M_{i,i-1}$ и $M_{i+1,i}$ берутся со своими знаками. Поэтому на самом деле алгебраическая сумма моментов управляющих сил на звене может быть как суммой силовых факторов, так и их разностью.

10.9 Сравнительный анализ различных типов уравнений целенаправленного движения биомеханических систем

Часть уравнения целенаправленного движения биомеханической системы в форме уравнения кинестатики (10.48), непосредственно отражающая влияние движения биомеханической системы в условиях упругой опоры, имеет вид

$$\Delta M_i^{BMC} = \sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N A_{iki} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) + gC_{ij} \cos Q_j.$$

Здесь последний член выражения представляет собой момент от сил тяжести, приложенной в центре масс исследуемого звена. Например, для первого звена, подставив коэффициент из выражений (5.14), имеем

$$gC_{11} \cos Q_1 = g(m_1 S_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1) \cos Q_1 = \sum_{p=2}^3 (G_p L_1 + G_1 S_1) \cos Q_1. \quad (10.59)$$

Или в общем виде

$$gC_{ii} \cos Q_{i+1} = \sum_{p=i+1}^N (G_p L_i + G_i S_i) \cos Q_i. \quad (10.60)$$

Сравнение уравнений (10.56) и (10.48) с учетом (10.59) показывает их полную идентичность.

Вывод следующий: *модели целенаправленного движения в форме уравнений кинестатики в части, отражающей движение только биомеханической системы, ничем не отличаются от моделей целенаправленного движения в форме уравнений Лагранжа второго рода, выведенных для движения в условиях жесткой опоры.*

Остается еще уравнение целенаправленного движения выделенной опоры. Эта часть отсутствует в уравнении Лагранжа второго рода. Определяется по формуле (10.47):

$$\Delta M_i^{OP} = \ddot{L}_0 C_{ii} \sin(Q_0 - Q_i) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 C_{ii} \cos(Q_0 - Q_i) + A_{0,i} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_i) - A_{0,i} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_i)$$

и включает четыре члена, связанных с соответствующими ускорениями.

10.10 Силовой анализ биомеханической системы в условиях целенаправленного движения

Ранее проведенный силовой анализ раскрывает особенности естественного движения и только его. В уравнения кинестатики не входят силы, вырабатываемые человеком и называемые управляющими. Поэтому полученные в главе 5 модели являются достаточно грубыми и не

могут претендовать на адекватное описание *силового взаимодействия звеньев биомеханической системы между собой* в условиях целенаправленного, т.е. управляемого движения. Так как модели целенаправленного движения получаются путем изменения уравнений естественного движения, а не путем их преобразования, под которым в математике обычно понимают переход к другой системе координат [77], то соответственно изменяются и модели силового анализа.

При введении управляющих сил и сил трения в опорных шарнирах уравнения кинестатики по формулам (5.15) претерпят изменения и примут вид:

$$R_{(i,i-1)y} \pm F_{iy} = \frac{C_{i,0}}{L_0} (\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0) - \sum_{j=0}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=0}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j ,$$

$$R_{(i,i-1)z} \pm F_{iz} = \frac{C_{i,0}}{L_0} (\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0) + \sum_{j=0}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q_j -$$

$$- \sum_{j=0}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{s=i}^N G_s , \quad (10.61)$$

$$i=1, 2, \dots, N,$$

где F_{iy} , F_{iz} - проекции сил трения в опорных шарнирах O_{0i} при $i = 0$ и проекции управляющих сил* при $i \geq 1$.

Установить, что определяется по уравнениям (10.61) – сумма или разность сил в суставе – нельзя, поэтому использован знак « \pm ». Расчетная схема после приведения управляющих сил к суставам представлена на рисунках 10.1, 10.2.

Задача разделения сил реакции и управляющих сил мышечной системы является очень сложной. Это задача по расшифровке действия мышц, которая включает в себя исследование возникающих в них сил. Причем, не только по величине, но и с учетом временного фактора. Необходимо отслеживать всю динамику происходящего в мышечном аппарате человека.

Таким образом, отметим, что на современном этапе развития науки и практики нет возможности разделить реакции в суставе и управляющие силы, приведенные к нему.

Теперь об опорной реакции, которая подробно исследована в главе 5. Вместе с силами трения в кинематической паре «рука – опора» она составляет *полную реакцию*. Уравнения для ее проекций примут вид:

* В рамках принятых допущений, так как в общем случае под этими проекциями при $i > 0$, следует понимать сумму проекций сил трения в исследуемом суставе и приведенных к нему управляющих сил мышечной системы.

$$\begin{aligned}
R_{10y} + F_{10y}^{mp} &= \frac{C_{10}}{L_0} (\ddot{L}_0 \cos Q_0 - 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sin Q_0) - \sum_{j=0}^N C_{1j} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=0}^N C_{1j} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j, \\
R_{10z} + F_{10z}^{mp} &= \frac{C_{10}}{L_0} (\ddot{L}_0 \sin Q_0 + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \cos Q_0) + \sum_{j=0}^N C_{1j} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \\
&\quad - \sum_{j=0}^N C_{1j} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{s=1}^N G_s.
\end{aligned} \tag{10.62}$$

Знак проекций сил трения уже учтен в главе 5. Запишем полную реакцию на опоре и ее проекции как

$$\bar{R}_{10}^{\Sigma} = \bar{R}_{10} + \bar{F}_{10}^{mp}, \quad R_{10y}^{\Sigma} = R_{10y} + F_{10y}^{mp}, \quad R_{10z}^{\Sigma} = R_{10z} + F_{10z}^{mp}. \tag{10.63}$$

Оценку динамичности для опорных реакций необходимо выполнить по методике, рассмотренной в п.5.4, подставляя вместо опорной реакции R_{01} и ее проекций R_{01y} и R_{01z} полную опорную реакцию R_{01}^{Σ} и ее проекции R_{01y}^{Σ} и R_{01z}^{Σ} . Переход к ним осуществляется с помощью уравнений:

$$R_{01}^{\Sigma} = -R_{10}^{\Sigma}, \quad R_{01y}^{\Sigma} = -R_{10y}^{\Sigma}, \quad R_{01z}^{\Sigma} = -R_{10z}^{\Sigma}. \tag{10.64}$$

Нам понадобится модуль полной реакции на опоре, который равен

$$R_{10}^{\Sigma} = \sqrt{(R_{10y}^{\Sigma})^2 + (R_{10z}^{\Sigma})^2}. \tag{10.65}$$

Сделаем вывод: *силовой анализ для опорных шарниров при целенаправленном движении биомеханической системы дает значение полной реакции R_{01}^{Σ} , т.е. уже с учетом сил трения.*

Все уравнения целенаправленного движения, решенные относительно момента M_{10} , дают в конечном итоге момент сил трения на опоре, без которого движение невозможно. Полученные формулы для определения сил трения в главе 5 и уравнения целенаправленного движения данной главы могут создать представление о наличии двух методик расчета параметров фрикционного контакта человека и спортивного снаряда. Ведь и там, и там определяют момент сил трения и по разным формулам. На самом деле в обоих случаях используют один и тот же метод – кинетостатический расчет биомеханической системы. В первом случае через проекции сил, а во втором через уравнение кинетостатического равновесия в виде суммы моментов относительно оси опорного шарнира. При этом в параметрах деформации упругой опоры, используемых в уравнениях целенаправленного движения, уже учтена *полная реакция* на опоре.

Если же прогиб и его кинематические параметры находят

экспериментально, то и в этом случае реакции на опоре отражают не только воздействие биомеханической системы на спортивный снаряд, но и их фрикционное взаимодействие. А значит, в уравнениях целенаправленного движения также учтено и трение в контакте человека со снарядом.

Покажем один из возможных вариантов определения сил трения в опорных шарнирах в условиях целенаправленного движения.

1. По данным оптической съемки и расчетам уравнений целенаправленного движения биомеханической системы определим момент M_{10} в шарнирах «рука – опора», который равен, но противоположен суммарному моменту сил трения в руке. Примем, что все силовые нагрузки в опорных шарнирах одинаковы. Имеем

$$\bar{M}_{10} = -\bar{M}_{10}^{mp}, \quad \bar{M}_{10}^{mp} = -M_{01}^{mp}. \quad (10.66)$$

2. Из уравнения (5.79) получим значение силы трения в каждой из двух пар Π_i «рука – опора»:

$$F_{10}^{mp_i} = \frac{M_{10}^{mp_i}}{d}. \quad (10.67)$$

3. Если приведенный коэффициент трения известен, то из выражения (5.81) рассчитаем реакцию в опоре Π_i :

$$R_{10}^{\Pi_i} = \frac{2M_{10}^{mp_i}}{df'_{mp_i}}. \quad (10.68)$$

В противном случае, найдем реакцию $R_{10}^{\Pi_i}$ и ее нормальную составляющую через коэффициент трения скольжения из выведенной формулы (5.75):

$$R_{10}^{\Pi_i} = \frac{F_{10}^{mp_i}}{f_{mp_i} \cos \varphi_i}, \quad F_{10}^{n_i} = \frac{F_{10}^{mp_i}}{f_{mp_i}}. \quad (10.69)$$

Угол трения вычислим по уравнению

$$\varphi = \operatorname{arctg} f_{mp}. \quad (10.70)$$

Показанный путь не является единственно возможным, но это наиболее практичный способ определения сил трения на сегодняшний день. Он требует минимальных затрат и не связан с безопасностью спортсмена во

время эксперимента.

В литературе [77] указывается, что реакции в суставах являются пассивными силами. Они порождаются движением, но сами не могут его породить. Исключение составляют только реакции в местах контакта тела с внешней средой. При этом среда должна быть достаточно плотной, чтобы можно было говорить о реакции среды в этой точке.

Также известно, что законы, применяемые при изучении характеристик фрикционного взаимодействия тел, т.е. законы трения Амонтона – Кулона не обладают общностью законов Ньютона и могут привести к противоречию.

ГЛАВА 11

ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ОПОРЫ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ДВУМЯ ПРУЖИНАМИ

11.1 Уравнения целенаправленного движения биомеханической системы при моделировании опоры двумя пружинами

Замена модели упругой опоры ничего не меняет в подходах к составлению уравнений целенаправленного движения. Приведение управляющих сил к соответствующему шарниру остается прежним.

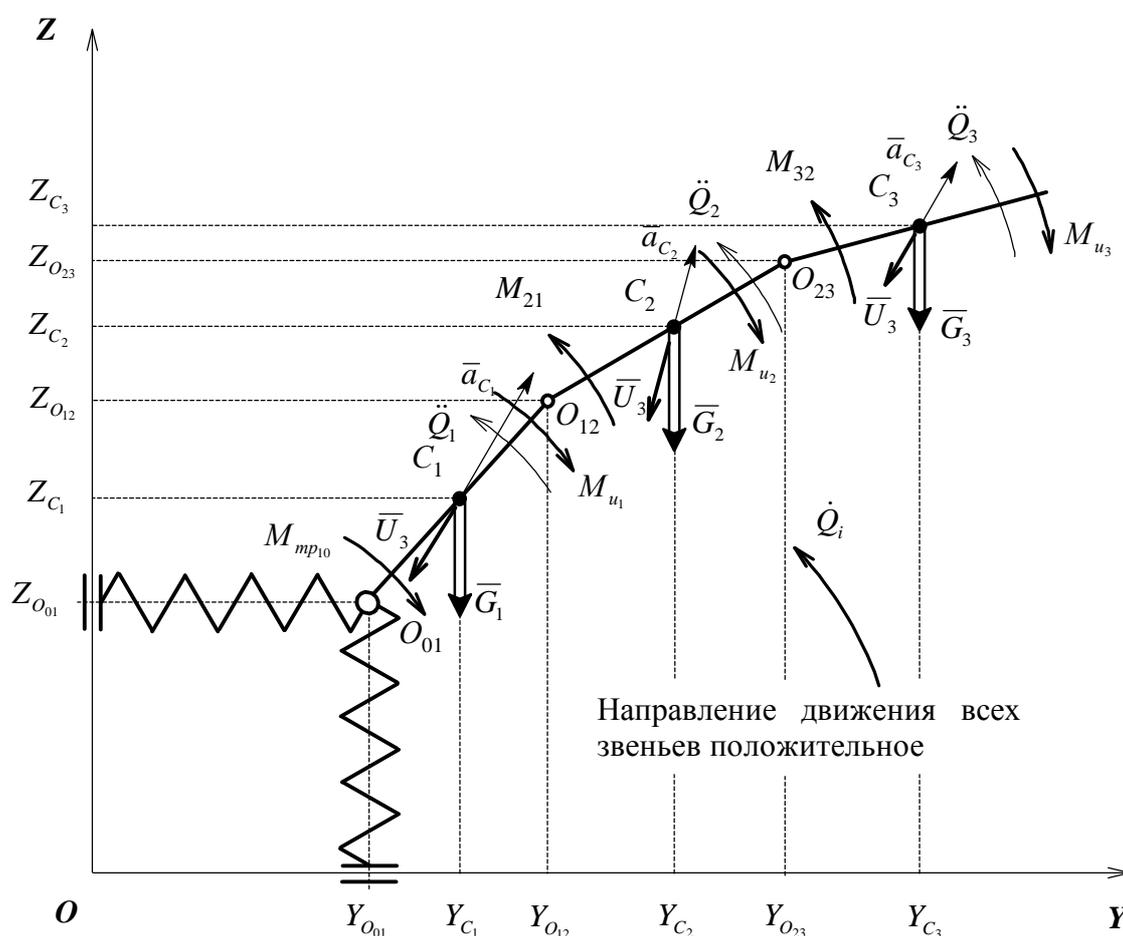


Рисунок 11.1 – Расчетная схема биомеханической системы (опора в виде двух пружин)

На рисунке 11.1 представлена расчетная схема для

кинетостатического анализа биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой двумя поступательно движущимися пружинами.

Для трехзвенной биосистемы относительно шарниров имеем:

$$\begin{aligned}\sum M_{o_{01}} &= 0, \\ \sum M_{o_{12}} &= 0, \\ \sum M_{o_{23}} &= 0.\end{aligned}\quad (11.1)$$

Используя тот же прием, что и в главе 10, обозначая $\bar{M}_{10} = -\bar{M}_{mp10}$, запишем все уравнения в одинаковой форме.

Уравнения кинестатики сразу решим относительно управляющих моментов мышечных сил:

$$\begin{aligned}M_{10} &= I_1\ddot{Q}_1 + I_2\ddot{Q}_2 + I_3\ddot{Q}_3 + G_1(Y_{C_1} - L_{0r}) + G_2(Y_{C_2} - L_{0r}) + G_3(Y_{C_3} - L_{0r}) - \\ &- (m_1\ddot{Y}_{C_1})(Z_{C_1} - L_{0B}) - (m_1\ddot{Y}_{C_1})(Z_{C_1} - L_{0B}) - (m_2\ddot{Y}_{C_2})(Z_{C_2} - L_{0B}) - (m_3\ddot{Y}_{C_3})(Z_{C_2} - L_{0B}) + \\ &+ (m_1\ddot{Z}_{C_1})(Y_{C_1} - L_{0r}) + (m_2\ddot{Z}_{C_2})(Y_{C_2} - L_{0r}) + (m_3\ddot{Z}_{C_3})(Y_{C_3} - L_{0r}), \\ M_{21} &= I_2\ddot{Q}_2 + I_3\ddot{Q}_3 + G_2(Y_{C_2} - Y_{o_{12}}) + G_3(Y_{C_3} - Y_{o_{12}}) - (m_2\ddot{Y}_{C_2})(Z_{C_2} - Z_{o_{12}}) - \\ &- (m_3\ddot{Y}_{C_3})(Z_{C_3} - Z_{o_{12}}) + (m_2\ddot{Z}_{C_2})(Y_{C_2} - Y_{o_{12}}) + (m_3\ddot{Z}_{C_3})(Y_{C_3} - Y_{o_{12}}), \\ M_{32} &= I_3\ddot{Q}_3 + G_3(Y_{C_3} - Y_{o_{23}}) - (m_3\ddot{Y}_{C_3})(Z_{C_3} - Z_{o_{23}}) + (m_3\ddot{Z}_{C_3})(Y_{C_3} - Y_{o_{23}}).\end{aligned}\quad (11.2)$$

Общий вид уравнения для момента управляющих мышечных сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$ N -звенной системы не меняется при замене модели опоры:

$$\begin{aligned}M_{i,i-1} &= \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + \sum_{j=i}^N G_j (Y_{C_j} - Y_{o_{i-1,i}}) - \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Y}_{C_j} (Z_{C_j} - Z_{o_{i-1,i}}) + \\ &+ \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Z}_{C_j} (Y_{C_j} - Y_{o_{i-1,i}}),\end{aligned}\quad (11.3)$$

$$i=1, 2, \dots, N.$$

Здесь учтено, что $Y_{o_{01}} = L_{0r}$ и $Z_{o_{01}} = L_{0B}$. Выполнив преобразования, получим

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + \sum_{j=i}^N m_j \left[(g + \ddot{Z}_{C_j}) (Y_{C_j} - Y_{o_{i-1,i}}) - \ddot{Y}_{C_j} (Z_{C_j} - Z_{o_{i-1,i}}) \right]. \quad (11.4)$$

В полученную формулу подставим координаты и ускорения

соответствующих точек по уравнениям (1.14), (1.16) и (3.48). Преобразования, из-за их трудоемкости, опустим. Окончательно получим для шарнира $O_{i-1,i}$ N -звенной биомеханической системы:

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j + \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \\ + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (11.5)$$

Коэффициенты B_{jk} определяются по уравнениям (10.9), (10.10). Отличие лишь в том, что отсутствуют коэффициенты с индексом 0. Коэффициенты C_{ij} остаются прежними и определяются по уравнениям (5.16).

Запишем уравнения движения через коэффициенты A_{jk} . Имеем

$$M_{i,i-1} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j + \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \\ + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (11.6)$$

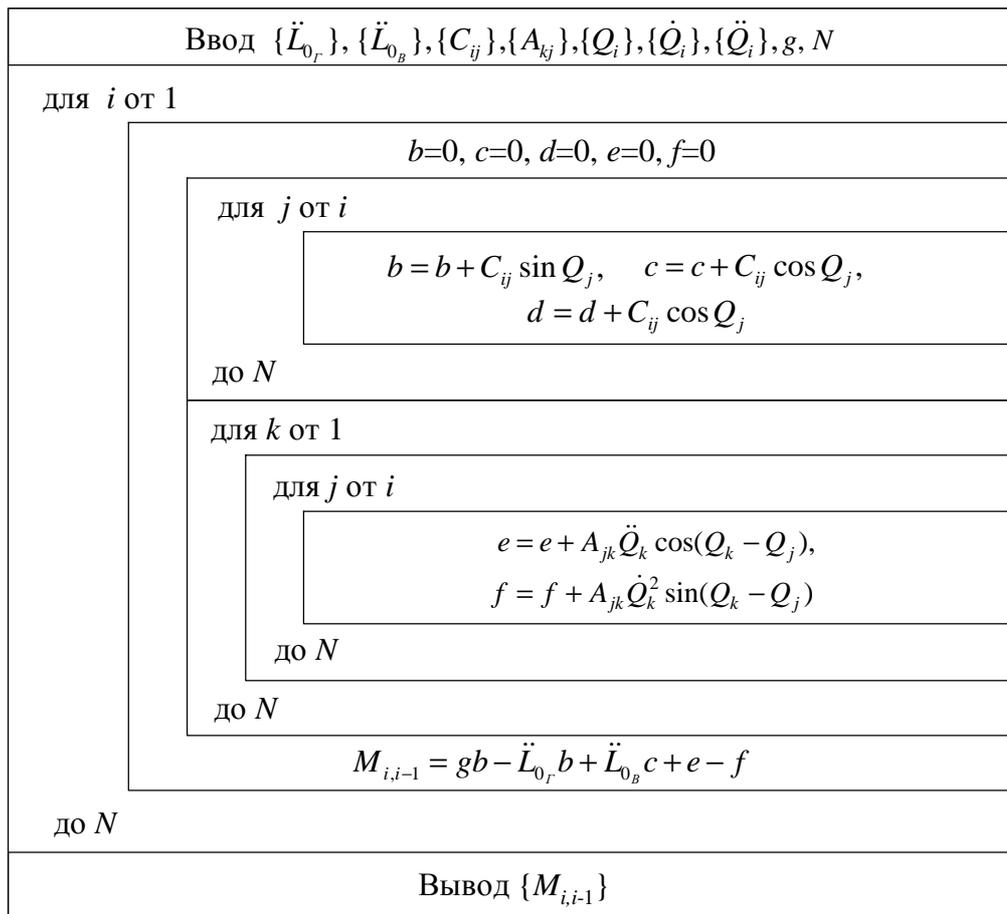


Рисунок 11.2 – Определение моментов управляющих сил при опоре в виде двух пружин

На рисунке 11.2 приведен алгоритм расчета уравнений целенаправленного движения через коэффициенты A_{jk} , когда опора моделируется двумя пружинами. Принцип построения структурограммы не изменился по сравнению с материалом, изложенным в главе 10 для уравнения целенаправленного движения биомеханической системы в условиях упругой опоры. При этом опора в предыдущем случае моделировалась вращающейся пружиной.

11.2 Анализ уравнений целенаправленного движения биомеханической системы

Проведем анализ уравнения движения в обобщенных координатах по уравнению (11.5). Часть членов выражения остались такими же, как и в уравнениях целенаправленного движения в условиях опоры, моделируемой одной вращающейся пружиной, но появились и изменения. Отсутствуют члены, отражающие сложное движение опоры, т.е. растяжение пружины при одновременном вращении. Влияние опоры

теперь описывается через параметры двух поступательно движущихся пружин. Введем новые обозначения:

1. $M_{\Gamma_j}^{\Sigma}$ - сумма моментов сил инерции звеньев в поступательном движении горизонтальной пружины. Характеризует влияние упругой деформации опоры в горизонтальном направлении, начиная с текущего звена:

$$M_{\Gamma_j}^{\Sigma} = \sum_{j=i}^N M_{\Gamma_j} = \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j. \quad (11.7)$$

2. $M_{B_j}^{\Sigma}$ - сумма моментов сил инерции звеньев в поступательном движении вертикальной пружины. Характеризует влияние упругой деформации опоры в вертикальном направлении, начиная с текущего звена:

$$M_{B_j}^{\Sigma} = \sum_{j=i}^N M_{B_j} = \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j. \quad (11.8)$$

Тогда момент управляющих сил запишем через виды силовых факторов как

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N M_{I_j} + \sum_{j=i}^N M_{G_j} - \sum_{j=i}^N M_{\Gamma_j} + \sum_{j=i}^N M_{B_j} + \sum_{j=i}^N M_{a_j^{\tau}} - \sum_{j=i}^N M_{a_j^n}. \quad (11.9)$$

или в более общем виде

$$M_{i,i-1} = M_{I_j}^{\Sigma} + M_{G_j}^{\Sigma} - M_{\Gamma_j}^{\Sigma} + M_{B_j}^{\Sigma} + M_{a_j^{\tau}}^{\Sigma} - M_{a_j^n}^{\Sigma}. \quad (11.10)$$

Для формы записи уравнения целенаправленного движения в виде формулы (11.6) введем обозначения:

1. $M_{\ddot{Q}_j}^{\Sigma}$ - сумма моментов инерции, характеризующих неравномерность вращения звеньев. Появляется при наличии угловых ускорений звеньев биомеханической системы \ddot{Q}_j и равна

$$M_{\ddot{Q}_j}^{\Sigma} = \sum_{j=i}^N M_{\ddot{Q}_j} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j). \quad (11.11)$$

Запишем, исходя из прежних обозначений, как

$$M_{\ddot{Q}_j}^{\Sigma} = M_{I_j}^{\Sigma} + M_{a_j^{\tau}}^{\Sigma}. \quad (11.12)$$

2. $M_{a_j^n}^\Sigma$ - сумма моментов центробежных сил инерции звеньев биомеханической системы останется и по обозначению, и по значению прежней, но форма записи через коэффициенты A_{kj} примет вид

$$M_{a_j^n}^\Sigma = \sum_{j=i}^N M_{a_j^n} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (11.13)$$

Общее выражение момента управляющих сил на звене относительно шарнира $O_{i-1,i}$ примет вид

$$M_{i,i-1} = M_{G_j}^\Sigma + M_{a_j^0}^\Sigma + M_{a_j^k}^\Sigma + M_{\dot{Q}_j}^\Sigma - M_{a_j^n}^\Sigma. \quad (11.14)$$

Выражения (11.11), (11.13) отличаются от подобных уравнений (10.31), (10.33) началом отсчета. Здесь $j \geq 1$.

11.3 Исследование динамичности полной системы

Для проведения сравнительного анализа моделей целенаправленного движения в рамках одной модели опоры по выражению (11.5) необходимо показать выделенные опору и биомеханическую систему. Получим

$$M_{i,i-1} = \left[\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j \right] + \left[\sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \quad (11.15)$$

Здесь часть момента, непосредственно отражающая движение биомеханической системы выделена как

$$M_{i,i-1}^{BMC} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (11.16)$$

Другая часть выражения показывает в явном виде связь движения опоры с моментами управляющих сил:

$$M_{i,i-1}^{OP} = \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j. \quad (11.17)$$

Запишем управляющий момент мышечных сил относительно шарнира

$O_{i-1,i}$ как сумму моментов выделенных опоры и биомеханической системы:

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{OP} + M_{i,i-1}^{BMC}. \quad (11.18)$$

Для уравнений, записанных через коэффициенты A_{jk} , из выражения (11.6) имеем

$$M_{i,i-1} = \left[\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j \right] + \left[\sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \quad (11.19)$$

Момент выделенной биомеханической системы запишем как

$$M_{i,i-1}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (11.20)$$

Выделенная опора остается прежней.

Коэффициент опоры по моментам управляющих сил для каждого шарнира найдем из выражения

$$\chi_{M_{i,i-1}} = \frac{M_{i,i-1}}{M_{i,i-1}^{BMC}}. \quad (11.21)$$

Формула имеет прежний вид, как и при моделировании опоры вращающейся пружины, но в нее необходимо подставлять значения из выражения (11.16) или (11.20). А также из любого уравнения (11.5), (11.6). При этом в идеале* результат должен совпадать с выражением (10.42).

11.4 Моменты управляющих сил относительно соседних шарниров одного звена

Запишем алгебраическую сумму моментов управляющих сил относительно шарниров текущего звена:

$$\Delta M_i = M_{i,i-1} - M_{i+1,i} = \left[\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j \right] +$$

* Погрешность расчетов по моделям, построенным на разных вариантах пружин, может отличаться друг от друга, и поэтому коэффициенты динамичности не обязательно совпадут.

$$\begin{aligned}
& + \left[\sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N j \sum_{k=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right] - \left[\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \sin Q_j \right] - \\
& - \left[\sum_{j=i+1}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i+1}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i+1}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \tag{11.22}
\end{aligned}$$

Учитывая, что для любого i -го звена сумму от i до N можно записать как сумму параметров для i -го звена и звеньев с $(i+1)$ -го по N , получим:

$$\begin{aligned}
\Delta M_i = & \left[\ddot{L}_{0B} C_{ii} \cos Q_i - \ddot{L}_{0\Gamma} C_{ii} \sin Q_i \right] + \\
& + \left[\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \sin Q_j \right] + \\
& + \left[I_i \ddot{Q}_i + g C_{ii} \cos Q_i + \sum_{k=1}^N B_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^N B_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) \right] + \left[\sum_{j=i+1}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i+1}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i+1}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right] - \\
& - \left[\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \sin Q_j \right] - \left[\sum_{j=i+1}^N I_j \ddot{Q}_j + \right. \\
& + g \sum_{j=i+1}^N C_{i+1,j} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \\
& \left. - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i+1}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \tag{11.23}
\end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta M_i = & \left[\ddot{L}_{0B} C_{ii} \cos Q_i - \ddot{L}_{0\Gamma} C_{ii} \sin Q_i \right] + \left[I_i \ddot{Q}_i + g C_{ii} \cos Q_i + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^N B_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N B_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) \right]. \tag{11.24}
\end{aligned}$$

Момент управляющих сил для выделенной опоры имеет вид

$$\Delta M_i^{OP} = \ddot{L}_{0B} C_{ii} \cos Q_i - \ddot{L}_{0r} C_{ii} \sin Q_i. \quad (11.25)$$

Вторая часть зависит непосредственно от движения спортсмена:

$$\Delta M_i^{BMC} = I_i \ddot{Q}_i + g C_{ii} \cos Q_i + \sum_{k=1}^N B_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N B_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i). \quad (11.26)$$

В общем виде уравнение движения примет вид

$$\Delta M_i = \Delta M_i^{OP} + \Delta M_i^{BMC}. \quad (11.27)$$

Для уравнений движения через коэффициенты A_{kj} имеем

$$\Delta M_i = [\ddot{L}_{0B} C_{ii} \cos Q_i - \ddot{L}_{0r} C_{ii} \sin Q_i] + \left[g C_{ii} \cos Q_i + \sum_{k=1}^N A_{ik} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_i) - \sum_{k=1}^N A_{ik} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_i) \right]. \quad (11.28)$$

Часть уравнения, в явном виде зависящая от параметров деформации опоры, остается прежней и определяется по уравнению (11.25).

Момент управляющих сил для выделенной БМС принимает вид

$$\Delta M_i^{BMC} = g C_{ii} \cos Q_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} \ddot{Q}_j \cos(Q_j - Q_i) - \sum_{j=1}^N A_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin(Q_j - Q_i). \quad (11.29)$$

Последнее уравнение разбито на три группы однотипных членов.

11.5 Уравнения движения биомеханической системы в условиях жесткой опоры

В главе 10, п. 10.8 приведены уравнения целенаправленного движения в условиях жесткой опоры в форме уравнений Лагранжа второго рода. Сравнение выражений (10.55), и (11.29) показывает *идентичность по форме* моделей целенаправленного движения в условиях жесткой опоры и выделенных моделей биомеханической системы. Таким образом, устанавливаем, что модели целенаправленного движения человека в условиях упругой опоры дополнительно содержат следующие члены по уравнению (11.25):

$$\Delta M_i^{OP} = \ddot{L}_{0B} C_{ii} \cos Q_i - \ddot{L}_{0r} C_{ii} \sin Q_i,$$

отражающие влияние спортивного снаряда на движение. В остальном

рассматриваемые уравнения одинаковы.

Отметим, что, в отличие от уравнений (10.47) для случая одной вращающейся пружины, в данном выражении имеется только коэффициент C_{ii} и нет коэффициента $A_{0,i}$. Также оно значительно короче. Воспроизведем для сравнения формулу (10.47):

$$\Delta M_i^{оп} = \ddot{L}_0 C_{ii} \sin(Q_0 - Q_i) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 C_{ii} \cos(Q_0 - Q_i) + A_{i0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_i) - A_{i0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_i).$$

Приравнявая, получим

$$\ddot{L}_{0B} C_{ii} \cos Q_i - \ddot{L}_{0\Gamma} C_{ii} \sin Q_i = \ddot{L}_0 C_{ii} \sin(Q_0 - Q_i) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 C_{ii} \cos(Q_0 - Q_i) + A_{i0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_i) - A_{i0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_i). \quad (11.30)$$

Таким образом, констатируем: *уравнения Лагранжа второго рода для движения в условиях жесткой опоры и уравнения кинестатики для случая моделирования опоры двумя поступательно движущимися пружинами в части выделенной биомеханической системы идентичны друг другу по форме.*

11.6 Силовой анализ биомеханической системы при моделировании опоры двумя пружинами

При введении управляющих сил уравнения кинестатики (5.27) изменятся и примут вид:

$$R_{(i,i-1)_Y} \pm F_{iY} = \frac{C_{i0\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \ddot{L}_{0\Gamma} - \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j,$$

$$R_{(i,i-1)_Z} \pm F_{iZ} = \frac{C_{i0B}}{L_{0B}} \ddot{L}_{0B} + \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{p=i}^N G_p,$$

$$i=1, 2, \dots, N. \quad (11.31)$$

Все замечания по поводу силового анализа биомеханической системы, находящейся в целенаправленном движении, остаются прежними. Они указаны в п.10.10. Изменилась лишь форма записи выделенной опоры.

Проекция *полной реакции* в опорных шарнирах равны:

$$R_{10Y}^{\Sigma} = R_{10Y} + F_{10Y}^{mp} = \frac{C_{10\Gamma}}{L_{0\Gamma}} \ddot{L}_{0\Gamma} - \sum_{j=1}^N C_{1j} \ddot{Q}_j \sin Q_j - \sum_{j=1}^N C_{1j} \dot{Q}_j^2 \cos Q_j,$$

$$R_{10Z}^{\Sigma} = R_{10Z} + F_{10Z}^{mp} = \frac{C_{10B}}{L_{0B}} \ddot{L}_{0B} + \sum_{j=1}^N C_{1j} \ddot{Q}_j \cos Q_j - \sum_{j=1}^N C_{1j} \dot{Q}_j^2 \sin Q_j + \sum_{p=1}^N G_p. \quad (11.32)$$

Знак проекций сил трения учитывается в главе 5.

11.7 Угловые координаты биомеханической системы в условиях упругой опоры

Расчетная схема при целенаправленном движении отличается от схемы для естественного движения введением момента управляющих сил \bar{M}_{32} мышечной системы спортсмена. В этом случае условие кинестатического равновесия для третьего звена (11.2) в виде суммы моментов относительно сустава O_{23} аналогично выражению (5.54), только дополнительно имеет управляющий момент. Используем обозначения для звена по рисунку 11.3.

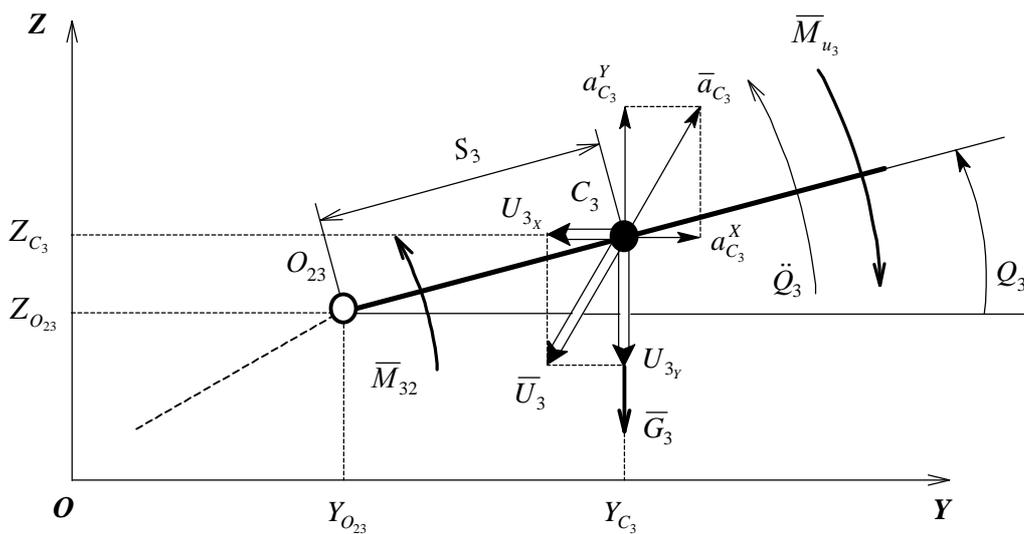


Рисунок 11.3 – Расчетная схема третьего звена биомеханической системы
Уравнение кинестатического равновесия примет вид:

$$\sum M_{O_{23}} = 0, \quad M_{32} - G_3 S_3 \cos Q_3 + U_{3y} S_3 \sin Q_3 - U_{3z} S_3 \cos Q_3 - M_{u_3} = 0. \quad (11.33)$$

Использование уравнений (1.14), а также (3.48) для проекций координаты и ускорения центра масс третьего звена, дает возможность получить в развернутой форме выражение для углового ускорения рассматриваемого звена БМС в условиях целенаправленного движения:

$$\ddot{Q}_3 = \frac{S_3}{A_{33}} \left\{ -G_3 \cos Q_3 - m_3 \sin Q_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) + S_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3 \right] - m_3 \cos Q_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) - S_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 \right] \right\} + \frac{m_3 S_3}{A_{33}} (\ddot{L}_{0\Gamma} \sin Q_3 - \ddot{L}_{0B} \cos Q_3) + \frac{M_{32}}{A_{33}}. \quad (11.34)$$

Отличие уравнений для \ddot{Q}_3 при целенаправленном (11.34) и естественном (5.59) движениях заключается в дополнительном слагаемом M_{32} / A_{33} . А оно не зависит от наличия упругих свойств у спортивного снаряда и поэтому должно присутствовать как в уравнениях для жесткой, так и упругой опор. Используя ранее принятые обозначения (5.60) и (5.61), запишем для целенаправленного движения БМС в условиях упругой опоры:

$$\ddot{Q}_3 = H_3 + b_3 + \frac{M_{32}}{A_{33}}. \quad (11.35)$$

Для целенаправленного движения в условиях жесткой опоры, преобразуя формулу (5.64), имеем

$$\ddot{Q}_3^{\mathcal{K}} = H_3^{\mathcal{K}} + \frac{M_{32}^{\mathcal{K}}}{A_{33}}. \quad (11.36)$$

Здесь момент управляющих сил для третьего звена биомеханической системы в условиях жесткой опоры обозначен как $M_{32}^{\mathcal{K}}$, т.е. считаем, что существует влияние на величину управляющих моментов упругих свойств материала спортивного снаряда. Для такого общего случая запишем

$$M_{32} \neq M_{32}^{\mathcal{K}}. \quad (11.37)$$

Предположим, что это влияние приводит к равенству

$$b_3 + \frac{M_{32}}{A_{33}} = \frac{M_{32}^{\mathcal{K}}}{A_{33}}. \quad (11.38)$$

А это в свою очередь означает независимость угловых ускорений звеньев от упругости или жесткости опоры при целенаправленном движении.

Раскроем уравнение (11.38) с помощью выражения (5.61):

$$\frac{m_3 S_3}{A_{33}} (\ddot{L}_{0r} \sin Q_3 - \ddot{L}_{0B} \cos Q_3) + \frac{M_{32}}{A_{33}} = \frac{M_{32}^{\mathcal{K}}}{A_{33}}. \quad (11.39)$$

На параметры m_3 , S_3 , A_{33} вид опоры влияние не оказывает. Имеем

$$m_3 S_3 (\ddot{L}_{0r} \sin Q_3 - \ddot{L}_{0B} \cos Q_3) + M_{32} = M_{32}^{\mathcal{K}}. \quad (11.40)$$

Решим уравнение кинетостатического равновесия (11.33) относительно момента управляющих сил. Запишем в развернутой форме:

$$\begin{aligned} M_{32} = & m_3 S_3 (\ddot{L}_{0B} \cos Q_3 - \ddot{L}_{0r} \sin Q_3) + G_3 S_3 \cos Q_3 + \\ & + m_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) + S_3 (\ddot{Q}_3 \sin Q_3 + \dot{Q}_3^2 \cos Q_3) \right] S_3 \sin Q_3 + \\ & + m_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) + S_3 (\ddot{Q}_3 \cos Q_3 - \dot{Q}_3^2 \sin Q_3) \right] S_3 \cos Q_3 + I_3 \ddot{Q}_3. \end{aligned} \quad (11.41)$$

При жесткой опоре ее параметры в уравнение (11.41) не войдут, т.е. для такого случая получим выражение

$$\begin{aligned} M_{32}^{\mathcal{K}} = & G_3 S_3 \cos Q_3 + m_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \sin Q_j + \dot{Q}_j^2 \cos Q_j) + \right. \\ & + S_3 (\ddot{Q}_3 \sin Q_3 + \dot{Q}_3^2 \cos Q_3) \left. \right] S_3 \sin Q_3 + m_3 \left[\sum_{j=1}^2 L_j (\ddot{Q}_j \cos Q_j - \dot{Q}_j^2 \sin Q_j) + \right. \\ & \left. + S_3 (\ddot{Q}_3 \cos Q_3 - \dot{Q}_3^2 \sin Q_3) \right] S_3 \cos Q_3 + I_3 \ddot{Q}_3. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Анализ уравнений (11.40)-(11.42) показывает противоречие: гипотеза о независимости угловых ускорений привела к двум уравнениям (11.40) и (11.42) для момента $M_{32}^{\mathcal{K}}$, дающих разные значения, что невозможно.

Таким образом, делаем вывод: *упругая опора дополнительно изменяет все угловые кинематические параметры звеньев при любом виде движения биомеханической системы**.

* Имеется в виду целенаправленное и естественное движения человека.

ГЛАВА 12

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНА В УСЛОВИЯХ УПРУГОЙ ОПОРЫ

12.1 Проблемы и перспективы моделирования движения биомеханической системы

Все предыдущие главы посвящены моделям движения биомеханической системы в условиях упругой опоры и раскрывают данный вопрос с разных сторон. При этом очень хорошо заметны следующие моменты: во-первых, моделей очень много (вся книга ими и заполнена), а во-вторых, их не просто много, но зачастую один и тот же параметр движения может быть описан разными моделями, выведенными исходя из отличающихся друг от друга допущений. Отсюда появляется необходимость разобраться в методических вопросах и очертить границы применимости каждой модели. И по этим же причинам нужен «путеводитель», скажем так. Ведь можно заблудиться среди многообразия всего, потеряв конечную цель и пути ее достижения.

Тело человека нами рассматривается как механическая система. Исследователи отмечают, что данная система с точки зрения механики представляет собой объект величайшей сложности, и, кроме того, серьезно изучать целенаправленное движение начали лишь сравнительно недавно [3, 5, 44, 46-48, 54, 62, 76, 77]. Конечно, для ученого это великолепно – есть где развернуться. Но с другой стороны не все необходимые знания по изучаемому вопросу лежат в области интереса конкретного ученого. Есть много направлений, данные по которым необходимы лишь как справочные для создания и расчета моделей движения. Например, это относится к геометрии суставов, уравнениям суставных поверхностей (данные отсутствуют) и режимам трения в них. Существенным является вопрос о величине, направлении и точках (областях) приложения управляющих мышечных сил и т.д.

Рядом авторов [33] отсутствие необходимых данных по биомеханике объясняется тем, что врачи и биологи долгое время со всей страстью и не без успеха не хотели понимать проблем механики живых организмов. Частично это связано с разницей в темпераментах и отсутствием общего с инженерами языка, а возможно, здесь сказываются также неприязнь к математизированным инженерным понятиям и страх перед ними.

Отмечено [77], что для изучения движения человека возможно два

пути: «... рассматривать тело человека во всей его сложности или строить его приближенные модели». Первый путь очень сложен: предполагается, что реализовать его не удастся даже в обозримом будущем, т.е. он ведет в тупик. Но остается второй путь, то есть путь рассмотрения приближенных моделей человека. Он продуктивен. Здесь в полной мере задействованы законы диалектики: мы идем от простых моделей ко все более сложным, от неполного знания к более полному. На этом пути появляется возможность включать в модели движения все больше и больше факторов, влияющих на движение, многие из которых являются значимыми и учет которых существенным образом меняет картину движения. Это замечание в полной мере относится к проблеме взаимодействия человека с окружающей средой. В данной работе был рассмотрен лишь один из аспектов такого взаимодействия, а именно: взаимодействие тела спортсмена с упругой опорой.

Отметим, что вопрос взаимодействия человека с упругим спортивным снарядом, выступающим в качестве упругой опоры, тоже многогранен, так как существует достаточно большое количество их видов. В качестве примера приведем различные спортивные снаряды в гимнастике (перекладина, подкидная доска, параллельные брусья и пр.), лыжи, всевозможные упругие покрытия, шесты у прыгунов в высоту, спортивные тренажеры с упругими связями и пр. Где-то здесь находятся вопросы взаимодействия с такими средами как вода и воздух, да и само тело человека не является абсолютно твердым телом, а проявляет и вязко-упругие свойства, в том числе.

Вопросы моделирования движения человека в условиях упругой опоры весьма и весьма сложны, тем более учитывая, что взаимодействие происходит в динамике. И неизученных моментов здесь очень много, несмотря на то, что техническими конструкциями, подобными спортивным снарядам, уже не одну сотню лет занимаются многие разделы механики, давным-давно выделившиеся в самостоятельные дисциплины. Последнее замечание означает, что данная тема находится на стыке наук. Это добавляет интереса, так как именно в таких случаях возможно получение весьма интересных результатов, позволяющих значительно продвинуться вперед. Но это же добавляет и сложности, а также предъявляет повышенные требования к квалификации исследователя или же требует привлечения большого количества специалистов, работающих в разных областях. Что не означает понижение квалификации, так как все равно нужен кто-то, кто сведет мозаичные куски картины в целое полотно.

Чтобы с чего-то начать и получить модели, от которых можно развивать теорию дальше, логично взять наиболее простые случаи движения и исследовать их. Термин «простые» применим лишь в сравнении, так как на самом деле никакими «простыми» они не являются. Так, в данной работе был изучен случай плоского движения,

пространственные же схемы не рассматривались. Понятно, что пространственное движение человека описывается гораздо более сложными моделями, чем движение в плоскости [7]. Причем отличие это, прежде всего качественное, и во вторую очередь количественное. Подобные модели более громоздки и сложны по форме, а также трудоемки в расчетах, что означает возрастание вероятности появления ошибок в геометрической прогрессии, если не будут поняты основные закономерности динамического взаимодействия человека с упругой опорой в плоском движении. Здесь под закономерностями имеется в виду как математическое описание процесса, так и характер физического взаимодействия всех тел, влияющих на движение.

При обсуждении с коллегами, не занимающимися механикой управляемого тела, ряда вопросов, поднятых в данном исследовании, выявилась следующая закономерность: так как они все же имеют отношение к человеческому телу, то имеют и определенный опыт управления им и свое мнение по этому поводу. Даже на подсознательном уровне, в отличие от других областей науки, например, квантовой физики, теории струн, специальных вопросов генетики и пр. Поэтому часто возникают завышенные требования к биомеханике, и имеет место быть обывательский подход к чисто научным проблемам. Поэтому авторы ответственно заявляют, что данная работа никакого отношения к революциям не имеет, во-первых. И соответственно на все вопросы биомеханики не отвечает. И, во-вторых, постановка проблем является строгой, т.е. научной, как и методы их решения*.

Что касается перспектив развития биомеханики, то, по мнению авторов, они очень и даже крайне серьезны по следующим причинам. Во-первых, люди травмируются, и медицина старается всяческими средствами им (нам) помочь. Замена органов различными железными и пластмассовыми конструкциями существует лишь по причине невозможности решения на сегодняшний день проблем протезирования более приемлемыми средствами, позволяющими не только полностью восстановить утраченную или не полученную при рождении функцию, но и изменить ее и даже улучшить. Разумеется, люди не будут забывать и об эстетике, так как, кроме всего прочего, это связано с ущербностью. Без серьезного и глубокого знания конструкции человеческого тела и вопросов управления им решить эту проблему невозможно.

Во-вторых, люди работают и живут, т.е. выполняют различные функции при взаимодействии с окружающей средой, добывая пропитание и решая вопросы своей жизнедеятельности. Поэтому создание полноценной теории движения человека в различной обстановке (в космосе, при работе операторов в промышленности, в спорте и пр.)

* Разумеется, это относится и к результатам, т.е. выводам.

необходимо [77].

В-третьих, мы все оказались современниками и участниками одной из научно-технических революций – это создание и внедрение в повседневный быт вычислительной техники. Конечно, современный компьютер это не древний абак, но по своей сути от него ушел не далеко. Просто у этих счетов колоссальная производительность и другие возможности по вводу и выводу информации. Только камушки и кости передвигать не надо. Компьютер – это автомат. Мозгов там нет. Пока. А вот когда появятся, потребуется и все остальное. Да и уже востребовано в определенной степени. Японцы это прекрасно демонстрируют, решая вопросы робототехники, имитирующей людей.

В-четвертых, человек любопытен и сам себе интересен. Он как Буратино, делает своим длинным носом дырки в окружающем холсте, а потом пытается посмотреть – а что там такое? Нас ведь изначально интересуют не только звезды над головой. А жизнь – это одна из фундаментальнейших загадок нашего мира.

В-пятых, человечество накапливает знания и оттачивает исследовательский аппарат, что приводит к периодическим прорывам в различных областях науки, техники и производства. Это стимул и платформа для дальнейших исследований проблем человека.

Ну и в-шестых, наконец. Всегда найдутся люди, которые захотят на этих проблемах заработать. Причем и захотят, и заработают. А финансовые интересы являются весьма серьезным двигателем развития*.

По этим причинам за биомеханикой, т.е. механикой управляемого тела, серьезное будущее, свидетелями бурного развития которой будем если не мы, то наши потомки**.

12.2 Выбор моделей упругой опоры

Одним из первых встает вопрос о типах моделей, описывающих влияние упругой опоры на движение биомеханической системы. Первое, что мы четко выделили, это цели, для которых необходима модель опоры. Она нужна для исследования движения биомеханической системы и является одним из элементов, входящих в модели движения, но не является самоцелью и в этом заключается отличие от целей исследования, принятых для подобных конструкций в сопротивлении материалов, строительной механики и пр.

Для описания деформационного поведения опоры удобны и достаточны модели, основанные на различных типах балок,

* Как и не развития тоже, между прочим. См. историю.

** Авторы оптимисты, и надеются, что человечество все же ожидает развитие и расцвет, а не Армагедон по причине того, что все мы серьезно споткнемся о проблему, которая окажется последней и Главной в нашем существовании.

подвергающихся изгибу. В случае анализа перемещений при изгибе для перекладины в гимнастике хорошо подходит балка, защемленная обоими концами. Такая балка, во-первых, удобна для описания деформаций. Во-вторых, она проще, чем модель рамы, нагруженной пространственно. А в-третьих, при всех этих достоинствах она эквивалентна спортивному снаряду, т.е. описывает процесс динамической деформации адекватно.

Следует отметить еще одну особенность выбранной модели балки – на сегодня уже имеется достаточно мощный, давно разработанный и многократно проверенный аппарат для анализа динамических деформаций. Его надо творчески применить к данной задаче, так как расчетные схемы и условия нагружения почти всегда отличаются от классических случаев, рассмотренных в теории и на практике, что вносит определенный колорит. Но уже есть от чего оттолкнуться и с чем сравнить. Это значительно облегчает задачу и позволяет уменьшить вероятность ошибки.

Второй задачей, помимо описания упругих деформаций опоры, является описание непосредственно движения биомеханической системы, т.е. человека, с учетом упругих свойств опоры. А здесь модели уже другие. Возможны два варианта: описать движение упругой опоры одной вращающейся пружиной или описать движение двумя поступательно перемещающимися пружинами – одной вертикальной и одной горизонтальной. Исходными данными, характеризующими геометрию, кинематику и динамику пружин, являются расчеты параметров деформации на основе модели спортивного снаряда в виде балки.

Результаты расчетов по обоим типам моделей в виде разного количества пружин, совершающих определенные движения, должны быть эквивалентны с точки зрения теории, но практика вносит определенные коррективы. Важна методика расчета, последовательность применения моделей и вычислительных методов.

Рассмотрим вопрос выбора, вопрос границ применимости, а также точность, адекватность и удобство различных моделей опоры.

Модели с вращающейся пружиной. Итак, что хорошего и не очень дает применение модели опоры в виде одной вращающейся пружины для целей описания движения биомеханической системы. Сначала о хорошем:

1. Позволяет сохранить полное внешнее сходство всех моделей, описывающих движение, в части затрагивающей характеристики движения биомеханической системы, с моделями для жесткой опоры. Это удобно и практично.
2. Именно наличие моделей опоры двух типов и сравнение их между собой позволяет полностью выявить физическую сторону взаимодействия биомеханической системы со спортивным снарядом и получить адекватное математическое описание движения спортсмена. В ином случае ошибки неминуемы, так как приходится основываться на здравом смысле, который может

- сыграть с исследователем злую шутку.
3. Дает возможность подробнейшим образом изучить влияние управляющих моментов на движение как опоры, так и самой биомеханической системы и ответное влияние всех видов движения каждого звена системы на управляющие моменты мышечных сил. Влияние обоюдное. При этом мы получаем как количественную характеристику всех факторов, влияющих на движение, так и их качественное описание.
 4. Похоже, именно такая модель спортивного снаряда лучше всего подойдет для исследований в области синтеза движений человека в условии упругой опоры.

Недостатки:

1. Во всех расчетных моделях появляются дополнительные члены, отражающие влияние переменных параметров пружины. Мы имеем модели сложного движения, где учитывается переносное (вращательное) движение пружины и ее относительное, то есть поступательное движение (растяжение-сжатие). Это увеличивает громоздкость моделей и трудоемкость расчетов.
2. При расчетах динамического нагружения появляется достаточно много направлений деформаций (а значит, и факторов), которые необходимо описывать деформацией соответствующей пружины. Например, деформация по нормали к траектории и в касательном направлении из-за касательных и кориолисовых сил инерции, а также линейное растяжение-сжатие вращающейся пружины. Это в значительной мере осложняет расчеты опоры на колебания, а порой делает их невозможными.
3. Уравнения движения требуют ряда параметров опоры, определяемых численными методами. Например, вычисления угловой скорости движения вращающейся пружины \dot{Q}_0 по каждому кадру, а также углового ускорения \ddot{Q}_0 . В этом случае численное дифференцирование дает значительный разброс данных, с которым надо бороться. Т.е. точность расчетов резко падает и это надо учитывать.

Модели с двумя поступательно движущимися пружинами. Теперь о втором типе модели опоры, описываемой в целях анализа движения биомеханической системы в целом, горизонтальной и вертикальной пружинами, совершающими лишь поступательные движения в соответствующих направлениях. Достоинства этой модели в следующем:

1. Фактически все модели, построенные с использованием опоры в виде двух пружин, принимают более простой вид из-за того, что геометрические, кинематические и динамические параметры каждой пружины описываются всего одним параметром.

Например, ускорения записываются лишь как \ddot{L}_{0r} в горизонтальном направлении и \ddot{L}_{0b} в вертикальном.

2. Позволяет выполнить сравнение двух типов моделей опоры и разобраться в происходящих процессах.
3. Уравнения движения предстают в более компактном виде, чем с использованием модели вращающейся пружины.
4. Позволяет устранить численное дифференцирование при расчете динамической деформации опоры, тем самым обеспечивая необходимую точность вычислений.

Недостатки:

1. При расчете параметров фрикционного взаимодействия человека со спортивным снарядом необходимо перейти на модель опоры в виде вращающейся пружины – иначе параметры трения определить не удастся*.
2. Ряд моделей теряет свою однотипность, что не всегда удобно.

Вывод: модели упругой опоры, основанные на двух поступательно движущихся пружинах, более удобны, более точны и менее трудоемки.

Тем не менее, в данной работе необходимо было провести подробный анализ обоих типов моделей, так как только их сравнение позволяет полностью раскрыть механизм влияния движения биомеханической системы на упругую опору, и, как ответную реакцию, влияние опоры на движение человека, что нам и нужно. Именно при анализе моделей, основанных на моделях опоры по обоим вариантам, удается избежать крупных ошибок в кинематических и динамических моделях движения биомеханической системы.

12.3 Сравнительный анализ двух типов моделей целенаправленного движения биомеханической системы

Сравнительный анализ уравнений движения для разных типов моделей опоры лучше всего выполнить по уравнениям для выделенных опоры и биомеханической системы (10.35) и (11.15).

По уравнениям (10.37) и (11.16), представляющим части формул (10.35) и (11.15), имеем выражения для управляющих моментов мышечных сил, отражающих движение лишь биомеханической системы. Для случая моделирования опоры вращающейся пружиной получено:

* Сила трения направлена под углом трения φ к радиусу вращения опорного шарнира относительно неподвижной оси OY . Поэтому при определении проекций силы трения в неподвижной системе координат необходимо как знание угла φ , так и знание угла между указанным радиусом и осью OY , т.е. угла Q_0 . Укажем, что его можно найти и используя параметры модели опоры с двумя пружинами.

$$\begin{aligned} (M_{i,i-1}^{BMC})_I = & \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \end{aligned}$$

При моделировании опоры двумя поступательно движущимися пружинами имеем:

$$\begin{aligned} (M_{i,i-1}^{BMC})_{II} = & \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \end{aligned}$$

Формулы идентичны, т.е.

$$(M_{i,i-1}^{BMC})_I = (M_{i,i-1}^{BMC})_{II}. \quad (12.1)$$

Влияние упругих свойств спортивного снаряда отражены в уравнении (10.36) для модели опоры в виде вращающейся пружины:

$$\begin{aligned} (M_{i,i-1}^{OP})_I = & \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \\ & + \sum_{j=i}^N B_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \sum_{j=i}^N B_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j) \end{aligned}$$

и в уравнении (11.17) для модели опоры в виде двух поступательно движущихся пружин:

$$(M_{i,i-1}^{OP})_{II} = \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0Г} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j.$$

Понятно, что выражения показывают одну и ту же по величине часть уравнения целенаправленного движения, отражающую динамическую деформацию спортивного снаряда. Другими словами, эти уравнения равны $(M_{i,i-1}^{OP})_I = (M_{i,i-1}^{OP})_{II}$, просто имеют разную форму записи. Приравняем их:

$$\begin{aligned} \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{j=i}^N B_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \\ - \sum_{j=i}^N B_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j) = \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0Г} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j. \quad (12.2) \end{aligned}$$

Отсюда видно, насколько форма записи уравнения для случая

вращающейся пружины более громоздка по сравнению со случаем моделирования опоры в виде двух пружин. Вторая форма записи более выгодна, это раз. А два, это то, что в уравнения для вращающейся пружины входят четыре производные, а для случая двух пружин – две. Значит, будет меньше погрешность вычислений при использовании численного дифференцирования по второму варианту.

На самом деле ситуация еще лучше. Для модели опоры в виде двух пружин производные можно найти, не дифференцируя прогибы, а аналитически решая уравнения с последующим интегрированием ускорений. Этот случай разобран в главе 7.

Вывод: модели целенаправленного движения биомеханической системы в условиях упругой опоры, моделируемой двумя поступательно перемещающимися пружинами, менее громоздки и более точны, чем те же уравнения движения для случая модели опоры в виде вращающейся пружины.

Сравним уравнения в записи через коэффициенты A_{jk} . Для вращающейся пружины по уравнению (10.41) модели выделенной биомеханической системы приняли вид

$$\begin{aligned} (M_{i,i-1}^{BMC})_I = & g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j), \end{aligned}$$

а для случая опоры в виде двух поступательно перемещающихся пружин по формуле (11.20) имеем

$$(M_{i,i-1}^{BMC})_{II} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j).$$

Сравнительный анализ показывает, что модели выделенной биомеханической системы остаются неизменными при любом виде опоры, моделируемой пружинами.

Уравнения выделенной опоры имеют следующий вид: для вращающейся пружины по формуле (10.40):

$$\begin{aligned} (M_{i,i-1}^{OP})_I = & \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \\ & + \sum_{j=i}^N A_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \sum_{j=i}^N A_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j); \end{aligned}$$

для двух пружин по формуле (11.17):

$$(M_{i,i-1}^{OI})_{II} = \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j .$$

Последнее выражение одинаково как при записи через коэффициенты B_{jk} , так и через A_{jk} . Приравняв записанные уравнения, получим

$$\begin{aligned} & \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \\ & + \sum_{j=i}^N A_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \sum_{j=i}^N A_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j) = \\ & = \ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0\Gamma} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j . \end{aligned} \quad (12.3)$$

Выводы по точности и трудоемкости моделей остаются как и для уравнений с коэффициентами B_{jk} .

12.4 Различие моделей целенаправленного и естественного движений биомеханической системы

Так как переход от уравнений естественного движения к целенаправленному осуществляется введением моментов управляющих сил, то для естественного движения в случае моделирования опоры вращающейся пружины, исходя из выражения (10.35) можно представить уравнение естественного движения как

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{j=i}^N B_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=i}^N B_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j) \right] + \left[\sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \end{aligned} \quad (12.4)$$

В записи через коэффициенты A_{jk} из выражения (10.39) получим

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{j=i}^N A_{0j} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=i}^N A_{0j} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j) \right] + \left[g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right] \end{aligned}$$

$$-\sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \Big]. \quad (12.5)$$

При моделировании упругих свойств спортивного снаряда двумя поступательно движущимися пружинами уравнение целенаправленного, т.е. управляемого, движения (11.15) преобразуем для неуправляемого движения к виду

$$0 = \left[\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j \right] + \left[\sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \quad (12.6)$$

Используя уравнения движения (11.19) с коэффициентами A_{jk} , запишем для естественного движения, т.е. для движения без управления со стороны мышечной системы спортсмена:

$$0 = \left[\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j \right] + \left[\sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j) \right]. \quad (12.7)$$

Уравнения естественного движения отличаются от уравнений целенаправленного не только тем, что их левые части обнуляются. Неравны и правые, несмотря на абсолютно одинаковую форму записи. Сравним выражения для углового ускорения третьего звена \ddot{Q}_3 по формулам (5.59) и (11.34), полученные из соответствующих уравнений движения биомеханической системы. Первое выведено для естественного движения, а второе – для целенаправленного. При раскрытии всех коэффициентов имеем различие – для целенаправленного движения добавляется момент управляющих сил M_{32} .

Окончательно запишем

$$Q_i^U \neq Q_i^E, \quad (12.8)$$

где Q_i^U – угол наклона i -го звена биомеханической системы или пружины к оси OY при целенаправленном движении;
 Q_i^E – угол наклона i -го звена биомеханической системы или пружины к оси OY при естественном движении.

Различие кинематических параметров понятно и на физическом

уровне. Дело в том, что при отсутствии управляющего воздействия со стороны мышечной системы человека все геометрические параметры, характеризующие положение звеньев в пространстве, как и кинематические характеристики, зависят только от физических законов. Выполнение же целей и задач движения непременно добавит управление, т.е. соответствующие силы и их моменты. Это выразится в дополнительном изменении всех параметров движения.

Отметим, что уравнения (12.4)-(12.8) относятся только к суставам, и не касаются опорного шарнира O_{01} , так обнуление уравнения движения биомеханической системы в последнем случае означает отсутствие трения в контакте человека со спортивным снарядом, т.е. этот шарнир считают идеальным.

12.5 Изменение количества звеньев биомеханической системы во время движения

Во время движения биомеханической системы возможно прекращение относительного движения в каких-либо кинематических парах (суставах) или, наоборот, возможно его появление [69, 91-93]. Соответственно это может сказываться на расчетных моделях кинематики и динамики. Рассмотрим более подробно возможные варианты.

Прекращение относительного движения в кинематических парах. Расчет можно продолжать по тем же моделям, что и до этого момента. Неудобным будет лишь избыточное количество исходных данных из-за лишних звеньев, что увеличивает трудоемкость ввода. Для примера приведем локтевой сустав, в котором соединяются два звена*: плечо и предплечье (рис. 1.8, 5.24). В ряде движений эта часть руки становится одним звеном с прекращением движения в суставе.

Появление относительного движения в кинематических парах. В качестве примера возьмем все тот же локтевой сустав. На определенных участках траектории движения биомеханической системы рука представляет собой одно звено из-за фиксации сустава, а на других техника выполнения упражнения может потребовать в нем движения. Например, плечо и предплечье станут разными звеньями**. Здесь возможны два пути: или расчет параметров движения для каждого участка по своим моделям, отличающимся количеством звеньев, или же расчет по моделям, одинаковым на всей траектории, но содержащим максимальное число звеньев, совершающих независимое движение друг относительно

* На самом деле локтевой сустав является сложным. В нем различают три, объединенных общей капсулой и имеющих единую суставную полость, сустава: плече-локтевой, плече-лучевой и проксимальный луче-локтевой. В данной теме представляем локтевой сустав как одно целое.

** Кисть на данный момент не рассматриваем.

друга на каком-либо из участков траектории.

12.6 Модели целенаправленного движения и методы их расчета

В данном пункте разобран случай расчета моделей движения с использованием кинематических и динамических параметров деформации опоры, полученных по теоретическим моделям, как наиболее сложный.

Рассмотрим сочетание моделей между собой, а также методы их расчета. При этом точка зрения будет достаточно укрупнена – анализ проводится по большим блокам. И началом послужит силовой анализ биомеханической системы. Дело в том, что для учета влияния упругой опоры необходимо вначале тем или иным способом определить параметры ее деформации. Сделать это без знания действующей нагрузки при аналитическом расчете параметров деформации спортивного снаряда невозможно.

Таким образом, первой задачей является определение сил, действующих со стороны спортсмена на опору. В начале расчета сделать это можно лишь в первом приближении, т.е. определить реакции в кинематических парах «рука – опора», действующих на жесткую, а не на упругую опору.

Вторым этапом является приложение найденных реакций к балке и вычисление параметров ее деформации. Здесь мы уже работаем с моделями деформации.

Зная все параметры обращения опоры (параметры ее динамической деформации), переходим к третьему этапу: к вычислению моделей кинематики и динамики движения с использованием итерационных методов.

Четвертым этапом является расчет управляющих моментов мышечных сил по соответствующим уравнениям целенаправленного движения. Этим и завершается расчет по моделям.

На первом этапе наряду с кинетостатическим расчетом можно выполнить расчет всех кинематических и динамических параметров движения спортсмена без учета упругих свойств опоры, т.е. для движения выделенной биомеханической системы. В дальнейшем это позволит выполнить оценку динамического усиления, привносимого спортивным снарядом. Есть и другой путь проведения подобного анализа – если использовать модели с выделенными частями, отражающими в явном виде движение опоры и человека, то будем иметь возможность в любой момент провести сравнительный анализ в рамках одного расчета. Для этого необходимо всего лишь сравнить две части для выделенных систем, на которые разбивается любое уравнение.

Отметим, какие методы применяются для определения комплекса соответствующих параметров по вышеуказанным моделям. Для кинетостатического анализа движения спортсмена применяют как

обычные вычисления по полученным аналитическим моделям, так и численное дифференцирование при определении угловых характеристик движения биомеханических систем.

Для моделей деформации необходимы аналитические решения, численные дифференцирование и интегрирование для расчета линейных кинематических параметров колебания спортивного снаряда.

Уравнения движения решаются обычным способом, так как носят аналитический характер. Вся вычислительная работа с использованием численных методов к этому моменту уже выполнена. И на всех этапах, кроме непосредственно расчета по уравнениям движения, применяют метод итераций.

Общая схема сочетания моделей и методов их расчета представлена на рисунке 12.1. Расчетные модели кинематики и динамики движения биомеханической системы разбиваются на пять крупных блоков. Им соответствует такое же количество блоков, которые показывают используемые для расчетов методы.

Блоки с моделями деформации и методами ее расчета выделены цветом, так как представляют собой черные ящики. Это означает, что нам важны лишь результаты расчетов, которые дают указанные модели. Внутри черного ящика все расчетные модели деформации можно заменить в любой момент, не меняя модели кинематики и динамики движения самой биомеханической системы.

Далее модели кинематики и динамики работают с таблицами данных тремя способами:

- аналитические уравнения;
- численные методы дифференцирования и интегрирования;
- метод приближений (итераций).

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МОДЕЛИ

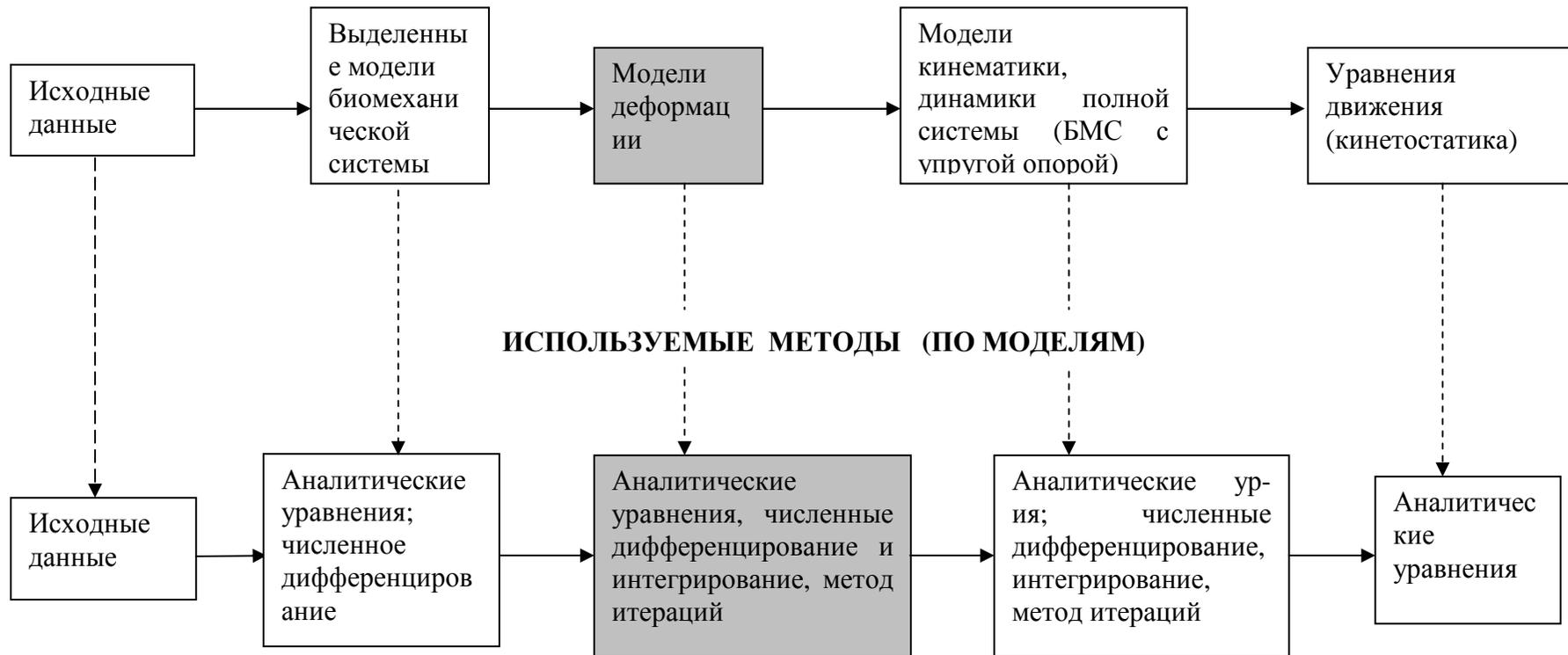


Рисунок 12.1 – Сочетание моделей полной системы и методов их расчета

12.7 Исследование движения спортсмена с помощью уравнений Лагранжа второго рода

В работе вскрыты закономерности биомеханического взаимодействия человека с упругим спортивным снарядом, что и декларировалось в названии. Тем не менее, некоторые проблемы, представляющие несомненный интерес, оказались вне нашего внимания или затронуты вскользь. Одной из них является вопрос правомочности применения уравнений Лагранжа второго рода для исследования целенаправленного движения биомеханической системы в условиях упругой опоры. Интерес обусловлен поиском адекватных исследовательских методик. Это необходимый инструмент для анализа, без которого правильный результат невозможен. Но так как определенная точка зрения по данному поводу была высказана уже в главе 1, то теперь ее просто уточним.

Начнем с важного вопроса – в связи с влиянием опоры на координаты звеньев Q_i биомеханической системы при любом виде движения можно ли эти координаты выбирать в качестве обобщенных, т.е. независимых между собой? То же относится и к L_0 , Q_0 или $L_{0Г}$, $L_{0В}$, характеризующим положение спортивного снаряда. В такой постановке вопрос о независимости указанных координат, по сути, является вопросом о применимости уравнений Лагранжа второго рода для исследования движения биомеханической системы в условиях упругого спортивного снаряда с точки зрения классификации координат.

Известно, что, поскольку обобщенные координаты Q_i между собой независимы, то их элементарные приращения δQ_i также между собой независимы [10, 13, 22, 73, 118]. При этом *каждая величина δQ_i определяет соответствующее, независимое от других возможное перемещение системы.*

Возможными (или виртуальными) перемещениями системы называют любую совокупность элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Отметим, что возможные перемещения происходят *при фиксированном времени t .*

Вышеизложенное позволяет принять все координаты Q_i , L_0 , Q_0 и

L_{0r} , L_{0b} в качестве обобщенных, так как любое элементарное приращение δQ_i каждой из них не зависит от остальных возможных приращений. Например, можно изменить угол для ног Q_3 на величину δQ_3 , при этом остальные углы Q_i и координаты пружины L_0 , Q_0 или L_{0r} , L_{0b} останутся прежними и им можно добавить свои независимые перемещения. Таким же образом можно поступить и с параметрами спортивного снаряда. Изменим прогиб опоры по горизонтали L_{0r} на величину $\delta Q_{0r} = \delta L_{0r}$. Понятно, что все остальные координаты полной системы, принятые в качестве обобщенных, остаются прежними *в данный момент времени*.

Уравнения Лагранжа применяются для изучения движения любых механических систем с геометрическими (точнее с голономными) связями [12, 81, 82, 118]. Определим типы связей в случае биомеханической системы. Для полной системы в качестве допущения приняты все кинематические пары в виде цилиндрических шарниров, позволяющих совершать только вращательное движение. Сама биомеханическая система предстает в виде незамкнутой кинематической цепи, т.е. состоит из жестких звеньев, а опора заменяется одной или двумя пружинами. Воспользуемся анализом, приведенным в литературе по теоретической механике и теории механизмов и машин. В работе [83] для кинематических пар даны примеры геометрических связей, уравнения которых содержат только координаты точек механической системы (и, может быть, время). Вращательная пара относится к их числу. Наличие пружины ничего не меняет. В учебной литературе [9, 11,12, 81-83, 133] разобрано огромное количество примеров для рычажных механизмов с пружинами и имеющих только вращательные пары. Для всех методом исследования движения выбраны уравнения Лагранжа второго рода.

Но есть несколько ограничений. Они рассматривались на протяжении всей книги. Суммируем все в данном разделе и сделаем выводы:

- масса балки представляет собой распределенную величину;
- не все связи являются идеальными;
- затруднительно вывести уравнение потенциальной энергии для спортивного снаряда;
- на физическом уровне проще, нагляднее и результативнее анализировать уравнения движения, полученные методом кинетостатики.

Дополнительным аргументом в пользу уравнений кинетостатики является их независимость от вида связей. Поэтому правильное

использование кинетостатического принципа составления уравнений движения биомеханической системы в условиях упругой опоры исключает возможность ошибки и дает дополнительную информацию по связи моментов управляющих сил с параметрами динамики. В каждом уравнении его члены группируются по видам инерционной нагрузки (т.е. по видам движения) – нормальным, касательным, кориолисовым силам инерции и т.д. Это позволяет количественно оценить влияние видов движения на целенаправленное движение рассматриваемой системы.

12.8 Методика расчета моделей целенаправленного движения

Покажем порядок расчета моделей движения спортсмена в условиях упругой опоры. В качестве базового примера взято выполнение гимнастом маховых упражнений на перекладине. Приведенная ссылка на целый ряд формул в одном пункте означает не то, что расчет ведется по всем указанным уравнениям, а то, что из данного ряда надо воспользоваться выражениями, относящимися только к выбранной исследователем модели опоры в пределах принятых допущений.

Один из вариантов методики представлен на рисунке 12.2 . Вычисления рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1. *Исходные данные.* В этом пункте определяют вес G и рост L спортсмена, размеры звеньев L_i и на основании оптической регистрации их угловые координаты Q_i во время движения. К исходным параметрам относятся также параметры спортивного снаряда. Для грифа перекладины это модуль упругости материала E , диаметр грифа d , его длина ℓ .
2. *Модели кинематики и масс-инерционные параметры выделенной БМС.* Определяют массы звеньев m_i , положения ЦМ звеньев S_i по работе [56], а также проекции ускорений ЦМ звеньев \ddot{X}_{C_i} , \ddot{Z}_{C_i} на оси OY , OZ по моделям (3.44), (3.49) без учета опоры. Для нахождения угловых характеристик движения звеньев используют численное дифференцирование, сглаживание экспериментальных данных (например, кубическими



Рисунок 12.2 – Порядок расчета моделей

- сплайнами). Методика расчета и необходимые модели описаны уравнениями (2.1)-(2.6), (2.23), (2.34)-(2.40).
3. *Силовой анализ БМС в условиях жесткой опоры.* Определяют реакции в кинематических парах «рука – опора». В этом пункте по моделям (5.15), (5.18) или (5.27) находят силы в контакте человека со спортивным снарядом.
 4. *Определение сил трения и полной опорной реакции.* Вводя коэффициент трения кожи человека о сталь (кинематическая пара «рука – опора»), находят проекции сил трения на оси OY , OZ . Используют модели (5.75). После этого рассчитывают значение *полной* реакции R_{01}^{Σ} на опоре и ее проекции по моделям (10.62), (11.32) с учетом отношения (10.64).
 5. *Модели деформации опоры.* Выбирают тип модели опоры в виде пружин. При необходимости вычисляют приведенную массу по моделям (6.17), (6.22), (6.27), (6.28), (6.38), (6.41), (6.44) и находят все прогибы грифа перекладины Y_k и Z_k для характерных точек. Для этого используют модели колебания балки (7.110).
 6. *Модели кинематики опоры.* Решая аналитически уравнения колебания, рассчитывают ускорения опорных шарниров биомеханической системы \ddot{Y}_k и \ddot{Z}_k по моделям (7.129) и (7.132). Численным интегрированием находят скорости этих точек \dot{Y}_k и \dot{Z}_k по моделям глав 2 и 7. Определяют параметры пружины (пружин) по п.6.6 и выражениям (6.46)-(6.54).
 7. *Модели ускорений ЦМ звеньев БМС в условиях упругой опоры.* Рассчитывают ускорения ЦМ звеньев биомеханической системы \ddot{Y}_{C_i} , \ddot{Z}_{C_i} с учетом упругих свойств опоры по моделям (3.44), (3.49).
 8. *Силовой анализ БМС в условиях упругой опоры.* Повторяют п.3-п.4, но с уточненными значениями ускорений ЦМ звеньев биомеханической системы. Расчет дает проекции полной реакции на опоре R_{01Y}^{Σ} и R_{01Z}^{Σ} .
 9. *Модели деформации опоры.* Повторяют п.5. Выбирать тип модели опоры и приводить массу балки уже не надо. Определяют все те же проекции прогиба балки Y_k и Z_k в сечениях k . Повторяют расчет, начиная с п.6 до получения результата силового анализа с заданной точностью.
 10. *Модели кинематики БМС в условиях упругой опоры.* Выполняют полный кинематический анализ биомеханической системы по моделям глав 1 и 3. Здесь находят координаты характерных точек тела спортсмена и их кинематические параметры.
 11. *Модели динамики БМС в условиях упругой опоры.* Рассчитывают все динамические параметры движения. К ним относят значения

кинетической энергии звеньев T_i и биомеханической системы $T_{БМС}$ по выражениям главы 9, а также кинетические моменты звеньев K_i и всего тела $K_{БМС}$ относительно абсолютной абсциссы и относительно ОЦМ биомеханической системы $K_i^{ОЦМ}$ и $K_{БМС}^{ОЦМ}$.

12. *Уравнения движения БМС в условиях упругой опоры.* Рассчитывают управляющие моменты мышечных сил на каждом звене $M_{i,i-1}$. В зависимости от принятой модели опоры расчет ведут по уравнениям (10.7), (10.13), (10.14) для случая вращающейся пружины или по уравнениям (11.5), (11.6) для двух поступательно перемещающихся пружин.
13. *Анализ уравнений движения.* Выполняют сравнительный анализ уравнений движения по членам, сгруппированным относительно ускорений или силовых факторов. Определяют коэффициенты опоры по моментам управляющих сил $\chi_{M_{i,i-1}}$ по уравнениям (10.42) или (11.21) и делают по ним выводы.

Методика разработана при определенных ограничениях, налагаемых на полную систему. Для дальнейших исследований эти ограничения необходимо снять. В работе [77] указано, что для развития кинематики и динамики человека необходимо накопление знаний о различных геометрических характеристиках тела человека, в том числе и о значении таких параметров тела, как размеры, вес, распределении массы сегментов и звеньев тела и т.д. При этом необходимо идти в двух направлениях. Во-первых, необходимы средние значения характеристик, определяющие человека в качестве механического объекта вообще и пригодные для общих исследований по механике человека. Во-вторых, необходимо иметь значения тех самых характеристик для того человека, который участвует в проведении данного определенного эксперимента с движением тела.

Первое направление носит антропометрический и анатомический характер. В литературе отмечено, что исследования обоих направлений очень трудны и трудоемки. В большинстве случаев не существует методик проведения экспериментов, экспериментальных установок и приборов. Порой отсутствуют необходимые методы математического анализа, не разработано программное обеспечение расчетов для их выполнения на ПЭВМ. Используемые на сегодняшний день стандартные программы такую функцию выполнить не могут. Во-первых, они решают узкие задачи, а во-вторых, не по всем проблемам. Необходимы специализированные разработки, учитывающие междисциплинарный подход к проблеме механики человека. Тем более это характерно для случая исследования взаимодействия биомеханической системы с опорой, обладающей упругими свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аврамчук, Е. Ф.** Технология системного моделирования / Е. Ф. Аврамчук и др. – М. : Машиностроение; Берлин: Техник, 1988. – 520 с.
2. **Аксенов, Е. М.** Методы исследования техники гимнастических упражнений на брусьях / Е. М. Аксенов // Теория и практика физической культуры. – 1968. – № 6. – С. 13-15.
3. **Аксенов, Е. М.** Биодинамические исследования техники гимнастических упражнений на брусьях и методика обучения им : дис. канд. пед. наук. – Л., 1969. – 200 с.
4. **Аксенов, Е. М.** Исследование динамической структуры гимнастических упражнений / Е. М. Аксенов // Биодинамические исследования техники гимнастических упражнений : сб. научн. тр. ГДОИФК им. П.Ф. Лесгафта кафедры гимнастики. – Л. : 1975. – С. 3-7.
5. **Алекперов, С. А.** Исследование техники выполнения оберучных поворотов на брусьях и совершенствование методики обучения им : дис. канд. пед. наук. – Л., 1954. – 284с.
6. **Алешинский, С. Ю.** Определение межзвенных моментов и внутренних сил, возникающих при движении человека / С. Ю. Алешинский, В. М. Зациорский // Теория и практика физической культуры. – 1974. – № 11. – С. 5-9.
7. **Алешинский, С. Ю.** Моделирование пространственного движения человека / С. Ю. Алешинский, В. М. Зациорский // Биофизика. – 1975. – том 20, вып. 6. – С. 1121-1126.
8. **Анурьев, В. И.** Справочник конструктора–машиностроителя : в 3 т. / В. И. Анурьев. – М. : Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 728 с.
9. **Артоболевский, И. И.** Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
10. **Бабаков, И. М.** Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, Главная редакция физико–математической литературы, 1968. – 560 с.
11. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах : в 2 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. ; под общ. ред. Г. Ю. Джанелидзе и Д. Р. Меркина. – М. : Наука, 1990. – Т.1. – 672 с.
12. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах : в 2 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. ; под общ. ред. Г. Ю. Джанелидзе и Д. Р. Меркина. – М. : Наука, 1991. – Т.2. – 640 с.
13. **Беленький, И. М.** Введение в аналитическую механику / И. М. Беленький. – М. : Высшая школа, 1964. – 324 с.
14. **Беляев, Н. М.** Сопроотивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 608 с.
15. **Березкин, Е. Н.** Курс теоретической механики / Е. Н. Березкин. – М : Изд. Московского университета, 1974. – 648 с.

16. **Бидерман, В. Л.** Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М. : Высшая школа, 1980. – 408 с.
17. **Блох, А. Ш.** Вычислительная математика и программирование / А. Ш. Блох, А. Т. Кузнецов. – Мн. : Народная асвета, 1988. – 207 с.
18. **Богданов, В. А.** Элементы биомеханики тела человека / В. А. Богданов // Физиология движения. – Л. : Наука, 1976. – С. 5-34.
19. **Богданов, В. А.** Биомеханика локомоций человека / В. А. Богданов, В. С. Гурфинкель // Физиология движения. – Л. : Наука, 1976. – С. 276-315.
20. **Боянович, Ю. В.** Атлас анатомии человека / Ю. В. Боянович, Н. П. Балакирев. – Ростов на Дону.; Феникс, Харьков. : Торсинг, 2005. – 734, [1] с.
21. **Бронштейн, И. Н.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с.
22. **Бутенин, Н. В.** Введение в аналитическую механику / Н. В. Бутенин. – М. : Наука, 1971. – 264 с.
23. **Васильков, Ю. В.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю. В. Васильков, Н. Н. Василькова. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 256 с.
24. **Великсон, В. М.** Некоторые вопросы математического моделирования динамики биокинематических цепей / В. М. Великсон, Л. В. Чхаидзе // Биофизика, 1975. – Том 20. – Вып. 1. – С. 143-146.
25. **Винокуров, Е. Ф.** Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров [и др.] – Мн. : Наука и техника, 1988. – 464 с.
26. **Владимирский, Б.М.** Математические методы в биологии / Б. М. Владимирский. – Изд-во Ростовского университета, 1983. – 304 с.
27. **Волков, Е.А.** Численные методы / Е. А. Волков. – М. : Наука, 1982. – 256 с.
28. **Воробьева, Г. Н.** Практикум по вычислительной математике / Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова. – М. : Высшая школа, 1990. – 208 с.
29. **Гавердовский, Ю. К.** Исследование общих основ техники и построения естественной классификации маховых упражнений на гимнастических снарядах : дис. канд. пед. наук. – М., 1967. – 263 с.
30. **Гавердовский, Ю. К.** Биомеханические основы техники гимнастических упражнений / Ю. К. Гавердовский. // Спортивная гимнастика (учебник для институтов физической культуры). – М. : Физкультура и спорт, 1979. – С. 34-66.
31. **Гагин, К.А.** Техника конечной фазы прыжков и соскоков в гимнастике и методика начального обучения приземлению: Дисс. канд. пед. наук. – Л., 1970. – 218 с.

32. Гимнастика : учебник для техникумов физической культуры / Под редакцией М.Л. Украна и А.М. Шлемина. – М. : Физкультура и спорт, 1977. – 422 с.
33. **Гордон, Дж.** Конструкции, или почему не ломаются вещи : пер с англ. / Дж. Гордон. – М. : Мир, 1980. – 390 с.
34. **Грановский, В. А.** Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В. А. Грановский, Т. Н. Сирая. – Л. : Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.
35. **Гурфинкель, В. С.** Определение суставных моментов при локомоциях / В. С. Гурфинкель, С. В. Фомин, Г. И. Штилькинд. – Биофизика, 1970. – Том 15. С. 380.
36. **Гусак, А. А.** Приближение функций / А. А. Гусак. – Мн. : Университетское, 1989. – 174 с.
37. **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Мн. : Навука і техника, 1991. – 480 с.
38. **Гутер, Р. С.** Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. – М. : Наука, 1970. – 432 с.
39. **Данилина, Н. И.** Вычислительная математика : учебное пособие для техникумов / Н. И. Данилина [и др.] – М. : Высшая школа, 1985. – 472 с.
40. **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1975. – 655 с.
41. **Демидович, Б. П.** Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
42. **Джорджадзе, А. И.** О совершенствовании упражнений на перекладине. / А. И. Джорджадзе // Теория и практика физической культуры, 1965. – № 2. – С. 63-65.
43. **Дмитриев, В. А.** Детали машин / В. А. Дмитриев. – Л. : Судостроение, 1970. – 792 с.
44. **Дмитриев, С. В.** Совершенствование технического мастерства гимнастов на основе биодинамической характеристики их движений : дис. канд. пед. наук. – Л., 1972. – 179 с.
45. **Добронравов, В. В.** Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин, А. Л. Дворников. – М. : Высшая школа, 1974. – 528 с.
46. **Донской, Д. Д.** Биомеханика физических упражнений : учебное пособие для студентов физкультурных учебных заведений / Д. Д. Донской – М. : Физкультура и спорт, 1958. – 278 с.
47. **Донской, Д. Д.** Биомеханика : учебное пособие для студентов фак. физ. воспитания пед. ин-тов / Д. Д. Донской. – М. : Просвещение, 1975. – 238 с.

48. **Донской, Д. Д.** Биомеханика : учебник для ин-тов физ. культ. / Д. Д. Донской. – М. : Физкультура и спорт, 1979. – 264 с.
49. **Дьяконов, В. П.** Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ / В. П. Дьяконов. – М. : Наука, 1989. – 240 с.
50. **Евсеев, С. П.** Об аналитическом способе получения биодинамических характеристик движений / С. П. Евсеев // Физическое воспитание в школе и в вузе. – Ставрополь, 1974. – С. 46-50.
51. Евсеев, С. П. Исследование особенностей эволюции техники маховых упражнений на кольцах в связи с совершенствованием методики обучения : дис. канд. пед. наук. – Л., 1975. – 134 с.
52. **Евсеев, С. П.** Изучение общих закономерностей техники гимнастических упражнений с помощью метода механико-математического моделирования / С. П. Евсеев, П. Г. Бордовский, А. Г. Конопелько // Техническая подготовка в современной спортивной гимнастике: Сб. научных трудов / Под ред. С. А. Алекперова, Ю. Н. Наклонова. – Л. : Изд-во ГДОИФК им. П.Ф. Лесгафта, 1985. – С. 71-82.
53. **Жуков, В. К.** Биомеханика физических упражнений / В. К. Жуков, Е. Г. Котельникова, Д. А. Семенов. – М. : Физкультура и спорт, 1963. – 259 с.
54. **Загревский, В. И.** Модели анализа движений биомеханических систем / В. И. Загревский. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. – 124 с.
55. **Загревский, В. И.** Программирование обучающей деятельности спортсменов на основе имитационного моделирования движений человека на ЭВМ : автореф. дис. докт. пед. наук. – М. : 1994. – 47 с.
56. **Загревский, В. И.** Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем / В. И. Загревский. – Томск–Могилев. : 1999. – 156 с.
57. **Загревский, В. И.** Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ / В. И. Загревский, Д. А. Лавшук, О. И. Загревский. – Могилев–Томск. : 2000. – 190 с.
58. **Загревский, В. И.** Динамика упруго деформированной опоры / В. И. Загревский, А. Е. Покатилов // Техника и технология пищевых производств: II Международная науч.-техн. конф. 22–24 ноября, 2000 : Тез. док. – Могилев, 2000. – С. 222-223. – рус.
59. **Загревский, В. И.** Алгоритм определения кинематических параметров упругой опоры / В. И. Загревский, А. Е. Покатилов // Техника и технология пищевых производств: II Международная науч.-техн. конф. 22–24 ноября, 2000: Тез. док. – Могилев, 2000. – С. 223-224. – рус.

60. **Зациорский, В. М.** Методы экспериментальных исследований в современной биомеханике спорта / В. М. Зациорский // Материалы первой Всесоюзной научной конференции по биомеханике спорта : Часть I. – М., 1974. – С. 35.
61. **Зациорский, В. М.** Физические качества спортсмена / В. М. Зациорский. – М. : Физкультура и спорт, 1966. – 198 с.
62. **Зациорский, В. М.** Биомеханика двигательного аппарата человека / В. М. Аруин, А. С. Зациорский, В. Н. Селуянов. – М. : Физкультура и спорт, 1981. – 143 с.
63. **Зинковский, А. В.** О методике оценки мышечных усилий при биомеханическом анализе спортивной техники / А. В. Зинковский // Теория и практика физ. культуры. – 1973. № 9. – С. 66-69.
64. **Зинковский, А. В.** Динамическая модель техники спортивных упражнений / А. В. Зинковский [и др.] // Теория и практика физической культуры. – 1977. – № 2. – С. 59-62.
65. **Иванов, В. В.** Комплексный контроль в подготовке спортсменов / В. В. Иванов. – М. : Физкультура и спорт, 1987. – 256 с.
66. **Иванов, М. Н.** Детали машин / М. Н. Иванов. – М. : Высшая школа, 1984. – 336 с.
67. **Иванова, Г. П.** Определение кинетического момента, возникающего при взаимодействии тела с опорой / Г. П. Иванова, В. К. Курьсь // Теория и практика физической культуры. – 1973. – № 1. – С. 71-73.
68. **Иванова, И. Д.** Расчетные модели определения упругой деформации опоры средствами вычислительной техники / И. Д. Иванова, А. Е. Покатилов // Техника и технология пищевых производств: II Международная науч.-техн. конф. 22–24 ноября, 2000 : Тез. док. – Могилев, 2000. – С. 225-226. – рус.
69. **Ипполитов, Ю. А.** Исследование биомеханических характеристик гимнастических упражнений и путей изменения их структуры : автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук. – М. : 1969. – 21 с. – В подзаг.: Московский областной педагогический ин-т им. Н.К. Крупской.
70. **Ипполитов, Ю. А.** Методы обучения гимнастическим упражнениям на основе их моделирования : дис. на соиск. учен. степ. д-ра пед. наук. – М., 1988. – 362 с.
71. **Калашников, В. В.** Организация моделирования сложных систем / В. В. Калашников. – М. : Знание, 1982. – 64 с. / Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика, № 3/.
72. **Кильчевский, Н. А.** Курс теоретической механики в 2 т. / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – Т.1. – 480 с.
73. **Кильчевский, Н. А.** Курс теоретической механики в 2 т. / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – Т.2. – 544 с.

74. **Кинасошвили, Р. С.** Соппротивление материалов / Р. С. Кинасошвили. – М. : Наука, 1968. – 384 с.
75. **Коренберг, В. Б.** Основы качественного биомеханического анализа / В. Б. Коренберг – М. : Физкультура и спорт, 1979. – 209 с.
76. **Коренев, Г. В.** Цель и приспособляемость движения / Г. В. Коренев. – М. : Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., 1974. – 528 с.
77. **Коренев, Г. В.** Введение в механику человека / Г. В. Коренев. – М. : Наука, 1977. – 264 с.
78. **Коренев, Г. В.** Целенаправленная механика управляемых манипуляторов (научные основы робототехники) / Г. В. Коренев. – М. : Наука, 1979. – 448 с.
79. **Крутов, В. И.** Основы научных исследований: учебник для техн. вузов / В. И. Крутов, И. М. Грушко, В. В. Попов ; под ред. В. И. Крутова, В. В. Попова. – М. : Высшая школа., 1989. – 400 с.
80. **Кузнецов, Ю. Л.** Методика обучения сложным акробатическим упражнениям на основе анализа их техники : автореф. дис. канд. пед. наук. – Л., 1978. – 17 с.
81. **Левитская, О. Н.** Курс теории механизмов и машин : учеб. пособие для мех. спец. вузов / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. – М. : Высшая школа, 1985. – 290 с.
82. **Левитский, Н. И.** Колебания в механизмах / Н. И. Левитский. – М. : Наука, 1988. – 336 с.
83. **Левитский, Н. И.** Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. – М. : Высшая школа, 1990. – 592 с.
84. **Лобозкая, Н. Л.** Высшая математика / Н. Л. Лобозкая, Ю. В. Морозов, А. А. Дунаев. – Мн. : Вышэйшая школа, 1987. – 319 с.
85. **Манина, Т. И.** Тензометрическая методика исследования техники толчка руками в гимнастических прыжках через коня / Т. И. Манина, И. А. Замыцкий, Л. И. Головенчиц // Теория и практика физ. культуры.– 1970. – № 6. – С. 70-71.
86. **Мариничев, А. Н.** Физико–химические расчеты на микро–ЭВМ / А. Н. Мариничев, М. П. Турбович, И. Г. Зенкевич. – Л. : Химия, 1990. –256 с..
87. **Машков, А. А.** Теория механизмов и машин / А. А. Машков. – Мн.: Вышэйшая школа. 1971. – 472 с.
88. Моделирование на ЭВМ движений спортсмена / Ф. М. Кулаков [и др.] // Биофизика, том 20, вып. 6, 1975. – С. 1115-1119.
89. **Мур, Д.** Основы и применения трибоники / Д. Мур. – М. : Мир, 1978. – 488 с.
90. **Назаров, В. Т.** Об одном из способов управляемого изменения механической энергии тела гимнаста в оборотовых упражнениях на перекладине / В. Т. Назаров // Теория и практика физ. культуры. – 1966. – № 5. – С. 6-10.

91. **Назаров, В.Т.** Теоретическое и экспериментальное исследование программы двигательных действий в упражнениях на гимнастических снарядах : дис. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук. – М., 1966. – 196 с.
92. **Назаров, В. Т.** Упражнения на перекладине: в 2 ч. / В. Т. Назаров. – Рига : РПИ, 1972. – Ч. 2. – 130 с.
93. **Назаров, В. Т.** Упражнения на перекладине / В. Т. Назаров. – М. : Физкультура и спорт, 1973. – 134 с.
94. **Назаров, В. Т.** К механике взаимодействия спортсмена с опорой / В. Т. Назаров, Б. П. Кузенко // Теория и практика физ. культуры. – 1974. № 1. – С. 19-21.
95. **Никитин, Н. Н.** Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 1990. – 608 с.
96. **Новик, И. Б.** О моделировании сложных систем / И. Б. Новик. – М. : Мысль, 1965. – 335 с.
97. **Новик, И. Б.** Логика научного познания и метод моделирования / И. Б. Новик, Н. М. Мамедов, Н. А. Давтян // Философско–методологические основания системных исследований. Системный анализ и системное моделирование / Под ред. Д.М. Гвишиани. – М. : Наука, 1983. –С. 156-179.
98. **Овчинников, А. И.** Биодинамические исследования техники сложных упражнений на брусьях разной высоты и методика обучения им : автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук. – Л., 1973. – 16 с. – В подзаг.: Гос. центр. орд. Ленина и орд. Кр. Знамени ин–т физич. культуры им. П.Ф. Лесгафта.
99. **Оглотков, В. А.** Биодинамический анализ подъема с разгибом на брусьях / Оглотков В.А. // Биодинамические исследования техники спортивных упражнений, каф. гимнастики ГДОИФК им. П.Ф. Лесгафта, Л. : 1975. – С. 23-29.
100. **Павлов, Г. М.** Анатомия человека : пособие для педагогических институтов / Г. М. Павлов. – М. : Государственное учебно–педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1952. – 472 с.
101. **Пановко, Я. Г.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М. : Наука, Главная редакция физико–математической литературы, 1979. – 384 с.
102. **Пановко, Я. Г.** Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М. : Наука, Главная редакция физико–математической литературы, 1991. – 256 с.
103. **Петров, В. А.** Механика спортивных движений / В. А. Петров, Ю. А. Гагин. – М. : Физкультура и спорт, 1974. – 232 с.

104. **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Мн. : ДизайнПРО, 1998. – 592 с.
105. **Покатилов, А. Е.** N-звенная модель биомеханической системы / А. Е. Покатилов // Техника и технология пищевых производств: II Международная науч.-техн. конф. 22–24 ноября, 2000 : Тез. док. – Могилев, 2000. – С. 224-225. – рус.
106. **Райтер, Р. И.** Исследования техники маховых упражнений на перекладине / Р. И. Райтер, В. И. Чукарин // Спортивная гимнастика. – Киев, 1977. – С. 45-61.
107. **Райцин, Л. М.** Метрологические основы измерения силовых показателей спортсмена / Л. М. Райцин, В. Н. Селуянов // Материалы первой всесоюзной научной конференции по биомеханике спорта (Киев, 24 – 25 сентября 1974). М. : ч.1. – С. 56-57.
108. **Романовский, К. Н.** Большой оборот вперед и в висе сзади на перекладине / К. Н. Романовский // Теория и практика физ. культуры. – 1969. – № 9. – С. 17-21.
109. **Рудицын, М. Н.** Справочное пособие по сопротивлению материалов / М. Н. Рудицын [и др.] : под общей ред. М. Н. Рудицына. – Мн. : Вышэйшая школа, 1970. – 632 с.
110. **Самарский, А. А.** Теория разностных схем: учебное пособие / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
111. **Сарсания, С. К.** Радиоизотопный метод определения геометрии масс тела спортсменов / Сарсания С.К. [и др.] // Материалы II Всесоюзной конференции по биомеханике спорта. – Ч. 1. – М. : 1974. – С. 57-59.
112. **Снитко, Н. К.** Сопротивление материалов / Н. К. Снитко. – Л. : Изд. Ленинградского университета, 1975. – 368 с.
113. **Снитко, Н. К.** Строительная механика / Н. К. Снитко. – М. : Высшая школа, 1980. – 432 с.
114. **Советов, Б. Я.** Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М. : Высшая школа, 1985. – 271 с.
115. Справочник по элементарной математике, механике и физике / Под ред. Н. И. Кузнецова. – Мн. : Наука и техника, 1973. – 216 с.
116. **Старжинский, В. М.** Теоретическая механика / В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1980. – 464 с.
117. **Степин, П. А.** Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М. : Высшая школа, 1983. – 304 с.
118. **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики / Тарг С.М. – М. : Высшая школа, 1986. – 416 с.
119. **Тихонов, В. Н.** Исследование вариативности техники выполнения маховых упражнений на гимнастических снарядах : автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук. – М., 1966. – 20 с. – В подзаг.: Гос. центр. орд. Ленина ин-т физич. культуры.

120. **Тихонов, В. Н.** Теоретические предпосылки к анализу техники маховых гимнастических упражнений / В. Н. Тихонов // Теория и практика физической культуры. – 1971. – № 5. – С. 17-21.
121. Трение и износ материалов на основе полимеров / В. А. Белый [и др.]. – Мн. : Наука и техника, 1976. – 432 с.
122. **Турчак, Л. И.** Основы численных методов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – М. : Физматлит, 2002. – 304 с.
123. **Фаворин, М. В.** Моменты инерции тел : справ. / М. В. Фаворин : под ред. М. М. Гернета. – М. : Машиностроение, 1977. – 512 с.
124. **Федоренко, Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. – М. : Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1978. – 488 с.
125. **Феодосьев, В. И.** Соппротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1979. – 560 с.
126. **Фениш, Х.** Карманный атлас анатомии человека на основе Международной номенклатуры / Х. Фениш (при участии В. Даубера). – Мн. : Вышэйшая школа, 2001. – 464 с.
127. **Фурунжиев, Р. И.** Применение математических методов и ЭВМ. Практикум / Р. И. Фурунжиев, Ф. М. Бабушкин, В. В. Варавко. – Мн. : Вышэйшая школа, 1988. – 191 с.
128. **Харин, Ю. С.** Практикум на ЭВМ по математической статистике / Ю. С. Харин, М. Д. Степанова. – Мн. : Университетское, 1987. – 304 с.
129. **Харин, Ю. С.** Основы имитационного и статистического моделирования / Ю. С. Харин [и др.] – Мн. : Дизайн ПРО, 1997. – 288 с.
130. **Чернин, И. М.** Расчеты деталей машин: справ. / И. М. Чернин, А.В. Кузьмин, Г. М. Ицкович. т– Мн. : Вышэйшая школа, 1974. – 592 с.
131. **Штофф, Б. А.** Моделирование и философия / Б. А. Штофф. – М., Л. : Наука, 1966. – 96 с.
132. **Шуп, Т.** Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М. : Мир, 1982. – 238 с.
133. **Яблонский, А. А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А. А. Яблонский [и др.] : под ред. А.А. Яблонского. – М. : Высшая школа, 1985. – 367 с.

Научное издание

Покатилов Алексей Евгеньевич

БИОМЕХАНИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СПОРТСМЕНА С УПРУГОЙ ОПОРОЙ

Ответственный за выпуск *Т. Е. Янчук*

Художник обложки *Л. В. Ледечева*

Подписано в печать 12.12.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,46. Уч.-изд. л. 12,38.
Тираж 110 экз. Зак. 1163.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛИ № 02330/0131748 от 01.04.2004.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
в Республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП № 02330/0056850 от 30.04.2004.