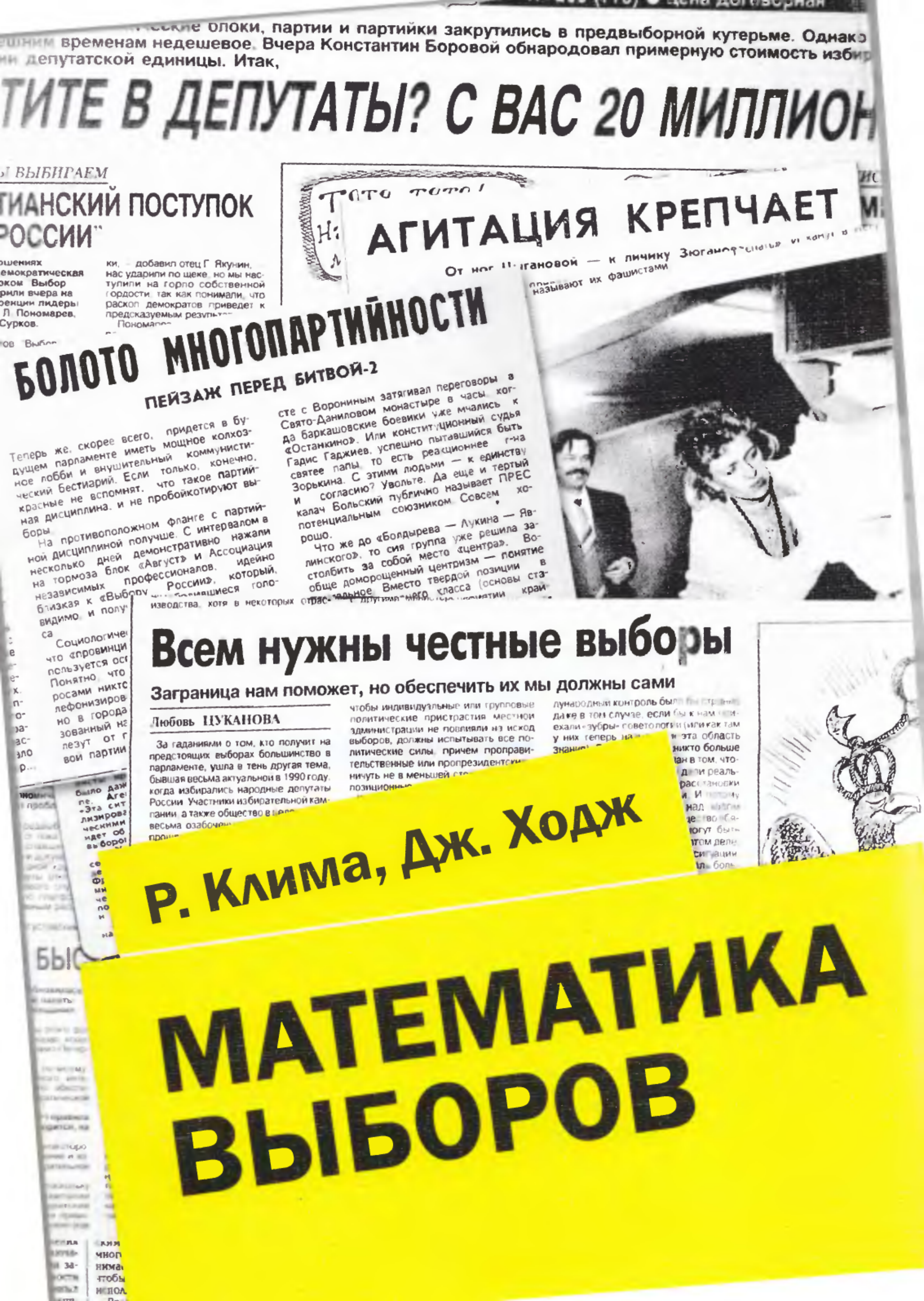

Р. Клима, Дж. Ходж

МАТЕМАТИКА ВЫБОРОВ

Mathematical World
Volume 22

The Mathematics of Voting and Elections:
A Hands-On Approach

Jonathan K. Hodge
Richard E. Klima

AMS
American Mathematical Society

НЕЗАВИСИМЫЙ ИНСТИТУТ ВЫБОРОВ

Ричард Э. Клима, Джонатан К. Ходж

МАТЕМАТИКА ВЫБОРОВ

Перевод с английского Н. А. Шиховой

Москва
Издательство МЦМНО
2007

УДК 342.8+519.1
ББК 66.3(2Рос)68+22.176
К49

Клима Р. Э., Ходж Дж. К.
К49 Математика выборов. — М.: МЦНМО, 2007. — 224 с.
ISBN 978-5-94057-317-3

Вопрос о том, являются ли те или иные выборы демократичными, соответствуют ли результаты выборов воле народа, имеет много разных аспектов. В книге американских преподавателей Дж. К. Ходжа и Р. Э. Клима в научной форме, живо и наглядно обсуждаются проблемы математической теории выборов и референдумов.

Книга написана в форме учебника и рассчитана прежде всего на студентов. Для ее понимания вполне достаточно школьных знаний по математике. Книга предназначена для политологов, социологов и юристов.

ББК 66.3(2Рос)68+22.176

Ричард Э. Клима, Джонатан К. Ходж

МАТЕМАТИКА ВЫБОРОВ

Перевод с английского *Шиховой Н. А.*

Редактор *Маруфов Т. Б.*

Подписано в печать 22.10.2007 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 14. Тираж 3000 экз. Заказ № 414-07

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495)-241-74-83.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 0-8218-3798-2 (англ.)
ISBN 978-5-94057-317-3

Оглавление

Предисловие к русскому изданию

Выборы — это непременный атрибут демократического государства. Выборы проходят в большинстве стран мира, и в каждой стране у них есть свои особенности, связанные с опытом и традициями народа этой страны, с системой государственной власти и политическим режимом. Ученые и политики, журналисты и простые граждане спорят о том, являются ли те или иные выборы демократичными, соответствуют ли результаты выборов воле народа.

Этот вопрос имеет много разных аспектов. Необходимо принимать во внимание и наличие конкуренции, и доступность информации о кандидатах, и свободу волеизъявления, и честность подсчета голосов — все те аспекты, которые обсуждают юристы, политологи и социологи. Однако есть у выборов еще одна сторона, которая изучается прежде всего математиками. Ее обычно принято называть *избирательной системой* (в узком смысле этого понятия).

Избирательная система (в узком смысле) — это совокупность правовых норм, определяющих, каким образом итоги голосования избирателей трансформируются в результаты выборов. Эти нормы связаны не только с правилом определения победителя или победителей. Выбор избирательной системы начинается раньше — с решения вопросов, какими будут избирательные округа, каков будет избирательный бюллетень и какие отметки смогут проставлять в нем граждане. Но в конечном итоге все сводится к одной задаче — определить, как голоса избирателей превращаются в мандаты избираемых народом лиц.

Эти проблемы обсуждаются математиками и политиками с XVIII века, когда выборы только начинали становиться универсальным способом формирования органов власти. Свой вклад в их решение внесли такие выдающиеся люди, как Ж. А. Кондорсе, А. Гамильтон, Т. Джефферсон и другие. Уже в XX веке за вклад в теорию выборов американский математик Кеннет Дж. Эрроу был удостоен Нобелевской премии по экономике.

В нашей стране математическая теория выборов долгие десятилетия была не востребована. В условиях, когда в избирательный бюллетень включался всего один кандидат, за которого голосовали 99,9% избирателей, все эти математические премудрости были ни

к чему. Однако мы уже 18 лет живем в условиях альтернативных выборов, а интерес к математической теории выборов пока явно недостаточен.

Студенты, обучающиеся на юристов и политологов, получают минимальную и зачастую искаженную информацию о современных избирательных системах и практически ничего не узнают о проблемах, связанных с порядком определения результатов выборов. Соответственно все эти проблемы остаются малопонятны и тем, кто пишет и принимает избирательные законы. Наиболее ярким примером может служить принятие в ряде российских регионов в ноябре-декабре 2006 г. законов, предусматривающих использование для распределения мандатов между списками так называемого метода делителей Империали.

Литературы по данным вопросам на русском языке крайне мало. Давно стала библиографической редкостью вышедшая в 1958 г. замечательная книга Э. Лейкман и Д. Д. Ламберта «Исследование мажоритарной и пропорциональной избирательных систем». В 1997 г. в журнале ПОЛИС был напечатан отрывок из книги Р. Таагеперы и М. С. Шугарта. Тогда же, в 90-х годах, вышли две популярные книги: одна из них (Ф. Т. Алескеров, П. Ортешук «Выборы. Голосование. Партии») была написана отечественным автором в соавторстве с американцем, другая (О. Н. Каюнов «Незримая логика избирательных законов») — российским специалистом. Можно также отметить нашу недавно вышедшую книгу «Пропорциональная избирательная система в России: история, современное состояние, перспективы» (авторы — А. В. Иванченко, А. В. Кынев, А. Е. Любарев), однако в ней данным аспектам уделено лишь небольшое внимание.

Поэтому следует приветствовать появление книги, в которой в строго научной форме, но при этом живо и наглядно обсуждаются проблемы математической теории выборов (а заодно и референдума). Данная книга позволит всем, кто ее изучит, значительно лучше понять, что стоит за такими, казалось бы, простыми понятиями, как правило большинства или пропорциональное распределение, какие при этом возникают сложности и парадоксы. Возможно, многие, прочитав данную книгу, впервые задумаются о том, насколько непросто создать систему выборов, адекватно отражающую волю избирателей.

Книга американских преподавателей Дж. К. Ходжа и Р. Э. Клима написана в форме учебника и предназначена для студентов. Она рассчитана на людей, неплохо владеющих математикой, но для ее усвоения вполне достаточно хорошей школьной подготовки по этому предмету. Можно надеяться, что таких немало среди студентов, изучающих социологию и политологию, хочется верить, что есть такие и среди будущих юристов.

Книга в изобилии содержит задачи, предназначенные для самостоятельной работы обучающихся. Правда, авторы постарались, чтобы задачи эти были интересны американским студентам. Вероятно, преподавателям, которые будут использовать данный учебник, придется находить задачи, которые могли бы в большей степени заинтересовать российского студента.

Есть и другие проблемы, связанные с американским происхождением книги. Например, гл. 10 посвящена методам пропорционального распределения. В США эти методы имеют отношение главным образом к проблеме распределения между штатами мест в палате представителей. В Европе же и в России аналогичные методы используются в первую очередь как важная составная часть пропорциональной избирательной системы — для распределения мандатов между партиями по итогам голосования. Методы в основном те же, однако при этом используется иная терминология, да и алгоритмы реализации этих методов заметно различаются. Поэтому материал гл. 10 трудно без соответствующей подготовки адаптировать к тем проблемам, которые возникают на российских выборах.

В целом книга посвящена наиболее общим проблемам, поэтому в ней нельзя искать ответы на все вопросы, возникающие по поводу той или иной избирательной системы. Однако она заставляет думать, учит глубже вникать в те положения, которые внешне кажутся простыми и понятными, — и в этом ее главная ценность.

Надеемся, что книга эта будет востребована и преподавателями, и студентами, и теми политиками, которые стремятся более осмысленно подходить к проблеме выборов. Надеемся также, что данное издание не станет последним, посвященным математической теории выборов, а напротив, стимулирует создание отечественных книг в этой области.

Иванченко А.В.,
доктор юридических наук,
заслуженный юрист Российской Федерации
Музыкантский А.И.,
кандидат технических наук, профессор
Любарев А.Е.,
кандидат юридических наук

Благодарности

От Джона

Этот проект никогда бы не воплотился в жизнь без поддержки и одобрения моих друзей, семьи и товарищей по работе.

Я особенно благодарен Джиму Брэдли за то, что он познакомил меня с областью теории выборов, а также Арту Уайту и Алену Швенку за то, что они помогли обратить мой интерес к математике в нечто большее, чем просто хобби.

Еще я благодарен моим коллегам в Университете Гранд-Велли за их личную и профессиональную поддержку в течение последних нескольких лет. Они во многом научили меня, что значит быть хорошим преподавателем и хорошим математиком. Принадлежать к такому выдающемуся коллективу преподавателей и специалистов — большая удача.

Писать книгу — тяжелый труд, но у меня был замечательный соавтор, и это сделало задачу не такой уж непреодолимой. Я искренне ценю творческий дар Рика, его трудоспособность и то что, он так кстати компенсировал мою полную некомпетентность в вопросах спорта. Я благодарен судьбе за чудесную семью, замечательных друзей, моих братьев и сестер во Христе, которые поддерживали меня и одновременно были требовательны ко мне. Я испытываю огромное чувство благодарности к моей жене, которая подарила мне больше, чем любой муж вправе ожидать. Мелисса, ты — любовь моей жизни, и я с радостью смотрю в будущее, думая, что нас ждет еще много хорошего.

И наконец, эта книга никогда бы не появилась на свет, если бы Господь не устроил это. Хотя Он так добр, что позволил мне приписать себе эти идеи, на самом деле они Его, а не мои. Поэтому я надеюсь, что могу прославить Его с помощью этой книги и всего того, к чему она приведет.

От Рика

Я бы хотел высказать особую благодарность Джону за то, что он отвел мне такую значительную роль в работе над этой книгой. Для Джона интерес к теории голосования и выборов — и профессиональная необходимость, и хобби. А для меня это в основном развлечение. Поэтому вначале я согласился отредактировать книгу и предоставить

Джону некоторую историческую и биографическую информацию, а также вопросы для дальнейшего изучения для *его* книги. Но вышло так, что я сделал гораздо больше, чем мы оба вначале планировали — написал полностью первые версии двух глав и очень много поработал с остальными. Поэтому книжка оказалась *нашей* общей, а не только его (и, по крайней мере бы для этих двух глав, мы почувствовали роль партнера в проекте). Тем не менее, любая книга как идея зарождается в голове только одного человека, и с моей стороны было бы упущением не сказать, что для этой книги таким человеком был Джон.

От Джона и Рика

Мы хотим адресовать особую благодарность «Educational Advancement Foundation», Университету Гранд-Велли и Апполачскому университету за щедрую поддержку проекта, в результате которого появилась эта книга. Мы хотим поблагодарить также Гарри Лукаса-младшего за его проницательность и великодушие; Грега Фоли за то, что познакомил нас; а также Стива Шликера, Билла Болдри и Кэтрин Фрерикс за то, что рассмотрели нашу заявку на грант и предложили свою поддержку.

Мы особенно благодарны Сергею Гельфанду и Американскому Математическому Обществу за воодушевляющую поддержку наших усилий и за то, что процедура опубликования прошла гладко. Здесь же мы хотим поблагодарить Элен Беккер, Мэтти Боулкниса и Джеральда Клима за то, что они прочитали рукопись и сделали множество полезных замечаний и предложений.

И наконец, летом 2004 г. нам доставила большое удовольствие работа с тремя выдающимися помощниками из числа студентов: Майком Чейни, Питом Швельером и Дейвом Уилсом. Их способность проникать в суть вещей и умение видеть все в перспективе были бесценны, и мы не можем представить, чтобы книга была написана без них. Мы просто обязаны дать дружеский совет каждому работодателю: *возьмите их на работу прежде чем это сделает кто-нибудь другой!* Это толковые, работоспособные ребята, а находиться с ними рядом — сплошное удовольствие. Нам повезло, что они включились в этот проект и мы желаем им всего самого лучшего в их будущих начинаниях.

Предисловие

В минувшее десятилетие или около того темы из общественных наук постепенно проложили себе путь в многочисленные математические публикации — и на уровне среднего образования, и на университетском уровне. В колледжах эти темы часто преподают в рамках курса «Математика для гуманитариев», предназначенного для тех, кто не специализируется в математике. В высшей школе их используют в качестве упражнений в математическом моделировании и решении задач. Такой подход вполне отвечает стандартным требованиям Национального совета учителей математики (The National Council of Teachers of Mathematics, NCTM), предъявляемым к умению рассуждать, доказывать, передавать и представлять информацию и работать совместно. Некоторые колледжи и университеты теперь даже предлагают целые семестровые курсы, посвященные математике в политике и общественном выборе. Недавно Университет Гранд-Велли ввел такой курс в число изучаемых дисциплин, и эта книга была написана в ответ на потребности этого курса.

Этот университетский курс под названием «Математика голосования и выборов» предназначен для студентов последних двух курсов с самой разной математической подготовкой. Его можно рассматривать как часть общеобразовательной программы студентов, и единственное требование к уровню математической подготовки — полный курс базовой университетской программы по математике, в который входят алгебра в объеме колледжа, математика для гуманитариев, вводный курс статистики, логика (изучаемая на факультете философии) и даже программирование на Visual Basic. При этом аудитория курса оказалась очень разнородной. Когда мы только начали читать этот курс, на него приходили студенты самых разных специализаций, включая бухгалтерский учет, бизнес, компьютерные технологии, экономику, инженерное дело, английский язык, географию, историю, математику, философию и политологию (и все это в группе из 17 человек!). В то же время аналогичный курс, но для слушателей, в основном специализировавшихся на математике, был прочитан в Аппалачский университет.

Мы думаем, что эта книга полезна в обеих ситуациях. Студенты с более высокой математической подготовкой, в отличие от тех, кто не специализируется в математике, будут подходить к этой теме с другой точки зрения. Более того, преподаватель может менять свой подход и цели, чтобы соответствовать потребностям обеих групп. Мы также верим, что эта книга вполне годится для самостоятельного изучения, в основном благодаря своему практическому, основанному на решении задач, подходу.

С точки зрения педагогики, при создании этой книги нас вдохновляла наша причастность к наследию проекта Р. Л. Мура. Этот проект был начат в Университете штата Техас, в Остине, чтобы содействовать распространению методов «обучения на основе открытий», введенных покойным доктором Р. Л. Муром. Он специализировался в топологии, и стиль его преподавания состоял в том, что студентам предлагалась тщательно проработанная последовательность задач, которые они решали, а затем обсуждали. Подход, принятый в нашей книге, следовало бы называть *модифицированным* методом Мура, более всего (причем иронически) потому, что Мур никогда не использовал учебников на занятиях.

Когда мы начали писать эту книгу, мы хотели внести в нее дух метода Мура, но мы хотели быть уверенными, что текст подойдет и для не-математиков. Для этого мы постарались писать в непринужденном стиле, не отпугивая читателя. Кроме того, мы постарались поместить каждую тему в подходящий исторический контекст и по ходу дела рассказать интересные и увлекательные истории.

Если вы привыкли работать с более традиционными математическими текстами, вы можете заметить, что некоторые общие их черты не проявились в нашей книге. Прежде всего, мы не включали никаких подробных примеров в основной текст. Вместо этого мы ввели вопросы «со звездочкой», полные или частичные ответы к которым приведены в конце каждой главы. Эти вопросы предназначены для того, чтобы помочь читателю оценить свое понимание основных определений и понятий прежде, чем перейти к более трудному материалу. Таким образом, эти вопросы со звездочкой играют ту же роль, что и примеры в других текстах, но происходит это таким образом, чтобы заставить читателя активнее работать над новыми понятиями.

Мы не включали однотипных задач на отработку определенных навыков, а вместо этого сосредоточились на вопросах, которые требуют глубокого анализа и умения критически мыслить. Собственно говоря, мы используем эти вопросы не для того, чтобы просто дополнить материал книги, но чтобы существенно развить его. Поэтому *совершенно необходимо, чтобы читатель трудился над книгой с карандашом в руках и тщательно прорабатывал каждый вопрос основного материала, прежде чем двигаться дальше*. Единственное исключение

из этого правила — вопросы для дальнейшего изучения, приведенные в конце каждой главы. Мы рекомендуем проработать их, но, строго говоря, это не обязательно.

Сложно охватить весь материал этой книги в односеместровом курсе по теории голосования. Правда, некоторые главы и разделы можно опустить без потери цельности. А именно:

- Главы 1—4 вводят основания математической теории голосования вплоть до теоремы Эрроу, и их нужно изучать по порядку. Тем не менее, доказательство теоремы Мэя (оно начинается на с. 22) можно пропустить, и это не вызовет трудностей в дальнейшем.
- В главе 5 читатель проводит доказательство теоремы Эрроу, а затем там обсуждаются три возможных варианта разрешения трудностей, вскрытых в этой теореме. Вся эта глава может быть пропущена, хотя было бы неплохо проработать хотя бы раздел по одобрительному голосованию (он начинается на с. 103).
- Главы 6 и 7 связаны друг с другом, и их следует изучать по порядку. Они лишь немного опираются на материал первых четырех глав.
- Главы 8, 9 и 10 по существу не зависят от остального текста и друг от друга; их можно изучать в любом порядке или опустить. В главе 8 в небольшой степени используется терминология глав 6 и 7 (в особенности в отношении коалиций и индексов влияния), но для понимания достаточно лишь поверхностного ознакомления с этими идеями.

И наконец, хотя эта книга предназначена для использования в курсе теории голосования для студентов старших курсов, мы думаем, что она может быть частично использована и для стандартного курса математики для гуманитариев или как дополнение к существующей программе последних курсов. Более того, хотя наш собственный подход к преподаванию по этой книге включает коллективную работу, доклады студентов, обсуждения, дебаты, а не чтение лекций в каком бы то ни было виде, мы призываем преподавателей экспериментировать и с другими методами и формами работы. Мы надеемся, что эта книга послужит полезной отправной точкой, какими бы ни были ваши цели в преподавании, и что вы не постесняетесь обратиться к нам, если у вас есть какие-либо комментарии, вопросы и предложения.

Джон Ходж
hodgejo@gsvu.edu
Рик Клима
Klimare@appstate.edu

ГЛАВА 1

Чем так хорошо правило большинства?

Центральные вопросы

- Какие системы могут быть использованы для определения победителя на выборах с двумя кандидатами? Каковы сильные и слабые стороны каждой из этих систем?
- Какие критерии могут быть использованы для оценки избирательных систем в выборах с двумя кандидатами?
- Что особенного или уникального в правиле большинства? Какая теорема доказывает эту уникальность?
- Что такое избирательная система с квотой? Как избирательные системы с квотой связаны с правилом большинства и его уникальными чертами?

Мэр Стикивилля

Вопрос-разминка 1.1. Пришло время гражданам Стикивилля выбирать нового мэра. На должность баллотируются два кандидата: Майк Довелл и Лаура Штуцман. Какой метод следует использовать для определения победителя в выборах?

Не показался ли вам этот вопрос-разминка слишком легким? А ответ на него — слишком очевидным? Если так, то, возможно, вам стоит рассмотреть мое предложение о том, как определять победителя в выборах.

У меня в Стикивилле есть друг, его зовут Стэн. Я предлагаю, чтобы для определения результата выборов проголосовали все граждане; это вполне справедливо. Но я думаю, что после того, как голосование окончилось, победителем должен быть признан тот кандидат, за которого проголосовал Стэн, вне зависимости от того, как голосовали остальные.

Вопрос 1.2*. Предположим, что все 101 гражданин Стикивилля пришли на избирательные участки в день выборов. Если 100 из них проголосовали за Довелла, а Стэн проголосовал за Штуцман (свою подругу), то кто победит на выборах согласно методу, описанному в предыдущем параграфе?

Ваш ответ на этот вопрос, вероятно, убедил вас в том, что предложенный мною метод определения победителя в выборах мэра в Стикивилле вовсе не справедлив. В конце концов он совпадает с *диктатурой*, которая не очень демократична по определению. Как вы могли заметить, основной недостаток диктатуры состоит в том, что относительно нее нельзя считать всех избирателей равными. Вы согласны с тем, что мой метод выделяет Стэна (диктатора) довольно особенным образом?

Позвольте мне предложить еще один вариант: Довелл побеждает, независимо от того, как голосуют граждане (включая Стэна).

Вопрос 1.3*. Можно ли считать всех избирателей равными относительно метода «Довелл побеждает»? Объясните ваш ответ.

Несмотря на то, как вы ответили на последний вопрос, вам, возможно, не покажется, что этот второй метод хоть чем-либо лучше предыдущего. Собственно говоря, предложенный мною метод (когда Довелла объявляют победителем вне зависимости от того, как голосовали избиратели) носит довольно неприятное для слуха название *правило навязанного выбора*. В правиле навязанного выбора результат полностью предрешен еще до того, как выборы прошли. В отличие от диктатуры, когда учитывается хотя бы голос диктатора, в правиле навязанного выбора не играют роли ничьи голоса. Поскольку результат известен заранее, правило подвержено другому недостатку, нежели диктатура — относительно него не равны *кандидаты*. Мало сказать, что у Довелла есть преимущество в описанных выше выборах — он просто не может проиграть, даже если все проголосуют за Штуцман.

Позвольте мне предложить еще одну схему для определения победителя на выборах мэра Стикивилля: каждый избиратель опускает бюллетень за того кандидата, которого он хочет видеть победителем в выборах. Затем подсчитываются голоса за каждого из кандидатов, и тот из них, кто набрал *наименьшее* число голосов, будет объявлен

*Вопросы со звездочкой предназначены для того, чтобы помочь оценить, насколько вы разобрались в основных понятиях и определениях, прежде чем вы перейдете к более сложному материалу. Частичные или полные ответы на эти вопросы приведены в конце каждой главы, мы предлагаем вам использовать эти ответы для контроля вашей работы.

победителем. (Неудивительно, что этот метод называется *правилом меньшинства*.)

Вопрос 1.4*. Предположим теперь, что опять все 101 гражданин Стикивилля пришли на избирательные участки, при этом 100 человек проголосовали за Довелла и 1 (Стэн) — за Штуцман. Кто победит согласно правилу меньшинства?

Вопрос 1.5*. Предположим, что Стэн убедил 50 из 100 голосовавших за Довелла изменить свое мнение и проголосовать за Штуцман. Кто победит согласно правилу меньшинства в этом случае?

Вопрос 1.6*. Равны ли все избиратели относительно этого правила? Равны ли все кандидаты относительно этого правила? Объясните ваш ответ.

Вопрос 1.7. Повышаются или понижаются шансы кандидата, если он получает дополнительные голоса, когда принято правило меньшинства? Объясните ваш ответ.

Анонимность, нейтральность и монотонность

В предыдущем разделе мы рассмотрели три различных метода определения победителя на выборах мэра в Стикивилле. Такие методы обычно называют *избирательными системами*. При этом важно заметить, что эта терминология относится не только к способу, по которому подаются голоса на отдельно взятых выборах, но также к способу, по которому определяется победитель на выборах исходя из набора индивидуальных бюллетеней.

Один из способов оценить справедливость данной избирательной системы — указать некоторые желаемые свойства, которыми, по нашему мнению, должна обладать система, а затем выяснить, обладает ли она в действительности этими свойствами. Напомним, что мы делали это для каждой из трех рассмотренных в предыдущем разделе избирательных систем. На самом деле свойства, которые мы указали, хорошо известны; для них есть точные названия и определения, которые мы сейчас приведем.

Определение 1.8.

- Избирательная система называется *анонимной*, если относительно нее все избиратели равны. Это означает, что если любые два избирателя обменяются бюллетенями, исход выборов останется прежним.
- Избирательная система называется *нейтральной*, если относительно нее оба кандидата равны. Это означает, что если *каждый* избиратель изменит свой выбор в пользу другого кандидата, результат выборов изменится соответственно — победивший кандидат проиграет, а проигравший кандидат победит. (А в случае равного распределения голосов изменение выбора каждого избирателя никак не повлияет на исход выборов.)
- Избирательная система называется *монотонной*, если победивший кандидат не сможет проиграть, получив дополнительные голоса (и не потеряв уже имеющиеся), а проигравший кандидат не сможет победить, потеряв голоса (и не получив новые).

Вопрос 1.9*. Предположим, трое детей, Зоэ, Эмма и Каден, хотят решить, кто из их родителей — Паоло или Карина — должен планировать ближайший семейный отпуск. Чтобы принять такое решение, они договорились провести выборы согласно избирательной системе, придуманной их другом Кларком (который, кстати, в прошлый раз во время семейного отпуска ездил в Диснейленд). В таблице 1.1 перечислены три из возможных комбинаций голосов Зоэ, Эммы и Кадена, а также исход выборов, который предусмотрен избирательной системой Кларка для каждой комбинации. (В таблице П означает голос за Паоло, а К — за Карину.)

Таблица 1.1

Результаты голосования согласно избирательной системе Кларка

Зоэ	Эмма	Каден	Победитель
П	К	К	П
П	П	К	К
К	К	П	К

(а) Каким из трех свойств, перечисленных в определении 1.8, обладает избирательная система Кларка? Объясните ваш ответ.

(б) Эквивалентна ли избирательная система Кларка какой-нибудь из трех рассмотренных нами избирательных систем? Почему?

Вопрос 1.10*. Предположим, вы хотите привести пример, который убедит вашего друга, что некоторая избирательная система *не* анонимна. Какими особенностями, в соответствии с определением 1.8, должен обладать ваш пример?

Вопрос 1.11. Используйте ваш ответ на вопрос 1.10, чтобы четко объяснить, почему диктатура не анонимна.

Вопрос 1.12. Четко объясните, почему диктатура нейтральна и монотонна.

Вопрос 1.13. Каким из трех свойств, перечисленных в определении 1.8, удовлетворяет правило навязанного выбора? Каким не удовлетворяет? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваши ответы.

Вопрос 1.14. Каким из трех свойств, перечисленных в определении 1.8, удовлетворяет правило меньшинства? Каким не удовлетворяет? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваши ответы.

Вопрос 1.15. Систематизируйте свойства всех трех избирательных систем, которые мы рассмотрели к этому моменту, заполнив следующую таблицу:

	Анонимность	Нейтральность	Монотонность
Диктатура	Нет	Да	Да
Правило навязанного выбора			
Правило меньшинства			

Правило большинства и теорема Мэя

К этому времени у вас могло возникнуть ощущение, что мы уже достаточно долго кружим около главной темы. В некотором смысле, вы правы. Мы до сих пор не только не нашли совершенной избирательной системы для выборов мэра в Стикивилле, но даже не рассмотрели самого очевидного решения.

Если только вы не хотели показаться оригиналом, ваш ответ на вопрос-разминку 1.1 был приблизительно таким: каждый из граждан Стикивилля должен отдать голос либо за Довелла, либо за Штуцман. После этого нужно подсчитать голоса за каждого из кандидатов, и тот из них, кто получил наибольшее число голосов, должен быть объявлен победителем. Если вы особенно проницательны, вы, возможно, добавили замечание о том, как разрешается вопрос в случае равного распределения голосов. Пока нас это не будет беспокоить. Мы просто примем соглашение, что если голоса распределятся поровну, то будет применена отдельная дополнительная процедура.

Как бы то ни было, избирательная система, описанная в предыдущем абзаце, известна как *правило большинства*. Кажется очевидным, что правило большинства гораздо более разумно, чем любая из рассмотренных нами систем. А как обстоят дела с тремя желаемыми условиями, которые мы обсудили — анонимностью, нейтральностью и монотонностью? Оказывается, правило большинства удовлетворяет им всем!

Вопрос 1.16. Запишите ясное и точное объяснение, почему правило большинства анонимно, нейтрально и монотонно.

Итак, в конце концов мы нашли избирательную систему, использование которой кажется вполне допустимым, по крайней мере, она удовлетворяет разумно определенным стандартам. Теперь возникает естественный вопрос: существуют ли другие (кроме правила большинства) избирательные системы для выборов с двумя кандидатами, которые также удовлетворяют этим стандартам? Оказывается, в 1952 г. математик Кеннет Мэй ответил на этот вопрос в статье, содержащей следующую теорему:

Теорема Мэя. *В случае выборов, в которых участвуют два кандидата и нечетное число избирателей, правило большинства — единственная избирательная система, которая анонимна, нейтральна, монотонна и не допускает возможности равного распределения голосов.*

Вопрос 1.17. Почему в случае выборов с двумя кандидатами особенно важно, чтобы избирательная система не допускала возможности равного распределения голосов?

На самом деле теорема Мэя — простое следствие другой теоремы, относящейся к системам с квотами, которые мы рассмотрим ниже.

Системы с квотой

Определение 1.18. Избирательная система называется *системой с квотой*, если существует некоторое число q, называемое *квотой*, такое, что кандидат может быть объявлен победителем в выборах, если и только если он(а) получает по меньшей мере q голосов.

Следует сделать несколько замечаний.

- В математике выражение «если и только если» имеет специальный смысл. В приведенном выше определении оно означает, что
  - если кандидат получит не менее q голосов, то он будет объявлен победителем в выборах;
  - если кандидат не получит не менее q голосов, то он не будет объявлен победителем в выборах.
- Когда для выборов с двумя кандидатами принята система с квотой, может случиться так, что на выборах окажутся два победителя (если оба кандидата достигли квоты) или два проигравших

(если ни один из кандидатов не достиг квоты). В любом из этих случаев должна быть применена отдельная процедура.

- Важно заметить, что в системе с квотой сама квота может зависеть от числа проголосовавших избирателей. Например, в штате Флорида любое предложение ввести новые налоги или пошлины должно быть одобрено двумя третями проголосовавших. Таким образом, если 900 граждан Флориды приняли участие в голосовании по этому предложению, то для того, чтобы оно было принято, требуется 600 «Да»; значит, квота системы будет равна 600. Но если проголосовали 900 000 граждан Флориды, то квота системы будет равна 600 000, а не 600.

Вопрос 1.19*. Предположим, что граждане Стикивилля решили использовать систему с квотой для выборов нового мэра. Каким будет результат выборов в каждом из следующих сценариев?

(а) Квота = 51; Довелл получил 51 голос, а Штуцман — 50.
(б) Квота = 40; Довелл получил 51 голос, а Штуцман — 50.
(в) Квота = 60; Довелл получил 51 голос, а Штуцман — 50.
(г) Квота = 101; Довелл получил 100 голосов, а Штуцман — 1.
(д) Квота = 0; другой информации нет.

Вопрос 1.20*. Можно ли назвать избирательную систему Кларка из вопроса 1.9 системой с квотой? Объясните ваш ответ.

Вопрос 1.21. Какие из четырех рассмотренных нами избирательных систем (диктатура, правило навязанного выбора, правило меньшинства, правило большинства) являются системами с квотой? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ для каждой системы.

Теперь мы готовы рассмотреть следующую теорему, из которой вытекает теорема Мэя.

Теорема 1.22. *Если избирательная система на выборах с двумя кандидатами анонимна, нейтральна и монотонна, то это система с квотой.*

Доказывать утверждение вроде теоремы 1.22 — все равно, что распутывать детективную историю. Наш подозреваемый, неизвестная избирательная система, которую мы обозначим V, оставил за собой улики, которые позволят нам сделать заключение, что вне всяких сомнений, V — действительно система с квотой. Первые три улики состоят в том, что V анонимна, нейтральна и монотонна. Кроме того, нам известно, что для любой комбинации голосов в выборах с двумя кандидатами V должна позволять нам точно определить, какой кандидат (или кандидаты) побеждает. (Собственно говоря, для этого и предназначена избирательная система.) Помня об этом, все, что мы должны сделать, — задать V нужные вопросы. Ответы на них помогут определить величину, которая *может* служить квотой для V. Как только мы найдем эту потенциальную квоту, скажем, q, нам останется только убедиться, что V — не просто произвольная избирательная система, а на самом деле система с квотой, равной q.

Следующий вопрос относится к тому, какую информацию можно попытаться извлечь из V, и как использовать эту информацию для отыскания возможной квоты системы V.

Вопрос 1.23. Предположим, что для выборов с двумя кандидатами, Джен и Брайаном, вам известно следующее о системе V. (Пусть Джоэль и Грейс — двое из многих избирателей, принявших участие в выборах.)

- Если никто не проголосовал за Джен, то согласно V Джен *не будет* выбрана победителем.
- Если только Джоэль проголосовал за Джен, то согласно V Джен *не будет* выбрана победителем.
- Если Джоэль и Грейс проголосовали за Джен, то согласно V Джен *будет* выбрана победителем.

Используя только эту информацию и тот факт, что V анонимна, нейтральна и монотонна, можете ли вы заключить, что V — система с квотой? Если это так, то чему может быть равна квота? Приведите убедительные доводы, чтобы подтвердить ваш ответ. Будьте готовы указать точно, в каком месте ваших рассуждений вы использовали каждое из свойств анонимности, нейтральности и монотонности. (*Подсказка.* Возможно, вы захотите вернуться и внимательно перечитать определение 1.18.)

Вопрос 1.23 показывает, что как только мы извлекли необходимую информацию, V начинает сильно напоминать систему с квотой. Конечно же, в этом вопросе вся нужная информация была нам преподнесена на блюдечке с голубой каемочкой. Мы не можем ожидать, что будем настолько удачливы всегда, но, как мы уже заметили, мы можем найти всю нужную информацию, просто задавая V правильные вопросы.

Вопрос 1.24*. Рассмотрим выборы, в которых участвуют два кандидата, A и B, и n избирателей, которых мы обозначим $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. (Заметьте, что n обозначает некоторое произвольное число избирателей.) Предположим, что мы задали V следующую последовательность вопросов относительно выборов:

- Если никто не проголосует за кандидата A, будет ли он объявлен победителем?
- Если только v_1 проголосует за кандидата A, будет ли он объявлен победителем?
- Если v_1 и v_2 проголосуют за кандидата A, будет ли он объявлен победителем?
- Если v_1, v_2 и v_3 проголосуют за кандидата A, будет ли он объявлен победителем?
- ....
- Если $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ и v_n проголосуют за кандидата A, будет ли он объявлен победителем?

Объясните, как можно использовать ответы системы V на эти вопросы, чтобы определить величину, которая может служить квотой для V. Можно ли определить эту возможную квоту, не задавая *всех* этих вопросов? Почему?

Вопрос 1.25*. Предположим, что метод, предложенный в вопросе 1.24, был использован для того, чтобы определить возможную квоту, скажем, q, для V. Объясните четко, почему каждое из следующих утверждений должно быть истинным. В ваших ответах должен использоваться тот факт, что V анонимна, нейтральна и монотонна.

(а) Если ровно q избирателей (неважно, кто именно) проголосуют за кандидата A, то согласно системе V он будет объявлен победителем.

(б) Если больше q избирателей (неважно, кто именно) проголосуют за кандидата A, то согласно системе V он будет объявлен победителем.

(в) Если ровно $q-1$ избирателей (неважно, кто именно) проголосуют за кандидата A, то согласно системе V он не будет объявлен победителем.

(г) Если меньше $q-1$ избирателей (неважно, кто именно) проголосуют за кандидата A, то согласно системе V он не будет объявлен победителем.

(д) Все перечисленные выше заключения применимы и к кандидату B.

Вопрос 1.26. Используйте ваши ответы на вопросы 1.24 и 1.25, чтобы четко объяснить, почему теорема 1.22 справедлива. Другими словами, объясните, почему в выборах с двумя кандидатами любая анонимная, нейтральная и монотонная избирательная система должна быть системой с квотой.

Вернемся к теореме Мэя

Теперь, когда мы понимаем, в чем смысл теоремы 1.22 и почему она верна, мы можем, наконец, приступить к теореме Мэя. Напомним, что в теореме 1.22 утверждается, что в выборах с двумя кандидатами любая анонимная, нейтральная и монотонная система должна быть системой с квотой. (Кстати, нетрудно видеть, что обратное к этому утверждению тоже верно; т. е. любая система с квотой в действительности анонимна, нейтральна и монотонна.) Теорема Мэя говорит нам, что если мы дополнительно предположим, что число избирателей нечетно и что ничейный исход недопустим, то система не только должна быть системой с квотой, но даже должна совпадать с правилом большинства. Таким образом, мы докажем теорему Мэя, если убедимся, что для выборов с двумя кандидатами и нечетным числом избирателей правило большинства — это единственная система, которая исключает ничейный результат.

Вопрос 1.27*. Предположим, что в выборах с двумя кандидатами и n избирателями используется правило большинства (система с квотой). Опишите, как найти квоту в этом случае. (*Подсказка.* Этот вопрос гораздо легче, чем кажется на первый взгляд. Вы уже очень много знаете о правиле большинства, так что используйте вашу интуицию и не забывайте, что квота должна быть целым числом.)

Теперь мы докажем, что для нечетного числа избирателей единственная система с квотой, исключающая ничейный результат — это система с квотой, которую вы нашли в вопросе 1.27.

Вопрос 1.28*. Предположим, что на выборах с двумя кандидатами используется система с квотой q. Пусть a и b обозначают число голосов, набранных двумя кандидатами A и B соответственно.

(а) Как a и b должны соотноситься с q, чтобы выборы кончились ничейным результатом?

(б) Как a и b должны соотноситься с q, чтобы выборы *не* кончились ничейным результатом?

Вопрос 1.29. (а) Предположим, что на выборах с двумя кандидатами и n избирателями используется система с квотой q.

(б) Предположим, что q больше, чем квота, которую вы нашли для правила большинства в вопросе 1.27. Приведите пример, который показывает, что в таком случае выборы допускают ничейный результат.

(в) Повторение пункта (а), только на этот раз в предположении, что q меньше квоты для правила большинства.

(г) Предположим, что n четно и что q в точности равно квоте, которую вы нашли для правила большинства в вопросе 1.27. Приведите пример, который показывает, что в таком случае выборы допускают ничейный результат.

(д) Предположим, что n нечетно и что q в точности равно квоте для правила большинства. Объясните, почему в таком случае выборы *не могут* окончиться ничьей.

Вопрос 1.30. Подведите итог всему изученному в этом разделе, написав четкое объяснение того, как теорема 1.22 влечет теорему Мэя. То есть объясните, как теорема Мэя следует из теоремы 1.22.

Вопрос 1.31. (а) Существует ли система с квотой для выборов с двумя кандидатами, которая исключает возможность ничейного исхода, когда избирателей — четное число.

(б) Объясните, почему предположение о том, что число избирателей нечетно, — существенная часть теоремы Мэя.

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 1.32. Мы хотели бы, чтобы избирательные системы удовлетворяли некоторым желательным условиям, и в этой главе мы их обсуждали. Придумайте еще какое-нибудь желательное условие, которое мы не обсуждали, и объясните, почему вы считаете, что будет хорошо, если избирательная система будет ему удовлетворять.

Вопрос 1.33. Пастор церкви Long Winds прочитал однажды особенно длинную проповедь, после чего паства поставила на голосование вопрос о его отзыве. Если две трети голосующих проголосуют за отзыв, то пастора понизят до дворника, а дворника повысят до пастора. В противном случае пастор по-прежнему будет проповедовать, а дворник — мести двор.

(а) Объясните, почему процедуру подведения итогов такого голосования можно рассматривать как систему с квотой в соответствии с определением, данным в этой главе.

(б) Предположим, что супруги Грег и Гейл, не сговариваясь, проголосовали в церкви по-разному, причем Грег голосовал за отзыв пастора, а Гейл — против. Когда они узнали об этом, Грег сказал Гейл: «Ну и ладно, я думаю, наши голоса взаимоуничтожаются!» Прав ли Грег, или все-таки противоположные голоса его самого и его жены могут повлиять на результат? Приведите убедительный довод или пример, подтверждающий ваш ответ.

Вопрос 1.34. Напишите краткую биографию Кеннета Мэя и включите в нее его основные достижения и в теории избирательных систем и за ее пределами.

Вопрос 1.35. Если в выборах президента Соединенных Штатов участвуют только два кандидата, то определяет ли правило большинства победителя на выборах? Объясните ваш ответ.

Вопрос 1.36. Если в выборах президента Соединенных Штатов участвуют только два кандидата, то определяет ли правило большинства победителя на выборах в Мичигане? А в Небраске? Объясните ваш ответ.

Вопрос 1.37. Исследуйте результаты выборов президента США в 1876 г. Напишите отчет о ваших изысканиях и объясните, как эти результаты соотносятся с нашим исследованием правила большинства.

Вопрос 1.38. (а) Если бы конгресс США проводил голосование с целью преодолеть вето президента, то определяло ли бы правило большинства, закончится эта попытка успехом или нет? Объясните ваш ответ

(б) Если бы конгресс США проводил голосование с целью преодолеть вето президента, то определяла ли бы система с квотой, закончится эта попытка успехом или нет? Если да, чему была бы равна квота системы?

Вопрос 1.39. Найдите журнал, газету или сайт в Интернете, где описаны выборы с двумя кандидатами (но не выборы президента США), в которых победитель определяется по правилу большинства. Запишите подробный отчет о ваших изысканиях.

Вопрос 1.40. Найдите журнал, газету или сайт в Интернете, где описаны выборы с двумя кандидатами (но не выборы президента США), в которых победитель *не* определяется по правилу большинства. Запишите подробный отчет о ваших изысканиях.

Вопрос 1.41. Исследуйте процесс избрания папы в римской католической церкви. Кто кандидаты? Кто голосует? Избирают ли папу по правилу большинства? Запишите подробный отчет о ваших изысканиях.

Ответы на вопросы

1.2. Поскольку учитывается лишь голос Стэна, победит Штуцман.

1.3. Относительно метода «Довелл побеждает» все избиратели равны, поскольку в нем не учитываются *ничьи* голоса.

1.4. Штуцман победит, поскольку она набрала меньше голосов, чем Довелл.

1.9. (а) Ни одно из трех условий не удовлетворяется. Первые две строки табл. 1.1 показывают, что система Кларка не монотонна; первая и третья — что она не анонимна, а последние две — что он не нейтральна.

(б) Система Кларка не эквивалентна диктатуре, поскольку ни про Зоэ, ни про Эмму, ни про Кадена нельзя сказать, что исход выборов всегда совпадает с их мнением. Кроме того, она не эквивалентна правилу навязанного выбора, поскольку для разных комбинаций голосов победитель не всегда одинаковый. И наконец, система Кларка не эквивалентна правилу меньшинства, поскольку в третьей строке Паоло набирает меньше голосов, чем Карен, однако все равно проигрывает.

1.10. В вашем примере должны быть представлены две комбинации голосов, которые отличаются друг от друга только тем, что поменялись местами индивидуальные голоса двух избирателей, но тем не менее приводят к различным результатам выборов.

1.15. Таблица может быть заполнена таким образом:

	Анонимность	Нейтральность	Монотонность
Диктатура	Нет	Да	Да
Правило навязанного выбора	Да	Нет	Да
Правило меньшинства	Да	Да	Нет

1.19. (а) Довелл победит (а Штуцман проиграет), поскольку только Довелл наберет голосов не меньше, чем квота.

(б) Между Довеллом и Штуцман будет ничья, поскольку оба они наберут больше голосов, чем квота, и оба будут объявлены победителями.

(в) Между Довеллом и Штуцман будет ничья, поскольку оба они наберут меньше голосов, чем квота, и оба будут объявлены проигравшими.

(г) Между Довеллом и Штуцман будет ничья, поскольку оба они наберут меньше голосов, чем квота, и оба будут объявлены проигравшими.

(д) Между Довеллом и Штуцман будет ничья, поскольку вне зависимости от того, сколько голосов они наберут, оба они достигнут или даже превысят квоту, а значит, будут объявлены победителями.

1.20. Избирательная система Кларка не может быть системой с квотой. Есть только 4 возможности для квоты: 0, 1, 2 и 3. Если бы квота была равна 0 или 1, то в соответствии с табл. 1.1, все три комбинации голосов приводили бы к ничьей. Если бы квота была равна 2, то Карина бы побеждала (а Паоло проигрывал) в первой строке, а Паоло побеждал (и Карина проигрывала) во второй строке. Если же квота была бы равна 3, то ни одна комбинация не определяла бы победителя.

1.24. Первый вопрос, на который V отвечает «да», будет соответствовать квоте системы. Например, если V отвечает «да» на первый вопрос, то квота будет равна 0, и избирательная система всегда будет приводить к ничьей, когда оба кандидата признаются победителями. Но если V отвечает «нет» на первый вопрос и «да» на второй, то квота будет равна 1. Если V отвечает «нет» на все вопросы, то квотой может быть любое число больше n. В этом случае система всегда будет приводить к ничьей, когда никто не признан победителем.

1.25. В ответах на пункты (а) и (в) должна быть использована анонимность, в ответах на пункты (б) и (г) — монотонность, в ответе на пункт (д) — нейтральность.

1.27. Если n четно, то квота для правила большинства равна $(n/2) + 1$. Если n нечетно, то квоту можно определить, вычислив $n/2$ и округлив до ближайшего большего целого числа.

1.28. (а) Для того, чтобы выборы окончились ничьей, либо и a и b должны быть больше или равны q, либо и a, и b должны быть меньше q.

(б) Для того, чтобы выборы не окончились ничьей, одно из чисел a и b должно быть больше или равно q, а другое — меньше q.

ГЛАВА 2

Перо, Нейдер и другие затруднения

Центральные вопросы

- В чем состоит правило относительного большинства для определения победителя в выборах? Чем оно отличается от правила большинства?
- Что представляет собой правило Борда́? Как оно определено и когда обычно используется?
- В чем состоит критерий большинства? Удовлетворяет ли ему относительное большинство? А правило Борда́?
- Как связаны относительное большинство и правило Борда́ с теоремой Мэя?

Вопрос-разминка 2.1. Итог голосования в штате Флорида во время выборов президента США в 2000 г. приведен в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Выборы президента США во Флориде в 2000 г.

Кандидат	Число голосов
Джордж Буш	2 912 790
Ал Гор	2 912 253
Ральф Нейдер	97 488
Другие кандидаты	40 579

(а) Набрал ли кто-нибудь из кандидатов *большинство* (т. е. больше половины) голосов на этих выборах?

(б) Как вы думаете, мог ли во Флориде Ал Гор набрать больше голосов, чем Джордж Буш, если бы кроме них, других кандидатов в президентских выборах 2000 г. в США не было?

Как вы помните, борьба на выборах президента США в 2000 г. была очень жесткой. Из-за подсчета и пересчета голосов во Флориде окончательный результат был объявлен спустя более месяца после дня выборов. В конце концов, в этом штате с минимальным перевесом одержал победу Джордж Буш. В результате он победил и в национальных выборах и стал 43-м президентом США.

Многие политологи полагают, что если бы Ральф Нейдер не баллотировался, то во Флориде, а значит, и в США, победил бы Гор. Нейдер был *кандидатом-«вредителем»*, другими словами, хотя у него не было реальных шансов выиграть, тем не менее он повлиял на исход выборов.

Похожая ситуация имела место на выборах президента США в 1992 г. Тогда бизнесмен из Техаса Росс Перо получил около 19 % голосов американцев. Президентом был избран Билл Клинтон, хотя 57 % голосов было отдано за других кандидатов [1].

Эффект Перо в 1992 г. проявился не так явно, хотя многие признают, что если бы Перо не выставил свою кандидатуру, то у оставшихся соперников были бы почти равные шансы. В любом случае, у третьих кандидатов есть потенциальная возможность внести такие трудности в процесс выборов, какие не могут появиться, если в выборах участвуют только два кандидата. В этой главе мы исследуем эти затруднения и некоторые способы из решения.

Метод относительного большинства

Как мы видели, Джордж Буш не получил большинства голосов во Флориде на выборах президента США в 2002 г. Правда, он получил (во Флориде) больше голосов, чем любой другой кандидат. Чтобы более точно описать эту ситуацию, мы будем говорить, что Буш получил *относительное большинство* голосов во Флориде.

Вопрос 2.2*. (а) Объясните, почему для выборов с двумя кандидатами термины *большинство* и *относительное большинство* означают в точности одно и то же.

(б) Объясните, почему для выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов, термины *большинство* и *относительное большинство* не означают в точности одно и то же.

Как мы видели, для того вида выборов, который мы изучали в гл. 1 (только с двумя кандидатами), не было нужды проводить различие

[1] Здесь важно заметить, что при определении результата президентских выборов США победителем не объявляют того кандидата, который просто набрал большинство голосов. Вместо этого используют систему, известную как *коллегия выборщиков*. Мы подробно рассмотрим ее в гл. 8. На самом деле на выборах 2000 г. Буш одержал полную победу, хотя этому противоречит тот факт (и его признают даже сторонники Буша), что в целом по стране Гор получил больше голосов. Правда, и в этом смысле у соперников были почти одинаковые результаты: Гор получил 50 999 897 голосов, а Буш 50 456 002.

между победителями по правилу большинства и по правилу относительного большинства. Собственно говоря, мы использовали определение относительного большинства (не вводя этого термина), когда определяли правило большинства в гл. 1.

Вопрос-разминка 2.1 показывает, что ситуация усложняется, когда в выборах участвуют более двух кандидатов. Поскольку теперь кандидат может победить, не набрав большинства голосов, мы должны разделять случаи, когда кандидат получает *наибольшее* число голосов, и *более половины* голосов. Для этого мы примем определение:

Определение 2.3. Рассмотрим выборы, в которых участвуют больше двух кандидатов.

- *Правило большинства* — это избирательная система, где победителем объявляют кандидата, получившего больше половины голосов, если такой кандидат существует. Если ни один из кандидатов не получает больше половины голосов, то правило большинства приводит к ничейному результату, и не побеждает никто.
- Метод *относительного большинства* (или для краткости, *относительное большинство*) — это избирательная система, где победителем объявляют кандидата, получившего наибольшее число голосов, даже если это число меньше половины общего числа проголосовавших. Относительное большинство приводит к ничейному результату, (при этом оказывается несколько победителей), когда два или кандидатов набирают абсолютно одинаковое число голосов, и оно больше, чем число голосов, полученное любым другим кандидатом.

Вопрос 2.4*. (а) Для какого из двух методов определения 2.3 вероятнее ничья?

(б) Если кандидат побеждает в выборах согласно правилу большинства, означает ли это, что он обязательно победит согласно методу относительного большинства?

(в) Если кандидат побеждает в выборах согласно правилу относительного большинства, означает ли это, что он обязательно победит согласно правилу большинства?

Вопрос 2.5*. 7 октября 2003 г. жители штата Калифорния принимали участие в перевыборах тогдашнего губернатора Грея Дэвиса. В результате его место занял голливудский актер и в прошлом чемпион по бодибилдингу Арнольд Шварценеггер. В бюллетенях были перечислены 135 кандидатов на место Дэвиса.

(а) Шварценеггер получил 4 206 217 из 8 657 915 голосов граждан Калифорнии. Удалось ли ему набрать большинство голосов?

(б) Какое наименьшее число голосов было бы достаточно получить Шварценеггеру, чтобы все еще иметь шансы победить согласно методу относительного большинства?

(в) Каким может быть наибольшее число избирателей, не выбравших Шварценеггера из 135 кандидатов, но тем не менее позволяющее ему выиграть выборы?

(г) Используя ваши ответы на вопросы (б) и (в), запишите критический анализ метода относительного большинства. (Вы не обязаны поддерживать представленные вами аргументы, но постарайтесь встать на место критика и попытайтесь представить, какие могут возникнуть соображения против метода относительного большинства.)

Правило Борда́

Хотя результаты значительного числа важных выборов определяются по методу относительного большинства, это лишь одна из рассматриваемых нами избирательных систем. Например, чтобы формировать рейтинги университетских спортивных команд, при опросах часто опираются на метод, в котором используется система очков. Этот метод известен под названием *правило Борда́*, в честь Жана Шарля де Борда́, французского астронома, математика, офицера армии и первооткрывателя в области теории голосования без относительного большинства.

Вопрос 2.6*. В таблице 2.2 приведена выдержка из результатов 20 лучших университетских футбольных команд согласно опросу, проведенному Associated Press до начала сезона 1971 г.

(а) Предположим, что только команды, которые были названы лучшими, вошли в таблицу. Какая команда получила бы первое место по результатам опроса, если бы для формирования рейтинга учитывалось только число опрошенных, назвавших команду лучшей?

(б) Получила ли команда из ответа на вопрос (а) *большинство* голосов опрошенных, назвавших команду лучшей?

Пока мы еще не узнали многого о правиле Борда́, но одно важное наблюдение можем сделать прямо сейчас, изучая ответ на вопрос 2.6. Если принято правило Борда́, то может случиться так, что большинство проголосовавших будут считать кандидата (или, как в этом случае, спортивную команду) самым предпочтительным, но тем не менее он не победит на выборах! Если избирательная система может проявлять такое неприятное свойство, то мы говорим, что она нарушает *критерий большинства*. (Мы определим этот термин более точно чуть позже). И это еще не все, в правиле Борда́ может проявить-

Таблица 2.2

20 лучших университетских команд согласно опросу AP до начала сезона 1971 г.

Место	Команда	Очки	Число опрошенных, назвавших команду лучшей
1	Notre Dame	885	15
2	Nebraska	870	26
3	Texas	662	5
4	Michigan	593	1
5	Southern Cal	525	1
6	Auburn	434	1
...	...	...	(все 0)
20	Northwestern	58	1

ся множество других странностей. Например, в списке футбольных команд, занявших согласно опросу Associated Press до начала сезона 1944 г. первые 25 мест, Nebraska получила относительное большинство голосов опрошенных, назвавших команду лучшей (хотя и не большинство), но в рейтинге заняла лишь *четвертое* место!

К этому моменту у вас может возникнуть ощущение, что это довольно странная и порочная система, — кандидат, которому отдали предпочтение больше половины проголосовавших, может не победить на выборах. Возможно, вы думаете, что человек, который изобрел правило Бордá — большой чудак, раз уж он придумал такую нелепую систему. У вас не вызывает удивления тот факт, что многие математики и политологи считают, что правило Бордá вовсе не странное и тем более не порочное, что на самом деле оно предпочтительней метода относительного большинства? Мы рассмотрим такую точку зрения подробнее несколько позже, а вначале нам нужно обратить внимание на некоторые детали, которые не беспокоили нас, пока мы рассматривали выборы только с двумя кандидатами.

Порядки предпочтения

Заметим, что в выборах с двумя кандидатами то, как избиратель ранжирует кандидатов от наиболее до наименее предпочтительного, определяется тем, за кого он проголосовал. Вспомним, например, выборы мэра в Стикивилле из гл. 1. Если я голосую за Штуцман, это означает, что я отдаю ей первое место, а Довеллу — второе. Поскольку кандидатов всего двое, то как только станет известно, за кого я проголосовал, вы сразу узнаете все возможное о моих предпочтениях относительно кандидатов.

Но теперь предположим, что вам как-то удалось узнать, что на выборах президента США в 2000 г. я голосовал за Буша. Понятно, что на второе и третье места я должен бы был поставить Гора и Нейдера (мы не будем принимать во внимание остальных многочисленных не столь популярных кандидатов), однако в каком порядке? Если бы Буш не победил, кого бы я поставил на второе место? А кого я предпочел бы в последнюю очередь?

Конечно же, я знаю ответ на этот вопрос, но вот вы — нет. Зная лишь то, что я проголосовал за Буша, вы никак не можете догадаться о моих предпочтениях относительно Гора и Нейдера. Для того, чтобы выяснить это, либо вы должны быть телепатом (это так?), либо я должен дать вам больше информации. Приняв второй вариант, я мог бы предоставить вам *порядок предпочтений* (иногда его называют *бюллетенем предпочтений* или *списком предпочтений*). С учетом того, что я проголосовал за Буша, этот порядок будет одним из следующих:

Место	Кандидат
1	Буш
2	Гор
3	Нейдер

Место	Кандидат
1	Буш
2	Нейдер
3	Гор

Для экономии чернил я мог бы записать мои предпочтения в кратком виде, используя обозначение Б $\succ$ Г $\succ$ Н для порядка предпочтений слева и Б $\succ$ Н $\succ$ Г для порядка предпочтений справа. (Заметим, что символ $\succ$ аналогичен знаку «больше», который мы используем, сравнивая числа; он означает «предпочтительнее» и дает возможность компактно перечислять предпочтения.)

Вопрос 2.7*. (а) Предположим, что вам неизвестно, за кого я голосовал на выборах президента США в 2000 г. Сколькими способами я мог бы упорядочить Буша, Гора и Нейдера в таком случае?

(б) Запишите все возможные способы ранжировки из вопроса (а). Для каждого из них представьте и таблицу, и запись с использованием символа $\succ$.

(в) Предположим, что я решил включить в мой список кандидата от партии реформ Пата Бьюкенена. Сколько тогда может быть способов ранжировки?

(г) Сколькими способами я мог бы упорядочить Буша, Гора, Нейдера и Бьюкенена при условии, что на первое место я поставил Буша?

Важно заметить, что во многих избирательных системах во внимание принимается только кандидат, возглавляющий список предпочтений избирателя. Например, если приняты правила большинства или относительного большинства, поданный бюллетень позволяет мне проголосовать за того, кого я поставил на первое место. Для себя я могу определять или не определять мои предпочтения относительно остальных кандидатов. Возможно, я просто думаю: «Я хочу, чтобы победил Буш, и мне не важны все остальные». А возможно, я могу определиться со своими предпочтениями относительно Буша и Гора, но не имею достаточной информации о других кандидатах, чтобы составить их рейтинг. В каждом случае для принятой избирательной системы от меня не нужна никакая дополнительная информация. Я просто должен определиться, кого поставить на первое место.

Тем не менее, даже те избирательные системы, которые учитывают только самый предпочтительный выбор проголосовавших, часто дают итоговый рейтинг кандидатов. Вернемся, например, к выборам президента США 2000 г. Для Флориды метод относительного большинства дает ранжировку Б $\succ$ Г $\succ$ Н $\succ$ ..., поскольку Буш получил больше голосов, чем Гор, а Гор — больше голосов, чем Нейдер, который, в свою очередь, получил больше голосов, чем любой из оставшихся кандидатов. Ранжировка, которую дает избирательная система, называется *порядком общественных предпочтений* для баллотирующихся кандидатов. Считается, что согласно принятой избирательной системе такой порядок кандидатов лучше всего отражает волеизъявление избирателей. Конечно же, победитель в выборах возглавляет список общественных предпочтений.

Вопрос 2.8*. Предположим, что Филиц, Джеральд, Элен и Иван борются за желанное место президента Болгарской ассоциации актеров, озвучивающих мультфильмы (БААОМ). Списки предпочтений каждого из 27 членов организации представлены в табл. 2.3. (Такая таблица называется сводкой предпочтений. В верхней части каждого столбца стоит число избирателей, высказавший такой порядок предпочтений. Например, первый столбец указывает, что 12 членов ассоциации выразили такой порядок предпочтений: Ф $\succ$ Д $\succ$ Э $\succ$ И. Заметим еще, что в таблице представлены только четыре из многих возможных для этих выборов порядков предпочтений.)

Таблица 2.3

Сводка предпочтений для выборов в БААОМ

	Число избирателей			
Место	12	7	5	3
1	Ф	Д	Э	И
2	Д	Э	И	Э
3	Э	И	Ф	Д
4	И	Ф	Д	Ф

(а) Каким будет результат выборов согласно правилу большинства?

(б) Каким будет результат выборов согласно правилу относительного большинства?

(в) Каким будет порядок общественных предпочтений, если для выборов принят метод относительного большинства?

Вопрос 2.9. Как вы думаете, соответствует ли победитель по методу относительного большинства в выборах президента БААОМ из вопроса 2.8 воле избирателей лучше всего? Если да, то объясните почему. В противном случае приведите убедительные аргументы в защиту вашей точки зрения, что какой-то другой кандидат будет лучше.

Вопрос 2.10. Один критик метода относительного большинства пишет так:

Может случиться так, что согласно методу относительного большинства победителем в выборах будет объявлен кандидат, которого сколь угодно малый процент избирателей ставят на первое место и сколь угодно большой процент — на последнее.

Напишите рассуждение, которое поддерживает или опровергает эту точку зрения. Используйте сводки предпочтений, чтобы придать силу вашим доводам. (*Подсказка.* Возможно, вы захотите вернуться к вашему ответу на вопрос 2.5.)

Вернемся к Борда́

Напомним, что мы отвлеклись от правила Борда́, выяснив только, что у него есть неприятная особенность — оно может нарушать естественный, казалось бы, критерий большинства. В терминах предыдущего раздела критерий большинства можно определить следующим образом:

Определение 2.11. Мы говорим, что избирательная система удовлетворяет *критерию большинства*, когда выполняется следующее условие: если кандидата назвали первым большинство избирателей, то он оказывается первым в итоговом порядке общественных предпочтений.

Вопрос 2.12*. Доказывают ли результаты голосования в штате Флорида на выборах президента США в 2000 г., что метод относительного большинства нарушает критерий большинства (т. е. не удовлетворяет ему)? Объясните ваш ответ.

Вопрос 2.13. Каким образом работает правило Бордá и почему оно может нарушать критерий большинства? Рассмотрев следующее определение, вы можете удивиться, что в действительности правило Бордá определено очень разумно.

Определение 2.14. Рассмотрим выборы с n кандидатами. Правила Бордá для определения победителя в выборах работает следующим образом:

- Каждый избиратель подает бюллетень, в котором содержится его полный порядок предпочтения для всех кандидатов, участвующих в выборах.
- Для каждого поданного бюллетеня каждому кандидату начисляются очки в соответствии со следующими правилами:
  - Кандидат на первом месте получает $n-1$ очков.
  - Кандидат на втором месте получает $n-2$ очков.
  - Кандидат на третьем месте получает $n-3$ очков.
  - ....
  - Кандидат на последнем (n-м) месте получает $n-n=0$ очков.
- Кандидат, набравший больше всего очков из всех бюллетеней, объявляется победителем (может случиться и так, что победителей будет несколько, если два или более кандидата получат одинаковое число очков, которое больше, чем число очков, набранных любым другим кандидатом). Итоговый общественный порядок предпочтений определяется числом набранных каждым кандидатом очков, упорядоченных от наибольшего к наименьшему (а кандидаты, получившие равное число очков, займут последовательные неразличимые места в общественном порядке предпочтений).

Вопрос 2.15*. Каким будет исход выборов президента БААОМ из вопроса 2.8, если они проводятся по методу правила Бордá? Каким будет итоговый общественный порядок предпочтений?

Вопрос 2.16. Не кажется ли вам определение правила Бордá странным или неразумным? Если это так, объясните почему. В противном случае обсудите видимое противоречие, которое состоит в том, что такая разумно определенная система, как правило Бордá, может нарушать критерий большинства.

Вопрос 2.17. В свете ваших ответов на вопросы 2.8, 2.9 и 2.15, как вы думаете, кто должен победить на выборах президента БААОМ? Приведите убедительные доводы, чтобы подтвердить ваш ответ.

Снова теорема Мэя

В этой главе мы рассматривали две избирательные системы: метод относительного большинства и правило Бордá. Мы оценили справедливость этих систем в основном с помощью критерия большинства. Мы видели, что метод относительного большинства удовлетворяет ему, в то время как правило Бордá — нет.

Но давайте не будем забывать, что у нас есть еще три критерия из гл. 1, которые мы можем использовать для оценки этих систем — анонимность, нейтральность и монотонность. Определение анонимности естественно применяется к ситуации, включающей больше двух кандидатов, в то время как для нейтральности и монотонности требуется легкая модификация:

Определение 2.18.

- Избирательная система называется *анонимной*, если относительно нее все избиратели равны. Это означает, что если любые два избирателя обменяются списками предпочтений, результат выборов (и итоговый общественный порядок предпочтений) останется неизменным.
- Избирательная система называется *нейтральной*, если относительно нее все кандидаты равны. Это означает, что если *все* избиратели в своих индивидуальных списках предпочтений поменяют местами позиции некоторых двух отдельных кандидатов, то позиции этих кандидатов поменяются также и в итоговом общественном порядке предпочтений.
- Избирательная система называется *монотонной*, если изменения в пользу некоторого кандидата в индивидуальных списках предпочтений не приведут к тому, что кандидат из победителя превратится в проигравшего, или к тому, что в итоговом общественном порядке предпочтений он займет более низкое место.

Важно заметить, что в определении 2.18 под *изменениями в пользу кандидата* мы понимаем такие изменения, которые включают только увеличение рейтинга этого кандидата в некоторых или во всех индивидуальных списках предпочтений избирателей.

Вопрос 2.19. Четко объясните, почему в монотонной избирательной системе изменения в индивидуальных списках предпочтений, *неблагоприятные* для некоторого кандидата, никогда не приводят к тому, что рейтинг кандидата в итоговом общественном списке предпочтений *возрастет*.

Вопрос 2.20. Предположим, что результаты президентских выборов в БААОМ из вопроса 2.8 определяются такой избирательной системой, что для 27 списков предпочтений, приведенных в табл. 2.3, она приводит к такому общественному порядку предпочтений: Э $\succ$ $\succ$ Ф $\succ$ Д $\succ$ И.

(а) Если эта система нейтральна, то к какому общественному порядку предпочтений она приведет, если члены БААОМ изменят свои списки предпочтений так, как показано в табл. 2.4?

Таблица 2.4

Обновленная сводка предпочтений БААОМ 1

	Число избирателей			
Место	12	7	5	3
1	Ф	Д	И	Э
2	Д	И	Э	И
3	И	Э	Ф	Д
4	Э	Ф	Д	Ф

(б) Снова предполагая только нейтральность, что вы можете сказать об общественном порядке предпочтений, который получится, если члены БААОМ изменят свои списки предпочтений так, как показано в табл. 2.5?

Таблица 2.5

Обновленная сводка предпочтений БААОМ 2

	Число избирателей			
Место	12	7	5	3
1	Ф	Д	И	Э
2	Д	И	Э	И
3	И	Э	Ф	Ф
4	Э	Ф	Д	Д

(в) Что вы можете сказать об общественном порядке предпочтений, который получится, если члены БААОМ изменят свои списки предпочтений так, как показано в табл. 2.5 ниже, предполагая, что избирательная система нейтральна *и* монотонна?

Вопрос 2.21. (а) Какими свойствами — анонимностью, нейтральностью или монотонностью — обладает метод относительного большинства? Какими из этих трех свойств он не обладает? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваши ответы.

(б) Какими свойствами — анонимностью, нейтральностью и монотонностью — обладает правило Борда́? Какими из этих трех свойств он не обладает? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваши ответы.

(в) Противоречит ли какой-нибудь из ваших ответов на вопросы (а) или (б) теореме Мэя? Объясните ваш ответ.

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 2.22. (а) Является ли метод относительного большинства системой с квотой? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ.

(б) Противоречит ли ваш ответ на вопрос (а) теореме 1.22? Объясните. (*Подсказка.* Используйте ваш ответ на вопрос 2.21.)

Вопрос 2.23. Сколько первых мест должен набрать кандидат, чтобы победить на выборах, если для определения победителя используется правило Борда́? Приведите пример с использованием сводки предпочтений, чтобы подтвердить ваш ответ.

Вопрос 2.24. Напишите краткую биографию Жана Шарля де Борда́, в которую войдут его самые важные достижения и в области теории голосования и вне ее, а также некоторая информация о его армейской службе.

Вопрос 2.25. Предположим, что избирком Стикивилля внес предложение, чтобы следующие выборы мэра проходили согласно правилу Борда́, а не по методу относительного большинства. Основываясь на том, что вы узнали в этой главе, напишите официальное письмо редактору Stickeyville Daily Review в поддержку или против этого предложения. Независимо от вашей позиции по этому вопросу, в вашем письме должны быть представлены доводы за и против каждой системы и особенно отмечен тот факт, что правило Борда́ не удовлетворяет критерию большинства.

Вопрос 2.26. Пусть на выборах президента БААОМ из вопроса 2.8 три избирателя, которым соответствует крайний правый столбец табл. 2.3, изменили свой порядок предпочтений с И ≻ Э ≻ Д ≻ Ф на И ≻ Э ≻ Ф ≻ Д.

(а) Можно ли утверждать, что некоторые избиратели изменили свои предпочтения лишь между Джеральдом и Элен?

(б) Каким будет новый общественный порядок предпочтений в результате выборов согласно правилу Борда́?

(в) В свете вашего ответа на вопрос 2.15 не кажутся ли вам нелепыми ответы на пункты (а) и (б)? Объясните свой ответ.

(г) Не меняя предпочтений между Филицем и Джеральдом или Филицем и Элен ни в одном из индивидуальных порядков предпочтений в табл. 2.3, найдите способ сделать победителем на выборах Филица (так, что он обойдет Джеральда и Элен) согласно правилу Борда́. Другими словами, найдите способ так изменить порядки предпочтений в табл. 2.3, чтобы Филиц победил в выборах согласно правилу Борда́, однако сделайте это таким образом, чтобы не продвигать Филица выше Джеральда или Элен ни в каком из порядков предпочтения, представленных в таблице.

Вопрос 2.27. Предположим, что на выборах президента БААОМ из вопроса 2.8 небольшая группа избирателей крайне против того, чтобы новым президентом стал Филиц. Объясните, как эта небольшая группа избирателей может манипулировать методом относительного большинства, чтобы снизить шансы Филица на победу. (*Подсказка.* Предположим, что избиратели предложат и поддержат другого кандидата. Чьей позиции должен подражать этот кандидат, чтобы сильнее всего повредить кандидатуре Филица?)

Вопрос 2.28. (а) Найдите выборы президента США (исключая выборы 2000, 1992 или 1876 гг.), на которых победивший кандидат набрал относительное большинство, но не большинство голосов американских избирателей.

(б) Найдите выборы президента США (исключая выборы 2000, 1992 или 1876 гг.), на которых победивший кандидат не набрал относительного большинства голосов американских избирателей.

Вопрос 2.29. (а) Как вы думаете, кто победил бы в штате Флорида на выборах президента США в 2000 г., если бы вместо метода относительного большинства было бы принято правило Борда́? Приведите убедительные доводы в защиту вашего ответа. (*Подсказка.* Вам придется сделать некоторые предположения относительно предпочтений тех, кто голосовал за Нейдера. Возможно, вам понадобиться провести некоторые изыскания, чтобы понять, позиция кого из основных претендентов ближе всего была к позиции Нейдера.)

(б) 19 мая 2004 г., примерно за шесть месяцев до выборов президента США 2004 г., кандидат в президенты от демократической партии Джон Кэрри неофициально встретился с Ральфом Нейдером, который месяц спустя выдвинул свою кандидатуру на выборы. Как вы думаете, зачем Кэрри понадобилась эта встреча? Как вы думаете, что обсуждали эти два кандидата?

(в) Как вы думаете, зачем совет руководства республиканской партии агитировал за Нейдера в течение нескольких недель, предшествовавших выборам президента США в 2000 г.?

Вопрос 2.30. Некоторые политологи высказали предположение, что если бы сенатор Аризоны Джон Мак-Кейн (республиканец) выступил на выборах президента США в 2000 г. как независимый кандидат, то он бы победил Джорджа В. Буша или Ала Гора в борьбе один на один.

(а) Как вы думаете, если бы Мак-Кейн выставил свою кандидатуру, кто победил бы на выборах? Был бы у победителя большой перевес, по вашему мнению? Объясните ваш ответ.

(б) Изменился бы ваш ответ на вопрос (а), если бы для определения победителя в каждом штате вместо метода относительного большинства применялось правило Борда́? Объясните ваш ответ.

Вопрос 2.31. Рассмотрите перевыборы в Калифорнии в 2003 г., которые привели к тому, что тогдашнего губернатора Грея Дэвиса на посту сменил Арнольд Шварценеггер; напишите подробный отчет о ваших изысканиях. Включите в него ответы хотя бы на следующие вопросы:

- С какими требованиями закона столкнулись граждане Калифорнии для того, чтобы перевыборы могли состояться?
- Каковы были основные доводы в пользу того, чтобы губернатор Дэвис был переизбран?
- Кто еще из известных кандидатов (кроме Шварценеггера) претендовал на пост Дэвиса? Какие у них были предвыборные платформы?
- Как прошло фактическое голосование?
- Какие вопросы были поставлены на голосование?
- Какими были результаты по каждому из этих вопросов?
- Как вы думаете, какова вероятность того, что Шварценеггер пойдет по стопам Рональда Рейгана и что бывший голливудский актер, губернатор Калифорнии, станет президентом США?

Вопрос 2.32. В таблице 2.6 перечислены 5 лучших университетских футбольных команд из двадцати, признанные сильнейшими по результатам опроса Associated Press (AP) 25 ноября 1968 г.

Таблица 2.6

Университетские футбольные команды согласно опросу AP
25 ноября 1968 г.

Место	Команда	Очки	Число отдавших первое место
1	Ohio State	935	$21\frac{1}{2}$
2	Southern Cal	925	$24\frac{1}{2}$
3	Penn State	773	3
4	Georgia	597	1
5	Kansas	524	0
…	…	…	(все 0)

Можно ли сказать, что результаты этого опроса иллюстрируют нарушение критерия большинства? Если это так, объясните почему. В противном случае, укажите число отдавших первое место, какое потребуется получить Southern Cal, чтобы этот рейтинг иллюстрировал такое нарушение. (Интересно знать, что Ohio State победили Southern Cal в Кубке Розы 1 января 1969 г.)

Вопрос 2.33[1]. В таблице 2.7 приведены 3 лучшие университетские футбольные команды из двадцати пяти, признанных сильнейшими по результатам опроса CNN/USA Today в конце сезона 1993 г.

Таблица 2.7

Университетские футбольные команды согласно опросу
CNN/USA Today в конце сезона 1993 г.

Место	Команда	Очки	Число отдавших первое место
1	Florida State	1523	36
2	Notre Dame	1494	25
3	Nebraska	1447	1
…	…	…	(все 0)

Для формирования рейтинга была использована одна из версий правила Борда́. Рейтинг был основан на данных опроса 62 респондентов, каждый из которых проранжировал 25 команд. Единственное от-

[1] Вопросы 2.33 и 2.35 мы взяли из [46].

личие версии правила Борда́, принятой для этого опроса, от той, которая была представлена в этой главе, состоит в том, что очки начислялись не от 24 до 0, как было указано в определении, а от 25 для наиболее предпочтительного до 1 для наименее предпочтительного. Это было сделано потому, что для составления рейтинга было взято больше 25 команд, а команду на последнем месте нужно было отличить от тех, которые не вошли в список. Можно ли, основываясь на этой информации и на данных табл. 2.7, сделать вывод, что все 62 опрошенных поставили Florida State, Notre Dame и Nebraska на одно из трех первых мест в своих бюллетенях? Почему?

Вопрос 2.34. Изучите опрос United Press International (UPI) о 25 лучших университетских футбольных командах, который был проведен после кубковых игр после сезона 1990 г. (Этот последний опрос сезона 1990 г. появился в январе 1991 г., но в литературе его называют последним опросом 1990 г.) Опрос UPI, который больше уже не проводится, был опросом тренеров, т. е. в опросе участвовали тренеры университетских футбольных команд, включая, возможно, главных футбольных тренеров Georgia Tech и University of Colorado. Объясните, как тренеры Georgia Tech и University of Colorado, если бы они действительно участвовали в опросе, могли бы повлиять на его результаты.

Вопрос 2.35. Каждый год группа из 28 спортивных обозревателей, используя модификацию правила Борда́, выбирает лучшего игрока в высшей лиге американской бейсбольной лиги. В таблице 2.8 представлены победители — лучшие игроки американской лиги в 1997 и 1998 гг., и число проголосовавших, отдавших им первое и второе места.

Таблица 2.8

Лучшие игроки Американской лиги, 1997 и 1998 гг.

Год	Победитель	Очки	Голоса за 1 место	Голоса за 2 место
1997	Кен Гриффи-младший	392	28	0
1998	Хуан Гонсалес	357	21	7

Исходя из данных табл. 2.8, определите число очков, отданных за 1 и 2 места при голосовании за лучшего игрока американской лиги.

Вопрос 2.36. Как мы сказали в вопросе 2.35, лучшие игроки высшей бейсбольной лиги выбираются в конце каждого сезона группой спортивных обозревателей с использованием модификации правила Борда́. Изучите результаты голосования за лучшего игрока американской лиги после окончания бейсбольного сезона 2001 г. и выясните, был бы результат тем же самым, если бы правило Борда́ был в точности таким, какой мы определили в этой главе.

Вопрос 2.37. Выясните, как проходит голосование на приз Хайсмана и запишите подробный отчет о ваших изысканиях. Включите в него информацию по крайней мере о том, за что присуждается приз Хайсмана, кто голосует, как проводится голосование, и какая точно избирательная система используется для определения победителя. Кроме того, используйте результаты голосования 1956 г. для того, чтобы проиллюстрировать вычисления, нужные для этой избирательной системы, и прокомментируйте то, что в этих результатах кажется вам удивительным или необычным.

Вопрос 2.38. Найдите журнал, газету или сайт в Интернете, где описан пример, не из области спорта, когда для принятия какого-то решения или построения рейтинга используется правило Борда́ (или какая-нибудь его модификация). Напишите отчет о ваших изысканиях, в который войдет название источника, результат примера, и описание того, как в этом примере был использовано правило Борда́.

Ответы на вопросы

2.2. (а) В выборах, в которых участвуют только два кандидата, один из них не может получить голосов больше, чем другой, если не наберет *больше половины голосов*. Точно так же, один из кандидатов не может набрать больше половины голосов, если не получит больше голосов, чем другой кандидат. В противном случае число голосов должно было бы превышать число проголосовавших.

(б) В выборах, в которых участвуют больше двух кандидатов, один из них может набрать голосов больше, чем любой другой кандидат, однако не набрать *больше половины* всех поданных голосов. Примером такой ситуации служат выборы президента США 2000 г. в штате Флорида.

2.4. (а) Правило большинства приводит к ничейному результату, когда ни один из кандидатов не набирает больше половины голосов избирателей. А для того, чтобы правило относительного большинства привело к ничьей, необходимо, чтобы не меньше двух кандидатов набрали *в точности одинаковое* число голосов *и* оно было бы больше, чем число голосов, набранное любым из оставшихся кандидатов. Таким образом, правило относительного большинства с большей вероятностью приводит к ничейному результату.

(б) Для того, чтобы победить в выборах согласно правилу большинства, кандидат должен набрать больше половины голосов избирателей. Поскольку при этом ни один из других кандидатов не может получить больше половины голосов, то кандидат, которому удалось это сделать, обязательно собирает больше голосов, чем любой другой кандидат. Значит, ему гарантирована победа и в случае, когда принято правило относительного большинства.

(в) Победитель в выборах согласно правилу относительного большинства не обязательно выигрывает согласно правилу большинства. Например, хотя Джордж В. Буш победил на выборах президента США 2000 г. во Флориде согласно правилу относительного большинства, он не мог бы одержать победу согласно правилу большинства, поскольку не набрал больше половины голосов.

2.6. Набрав большинство (26 из 50) голосов за первое место, Nebraska должна была бы возглавить рейтинг.

2.7. (а) Поскольку есть три возможности для первого места, две возможности для второго места (его займет один из двух кандидатов, которые не стали первыми), и только одна возможность для третьего места (это будет тот кандидат, который не стал ни первым, ни вторым), то всего оказывается $3 \times 2 \times 1 = 6$ различных способов проранжировать кандидатов.

(б) Из шести возможных ранжировок две приведены в тексте, а четыре оставшихся перечислены в таблице ниже:

Место	#1	#2	#3	#4
1	Гор	Гор	Нейдер	Нейдер
2	Буш	Нейдер	Буш	Гор
3	Нейдер	Буш	Гор	Буш

В сокращенном виде это записывается так:

$$1: Г \succ Б \succ Н; \quad 3: Н \succ Б \succ Г;$$
$$2: Г \succ Н \succ Б; \quad 4: Н \succ Г \succ Б.$$

(в) Здесь применимы те же рассуждения, что и в пункте (а). Для четырех кандидатов имеется $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ различных способа проранжировать кандидатов.

(г) После того, как я определился с выбором кандидата на первое место, остается $3 \times 2 \times 1 = 6$ различных способов проранжировать оставшихся трех кандидатов.

2.8. (а) Согласно правилу большинства выборы закончатся ничьей (и победителя в них не будет), поскольку ни один из кандидатов не набрал больше половины голосов за первое место.

(б) Согласно правилу относительного большинства, победит Филиц, поскольку он набрал больше голосов за первое место (12), чем любой другой из трех оставшихся кандидатов.

(в) Правило относительного большинства приводит к такому общественному порядку предпочтений: Ф $\succ$ Д $\succ$ Э $\succ$ И.

2.12. Результаты выборов президента США 2000 г. в штате Флорида *не доказывают*, что метод относительного большинства нарушает критерий большинства. Критерий большинства гласит, что если кандидат получает на выборах больше половины голосов, то он должен быть объявлен победителем. Однако в нем не утверждается, что если кандидат набрал меньше половины голосов, то его нельзя объявить победителем. В действительности, метод относительного большинства удовлетворяет критерию большинства. А как следует из вопроса 2.4, победитель по правилу большинства обязательно победит и согласно методу относительного большинства.

2.15. В соответствии со сводкой предпочтений из вопроса 2.8, Филиц набрал 12 голосов за первое место, 0 — за второе, 5 — за третье и 10 — за последнее. Поскольку в выборах участвуют 4 кандидата, голоса за первое место приносят по три очка, за второе — по два, за третье — по одному, а за последнее очки не начисляются. Таким образом, Филиц набирает $(12 \times 3) + (0 \times 2) + (5 \times 1) + (10 \times 0) = 41$ очко. Аналогичные вычисления показывают, что Джеральд набирает 48 очков, Элен — 47, а Иван — 26. Значит, согласно правилу Борда́ победит Джеральд, а итоговый общественный порядок предпочтений будет таким: Д $\succ$ Э $\succ$ Ф $\succ$ И.

2.20. (а) Поскольку все избиратели поменяли местами Э и И в своих списках предпочтений, по свойству нейтральности в итоговом общественном порядке предпочтений Э и И тоже должны поменяться местами, откуда получаем И $\succ$ Ф $\succ$ Д $\succ$ Э.

(б) Хотя все избиратели поменяли местами Э и И в своих списках предпочтений, три избирателя из последнего столбца таблицы, поменяли местами еще и Ф и Д. Поскольку нейтральность обуславливает изменения в итоговом общественном порядке предпочтений только если все избиратели меняют местами одних и тех же кандидатов, мы не можем сделать выводы о том, каким будет новый общественный порядок предпочтений в этом случае.

(в) Вначале заметим, что сводка предпочтений табл. 2.5 отличается от табл. 2.4 только тем, что поменялись местами Ф и Д в списках предпочтений трех избирателей, представленных в последнем столбце таблиц (это изменение благоприятно только для Ф). Из пункта (а) мы знаем, что сводка предпочтений из табл. 2.4 дает такой общественный порядок предпочтений: И $\succ$ Ф $\succ$ Д $\succ$ Э. Поскольку сводка предпочтений табл. 2.5 может быть получена из сводки табл. 2.4 путем изменений, только благоприятных для Ф (и неблагоприятных для Д), по свойству монотонности в итоговом порядке предпочтений Ф останется впереди Д и Э. Однако существует много порядков общественных предпочтений, совместимых с этими требованиями. Например, И $\succ$ Ф $\succ$ Д $\succ$ Э, Ф $\succ$ И $\succ$ Д $\succ$ Э и даже немного странный Ф $\succ$ И $\succ$ Э $\succ$ Д. (Заметьте обратный порядок Д и Э в последнем случае.)

ГЛАВА 3

Снова в бой

Центральные вопросы

- В чем состоит критерий победителя по Кондорсе? Какие избирательные системы ему удовлетворяют, а какие — нет?
- Что такое последовательное попарное голосование, и как работает эта система?
- Что такое система единственного передаваемого голоса? Как она работает, и где обычно применяется?
- В чем состоят некоторые преимущества и недостатки последовательного попарного голосования и системы единственного передаваемого голоса?

Вопрос-разминка 3.1. Предположим, что Скип, Норм и Джесс борются за место президента «Клуба 10 000 озер», и что списки предпочтений всех 100 членов клуба в точности такие, как показано в табл. 3.1.

(а) Каким будет результат выборов согласно правилу большинства?

(б) Каким будет результат выборов согласно правилу относительного большинства?

(в) Каким будет результат выборов согласно правилу Борда?

(г) Кого из кандидатов назвали первым наибольшее число проголосовавших?

(д) Кого из кандидатов назвали последним наибольшее число проголосовавших?

(е) Кто победил бы в борьбе один-на-один: Скип или Норм?

(ж) Кто победил бы в борьбе один-на-один: Скип или Джесс?

(з) Кто победил бы в борьбе один-на-один: Норм или Джесс?

(и) Не показалось ли вам что-либо в ответах на пункты (а)—(з) странным или необычным? Объясните ваш ответ.

Как вы, возможно, заметили, выборы из вопроса-разминки 3.1 обнаруживают некоторые своеобразные черты. Действительно, предпочтения избирателей и результат выборов по правилу относительного большинства оказываются противоречащими друг другу. Ведь по-

Таблица 3.1

Сводка предпочтений для клуба 10 000 озер

	Число избирателей			
Место	35	28	20	17
1	Н	С	Д	Д
2	С	Н	Н	С
3	Д	Д	С	Н

бедителя по правилу относительного большинства (Джесса) назвали первым только 37 % голосовавших. Остальные 63 % назвали его последним; они, скорее, предпочли бы или Скипа, или Норма. Более того, Джесс проиграл бы любому из этих двух в борьбе один-на-один, в выборах с двумя кандидатами. Совершенно ясно: что-то здесь не так. Эти высоколобые математики опять ухитрились найти уродливую аномалию! Должно быть, это один из тех надуманных примеров, которые никогда не встречаются в действительности.

А кстати, вам не приходилось бывать в последнее время в Миннесоте? Возможно, вы слышали об одном из бывших губернаторов, в прошлом профессиональном рестлере и радиоведущем Джесси Вентуре (Jessy «The Body» Ventura). В 1998 г. Вентура, выступив кандидатом от партии реформистов, одержал ошеломляющую победу над генеральным прокурором Миннесоты Скипом Хамфри (демократом) и мэром Нормом Коулменом (республиканцем) на выборах губернатора штата. Вентура победил по правилу относительного большинства, набрав 37 % голосов избирателей. Это было больше, чем удалось набрать Хамфри или Коулмену по отдельности. В обзорах результатов выборов указывалось, что предпочтения избирателей, по-видимому, были весьма похожи на те, что представлены в табл. 3.1 (при условии, что эти числа представляют собой проценты проголосовавших).

Спустя недели и месяцы после выборов многие политические комментаторы пытались объяснить, как удалось Вентуре победить двух хорошо известных противников, каждый из которых обладал несравненно более богатым политическим опытом. Ведь к тому времени самым большим достижением Вентуры в политике был пост мэра города Бруклин Парк, Миннесота. Многие предполагали (совершенно справедливо), что Вентура привлек больше голосов молодых избирателей, чем каждый из двух других кандидатов. Другие считали, что известность Вентуры и его харизма помогли ему завоевать голоса тех избирателей, которые не были знакомы с политическими взглядами всех трех кандидатов. И лишь немногие встали на ту точку зрения, что победа Вентуры могла быть просто следствием принятой избирательной системы — правила относительного большинства.

Последнее соображение интересно нам больше всего. В вопросе-разминке 3.1 мы видели, что альтернатива методу относительного большинства (правило Бордá) могла бы привести к такому результату губернаторских выборов в штате Миннесота в 1998 г., который бы отражал волю избирателей лучше, чем исход по правилу относительного большинства. Но, как мы видели в предыдущей главе, правило Бордá тоже не без изъянов; он может нарушать критерий большинства — желаемое свойство, которым обладает даже правило относительного большинства.

Мы начинаем понимать, что определение результатов выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов, может быть очень хитроумной задачей. Имеется множество подводных камней, и нам придется с ними повозиться некоторое время, если мы хотим такую задачу решить. Этим мы и займемся в настоящей главе. Мы изучим некоторые новые избирательные системы, а также рассмотрим некоторые новые критерии для оценки этих систем. Будем надеяться, что наши исследования приблизят нас к отысканию разумной избирательной системы, которая всегда работает правильно, даже для выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов.

Победители и проигравшие по Кондорсé

В вопросе-разминке 3.1 мы видели, что правилу относительного большинства присущи два связанных типа отклонений от разумного поведения. Во-первых, кандидат, который побеждает любого другого в борьбе один-на-один, может не стать победителем на выборах согласно этому правилу. Во-вторых, что еще неприятней, согласно этому правилу на выборах может победить кандидат, который проиграет любому другому в борьбе один-на-один. (Здесь важно отметить, что под *борьбой один-на-один* мы понимаем выборы с двумя кандидатами, в которых победитель определяется по правилу большинства. Таким образом, когда мы говорим, что кандидат *A* побеждает кандидата *B* в борьбе один-на-один, мы имеем в виду, что если бы избирателям пришлось выбирать только между двумя этими кандидатами, то *A* получил бы больше голосов, чем *B*.)

Свойства побеждать или проигрывать другим кандидатам в борьбе один-на-один часто связывают с именем Мари-Жан-Антуан-Николя де Карита, маркиза де Кондорсé, французского математика, современника Бордá; обычно его называют просто *Кондорсе*. Следующие термины, служащие для выражения описанных идей, получили свое название в честь Кондорсе.

Определение 3.2.

- Кандидат, который побеждает любого другого кандидата в борьбе один-на-один (где победитель определяется по правилу большинства), называется *победителем по Кондорсе*.
- Кандидат, который проигрывает любому другому кандидату в борьбе один-на-один (где победитель определяется по правилу большинства), называется *проигравшим по Кондорсе*.
- Про избирательную систему, согласно которой выигрывает всегда победитель по Кондорсе, если он существует, говорят, что она удовлетворяет *критерию победителя по Кондорсе* (*для краткости КПК*).
- Про избирательную систему, согласно которой никогда не побеждает проигравший по Кондорсе, говорят, что она удовлетворяет *критерию проигравшего по Кондорсе*.

Вопрос 3.3*. Предположим, что данные в табл. 3.1 точно отражают предпочтения избирателей на выборах губернатора Миннесоты в 1998 г. Есть ли в них победитель и/или проигравший по Кондорсе? Если есть, то кто это?

Знать, что некоторая избирательная система удовлетворяет критерию проигравшего по Кондорсе, очень полезно. По крайней мере, такая система исключает возможность победить для кандидата вроде Джесси Вентура, который, скорее всего, проиграл бы любому из своих соперников в борьбе один-на-один. Но стоит ли останавливаться на этом? В конце концов, критерий победителя по Кондорсе кажется вполне разумным, и возможно, даже более важным (поскольку в нем сформулировано условие, по которому можно определить победителя, в то время как критерий проигравшего по Кондорсе просто исключает некоторых кандидатов). И если есть кандидат, который побеждает любого соперника в борьбе один-на-один, почему бы не избрать его? Помня об этом, мы поставим цель на следующих страницах найти избирательную систему, удовлетворяющую КПК (а может быть, обладающую и другими желательными свойствами, которые мы рассмотрели). Прежде чем заняться этим, мы должны сделать паузу и обратить внимание на некоторые важные подробности.

Вопрос 3.4*. Рассмотрим сводку предпочтений в табл. 3.2.

(a) Кто победит в борьбе один-на-один между двумя кандидатами *A* и *B*?

Таблица 3.2

Сводка предпочтений по Кондорсе

	Число проголосовавших		
Место	1	1	1
1	*A*	*B*	*C*
2	*B*	*C*	*A*
3	*C*	*A*	*B*

(б) Кто победит в борьбе один-на-один между двумя кандидатами *B* и *C*?

(в) Кто победит в борьбе один-на-один между двумя кандидатами *A* и *B*?

(г) Не кажется ли вам что-либо в ответах на пункты (а)—(в) странным или необычным? Объясните ваш ответ.

(д) Есть ли на этих выборах победитель и/или проигравший по Кондорсе? Объясните ваш ответ.

Вопрос 3.4 показывает, что в выборах может не быть ни победителя, ни проигравшего по Кондорсе. Поэтому выражение «если он существует» — необходимая часть определения критерия победителя по Кондорсе. Но давайте предположим на некоторое время, что мы рассматриваем выборы, в которых имеется победитель по Кондорсе. Может ли их быть больше одного?

Вопрос 3.5*. Предположим, что в некоторых выборах есть два разных победителя по Кондорсе. Объясните, почему это предположение вступает в противоречие с определением победителя по Кондорсе, и почему это противоречие показывает, что в выборах не может быть больше одного победителя по Кондорсе.

Вопрос 3.6. Используйте тот же путь рассуждений, что и в вопросе 3.5, чтобы объяснить, почему на выборах не может быть больше одного проигравшего по Кондорсе.

Теперь мне кажется, что мы готовы к тому, чтобы предпринять попытку найти такую избирательную систему, которая удовлетворяет критерию победителя по Кондорсе. Начнем с того, что еще раз рассмотрим системы, изученные в первой и второй главах. Как мы видели в вопросе-разминке 3.1, правило относительного большинства — не самое лучшее, если мы хотим выбирать победителя по Кондорсе и исключить возможность избрания проигравшего по Кондорсе. А что можно сказать о правиле большинства и о правиле Борда́?

Вопрос 3.7*. (а) Объясните, почему победитель по правилу большинства, если только это правило не приводит к ничьей, будет и победителем по Кондорсе.

(б) Следует ли из вашего ответа на пункт (а), что правило большинства удовлетворяет критерию победителя по Кондорсе? Если это так, то объясните почему. В противном случае приведите пример, показывающий, что правило большинства может нарушать КПК.

(в) Следует ли из вашего ответа на пункт (а), что правило большинства удовлетворяет критерию проигравшего по Кондорсе? Если это так, то объясните почему. В противном случае приведите пример, показывающий, что правило большинства может нарушать критерий проигравшего по Кондорсе.

(г) Существуют ли какие-нибудь особые виды выборов, для которых правило большинства удовлетворяет КПК? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ.

(д) Используйте ваш ответ на пункт (а), чтобы объяснить, почему любая избирательная система, нарушающая критерий большинства, должна нарушать и КПК.

(е) Используйте ваш ответ на пункт (д), чтобы объяснить, почему правило Борда́ нарушает КПК.

Похоже на то, что здесь мы больше ничего не выловим. Нам придется изобрести (или открыть) какую-нибудь новую избирательную систему, если мы хотим сохранить шанс удовлетворить этому неуловимому критерию победителя по Кондорсе. Но сначала давайте сделаем перерыв, чтобы формализовать наблюдение, которое мы сделали в пункте (д) вопроса 3.7. Мы сказали, что любая избирательная система, нарушающая критерий большинства, должна нарушать также и КПК. Аналогично, мы могли бы сказать, что любая избирательная система, удовлетворяющая КПК, должна удовлетворять и критерию большинства. Другими словами, критерий победителя по Кондорсе — более сильное условие, чем критерий большинства. Для ссылок мы сформулируем этот факт в следующей теореме:

Теорема 3.8.

- *Если на выборах кандидат получает большинство голосов за первое место, то он будет победителем по Кондорсе.*
- *Если избирательная система удовлетворяет критерию победителя по Кондорсе, то она будет удовлетворять также критерию большинства.*
- *Если избирательная система нарушает критерий большинства, то она будет нарушать также критерий победителя по Кондорсе.*

Итак, теперь посмотрим, удастся ли нам найти новую избирательную систему, которая удовлетворяет критерию победителя по Кондорсе.

Последовательное попарное голосование

В определение победителя по Кондорсе входит понятие борьбы двух кандидатов один-на-один. Это дает нам повод искать систему, удовлетворяющую критерию победителя по Кондорсе, в таком виде, чтобы в ней использовались результаты борьбы кандидатов один-на-один для того, чтобы определить победителя. Поскольку мы рассматриваем выборы, в которых участвуют больше двух кандидатов, нам придется проявить творческий подход. Провести лишь одни выборы с двумя кандидатами вовсе не достаточно. Но возможно, если мы проведем *ряд* выборов с двумя кандидатами, нам удастся собрать достаточно информации, чтобы определить победителя. Если нам повезет, этот победитель будет победителем выборов по Кондорсе, как мы и хотели.

Чтобы проиллюстрировать один такой метод, давайте вернемся к выборам президента БААОМ из предыдущей главы (вопрос 2.8). Напомним, что предпочтения 27 членов БААОМ задаются профилем предпочтений в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Профиль предпочтений для выборов БААОМ

	Число проголосовавших			
Место	12	7	5	3
1	Ф	Д	Э	И
2	Д	Э	И	Э
3	Э	И	Ф	Д
4	И	Ф	Д	Ф

Напомним еще, что для этих выборов правило относительного большинства приводит к общественному порядку предпочтений Ф ≻ ≻ Д ≻ Э ≻ И, а правило Бордá — к Д ≻ Э ≻ Ф ≻ И. Теперь посмотрим, к какому порядку предпочтений приведут выборы, состоящие из последовательных попарных сравнений кандидатов. Мы будем проводить эти выборы так:

Шаг 1. Вначале мы предложим избирателям выбирать между Джеральдом и Элен. Это выборы с двумя кандидатами, и чтобы определить победителя в них, мы воспользуемся правилом большинства.

Шаг 2. Затем мы предложим избирателям выбирать между Филицем и победителем на первом шаге, опять воспользовавшись правилом большинства для определения победителя.

Шаг 3. И наконец, мы предложим избирателям выбирать между Иваном и победителем на втором шаге. Затем мы объявим победителя (согласно правилу большинства) в этих выборах победителем выборов вообще.

Вопрос 3.9*. (а) Кто победит на выборах президента БААОМ согласно методу, описанному в шагах 1—3 выше?

(б) Как вы думаете, какой порядок общественных предпочтений лучше всего отражает волю избирателей на этих выборах согласно методу, описанному в шагах 1—3 выше?

(в) Принимая во внимание результаты этих выборов по правилу относительного большинства и правилу Бордá, не кажется ли вам что-либо в ваших ответах на пункты (а) и (б) странным и необычным? Объясните ваш ответ.

(г) Есть ли на этих выборах победитель и/или проигравший по Кондорсе? Объясните ваш ответ.

В то время как ваш ответ на вопрос 3.9 может и не пролить много света на то, кто в действительности должен быть объявлен победителем на следующих выборах президента БААОМ, он, по крайней мере, демонстрирует способ определить победителя на выборах, в которых участвуют больше двух кандидатов, используя последовательность выборов с двумя кандидатами. Такая избирательная система известна как *последовательное попарное голосование*.

Прежде чем двигаться дальше, мы должны остановиться на некоторое время и рассмотреть важное отличие последовательного попарного голосования от других уже рассмотренных нами систем. Заметим, что с правилом относительного большинства и правилом Бордá у нас не было никаких проблем при построении общественного порядка предпочтений на основании результатов выборов. Поэтому вы, возможно, предположите, что то же самое нас ожидает в пункте (б) вопроса 3.9. Действительно, вы могли бы собрать результаты борьбы один-на-один, и придти к общественному порядку предпочтений И ≻ Ф ≻ Д ≻ Э. Он представляется вполне естественным. В конце концов, если Иван побеждает Филица, а Филиц побеждает Джеральда, то Иван обязательно должен победить Джеральда, не так ли? Но оказывается, в этом случае все получается не совсем так, как вы ожидали. Хотя Иван побеждает Филица в борьбе один-на-один, и, аналогично, Филиц побеждает Джеральда в борьбе один-на-один, в действительности Иван проиграет Джеральду (и с ошеломляющим отрывом!), если избирателям предложить выбирать между ними. Вернитесь к вопросу 3.4, чтобы получить еще один пример необычной ситуации такого вида. Там происходит нечто подобное, и возможно, вы даже указали на это в вашем собственном ответе на пункт (г) этого вопроса.

Если от всех этих странностей у вас кружится голова, попытайтесь утешить себя тем, что вы не одиноки. Если вы еще не заметили, теория голосования полна головоломных аномалий, которые мы часто будем называть *парадоксами*[1] голосования. На самом деле пример из вопроса 3.4 называется *парадоксом Кондорсе* и хорошо известен в сфере парадоксов голосования.

Вернемся к нашему обсуждению общественных порядков предпочтения. Надо сказать, что последовательное попарное голосование не всегда приводит к четко определенному общественному порядку предпочтений. Есть несколько подходов к этой проблеме, но сейчас мы просто определим общественный порядок предпочтений при последовательном попарном голосовании таким образом, что победитель займет первое место, а остальные кандидаты разделят второе. В примере из вопроса 3.9 мы обозначим построенный порядок как $И \succ Ф \approx Д \approx Э$. Заметим, что точно так же, как мы использовали изогнутый вариант знака «больше» для обозначения предпочтений между двумя кандидатами ($\succ$ вместо $\gg$), мы будем использовать изогнутый вариант знака равенства для обозначения равного результата кандидатов ($\approx$ вместо $=$). И с этих пор мы будем использовать это обозначения для случаев, когда метод относительного большинства или правило Борда́ или еще какая-нибудь избирательная система приводит к ничейному результату между двумя кандидатами в общественном порядке предпочтений.

И наконец, последний штрих: те из вас, кто хорошо разобрался в вопросе, могут с недоверием отнестись к предложенному выше решению. В конце концов, даже порядок предпочтений $И \succ Ф \approx Д \approx Э$ означает, что И побеждает Д в борьбе один-на-один, но мы знаем, что на самом деле это не так. Если вы столь скептически настроены, то имеете для этого все основания — мы вовсе не решили полностью задачу, которую поставили перед собой. Но все-таки мы несколько прояснили ситуацию, исключив возможные ложные сравнения между проигравшими кандидатами. Помните также, что даже если Д побеж-

[1] В словаре Вебстера парадокс определяется как принцип или суждение, противоположное общепринятому мнению; утверждение или ощущение на первый взгляд противоречащее или противоположное здравому смыслу, оно производит впечатление абсурдного, но на самом деле может быть истинным

дает И в борьбе один-на-один, все-таки И — единственный победитель при последовательном попарном голосовании. В этом смысле И действительно предпочтительнее Д, точно так же, как по правилу относительного большинства Вентура был предпочтительнее Колемана и Хамфри вместе взятых, хотя и проиграл бы каждому из них в борьбе один-на-один. Итак, мы убеждаемся, что как и в многих других избирательных системах, в последовательном попарном голосовании содержится больше, чем кажется на первый взгляд. Как говорит радиокомментатор Пол Харви, «через несколько секунд вы узнаете, чем все кончилось». Но вначале давайте посмотрим, как последовательное попарное голосование соотносится с критериями Кондорсе.

Вопрос 3.10. (а) Может ли победитель по Кондорсе проиграть в борьбе один-на-один какому-либо другому кандидату? Объясните ваш ответ.

(б) Какой вывод вы можете сделать на основании вашего ответа на пункт (а) о последовательном попарном голосовании и критерии победителя по Кондорсе?

Вопрос 3.11. Удовлетворяет ли последовательное попарное голосование критерию проигравшего по Кондорсе? Если да, то объясните почему. В противном случае приведите пример профиля предпочтений, когда проигравший по Кондорсе выигрывает выборы при последовательном попарном голосовании.

Итак, если отбросить в сторону задачу отыскания общественного порядка предпочтений, можно ли назвать последовательное попарное голосование удачной системой для определения победителя на выборах, в которых больше двух кандидатов? По крайней мере, на первый взгляд она выглядит очень многообещающей. В конце концов, при последовательном попарном голосовании *всегда* выигрывает победитель по Кондорсе, если он существует. А что же происходит в ситуации, когда победителя по Кондорсе нет, как в случае с выборами президента БААОМ?

Мы можем приступить к ответу на этот вопрос, заметив одно свойство последовательного попарного голосования, которое вы, может быть, уже обнаружили самостоятельно: при последовательном попарном голосовании порядок, или *последовательность*, в котором новые кандидаты вступают в борьбу один-на-один, должен быть задан до того, как эта борьба началась. Такая, по-видимому безобидная, последовательность называется *расписанием*, и чтобы обозначить ее, обычно просто перечисляют кандидатов в том порядке, в котором они должны приступать к борьбе один-на-один. Например, в шагах 1–3 перед вопросом 3.9 для выборов президента БААОМ мы использовали такое расписание: Д, Э, Ф, И.

Вопрос 3.12*. Кто победит на выборах президента БААОМ при последовательном попарном голосовании с расписанием Ф, Д, Э, И?

Вопрос 3.13. (а) Найдите такое расписание, что Филиц победит на выборах президента БААОМ при последовательном попарном голосовании.

(б) Найдите такое расписание, что Джеральд победит на выборах президента БААОМ при последовательном попарном голосовании.

Теперь вы должно быть, уже осознали, что хотя при последовательном попарном голосовании удается избежать многих ловушек, все-таки в нем есть один значительный недостаток. Вопросы 3.12 и 3.13 показывают, что в отсутствии победителя по Кондорсе расписание (которое, очевидно, должно быть установлено прежде, чем начнется голосование) может играть слишком большую роль при определении победителя на выборах. Это свойство показывает, что последовательное попарное голосование в высокой степени подвержено манипулированию. Этот факт не остался незамеченным политиками и другими ответственными за принятие решений людьми, которые полагаются на последовательное попарное голосование[1]. Кроме того, он наводит на мысль, что последовательное попарное голосование может нарушать фундаментальное свойство нейтральности. К сожалению, следующий наш вопрос подтверждает это подозрение.

Вопрос 3.14. Предположим, что на выборах президента БААОМ все избиратели в своих списках предпочтений поменяли местами И и Э, что привело к новому профилю предпочтений, представленному в табл. 3.4.

(а) Какой общественный порядок предпочтений получится из этого нового профиля предпочтений при последовательном попарном голосовании с расписанием Д, Э, Ф, И?

(б) Объясните, почему ваши ответы на вопрос 3.9 и пункт (а) этого вопроса показывают, что последовательное попарное голосование не является нейтральным.

[1] Есть очевидное сходство между философией «проиграешь раз — и уже навсегда» последовательного попарного голосования и турнирами на выбывание, когда одному участнику может быть присвоена окончательная победа до борьбы один-на-один со всеми или хотя бы с большинством других участников. Тот факт, что последовательное попарное голосование в большой степени зависит от выбранного расписания, отражается в способе, с помощью которого распределяют участников турниров на выбывание. Это стараются сделать таким образом, чтобы участники, от которых ожидают наилучших результатов, встретились друг с другом как можно позднее.

Таблица 3.4

Обновленный профиль предпочтений на выборах президента БААОМ

	Число проголосовавших			
Место	12	7	5	3
1	Ф	Д	И	Э
2	Д	И	Э	И
3	И	Э	Ф	Д
4	Э	Ф	Д	Ф

Что же нам теперь делать? Должны ли мы отказаться от последовательного попарного голосования или в нем все-таки можно отыскать какое-нибудь компенсируещее свойство, и это сделает его достойным рассмотрения? Что ж, последовательное попарное голосование естественным образом возникает в целом ряде важных ситуаций, и это наводит на мысль, что у него есть какие-то желательные черты, которые скомпенсируют его недостатки. В конце концов, если на выборах есть победитель по Кондорсе, то свойство нейтральности не так уж необходимо, ведь независимо от расписания при последовательном попарном голосовании выигрывает победитель по Кондорсе. И, как оказывается, последовательное попарное голосование и анонимно, и монотонно.

Вопрос 3.15. Объясните, почему последовательное попарное голосование и анонимно, и монотонно.

Более того, согласно теореме 3.8, последовательное попарное голосование удовлетворяет еще и критерию большинства. А до сих пор каждая рассмотренная нами избирательная система для выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов, теряла хотя бы одно из изученных нами желательных свойств. Похоже, что последовательное попарное голосование не хуже и не лучше других систем. Конечно же, может быть, мы просто до сих пор не выловили рыбку из пруда. Может быть, нужно еще чуть-чуть потрудиться, чтобы найти избирательную систему, которая положит конец всем спорам.

Система единственного передаваемого голоса

В середине XIX века английский адвокат и реформатор в политике Томас Хар предложил избирательную систему, в которой кандидаты последовательно исключаются, пока не остается только один — его и объявляют победителем. Эта система, известная сегодня как *система единственного передаваемого голоса* или *последовательное убывание* (мы выберем первое), была признана в то время и с тех пор ее популярность только выросла. На самом деле система единственного передаваемого голоса сейчас используется на многих важных общественных выборах. Примером могут служить выборы президента Ирландии, мэра Лондона и членов австралийской палаты представителей. Хотя система единственного передаваемого голоса не нашла применения на основных выборах в США, сейчас она используется на выборах в местные органы управления, включая выборы мэра Сан-Франциско. Как утверждает Центр голосования и демократии, «буквально сотни территорий, организаций и корпораций используют систему единственного передаваемого голоса для выборов руководителей».

Это звучит убедительно? Но подождите, — это еще не все. В 1860 г. философ Джон Стюарт Милль (мы должны признать, что он был близким другом Хара) писал в своей книге «Considerations on Representative Government»:

> *Чем больше изучаешь (детали системы Хара), тем сильнее, я осмелюсь предположить, впечатляют полная пригодность схемы и ее исключительные преимущества. Они настолько сильны, и их так много, что, по моему убеждению, они позволяют поставить план г-на Хара в один ряд с самыми великими достижениями в теории и практике управления.*

Итак, мы нашли эту систему! Система единственного передаваемого голоса — это «полностью пригодный» план с многочисленными «исключительными преимуществами». Должно быть, нетрудно будет проверить, что она обладает желательными свойствами, которые нас так интересуют. Но давайте не будем забегать вперед — прежде чем мы сможем что-либо утверждать о системе единственного передаваемого голоса, мы должны выяснить, как она работает.

Определение 3.16. Избирательная система, известная как система единственного передаваемого голоса, работает согласно следующим трем шагам:

Шаг 1. Каждый избиратель представляет свой полный список предпочтений.

Шаг 2. Кандидат с наименьшим числом голосов за первое место (или кандидаты, если их несколько с равным числом голосов) исключается из списков предпочтений всех избирателей, а оставшиеся кандидаты продвигаются вверх в каждом из списков предпочтений, что приводит к новому набору предпочтений для выборов.

Шаг 3. Шаг 2 повторяется до тех пор, пока не останется только один кандидат. Они и объявляется победителем на выборах.

При желании по результатам выборов можно сформировать общественный порядок предпочтений. Для этого перечисляют кандидатов в порядке, обратном тому, в каком они исключались (т. е. сначала идет победитель, затем кандидат, которого исключили последним, и так далее, до первого исключенного кандидата).

Вопрос 3.17*. Предположим, Гарри, Мелисса, Даллас и Сидни борются за место декана математического факультета университета Podunk. Профиль предпочтений 17 сотрудников факультета представлен в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Профиль предпочтений для выборов декана математического факультета университета Podunk

	Число проголосовавших			
Место	6	5	4	2
1	Г	М	Д	С
2	М	Г	С	Д
3	Д	Д	М	Г
4	С	С	Г	М

(а) Кто из кандидатов будет исключен первым по системе единственного передаваемого голоса? Кто вторым? Третьим?

(б) Кто победит на выборах по системе единственного передаваемого голоса? Каким будет итоговый общественный порядок предпочтений?

Теперь давайте проверим наличие свойств. Начнем с анонимности и нейтральности. Как и в ситуации с некоторыми уже рассмотренными нами системами, вам может показаться вполне очевидным, что система единственного передаваемого голоса анонимна и нейтральна. В конце концов, в ее определении ничего не говорится об отдельных избирателях и кандидатах. Это не похоже на случай с последовательным попарным голосованием, когда используется список, в котором особенным образом перечисляются кандидаты, а также на случай с диктатурой, когда особо выделяется один из избирателей, голос которого считается более важным, чем остальные. Тем не менее, мы видели, что интуиция нас уже подводила, так что давайте вернемся к определениям анонимности и нейтральности, чтобы объяснить, почему система единственного передаваемого голоса обладает обоими этими свойствами.

Вопрос 3.18. Используйте определение 2.18, чтобы написать подробное объяснение, почему система единственного передаваемого голоса анонимна и нейтральна.

Определение монотонности несколько сложнее, поэтому мы рассмотрим один пример, прежде чем сформулировать общие аргументы.

Вопрос 3.19. Рассмотрим еще раз выборы декана математического факультета университета Podunk из вопроса 3.17. Предположим, что после жарких дебатов между Гарри и Далласом два избирателя, предпочтения которых представлены в последнем столбце табл. 3.5, поменяли местами Гэри и Далласа в своих списках предпочтений (это изменение, с учетом остальных кандидатов на выборах, благоприятно только для Гэри).

(а) Кто победит на выборах по системе единственного передаваемого голоса при новом профиле предпочтений?

(б) Сравните ответ на пункт (а) этого вопроса с ответом на пункт (б) вопроса 3.17. Какой вывод вы можете сделать?

Остановитесь на мгновение! Вы поняли, что только что произошло в вопросе 3.19? Не хотите ли вы сказать мне, что система единственного передаваемого голоса, которая казалась нам спасительной, не обладает даже свойством монотонности? Что же это делается? Нам придется подождать с ответом на этот вопрос до следующей главы. Но сначала давайте закончим эту, выяснив, можем ли мы спасти еще что-нибудь позитивное из «вполне пригодной» системы Хара.

Вопрос 3.20. (а) Объясните, почему, если на любой стадии системы единственного передаваемого голоса один кандидат получает большинство голосов за первое место, то этот кандидат автоматически становится победителем на выборах.

(б) Используйте ответ на пункт (а), чтобы объяснить, почему система единственного передаваемого голоса удовлетворяет критерию большинства.

Вопрос 3.21. Рассмотрите выборы с тремя кандидатами и профилем предпочтений, приведенном в табл. 3.6.

(а) Есть ли на этих выборах победитель по Кондорсе?

(б) Кто победит на этих выборах по системе единственного передаваемого голоса?

Таблица 3.6

Система единственного передаваемого голоса и КПК

	Число проголосовавших		
Место	1	2	2
1	*A*	*B*	*C*
2	*B*	*A*	*A*
3	*C*	*C*	*B*

(в) Удовлетворяет ли система единственного передаваемого голоса критерию победителя по Кондорсе? Используйте ваши ответы на пункты (а) и (б), чтобы объяснить, как вы рассуждали.

Подводя итоги

Вопрос 3.22*. Подведите итог всему, что вы узнали об избирательных системах для выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов, заполнив следующую таблицу. (Заметьте, что мы используем сокращение КБ для критерия большинства. В клетках таблицы мы ставим «да», если избирательная система из этой строки удовлетворяет свойству из этого столбца, и «нет», если она его нарушает.)

Вопрос 3.23*. Еще раз рассмотрите выборы президента БААОМ из вопроса 2.8. Кто победит на выборах по системе единственного передаваемого голоса?

	Анонимность	Нейтральность	Монотонность	КБ	КПК
Метод относительного большинства	Да	Да	Да	Да	Нет
Правило Борда́					
Последовательное попарное голосование					
Система единственного передаваемого голоса					

Вопрос 3.24. Напишите деловое письмо редактору официального информационного бюллетеня БААОМ «Хрипы и всхлипы» и выскажите ваше мнение о том, какую избирательную систему следует использовать на следующих выборах президента БААОМ. Используйте результаты ваших исследований в этой и предыдущей главах, чтобы убедительно доказать, почему именно система, выбранная вами, са-

*5 лист, Матем. выборов

мая разумная и лучше всего выразит волеизъявление избирателей. Не забудьте обсудить все аргументы «за» и «против» предложенной вами системы, сопоставив ее с остальными возможными вариантами.

Вопросы для дальнейшего изучения

Вопрос 3.25. Дайте ответ «истина» или «ложь» для каждого из двух утверждений и приведите убедительные аргументы, чтобы в каждом случае подтвердить ваш ответ.

(а) Если избирательная система удовлетворяет критерию победителя по Кондорсе, то она должна удовлетворять и критерию проигравшего по Кондорсе.

(б) Если избирательная система удовлетворяет критерию проигравшего по Кондорсе, то она должна удовлетворять и критерию победителя по Кондорсе.

Вопрос 3.26. Еще раз рассмотрите выборы декана математического факультета университета Podunk из вопроса 3.17.

(а) Кто победит на выборах согласно правилу Борда́?

(б) Как вы думаете, кого следует объявить победителем на выборах в свете ваших ответов на вопрос 3.17 и пункт (а) этого вопроса? Приведите убедительные доводы, чтобы подтвердить ваш ответ.

(в) Существует ли такое расписание, при котором на выборах по методу последовательного попарного голосования победит Сидни? А Даллас? Гэри? Четко объясните ваш ответ.

Вопрос 3.27. В пункте (е) вопроса 3.7 вы объяснили, почему правило Борда́ нарушает критерий победителя по Кондорсе, не представив практического примера, иллюстрирующего этот факт. Постройте практический пример (и представьте профиль предпочтений), чтобы показать, что правило Борда́ может нарушать КПК.

Вопрос 3.28. Удовлетворяет ли правило Борда́ критерию проигравшего по Кондорсе? Если да, то объясните почему. В противном случае постройте пример (и представьте профиль предпочтений) чтобы показать, что правило Борда́ может нарушать критерий проигравшего по Кондорсе.

Вопрос 3.29. Удовлетворяет ли система единственного передаваемого голоса критерию проигравшего по Кондорсе? Если да, то объясните почему. В противном случае постройте пример (и представьте профиль предпочтений) чтобы показать, что система единственного передаваемого голоса может нарушать критерий проигравшего по Кондорсе.

Вопрос 3.30. Напишите краткую биографию маркиза де Кондорсе, включите в нее самые важные достижения и в области теории голосования и вне ее, сведения о его вкладе во Французскую революцию и о его смерти.

Вопрос 3.31. Напишите краткую биографию Томаса Хар, включите в нее самые важные достижения в области теории голосования и вне ее.

Вопрос 3.32. Посетите сайт Центра голосования и демократии (`http://www/favorite.org/`) и изучите представленные там доводы в пользу системы единственного передаваемого голоса. Напишите резюме ваших изысканий, включив сравнение аргументов, представленных на сайте, и наших исследований в этой главе.

Вопрос 3.33. Изучите результаты выборов губернатора Луизианы в 1991 г. и напишите краткое резюме ваших изысканий. Включите в него краткое описание трех лидирующих кандидатов, их предвыборных платформ и личных особенностей, а также окончательного победителя на выборах. Изложите вашу точку зрения: мог ли там быть победитель и/или проигравший по Кондорсе и кто из кандидатов лучше всего соответствует воле избирателей. Четко изложите ваши рассуждения и используйте реальные данные этих выборов, чтобы подтвердить ваши выводы.

Вопрос 3.34. Изучите результаты выборов президента Франции в 2002 г. и напишите резюме ваших изысканий. Включите в него краткое описание трех кандидатов, набравших наибольшее число голосов, их предвыборных платформ и личных особенностей, а также окончательного победителя на выборах. Подробно опишите избирательную систему, которая использовалась для определения победителя, и ее небольшие отличия от одной из изученных в этой главе систем.

Вопрос 3.35. (а) Выясните, как проводится голосование для определения города, где пройдут зимние и летние Олимпийские Игры, и напишите резюме ваших изысканий. Включите в него описание того, как отбирают претендентов, кто голосует, как проходит голосование, какая избирательная система используется для определения победителя, каковы ее небольшие отличия от одной из изученных в этой главе систем.

(б) Изучите результаты голосования, проведенного Международным Олимпийским Комитетом (МОК) для того, чтобы определить, в каком из пяти городов будут проходить летние Олимпийские Игры 2000 г. Напишите резюме ваших изысканий. Включите в него описание пяти городов-претендентов, окончательного победителя, точные результаты каждого раунда голосования, укажите раунд, когда победитель впервые набрал большинство поданных голосов. Были ли такие города, которые набрали в некотором раунде *меньше* голосов, чем в предыдущем? Укажите особую причину, по которой отменили два последних раунда голосования.

(в) Изучите результаты голосования, проведенного МОК для того, чтобы определить, в каком из пяти городов будут проходить летние Олимпийские игры 2004 г. Напишите резюме ваших изысканий. Включите в него описание пяти городов-претендентов, окончательного победителя, точные результаты каждого раунда голосования и того, как разрешилась ничейная ситуация, возникшая по результатам первого раунда. Несмотря на то, что Кейптаун разделил с другим городом возможность быть исключенным после первого раунда, он мог выиграть на выборах, не получив дополнительных голосов в первом раунде. Опишите, как это могло случиться. (То есть найдите набор избирателей, которые могли отдать свои голоса Кейптауну и сделать его победителем после того, как был исключен город, за который они только что проголосовали.)

Вопрос 3.36. Исследуйте процесс выдвижения номинантов на одну из главных наград киноакадемии («Оскар»), и напишите подробное резюме ваших изысканий. (Заметьте, есть два этапа в процессе отбора достойных награды Академии — сначала этап выдвижения номинантов, а затем финальное голосование, чтобы определить победителя. Мы не просим вас описать финальное голосование, оно проходит по правилу относительного большинства. Мы просим вас описать этап *выдвижения номинантов*.)

Вопрос 3.37. Изучите избирательную систему Кумса и напишите резюме ваших изысканий. Включите в него описание того, как эта система работает, чем она похожа и чем отличается от других уже изученных нами систем, каким из исследованных нами критериев оценки избирательных систем (анонимность, нейтральность, монотонность, критерий большинства, КПК и критерий проигравшего по Кондорсе) система Кумса удовлетворяет, и какие из них она нарушает.

Вопрос 3.38. Исследуйте избирательную систему, которая используется в телевизионном реалити-шоу «Survivor», и напишите подробное резюме ваших изысканий. Включите в него сравнение этой системы с другими, уже изученными нами (включая систему Кумса из вопроса 3.37), и анализ того, как она соотносится с критериями оценки избирательных систем.

Ответы на вопросы

3.3. Полагая, что в табл. 3.1 приведены корректные данные, Норм Коулмен был победителем по Кондорсе, а Джесси Вентура — проигравшим по Кондорсе.

3.4. В борьбе один-на-один A побеждает B, B побеждает C, а C побеждает A, каждый раз с перевесом 2 к 1. Это действительно производит странное впечатление, так как мы обычно считаем, что если A побеждает B и B побеждает C, то A должен побеждать C. В этой ситуации нет ни победителя, ни проигравшего по Кондорсе.

3.5. Если бы на выборах было два победителя по Кондорсе, назовем их A и B, то тогда в борьбе один-на-один A должен победить B и B должен победить A. Поскольку, очевидно, такого не бывает, на выборах не может быть больше одного победителя по Кондорсе.

3.7. (а) Если правило большинства не приводит к ничьей, то должен найтись кандидат, которого больше половины избирателей поставили на первое место. Даже без голосов других избирателей в борьбе один-на-один этот кандидат победит любого другого.

(б) Из пункта (а) *не* следует, что правило большинства удовлетворяет критерию победителя по Кондорсе. Чтобы построить пример, показывающий, что правило большинства может нарушать КПК, рассмотрите выборы с тремя кандидатами, на которых есть победитель по Кондорсе, но ни один из кандидатов не набирает большинства голосов за первое место.

(в) Из пункта (а) следует, что правило большинства удовлетворяет критерию проигравшего по Кондорсе, так как проигравший по Кондорсе никогда не может набрать большинства голосов за первое место. (Можете ли вы объяснить, почему это так?)

(г) Подумайте еще раз о том типе выборов, который мы рассмотрели в гл. 1.

(д) В пункте (а) этого вопроса утверждается, что если кандидат получает большинство поданных на выборах голосов за первое место, то он будет победителем по Кондорсе. Таким образом, если система не избирает победителя согласно правилу большинства, то она не изберет и победителя по Кондорсе.

(е) Поскольку правило Бордá нарушает критерий большинства, согласно пункту (д) этого вопроса, он должен нарушать и КПК.

3.9. (а) На первом шаге победит Джеральд. Затем на втором шаге он терпит поражение от Филица, после чего тот проигрывает Ивану на третьем шаге. Таким образом, Иван побеждает на выборах.

(б) С учетом вашего ответа на пункт (а) этого вопроса, у вас может возникнуть искушение сказать, что наилучшим порядком общественных предпочтений будет И ≻ Ф ≻ Д ≻ Э. Тем не менее, вам, возможно, захочется выяснить, победит ли Иван Джеральда в борьбе один-на-один.

(в) Действительно, кажется странным, что Иван побеждает на выборах, поскольку он оказался последним в общественных порядках предпочтений, к которым приводят метод относительного большинства и правило Бордá.

(г) Нет ни победителя, ни проигравшего по Кондорсе.

3.10. По определению победитель по Кондорсе никогда не проиграет другому кандидату в борьбе один-на-один. Таким образом, победитель по Кондорсе, если он существует, всегда проходит в следующий раунд при последовательном попарном голосовании, а значит, обязательно побеждает. Из этого мы можем заключить, что последовательное попарное голосование удовлетворяет критерию победителя по Кондорсе.

3.12. Победит Элен.

3.17. Вначале исключат Сидни, за ней Мелиссу, а затем Далласа. Таким образом, победит Гэри, а итоговый общественный порядок предпочтений окажется таким: Г ≻ Д ≻ М ≻ С.

3.19. При новых предпочтениях на выборах победит Мелисса. Отсюда следует, что система единственного передаваемого голоса не монотонна(!), поскольку изменения в пользу Гэри в индивидуальных списках предпочтений превратят его из победителя в проигравшего на выборах.

3.22. Таблица может быть заполнена так:

	Анонимность	Нейтральность	Монотонность	КБ	КПК
Метод относительного большинства	Да	Да	Да	Да	Нет
Правило Бордá	Да	Да	Да	Нет	Нет
Последовательное попарное голосование	Да	Нет	Да	Да	Да
Система единственного передаваемого голоса	Да	Да	Нет	Да	Нет

3.23. Элен выиграет.

ГЛАВА 4

Неполадки с демократией

Центральные вопросы

- В чем состоит критерий независимости от посторонних альтернатив? Какие избирательные системы удовлетворяют этому критерию, а какие — нет?
- Каким пяти условиям, по мнению Кеннета Эрроу, должна удовлетворять каждая разумная избирательная система? Что утверждает теорема Эрроу об избирательных системах, которые удовлетворяют всем этим пяти условиям?
- В чем заключаются следствия из теоремы Эрроу? Какое отношение она имеет к поискам совершенной избирательной системы?
- В чем состоит условие единогласия Парето? Как единогласие связано с теоремой Эрроу?

Вопрос-разминка 4.1. В 1958 г. Дункан Блэк, экономист, предложил следующую систему для определения победителя на выборах, в которых участвуют два кандидата:

- Каждый избиратель представляет свой полный список предпочтений всех кандидатов на выборах.
- Если согласно представленным спискам предпочтений существует победитель по Кондорсе, то его объявляют победителем на выборах.
- Если победителя по Кондорсе не существует, то для определения победителя на выборах используют правило Бордá.

Выясните, каким из изученных нами критериев для оценки избирательных систем (анонимность, нейтральность, монотонность, критерий большинства и КПК) система Блэка удовлетворяет, а какие нарушает. Подробно объясните ваш ответ и приведите убедительные аргументы, подтверждающие его.

Независимость от посторонних альтернатив

Так что вы думаете о системе Блэка? Прежде чем дать ответ, вы, возможно, захотите рассмотреть следующий вопрос.

Вопрос 4.2*. Предположим, что Дейл, Пол и Уэйн — три финалиста конкурса «Самый сексуальный в мире мужчина», который проходит на роскошном круизном судне «Floater of the seas»[1]. Предположим, что пятнадцать членов жюри конкурса проранжировали финалистов так, как указано в профиле предпочтений из табл. 4.1.

Таблица 4.1

Порядки предпочтений на выборах «Самого сексуального»

	Число проголосовавших		
Место	7	6	2
1	П	Д	У
2	Д	У	П
3	У	П	Д

(а) Кому следует присудить титул «Самого сексуального» согласно системе Блэка? К какой ранжировке (порядку общественных предпочтений) Дейла, Пола и Уэйна приводит система Блэка?

(б) Предположим, что после того, как прошло голосование, но до того, как объявлен победитель, Уэйна выгнали с корабля за неподобающее поведение, которое сделало его недостойным титула «Самого сексуального». Изменятся ли результаты выборов, полученные в пункте (а), из-за удаления Уэйна из конкурса?

(в) Предположим, что имя Уэйна вычеркнут из каждого бюллетеня, отраженного в табл. 4.1, а остальных претендентов при необходимости продвинут вверх, так что в каждом бюллетене останутся только кандидаты с первым и вторым местом. К какому результату приведет система Блэка при этом новом наборе бюллетеней с двумя кандидатами?

(г) Не показалось ли вам что-нибудь в вашем ответе на пункт (в) странным или необычным? Объясните ваш ответ.

Вопрос 4.2 показывает, что, несмотря на все сильные стороны системы Блэка, у нее есть один серьезный недостаток: удаление кандидата (Уэйна), у которого нет никаких или почти никаких шансов

[1] Здесь непереводимая игра слов. *Floater* означает «тот, кто скользит по волнам», а также «подкупленный избиратель». — *Прим. перев.*

победить в конкурсе, все-таки может изменить исход выборов. В таком случае мы будем называть Уэйна кандидатом-«вредителем». (Достаточно вернуться к выборам президента США 1992 и 2000 гг., описанным в г. 1, чтобы обнаружить это явление в важнейших политических выборах. Потенциальными кандидатами-«вредителями» были Перо и Нейдер в 1992 и 2000 гг. соответственно.) Если бы мы были особенно циничны, то могли бы даже подумать, что само участие Уэйна в конкурсе было уловкой, особенно если бы узнали, что он был близким другом Дейла. Конечно же, могло быть и так, что Уэйн просто переоценил свою сексуальную привлекательность. Возможно, он действительно считал, что у него были шансы победить в конкурсе, и честно старался добиться этого. В любом случае, участие или неучастие Уэйна в конкурсе не должно бы влиять на его результат. А в действительности, хотя удаление имени Уэйна из бюллетеней не изменило мест Дейла и Пола в ранжировках каждого из членов жюри, оно все же изменило результат конкурса.

Следует отметить, что ситуации такого рода могут встречаться в реальной жизни. Они особенно затруднительны, когда кандидат умирает еще до выборов, а вычеркивать его имя из избирательных бюллетеней уже поздно. Если рассмотреть пример из вопроса 4.2 в несколько ином контексте, то видно, что само присутствие имени покойного кандидата в избирательных бюллетенях может изменить результат выборов. И хотя, конечно, есть вероятность избрания кандидата посмертно (на этот случай должны быть приняты некоторые правила относительно того, как проводить выборы того, кто его заменит), гораздо чаще бывает так, что кандидат становится «вредителем» подобно тому, как Уэйн был кандидатом-«вредителем» в конкурсе «Самый сексуальный», а Перо и Нейдер могли быть кандидатами-«вредителями» на выборах президента США в 1992 и 2000 гг.

Эти наблюдения наводят на мысль, что возможно, в список желательных свойств, которым должна удовлетворять избирательная система, нам захочется добавить еще одно. Это свойство должно учитывать суть проведенного выше обсуждения, т. е. мы хотим, чтобы на действие избирательной системы не влияло присутствие или отсутствие посторонних кандидатов. Один из способов формально выразить это пожелание — сказать, что мы хотим, чтобы общественное предпочтение между любыми двумя кандидатами зависело только от индивидуальных предпочтений избирателей *между двумя этими кандидатами* и не зависело бы от того, как избиратели ранжируют других кандидатов. Таким образом, если общество предпочтет кандидата A кандидату B, а после этого имя кандидата C будет по каким-либо причинам вычеркнуто из списков, то общество по-прежнему будет предпочитать A больше, чем B. Другими словами, общественное предпочтение между A и B вовсе не должно зависеть от того, какую позицию в индивидуальных списках может занимать кандидат C, который не будет избран. Эта информация должна быть посторонней, как и сам кандидат C. Мы формализуем эту идею в следующем определении.

Определение 4.3. Говорят, что избирательная система, для которой общественные предпочтения между любыми двумя кандидатами зависят только от индивидуальных предпочтений между этими кандидатами, удовлетворяет критерию *независимости от посторонних альтернатив* (НПА для краткости).

Сформулируем определение 4.3 по-другому. Избирательная система удовлетворяет критерию НПА, если в случае, когда некоторые или все избиратели изменят свои списки предпочтений, но не изменят своих предпочтений между двумя отдельными кандидатами A и B, итоговый общественный порядок предпочтений между A и B тоже не изменится.

Вопрос 4.4*. Удовлетворяет ли система Блэка критерию НПА? Почему?

Вопрос 4.5. Удовлетворяет ли правило Борда́ критерию НПА? Почему?

Вопрос 4.6. Удовлетворяет ли правило относительного большинства критерию НПА? Почему?

Вопрос 4.7. Предположим, что на переигровке в конкурсе «Самый сексуальный» члены жюри проранжировали трех финалистов Дейла, Пола и Уэйна так, как указано в профиле предпочтений из табл. 4.2.

Таблица 4.2

Переигровка в конкурсе «Самый сексуальный»

	Число проголосовавших		
Место	5	5	5
1	П	Д	У
2	Д	У	П
3	У	П	Д

(а) Кто победит в конкурсе, если победитель определяется согласно последовательному попарному голосованию с расписанием Д, П, У?

Таблица 4.3

Переигровка в конкурсе «Самый сексуальный», новый вариант

	Число проголосовавших		
Место	5	5	5
1	П	Д	У
2	Д	У	Д
3	У	П	П

(б) Предположим, что после приватных переговоров пять членов жюри, представленных в крайнем правом столбце табл. 4.2, в своих ранжировках поменяли местами Пола и Дейла, и это привело к новому профилю предпочтений, представленному в табл. 4.3. Кто победит в конкурсе при этом новом профиле предпочтений, если по-прежнему победитель определяется согласно последовательному попарному голосованию с расписанием Д, П, У?

(в) Какие выводы относительно последовательного попарного голосования и НПА вы можете сделать на основании ваших ответов на пункты (а) и (б)? Объясните ваш ответ.

Вопрос 4.8. Предположим, что легкомысленный оттенок в конкурсе «Самый Сексуальный» раздражает жен трех финалистов — Кэти, Пэм и Рейчел. Поэтому они решили принять участие в более цивилизованном конкурсе «Самая остроумная женщина в мире», и все три прошли в финал. Предположим также, что результат этого конкурса определяется не последовательным попарным голосованием, а по системе единственного передаваемого голоса, при этом пятнадцать членов жюри ранжировали Кэти, Пэм и Рейчел так, как представлено в профиле предпочтений из табл. 4.4.

Таблица 4.4

Конкурс «Самая остроумная»

	Число проголосовавших			
Место	6	3	3	3
1	П	К	Р	К
2	Р	П	П	Р
3	К	Р	К	П

(а) К какому общественному порядку предпочтений между Кэти, Пэм и Рейчел приведет этот профиль предпочтений?

(б) Предположим, что в переигровке между тремя финалистками шесть членов жюри из крайнего левого столбца табл. 4.4 поменяли местами Пэм и Рейчел в своих ранжировках, и это привело к новому профилю предпочтений, представленному в табл. 4.5. Каким будет итоговый общественный порядок предпочтений при этом новом профиле?

(в) Какие выводы относительно системы единственного передаваемого голоса и НПА вы можете сделать на основании ваших ответов на пункты (а) и (б)? Объясните ваш ответ.

Вопрос 4.9*. Подведите итог вашим исследованиям нескольких последних вопросов, ответив на следующий: какая из избирательных систем, изученных нами к этому моменту (относительное большинство, правило Бордá, последовательное попарное голосование, система единственного передаваемого голоса и система Блэка), удовлетворяет критерию НПА?

Собственно говоря, пять избирательных систем, перечисленных нами в скобках в вопросе 4.9, — это не все изученные нами системы. Мы не упомянули диктатуру, правило навязанного выбора и правило меньшинства, которые мы обсуждали в гл. 1. С каждой из этих систем связана хотя бы одна очевидная и серьезная проблема, и поэтому мы исключили их из рассмотрения даже для выборов с двумя кандидатами. Но к настоящему моменту вы, конечно же, заметили, что у нас было очень много трудностей с отысканием такой избирательной системы, которая обладает построенным нами вполне разумным набором желательных свойств. Действительно, у каждой из рассмотренных до сих пор избирательных систем есть хотя бы один значительный недостаток, и поэтому мы не прекращали попыток найти систему получше. Может быть, вы уже почувствовали, что пора сдаться. Может быть, вы все еще надеетесь, что нам повезет, и мы все-таки найдем такую избирательную систему, которая положит конец нашим поискам.

Таблица 4.5

Переигровка конкурса «Самая остроумная»

	Число проголосовавших			
Место	6	3	3	3
1	Р	К	Р	К
2	П	П	П	Р
3	К	Р	К	П

А может быть, вы — прагматик. Возможно, вы вполне резонно считаете, что система Блэка — лучшая из всех рассмотренных нами. В конце концов, единственный желательный критерий, который она нарушает, — это НПА, а все остальные системы ему тоже не удовлетворяют. Ну, *может быть* все. Не забудьте, мы не стали решать вопрос — удовлетворяют ли диктатура, правило навязанного выбора и правило меньшинства критерию НПА.

Вопрос 4.10*. (а) Удовлетворяет ли диктатура критерию НПА? Объясните ваш ответ.

(б) Удовлетворяет ли правило навязанного выбора критерию НПА? Объясните ваш ответ.

(в) Удовлетворяет ли правило меньшинства критерию НПА? Объясните ваш ответ.

Итак, оказывается, бывают такие избирательные системы, которые удовлетворяют НПА. Впрочем, это не должно нас удивлять уж очень сильно, ведь НПА кажется вполне разумным критерием. Есть гораздо более интересный вопрос: существуют ли избирательные системы, которые удовлетворяют критерию НПА *и* одновременно обладают некоторыми или всеми остальными упомянутыми нами желательными свойствами. Например, есть ли избирательная система, которая анонимна, нейтральна, монотонна и вместе с тем удовлетворяет НПА? Как мы увидим в следующем разделе, на этот вопрос есть удивительный, тревожный и весьма значимый ответ.

Теорема Эрроу

В 1951 г. Кеннет Эрроу, который, как и Дункан Блэк, был экономистом, приступил к исследованиям, очень похожим на те, которыми мы занимаемся в последних главах. Как и мы, он хотел отыскать избирательную систему, которая была бы «честной» согласно некоторым разумно определенным стандартам. Как и мы, он столкнулся с очень серьезными препятствиями на этом пути. Эрроу так описывал свои исследования:

> *Я начал с некоторых примеров. Мне было уже известно, что с ними связаны определенные проблемы. Следующим разумным шагом было записать условие, которое позволяло исключить проблемные системы из рассмотрения. Затем я строил другой пример, другой метод, который, казалось бы, решал эту проблему, но с ним тоже было не все в порядке. Мне приходилось устанавливать еще один критерий. Я обнаружил, что было трудно*

удовлетворить всем этим критериям, которые казались мне желательными: После того, как я сформулировал три или четыре условия такого рода, я продолжал экспериментировать. Что за напасть! ***Что бы я ни делал, я не мог найти ни одной системы, которая удовлетворяла бы всем этим условиям.*** (выделено нами).

Это ничего вам не напоминает? Должно напоминать! Больше, чем полвека спустя, мы пытаемся сделать то же, что и Эрроу, и сталкиваемся с теми же проблемами, что и он. Как же он справился с трудностями? Что ж, вот еще несколько слов об опыте Эрроу:

Я посвятил этому несколько дней, и начал склоняться к идее, что, может быть, ...и не существует метода, удовлетворяющего всем условиям, которые казались мне разумными и целесообразными. Тогда я решил приняться за доказательство этого утверждения. И оказалось, что для решения этой задачи мне потребовалось лишь несколько дней[1].

В то время Эрроу, по-видимому, не догадывался, что наградой за его труд продолжительностью в несколько будет Нобелевская премия по экономике, полученная в 1972 г., и что его «теорема о невозможности» станет единственным наиболее важным результатом в теории избирательных систем. И не следует падать духом и думать, что смысл этого результата доступен только специалистам, вовсе нет — наши исследования на протяжении нескольких последних глав совершенно подготовили нас к тому, чтобы изучить теорему Эрроу и даже полностью понять ее доказательство. Мы начнем с того, что изучим определения и условия, лежащие в основе труда Эрроу.

Что такое избирательная система?

В рамках подхода Эрроу избирательная система — это правило, согласно которому каждому возможному набору индивидуальных списков предпочтений ставят в соответствие общественный порядок предпочтений. Используя язык математики, мы будем говорить, что избирательная система — это *функция*. Мы задаем для функции списки предпочтений всех избирателей, а она потом выдает результат — полный упорядоченный список кандидатов, который в каком-то смысле отражает волю избирателей.

Дело в том, что, как и Эрроу, мы хотим, чтобы избирательная система выдавала полностью определенные ранжировки кандидатов

[1] Обе цитаты в этом разделе взяты из интервью для COMAP (the Consortium for Mathematics and Its Applications) [20].

(а не просто список победителей), и это очень важно. Вспомним, например, что в предыдущей главе у нас были проблемы с определением полной ранжировки кандидатов на выборах при использовании последовательного попарного голосования. Тогда у нас возникла трудность, связанная со свойством, которое математики называют *транзитивностью*.

Говоря о транзитивности на выборах, имеют в виду, что если общество предпочитает некоторого кандидата A другому кандидату B, а B — третьему кандидату C, то общество должно предпочитать A кандидату C. Если это действительно имеет место для любой тройки кандидатов A, B и C на выборах, то мы говорим, что итоговый общественный порядок предпочтений транзитивен. Правда, следует напомнить, что в парадоксе Кондорсе (вопрос 3.4) происходит обратное: общество предпочитает A кандидату B, B — кандидату C, и одновременно с этим C — кандидату A. Таким образом, парадокс Кондорсе дает пример нетранзитивного общественного порядка предпочтений.

Вопрос 4.11*. Предположим, что на выборах есть три кандидата X, Y и Z. (а) Если вы знаете, что для общества X предпочтительнее Z, Z предпочтительнее Y, и X предпочтительнее Y, можете ли вы сделать вывод, что итоговый общественный порядок предпочтений окажется транзитивным? Объясните ваш ответ.

(б) Если вам известно только, что для общества X предпочтительнее Y, а Z предпочтительнее X, то какими должны быть общественные предпочтения относительно Y и Z, чтобы итоговый порядок предпочтений был транзитивен?

(в) Если в выборах примет участие четвертый кандидат, будет ли ваш ответ на пункт (а) прежним? Объясните ваш ответ.

Иногда, когда общественные порядки предпочтений нарушают условие транзитивности, мы говорим, что представленные общественные предпочтения *цикличны*. И вновь парадокс Кондорсе служит хорошим примером, иллюстрирующим суть этого термина. Если мы попытаемся сопоставить результаты каждого из попарных сравнений в примере из вопроса 3.4, общественный порядок предпочтений будет выглядеть примерно так:

$$A \succ B \succ C \succ A \succ B \succ C \succ A \succ B \succ C \succ A \succ B \succ C \succ \ldots$$

Напомним, что в каждом из попарных сравнений, которые приводят к такому необычному общественному порядку, соотношение голосов для победы — два к одному. Другими словами, для двух третей избирателей A предпочтительнее B, для двух третей — B предпочтительнее C, и для двух третей — C предпочтительнее A.

Вопрос 4.12*. Рассмотрите циклические общественные предпочтения, представленные выше.

(а) Почему избиратели могут реагировать негативно, если победителем на выборах будет объявлен A? Почему они могут реагировать негативно, если победителем на выборах будет объявлен B? А что, если победит C?

(б) Используя ваш ответ на пункт (а), запишите убедительные доводы, почему следует избегать избирательной системы, которая может приводить к циклическим общественным предпочтениям.

Учитывая сделанные выше замечания, с этого момента мы сузим круг изучаемых избирательных систем до тех, которые исключают циклические общественные предпочтения. Другими словами, мы будем требовать, чтобы рассматриваемая избирательная система приводила только к транзитивным порядкам общественных предпочтений. Кроме того, поскольку не стоит ожидать, что избирательная система может привести к чему-либо осмысленному, исходя из бессмыслицы, мы будет требовать еще, чтобы предпочтения отдельных избирателей тоже были транзитивны. (В каждом из рассмотренных до сих пор примеров предпочтения отдельных избирателей были транзитивны.) При этих условиях мы можем формально определить избирательную систему следующим образом:

Определение 4.13. *Избирательная система* — это функция (т. е. процедура), которая на входе получает набор бюллетеней с транзитивными предпочтениями, а на выходе дает транзитивный общественный порядок предпочтений.

Не имеет значения, что в определении 4.13 ничего не говорится о равных результатах, как в отдельных бюллетенях предпочтений, так и в общественных порядках предпочтений, к которым приводит избирательная система. Так, например, вполне приемлем бюллетень с предпочтениями вида $A \succ B \approx C \succ D$, а также общественный порядок предпочтений вида $A \succ B \approx C \approx D$. Таким образом, при соглашениях, принятых нами в гл. 3, даже последовательное попарное голосование можно рассматривать как избирательную систему в смысле определения 4.13.

Условия Эрроу

Теперь, когда мы точно определили, что мы понимаем под избирательной системой, мы готовы двигаться дальше и точно сформулировать условия, которым, по мнению Эрроу должна удовлетворять любая разумная избирательная система. Названия каждого из свойств — в точности те же, какие использовал Эрроу в своей книге «Social Choice and Individual Values»[1], 1951 г.

Условие 1 — Универсальность. Избирательные системы не должны накладывать никаких, кроме транзитивности, условий на то, как избиратели могут упорядочить кандидатов на выборах. В частности, системы не должны указывать, что некоторые порядки предпочтений приемлемы, в то время как другие — нет. *Каждый* возможный набор бюллетеней с транзитивными предпочтениями должен приводить к транзитивному общественному порядку предпочтений.

Условие 2 — Позитивное объединение индивидуальных значений. Избирательные системы должны быть монотонны.

Условие 3 — Независимость от посторонних альтернатив. Избирательные системы должны удовлетворять критерию НПА.

Условие 4 — Полноправность граждан. Избирательные системы никаким образом не должны быть навязанными. Другими словами, на выборах не должно быть пары кандидатов, скажем, A и B, таких, что A оказывается впереди или на одном месте с B в итоговом общественном порядке предпочтений, независимо от того, как проголосовали избиратели.

Условие 5 — Отсутствие диктатуры. Избирательная система не должна быть диктатурой. Иначе говоря, не должно быть избирателя v такого, что выполняется следующее условие: если для произвольной пары кандидатов A и B кандидат A для избирателя v предпочтительней B, то общество тоже предпочтет A кандидату B.

Вопрос 4.14. Какое из пяти условий Эрроу теснее всего связано со свойством анонимности, которое мы определили в гл. 2? Какое из них теснее всего связано со свойством нейтральности?

Заметим, что каждое, кроме одного, условие Эрроу очень похоже на какое-нибудь из свойств, которые мы изучали. И лишь только первое условие мы до сих пор не формулировали явно. В нем говорится о том, что избирательная система позволяет избирателям голосовать так, как им вздумается, но мы и так подспудно это предполагали. В конце концов, нам вполне может нравиться правило большинства, но если к нему добавить условие, что все должны проголосовать за

[1] Имеется русский перевод: *Эрроу К. Дж.* Коллективный выбор и индивидуальные ценности. М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004.

кандидата A, то это правило можно считать каким угодно, но только не справедливым.

В связи с этим следует отметить, что избирательная система может нарушать условие универсальности и без того, чтобы явно накладывать какие-либо ограничения на то, какие бюллетени избиратели могут подавать. Как это может произойти? Что ж, напомним, что в определении 4.13 мы говорили, что избирательная система должна всегда приводить к *транзитивному* общественному порядку предпочтений.

Как мы убедились раньше, бывают такие избирательные системы (вроде тех, с которыми возникает парадокс Кондорсе), которые, исходя из некоторых наборов индивидуальных предпочтений, естественным образом приводят к циклическим общественным предпочтениям. Для того, чтобы работать с такими системами, у нас есть две возможности: либо нам придется сказать, что рассматриваемая система не является избирательной системой в смысле определения 4.13 (поскольку она может приводить к циклическим общественным предпочтениям), либо мы можем сказать, что она все-таки *является* избирательной системой, но может производить общественный порядок предпочтений только для определенных наборов индивидуальных предпочтений. Если выбрать эту вторую возможность, система будет нарушать свойство универсальности потому, что входные данные для нее должны быть ограничены таким образом, чтобы гарантировать транзитивные общественные предпочтения. Следующий вопрос показывает, как может работать такое ограничение.

Вопрос 4.15. (а) Предположим, что на выборах с тремя кандидатами A, B и C разрешены только бюллетени с ранжировками $A \succ B \succ C$ и $B \succ A \succ C$. Предположим также, что общественный порядок предпочтений на выборах формируется путем простого комбинирования результатов каждого из трех возможных попарных сравнений (как мы делали это раньше, чтобы проиллюстрировать парадокс Кондорсе). Объясните, почему если разрешены только такие два вида бюллетеней, итоговый общественный порядок предпочтений не может быть циклическим.

(б) Предположим, что допускается еще один, третий бюллетень: $C \succ B \succ A$. Может ли быть циклическим общественный порядок предпочтений в таком случае? Почему?

Кульминация

А теперь наступает момент, которого все мы ждали — теорема, сколь прекрасная, столь и разрушительная для наших поисков совершенной избирательной системы:

Теорема Эрроу. *Избирательная система на выборах, в которых участвуют больше двух кандидатов, не может удовлетворять всем пяти условиям Эрроу.*

Вы уловили суть? Формулировка теоремы Эрроу крайне важна. Теорема *не* говорит, что мы до сих пор просто не смогли найти избирательную систему, удовлетворяющую всем пяти условиям Эрроу (но могли бы найти, если бы лучше старались). Она не говорит также, что нам *действительно трудно* будет найти такую систему. А говорит она, что сделать это будет просто *невозможно*. Как бы мы ни старались, мы никогда не найдем ни одной избирательной системы, которая обладает всеми пятью основополагающими и желательными свойствам Эрроу. Иначе говоря, любая избирательная система, которую мы только можем обнаружить или построить, обязательно будет нарушать хотя бы одно из пяти условий Эрроу. Очевидно, можно найти много избирательных систем, удовлетворяющих некоторым из условий Эрроу, и мы это уже сделали; но нам никогда не удастся найти ни одной избирательной системы, удовлетворяющей им *всем*.

Вопрос 4.16. Какое из пяти условий Эрроу, которым должна удовлетворять избирательная система, по вашему мнению, наименее важно? Приведите убедительные доводы, чтобы подтвердить ваш ответ.

Вопрос 4.17. (а) В вашем ответе на вопрос 4.6 вы, возможно, привели специальный пример, чтобы показать, что относительное большинство не удовлетворяет критерию НПА? Теперь, используя теорему Эрроу (и не приводя специального примера), дайте другое объяснение, почему относительное большинство не удовлетворяет критерию НПА.

(б) Могли бы вы воспользоваться теоремой Эрроу, чтобы, как и в пункте (а), показать, что система единственного передаваемого голоса не удовлетворяет НПА? Почему?

Вопрос 4.18. (а) Объясните, как можно доказать, что любая анонимная, нейтральная, монотонная и удовлетворяющая критерию НПА система обязательно будет удовлетворять условиям Эрроу 2—5.

(б) Объясните, почему из утверждения пункта (а) этого вопроса следует, что любая анонимная, нейтральная, монотонная и удовлетворяющая критерию НПА система обязательно нарушает свойство универсальности.

Сам Эрроу не считал, что требование, чтобы избирательные системы удовлетворяли свойству универсальности, вовсе неразумно. Кроме того, он не признавал разумной избирательную систему, которая может нарушать монотонность или критерий НПА. Он интерпретировал свою теорему таким образом: «Методы перехода от индивидуальных вкусов к общественным предпочтениям, которые будут обладать перечисленными свойствами и которые будут определены для широкого спектра индивидуальных предпочтений, либо должны быть навязаны, либо иметь форму диктаторских».

Некоторые понимают теорему Эрроу по-другому, и в свое время было довольно много споров о том, что именно теорема Эрроу означает в действительности, и как ее нужно интерпретировать в свете поисков по-настоящему справедливой избирательной системы. В следующей главе мы рассмотрим некоторые из этих интерпретаций и исследуем несколько возможных путей разрешения трудностей, которые вскрыла теорема Эрроу. Но перед этим давайте посмотрим на один полезный и важный вариант теоремы Эрроу.

Условие единогласия Парето

Теорема Эрроу — поразительно сильный результат, но на самом деле его можно усилить еще более. Не отменяя справедливости теоремы, условия Эрроу 2 и 4 (монотонность и полноправие граждан) можно заменить следующим условием *единогласия*, которое иногда еще называют *условием Парето*, в честь Вильфредо Парето (1848—1923) (имя и фамилия действительно рифмуются и их приятно произносить вслух), итальянского экономиста и активного политического деятеля.

Условие Парето — Единогласие. Если на выборах есть пара кандидатов, скажем, A и B, такая, что *каждый* избиратель предпочитает A кандидату B, то в итоговом общественном порядке предпочтений A должен идти впереди B.

Вопрос 4.19*. Предположим, что кандидат A выбран победителем на выборах. Для каждого из следующих сценариев, если приведенная информация позволяет, выясните, удовлетворяет или нарушает условие единогласия использованная избирательная система. Четко объясните каждый из ваших ответов.

(а) Кандидат A не набирает ни одного голоса за первое место; иначе говоря, каждый избиратель предпочитает кандидату A хотя бы одного из других кандидатов.

(б) На выборах есть кандидат, скажем B, такой, что для каждого избирателя B предпочтительнее A.

Вопрос 4.20*. (а) Удовлетворяет ли единогласию относительное большинство? Почему?

(б) Удовлетворяет ли единогласию правило Борда́? Почему?

(в) Удовлетворяет ли единогласию последовательное исключение? Почему?

Как и многие другие рассмотренные нами желательные свойства, на первый взгляд единогласие кажется очень разумным. Собственно говоря, единогласие — настолько естественное и очевидное свойство, что мы можем ожидать, что им обладает любая избирательная система, которую только можно выдумать. Но, как мы видели в вопросе 4.20, это не так. На самом деле сильная форма теоремы Эрроу, сформулированная ниже, утверждает, что любая избирательная система, удовлетворяющая единогласию, обязательно будет нарушать хотя бы одно из других условий Эрроу.

Теорема Эрроу (сильная форма). *Избирательная система на выборах, в которых участвуют больше двух кандидатов, не может удовлетворять условиям Эрроу 1, 3, 5 и единогласию.*

В другой формулировке сильная форма теоремы Эрроу утверждает, что любая избирательная система, которая не навязывает предпочтения избирателям и не эквивалентна диктатуре, должна нарушать либо критерий НПА, либо единогласие (или оба этих свойства). Сильную форму теоремы Эрроу делает еще более поразительной тот факт, что условие единогласия можно заменить на другое, лишь чуть-чуть более слабое (и которому удовлетворяют и относительное большинство и последовательное исключение), и теорема все равно останется справедливой. Мы исследуем эту идею тщательнее в следующей главе (см. с. 101), но пока закончим эту главу, изучив пример, который иллюстрирует особенно вопиющее нарушение единогласия.

Вопрос 4.21. Рассмотрим профиль предпочтений из табл. 4.6 для выборов с четырьмя кандидатами.

Таблица 4.6

Последовательное попарное голосование и единогласие

	Число проголосовавших		
Место	1	1	1
1	A	B	C
2	B	C	D
3	C	D	A
4	D	A	B

(а) Найдите расписание, с которым кандидат D победит на выборах при последовательном попарном голосовании.

(б) Четко объясните, почему ваш ответ на пункт (а) показывает, что это последовательное попарное голосование не удовлетворяет единогласию.

(в) Почему нарушение единогласия, которое вы обнаружили в этом вопросе в каком-то смысле хуже, чем те, которые вы обнаружили в вопросе 4.20? Объясните ваш ответ.

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 4.22. В этой и двух предыдущих главах мы рассмотрели пять различных избирательных систем для выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов: относительное большинство, правило Бордá, последовательное попарное голосование, система единственного передаваемого голоса и система Блэка. Как эти системы соотносятся друг с другом, если их применяют на выборах с двумя кандидатами? Объясните ваш ответ.

Вопрос 4.23. Справедлива ли теорема Эрроу для выборов с только двумя кандидатами? Если да, то объясните почему. В противном случае, приведите пример избирательной системы для выборов с двумя кандидатами, которая удовлетворяет всем пяти условиям Эрроу.

Вопрос 4.24. Какими из изученных желательных свойств диктатура как избирательная система обладает, а какими нет? А правило навязанного выбора? А правило меньшинства?

Вопрос 4.25. Для каждого из пунктов ниже найдите или придумайте такую избирательную систему для выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов, которая обладает всеми тремя перечисленными свойствами:

1) универсальность, НПА, единогласие;
2) универсальность, НПА, отсутствие диктатуры;
3) универсальность, единогласие, отсутствие диктатуры;
4) НПА, единогласие, отсутствие диктатуры.

Вопрос 4.26. Разыщите в средствах массовой информации статью о теореме невозможности Эрроу. Напишите резюме и отзыв на статью, основываясь на том, что вы узнали в этой главе.

Вопрос 4.27. Напишите краткую биографию Кеннета Эрроу, включите в нее его самые важные достижения в области теории голосования и вне ее.

Вопрос 4.28. Напишите краткую биографию Дункана Блэка, включите в нее его самые важные достижения в области теории голосования и вне ее.

Вопрос 4.29. Напишите краткую биографию Вильфредо Парето, включите в нее его самые важные достижения в области теории голосования и вне ее, информацию о его политических взглядах, и личные проблемы, с которыми он сталкивался.

Вопрос 4.30. Избирательная система Блэка служит примером *системы, пополненной по Кондорсе*. Это значит, что она определяет победителя по Кондорсе, если он существует, и переходит к какому-нибудь другому методу голосования в противном случае. Исследуйте по вашему выбору какую-нибудь другую систему, пополненную по Кондорсе, и напишите подробный отчет о ваших результатах. Включите в него полную оценку выбранной вами системы с использованием критериев справедливости избирательных систем, которые мы обсуждали в этой и предыдущих главах.

Вопрос 4.31. Предположим, что мы переопределим понятие избирательной системы. Теперь это будет правило, которое ставит в соответствие каждому возможному набору бюллетеней с транзитивными предпочтениями кандидата-победителя или нескольких кандидатов-победителей (а не транзитивный общественный порядок предпочтений). Будет ли теорема Эрроу по-прежнему справедлива при таком новом определении? Приведите убедительные доводы, чтобы подтвердить ваш ответ. (*Подсказка*. Возможно, вы захотите вернуться к нашему обсуждению последовательного попарного голосования и общественных порядков предпочтений, начатому на с. 57.)

Вопрос 4.32. Выясните, как проходит судейство на соревнованиях по фигурному катанию на зимних Олимпийских играх, и напишите резюме ваших изысканий. Включите в него настоящую финальную ранжировку и численные данные соревнований с недавних зимних Олимпийских игр.

Вопрос 4.33. Многие из ранжирующих систем, используемых при судействе на соревнованиях по фигурному катанию нарушают критерий НПА. Найдите журнал, газету или сайт в Интернете, в котором есть пример из жизни, иллюстрирующий такое нарушение. Напишите подробное резюме ваших изысканий, включите в него описание соревнований, во время которых произошел такой инцидент, результаты соревнований, полное описание ранжирующей системы, используемой судьями (можете сослаться на ваш ответ на вопрос 4.32, если это та же самая система), и ваше объяснение того, как вы убедились, что критерий НПА был нарушен.

Вопрос 4.34. Рассмотрите следующую избирательную систему для выборов, в которых участвуют более двух кандидатов. В каждой возможной паре кандидаты сравниваются в борьбе один-на-один, и победителю присуждают одно очко (или пол-очка, если случилась ничья). После того, как сравнения один-на-один закончены, кандидата, набравшего наибольшее число очков (или нескольких кандидатов в случае равных результатов), объявляют окончательным победителем на выборах. Эту систему часто называют *методом попарных сравнений*.

(а) Если бы метод попарных сравнений был использован для выборов декана математического факультета из вопроса 3.17, то кто бы стал победителем?

(б) Опишите естественный способ построения общественных порядков предпочтений, где используется метод попарных сравнений. Затем найдите общественный порядок предпочтений с помощью метода попарных сравнений для выборов президента БААОМ из вопроса 2.8.

(в) Сколько попарных сравнений потребуется для метода попарных сравнений на выборах, в которых участвуют четыре кандидата? А если в них участвуют пять кандидатов? n кандидатов (n обозначает произвольное целое число)?

(г) Приведите доводы за и против метода попарных сравнений. Как он соотносится с другими системами, которые мы обсуждали (относительное большинство, правило Борда́, последовательное попарное голосование, система единственного передаваемого голоса и система Блэка)?

(д) Каким из изученных нами критериев для оценки избирательных систем (анонимность, нейтральность, монотонность, критерий большинства, КПК, критерий проигравшего по Кондорсе, НПА и единогласие) удовлетворяет метод попарных сравнений? Какие он нарушает? Подробно объясните ваши ответы и приведите убедительные доводы, подтверждающие их.

(е) Найдите журнал, газету или сайт в Интернете, где описан пример, когда для принятия какого-либо решения или получения ранжировки был использован метод попарных сравнений. Запишите резюме ваших изысканий, включите в него название источника и исход голосования из этого примера.

Вопрос 4.35. Найдите дискуссию на Интернет-сайте Ральфа Нейдера (`http://www.votenader.org/`), где Нейдер утверждает, что Ал Гор потерпел поражение на выборах президента США в 2000 г. вовсе не из-за него. Изучите его комментарии и подумайте, что бы он мог сказать о критерии НПА? Согласны ли вы с его рассуждениями?

Вопрос 4.36. Изучите избирательную систему, используемую в популярном телешоу American Idol, и напишите подробный отчет о ваших изысканиях. Включите в него сравнение этой избирательной системы с другими изученными нами системами, анализ того, как она соотносится с разработанными нами критериями, и обсуждение некоторых противоречий, связанных с этой системой.

Вопрос 4.37. Изучите избирательную систему, используемую в реалити-шоу Last Comic Standing, и напишите подробный отчет о ваших изысканиях. Включите в него сравнение этой избирательной системы с другими изученными нами системами, анализ того, как она соотносится с разработанными нами критериями, и обсуждение некоторых противоречий, связанных с этой системой.

Вопрос 4.38. Теорема Эрроу была первой в ряду нескольких теорем невозможности, доказанных во второй половине XX века. Другие хорошо известные результаты этого периода — теоремы Сена и Гиббарда—Саттертуэйта. Изучите каждую из этих теорем и запишите подробный отчет о ваших изысканиях. Включите в него описание и анализ условий, используемых в каждой из этих теорем, их связь с условиями Эрроу, и краткие биографии ученых, имя которых носят теоремы.

Ответы на вопросы

4.2. (а) Система Блэка вернется к правилу Борда́. Дейл станет победителем, и итоговым общественным порядком предпочтений будет $D \succ P \succ W$.

(б) Поскольку согласно пункту (а) Уейн оказывается последним в итоговом порядке предпочтений, его выход из борьбы не изменит ее результата.

(в) Когда Уэйна исключат из бюллетеня, по системе Блэка победит Пол.

(г) Действительно странно, что исключение самого слабого кандидата из ранжировки пункта (а) приведет к тому, что победителем вместо Дейла станет Пол.

4.4. Система Блэка не удовлетворяет критерию НПА. Чтобы показать это, можно использовать пример из вопроса 4.2.

4.9. Ни одна из перечисленных систем не удовлетворяет критерию НПА.

4.10. И диктатура, и правило навязанного выбора удовлетворяют НПА.

4.11. (а) Приведенные попарные предпочтения могут привести только к одному возможному порядку предпочтений $X \succ Z \succ Y$; этот порядок транизитивен.

(б) Мы знаем, что $X \succ Y$ и $Z \succ X$. Для того, чтобы итоговый общественный порядок предпочтений был транзитивен, нужно потребовать еще, чтобы $Z \succ Y$.

(в) Если в выборах примет участие четвертый кандидат, информации, данной в пункте (а), станет недостаточно, чтобы определить, будет ли транзитивным итоговый общественный порядок предпочтений. Нам нужно будет еще знать, как общество оценивает нового кандидата в сравнении с каждым из кандидатов X, Y и Z.

4.12. (а) Если бы победителем был выбран A, две трети избирателей предпочли бы C. Но если бы победителем был выбран B, две трети избирателей предпочли бы A. А если бы победителем был выбран C, две трети избирателей предпочли бы B.

4.19. (а) Мы знаем, что A выигрывает, даже не набрав ни одного голоса за первое место, но это не позволяет нам заключить, что используемая избирательная система нарушает единогласие.

(б) Поскольку для всех избирателей B предпочтительнее A, если система удовлетворяет единогласию, в итоговом общественном порядке предпочтений B должен быть выше A. Но, конечно же, это невозможно, если A побеждает на выборах. Значит, использованная система должна нарушать единогласие.

4.20. (а) Правило относительного большинства *почти* удовлетворяет единогласию, т. е. удовлетворяет ему не полностью. Рассмотрим выборы с тремя кандидатами, на которых предпочтения каждого избирателя выглядят как $A \succ B \succ C$. В этом случае для каждого избирателя B предпочтительнее C, но в итоговом общественном порядке предпочтений B и C займут одинаковую позицию, поскольку ни один из них не получает голосов за первое место.

(б) Правило Борда́ удовлетворяет единогласию. (Можете ли вы объяснить, почему это так?)

(в) Система единственного передаваемого голоса нарушает единогласие по той же причине, что и правило относительного большинства.

ГЛАВА 5

Объяснение невозможного

Никто и не утверждает, что демократия совершенна или исполнена мудрости. На самом деле демократию называют худшей из всех форм правления, кроме тех, которые время от времени пытались использовать.

Уинстон Черчилль

Центральные вопросы

- Какая идея лежит в основании доказательства теоремы Эрроу?
- Можно ли ослабить условие единогласия Парето, чтобы разрешить проблемы, вскрытые теоремой Эрроу?
- Что такое одобрительное голосование? Разрешает ли оно какие-нибудь проблемы, вскрытые теоремой Эрроу?
- Что такое интенсивность критерия попарной независимости? Как он связан с теоремой Эрроу?

Вопрос-разминка 5.1. Рассмотрим следующее математическое утверждение:

Целое число не может делиться на 2, 11 и 23 и быть при этом меньше 500.

Истинно или ложно это утверждение? Приведите убедительные доводы или пример, чтобы подтвердить ваш ответ.

Предположим, мы хотим доказать, что утверждение из вопроса-разминки 5.1 истинно. Как мы можем сделать это? Один из способов такой: просто проверим одно за другим все целые числа и убедимся, что среди них нет таких, которые делятся на 2, 11 или 23 и при этом меньше 500. Но ведь это может занять много времени, не так ли? В действительности, поскольку целых чисел бесконечно много, мы никогда не сможем проверить их все.

Конечно же, мы могли бы заметно сократить объем работы, если бы рассматривали только те числа, которые меньше 500. Тогда нам осталось бы только показать, что ни одно из них не делится одновременно на 2, 11 и 23. Но даже в этом случае работы ужасно много. Не знаю, как вам, а мне уж точно не хочется перебирать все числа в этом длинном списке, искать делители каждого из них и: ну, вы понимаете.

К счастью, существует гораздо лучший способ доказать, что утверждение из вопроса-разминки 5.1 истинно. Что, если вместо того, чтобы одно за другим перебирать все числа, мы построим какие-нибудь логические доводы для доказательства истинности этого утверждения? Например, мы могли бы рассуждать примерно так:

Каждое из чисел 2, 11 и 23 простое. Таким образом, любое целое число, которое делится на 2, 11 и 23, должно быть больше или равно их произведению $2\times11\times23 = 506$. Следовательно, целое число не может делиться на 2, 11 и 23 и при этом быть меньше 500.

Я догадываюсь, о чем вы сейчас думаете. Какое отношение это все имеет к выборам? Что ж, ответ на этот вопрос может удивить вас. Трудно поверить, но стратегия, которую мы только что использовали при доказательстве утверждения из вопроса-разминки 5.1, может быть использована и для доказательства теоремы Эрроу. Очень скоро мы увидим, как это можно сделать. Но сначала давайте остановимся и посмотрим, где мы находимся и куда идем. Напомним, что в первых четырех главах мы рассмотрели множество избирательных систем, и у каждой из них был хотя бы один серьезный недостаток. В главе 4 мы пролили свет на эти трудности, познакомившись со знаменитой теоремой о невозможности Кеннета Эрроу и обнаружив, какой разрушительный эффект она произвела на наши поиски совершенной избирательной системы. В этой главе мы постараемся понять, *почему* теорема Эрроу верна, и рассмотреть некоторые возможные варианты разрешения проблем, которые обнаружил Эрроу.

Доказательство теоремы Эрроу

В этой главе мы начнем наши исследования с того, что шаг за шагом пройдем через доказательство теоремы Эрроу[1] Я должен предупредить вас: путешествие, которые мы собираемся предпринять, займет у нас много времени и сил. Теорема Эрроу — это очень значительный результат, и ее доказательство требует усилий и сосредоточенности. Тем не менее, мы в состоянии взять быка за рога и понять доказательство, если не будем слишком спешить. Когда мы закончим, вы

[1] Способ, который мы будем использовать для доказательства теоремы Эрроу, мы позаимствовали в адаптированном виде из статьи Геанакоплоса [21].

войдете в число избранных, которые не только знакомы со смыслом одной из самых важных теорем в истории математики, но еще и знают, почему она верна.

Прежде чем приступить к доказательству, мы должны сказать еще об одном обозначении, которым будем пользоваться. Напомним, что мы использовали знак $\succ$ чтобы обозначать, что один кандидат предпочтительней другого, и знак $\approx$ — что у них равный результат. В этом разделе нам иногда будет нужно говорить, что кандидат A предпочтительнее *или* сравним с другим кандидатом B. Мы будем обозначать этот тип соотношения, записывая $A \succsim B$. (Заметим, что как и раньше, имеется аналогия с символом $\geqslant$, который используется при сравнивании чисел.)

Теперь можно перейти к теореме Эрроу. Как бы странно это ни казалось, в действительности проще доказать более сильный вариант теоремы, который мы привели в конце гл. 4 (см. с. 85), чем доказывать оригинальную версию, сформулированную раньше в той же главе. Чтобы прояснить стратегию доказательства, мы начнем с того, что приведем новую формулировку сильного варианта теоремы, она будет немного отличаться от той, что была в конце гл. 4.

Теорема Эрроу (сильная форма). *Для выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов, нельзя указать избирательную систему, которая бы обладала свойствами универсальности и единогласия, удовлетворяла бы критерию НПА, и не была бы диктатурой.*

Вопрос 5.2. Объясните, почему сильная форма теоремы Эрроу, приведенная выше, эквивалентна варианту этой же теоремы, который был сформулирован в конце гл. 4.

Если вы были внимательны, то вы заметили, что наша обновленная версия теоремы Эрроу по стилю очень напоминает утверждение из вопроса-разминки 5.1. Точно так же, как и в том случае, мы могли бы попытаться доказать теорему Эрроу, применив грубую силу: т. е. проверить каждую из существующих избирательных систем и убедиться, что ни одна из них не удовлетворяет всем четырем условиям. Но трудно даже представить себе, как бы мы могли справиться с проверкой *всех* возможных избирательных систем. На самом деле, нет уверенности даже в том, что мы можем *найти* все возможные избирательные системы, не говоря уже о проверке свойств каждой из них.

Гораздо лучше было бы попытаться проделать в точности то же, что мы делали, отвечая на вопрос-разминку 5.1. Тогда мы просто предположили, что три из условий (делимость на 2, 11 и 23) выполнены, а потом объяснили, почему четвертое условие (не превышать 500) выполняться не может. Именно при таком подходе наш пересмотренный способ рассуждений оказывается особенно удобным. Мы можем начать наше доказательство с предположения о том, что мы рассматриваем выборы, в которых участвуют больше двух кандидатов, а избирательная система удовлетворяет свойствам универсальности, НПА и единогласия. Чтобы завершить доказательство, нам надо будет объяснить, почему эта избирательная система должна быть эквивалентна диктатуре. Иначе говоря, мы должны будем показать, что в этой системе найдется некоторый избиратель v такой, что если для произвольной пары кандидатов A и B для избирателя v кандидат A предпочтительней B, то и для общества A предпочтительней B.

В связи с этим полезно указать на аналогии между последним шагом в нашем методе доказательства и тем, чем мы занимались в гл. 1, когда доказывали теорему 1.22. В этой теореме мы предполагали, что у нас есть анонимная, нейтральная и монотонная избирательная система, и нам нужно было доказать, что это избирательная система с квотой. С этой целью мы строили процедуру, которая позволила нам найти потенциальную величину квоты. После этого мы доказали, что эта потенциальная квота в действительности работает так, как должна работать квота в системе с квотой.

Здесь наша стратегия будет очень похожей. Сначала мы построим процедуру, которая позволит нам найти потенциального диктатора для системы. Затем мы покажем, что этот потенциальный диктатор в действительности действует так, как действуют диктаторы в избирательных системах.

Чтобы добиться этого, сначала нам нужно будет рассмотреть очень полезную лемму. (Собственно говоря, слово «лемма» означает «вспомогательный результат». В математике леммой обычно называют результат, главное назначение которого — быть использованным при доказательстве другого, более важного результата). Хотя прямо сейчас вам может быть неясно, как мы будем использовать эту лемму, знайте, что она сыграет решающую роль при доказательстве теоремы Эрроу.

Лемма 5.3. *Предположим, что мы рассматриваем выборы, в которых участвуют более двух кандидатов и используется избирательная система V, обладающая свойствами универсальности и единогласия и удовлетворяющая критерию НПА. Предположим, что B — один из кандидатов на выборах и каждый избиратель помещает его либо первым, либо последним в своем индивидуальном списке предпочтений. Тогда в итоговом общественном порядке предпочтений, к которому приводит V, B тоже должен оказаться либо первым, либо последним (даже если половина избирателей ставят B на первое место, а другая половина — на последнее).*

Важно заметить, что когда в лемме 5.3 мы говорим, что кандидат стоит на первом или на последнем месте в индивидуальном или общественном порядке предпочтений, мы исключаем возможность того, что этот кандидат может разделить свой порядок с другим кандидатом. Вам будет полезно помнить об этом, когда вы будете отвечать на вопросы из оставшейся части этого раздела.

Для того, чтобы понять, почему лемма 5.3 справедлива, давайте начнем с предположения, что каждый голосующий на выборах действительно ставит B либо на первое, либо на последнее место в своем списке предпочтений. Других предположений о предпочтениях избирателей мы делать не будем.

Вопрос 5.4*. Предположим, что в общественном порядке предпочтений, к которому приводит V, кандидат B не оказывается ни на первом, ни на последнем месте. Объясните, почему в таком случае должны найтись два таких других кандидата A и C, что $A \succsim B$ и $B \succsim C$.

Вопрос 5.5. Какой вывод позволяет вам сделать транзитивность общественного порядка предпочтений об общественном предпочтении между A и C в предположении, что $A \succsim B$ и $B \succsim C$?

Вопрос 5.6*. Теперь предположим, что каждый избиратель изменил свой индивидуальный список предпочтений, передвинув C выше A, и не внося никаких других изменений. Повлияет ли это как-нибудь на итоговые общественные предпочтения между A и B или между B и C? Объясните ваш ответ. (*Подсказка.* Не забудьте, что все избиратели поставили B на первое или на последнее место в своих индивидуальных списках предпочтений.)

Вопрос 5.7. В вопросе 5.6 мы предположили такое изменение в предпочтениях, что во всех бюллетенях C оказалось выше, чем A. Какой вывод об итоговом общественном предпочтении между A и C при таком изменении нам позволяет сделать единогласие?

Вопрос 5.8*. Объясните, как ваши ответы на вопросы 5.5–5.7 приводят к противоречию. Что вы можете заключить о справедливости леммы 5.3 на основании этого противоречия? Тщательно объясните ваш ответ.

Теперь, когда справедливость леммы 5.3 доказана, будем продолжать искать нашего потенциального диктатора. С этих пор и до вопроса 5.16 мы будем считать, что имеют место выборы, в которых участвуют больше двух кандидатов, и что принята избирательная система V, удовлетворяющая универсальности, критерию НПА и единогласию (так что применима лемма 5.3). Для удобства, мы обозначим избирателей $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. И по причинам, которые станут ясны позже, мы начнем с рассмотрения специального случая, когда все избиратели в системе поставили B на последнее место, как показано в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Кандидат B единогласно ранжирован последним

	Избиратели			
Место	v_1	v_2	…	v_n
Первое	?	?	…	?
………				
Последнее	B	B	…	B

Вопрос 5.9. Что вы можете заключить о месте B в итоговом общественном порядке предпочтений, к которому приводит V, основываясь на том факте, что все избиратели поместили B на последнее место? Какое свойство позволяет вам сделать такой вывод?

Вопрос 5.10*. (а) Предположим, что *все избиратели* в своих индивидуальных списках предпочтений передвинули B с последнего на первое место. К какому изменению в общественном порядке предпочтений это приведет и почему произойдет это изменение?

(б) Предположим, что только *некоторые* из избирателей в своих индивидуальных списках предпочтений передвинули B с последнего на первое место. Какие при этом могут произойти изменения в итоговом общественном порядке предпочтений? (*Подсказка.* Не забудьте о лемме 5.3.)

(в) Предположим, что начиная с v_1 и далее один за другим по порядку, каждый избиратель в своем индивидуальном списке предпочтений передвинет B с последнего на первое место. Объясните, почему при этом должен найтись один избиратель, допустим, v_j, для которого это перемещение впервые приведет к соответствующему изменению в общественном порядке предпочтений?

Избиратель, которого выше мы обозначили v_j, — особенный в том смысле, что если даже все избиратели до него в своих индивидуальных списках предпочтений передвинули B с последнего на первое место (как показано в табл. 5.2), никаких изменений в итоговом общественном порядке предпочтений не происходит. А вот как только v_j

Таблица 5.2

Общество ранжирует B последним

	Избиратели							
Место	v_1	v_2	…	v_{j-1}	v_j	v_{j+1}	…	v_n
Первое	B	B		B	?	?	…	?
………								
Последнее	?	?	…	?	B	B	…	B

делает то же самое, (как показано в табл. 5.3), то сразу же в итоговом общественном порядке предпочтений B вдруг переходит с последнего места на первое. В таком случае мы можем назвать v_j *ключевым* избирателем.

Таблица 5.3

Общество ранжирует B первым

	Избиратели							
Место	v_1	v_2	…	v_{j-1}	v_j	v_{j+1}	…	v_n
Первое	B	B		B	B	?	…	?
………								
Последнее	?	?	…	?	?	B	…	B

Оказывается, v_j еще и диктатор. Мы докажем этот факт в два этапа. Сначала мы покажем, что для любой пары кандидатов, в которую B не входит, скажем A и C, верно утверждение: если для v_j кандидат A предпочтительнее C, то и для общества A будет предпочтительнее C. Затем мы покажем, что то же самое справедливо для любой пары кандидатов, в которую B входит.

Пусть на первом этапе A и C представляют собой любых двух кандидатов, отличных от B. Кроме того, предположим, что для v_j кандидат A предпочтительнее C. Мы хотим придти к выводу, что в итоговом общественном порядке предпочтений A будет предпочтительнее C. Так как нам нужно показать, что A будет предпочтительнее C, не принимая во внимание предпочтения всех избирателей за исключением v_j, то мы проигнорируем предпочтения всех избирателей, кроме v_j. Единственное, что мы предположили, — что для v_j кандидат A предпочтительнее C. Для удобства мы обозначим соответствующий профиль предпочтений S.

Вопрос 5.11*. Повлияет ли какое-нибудь из следующих изменений в S на итоговые общественные предпочтения между A и C? Объясните ваш ответ в каждом случае.

(а) v_j помещает B между A и C в своем индивидуальном списке предпочтений.

(б) Каждый из избирателей $v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}$ (т. е. все избиратели, предшествующие v_j) в своем индивидуальном списке предпочтений переместит B в самое начало.

(в) Каждый из избирателей $v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_n$ (т. е. все избиратели после v_j) в своем индивидуальном списке предпочтений переместит B в самый конец.

Вопрос 5.12. Предположим, что в профиле предпочтений S проделали все изменения, перечисленные в вопросе 5.11. Обозначим получившийся профиль предпочтений S'.

(а) Объясните, почему для каждого избирателя относительная ранжировка только кандидатов A и B в S' точно такая же, как и относительная ранжировка этих же кандидатов согласно предпочтениям, представленным в табл. 5.2.

(б) Используйте ваш ответ на пункт (а), чтобы объяснить, почему при заданном профиле предпочтений S' в итоговом общественном порядке предпочтений A будет предпочтительней B.

(в) Используйте тот же способ рассуждений, что в пунктах (а) и (б) и объясните, почему при заданном S' в итоговом общественном порядке предпочтений B будет предпочтительней C.

(г) Теперь используйте ваши ответы на пункты (б) и (в), чтобы объяснить, почему при заданном S' в итоговом общественном порядке предпочтений A будет предпочтительней C.

Вопрос 5.13*. Какой вывод об общественном порядке предпочтений, к которому приводит V при заданном S (а не S'), позволяют вам сделать ваши ответы на вопросы 5.11 и 5.12? Объясните свой ответ.

Вопрос 5.14*. Объясните, как ваш ответ на вопрос 5.13 позволяет вам сделать вывод, что как только v_j предпочитает A кандидату C, то и общество тоже предпочитает A кандидату C (независимо от предпочтений других избирателей).

Мы уже близки к цели. Вспомним, мы пытаемся показать, что v_j — диктатор. К этому моменту мы уже показали, что v_j контролирует общественные предпочтения между любой парой кандидатов, в которую B не входит. Теперь мы должны объяснить, почему v_j контролирует также общественные предпочтения между любой парой кандидатов, в которую B входит.

Здесь нам придется проявить хитрость. Напомним, что мы начали наши рассуждения с леммы 5.3 и с предположения, что все избиратели поставили кандидата B на последнее место. Это позволило нам найти потенциального диктатора, v_j, который контролирует общественные предпочтения между любой парой кандидатов, в которую не входит B. Если бы мы начали с предположения, что все избиратели поставили на последнее место какого-нибудь другого кандидата, скажем, A, мы бы пришли к тому, что нашелся бы другой потенциальный диктатор, допустим, v_i, который бы контролировал общественные предпочтения между любой парой кандидатов, в которую не входит A.

Вопрос 5.15. Пусть C — произвольный кандидат, отличный от A и B.

(а) Возвращаясь к вопросу 5.10, четко объясните, как v_j мог бы повлиять на общественные предпочтения между B и C. (*Подсказка.* Вспомним, что v_j выбран как ключевой в некотором смысле избиратель. Возможно, вы захотите изучить предпочтения в табл. 5.2 и 5.3 и итоговые общественные порядки предпочтений.)

(б) Какой вывод о соотношении между v_i и v_j позволяет вам сделать ваш ответ на пункт (а)? (*Подсказка.* Напомним, что v_i *полностью* контролирует общественные предпочтения между любой парой кандидатов, в которую не входит A.)

Вопрос 5.16*. 1. Рассмотрите ваш ответ на вопрос 5.15 и решите, истинно или ложно следующее утверждение. Кратко объясните, как вы сделали такой вывод.

2. Существует единственный избиратель v^*, который удовлетворяет всем трем следующим свойствам:

- v^* полностью контролирует общественные предпочтения между любой парой кандидатов, в которую не входит A.
- v^* полностью контролирует общественные предпочтения между любой парой кандидатов, в которую не входит B.
- v^* полностью контролирует общественные предпочтения между любой парой кандидатов, в которую не входит C.

3. Если бы существовал избиратель v^*, удовлетворяющий всем трем свойствам из пункта (а), то какой вывод вы могли бы сделать о нем?

Вопрос 5.17*. Подведите итог изученному в этом разделе, написав подробный план доказательства сильной формы теоремы Эрроу.

Прежде чем мы сможем формально покончить с теоремой Эрроу, нам нужно под конец обдумать еще одну деталь. Вспомним, что мы получили сильную форму теоремы Эрроу, заменив условия Эрроу 2 и 4 (монотонность и гражданское полноправие) на условие Парето (единогласие). Именно следующая лемма позволяет сделать эту замену.

Лемма 5.18. *Если избирательная система обладает свойствами монотонности, гражданского полноправия, и удовлетворяет критерию НПА, то она обладает также и свойством единогласия.*

Вопрос 5.19. Объясните, почему из леммы 5.18 и сильной формы теоремы Эрроу следует первоначальный вариант теоремы Эрроу, который мы сформулировали в гл. 4.

К этому моменту мы уже доказали несколько утверждений «если-то», так что вы уже освоились с ними. Как вы могли заметить, хорошее начало для любого доказательства — разобраться, что мы можем предполагать и что мы должны показать. Давайте посмотрим, можете ли вы справиться с этими двумя компонентами доказательства леммы 5.18.

Вопрос 5.20*. Что мы должны предполагать для доказательства леммы 5.18? Что нам следует попытаться показать?

Итак, давайте предположим, что избирательная система V обладает в точности теми свойствами, которые вы определили в вопросе 5.20. Теперь мы должны показать, что если каждый избиратель предпочитает A кандидату B, то и в общественном порядке предпочтений, к которому приводит V, A будет предпочтительнее B. Мы начнем с предположения, что нам задан некоторый произвольный профиль предпочтений, допустим, S, в котором каждый избиратель предпочитает A кандидату B. После этого мы попытаемся объяснить, почему при заданном профиле S в общественном порядке предпочтений A будет предпочтительнее B. Для этого мы должны рассмотреть два других профиля предпочтений, связанных с S. Первый из них обозначим через S' — это *произвольный* профиль предпочтений, для которого A будет выше B в итоговом общественном порядке предпочтений.

Вопрос 5.21. Какое свойство V из тех, что вы предполагали, позволяет вам сделать вывод, что такие профили предпочтений как S' действительно существуют?

Передвинув только A в индивидуальных списках предпочтений, составляющих S', получим новый, второй профиль предпочтений, в котором каждый избиратель предпочитает A кандидату B. Обозначим этот новый профиль S''.

Вопрос 5.22. (а) Как отличаются профили предпочтений S' и S'' относительно только индивидуальных предпочтений между кандидатами A и B?.

(б) Какой вывод об общественных предпочтениях между кандидатами A и B, к которым приводит V при заданном S'', позволяет вам сделать ваш ответ на пункт (а)? Какое свойство V из тех, что вы предполагали, позволило вам сделать такой вывод?

(в) Как отличаются профили предпочтений S и S'' относительно только индивидуальных предпочтений между кандидатами A и B?

(г) Какой вывод об общественных предпочтениях между кандидатами A и B, к которым приводит V при заданном S, позволяет вам сделать ваш ответ на пункт (в)? Какое свойство V из тех, что вы предполагали, позволило вам сделать такой вывод?

Вопрос 5.23*. Какой вывод об избирательной системе V и свойстве единогласия позволяет вам сделать ваш ответ на вопрос 5.22? Можно ли считать доказательство леммы 5.18 на этом законченным? Объясните ваш ответ.

Возможные решения

Теперь, когда мы убедились, что обе формы теоремы Эрроу справедливы, давайте рассмотрим некоторые различные способы, которые могут помочь нам разрешить трудности, выявленные в исследованиях Эрроу.

Ослабление условия Парето

Как мы видели в гл. 4, единогласие (условие Парето) — это довольно сильное свойство. С одной стороны, оно исключает возможность того, что два кандидата займут одинаковую позицию в общественном порядке предпочтений, если один кандидат единогласно предпочтительнее другого. Но, как мы уже убедились, именно такая ситуация возникает в случаях относительного большинства или последовательного исключения, когда несколько кандидатов приходят к равным результатам и у них нет голосов за первое место. К счастью, первоначальное условие Парето единогласия может быть изменено (лишь немного), чтобы принимать во внимание ничью между кандидатами.

Модифицированное условие Парето. Если на выборах есть такая пара кандидатов, допустим A и B, что каждый избиратель предпочитает A кандидату B, то в итоговом общественном порядке предпочтений B должен оказаться не выше A.

Вопрос 5.24*. Удовлетворяет ли относительное большинство модифицированному условию Парето? А система единственного передаваемого голоса? Последовательное попарное голосование? Приведите убедительные доводы, подтверждающие каждый ваш ответ.

Вопрос 5.25. Объясните, почему каждая избирательная система, удовлетворяющая первоначальному условию Парето, будет удовлетворять также и модифицированному условию Парето.

Вопрос 5.25 говорит нам, что модифицированное условие Парето слабее, чем первоначальное условие Парето. Иначе говоря, избирательных систем, удовлетворяющих модифицированному условию Парето, больше, чем систем, удовлетворяющих первоначальному условию Парето. С учетом этого, естественно поставить вопрос, останется ли теорема Эрроу по-прежнему справедливой, если заменить условие Парето на модифицированное, более слабое. Возможно, при большем наборе избирательных систем, удовлетворяющих модифицированному условию, нам удастся найти систему, которая удовлетворяет и другим условиям Эрроу.

К сожалению, это неудачный подход. Как мы увидим в следующем вопросе, если бы существовала избирательная система, удовлетворяющая условиям Эрроу 1, 3 и 5, а также модифицированному условию Парето, то ее можно было бы слегка подправить, так что она стала бы удовлетворять условиям Эрроу 1, 3 и 5 и первоначальному условию Парето. Но ведь такая система была бы живым, явным противоречием теореме Эрроу! Таким образом, первая система (которая удовлетворяет условиям Эрроу 1, 3 и 5, а также модифицированному условию Парето) в действительности не может существовать.

Вопрос 5.26. Предположим, что существует избирательная система, скажем, V, которая удовлетворяет условиям Эрроу 1, 3 и 5 и модифицированному условию Парето. Пусть V' — новая избирательная система, определенная следующим образом:

- Если в общественном порядке предпочтений, к которому приводит V, нет ничьих, то V' приводит к тому же самому общественному порядку предпочтений.
- Если в общественном порядке предпочтений, к которому приводит V, есть кандидаты, занимающие одинаковую позицию, то V' разрешает эту ситуацию, как только общество единогласно предпочитает одного из этих кандидатов другому (в пользу единогласно предпочтенного кандидата). Например, если A и B занимают одинаковую позицию в общественном порядке предпочтений, к которому приводит V, а общество единогласно предпочитает A кандидату B, то в общественном порядке предпочтений, к которому приводит V', кандидат A окажется выше B.

Объясните, почему V' будет удовлетворять условиям Эрроу 1, 3 и 5 и первоначальному условию Парето, входя таким образом в противоречие с сильной формой теоремы Эрроу.

Одобрительное голосование

В 1970-х гг. несколько политологов независимо друг от друга предложили новый метод определения победителя на выборах, в которых участвуют больше двух кандидатов. Этот метод, который теперь обычно называют *одобрительным голосованием*, действует следующим образом.

- Каждый избиратель голосует, «одобряя» или «не одобряя» каждого кандидата на выборах. Избиратели могут одобрить столько кандидатов, сколько пожелают.
- Общественный порядок предпочтений определяется исходя из числа голосов «за», набранных каждым кандидатом. Вначале идет кандидат, набравший больше всех голосов «за», а в конце — набравший меньше всех голосов «за» (при этом допускаются ничьи, когда кандидаты набирают одобрительных голосов поровну).

Вопрос 5.27*. Три друга, Питер, Джеймс и Джон, пытаются определить, кто из них самый замечательный. Для этого они попросили девятерых своих друзей отдать за них голоса. Результаты приведены в табл. 5.4, где ✓ означает голос «за».

Таблица 5.4

Одобрительное голосование

	Число проголосовавших		
Кандидат	4	3	2
Питер	✓		✓
Джеймс		✓	✓
Джон			

(а) Кто окажется самым замечательным при одобрительном голосовании? Какой получится общественный порядок предпочтений?

(б) Как вы думаете, точно ли отражают результаты одобрительного голосования волю избирателей? Почему?

Одобрительное голосование принято многими научными и техническими организациями, такими как Американское математическое общество, научно-исследовательский институт управления и менеджмента, Американская статистическая ассоциация и Инженерный институт электротехники и электроники (IEEE). В каждой из этих организаций используется одобрительное голосование для избрания руководителей и принятия других важных решений. Кроме того, одобрительное голосование используют при выборах генерального секретаря ООН и выборах новых членов в Национальной академии наук США. В некоторых штатах его используют также на внутренних выборах в политических партиях.

Многие сторонники одобрительного голосования утверждают, что поскольку в этом методе в поданных бюллетенях нет ранжировок, теорема Эрроу к нему неприменима. На первый взгляд, такой вывод кажется вполне логичным. Но в действительности ситуация несколько сложнее. На самом деле вопрос должен стоять так: можно ли рассматривать одобрительное голосование как избирательную систему в смысле определения 4.13? Иначе говоря, можно ли одобрительное голосование считать функцией, которая на входе получает набор транзитивных списков предпочтений, а на выходе выдает транзитивный общественный порядок предпочтений? Если это так, то теорема Эрроу по-прежнему применима. Если нет, то может быть, в конце концов нам удалось все-таки обнаружить совершенную избирательную систему. Давайте рассмотрим этот вопрос подробнее.

Вопрос 5.28*. Рассмотрим двух избирателей из табл. 5.4, которые одобрили Питера и Джеймса. Какой из следующих индивидуальных порядков предпочтений совместим с одобрительными бюллетенями этих двух избирателей?

(а) Питер $\succ$ Джеймс $\succ$ Джон
(б) Джеймс $\succ$ Питер $\succ$ Джон
(в) Питер $\approx$ Джеймс $\succ$ Джон
(г) Джеймс $\approx$ Питер $\approx$ Джон
(д) Питер $\succ$ Джеймс $\approx$ Джон

Вопрос 5.28 наводит на мысль, что хотя для одобрительного голосования требуется другой вид бюллетеней, нежели для рассмотренных раньше избирательных систем, но на самом деле исходные предпочтения избирателей все равно можно рассматривать прежним способом. Нельзя отрицать, что соответствие между одобрительными бюллетенями и порядками предпочтений немного расплывчато в том смысле, что любой возможный одобрительный бюллетень может быть совместим с несколькими различными порядками предпочтений. И аналогично, каждый возможный порядок предпочтений

будет, скорее всего, совместим с несколькими различными одобрительными бюллетенями.

Помня об этом, давайте еще раз посмотрим на вопрос 5.28. Как вы думаете, какой из списков предпочтений этого вопроса *лучше всего* отражает одобрительный бюллетень избирателей, проголосовавших в поддержку Питера и Джеймса? Если бы кто-нибудь спросил меня, я бы сказал, что это список из пункта (в) (Питер $\approx$ Джеймс $\succ$ Джон), поскольку он никак не уточняет порядка между Питером и Джеймсом. Он точно отражает информацию, представленную в одобрительных бюллетенях избирателей. Кроме того, в нем не делается никаких дополнительных предположений об относительном порядке кандидатов, кроме тех, что которые прямо следуют из данных, представленных в одобрительных бюллетенях. Эти наблюдения подсказывают способ формально определить одобрительное голосование.

Определение 5.29. Избирательная система, известная под названием *одобрительное голосование*, характеризуется следующими двумя условиями:

- На входе она получает набор только таких списков предпочтений, в которых символ $\succ$ встречается ровно один раз. Другими словами, допускаются только такие списки предпочтений, в которых есть один или несколько кандидатов, разделивших первое место, а за ними идут все остальные кандидаты, разделяющее последнее место.
- Общественный порядок предпочтений определяется числом голосов за первое место, которое набирает каждый из кандидатов, начиная с того кандидата, который набрал таких голосов больше всех, и кончая тем кандидатом, который набрал таких голосов меньше всех (при этом допускаются ничьи, если кандидаты набрали одинаковое число голосов за первое место.)

В связи с этим мы часто будем называть голоса за первое место из определения 5.29 *одобрительными голосами*. Это соглашение вполне соответствует нашему более интуитивному представлению об одобрительном голосовании.

Вопрос 5.30*. (а) Можно ли назвать одобрительное голосование, описанное в определении 5.29, избирательной системой в смысле определения 4.13?

(б) По самому определению одобрительное голосование нарушает один из важных изученных нами критериев оценки избирательных систем. Какой критерий оно нарушает, и как по вашему мнению — приемлемо или нет такое нарушение? Четко объясните ваши ответы.

Итак, из вопроса 5.30 мы видим, что по определению одобрительное голосование автоматически нарушает одно из условий Эрроу. А что можно сказать о других условиях Эрроу, в частности, о труднодостижимом критерии НПА?

Вопрос 5.31*. Предположим, что выборы проводятся по методу одобрительного голосования, но из-за нарушений процедуры необходимо повторное голосование. Предположим также, что в ходе этого повторного голосования некоторые избиратели внесли изменения в свои бюллетени, но таким образом, что их индивидуальные предпочтения между кандидатами A и B не были затронуты.

(а) Объясните, почему при повторном голосовании разность чисел одобрительных голосов, набранных A и B, останется той же, что и в первом голосовании.

(б) Какой вывод об одобрительном голосовании и критерии НПА вы можете сделать на основании вашего ответа на пункт (а)?

Вопрос 5.32*. (а) Является ли одобрительное голосование анонимным? нейтральным? монотонным? Четко объясните ваши ответы.

(б) Удовлетворяет ли одобрительное голосование условию Парето? Почему?

Вопрос 5.33. Предположим, что для выборов председателя студенческого совета в вашем колледже предложен метод одобрительного голосования. Поддержите вы это предложение или нет? Напишите официальное письмо редактору газеты вашего колледжа, в котором изложите свою точку зрения. Включите в ваши рассуждения некоторые рассмотренные нами в этом разделе свойства одобрительного голосования, а также некоторые практические соображения, относящиеся к его реализации.

Интенсивность попарной независимости

Мы закончим этот раздел, рассмотрев одно потенциальное решение теоремы Эрроу. Это последний вариант, который мы рассмотрим; он был предложен Дональдом Саари, профессором математики и экономики, автором многих статей и книг по теории голосования и выборов. Интерпретацию Саари теоремы Эрроу можно подытожить таким образом:

- Мы рассматриваем только такие избирательные системы, которые приводят к транзитивным общественным порядкам предпочтений. Чтобы избежать ситуации «мусор на входе — мусор на выходе», мы должны также требовать, чтобы индивидуальные предпочтения тоже были транзитивными.

- Транзитивность предусматривает некоторые связи меду попарными сравнениями предпочтений отдельного избирателя. Например, если для некоторого избирателя A предпочтительнее B, а B предпочтительнее C, то транзитивность требует, чтобы для этого избирателя A был бы предпочтительнее C.
- Критерий НПА требует, чтобы избирательные системы определяли общественные предпочтения между парой кандидатов, исходя только из индивидуальных предпочтений избирателей между этими двумя кандидатами. Это требование предписывает избирательным системам отбрасывать дополнительную информацию, предоставленную транзитивностью. Именно это требование делает невозможным для систем, удовлетворяющих критерию НПА, проводить различие между избирателями с рациональными, транзитивными предпочтениями и избирателями с иррациональными, циклическими предпочтениями.

Согласно Саари, критерий НПА по существу аннулирует предположение о том, что индивидуальные предпочтения транзитивны. Это служит причиной того, что для вполне разумной избирательной системы оказывается возможным приводить к запрещенным циклическим общественным предпочтениям.

Саари решил эту проблему, ослабив критерий НПА и позволив избирательным системам учитывать не только попарные предпочтения избирателей, но еще и *интенсивность*, с которой они придерживаются этих предпочтений. Мы формализуем эту идею в следующих двух определениях.

Определение 5.34. Предположим, что для отдельного избирателя имеет место предпочтение $A \succ B$ между двумя кандидатами. *Интенсивность* этого предпочтения равна числу кандидатов, перечисленных между A и B в индивидуальном списке предпочтений этого избирателя.

Вопрос 5.35*. Чему равна интенсивность предпочтения избирателя между кандидатами A и B для следующих списков предпочтений?

(а) $A \succ B \succ C \succ D$

(б) $A \succ C \succ D \succ B$

(в) $D \succ A \succ C \succ B$

Определение 5.36. Мы говорим, что избирательная система, для которой общественный порядок предпочтений между двумя кандидатами зависит только от относительного порядка этих двух кандидатов в индивидуальных списках предпочтений и от интенсивности этого предпочтения, удовлетворяет критерию *интенсивности попарной независимости* (сокращенно *ИПН*).

Мы можем иначе сформулировать условие, когда избирательная система удовлетворяет ИПН. А именно, если некоторые или все избиратели изменят свои списки предпочтений, но так, что ни один избиратель не изменит ни своего предпочтения между двумя отдельными кандидатами A и B, ни его интенсивности, то итоговое общественное предпочтение между A и B останется неизменным.

Вопрос 5.37*. Предположим, что Грег, Шерон, Дин и Каролина — четыре последних участника соревнования в новейшем реалити-шоу «Остров голодной смерти». Согласно правилам шоу, для того, чтобы определить имя игрока, выбывающего в очередном раунде игры, используется правило Борда́. К сожалению, уже после того, как все четыре бюллетеня были поданы, Грег поддался слабости и принялся их есть. В конце концов Шерон, Дин и Каролина смогли его обуздать, но успели спасти только следующую информацию:

- В двух бюллетенях содержался частичный порядок Г $\succ$ Ш.
- В одном бюллетене содержался частичный порядок Ш $\succ$ К $\succ$ Г.
- В оставшемся бюллетене сохранилась полная ранжировка Г $\succ$ $\succ$ Д $\succ$ К $\succ$ Ш.

Используя только эту информацию, что вы можете сказать об итоговом общественном предпочтении между Грегом и Шерон?

Вопрос 5.38. Предположим, что для отдельной пары кандидатов на выборах, скажем A и B, вы знаете все о предпочтениях избирателей между этими кандидатами и об интенсивности этих предпочтений. Предположим, что в качестве избирательной системы на выборах используют правило Борда́.

(а) Достаточно ли у вас информации, чтобы определить общественное предпочтение между A и B? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ. (*Подсказка.* Возможно, вы найдете полезным еще раз рассмотреть рассуждения из вопроса 5.37.)

(б) Удовлетворяет ли правило Борда́ критерию ИПН? Почему?

Вопрос 5.39*. Существует ли избирательная система, которая удовлетворяет универсальности, единогласию, ИПН, и при этом не является диктатурой? Противоречит ли ее существование теореме Эрроу?

Заключительные замечания

На протяжении последних пяти глав мы многое узнали об избирательных системах. Мы выяснили, удовлетворяют ли они установленным нами разумным стандартам. Мы выяснили, что теорема Эрроу утверждает, что некоторые критерии справедливости не совместимы друг с другом, какую избирательную систему мы бы ни рассматривали. Но теорема Эрроу не говорит нам о том, что хороших или разумных систем, из которых можно выбрать что-нибудь подходящее, не бывает совсем. Наш успех в отыскании избирательной системы, которая ведет себя так, как нам хочется, зависит от того, насколько мы готовы к компромиссу по различным желаемым характеристикам. Возможно, мы не захотим пожертвовать единогласием или универсальностью, но мы только что видели в предыдущем разделе, что небольшое изменение критерия НПА позволит нам в действительности добиться некоторого прогресса. Другие изменения, несомненно, приведут к другим решениям, и теперь в нашем распоряжении есть много средств, чтобы оценить эти возможности.

И наконец, важно заметить, что хотя мы сконцентрировались в основном на математических свойствах избирательных систем, следует принимать во внимание и практические соображения. Например, для последовательного попарного голосования может потребоваться много денег и времени, если в выборах принимает участие много кандидатов. Ранжирующие системы, такие как правило Борда́, тоже могут оказаться трудноосуществимыми в больших выборах. (Представьте себе, что на недавних перевыборах в Калифорнии нужно было бы проранжировать всех 135 кандидатов). Тот факт, что не существует совершенной избирательной системы, объясняет, почему так много споров идет вокруг вопроса — какие системы в каких ситуациях лучше использовать. К счастью, наши исследования по этой теме подготовили вас к тому, чтобы понимать и оценивать аргументы в таких спорах, и составить свое собственное мнение о лучших способах эффективного осуществления демократии.

Вопрос 5.40. Вспомните все, о чем мы узнали до сих пор. Как вы думаете, какая избирательная система наилучшая? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ, учитывая и математические и практические аспекты. Зависит ли ваш ответ от вида выборов и числа кандидатов на них? Если да, то каким образом?

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 5.41. Объясните, в каком месте нашего доказательства теоремы Эрроу были использованы следующие предположения:

- В выборах участвуют более двух кандидатов.

- Избирательная система должна приводить к транзитивным общественным порядкам предпочтений.
- Избирательная система должна удовлетворять универсальности.
- Избирательная система должна удовлетворять критерию НПА.
- Избирательная система должна удовлетворять единогласию.

Вопрос 5.42. Какими из свойств (универсальностью, единогласием или ИПН) обладает избирательная система Блэка (см. вопрос-разминку 4.1), а какими она не обладает? Приведите убедительные аргументы или примеры, подтверждающие ваши ответы.

Вопрос 5.43. Напишете краткую биографию Дональда Саари; включите в нее описание того, чем он занимается сейчас, какую избирательную систему он предпочитает, и его важнейший вклад в теорию голосования.

Вопрос 5.44. Найдите экземпляр статьи Дональда Саари, в которой он использует геометрические соображения для анализа избирательных систем, и запишите резюме того, что вам удалось понять.

Вопрос 5.45. Разыщите сведения о Стивене Брамсе, профессоре New York University, и запишите резюме ваших изысканий. Какую избирательную систему он предпочитает? Как вы думаете, как бы проходила дискуссия между Брамсом и Дональдом Саари? Полагая, что оба они приводят сильные доводы в защиту предпочитаемых систем, чью бы сторону вы приняли?

Вопрос 5.46. Выясните, как проходят выборы достойных быть увековеченными в Национальной галерее бейсбольной славы, и запишите подробный отчет о ваших изысканиях. Включите в него по крайней мере описание того, как отбираются номинанты; кто голосует; какая избирательная система используется для того, чтобы определить, кто из номинированных достоин увековечивания; критерии, которым должны удовлетворять не прошедшие номинанты, чтобы остаться в списке для следующего голосования; а также некоторые примеры из жизни.

Вопрос 5.47. (а) Как вы думаете, кто победил бы в общенациональных выборах, если бы победитель по штату Флорида на выборах президента в 2000 г. определялся бы не по правилу относительного большинства, а одобрительным голосованием? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ.

(б) Как вы думаете, кто бы победил на выборах губернатора Миннесоты в 1998 г., если победитель определялся бы не по правилу относительного большинства, а одобрительным голосованием? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ.

Вопрос 5.48. Предложите способ смоделировать одобрительное голосование таким образом, чтобы условие универсальности Эрроу *было удовлетворено*. Какие из оставшихся условий Эрроу удовлетворяются в предложенной вами модели, а какие нарушаются?

Вопрос 5.49. Найдите редакционную статью в средствах массовой информации или в Интернете, поддерживающую применение метода одобрительного голосования для проведения выборов, в которых участвуют более двух кандидатов. Напишите резюме этой статьи. Затем сравните и сопоставьте аргументы из этой статьи и ваши исследования в этой главе.

Вопрос 5.50. Найдите редакционную статью в средствах массовой информации или в Интернете, поддерживающую применение правила Бордá для проведения выборов, в которых участвуют более двух кандидатов. Напишите резюме этой статьи. Затем сравните и сопоставьте аргументы из этой статьи и ваши исследования в этой главе.

Вопрос 5.51. Найдите статью или книгу, в которой предлагается возможный метод для разрешения теоремы Эрроу, отличный от трех исследованных нами в этой главе. Обсудите аргументы за и против этого возможного метода и сравните его с тремя методами, исследованными нами.

Вопрос 5.52. Некоторые утверждают, что в моменты опасности краткие периоды диктатуры могут быть необходимыми и даже желательными. Например, несмотря на все свои очевидные недостатки (чтобы не сказать хуже), Адольф Гитлер добился настолько заметного успеха, выводя Германию из тяжелого экономического положения после первой мировой войны, что в 1938 г. журнал Time Magazine назвал его Человеком Года. Как вы думаете, может ли диктатура при каких-либо обстоятельствах быть выгодной для общества? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ.

Ответы на вопросы

5.4. Поскольку B не занял единолично первое место в общественном порядке предпочтений, должен найтись какой-нибудь другой кандидат, который выше или равен B по порядку. Точно так же, поскольку B не занял единолично последнее место в общественном порядке предпочтений, должен найтись какой-нибудь другой кандидат, который ниже или равен B по порядку.

5.6. Поскольку каждый избиратель поставил B на первое или на последнее место в своем индивидуальном списке предпочтений, перемещение C выше A при отсутствии других изменений никак не повлияет на индивидуальные предпочтения избирателей между A и B или между B и C. Таким образом, согласно НПА, итоговые общественные предпочтения между A и B, а также между B и C не изменятся.

5.8. Противоречие заключается в том, что $A \succsim C$ (согласно вопросу 5.5) и $C \succ A$ (согласно вопросу 5.7). Ясно, что оба эти соотношения не могут выполняться одновременно.

5.10. (а) Если бы все избиратели передвинули B с последнего места на первое, то по единогласию, B должен бы оказаться первым в итоговом общественном порядке предпочтений.

(б) Если бы только некоторые из избирателей переместили B с последнего места на первое, то согласно лемме 5.3 в итоговом общественном порядке предпочтений B либо останется на последнем месте, либо передвинется на первое.

(в) Поскольку общественный порядок предпочтений должен был измениться (вначале в нем B занимал последнее место, когда все избиратели ставили B на последнее место, а затем B занял первое место, когда все избиратели поставили его на первое место), значит по мере того, как избиратели по одному перемещали B с последнего места на первое в своих индивидуальных списках предпочтений, должен был найтись некоторый избиратель, для которого это изменение в итоговом общественном порядке предпочтений случилось впервые.

5.11. Согласно критерию НПА, ни одно из перечисленных изменений не повлияет на итоговые общественные предпочтения между A и C.

5.13. Поскольку общественное предпочтение между A и C одинаково и при системе S и при системе S', (согласно вопросу 5.11), а A предпочтительнее C в итоговом общественном порядке предпочтений, к которому приводит S' (согласно вопросу 5.12), мы можем заключить, что в итоговом общественном порядке предпочтений, к которому приводит S, A тоже будет предпочтительнее C.

5.14. До вопроса 5.11 мы предполагали лишь, что для v_j кандидат A предпочтительнее C. Одно только это предположение позволило нам (после некоторых усилий) сделать вывод, что A оказался предпочтительнее C и в итоговом порядке предпочтений. Поскольку мы ничего не предполагали о предпочтениях других, кроме v_j, избирателей, наш вывод не изменится, даже если для некоторых или всех остальных избирателей, отличных от v_j, кандидат A не будет предпочтительнее C.

5.16. Утверждение пункта (а) справедливо, так как v_j удовлетворяет всем трем условиям. (Мы установили это для первых двух

условий, и аналогичные рассуждения годятся и для третьего условия.) Значит, мы можем заключить, что v^* — это диктатор v_j.

5.20. Чтобы доказать лемму 5.18, мы должны предположить, что у нас есть избирательная система V, обладающая свойством монотонности и удовлетворяющая критерию НПА и условию гражданского полноправия. Затем мы должны попытаться доказать, что V удовлетворяет также и единогласию.

5.23. Мы можем доказать, как мы того и хотели, что V удовлетворяет единогласию. Этим заканчивается доказательство леммы 5.18.

5.24. Правило относительного большинства удовлетворяет модифицированному условию Парето. Если каждый избиратель на выборах ранжирует A выше B, то B не получит ни одного голоса за первое место. Поэтому A не может набрать голосов за первое место меньше, чем B, и согласно правилу относительного большинства в итоговом общественном порядке предпочтений B не может оказаться выше A (хотя у них может оказаться равный результат). Система единственного передаваемого голоса тоже удовлетворяет модифицированному условию Парето, в то время как последовательное попарное голосование ему не удовлетворяет (как доказано в вопросе 4.21).

5.27. (а) Поскольку Питер получает 6 голосов «за», Джеймс — 5, а Джон не получает ни одного, одобрительное голосование приведет к такому общественному порядку предпочтений:

$$\text{Питер} \succ \text{Джеймс} \succ \text{Джон}.$$

5.28. Каждый из индивидуальных порядков предпочтений в пунктах (а), (б) и (в) может быть совместим с одобрительными бюллетенями двух указанных избирателей. А порядки предпочтений в пунктах (г) и (д) не могут быть совместимы с этими бюллетенями, поскольку в каждом из них указана ничья между двумя кандидатами, один из которых одобрен, а другой — нет.

5.30. Одобрительное голосование — это избирательная система в смысле определения 4.13, хотя при таком голосовании нарушается свойство универсальности, поскольку накладываются ограничения на виды списков предпочтений, которые могут подаваться как входные данные.

5.31. (а) Предположим, что голосуя в первый раз, избиратель одобрил и A, и B (т. е. поставил и A, и B на первое место в своем индивидуальном списке предпочтений). Тогда на перевыборах он должен опять или одобрить и A, и B, или не одобрить их обоих.

В первом случае и A, и B *сохранят* голос «за», который они получили от избирателя при первом голосовании. Во втором случае и A, и B *потеряют* голос «за», который они получили от избирателя при первом голосовании. В любом случае результат для обоих кандидатов будет совершенно одинаковым, так что итоговая разность полученных ими голосов «за» не изменится. То же самое справедливо, если избиратель вначале не одобрил обоих кандидатов A и B, или же одобрил одного из них, и не одобрил другого.

(б) Пункт (а) позволяет заключить, что одобрительное голосование удовлетворяет критерию НПА.

5.32. Одобрительное голосование анонимно, нейтрально, монотонно *и* удовлетворяет условию Парето.

5.35. (а) Поскольку между A и B нет других кандидатов, интенсивность предпочтения $A \succ B$ равна 0.

(б) Поскольку между A и B есть еще два кандидата (C и D), то интенсивность предпочтения $A \succ B$ равна 2.

5.37. Из каждого из двух бюллетеней, содержащих частичный порядок Г $\succ$ Ш, Грег получит на одно очко больше, чем Шерон. Из бюллетеня, содержащего частичный порядок Ш $\succ$ К $\succ$ Г, Шерон получит на два очка больше, чем Грег. И из оставшегося бюллетеня Грег получит на три очка больше, чем Шерон, что приведет к общественному предпочтению Г $\succ$ Ш.

5.39. Правило Бордá удовлетворяет универсальности, единогласию и критерию ИПН, не являясь при этом диктатурой. Но это не противоречит теореме Эрроу, поскольку критерий ИПН слабее, чем критерий НПА.

ГЛАВА 6

Один человек — один голос?

Центральные вопросы

- Что такое избирательная система с весом? Какие бывают простые примеры избирательных систем с весом?
- Чем избирательные системы с весом похожи на избирательные системы, изученные нами в предыдущих главах? Чем они отличаются?
- Что значит для избирателя быть диктатором или обладать правом вето, если используется избирательная система с весом? Эквивалентны ли эти свойства?
- Как можно использовать свойства устойчивости к мене и устойчивости к сделке, чтобы характеризовать избирательную систему с весом?

Вопрос-разминка 6.1. Предположим, что после особенно неудачной рекламной кампании, три акционера Captain Ahab's Fish & Chips созвали внеочередное собрание, чтобы решить судьбу тогдашнего вице-президента по маркетингу Дина Бумхауэра. Количество акций каждого акционера представлено в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Акционеры Captain Ahab's

Акционер	Число акций
Дуг	101
Николас	97
Элизабет	2

В начале собрания Дуг предложил уволить Бумхауэра и подыскать ему замену. Предложение было поставлено на голосование и теперь каждый акционер должен проголосовать по предложению Дуга, сказав «да» или «нет».

(а) Можно ли назвать правило большинства подходящим методом для определения результатов голосования? Почему?

(б) Как вы думаете, какой метод следует использовать для определения результатов голосования? Как вы думаете, какая судьба ожидает Бумхауэра, если будет использован этот метод?

Если вы вернетесь к тому, что мы обсуждали в гл. 1, вы, возможно, вспомните, что там мы начали перечислять желательные свойства, которыми, как мы хотели, обладали бы избирательные системы. Первым из них мы назвали анонимность (т. е. чтобы все избиратели были равны). Идея «один человек, один голос» кажется неразрывно связанной с нашим понятием демократии, и это справедливо. Но, как мы только что видели в вопросе-разминке 6.1, бывают ситуации, когда нельзя согласиться с тем, чтобы предпочтения всех избирателей имели бы одинаковый вес. Например, в деловом мире слово акционеров, у которых больше акций в компании, более весомо при принятии решений, чем слово тех, у которых акций меньше, и это совершенно правомерно. В этом случае неравенство кажется вполне разумным — в конце концов, было бы бессмысленно, если бы обладатель двух акций компании был бы так же влиятелен, как владелец половины компании.

Отвечая на пункт (б) вопроса 6.1, вы, возможно, предложили, чтобы голосу каждого акционера был приписан некоторый вес, так чтобы он был пропорционален числу акций, которыми он владеет. Избирательные системы, действующие в соответствие с этим принципом, обычно называются избирательными системами *с весом*. Как правило, они возникают в ситуациях, когда по какому-либо предложению требуется принять решение вида да/нет или принять/отклонить. Важно заметить, что такой вид выборов контрастирует с выборами, которые мы изучали в предыдущих главах. Раньше нас интересовало построение некоторой ранжировки потенциальных кандидатов на определенную должность, или по крайней мере выбор победившего кандидата. А теперь наша главная цель состоит в том, чтобы дать ответ да/нет на некоторый вопрос (например, «Следует ли уволить Бумхауэра и подыскать ему замену?»). Это не значит, что избирательные системы с весом не возникают при других обстоятельствах. Действительно, система, используемая на выборах президента Соединенных Штатов (коллегия выборщиков) — это разновидность избирательной системы с весом. Мы подробно рассмотрим эту частную систему в гл. 8, а пока сосредоточимся на избирательных системах с весом в рамках принятия решений да/нет.

Избирательные системы с весом

Определение 6.2. *Избирательная система с весом* — это система, используемая для принятия решения по вопросу типа да/нет, или *запроса*. Избирательные системы с весом характеризуются следующим образом:

- Набор *избирателей* — В избирательной системе с весом n избирателей, мы обозначим их $v_1, v_2, \dots, v_n$.
- Набор *весов* — Каждому избирателю мы ставим в соответствие положительное число, называемое весом избирателя, которое будем интерпретировать как число голосов, которыми обладает этот избиратель.
- *Квота* — Для избирательной системы с весом квота — это положительное число q такое, что запрос *принимается*, если сумма весов всех избирателей, проголосовавших «да» по запросу, больше или равна q, и *отклоняется* в противном случае.

В определении 6.2 введено много понятий, и чтобы рассмотреть их в естественном контексте, давайте вернемся к вопросу-разминке 6.1.

Вопрос 6.3*. Предположим, что для определения решения по запросу Дуга из вопроса-разминки 6.1 (уволить Бумхауэра и подыскать ему замену) используется избирательная система с весом.

(а) Кто будет избирателями в этой системе?

(б) Какой вес следует приписать каждому избирателю?

(в) Какое значение квоты будет разумным и почему?

Вопрос 6.4*. Для пунктов (а)—(в) ниже используйте тех избирателей и те веса, которые вы указали в первых двух пунктах вопроса 6.3.

(а) Если бы квота была равна 101, то какие наборы избирателей могли бы добиться принятия запроса Дуга, проголосовав за него? Что отличает Дуга от других избирателей при такой квоте?

(б) Если бы квота была равна 103, то какие наборы избирателей могли бы добиться принятия запроса Дуга, проголосовав за него? Что отличает Дуга от других избирателей в этом случае?

(в) Если бы квота была равна 105, то какие наборы избирателей могли бы добиться принятия запроса Дуга, проголосовав за него? Что отличает Дуга от других избирателей при такой системе? Что отличает Элизабет от других избирателей?

Ответив на вопрос 6.4, мы можем заметить некоторые важные черты избирательных систем с весом. Одна из них заключается в том, что для избирательной системы с весом решение по запросу зависит не столько от того, *сколько* избирателей за него проголосовали, сколько от того, *какие* это были избиратели. Этот факт приводит нас к следующему определению.

Определение 6.5. Следующие понятии определены для всех избирательных систем с весом.

- *Коалиция* — это набор избирателей (возможно пустой) в избирательной системе с весом. В него может входить любое число избирателей — от нуля до всех.
- *Вес* коалиции — это сумма весов всех избирателей коалиции.
- *Побеждающая коалиция* — это коалиция, которая в одиночку может добиться принятия запроса. Иначе говоря, если все члены коалиции проголосуют за принятие запроса, то он будет принят, как бы ни голосовали другие избиратели (не входящие в коалицию).
- *Проигрывающая коалиция* — это коалиция, которая в одиночку не может добиться принятия запроса. Иначе говоря, даже если все члены коалиции проголосуют за принятие запроса, он все равно может быть не принят.
- *Минимальная выигрывающая коалиция* — это выигрывающая коалиция, которая превратится в проигрывающую, если из нее удалить любого члена.

В нашем случае не имеет значения, что определение 6.5 сформулировано для избирательных систем с весом. Понятия побеждающей и проигрывающей коалиций могут применяться и в рамках избирательных систем типа да/нет. На самом деле, если бы мы собирались интересоваться только избирательными системами с весом, мы могли бы определить побеждающую коалицию как *коалицию, вес которой больше или равен квоте системы*. Такая формулировка, очевидно, более точна, но вместе с тем в некоторой мере ограничивает нас. Наше более общее определение позволит нам говорить о побеждающих и проигрывающих коалициях, даже если мы рассматриваем системы типа да/нет без веса.

Вопрос 6.6*. Для каждого из пунктов вопроса 6.4 перечислите все побеждающие коалиции, минимальные побеждающие коалиции и проигрывающие коалиции.

Вопрос 6.7. Предположим, что квота из пункта (в) вопроса 6.4 была бы равна не 105, а 150. Повлияло ли бы это изменение на состав каких-нибудь побеждающих или минимальных побеждающих коалиций для системы? Объясните ваш ответ.

Вопрос 6.7 показывает, что в некоторых случаях для двух разных избирательных систем с весом побеждающие коалиции могут быть одинаковыми. В подобных обстоятельствах естественно сказать, что две рассматриваемые системы, в сущности, одинаковы, или, используя любимое слово математиков, *изоморфны*[1].

Определение 6.8. Две избирательные системы с весом называются *изоморфными*, если у них одинаковые побеждающие коалиции.

Следующий вопрос поможет вам лучше понять идею изоморфизма. В нем, как и далее до конца этой главы, мы используем обозначение $[q : w_1, w_2, \ldots, w_n]$ для избирательной системы с весами $w_1, w_2, \ldots, \ldots, w_n$ и квотой q. (Так, например, чтобы описать систему из пункта (в) вопроса 6.4, мы будем писать $[105 : 101, 97, 2]$.)

Вопрос 6.9*. Для каждой из следующих избирательных систем с весом перечислите все побеждающие коалиции. Затем решите, какие системы изоморфны.

(а) $[4 : 2, 2, 1]$;
(б) $[4 : 3, 2, 1]$;
(в) $[5 : 3, 2, 1]$;
(г) $[5 : 3, 2, 2]$;
(д) $[5 : 3, 3, 2]$.

Диктаторы, пустышки и право вето

Теперь, когда мы формализовали идеи коалиций и изоморфизма, давайте в последний раз вернемся к вопросу 6.4. Возможно, вы заметили, что в пункте (а) этого вопроса Дуг был диктатором в том смысле, что конечный результат голосования всегда должен был совпадать с тем, за что он голосовал. Если посмотреть на это по-другому, Дуг был диктатором, поскольку он входил во все побеждающие коалиции, и не входил ни в одну из проигрывающих. А в пункте (б) у Дуга было немного меньше власти. Хотя он по-прежнему в одиночку мог отклонить принятие запроса, у него было недостаточно власти, чтобы

[1] Прислушайтесь к доброму совету: по мере того, как вы все больше осваиваетесь с математическим языком, у вас может возникнуть соблазн использовать словечки вроде этого в повседневных разговорах. Например, вы болтаете о двух сестренках из университетского женского клуба, о двух совершенно одинаковых близняшках: «Как, вы говорили о Джулии? А я-то думал, что вы говорили о Мишель! Что ж, они все равно изоморфны! (Ха-ха-ха!)». Знайте, что хотя ваши склонные к математике друзья скорее всего посмеются над этим, другие, менее просвещенные, могут не оценить вашего нового чувства юмора.

в одиночку добиться принятия запроса. В этой ситуации мы будем говорить, что у Дуга было *право вето*.

В пункте (в) влияние Дуга еще меньше; хотя у Дуга с Николасом разные веса, оба они одинаково влиятельны. Кроме того, бедная Элизабет не имеет никакого влияния, у нее нет возможности как-либо повлиять на результат, как бы она ни голосовала. В этой ситуации мы будем называть Элизабет *пустышкой*, хотя это и не самый удачный термин. Заметьте, что мы используем его не для того, чтобы оскорбить Элизабет или принизить ее умственные способности, а только для того, чтобы отметить, что она не играет сколь-нибудь значительной роли в избирательной системе.

Точно так же, как мы использовали понятия побеждающих и проигрывающих коалиций для того, чтобы объяснить, что в пункте (а) вопроса 6.4 Дуг действует как диктатор, мы можем использовать эти же понятия, чтобы точно определить, что такое право вето и избиратели-пустышки.

Определение 6.10. Следующие понятия определены для всех избирательных систем типа да/нет.

- Избиратель, входящий во все побеждающие коалиции, и не входящий ни в какую из проигрывающих коалиций, называется *диктатором*.
- Говорят, что избиратель, входящий во все побеждающие коалиции, обладает *правом вето*.
- Избиратель, который не входит ни в одну из минимальных побеждающих коалиций, называется *пустышкой*. Иначе говоря, пустышка — это избиратель, которого можно удалить из любой побеждающей коалиции, после чего она все равно не превратится в проигрывающую.

Вопрос 6.11*. Используйте определение 6.10, чтобы выяснить, кто из избирателей является диктатором, кто пустышкой, а кто обладает правом вето для каждой из избирательных систем с весом вопроса 6.4.

Вопрос 6.12. (а) Обладает ли любой диктатор правом вето? Является ли диктатором любой избиратель, обладающий правом вето? Приведите убедительные аргументы или пример, подтверждающие каждый из ваших ответов.

(б) Может ли в избирательной системе с весом быть более одного диктатора? Может ли в избирательной системе с весом быть более одного избирателя, обладающего правом вето? Приведите убедительные аргументы или пример, подтверждающие каждый из ваших ответов.

Устойчивость к мене

До сих пор в вопросах, которые мы изучали, были заданы избирательные системы с весом. Нам нужно было установить некоторые касающиеся их факты или разобраться с избирательными системами, удовлетворяющими некоторым данным свойствам. А что будет, если мы столкнемся с некоторой новой, неизвестной избирательной системой, и нам нужно будет выяснить, это система с весом или без? Какие методы мы можем использовать? Чтобы ответить на этот вопрос, мы начнем с изучения двух примеров.

Вопрос 6.13*. Совет безопасности ООН состоит из 15 членов, по одному из каждой из 15 разных стран. Пять членов (из Китая, Франции, Великобритании, России и Соединенных Штатов) считаются постоянными, а остальные десять меняются из года в год, непостоянные члены работают в течение двухлетнего срока. Для того, чтобы запрос был принят советом, за него должны проголосовать все пять постоянных членов и по крайней мере четыре непостоянных.

(а) Можно ли избирательную систему, используемую для принятия решений в совете безопасности ООН, считать избирательной системой с весом? Если да, то найдите веса и квоту системы. В противном случае объясните, почему ее нельзя считать системой с весом.

(б) Являются ли какие-либо члены Совета безопасности ООН диктаторами или пустышками? Если да, то кто? Обладает ли кто-нибудь из них правом вето? Если да, то кто?

Вопрос 6.14. Загадочная страна Психозия разделена на четыре штата: Блаженство, Смущение, Беспорядок и Неведение. Федеральное правительство в стране очень напоминает правительство Соединенных Штатов. Оно состоит из:

- сената, в который входят четыре сенатора, по одному от каждого штата;
- палаты представителей, в которую входят пять членов — по одному от каждого штата, кроме густонаселенного Блаженства, который представлен двумя членами;
- президента и вице-президента.

Как и в Соединенных Штатах, в случае ничейного исхода голосования в сенате у вице-президента есть решающий голос. Кроме того, после того, как некоторый билль одобрен большинством голосующих и в сенате и в палате, он направляется президенту, который может либо придать ему законную силу, подписав, либо отклонить его, воспользовавшись своим правом вето. Вето президента может быть преодолено *квалифицированным большинством*, состоящим по крайней мере из трех сенаторов и четырех представителей.

(а) Перечислите все различные типы побеждающих коалиций, которые могут возникать в федеральной системе Психозии. (*Замечание.* Мы будем допускать вхождение вице-президента в любую коалицию, даже если ее состав таков, что голос вице-президента не является необходимым. Например, мы будем считать различными побеждающую коалицию, состоящую из всех одиннадцати членов федеральной системы, и побеждающую коалицию, состоящую из всех членов, кроме вице-президента, несмотря на то, что голос вице-президента в первой коалиции не является необходимым.)

(б) Как вы думаете, можно ли считать федеральную систему Психозии избирательной системой с весом? Если вы согласны с этим, попытайтесь определить веса и квоту системы. В противном случае объясните, почему ее нельзя считать избирательной системой с весом.

(в) Есть ли среди членов федеральной системы Психозии диктаторы или пустышки? Если да, то кто они? Обладает ли кто-нибудь из них правом вето? Если да, то кто?

Как вы думаете, какой из вопросов сложнее — 6.13 или 6.14? Если бы этот вопрос задали мне, я бы сказал, что последний, и вот почему. В вопросе 6.13 мне достаточно было только немного поэкспериментировать, чтобы найти подходящие веса и квоту. А в вопросе 6.14 мне пришлось потратить довольно много времени, и все же я не смог найти весов и квоты, при которых федеральная система работает так, как было описано. И в действительности я готов поспорить, что вам тоже не удалось этого сделать.

Что же происходит? Является ли федеральная система Психозии избирательной системой с весом (и мы просто недостаточно усердно искали веса и квоту)? Или это вовсе не так? А если она не является избирательной системой с весом, то как мы можем показать это? Похоже, что прямой подход оказывается довольно сложным — в конце концов, нам придется объяснить, почему нельзя найти весов и квоты, совместимых с описанием, данным в вопросе 6.14. Мы видели (например, в гл. 5), на что могут быть похожи аргументы такого рода в пользу невозможности, и насколько они могут быть запутанными. Так что нам следует рассмотреть какие-нибудь еще варианты.

Одна из возможностей — рассуждать непрямо. Например, наши доводы могут быть примерно такими:

- Все млекопитающие теплокровны.
- Моя домашняя игуана не теплокровна.
- Поэтому она — не млекопитающее.

Конечно же, мы бы хотели заменить слова *млекопитающее*, *игуана* и *теплокровное* другими словами (такими, как *избирательная система с весом* и *федеральная система Психозии*), которые бы имели смысл в контексте нашей задачи. Но идею мы менять не будем.

Мы хотим выяснить, является ли федеральная система Психозии избирательной системой с весом. Поэтому хорошо было начать с того, чтобы определить свойства, которыми должны обладать все избирательные системы с весом (это похоже на то, как мы охарактеризовали выше всех млекопитающих как теплокровных животных). Затем мы могли бы попытаться объяснить, почему федеральная система Психозии не обладает этим специфическим свойством. Таким образом, тот же способ рассуждений, который привел нас к выводу, что моя домашняя игуана — не млекопитающее, позволит нам заключить, что федеральная система Психозии не является избирательной системой с весом.

Свойство избирательной системы с весом, которое мы собираемся использовать, включает рассмотрение исходов «обменов» избирателями между побеждающими коалициями. Следующее определение формализует эту идею.

Определение 6.15.

- Пусть C_1 и C_2 — две различные (возможно, пересекающиеся) коалиции для некоторой избирательной системы типа да/нет. Обмен одного избирателя из C_1 на одного избирателя из C_2 называется *меной* между C_1 и C_2. Чтобы убедиться в том, что один избиратель не входит в коалицию больше двух раз, мы требуем, чтобы ни один из обмениваемых избирателей не входил в обе коалиции.
- Избирательная система типа да/нет называется *устойчивой к мене*, если в результате любой возможной мены между двумя побеждающими коалициями хотя бы одна из коалиций остается побеждающей.

Вопрос 6.16*. Рассмотрим еще раз трех акционеров Captain Ahab's Fish & Chips.

(а) Перечислите все возможные мены между коалициями {Николас} и {Дуг, Элизабет}.

(б) Перечислите все возможные мены между коалициями {Дуг} и {Дуг, Николас}.

(в) Предположим, что акционеры решили использовать эксцентричную избирательную систему, в которой есть только две побеждающие коалиции — {Николас} и {Дуг, Элизабет}. Устойчива ли к мене эта эксцентричная избирательная система? Объясните ваш ответ.

(г) Предположим теперь, что акционеры решили использовать другую избирательную систему, в которой есть только такие побеждающие коалиции — {Николас}, {Дут, Элизабет}, {Дут} и {Элизабет}. Устойчива ли к мене эта новая избирательная система? Объясните ваш ответ.

Вопрос 6.17. Является ли какая-нибудь избирательная система из пунктов (в) и (г) вопроса 6.16 избирательной системой с весом? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ.

Теперь давайте исследуем подробнее взаимосвязи между свойствами (избирательной системы типа да/нет) «быть системой с весом» и «быть устойчивой к мене». Мы начнем с того, что рассмотрим произвольную избирательную систему с весом. Для этой системы мы изучим, как влияют мены на веса двух ее побеждающих коалиций. Мы надеемся, что это позволит нам сделать важные выводы о том, должна ли система быть устойчивой к мене.

Вопрос 6.18*. Пусть V — избирательная система с весом, а C_1 и C_2 — две ее побеждающие коалиции.

(а) Как связаны веса коалиций C_1 и C_2 и квота V?

(б) Предположим, что между C_1 и C_2 произошла мена. Как сумма весов C_1 и C_2 после мены связана с суммой весов C_1 и C_2 до мены?

(в) Могут ли обе коалиции C_1 и C_2 стать проигрывающими после мены? Четко объясните ход ваших рассуждений.

(г) Какой вывод об устойчивости системы V к менам позволяют вам сделать ваши ответы на пункты (а)—(в)?

Если с вопросом 6.18 все было в порядке, вы обнаружили, что устойчивость к менам — это свойство, которым должны обладать все избирательные системы с весом (это напоминает свойство «быть теплокровным», которым, как мы заметили, должны обладать все млекопитающие). Следующая теорема формализует эту идею.

Теорема 6.19. *Каждая избирательная система с весом устойчива к менам.*

Вопрос 6.20*. Предположим, что для некоторой системы да/нет вы нашли мену между двумя побеждающими коалициями, которая приводит к тому, что обе коалиции становятся проигрывающими. Какой вывод вы могли бы сделать об этой системе?

Вопрос 6.21*. Предположим, вы обнаружили, что некоторая избирательная система типа да/нет устойчива к мене. Можете ли вы заключить, что это система с весом? Приведите убедительные доводы или пример, подтверждающий ваш ответ. (*Подсказка.* Возможно, вам будет полезно вернуться обратно к предыдущим вопросам этого раздела.)

Вопрос 6.22. Какой вы можете сделать вывод о федеральной системе Психозии в свете нескольких последних вопросов и теоремы 6.19? Устойчива ли она к менам? Является ли она избирательной системой с весом? Приведите убедительные доводы, подтверждающие каждый из ваших ответов.

Устойчивость к сделке

В последнем разделе мы видели, что любая избирательная система с весом устойчива к мене. Тем не менее, мы видели также, что для избирательных систем типа да/нет свойство «быть устойчивой к мене» не вполне эквивалентно свойству «быть системой с весом». Как мы знаем из вопроса 6.21, могут существовать (и существуют в действительности) избирательные системы типа да/нет, которые устойчивы к мене, но не являются системами с весом.

К этому моменту нам кажется вполне естественным посмотреть, нельзя ли найти такое свойство избирательных систем типа да/нет (возможно, связанное с устойчивостью к мене или аналогичное ему), которое действительно было бы эквивалентно свойству «быть системой с весом». Вот один из возможных кандидатов:

Определение 6.23.

- В любой избирательной системе типа да/нет произвольный обмен избирателями (не обязательно один-на-одного) между по крайней мере двумя коалициями системы называется *сделкой*.
- Избирательная система типа да/нет называется *устойчивой к сделке* тогда и только тогда, когда любая возможная сделка между побеждающими коалициями оставляет хотя бы одну из коалиций побеждающей.

Вопрос 6.24*. (а) Каждая ли мена является сделкой? Почему?

(б) Каждая ли сделка является меной? Почему?

(в) Если некоторая избирательная система типа да/нет устойчива к мене, будет ли она обязательно устойчивой к сделке? Почему?

(г) Если некоторая избирательная система типа да/нет устойчива к сделке, будет ли она обязательно устойчивой к мене? Почему?

Как мы только что видели в вопросе 6.24, свойство устойчивости к сделке сильнее, чем свойство устойчивости к мене. Таким образом, хотя мы уже знаем, что каждая избирательная система с весом должна быть устойчива к мене, мы не можем отсюда автоматически сделать вывод, что каждая избирательная система с весом должна быть устойчива к сделке. Оказывается, это действительно тонкое место. Чтобы понять, почему это так, мы можем идти почти по тому же пути, что и в вопросе 6.18, когда доказывали, что любая избирательная система с весом должна быть устойчива к мене.

Вопрос 6.25. Пусть V — избирательная система с весом, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольный набор побеждающих коалиций для V.

(а) Как веса коалиций $C_1, C_2, \ldots, C_n$ связаны с квотой системы V?

(б) Предположим, что между $C_1, C_2, \ldots, C_n$ была заключена сделка. Как сумма весов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ после сделки связана с суммой весов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ до сделки?

(в) Могли бы все $C_1, C_2, \ldots, C_n$ стать проигрывающими коалициями после сделки? Объясните ваш ответ.

(г) Какой вывод об устойчивости системы V к сделке вы можете сделать на основании ваших ответов на пункты (а)—(в)?

Теперь мы знаем, что каждая избирательная система с весом должна быть устойчива к сделке. Но можно ли утверждать, что каждая избирательная система типа да/нет, устойчивая к сделке, должна быть системой с весом? Оказывается, ответ на этот вопрос положителен. Следующая теорема формализует этот важный результат.

Теорема 6.26. *Избирательная система типа да/нет является избирательной системой с весом тогда и только тогда, когда она устойчива к сделке.*

Теорема 6.26 была доказана математиками Аланом Тейлором и Уильямом Цвикером в 1992 г. Они заметили, что доказательство аналогичного результата было получено ученым-компьютерщиком С. С. Элготом в 1960 г. Хотя мы не будем изучать этих доказательств (они довольно сложные!), мы закончим эту главу одним очень интересным применением теоремы 6.26.

Вопрос 6.27. Процедура внесения поправок в конституцию Канады требует, чтобы предложенная поправка была одобрена по крайней мере семью из десяти канадских провинций, и чтобы в одобривших провинциях проживала хотя бы половина населения Канады. Таблица 6.2 показывает распределение населения Канады в соответствии с переписью 2001 г.

(а) Перечислите все минимальные побеждающие коалиции в избирательной системе, используемой для принятия поправок в конституцию Канады. (Предполагайте, что избиратели в этой системе — это десять провинций Канады.)

Таблица 6.2

Распределение населения Канады, 2001 г.

Провинция	Процент
Остров Принца Эдуарда	1 %
Новый Брансуик	2 %
Ньюфаундленд	2 %
Новая Шотландия	3 %
Саскачеван	3 %
Манитоба	4 %
Альберта	10 %
Британская Колумбия	13 %
Квебек	24 %
Онтарио	38 %

(б) Устойчива ли к мене избирательная система, используемая для внесения поправок в конституцию Канады? Приведите убедительные доводы или пример, подтверждающий ваш ответ.

(в) Устойчива ли к сделке избирательная система, используемая для внесения поправок в конституцию Канады? Приведите убедительные доводы или пример, подтверждающий ваш ответ.

(г) Какой вывод об избирательной системе, используемой для внесения поправок в конституцию Канады, вы можете сделать на основании ваших ответов на пункты (б) и (в)? Объясните ваш ответ.

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 6.28. Рассмотрите избирательную систему с весом из вопроса-разминки 6.1 в предположении, что вес каждого из трех акционеров равен числу акций, которыми они владеют. Будем считать, что квота равна 101 (как в пункте (а) вопроса 6.4). Как изменилось бы распределение влиятельности в системе, если бы Дуг решил продать по одной из своих акций Николасу и Элизабет?

Вопрос 6.29. Является ли свойство изоморфизма *транзитивным*? Иначе говоря, если избирательная система с весом V_1 изоморфна другой системе V_2, а V_2 изоморфна третьей системе V_3, то должна ли система V_1 обязательно быть изоморфной V_3? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ.

Вопрос 6.30. В определении 6.8 мы сформулировали, что две избирательные системы с весом изоморфны, если у них в точности одинаковые побеждающие коалиции. Найдите по крайней мере еще три свойства, которые обязательно должны быть общими для изоморфных систем с весом.

Вопрос 6.31. В определении 6.10 мы определили диктатора для избирательной системы с весом как избирателя, который входит в любую побеждающую коалицию и не входит в любую проигрывающую коалицию. Напишите другое определение диктатора для избирательной системы с весом, которое опирается на понятие минимальной побеждающей коалиции.

Вопрос 6.32. (а) Может ли случиться так, что в избирательной системе типа да/нет есть диктатор, но нет пустышек? Приведите убедительные доводы или пример, чтобы подтвердить ваш ответ.

(б) Может ли случиться так, что в избирательной системе типа да/нет есть пустышка, но нет диктаторов? Приведите убедительные доводы или пример, чтобы подтвердить ваш ответ.

Вопрос 6.33. (а) Как вы думаете, что значит для избирательной системы типа да/нет быть монотонной? Используйте ваше понимание монотонности из предыдущих глав, чтобы дать точное определение.

(б) Является ли любая избирательная система с весом монотонной в смысле вашего определения из пункта (а)? Приведите убедительные доводы или пример, чтобы подтвердить ваш ответ.

(в) Предположим, что в нашем определении избирательной системы с весом мы допускаем нулевые или отрицательные веса. Изменится ли от этого ваш ответ на пункт (б)?

(г) Найдите избирательную систему типа да/нет, которая монотонна и устойчива к мене, но не является избирательной системой с весом.

Вопрос 6.34. Напишите краткие биографии Алана Тейлора и Уильяма Цвикера и включите в них описание того, чем они занимаются сейчас, и все, что вы смогли узнать о их взглядах на теорию голосования и общественного выбора.

Вопрос 6.35. (а) Исследуйте федеральную систему Соединенных Штатов и точно определите ситуацию, когда билль может быть объявлен законом. Напишите подробное резюме ваших изысканий и включите в него описания минимальных побеждающих коалиций для системы.

(б) Можно ли назвать федеральную систему Соединенных Штатов избирательной системой с весом? Приведите убедительные доводы или пример, чтобы подтвердить ваш ответ.

Вопрос 6.36. В федеральной системе Соединенных Штатов (как и в федеральной системе Психозии из вопроса 6.14) президент может наложить на билль вето и отправить его обратно для дальнейшей проработки или отклонения в сенат и палату. Выясните, какие дальнейшие действия должны быть предприняты в сенате и палате, чтобы избежать отклонения билля, на который было наложено вето. Обладает ли президент правом вето в федеральной системе США согласно определению, данному в этой главе? Почему?

Вопрос 6.37. Не используя понятий устойчивости к мене и сделке, запишите убедительное доказательство, что федеральная система Психозии (из вопроса 6.14) не является избирательной системой с весом.

Вопрос 6.38[1]. Городской совет Фресно, Калифорния, состоит из мэра и еще шести членов. Для прохождения запроса в совете требуется, чтобы за него проголосовал мэр и еще хотя бы трое из остальных шести членов совета, или же хотя бы пятеро из членов совета, в число которых мэр не входит.

(а) Можно ли избирательную систему, используемую для принятия решений в городском совете города Фресно, назвать избирательной системой с весом? Если да, то найдите веса и квоту для этой системы. В противном случае объясните, почему этого сделать нельзя.

(б) Есть ли среди членов городского совета Фресно диктаторы или пустышки? Если да, то кто они? Есть ли у кого-нибудь из них право вето? Если да, то у кого?

Вопрос 6.39. В Австралии есть шесть штатов — Новый Южный Уэльс, Северные Территории, Куинслэнд, Южная Австралия, Виктория и Западная Австралия. Когда нужно принимать общенациональные решения по вопросам типа да/нет или принять/отклонить, каждому из этих штатов выделяется один голос, а федеральному правительству — два. Тогда в ситуациях, когда какой-либо возможный результат набирает больше половины голосов, то итоговым результатом объявляется тот, что набрал больше всего голосов. В ситуациях, когда голоса распределились поровну между двумя возможными результатами, итоговым результатом объявляется тот, за который проголосовало федеральное правительство. Можно ли эту избирательную систему считать избирательной системой с весом? Если да, то найдите веса и квоту для этой системы. В противном случае объясните, почему это невозможно.

[1] Вопрос 6.38 мы позаимствовали из [46].

Вопрос 6.40. Изучите, как проходит голосование в Евросоюзе, и запишите подробный отчет о ваших изысканиях. Включите в него информацию о том, когда впервые была использована эта система, как она изменялась со временем, кто входит в Евросоюз в настоящее время и каковы веса его членов в системе, какова квота системы и какова роль государств с наименьшими весами в системе.

Ответы на вопросы

6.3. В системе с весом из вопроса-разминки 6.1 избирателями являются Дуг, Николас и Элизабет. Самым очевидным образом веса распределяются так: 101 у Дуга, 97 у Николаса и 2 у Элизабет. Поскольку сумма весов в системе равна 200, разумно выбрать квоту равной 101.

6.4. (а) Любой набор избирателей, в который входит Дуг, может добиться принятия запроса, проголосовав за него. С такой квотой конечный результат голосования по любому запросу будет совпадать с тем, за который проголосует Дуг.

(б) Любой набор избирателей, в который входит Дуг и еще хотя бы один избиратель, может добиться принятия запроса, проголосовав за него. В этом случае в одиночку Дуг не может добиться принятия запроса, проголосовал за него, но он может в одиночку заблокировать прохождение запроса, проголосовав против него.

(в) Для того, чтобы запрос был принят, за него должны проголосовать и Дуг, и Николас вместе, при этом не имеет значения, как голосует Элизабет. В этом случае Дуг и Николас одинаково влиятельны, а Элизабет совершенно бессильна.

6.6. (а) Перечислим побеждающие коалиции: {Дуг}, {Дуг, Николас}, {Дуг, Элизабет} и {Дуг, Николас, Элизабет}. Среди них минимальная только одна: {Дуг}.

(б) Перечислим побеждающие коалиции: {Дуг, Николас}, {Дуг, Элизабет} и {Дуг, Николас, Элизабет}. Среди них две минимальных: {Дуг, Николас} и {Дуг, Элизабет}.

6.9. (а) Побеждающими коалициями являются $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(б) Побеждающими коалициями являются $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(в) Эта система изоморфна системе из пункта (а).

6.11. В пункте (а) Дуг — диктатор и у него есть право вето, а Николас и Элизабет — пустышки.

6.13. Эту систему можно рассматривать как избирательную систему с весом. Вы могли бы найти веса и квоту системы путем проб

и ошибок. Но можно действовать более методично. Один из способов сделать это — предположить, что у каждого непостоянного члена есть один голос, у постоянного — x голосов, а квота равна q. Поскольку для принятия запроса достаточно голосов всех пяти постоянных членов и четырех непостоянных, $q \leq 5x + 4$. А поскольку голосов четырех постоянных членов и десяти непостоянных недостаточно для принятия запроса, $4x + 10 < q$. Что вы можете сказать о x на основании этих двух неравенств?

6.16. (а) Есть две возможных мены. Мы можем заменить Николаса либо на Дуга, либо на Элизабет.

(б) В этом случае мены невозможны.

(в) Избирательная система неустойчива к мене. При обмене Николаса на Дуга образуется две проигрывающие коалиции.

6.18. (а) Каждый из весов коалиций C_1 и C_2 должен быть больше или равен квоте V. (Заметим, что поэтому сумма этих весов должна быть больше или равна удвоенной квоте.)

(б) Если мы сложим веса C_1 и C_2 после мены, результат будет равен тому, как если бы мы складывали веса C_1 и C_2 до мены (поскольку обе коалиции в совокупности содержат один и тот же набор избирателей и до мены, и после).

(в) Если после мены обе коалиции C_1 и C_2 оказались проигрывающими, значит, сумма их весов после мены должна быть меньше удвоенной квоты. Это противоречит ответам на пункты (а) и (б) выше.

6.20. Вы могли бы заключить, что избирательная система не является избирательной системой с весом.

6.21. Вы не можете сделать вывод, что избирательная система — система с весом. (Точно так же вы не можете сделать вывод, что она не является системой с весом.)

6.24. (а) Мена — особый вид сделки.

(б) Существует много сделок, которые не являются менами. (Можете ли вы привести хотя бы один пример?)

(в) Устойчивая к мене избирательная система типа да/нет не обязана быть устойчивой к сделке.

(г) Устойчивая к сделке избирательная система типа да/нет обязана быть устойчивой к мене.

ГЛАВА 7

Вычисление коррупции

Власть развращает;
абсолютная власть развращает абсолютно.
Лорд Эктон, британский историк
конца XIX — начала XX вв.

Власть развращает.
Абсолютная власть — это здорово.
Джон Леман, Министр
военно-морских сил США, 1981–1987 гг.

Центральные вопросы

- Какие бывают способы измерения влияния, которым обладает каждый из избирателей в избирательной системе типа да/нет?
- Чем отличается критический избиратель от ключевого в избирательной системе типа да/нет?
- Каковы отличия индекса влиятельности Банцафа от индекса влиятельности Шепли—Шубика?
- Что такое комбинаторика? Как комбинаторные методы могут быть использованы для вычисления индексов влиятельности?

Вопрос-разминка 7.1. Рассмотрим еще раз трех акционеров Captain Ahab's Fish & Chips (из вопроса-разминки 6.1) и решение, которое они должны принять о своем вице-президенте по маркетингу, Дине Бумхауэре. Для удобства в табл. 7.1 мы еще раз приводим число акций каждого акционера.

Предположим, что после долгих споров Дуг, Николас и Элизабет согласились принять избирательную систему с весом [103 : 101, 97,2], чтобы вынести окончательное решение о судьбе Бумхауэра.

(а) Заметьте, что в этой избирательной системе вес Николаса более чем в 48 раз превышает вес Элизабет. Значит ли это, что Николас более чем в 48 раз влиятельнее Элизабет? Если нет, то во сколько раз влияние Николаса выше, чем влияние Элизабет?

Таблица 7.1

Акционеры Captain Ahab's & Chips

Акционер	Число акций
Дуг	101
Николас	97
Элизабет	2

(б) Обладает ли Дуг большим влиянием, чем Николас, в этой системе? Если да, то во сколько раз?

(в) Какой процент общего влияния принадлежит Дугу? А Николасу? Элизабет?

В вопросе-разминке 7.1 перед вами были поставлены очень специфические вопросы о количестве влияния, которым обладает каждый из избирателей в избирательной системе с весом. Вопросы такого типа возникают естественным образом, когда мы имеем дело с избирательными системами, которые некоторые голоса учитывают больше, чем другие.

Ответ, который вы дали на вопрос-разминку 7.1, зависит, по-видимому, от того, что вы понимаете под словом «влияние». Что значит «быть влиятельным» в контексте некоторых демократических процессов? И что значит, что у одного человека в таком процессе больше влияния, чем у другого? Можем ли мы количественно выразить это понятие, чтобы осмысленно сравнивать участников политической системы? Если да, то как?

В этой главе перед нами стоит цель развить некоторые математически точные способы ответа на вопросы такого типа. Чтобы достичь ее, мы исследуем два разных метода измерения влияния, которым обладают избиратели в избирательной системе типа да/нет. Каждый из этих методов называется *индексом влиятельности*, поскольку в избирательной системе типа да/нет он присваивает каждому избирателю некоторое численное значение влиятельности этого избирателя в системе. Мы не ограничимся только индексами влиятельности, но найдем некоторые математические инструменты, позволяющие с легкостью вычислять распределение влиятельности для большого числа интересных примеров.

Индекс влиятельности Банцафа

Первый индекс влиятельности, который мы рассмотрим, был предложен в 1965 г. Джоном Ф. Банцафом III. На протяжении карьеры адвоката и профессора юриспруденции Банцаф специализировался на защите интересов государства и здоровья нации. В последнее время он стал известен своей ролью в ряде судебных процессов против компаний, производящих табак и фастфуд. Возможно, вы читали или слышали о нем по телевизору.

Взгляды Банцафа на то, как распределяется влияние в избирательных системах, основываются на той идее, что один избиратель влиятельнее другого, если присутствие первого в побеждающих коалициях чаще является существенным, или *критическим*, для того, чтобы коалиция не превратилась в проигрывающую. Понятия, используемые в индексе Банцафа, перечислены в следующем определении, а следующие за ним вопросы помогут вам лучше понять, как именно работает этот индекс.

Определение 7.2. Следующие понятия определены для всех систем типа да/нет.

- Избиратель в побеждающей коалиции называется *критическим*, если его удаление из коалиции превращает ее в проигрывающую.
- Для некоторого избирателя *влиятельность Банцафа* равна числу побеждающих коалиций, в которых этот избиратель критический.
- Для системы *общая влиятельность Банцафа* равна сумме влиятельностей Банцафа для всех избирателей системы.
- Для избирателя *индекс Банцафа* равен влиятельности Банцафа для этого избирателя, деленной на общую влиятельнось Банцафа для системы.

Вопрос 7.3*. Рассмотрим избирательную систему с весом из вопроса-разминки 7.1.

(а) Составьте список всех побеждающих коалиций системы.

(б) Сколько таких побеждающих коалиций из пункта (а), в которых Дуг — критический избиратель? А сколько таких, где Николас — критический избиратель? А Элизабет?

(в) Используя ваши ответы на пункт (б), определите влиятельность Банцафа для всех трех избирателей системы. Затем вычислите общую влиятельность Банцафа для системы.

(г) Используйте ваш ответ на пункт (в), чтобы вычислить индекс Банцафа для каждого из трех избирателей системы.

Вопрос 7.4. Как ваши ответы на пункты (в) и (г) вопроса 7.3 соотносятся с вашим ответом на вопрос-разминку 7.1?

Вопрос 7.5. Как вы думаете, что полезнее знать — влиятельность Банцафа для избирателя или индекс Банцафа для избирателя? Объясните ваш ответ.

Вопрос 7.6. (а) Чему равен индекс Банцафа для диктатора? А для пустышки? Четко объясните ваши ответы, используя термины из определения 7.2.

(б) Что вы можете сказать об индексе Банцафа для избирателя, у которого есть право вето? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ.

Теперь, когда мы понимаем подоплеку индекса Банцафа, мы должны быть готовы рассмотреть несколько более сложный пример. В следующем вопросе мы исследуем реальную жизненную ситуацию, которая в первую очередь и побудила Банцафа изобрести свой индекс.

Вопрос 7.7*. Наблюдательный совет округа Нассау, Нью-Йорк, использует избирательную систему с весом, которая осуществляет представительство каждого из шести районов округа в соответствии с численностью их населения. В 1965 г. 115 голосов были распределены между районами так, как показано в табл. 7.2. Для того, чтобы запрос был принят, требовалось большинство общего числа голосов, и таким образом, квота системы была равна 58.

Таблица 7.2

Наблюдательный совет округа Нассау, 1965 г.

Район	Вес
Хемпстед № 1	31
Хемпстед № 2	31
Ойстер-Бей	28
Северный Хемпстед	21
Лонг-Бич	2
Глен-Коув	2

(а) В ряде судебных процессов Банцаф успешно доказал, что все влияние в наблюдательном совете было поровну распределено между тремя крупнейшими районами. Не вычисляя влияния или индекса Банцафа этих районов, объясните, почему это так.

(б) Составьте список побеждающих коалиций для этой системы.

(в) Для каждой из побеждающих коалиций из пункта (б) определите всех избирателей, которые являются критическими для этих коалиций.

(г) Используя ваш ответ на пункт (в), определите индекс Банцафа для каждого из шести районов системы.

(д) Соответствует ли ваш ответ на пункт (г) утверждению Банцафа о том, что все влияние в совете поровну распределено между тремя крупнейшими районами? Объясните ваш ответ.

Вопрос 7.8*. В результате судебных процессов, в которых в 1965 г. участвовал Банцаф, распределение голосов в наблюдательном совете округа Нассау было изменено, и с тех пор оно менялось еще несколько раз. Распределение, принятое в 1994 г., привело к избирательной системе с весом [65 : 30, 28, 22, 15, 7, 6]; районы перечислены в том же порядке, что и в табл. 7.2.

(а) Следуя инструкциям, перечисленным в пунктах (б)—(г) вопроса 7.7, определите индекс Банцафа для каждого из шести районов в системе, принятой в 1994 г.

(б) Какой процент общего влияния принадлежал каждому из шести районов в системе 1994 г.? Какой процент общего влияния принадлежал каждому из шести районов в системе 1965 г.? Можно ли сказать, что система 1994 г. кажется более разумной системы 1965 г.?

(в) Предположим, что в 1994 г. в районе Глен-Коув проживало немного меньше 2 % населения округа Нассау. Если это так, то как вы думаете, приемлемо ли, что в том году для Глен-Коув было выделено $6/108 = 5{,}56\,\%$ голосов в наблюдательном совете округа Нассау? Почему?

Индекс влиятельности Шепли—Шубика

Второй индекс влиятельности, который мы рассмотрим, назван именами экономистов Ллойда Шепли и Мартина Шубика. Впервые они предложили свой индекс в 1954 г., на одиннадцать лет раньше, чем Банцаф предложил свой. Мы рассмотрели индекс Банцафа первым, поскольку индекс Шепли—Шубика чуть сложнее вычислять, а его математические основания несколько изощреннее.

Взгляды Шепли и Шубика на то, как распределено влияние в избирательных системах, были основаны на понятии *ключевых* избирателей, а не на понятии *критических* избирателей. Шепли и Шубик считали, что коалиции в избирательных системах формировались последовательно. Сначала в нее входил один избиратель, затем к нему присоединялся другой, вслед за ним третий и так далее. В предположении, что члены присоединяются к коалиции в некотором порядке, имеет смысл говорить о том, какой избиратель первым дает коалиции достаточный вес, чтобы превратить ее из проигрывающей в побеждающую. Именно этого единственного избирателя в побеждающей (упорядоченной) коалиции мы будем называть *ключевым избирателем* для этой коалиции[1]. Эта терминология более точно вводится в следующем определении.

Определение 7.9. Следующие понятия определены для всех избирательных систем типа да/нет.

- Для некоторого упорядоченного списка (или упорядочения) всех избирателей системы мы говорим, что избиратель v *ключевой*, когда выполняются оба следующих условия:
  - Если каждый из избирателей, предшествующих v в списке, проголосовал за принятие запроса, а v и все избиратели после него проголосовали за отклонение, то запрос будет отклонен.
  - Если v и все избиратели, предшествующие v в списке, проголосовали за принятие запроса, а все избиратели после v проголосовали за отклонение, то запрос будет принят.
- Для избирателя *влиятельность Шепли—Шубика* равна числу упорядоченных списков всех избирателей в системе, для которых этот избиратель ключевой.
- Для системы *общая влиятельность Шепли—Шубика* равна общему числу списков всех избирателей в системе.
- Для избирателя *индекс влиятельности Шепли—Шубика* равен влиятельности Шепли—Шубика для этого избирателя, деленной на общую влиятельность Шепли—Шубика для системы.

Возможно, вам будет интересно заметить, что в определении индекса влиятельности Шепли—Шубика вовсе не упоминаются побеждающие коалиции. Причина в том, что когда мы хотим вычислить индекс Шепли—Шубика, мы обычно просто рассматриваем все возможные способы упорядочить избирателей системы, а затем определяем единственного ключевого избирателя в каждом таком упорядоченном списке. Мы можем делать это, так как каждая последовательно формируемая коалиция превращается из проигрывающей в побеждающую с увеличением числа членов в ней. Таким образом, рассматривая все возможные упорядоченные списки избирателей, мы найдем все (упорядоченные) побеждающие коалиции. Такой образ действия удобен по многим причинам, одна из которых состоит в том, что мы легко можем определить общее число упорядоченных списков избирателей в системе, используя простую формулу, которую вскоре найдем.

[1] Заметим, что это определение полностью согласуется с тем, как мы использовали термин *ключевой избиратель* в нашем доказательстве теоремы Эрроу в гл. 5.

Но для начала один пример. Давайте посмотрим, чему оказывается равным индекс Шепли—Шубика для трех акционеров Captain Ahab's Fish & Chips.

Вопрос 7.10*. (а) Перечислите все возможные упорядоченные списки всех избирателей избирательной системы с весом из вопроса-разминки 7.1.

(б) Найдите ключевого избирателя для каждого из различных упорядоченных списков из пункта (а).

(в) Используя ваш ответ на пункт (б), найдите индекс Шепли—Шубика для каждого из избирателей избирательной системы с весом из вопроса-разминки 7.1.

Вопрос 7.11. Сравните ваш ответ на пункт (а) вопроса 7.10 с вашим ответом на пункт (г) вопроса 7.3.

(а) Должны ли два эти ответа быть одинаковыми? Одинаковы ли они? Объясните все расхождения между ними, которые вы заметили, и обсудите, разумно ли, по-вашему мнению, что эти расхождения существуют.

(б) Как вы думаете, какой индекс лучше представляет распределение влиятельности в системе из вопроса-разминки 7.1? Четко объясните ваш ответ.

Вопрос 7.12. (а) Чему будет равен индекс Шепли—Шубика для диктатора? Для пустышки? Объясните ваши ответы, используя понятия из определения 7.9.

(б) Что вы можете сказать об индексе Шепли—Шубика для избирателя, обладающего правом вето? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ.

Как мы видели в вопросе 7.10, не только вычисления для определения индексов Шепли—Шубика отличаются от вычислений для определения индексов Банцафа, но и результаты этих вычислений могут быть также различными. Конечно же, это аналогично тому, что мы видели в предыдущих главах, когда рассматривали результаты, к которым приводят различные избирательные системы для выборов, в которых участвуют больше двух кандидатов.

Точно также, существуют другие значительные отличия между двумя индексами. С одной стороны, влиятельность Банцафа для отдельного избирателя, вообще говоря, вычислить легче, чем влиятельность Шепли—Шубика. Тем не менее, общую влиятельность Банцафа для системы найти вообще труднее, чем общую влиятельность Шепли—Шубика для системы. Чтобы найти общую влиятельность Банцафа системы, мы должны найти влиятельность Банцафа для каждого избирателя. А для того, чтобы найти общую влиятельность Шепли—Шубика для системы, нам нужно найти лишь число упорядоченных списков всех избирателей системы. Следующий вопрос наводит на мысль, как мы можем действовать при вычислении общего числа упорядоченных списков.

Вопрос 7.13*. (а) Сколькими различными способами можно упорядочить двух избирателей?

(б) Сколькими различными способами можно упорядочить трех избирателей?

(в) Сколько может быть различных упорядоченных списков из четырех избирателей? (*Подсказка.* Вы могли бы выписать все эти списки, но, возможно, будет проще заметить лишь, что каждый список из четырех избирателей можно получить, поместив четвертого избирателя в некоторый уже сформированный список первых трех избирателей.)

(г) Сколько может быть различных упорядоченных списков из пяти избирателей? (*Подсказка.* Используйте ваш ответ на пункт (в) и подсказку из этого пункта.)

(д) Вы уже заметили закономерность? Учитывая ваши ответы на пункты (а)—(г), можете ли вы ответить, сколько может быть различных упорядоченных списков из шести избирателей? Из восьми? Из n избирателей (где n обозначает некоторое произвольное число избирателей)?

Величины, которые вы вычислили в вопросе 7.13, часто называют *факториалами*. Для целого числа n мы обозначаем n-факториал как $n!$ и определяем эту величину по формуле из ответа на пункт (д) вопроса 7.13, приведенного в конце этой главы. (Заметим, что теперь, когда вы ответили на этот вопрос, может быть, вам захочется записать формулу для $n!$ здесь на полях. Мы еще некоторое время будем использовать факториалы в наших вычислениях, так что вам будет удобно иметь эту формулу под рукой.)

Теперь, когда мы убедились, насколько легко найти общую влиятельность Шепли—Шубика для избирательной системы, давайте обратимся к вычислениям для отыскания индексов Шепли—Шубика в более сложном примере. Мы опять рассмотрим избирательную систему с весом, которая использовалась в наблюдательном совете округа Нассау в 1965 г. (мы впервые обратились к ней в вопросе 7.7).

Поскольку в этой системе шесть избирателей, (шесть районов, перечисленных в табл. 7.2), общая влиятельность Шепли—Шубика для системы равна $6! = 720$. Значит, все что нам нужно сделать — перечислить все 720 возможных упорядоченных списков избирателей, и определить ключевого избирателя в каждом списке. Звучит ободряюще, не правда ли?

Что ж, может быть, все не так страшно. Что нам действительно сейчас нужно — найти способ упростить этот процесс, или хотя бы разбить его на меньшие кусочки, которые легче переварить. Следующий вопрос подсказывает нам один из способов, как это сделать.

Вопрос 7.14. Рассмотрим избирательную систему с весом из вопроса 7.7, для которой избиратели и их веса представлены в табл. 7.2, а квота равна 58.

(а) Предположим, что в некотором упорядоченном списке шести районов три крупнейших района расположены таким образом: сначала идет Хемпстед № 2, на некотором месте после него — Ойстер-Бей, и еще на некотором месте после него — Хемпстед № 1. Какой из шести районов был бы ключевым в этом списке?

(б) Зависит ли ваш ответ на пункт (а) от того, где именно в списке расположены три наименьших района? Объясните ваш ответ.

(в) Предположим, что в некотором упорядоченном списке три наименьших района расположены таким образом: сначала идет Северный Хемпстед, на некотором месте после него — Лонг-Бич, и еще на некотором месте после него — Глен-Коув. Сколько различных упорядоченных списков были бы совместимы с таким расположением *и* с расположением трех крупнейших районов из пункта (а)? (*Подсказка.* Каждый такой упорядоченный список полностью определяется тем, какие позиции в нем занимают три крупнейших района. Сколько существует способов выбрать эти три позиции?)

(г) Был бы ваш ответ на пункт (в) другим, если бы предполагались другие порядки трех наименьших районов?

(д) Сколькими способами можно упорядочить три наименьших района?

(е) Используйте ваши ответы на пункты (б)—(д), чтобы найти общее число упорядоченных списков всех шести районов, в которых три крупнейших района расположены в порядке, указанном в пункте (а).

(ж) Были бы ваши выкладки в пунктах (а)—(е) другими, если бы предполагались другие порядки трех крупнейших районов?

(з) Используйте ваши ответы на пункты (а)—(ж), чтобы определить индекс Шепли—Шубика каждого из шести районов системы. Представьте всю проделанную работу и четко объясните, как вы рассуждали.

Влиятельность Банцафа в Психозии

В оставшейся части этой главы мы собираемся применить все, что мы узнали о индексах влиятельности Банцафа и Шепли—Шубика, к федеральной системе Психозии, с которой мы впервые познакомились в вопросе 6.14. Эта система нам очень интересна потому, что она напоминает федеральную систему Соединенных Штатов. Поэтому вычисления, к которым мы собираемся приступить, дадут вам почувствовать, что значит определять распределение влиятельности в федеральной системе Соединенных Штатов.

Прежде чем мы вернемся к Психозии, вы должны узнать, что некоторые предстоящие нам вычисления довольно сложны и запутаны. Если вы предпочитаете быстрые ответы, то следующие несколько страниц будут для вас упражнением в терпении и упорстве. Но, конечно же, это не вычисления для запуска космических ракет. На самом деле они сводятся к сложению и умножению, а с этим вы, разумеется, знакомы. И, как мы уже видели, все выкладки будут проведены аккуратно и систематически.

Теперь приступим. Напомним, что в федеральной системе Психозии есть четыре разных вида избирателей — сенаторы, представители, президент и вице-президент. Мы начнем с того, что вычислим индекс Банцафа для сенатора, обозначим сенатора через S.

Вопрос 7.15*. Напомним, что в федеральной системе Психозии есть всего четыре сенатора и пять представителей.

(а) Сколькими способами можно образовать коалицию, состоящую из S и еще двух других сенаторов? Четко объясните ваш ответ.

(б) Сколькими способами можно образовать коалицию, состоящую из трех представителей? Четко объясните ваш ответ.

(в) Сколькими способами можно образовать коалицию, состоящую из S, двух других сенаторов и трех представителей? Четко объясните ваш ответ.

Будем надеяться, что вопрос 7.15 подготовил вас к предстоящему вычислению влиятельности Банцафа для S. Мы будем заниматься этим на протяжении нескольких следующих вопросов.

Вопрос 7.16*. (а) Опишите все различные типы побеждающих коалиций, для которых S — критический избиратель. (*Подсказка.* Эти типы коалиций распадаются на 10 различных категорий, в трех из них коалиции включают S и еще одного сенатора, а в семи — S и еще двух сенаторов.)

(б) Для каждого из десяти различных типов побеждающих коалиций, которые вы описали в пункте (а), подсчитайте число различных способов, которыми могут быть сформированы коалиции этого типа. (*Подсказка.* Используйте тот же способ рассуждений, который вы использовали в вопросе 7.15.)

(в) Используя ваши ответы на пункты (а) и (б), определите влиятельность Банцафа для S.

Теперь вы понимаете, что я имел в виду, когда говорил, что это будет упражнение на терпение и упорство? Вычисления в вопросе 7.16 были несколько утомительными, но как и множество других действий, они кажутся легче, когда проделаешь их несколько раз. Помня об этом, будем двигаться дальше и вычислим влиятельность Банцафа для каждого из других избирателей в системе.

Вопрос 7.17. (а) Используя тот же способ рассуждений, что и в вопросе 7.16, определите влиятельность Банцафа для отдельного представителя в федеральной системе Психозии. (*Подсказка.* Здесь Вам надо будет рассмотреть девять различных типов побеждающих коалиций.)

(б) Теперь определите влиятельность Банцафа для президента и вице-президента в федеральной системе Психозии.

Вопрос 7.18*. (а) Используя ваши ответы на вопросы 7.16 и 7.17, определите индекс Банцафа для каждого из избирателей в федеральной системе Психозии. (*Подсказка.* Помните, что есть четыре сенатора и пять представителей.)

(б) С учетом вычисленных вами в пункте (а) индексов Банцафа, какой процент общей влиятельности в федеральной системе Психозии принадлежит сенату? палате представителей? Президенту? Вице-президенту?

(в) Кажутся ли вам разумными ваши ответы на пункты (а) и (б)? Не кажется ли вам, что у кого-либо в этой системе больше или меньше влиятельности, чем он заслуживает? Кажется ли такое распределение влиятельности правильным? Объясните ваш ответ.

Работы было много, но в конце концов мы смогли определить индекс Банцафа для каждого из избирателей в федеральной системе Психозии. Совсем скоро мы найдем и индекс Шепли—Шубика для каждого из этих избирателей. Но прежде, чем сделать это, мы потратим некоторое время для того, чтобы формализовать некоторые математические идеи, которые использовали только что.

Поток комбинаторики

Вы, возможно, и не заметили, но когда вы отвечали на вопросы из предыдущего раздела, вы углубились в область математики, из-

вестную под названием *комбинаторика*. Как вы могли догадаться по вашим ответам на эти вопросы, комбинаторика концентрируется на задачах о подсчитывании объектов или наборов объектов, обычно очень точном и систематичном. Вычисление индексов Банцафа часто включает в себя подсчет числа различных способов, которыми можно выбрать некоторое множество объектов. Например, в пункте (б) вопроса 7.15 нам нужно было подсчитать число различных способов, которыми можно было выбрать трех из пяти представителей в федеральной системе Психозии. Если немного поразмыслить, то легко увидеть, что существует ровно десять способов сделать это.

Но что если ситуация усложняется? Например, что если нам нужно подсчитать число способов, которыми можно выбрать 51 из 100 сенаторов в федеральной системе США? Именно на вопросы такого типа нам помогают отвечать методы комбинаторики. Давайте начнем с обозначений.

Определение 7.19. Число различных способов выбрать k объектов из множества n объектов обозначается $\binom{n}{k}$, читается как «число сочетаний из n по k».

Вопрос 7.20*. Найдите значение каждой из следующих величин. (Заметьте. Хотя, вы, возможно, помните формулу для $\binom{n}{k}$ из предыдущего курса, вам не обязательно использовать ее для ответа на этот вопрос; достаточно лишь подумать, что представляет собой каждая из этих величин.)

(а) $\binom{5}{0}$ (б) $\binom{5}{1}$ (в) $\binom{5}{2}$ (г) $\binom{5}{3}$

(д) $\binom{5}{4}$ (е) $\binom{5}{5}$ (ж) $\binom{5}{1} + \binom{5}{2}$ (з) $\binom{6}{2}$

Если вы внимательно посмотрите на ваши ответы на вопрос 7.20, вы заметите несколько полезных свойств. Например, должно быть справедливо равенство $\binom{5}{0} = 1$, поскольку есть только один способ выбрать нуль объектов из множества пяти объектов. (Этот способ состоит в том, чтобы из пяти объектов не выбирать ничего.) Но те же самые рассуждения применимы, если мы рассматриваем множество из шести, восьми или 100 объектов. Итак,

Теорема 7.21. $\binom{n}{0} = 1$ *для любого значения* n.

Какой простой ни казалась бы эта теорема, она представляет собой один из полезных фактов, которые помогут нам найти $\binom{n}{k}$ для любых нужных нам значений n и k. В следующих двух вопросах у вас будет возможность найти некоторые другие свойства, которые также будут полезны с этой точки зрения.

Вопрос 7.22*. Какое соотношение есть между $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{n-k}$? Приведите убедительные доводы, чтобы объяснить, почему это соотношение справедливо для любых возможных значений n и k. (*Подсказка.* Может быть, вам будет полезно вернуться к вашим ответам на вопрос 7.20.)

Вопрос 7.23*. Заполните пропуски таким образом, чтобы каждое из следующих утверждений оказалось истинным. Затем приведите убедительные доводы, чтобы объяснить, почему каждое утверждение справедливо в общем случае. (*Подсказка.* Возможно, вначале вам захочется рассмотреть некоторые примеры, особенно для пункта (в).)

(а) $\binom{n}{1} = \_\_\_$ для любого значения n.

(б) $\binom{n}{n} = \_\_\_$ для любого значения n.

(в) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{\_\_\_}$ для любых значений n и k.

Теперь давайте сопоставим все эти факты. При этом мы познакомимся с известной математической конструкцией, известной как треугольник Паскаля, он назван в честь Блеза Паскаля, математика XVII века. В треугольник Паскаля входят различные значения $\binom{n}{k}$, упорядоченные в виде треугольника. Его первые четыре ряда изображены на рисунке 7.1. Треугольник распространяется вниз до бесконечности, согласно закономерности, по которой образованы четыре верхних ряда.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

Рис. 7.1. Треугольник Паскаля (четыре верхних ряда)

Заметим, что в каждом ряду треугольника Паскаля на один элемент больше, чем в предыдущем. Заметим еще, что если мы перенумеруем ряды треугольника сверху вниз, начиная с нуля, а элементы в каждом ряду — слева направо, начиная с нуля, то тогда k-й элемент в n-м ряду равен в точности $\binom{n}{k}$. И наконец, если мы запишем треугольник Паскаля, используя численные значения $\binom{n}{k}$, то верхние четыре ряда образуют треугольник, изображенный на рис. 7.2.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Рис. 7.2. Треугольник Паскаля (четыре верхних ряда)

Вопрос 7.24. (а) Какое число стоит в начале и в конце каждого ряда треугольника Паскаля? Какое свойство $\binom{n}{k}$ позволяет вам сделать такой вывод?

(б) Объясните, каким образом всегда можно получить числа из любого ряда треугольника Паскаля, зная числа предыдущего ряда. (*Подсказка.* Возможно, вы захотите вернуться к вашему ответу на пункт (в) вопроса 7.23.)

Вопрос 7.25*. (а) Используйте ваши ответы на вопрос 7.24, чтобы записать четыре ряда треугольника Паскаля, расположенных ниже тех, что изображены на рисунке 7.2.

(б) Используйте ваш ответ на пункт (а), чтобы найти $\binom{7}{3}$.

(в) Предположим, вам нужно найти $\binom{9}{6}$. Как бы вы сделали это?

Влиятельность Шепли—Шубика в Психозии

Теперь, освоившись с обозначениями и понятиями, введенными в предыдущих двух разделах, мы, наконец, готовы вычислить индексы Шепли—Шубика для избирателей в федеральной системе Психозии. Аналогично тому, как мы действовали при отыскании влиятельности Банцафа в Психозии, здесь мы тоже начнем с вычисления индекса Шепли—Шубика для одного из сенаторов, которого мы опять обозначим S.

Вопрос 7.26*. (а) Предположим, что все избиратели в федеральной системе Психозии упорядочены таким образом, что S предшествуют ровно два других сенатора и три представителя. Можно ли назвать S ключевым избирателем для такого порядка?

(б) Предположим, что все избиратели в федеральной системе Психозии упорядочены таким образом, что S предшествуют ровно два других сенатора и четыре представителя. Можно ли назвать S ключевым избирателем для такого порядка?

(в) Сколькими способами можно выбрать шесть избирателей, предшествующих S в пункте (б)?

(г) Когда шесть избирателей, предшествующих S, выбраны, сколькими различными способами можно упорядочить этих избирателей?

(д) Когда шесть избирателей, предшествующих S, выбраны и упорядочены, сколько остается избирателей, следующих за S в упорядоченном списке всех избирателей системы?

(е) Сколькими способами могут быть упорядочены избиратели, следующие за S (из пункта (д))?

(ж) Учитывая ваши ответы на пункты (в)—(е), определите, сколькими способами могут быть упорядочены избиратели федеральной системы Психозии, если S предшествуют ровно два других сенатора и четыре представителя?

Вопрос 7.27*. (а) Опишите все различные типы упорядоченных списков избирателей в федеральной системе Психозии, в которых S — ключевой. (*Подсказка.* Эти типы распадаются на десять различных категорий, одна из которых определена в пункте (б) вопроса 7.26.)

(б) Подсчитайте, сколькими различными способами может быть сформирован каждый тип упорядоченных списков из пункта (а). (*Подсказка.* Используйте тот же способ рассуждений, который вы использовали в вопросе 7.26.)

(в) Используя ответы на пункты (а) и (б), вычислите индекс Шепли—Шубика для S.

Вопрос 7.28. Используя тот же способ рассуждения, что и в вопросе 7.27, вычислите индекс Шепли—Шубика для отдельного представителя в федеральной системе Психозии. Затем сделайте то же самое для президента и вице-президента.

Вопрос 7.29. (а) Не кажется ли вам что-нибудь странным или необычным в индексе Шепли—Шубика для избирателей в федеральной системе Психозии? Объясните ваш ответ.

(б) Сравните индексы Банцафа и Шепли—Шубика для избирателей в федеральной системе Психозии. Как вы думаете, всегда ли эти два индекса приводят к таким похожим результатам? Если да, объясните, почему это так. В противном случае приведите пример системы, для которой значения этих двух индексов значимо различаются.

Вопрос 7.30. Напишите рассуждение на одну или две страницы, в котором сравниваются идеи Банцафа и идеи Шепли и Шубика о том, как распределяется влиятельность в избирательной системе. Включите в ваше рассуждение по крайней мере ответы на следующие вопросы:

- Как вы думаете, что более точно представляет распределение влиятельности в избирательной системе: индекс Банцафа или Шепли—Шубика? Четко объясните, как вы рассуждали.
- Как вы думаете, индекс, который вы указали выше, будет наилучшим всегда, в большинстве случаев или только иногда? Объясните ваш ответ.
- Как вы думаете, кто играет более важную роль в избирательных системах типа да/нет: критические или ключевые избиратели? Объясните ваш ответ.

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 7.31. Используя понятие критического избирателя, напишите новые определения терминов *диктатор*, *право вето* и *пустышка*, которые мы впервые ввели в определении 6.10. Затем сделайте то же самое, используя понятие ключевого избирателя.

Вопрос 7.32. (а) Чему должна быть равна сумма индексов Банцафа для всех избирателей в избирательной системе типа да/нет?

(б) Изменился ли бы ваш ответ на пункт (а), если бы вместо индекса Банцафа вы использовали индекс Шепли—Шубика? Почему?

Вопрос 7.33. Вычислите индексы Банцафа и Шепли—Шубика для каждого из трех акционеров Captain Ahab's Fish & Chips, но в этот раз предположите, что квота системы равна 101. Затем повторите ваши вычисления в предположении, что квота равна 105.

Вопрос 7.34. 1. Найдите индекс Банцафа для каждого из избирателей в избирательной системе с весом [65: 30, 28, 22, 15, 13].

2. Заметим, что если в избирательной системе с весом, принятой наблюдательным советом округа Нассау в 1994 г. (см. вопрос 7.8), районы Лонг-Бич и Глен-Коув договорятся всегда голосовать одинаково (оба за или оба против любого предложенного запроса), то избира-

тельная система наблюдательного совета будет эквивалентна системе из пункта (а). Помня об этом, используйте ваши ответы на пункт (а), чтобы изучить каждый из следующих вопросов:

- Если районы Лонг-Бич и Глен-Коув договорятся всегда голосовать одинаково, то к какому эффекту приведет суммирование их индексов Банцафа: будет ли это выгодно, невыгодно, или безразлично для этих районов?
- Повлияет ли такая договоренность на индексы Банцафа других районов?
- Не показалось ли вам что-нибудь странным или необычным в ваших ответах? Объясните ваш ответ.

Вопрос 7.35. Вычислите индекс Шепли—Шубика для каждого из шести районов в избирательной системе с весом, принятой наблюдательным советом округа Нассау в 1994 г. (см. вопрос 7.8). Как итоговые индексы Шепли—Шубика соотносятся с индексами Банцхафа, которые вы вычислили для этой же системы в пункте (а) вопроса 7.8? Как вы думаете, какой индекс лучше выражает то, как в действительности распределена влиятельность в системе? Объясните ваш ответ.

Вопрос 7.36. Напишите краткую биографию Джона Ф. Банцафа III, включите в нее академические должности, которые он занимал, и сведения о его самых заметных судебных процессах.

Вопрос 7.37. Напишите краткие биографии Ллойда Шепли и Мартина Шубика, включите в них описание, где они встретились, где они работали и когда они пришли к идее своего индекса, а также другие заметные их достижения в области теории голосования и вне ее.

Вопрос 7.38. Числа, которые мы обозначили $\binom{n}{k}$, часто называют *биномиальными коэффициентами*. Исследуйте смысл этого названия и напишите отчет о ваших изысканиях. Включите в него описание хотя бы одного из математических приложений биномиальных коэффициентов вне теории голосования.

Вопрос 7.39. В комбинаторике величина $\binom{n}{k}$ часто определяется по формуле

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

Объясните, почему это определение $\binom{n}{k}$ совершенно совместимо с определением, которое мы использовали в этой главе.

Вопрос 7.40. В комбинаторике хорошо известен факт, что для любого значения n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Объясните, не вычисляя, почему это равенство справедливо в общем случае. (*Подсказка.* Объясните, как две части этого уравнения можно рассматривать как два различных способа подсчитать одно и то же значение.)

Вопрос 7.41. Напомним, что из вопроса 6.13 мы знаем, что избирательную систему, используемую для принятия решений в Совете безопасности ООН, можно считать избирательной системой с весом [39 : 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]. Найдите индексы Банцафа и Шепли—Шубика для каждого избирателя в этой системе.

Вопрос 7.42. Вспомните избирательную систему из вопроса 6.27, используемую для принятия поправок в конституцию Канады. Найдите индекс Банцафа для каждого избирателя в этой системе (для десяти канадских провинций), и прокомментируйте то, что в вашем результате кажется вам странным или необычным.

Вопрос 7.43. Напомним, что из вопроса 6.38 мы знаем, что избирательную систему, используемую для принятия решений в городском совете Фресно, Калифорния, можно считать избирательной системой с весом [5 : 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1]. Найдите индексы Банцафа и Шепли—Шубика для каждого избирателя в этой системе.

Вопрос 7.44. Напомним, что из вопроса 6.39 мы знаем, что избирательную систему, используемую для общенационального принятия решений типа да/нет в Австралии, можно считать избирательной системой с весом [5 : 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1]. Найдите индексы Банцафа и Шепли—Шубика для каждого избирателя в этой системе.

Вопрос 7.45. Предположим, что в федеральной системе Психозии штаты Блаженство и Неведение слились в один штат Просвещенность. (В этом случае неведение — это действительно блаженство!). Как вы думаете, какие изменения должны произойти в избирательной системе, используемой федеральным правительством Психозии? Если эти изменения произойдут, то какой станет влиятельность населения Просвещенности: больше, меньше или такой же, как до слияния?

Вопрос 7.46. Изучите избирательную систему, которая использовалась Европейским Экономическим Сообществом (ЕЭС). Оно было образовано в 1958 г. и было предшественником Европейского Союза (см. вопрос 6.40). Найдите индексы Банцафа и Шепли—Шубика для всех избирателей в избирательной системе, которая использовалась ЕЭС. Объясните несоответствия между этими индексами, и прокомментируйте то, что показалось вам странным или необычным в распределении влиятельности внутри ЕЭС.

Вопрос 7.47. Найдите книгу или статью, в которой приводятся индексы Банцафа или Шепли—Шубика для каждого избирателя в федеральной системе США, и напишите отчет о ваших изысканиях. Включите в него ответы по крайней мере на следующие вопросы. Приведено ли в этой книге или статье описание того, как проводились вычисления? Как вы думаете, аккуратно ли индексы представляют действительное распределение влиятельности в системе? Не кажется ли вам странным или необычным что-нибудь в этих индексах? (*Замечание.* Всего в этой системе 537 избирателей — 100 сенаторов, 435 представителей, президент и вице-президент.)

Вопрос 7.48. Кроме индексов влиятельности Банцафа и Шепли—Шубика есть некоторые другие методы, позволяющие измерять распределение влиятельности в заданной избирательной системе. Среди наиболее общеупотребительных назовем индексы Дигена—Пакела и Джонстона. Изучите оба этих индекса и напишите подробный отчет о ваших изысканиях. Включите в него сравнение этих индексов друг с другом и с индексами Банцафа и Шепли—Шубика, а также значение индексов Дигена—Пакела и Джонстона для каждого из шести районов в избирательной системе с весом из вопроса 7.8.

Ответы на вопросы

7.3. (а) Перечислим побеждающие коалиции: {Дуг, Николас}, {Дуг, Элизабет} и {Дуг, Николас, Элизабет}.

(б) Дуг — критический избиратель во всех трех побеждающих коалициях. Николас и Элизабет — критические избиратели только в одной побеждающей коалиции.

(в) Влиятельность Банцафа для Дуга равна 3, а для Николаса и Элизабет — 1. Общая влиятельность Банцафа для системы равна 5.

(г) Индекс Банцафа для Дуга равен 3/5, а индексы Банцафа для Николаса и Элизабет — 1/5.

7.7. (а) Этот вопрос гораздо проще, чем кажется на первый взгляд. Рассмотрите различные коалиции, в которые входят по два крупнейших района из трех и не входят наименьшие, и выясните, чему равны веса этих коалиций. Затем рассмотрите коалиции, в которые входят по одному крупнейшему району и все три наименьших, и выясните, чему равны веса этих коалиций.

(б) Всего в этой системе существует 32 побеждающие коалиции. В 3 из этих коалиций входят два члена, в 10 — три, в 12 — четыре, в 6 — пять, и в одну — шесть членов.

(в) Во все побеждающие коалиции этой системы входят всего 48 критических избирателей.

(г) В соответствии с вашими ответами на пункты (а) и (в), прежде чем вы приступите к пункту (г), вы должны выяснить, чему равны влиятельности и индексы Банцафа для каждого из шести районов.

7.8. (а) Всего в этой системе существует 23 побеждающие коалиции. В 5 из этих коалиций входят три члена, в 11 — четыре члена, в 6 — пять членов и в одну — шесть членов. Во все побеждающие коалиции этой системы входят всего 52 критических избирателя.

(б) В системе 1994 г. Хемпстед № 2 обладает ровно 25% влиятельности, а Глен-Коув — 1,92% влиятельности.

7.10. (а) Есть шесть способов упорядочить Дуга, Николаса и Элизабет. Если обозначить их по первой букве имени, то эти шесть способов выглядят так: DNE, DEN, NDE, NED, EDN и END.

(б) Дуг — ключевой избиратель в четырех упорядоченных списках. Николас и Элизабет — ключевые избиратели в одном упорядоченном списке каждый.

(в) Индекс Шепли—Шубика для Дуга равен 4/6, а индекс Шепли—Шубика для Николас и Элизабет равен 1/6.

7.13. (а) Для двух избирателей есть только два возможных упорядоченных списка.

(б) Для трех избирателей есть шесть возможных упорядоченных списков.

(в) Для трех избирателей есть двадцать четыре упорядоченных списка. Каждый из них может быть получен, если размещать четвертого избирателя в один из шести списков из пункта (б).

(г) Для пяти избирателей есть $5 \times 24 = 120$ возможных упорядоченных списков.

(д) Для n избирателей есть $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ возможных упорядоченных списков.

7.14. (а) Ойстер-Бей будет ключевым.

(б) Ойстер-Бей будет ключевым вне зависимости от того, где в упорядоченном списке будут располагаться три наименьших района.

(в) Есть 20 различных упорядоченных списков, совместимых с каждым из двух порядков. Если вы сократите названия районов, то сможете выписать их все.

(г) Ответ на пункт (в) не изменится, даже если предположить другой порядок трех наименьших районов.

(д) Существует шесть различных способов упорядочить три наименьших района.

(е) Для каждого порядка трех наименьших районов существует 20 упорядоченных списков всех шести районов, в которых три крупнейших района расположены в порядке, указанном в пункте (а). Поскольку возможных способов упорядочить три наименьших района существует шесть, должно быть $6 \times 20 = 120$ упорядоченных списков всех шести районов, в которых сохраняется порядок трех наибольших районов, указанный в пункте (а).

(ж) Если предположить другой порядок трех крупнейших районов, то ключевым может стать другой район. За этим исключением все остальные вычисления из пунктов (а)—(е) остаются прежними.

(з) Индексы Шепли—Шубика для районов должны быть теми же, что и индексы Банцафа, которые вы нашли в пункте (г) вопроса 7.7.

7.15. (а) Существует 3 различных способа, чтобы выбрать коалицию, состоящую из S и двух других сенаторов.

(б) Существует 10 различных способов, чтобы выбрать коалицию, состоящую из трех представителей.

(в) Для каждого из трех различных способов выбрать S и двух других сенаторов, имеется 10 способов выбрать трех представителей. Итак, есть $3 \times 10 = 30$ различных способов выбрать коалицию, состоящую из S, двух других сенаторов и трех представителей.

7.16. 1. Вот несколько из десяти различных типов побеждающих коалиций, в которых S — критический избиратель:

- S, еще один сенатор, президент, вице-президент и четыре представителя;
- S, два других сенатора и четыре представителя;
- S, два других сенатора, президент и три представителя;
- S, два других сенатора, вице-президент и четыре представителя.

2. Рассмотрим первую коалицию из перечисленных в ответе на пункт (а). Чтобы сформировать коалицию этого типа, мы должны выбрать одного из трех сенаторов кроме S (три возможных способа), и четыре из пяти представителей (пять возможных способов). Таким образом, есть $3 \times 5 = 15$ способов, которыми можно сформировать коалицию такого типа. Такой же способ рассуждения годится и для других 9 типов коалиций, в которых S — критический избиратель.

3. Вы обнаружите, что оказывается, влиятельность Банцафа для S равна 132.

7.18. Перечислим индексы Банцафа для избирателей системы:

- $\frac{132}{1500}$ для каждого из сенаторов,
- $\frac{136}{1500}$ для каждого из представителей,
- $\frac{196}{1500}$ для президента и
- $\frac{96}{1500}$ для вице-президента.

7.20. (а) 1; (б) 5; (в) 10; (г) 10; (д) 5; (е) 1; (ж) 15; (з) 15.

7.22. Если вам сложно дать объяснение, рассмотрите такую идею: Если вы выбираете k объектов из n, то сколько из n объектов не будут выбраны?

7.23. в) Для любых значений n и k

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Чтобы убедиться в этом, предположим, что вы хотите выбрать k штучек из множества $n + 1$ штучек, одна из которых красная, а n — голубые. Если среди тех k штучек, которые вы выбрали, оказалась красная, то сколько голубых штучек среди выбранных вами? Если среди выбранных вами k штучек красной не было, то сколько вы выбрали голубых штучек? (Теперь попытайтесь обобщить это рассуждение, чтобы построить полное доказательство.)

7.25. (а)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

(б) $\binom{7}{3} = 35$.

7.26. (а) В этом случае S не является ключевым избирателем.
(б) В этом случае S является ключевым избирателем.

(в) Существует $\binom{3}{2} \times \binom{5}{4} = 15$ различных способов, которыми можно выбрать этих шесть избирателей.

(г) Существует $6! = 720$ различных способов, которыми можно упорядочить этих шесть избирателей.

(д) Будет еще четыре избирателя: сенатор, представитель, президент и вице-президент.

(е) Есть $4! = 24$ различных способа, которыми можно упорядочить четырех оставшихся избирателей.

(ж) Есть $15 \times 720 \times 24 = 259\,200$ различных способов, которыми могут быть упорядочены все избиратели в системе, при условии, что S предшествуют ровно два других сенатора и четыре представителя.

7.27. Индекс Шепли—Шубика для S будет равен примерно 0,087 или 8,7 %.

7.28. Индекс Шепли—Шубика для отдельного представителя равен примерно 0,091 или 9,1 %, индекс Шепли—Шубика для президента равен примерно 0,136 или 13,6 %, а индекс Шепли—Шубика для вице-президента равен примерно 0,061 или 6,1 %

ГЛАВА 8

Испытание коллегии

Центральные вопросы

- Что такое коллегия выборщиков и как она работает?
- Что означает правило «победитель получает все», и что из него следует для коллегии выборщиков и выборов президента США?
- Почему была создана коллегия выборщиков, и почему ее до сих пор используют?
- Есть ли какие-нибудь альтернативы коллегии выборщиков? Если да, то какие?

Вопрос-разминка 8.1. Как вам, возможно, известно, для выборов президента США используется институт, известный под названием коллегии выборщиков. Но для этого вопроса мы предположим, что для определения победителя на выборах президента в 2000 г. использовалась система единственного передаваемого голоса.

В таблице 8.1 представлено общее число голосов, набранных каждым кандидатом на выборах. Эти сведения взяты на сайте федеральной избирательной комиссии США (`http://www.fec.gov/`). Для удобства мы будем считать, что все, голосовавшие за Брауна, на

Таблица 8.1

Итог голосования на выборах президента США в 2000 г.

Кандидат	Число голосов
Гарри Браун	384 431
Пат Бьюкенен	448 895
Джордж В. Буш	50 456 002
Ал Гор	50 999 897
Ральф Нейдер	2 882 955
Другие	232 920

второе место поставили Гора, а все, проголосовавшие за Бьюкенена, на второе место поставили Буша. Кроме того, мы будем считать, что голоса за второе место «остальных» избирателей распределились поровну между Бушем и Гором.

(а) Если бы 20 % тех избирателей, которые поддержали Нейдера, на второе место поставили Буша, а 80 % — Гора, то кто бы победил на выборах по системе единственного передаваемого голоса?

(б) А если бы по какой-либо странной причине голоса за второе место тех избирателей, которые поддержали Нейдера, распределились бы по-другому: 60 % за Буша и 40 % за Гора, то кто бы победил на выборах по системе единственного передаваемого голоса?

(в) Как вы думаете, существует ли такое распределение избирателей, поддержавших Нейдера, между Бушем и Гором, что выборы по системе единственного передаваемого голоса окончились бы ничьей? Если да, то можете ли вы найти такое распределение (в процентах или по числу проголосовавших)?

Как мы писали в гл. 2, выборы президента США в 2000 г. породили много споров в политическом мире. Из-за подсчитывания и пересчитывания голосов во Флориде официальные итоги выборов были объявлены только спустя 36 дней после голосования, когда Верховный Суд пятью голосами «за» и четырьмя «против» принял решение заблокировать дальнейший пересчет голосов. В результате Джордж Буш-младший победил Ала Гора в этом штате, (и, следовательно, на президентских выборах), причем с перевесом только в 537 голосов из почти 6 миллионов, поданных в этом штате.

Для людей, неискушенных в политике, еще более поразительным был тот факт, что Буш был объявлен победителем на выборах, хотя, бесспорно, по числу набранных им голосов он отставал от Ала Гора больше, чем на полмиллиона (см. табл. 8.1). Но мы-то с вами уже совсем не новички в политике. Так что даже если результат выборов президента США в 2000 г. и кажется несколько странным, он не должен уж очень сильно удивлять нас. Но наши наблюдения могут подтолкнуть нас к тому, чтобы больше узнать о системе, которая привела к такому странному исходу, и как случилось, что именно она была принята. Именно этим мы займемся в этой главе.

Коллегия выборщиков

Процедура, используемая для избрания президента США, — один из самых важных жизненных примеров избирательной системы с весом, и к тому же один из самых необычных. Ни в одной другой стране не используется такая система для избрания главного политического лидера. Но для выборов самого влиятельного человека на планете (хотя это спорное утверждение), президента Соединенных Штатов, используется избирательная система с весом — славная и бесславная *коллегия выборщиков*.

Коллегия выборщиков — это действительно избирательная система с весом с одним искажением. Ну, с несколькими искажениями, каждое из которых мы обсудим чуть позже. Но вначале сформулируем основное. Как установлено конституцией США, каждый штат получает столько голосов в коллегии выборщиков, сколько членов (сенаторов и представителей) представляет этот штат в конгрессе. Единственные дополнительные голоса в коллегии выборщиков — это три голоса округа Колумбия, соответствующие числу голосов, принадлежащих самым маленьким штатам. Таким образом, в настоящее время в системе есть 538 голосов: 435, соответствующих членам палаты представителей, 100, соответствующих членам сената, и 3 от округа Колумбия.

Эти голоса физически подают люди, которых называют *выборщиками*. Они собираются, чтобы подать свои голоса спустя несколько недель после обычных ноябрьских президентских выборов. После того, как выборщики проголосовали, результат выборов президента определяется по правилу большинства.

Вопрос 8.2*. Еще раз обратимся к выборам президента США в 2000 г. Предположим, что в результате загадочного поворота судьбы Ральфу Нейдеру удалось выиграть три голоса выборщиков от штата Аляска, что привело к распределению голосов, показанному в табл. 8.2. (Напомним, что в 2000 г. один выборщик воздержался от голосования.)

Изменит ли звездная удача Нейдера в Аляске исход выборов? Если да, то как?

Отвечая на вопрос 8.2, вы можете вспомнить, что правило большинства может привести к ничейному исходу, даже если один из кандидатов на выборах получает больше голосов, чем любой другой. На-

Таблица 8.2

Сценарий для коллегии выборщиков в 2000 г.

Кандидат	Голоса выборщиков
Джордж В. Буш	268
Ал Гор	266
Ральф Нейдер	3

помним, что для победы на выборах по правилу большинства кандидат должен набрать *больше половины* общего числа голосов. В коллегии выборщиков это 270 голосов. Наверняка вы много раз слышали это число, повторяемое на все лады, во время любой президентской кампании.

Но что, если ни один из кандидатов не наберет это архиважное число голосов? Ответ на этот вопрос может вас удивить. Если ни один из кандидатов не наберет большинства голосов выборщиков, то выборы переносятся в палату представителей, которые затем выбирают победителя голосованием. Это случалось только дважды, на выборах в 1800 и 1824 гг. Больше это не повторялось, и, как мы увидим в следующем разделе, тому есть важная причина.

Правило «победитель получает все»

Один из самых спорных аспектов коллегии выборщиков — это правило «победитель получает все». Оно гласит, что все выборщики от некоторого штата будут голосовать за того кандидата, который набрал относительное большинство голосов граждан, проголосовавших в этом штате на обычных ноябрьских выборах. Именно это общее правило делает коллегию выборщиков избирательной системой с весом, а именно метод относительного большинства лежит в основе правила «победитель получает все», которое и обуславливает первый значительный недостаток в системе — она очень подвержена манипуляциям. В каждых президентских выборах существует много избирателей, которым выгодно подавать бюллетени, не отражающие их настоящих предпочтений. Следующий вопрос иллюстрирует это явление.

Вопрос 8.3*. В таблице 8.3 представлено количество голосов избирателей, набранных во Флориде каждым из кандидатов на выборах президента США в 2000 г. В дополнение к этим данным для этого вопроса вы можете предполагать, что избиратели, проголосовавшие за Брауна, на второе место поставили Гора, а голоса за второе место тех избирателей, которые голосовали за Нейдера, были распределены так: 20% за Буша и 80% за Гора.

(а) Предположим, что некоторые избиратели, проголосовавшие за Брауна, решили (неискренне) на второе место поставить Гора. Сколько должно быть таких избирателей, чтобы результат выборов во Флориде (а значит, и общенациональных) изменился?

(б) Предположим, что некоторые избиратели, проголосовавшие за Нейдера, решили проголосовать за того кандидата, которого они

Таблица 8.3

Итог голосования по штату Флорида на выборах президента США в 2000 г.

Кандидат	Число голосов
Гарри Браун	16 415
Пат Бьюкенен	17 484
Джордж В. Буш	2 912 790
Ал Гор	2 912 253
Ральф Нейдер	97 488
Другие	6 680

поставили на второе место (за Буша или Гора). Сколько должно быть таких избирателей, чтобы результат выборов изменился? (Не забудьте, что в этом случае 20% голосов должны перейти к Бушу, а 80% — к Гору.)

(в) Как вы думаете, могло ли быть выгодно для некоторых сторонников Гора проводить во Флориде негативные предвыборные акции, направленные против Брауна или Нейдера? Как могли бы отличаться аргументы, представленные в этих акциях, от аргументов в акциях, направленных прямо против Буша?

Теперь вернемся к правилу «победитель получает все». Как мы сказали раньше, когда вы голосуете на президентских выборах, вы на самом деле отдаете голос за такого кандидата, за которого вы хотели бы, чтобы проголосовали *все* избиратели штата. Это правило справедливо если только вы не живете в Мэне или Небраске. В этих штатах назначены выборщики, по отдельности представляющие каждый из конгрессиональных округов штата (два в Мэне, три в Небраске), и еще по два выборщика. Для этих штатов общее правило состоит в том, что выборщик, представляющий отдельный округ, будет голосовать за того кандидата, который набрал относительное большинство голосов этого округа, а два оставшихся выборщика голосуют за кандидата, который набрал относительное большинство голосов всего штата. (Если это слишком запутанно для вас, то утешьтесь — в действительности ни Мэн, ни Небраска никогда не дробили голосов своих выборщиков.)

Конституциональность правила «победитель получает все» при подаче голосов выборщиков много раз оспаривалась за годы его существования. Это не должно нас удивлять, особенно если учесть тот факт, что не существует федерального закона, требующего, чтобы отдельные выборщики следовали этому правилу. Изредка бывало, что это правило нарушалось. Совсем недавний случай произошел в 2004 г., когда выборщик из Миннесоты голосовал за Джона Эдвардса, а не за Джона Керри.

Вопрос 8.4. На выборах президента в 1992 г. Г. Росс Перо набрал почти одну пятую голосов населения, но ни одного голоса выборщика. Объясните вклад правила «победитель получает все» в это явление. Какие еще факторы повлияли на столь неутешительный для Перо результат голосования в коллегии выборщиков?

Как подсказывает вопрос 8.4, у правила «победитель получает все» есть серьезные следствия, особенно в отношении кандидатов от третьих партий. На самом деле из-за строгой двухпартийной политической системы, которая сформировалась в США в начале 1800-х гг., большинство президентских выборов кончались выбором между только двумя легитимными претендентами. Так происходило, даже если кандидатов, набравших значительный процент голосов, больше двух.

На что же тогда годится коллегия выборщиков? Возможно, для ответа на этот вопрос лучше всего покопаться в его истории.

Немного истории

Коллегия выборщиков была создана и существует по сей день по причине компромисса, достигнутого на конституционном конвенте в 1787 г. между двумя группами политиков. Члены одной из них хотели, чтобы президента прямо выбирали все граждане США, а другой — чтобы его выбирал конгресс. Одной из целей создания коллегии выборщиков было отдать выборы президента в руки органа, представляющего все население, но не связанного с конгрессом, и достаточно малого, чтобы осуществлять продуманный выбор, что возможно, только если выборщики хорошо информированы. Подход «победитель получает все» развился в коллегии выборщиков почти сразу же, но только после того, как стало очевидно, что хотя население Америки было рассредоточено на большой площади, и в городах, и в селах, все-таки оно могло быть хорошо информировано о кандидатах.

Как вы могли ожидать, коллегия выборщиков эволюционировала с годами, причем самые заметные изменения произошли из-за присоединения к союзу новых штатов. До 1911 г., когда численность палаты представителей была закреплена законом, число голосующих в коллегии выборщиков менялось с присоединением каждого нового штата (и еще по некоторым другим причинам, которые мы обсудим в гл. 10). После 1911 г. численность выборщиков менялась лишь

Таблица 8.4

Общее число голосов по штатам в 2000 и 2004 гг.

Штат	Голоса в 2000 г.	Голоса в 2004 г.	Штат	Голоса в 2000 г.	Голоса в 2004 г.	Штат	Голоса в 2000 г.	Голоса в 2004 г.
AL	9	9	KY	8	8	ND	3	3
AK	3	3	LA	9	9	OH	21	20
AZ	8	10	ME	4	4	OK	8	7
AR	6	6	MD	10	10	OR	7	7
CA	54	55	MA	12	12	PA	23	21
CO	8	9	MI	18	17	RI	4	4
CT	8	7	MN	10	10	SC	8	8
DE	3	3	MS	7	6	SD	3	3
DC	3	3	MO	11	11	TN	11	11
FL	25	27	MT	3	3	TX	32	34
GA	13	15	NE	5	5	UT	5	5
HI	4	4	NV	4	5	VT	3	3
ID	4	4	NH	4	4	VA	13	13
IL	22	21	NJ	15	15	WA	11	11
IN	12	11	NM	5	5	WV	5	5
IA	7	7	NY	33	31	WI	11	10
KS	6	6	NC	14	15	WY	3	3

дважды: в 1959 г., когда Аляска и Гавайи получили статус штатов, и в 1961 г., когда в результате 23-й поправки к конституции США округ Колумбия получил три голоса выборщиков. Хотя общее число выборщиков оставалось постоянным с выборов 1964 г., их распределение по штатом менялось. Причина этого в том, что хотя число членов палаты представителей фиксировано и равно 435, число представителей от каждого штата не постоянно.

Поэтому, например, на выборах 2004 г. от Калифорнии было 55 выборщиков, а на выборах 2000 г. — 54. После перераспределения мест в палате, которое произошло в 2002 г. и было основано на результатах национальной переписи 2000 г., Калифорния получила дополнительное место в палате за счет другого штата, которому пришлось это место отдать. В главе 10 мы обсудим и изучим процедуру, согласно которой места в палате распределяются среди штатов. Но к этому моменту вам, может быть, интересно рассмотреть некоторые другие изменения в распределении голосов, которые произошли между 2000 и 2004 гг. Для сравнения в табл. 8.4 приведено число голосов выборщиков, которыми обладал каждый штат и округ Колумбия в 2000 и 2004 гг.

Вопрос 8.5*. На сколько процентов возросло число голосов выборщиков от Калифорнии между выборами 2000 и 2004 гг.?

Вопрос 8.6. В каком штате между выборами 2000 и 2004 гг. число голосов в процентах выросло больше всего? В каком штате число голосов в процентах уменьшилось больше всего?

Влияние в коллегии выборщиков

Еще одна цель создания коллегии выборщиков — защитить интересы малых штатов. Для этого к числу выборщиков от каждого штата добавляется еще два, представляющих членов сената от каждого штата. Например, для наименее населенного штата Вайоминг, у которого есть только одно место в палате представителей, эти два голоса приводят к 200%-му (2/1) росту числа голосов выборщиков. Но для наиболее населенного штата, Калифорнии, у которого в палате представителей 53 места, прирост составляет только 3,77% (2/53). В конечном итоге, чем меньше штат, тем меньше его жителей представлены выборщиком.

Вопрос 8.7*. По оценке Бюро переписи населения США в 2004 г. численность населения штата Вайоминг составила 503 560 человек. Используя эти данные, определите, сколько человек представлял каждый выборщик от этого штата на президентских выборах в 2004 г.

Вопрос 8.8. (а) По оценке Бюро переписи населения США в 2004 г. численность населения штата Калифорния составила 35 995 984 человека. Используя эти данные, определите, сколько человек представлял каждый выборщик от этого штата на президентских выборах 2004 г.

(б) Кратко обсудите, что вы думаете о справедливости коллегии выборщиков в свете ваших ответов на вопрос 8.7 и пункт (а) этого вопроса.

(в) Используя ваши ответы на вопрос 8.7 и пункт (а) этого вопроса, объясните, как бы вы могли убедить кого-нибудь, что для кандидатов в президенты США бороться за победу лучше в Вайоминге, а не в Калифорнии.

Несмотря на ваш ответ на пункт (в) предыдущего вопроса, возможно, вы считаете, что в действительности для кандидатов в президенты США гораздо выгоднее бороться за победу в Калифорнии,

а не в Вайоминге. Правило коллегии выборщиков «Победитель получает все» означает, что получение большинства голосов в Вайоминге гарантирует только три голоса выборщиков, а в Калифорнии — 55. И это действительно делает отдельных избирателей Калифорнии гораздо *более* влиятельными, чем избирателей Вайоминга.

Но в рассказе про коллегию выборщиков кроется гораздо больше, чем просто размер штатов и число голосов выборщиков, которые они контролируют. Во-первых, в гл. 7 мы выяснили, что влиятельность избирателя в избирательной системе с весом не всегда прямо связана с числом голосов, которые он контролирует. Как мы тогда убедились, влиятельность часто гораздо точнее определяется инструментами вроде индексов Банцафа или Шепли—Шубика. Каждый из них учитывает кроме числа голосов, которые есть у каждого избирателя, еще и другие факторы. Но как же мы справимся с вычислением этих индексов? Следующие два вопроса показывают, какого вида работу нужно для этого проделать.

Вопрос 8.9*. (а) В коллегии выборщиков 51 избиратель (от пятидесяти штатов и округа Колумбия). Сколько коалиций они могут образовать? Четко объясните ваш ответ. (Для этого вопроса вы можете считать, что Мэн и Небраска придерживаются правила «победитель получает все».)

(б) За какое время вы смогли бы построить все различные возможные коалиции из пункта (а), используя компьютер, строящий миллион таких коалиций в секунду? Выразите ваш ответ в годах.

Вопрос 8.10*. (а) Сколько имеется различных способов расположить в некотором порядке 51 избирателя в коллегии выборщиков?

(б) За какое время вы смогли бы построить все возможные упорядоченные наборы из пункта (а), используя компьютер, строящий миллион таких наборов в секунду? Выразите ваш ответ в годах.

Как видно из вопросов 8.9 и 8.10, вычисления, необходимые для того, чтобы найти индексы влиятельности в коллегии выборщики для штатов, потребуют сложных математических методов и *очень* мощного компьютера. Хотя обсуждение того, как эти индексы влиятельности могут быть в действительности вычислены, выходит за рамки этой книги, мы можем чувствовать себя комфортнее, зная, что эти вычисления были проделаны и результаты их доступны.

В таблице 8.5 приведены индексы Банцафа для каждого из штатов в коллегии выборщиков. Заметим, что общая влиятельность Банцафа в процентах для каждого штата лишь слегка отличается от процента голосов, контролируемых этим штатом, и единственное исключение

Таблица 8.5

Влиятельность Банцафа в процентах для коллегии выборщиков

Штаты	Голоса выбор-щиков	Процент голосов выборщиков	Процент влиятельности Банцафа
CA	55	10,22	11,40
TX	34	6,32	6,39
NY	31	5,76	5,79
FL	27	5,02	5,01
IL, PA	21	3,90	3,87
OH	20	3,72	3,68
MI	17	3,16	3,12
GA, NJ, NC	15	2,79	2,74
VA	13	2,42	2,37
MA	12	2,23	2,19
IN, MO, TN, WA	11	2,04	2,01
AZ, MD, MN, WI	10	1,86	1,82
AL, CO, LA	9	1,67	1,64
KY, SC	8	1,49	1,46
CT, IA, OK, OR	7	1,30	1,27
AR, KS, MS	6	1,12	1,09
NE, NV, NM, UT, WV	5	0,93	0,91
HI, ID, ME, NH, RI	4	0,74	0,73
AK, DE, DC, MT, ND, SD, VT, WY	3	0,56	0,55

из этого правила — Калифорния. Распределение влиятельности Шепли—Шубика в коллегии выборщиков (не приведено) очень похоже на распределение влиятельности Банцафа. И лишь влиятельность Калифорнии в процентах несколько меньше, хотя все равно значительно выше, чем процент голосов, контролируемых этим штатом. Если население Калифорнии будет продолжать расти с прежней скоростью, этот разрыв будет только увеличиваться.

После всего сказанного интересно заметить, что даже при таком большом числе выборщиков, контролируемых Калифорнией, и при такой большой влиятельности Банцафа для этого штата, ему уделялось очень мало внимания со стороны кандидатов, лидировавших на выборах 2000 г. Это произошло потому, что еще в самом начале

опросы показали, что почти наверняка в Калифорнии победит Ал Гор. И значит, все, что мы говорили о влиятельности отдельных избирателей в Калифорнии и всего штата в целом, не играло большой роли в президентской гонке 2000 г. Буш на самом раннем этапе уступил этот штат Гору, точно так же как и Гор в самом начале уступил Бушу Техас. Оба кандидата потратили большую часть своих денег и времени в таких штатах, как Флорида, где, как мы знаем, с большим трудом победил Буш, и Висконсин, где едва победил Гор.

Заметим, что несмотря на явное преимущество, каким пользуются в коллегии выборщиков крупные штаты, на самом деле правило «победитель получает все» предоставляет некоторую защиту и для малых штатов. Дело в том, что если бы Буш на президентских выборах 2000 г. проиграл Вайоминг Гору, то вместо Буша президентом стал бы Гор (и это сгладило бы все несоответствия во Флориде). Таким образом, коллегия выборщиков действительно делает необходимым проведение президентских предвыборных кампаний в малых штатах. Отцы-основатели, несомненно, гордились бы этим фактом.

Колеблющиеся голоса и искаженные результаты

В этой главе мы уделили довольно много внимания выборам президента в 2000 г. и тому, насколько напряженной была на них борьба. Мы также указали на факт, что при системе коллегии выборщиков результаты выборов зависят от многих причин, а не только от разности общего числа голосов граждан, поданных за каждого кандидата. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите табл. 8.6, в которой приведено общее число голосов, поданных в каждом штате за Буша и Гора на выборах 2000 г.

Вопрос 8.11*. Чему была равна разность числа голосов, поданных во Флориде за Буша и Гора на выборах 2000 г.? Если учитывать только голоса за этих двух кандидатов, то как в процентах выражается разность числа голосов, поданных во Флориде за Буша и Гора?

Вопрос 8.12. В каком еще штате, кроме Флориды, результаты Буша и Гора на выборах 2000 г. были близки? Зависит ли ваш ответ от того, как вы измеряете разницу — по числу голосов или в процентах?

Вопрос 8.13*. Чему равно наименьшее число избирателей, которые могли бы изменить результат выборов президента в 2000 г., проголосовав не за Буша, а за Гора?

Вопрос 8.14. (а) В предположении, что во Флориде ни один из голосовавших за Буша не изменит своего решения, найдите наимень-

Таблица 8.6

Итоги голосования 2000 г. по отдельным штатам

Штат	Голоса за Буша	Голоса за Гора	Штат	Голоса за Буша	Голоса за Гора
AL	941 173	692 611	MT	240 178	137 126
AK	167 398	79 004	NE	433 862	231 780
AZ	781 652	685 341	NV	301 575	279 978
AR	472 940	422 768	NH	273 559	266 348
CA	4 567 429	5 861 203	NJ	1 284 173	1 788 850
CO	883 748	738 227	NM	286 417	286 783
CT	561 094	816 015	NY	2 403 374	4 107 697
DE	137 288	180 068	NC	1 631 163	1 257 692
DC	18 073	171 923	ND	174 852	95 284
FL	2 912 790	2 912 253	OH	2 351 209	2 186 190
GA	1 419 720	1 116 230	OK	744 337	474 276
HI	137 845	205 286	OR	713 577	720 342
ID	336 937	138 637	PA	2 281 127	2 485 967
IL	2 019 421	2 589 026	RI	130 555	249 508
IN	1 245 836	901 980	SC	785 937	565 561
IA	634 373	638 517	SD	190 700	118 804
KS	622 332	399 276	TN	1 061 949	981 720
KY	872 492	638 898	TX	3 799 639	2 433 746
LA	927 871	792 344	UT	515 096	203 053
ME	286 616	319 951	VT	119 775	149 022
MD	813 797	1 145 782	VA	1 437 490	1 217 290
MA	878 502	1 616 487	WA	1 108 864	1 247 652
MI	1 953 139	2 170 418	WV	336 475	295 497
MN	1 109 659	1 168 266	WI	1 237 279	1 242 987
MS	572 844	404 614	WY	147 947	60 481
MO	1 189 924	1 111 138			

шее число избирателей, которые могли бы изменить результат выборов президента в 2000 г., проголосовав не за Буша, а за Гора.

(б) В предположении, что во Флориде никто из голосовавших вообще не изменит своего решения, найдите наименьшее число избирателей, которые могли бы изменить результат выборов, проголосовав не за Буша, а за Гора.

Как мы видели в последних нескольких вопросах, коллегия выборщиков может быть очень чувствительна к малым изменениям. Другими словами, даже у небольшого числа колеблющихся избирателей есть потенциальная возможность значительно повлиять на результат выборов. Но сколько голосов должен набрать кандидат, чтобы быть избранным?

Вопрос 8.15*. В таблице 8.7 представлены оценки численности населения каждого из пятидесяти штатов и округа Колумбия, полученные в бюро переписи населения США в 2004 г.

(а) Придумайте сценарий, при котором сенатор Джон Керри мог бы победить на выборах президента в 2004 г., получив всего 11 голосов по всей стране. (*Подсказка.* Рассмотрите крупнейшие штаты.)

(б) Сколько голосов в том сценарии, который вы придумали в пункте (а), мог бы набрать Джордж Буш, все же проиграв Керри? Сколько процентов голосов получил бы Керри в таком случае? Сколько процентов голосов получил бы Буш? (*Замечание.* Сумма всех 51 оценок численности населения в табл. 8.7 равна 293 788 123.)

Таблица 8.7

Численность населения штатов и округа Колумбия в 2004 г.

Штат	Население	Штат	Население	Штат	Население
AL	4 517 390	KY	4 141 516	ND	631 286
AK	655 705	LA	4 504 785	OH	11 461 352
AZ	5 727 119	ME	1 315 355	OK	3 530 479
AR	2 742 016	MD	5 575 968	OR	3 603 231
CA	35 995 984	MA	6 459 593	PA	12 391 541
CO	4 630 307	MI	10 123 940	RI	1 084 880
CT	3 507 668	MN	5 103 215	SC	4 189 642
DE	828 211	MS	2 892 644	SD	767 245
DC	560 741	MO	5 738 533	TN	5 889 477
FL	17 351 381	MT	922 420	TX	22 523 528
GA	8 844 044	NE	1 748 007	UT	2 389 112
HI	1 272 133	NV	2 321 673	VT	622 305
ID	1 389 407	NH	1 304 091	VA	7 483 709
IL	12 726 506	NJ	8 708 526	WA	6 206 373
IN	6 231 513	NM	1 892 051	WV	1 810 9
IA	2 949 541	NY	19 256 339	WI	5 506 162
KS	2 734 395	NC	8 520 551	WY	503 560

(в) Мог бы какой-нибудь кандидат победить на выборах президента в 2004 г., набрав меньше 11 голосов?

(г) Какие допущения вам пришлось сделать, чтобы построить пример, который вы привели в пунктах (а) и (б)? Были ли эти допущения разумными? Почему?

Вопрос 8.16 показывает, что при системе коллегии выборщиков кандидат может, хотя это крайне невероятно, победить на президентских выборах, набрав смехотворно малое число и процент голосов населения. Конечно же, чтобы построить такой противоестественный пример, нужно сделать некоторые допущения, абсолютно неразумные для реальных выборов. Так что давайте рассмотрим, что случилось бы, если бы мы попытались сделать некоторые из этих допущений чуть более реалистичными.

Начать можно было бы с предположения, что явка кандидатов приблизительно одинакова во всех штатах. Хотя это не вполне корректное допущение, оно исключает возможность маловероятных сценариев, когда в некоторых штатах на выборы приходит только один человек, а в других штатах — все граждане. (Возможно, вы использовали такой сценарий в вашем ответе на вопрос 8.16.) В действительности на выборах президента в 2000 г. явка избирателей в целом по стране составила 37,45 %, при подсчете учитывалось все население США, — и те, у кого есть право голосовать, и те, у кого нет такого права. В 2004 г. явка составила 40,9 %.

Вопрос 8.16. Обратимся еще раз к выборам президента в 2004 г.

(а) В предположении, что явка избирателей в каждом штате и округе Колумбия была равна в точности 40,9 %, и что каждый избиратель голосовал либо за Джорджа Буша, либо за Джона Керри, придумайте сценарий, при котором Джон Керри мог бы победить на выборах, получив менее 25 % голосов проголосовавших. (*Замечание.* Сумма всех 51 оценок численности населения в табл. 8.7 равна 293 788 123.)

(б) Отвечая на пункт (а), вы предположили, что Керри победит в некоторых штатах. В каких? Почему вы выбрали именно эти штаты?

(в) Если бы вы хотели создать побеждающую коалицию для Керри, которая включает наименьшее возможное число голосов населения, то какие штаты вы выбирали бы: крупные или малые? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ.

(г) Какие допущения вам понадобилось сделать, чтобы построить пример из пункта (а)? Были ли эти допущения разумными? Почему?

Сценарий, придуманный вами в вопросе 8.17, был возможно, более реалистичным, чем сценарий из вопроса 8.16, но, по-видимому вам все равно приходилось делать не вполне разумные допущения. Например, вы могли предположить, что в некоторых штатах все избиратели проголосовали одинаково. Вы могли также предположить, что в других штатах голоса разных избирателей распределились поровну.

В следующих вопросах мы попытаемся придерживаться реальных, жизненных ситуаций, делая только такие предположения, осуществимость которых вполне разумно допустить для президентских выборов в США. Конечно, при этом мы вступаем на зыбкую почву, поскольку самостоятельно судим — каких ситуаций на реальных выборах ожидать разумно, а каких неразумно. Во многом это дело личного вкуса, так что наша задача усложняется вдвое. Во-первых, нам понадобятся сильные аргументы, чтобы убедить окружающих, что наши предположения разумны. А затем нам все равно потребуется хорошенько подумать над оправданным наихудшем сценарии, основанным на этих предположениях.

Вопрос 8.17. Заполните следующее утверждение:

На реальных выборах президента США с двумя кандидатами одному кандидату будет практически невозможно победить, не набрав по крайней мере ___ % голосов населения.

Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ, детально описав, какие предположения вы сделали, почему эти предположения разумны, и почему из них следует ваш ответ.

Альтернативы коллегии выборщиков

Мы закончим эту главу, кратко описав некоторые альтернативные методы, которые предлагались для замены системы выборщиков. Приведенный ниже список ни в коем случае не полон, но он дает понятие о дебатах, возникавших вокруг коллегии выборщиков в последнее время. Большая часть из них разгорелась как результат выборов 2000 г. и их последствий. Заметьте также, что некоторые из перечисленных альтернатив легче воплотить, чем другие. Например, любое предложение полностью упразднить коллегию выборщиков потребует поправки к конституции США; а для предложений, в которых предлагается только изменить способ распределения голосов выборщиков между штатами, такой поправки не требуется.

Альтернативный метод 1 — Относительное большинство. Победителем можно было бы объявить просто того, кто выигрывает по методу относительного большинства в общенациональном голосовании. Такой метод сделал бы Ала Гора очень счастливым в 2000 г.

Альтернативный метод 2 — Система округов. Метод, который сейчас используется для назначения голосов выборщиков в Мэне и Небраске, мог бы использоваться по всей стране. Согласно этому методу правило «победитель получает все» выполнялось бы в округе Колумбия и в штатах, в которых есть только один округ для выборов в конгресс, но в больших штатах голоса выборщиков распределялись бы между разными кандидатами.

Альтернативный метод 3 — Пропорциональная система. В такой системе от некоторого штата для каждого кандидата присуждается часть голосов выборщиков, пропорциональная числу голосов населения, набранных кандидатом в этом штате. Например, если кандидат *A* набрал в точности 27,32 % голосов избирателей, проголосовавших в этом штате, то ровно 27,32 % голосов выборщиков от этого штата будут предназначаться *A*. При этом отпадет надобность в реальных выборщиках, и потребуется допустить дробные голоса выборщиков.

Альтернативный метод 4 — Одобрительное голосование. Одобрительное голосование может использоваться для замены собственно коллегии выборщиков, а также как альтернатива правилу относительного большинства при определении победителя от каждого штата. Одобрительное голосование — относительно простой способ дать избирателям возможность лучше выразить свои предпочтения, когда в выборах участвуют больше двух кандидатов.

Вопрос 8.18. Если бы на выборах президента США в 2000 г. использовалась пропорциональная система (альтернативный метод 3 выше), то сколько голосов выборщиков получил бы Буш во Флориде?

Вопрос 8.19. Может ли кандидат победить на выборах президента по альтернативному методу 1, но проиграть на тех же выборах по альтернативному методу 3? А если наоборот? Приведите убедительные доводы, подтверждающие каждый ваш ответ.

Вопрос 8.20. Кратко обсудите все позитивные и негативные черты, которые вы можете обнаружить в каждом из четырех описанных выше альтернативных методов. Как вы думаете, какой из этих методов — лучшая альтернатива коллегии выборщиков? Как вы думаете, следует ли заменить коллегию выборщиков одним из этих методов? Почему?

Вопрос 8.21. Найдите или придумайте другой альтернативный метод коллегии выборщиков и обсудите позитивные и негативные черты этого метода. Как вы думаете, следует ли заменить коллегию выборщиков этим методом? Почему?

Вопрос 8.22. Основываясь на том, что вы узнали в этой главе, дайте честную оценку коллегии выборщиков с вашей точки зрения. Как вы думаете, это хорошая система? Следует ли нам продолжать ее использовать? Почему? Если бы вы были кандидатом в президенты, то какой метод для определения победителя на выборах вы бы предпочли — правило относительного большинства или коллегию выборщиков? Какие изменения вы бы внесли в свою предвыборную кампанию, если бы вместо коллегии выборщиков использовалось бы правило относительного большинства?

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 8.23. Определите, какой из критериев, которые мы обсуждали в гл. 2—5, может быть применен к коллегии выборщиков. Затем, если возможно, определите, какому из применимых критериев коллегия выборщиков удовлетворяет, а какому — нет.

Вопрос 8.24. Найдите и опишите причины, по которым один из выборщиков от округа Колумбия воздержался от голосования в коллегии выборщиков в 2000 г. Затем обсудите, согласны ли вы с позицией этого выборщика, и считаете ли вы допустимым для выборщика воздерживаться от голосования. Опишите также сценарий (используя реальные названия штатов и число выборщиков), в котором отказ от голосования одного единственного выборщика мог бы изменить результат выборов президента США.

Вопрос 8.25. (а) Окончательное распределение голосов выборщиков на выборах президента в 2000 г. было таким: 271 голосов за Буша, 266 за Гора и 1 воздержавшийся. Какой из штатов был критическим (в соответствии с определением 7.2 этого термина) в побеждающей коалиции штатов для Буша (во множестве штатов, где он победил)?

(б) Предположим, что на президентских выборах 2000 г. во Флориде победил не Буш, а Гор. Какие штаты были бы критическими в побеждающей коалиции штатов для Гора в таком случае?

(в) Какие штаты были критическими в побеждающей коалиции штатов для Джорджа Буша-младшего на президентских выборах 2004 г.? (*Замечание.* Вам придется предпринять некоторые исследования, чтобы разобраться с этим вопросом.)

Вопрос 8.26. (а) Каким числом голосов Джордж Буш победил в штате Огайо на президентских выборах 2004 г.? Сколько избирателей, проголосовавших за Буша, должны были бы изменить свое решение и проголосовать за Керри, чтобы изменить исход выборов в Огайо?

(б) Предположим, что в точности то число избирателей, которое вы нашли в пункте (а), отдали свои голоса не Бушу, а Керри. Кто бы победил в общенациональных выборах в таком случае?

(в) Какой процент голосов на общенациональных выборах получил бы Буш в ситуации, описанной в пункте (б)? А какой процент получил бы Керри?

(г) Не кажется ли вам что-нибудь в ваших ответах на пункты (б) и (в) странным или необычным? (*Подсказка.* Вспомните о выборах 1876 г.)

Вопрос 8.27. Найдите и опишите три последних случая, имевших место до 2000 г., когда выборщик голосовал не за того кандидата в президенты, за которого ему предписывалось голосовать неписаным правилом коллегии выборщиков «победитель получает все».

Вопрос 8.28. Найдите и запишите отчет о каждых выборах президента США, в которых кандидат, победивший в результате голосования в коллегии выборщиков, не получил относительного большинства голосов на общенациональных выборах.

Вопрос 8.29. Проходили ли когда-нибудь президентские выборы США, на которых кандидат, победивший в результате голосования в коллегии выборщиков, был избран единогласно? Если это так, какой процент голосов на общенациональных выборах набрал победивших кандидат? Если нет, какой президент США ближе всего подошел к тому, чтобы оказаться единогласно избранным коллегией выборщиков?

Вопрос 8.30. В каких из следующих выборов президентов США, по вашему мнению, баллотирующиеся кандидаты ближе всего подошли друг к другу: 2000, 1960 или 1880 г.? Объясните, почему вы так думаете, а затем приведите аргументы в защиту аналогичных утверждений про каждые из оставшиеся двух выборов — что ближе всего результаты кандидатов были именно тогда.

Вопрос 8.31. Напишите полный отчет о том, как закончились выборы президента США в 1880 г., несмотря на то, что при голосовании в коллегии выборщиков не было победителя по правилу большинства. Включите в ваш отчет описание того, как Аарон Бурр позднее отомстил Александру Гамильтону.

Вопрос 8.32. Напишите полный отчет о том, как закончились выборы президента США в 1880 г., несмотря на то, что при голосо-

вании в коллегии выборщиков не было победителя по правилу большинства. Включите в ваш отчет описание «коррупционной сделки».

Вопрос 8.33. (а) Предположим, что в президентских выборах участвуют только два кандидата. Может ли кандидат единогласно победить в коллегии выборщиков, не получив относительного большинства голосов на общенациональных выборах? Приведите убедительные доводы или пример, подтверждающий ваш ответ.

(б) Предположим, что в президентских выборах участвуют больше двух кандидатов. Может ли кандидат единогласно победить в коллегии выборщиков, не получив относительного большинства голосов на общенациональных выборах? Приведите убедительные доводы или пример, подтверждающий ваш ответ.

Вопрос 8.34. Найдите экземпляр статьи 2 из раздела 1 конституции США, и напишите резюме ее положений. Затем критически проанализируйте этот раздел конституции, определив все недостатки, которые есть в описании того, как должна работать коллегия выборщиков.

Вопрос 8.35. Найдите экземпляр 12 поправки к конституции США и напишите резюме ее положений. Затем дополните его полным описанием исторического события, которое послужило главной причиной ее написания и ратификации.

Вопрос 8.36. Предположим, что на выборах президента в 2004 г. каждый избиратель вашего штата голосовал либо за Джорджа Буша-младшего, либо за Джона Керри. Если бы при первоначальном подсчете голосов обнаружилось, что один кандидат одержал победу над другим с минимальным возможным отрывом (в 1 или 2 голоса, в зависимости от того, четным или нечетным было число проголосовавших), то потребовался ли бы пересчет голосов в вашем штате? Если да, то найдите процедуры, которые управляли бы пересчетом, и напишите резюме ваших изысканий. Включите в него описание, насколько близкими должны быть результаты первоначального голосования за обоих депутатов, чтобы потребовался пересчет.

Вопрос 8.37. Найдите статью в средствах массовой информации, в которой дается положительная оценка коллегии выборщиков. Напишите резюме и критический анализ этой статьи, основываясь на том, что вы узнали в этой главе.

Вопрос 8.38. Найдите статью в средствах массовой информации, в которой дается отрицательная оценка коллегии выборщиков или оспаривается ее конституционность. Напишите резюме и критический анализ этой статьи, основываясь на том, что вы узнали в этой главе.

Вопрос 8.39. Найдите формулировку *теоремы о медианном избирателе*, и напишите отчет о том, что она утверждает. Аккуратно ли отражает теорема о медианном избирателе способ, которым ведут борьбу кандидаты на выборах президента США? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ.

Ответы на вопросы

8.2. Победа Нейдера на Аляске *могла* бы изменить результат выборов. Поскольку ни один из кандидатов не получил бы большинства из 538 голосов выборщиков, голосование в коллегии выборщиков окончилось бы ничейным результатом, и победитель не был бы определен.

8.3 (a) Если бы Гор получил во Флориде 538 дополнительных голосов, то он бы победил Буша с перевесом в один голос. Таким образом, если бы всего лишь 538 человек, голосовавших за Брауна, проголосовали бы не за него, а за Гора, то результат выборов был бы другим.

8.5. Число голосов выборщиков от Калифорнии увеличилось на $1/54 = 1{,}85\,\%$.

8.7. Каждый выборщик представлял $\frac{503\,560}{3} = 167\,853$ человек.

8.9. (a) Всего в системе есть $2^{51} - 1 = 2\,251\,799\,813\,685\,247$ различных коалиций. (Теперь объясните, почему это так.)

8.12. Общая разность была $2\,912\,790 - 2\,912\,253 = 537$, что в процентном выражении составляет

$$\frac{537}{2\,912\,790 + 2\,912\,253} = 0{,}0092\,\%.$$

8.14. Если бы во Флориде 269 избирателей, голосовавших за Буша, передумали и отдали свои голоса Гору, то Гор получил бы 2 912 522 голосов во Флориде, а Буш получил бы только 2 912 521.

8.16. Предположим, что в каждом из 11 крупнейших штатов на выборы пришел только один человек, а в остальных штатах явка была 100-процентной. В таких обстоятельствах Керри мог бы победить, получив только 0,000 000 09 % голосов на общенациональных выборах.

ГЛАВА 9

Проблемы с прямой демократией

Центральные вопросы

- Что такое референдум?
- Что означает сепарабельность предпочтений избирателей на референдуме? Какие проблемы могут возникнуть, если предпочтения избирателей не сепарабельны?
- Как может быть использована бинарная матрица предпочтений для представления предпочтений избирателей на референдуме?
- Какие варианты решения проблемы сепарабельности были предложены? Какие есть аргументы за и против этих вариантов?

Вопрос-разминка 9.1. Администрация Колледжа Малой Долины (КМД) столкнулась с серьезным кризисом. Из-за притока новых студентов из пригорода теперь на территории колледжа больше автомобилей, чем мест для парковки. Для того, чтобы справиться с этой проблемой, администрация предлагает два таких решения:

Предложение 1. Увеличить для студентов плату за разрешение на парковку с \$50 до \$100 (и таким образом подтолкнуть их подвозить друг друга по очереди и/или ездить на автобусе).

Предложение 2. Построить новую парковку.

Для того, чтобы студенты КМД могли решить, одобрить ли одно из этих предложений или оба, решено провести выборы по следующим правилам:

- Голосование по двум предложениям будет проводиться одновременно; оба предложения появятся в одном бюллетене.
- Каждый избиратель должен проголосовать «да» или «нет» по каждому из предложений.
- Предложение будет принято (т. е. одобрено) тогда и только тогда, когда большинство избирателей за него проголосует.

У трех студентов КМД, соседей по комнате, — Дейва, Майка и Пита — такие предпочтения относительно результатов выборов, как по-

Таблица 9.1

Предпочтения в выборах по парковке в КМД

	Результаты по предложениям		
Место	Дейв	Майк	Пит
1	Да/Нет	Нет/Да	Нет/Нет
2	Нет/Да	Да/Да	Нет/Да
3	Да/Да	Да/Нет	Да/Нет
4	Нет/Нет	Нет/Нет	Да/Да

казано в табл. 9.1. В этой таблице «да» означает, что предложение принимается, а «нет» — что не принимается.

(а) Дайте разумное объяснение для каждого из предпочтений Дейва, Майка и Пита. Иначе говоря, попытайтесь интуитивно объяснить, какие мотивы и причины привели каждого из них к таким предпочтениям.

(б) Если бы из всех студентов на голосование пришли только Дейв, Майк и Пит, то каким бы был результат выборов по парковке в КМД?

(в) Можно ли сказать, что результат выборов, определенный в пункте (б), точно отражает волю избирателей? Почему?

Выборы, описанные в вопросе-разминке 9.1, представляют собой пример выборов, известных под названием *референдум*. Референдумы стали все более популярны во многих странах; в Соединенных Штатах они используются в основном, чтобы дать избирателям возможность прямо высказаться по некоторым проблемам штата или города. Поскольку решение референдума принимается в обход представительных органов, которые обычно занимаются такими проблемами (например, законодательное собрание штата или городские комиссии), то сторонники референдумов отзываются о них как об эффективном и действенном способе воплотить *прямую демократию*. Фактически, по словам политологов Дина Лейси и Эмерсона Ниу, «возрождение прямой демократии посредством референдумов — это одна из отчетливых тенденций в демократической политике».

Определенно, есть что-то притягательное в идее прямой демократии и в ее воплощении в жизнь посредством референдумов. Многие поддерживают аргумент, выдвинутый экономистом Брайаном Бидхэмом, что «прямая демократия: не оставляет места неоднозначности в ответе на вопрос: «Чего хотел народ?» Но возможно, нам не следует

торопиться с выводами. В конце концов, как мы видели на примере голосования о парковке КМД, референдумы не всегда приводят к результату, который действительно отражает волю народа. Напомним, что в этом примере результат[1] голосования оказался наименее предпочтительным для 2/3 голосовавших!

Такое странное и парадоксальное явление не должно очень уж нас удивлять. В конце концов, мы видели несоответствия такого типа почти во всех исследованных нами случаях. Но что служит причиной их возникновения? Какие особенности референдумов приводят к тому, что их результаты оказываются столь неудачными? И что мы можем сделать, чтобы подступиться к этим проблемам? В этой главе мы рассмотрим эти и другие интересные вопросы. При этом мы узнаем о поразительной запутанности референдумов и сможем лучше оценить доводы сторонников и противников прямой демократии.

Еще больше проблем

Пример, с которым мы познакомились в вопросе-разминке 9.1, был интересным, но не настолько интересным, как мог бы. Если мы лишь чуть-чуть изменим ситуацию, то увидим, что на самом деле дела обстоят гораздо хуже, чем казалось на первый взгляд.

Вопрос 9.2. Рассмотрим еще раз референдум о парковке КМД из вопроса-разминки 9.1.

(а) Предположим, что и Дейв, и Майк убедили по десять своих друзей проголосовать в точности так же, как они сами. В предположении, что предпочтения Пита не изменились, приведет ли появление этих новых 20 избирателей к изменению результатов референдума?

(б) Предположим, что и Дейв, и Майк убедили по сто своих друзей проголосовать в точности так же, как они сами, и по-прежнему предположим, что предпочтения Пита не изменились. Приведет ли появление этих новых 200 избирателей к изменению результатов референдума?

(в) Логан, президент математического клуба КМД, сделал следующее заявление:

Даже если все 21 397 студентов КМД примут участие в референдуме о парковке, все равно может случиться так, что результат

[1] Под *результатом* референдума мы понимаем итоговый результат голосования по всем предложениям референдума. Например, мы можем сказать, что результатом референдума с тремя предложениями является Да/Да/Да, и это будет означать, что все три предложения приняты. Или мы можем сказать, что результатом является Нет/Да/Нет, и это значит, что прошло только второе предложение.

референдума окажется наименее предпочтительным для всех проголосовавших, кроме одного.

Прав ли Логан? Приведите убедительные доводы или пример, подтверждающий ваш ответ.

Вопрос 9.3. Стараясь улучшить условия жизни, Дейв, Майк и Пит сложились вместе и теперь готовы купить некоторые нужные вещи для их квартиры. Каждый из них предлагает купить что-нибудь одно: Дейв хочет новый не обжигающий гриль Джорджа Формана, Майк хочет настольный футбол, а Пит — видеофон, чтобы болтать со своей подружкой, которая учится в Испании, лицом к лицу (в каком-то смысле). Каждому из трех приятелей нравятся все эти вещи, но в глубине души они понимают, что даже в лучшем случае у них хватит денег только на две из них. Пит, вдохновленный своей до странности важной ролью на референдуме по парковке, предложил решать вопрос о том, что же все-таки купить, снова с помощью референдума. Он призывает одновременно проголосовать по следующим трем предложениям, и принимать каждое из предложений тогда и только тогда, когда большинство голосующих поддержат его.

Предложение D. Приобрести не обжигающий гриль Джорджа Формана.

Предложение M. Приобрести настольный футбол.

Предложение P. Приобрести видеофон.

После того, как бюллетени были заполнены, три товарища попросили своего друга Эрика подвести итоги. Затаив дыхание, они ждали, когда вернется Эрик и объявит результат: прошли все три предложения!

(а) Приведите пример предпочтений для Дейва, Майка и Пита, которые привели бы к такому результату.

(б) Объясните, как могло случиться, что результат референдума оказался наименее предпочтительным для всех трех голосующих.

(в) Услыхав о тяжелой участи трех товарищей, Логан сделал еще одно обескураживающее заявление:

Результат референдума, в котором принимают участие сколь угодно много человек, может оказаться наименее предпочтительным для всех проголосовавших.

Прав ли Логан на этот раз? Приведите убедительные аргументы или пример, подтверждающий ваш ответ.

(г) Как вы думаете, что привело к таким странным ситуациям, какие мы видели в последних двух вопросах? Объясните.

Проблема сепарабельности

Рассмотрев последние два вопроса, вы должно быть, убедились, что референдумы могут приводить к некоторым неприятным результатам. Но почему? Что служит причиной такого нежелательного свойства? Следующий вопрос поможет нам найти одно возможное объяснение.

Вопрос 9.4*. Обратимся опять к референдуму по парковке КМД из вопроса-разминки 9.1.

(а) Предположим, что Дейву каким-то образом удалось выяснить, что Майк и Пит собираются проголосовать Да/Нет и Нет/Нет соответственно. Как вы думаете, может ли эта информация изменить ответ Дейва при голосовании? Почему?

(б) Предположим, вы сказали Дейву, что вы знаете, будет ли принято Предложение 2, а затем спросили, чего он хочет — чтобы Предложение 1 было принято или отклонено? Как вы думаете, что он ответит? Объясните.

(в) Предположим, что вы сказали Питу, что вы знаете, будет ли принято Предложение 2, а затем спросили, чего он хочет — чтобы Предложение 1 было принято или отклонено? Как вы думаете, что он ответит? Объясните.

(г) В пунктах (б) и (в) вы обнаружили различия в предпочтениях Дейва и Пита. На предпочтения кого из товарищей больше похожи в этом смысле предпочтения Майка — Дейва или Пита? Полностью объясните ваш ответ.

Вопрос 9.4 вскрывает некоторые важные черты предпочтений участников на референдуме. Эти черты — определяющие для проблемы *сепарабельности*, как ее называют некоторые экономисты и политологи. Ее можно охарактеризовать следующим образом:

- При проведении референдума результат, желательный для избирателя по некоторому предложению или по нескольким предложениям, может зависеть от результата другого предложения или набора предложений. (Например, я могу хотеть, чтобы предложение *A* было принято, но только в том случае, если предложение *B* тоже будет принято.)
- Требование одновременного голосования по всем предложениям на референдуме заставляет избирателя разделять вопросы, которые он может считать связанными.
- Поскольку многие предпочтения нельзя разбить на последовательность решений типа да/нет, бюллетени, подаваемые голосующими на референдуме, могут и не отражать в точности волю избирателей.

- Поскольку бюллетени на референдуме могут не точно отражать предпочтения избирателей, нельзя также ожидать, что результаты референдума будут в точности отражать волю избирателей.

Для того, чтобы полностью разобраться в проблеме сепарабельности и придти к удовлетворительному решению, мы должны вначале понять, что имеют в виду, когда говорят, что предпочтения избирателей на референдуме сепарабельны. Следующее определение формализует эту идею.

Определение 9.5. Пусть v обозначает некоторого избирателя на референдуме.

- Набор S предложений на референдуме (возможно, только одно предложение), называется *сепарабельным относительно* V, если порядки предпочтений избирателя v для всевозможных комбинаций результатов по всем предложениям из S не зависят от результата референдума по любому из предложений, не входящих в S.
- Предпочтения v называются сепарабельными, если любой набор предложений на референдуме сепарабелен относительно v.

Вопрос 9.6*. Рассмотрим еще раз предпочтения Дейва, Майка и Пита и предложения на референдуме о парковке КМД из вопроса-разминки 9.1.

(а) Сепарабельно ли предложение 1 относительно Дейва, Майка или Пита? Если да, то относительно каких избирателей оно сепарабельно? Объясните, как вы пришли к такому выводу.

(б) Сепарабельно ли предложение 2 относительно Дейва, Майка или Пита? Если да, то относительно каких избирателей оно сепарабельно? Объясните, как вы пришли к такому выводу.

(в) Являются ли предпочтения кого-либо из трех друзей сепарабельными? Если да, то чьи? Объясните, как вы пришли к такому выводу.

Вопрос 9.7. Можно ли сказать, что в примере из вопроса 9.3 предпочтения Дейва, Майка и Пита являются сепарабельными? Почему?

Вопрос 9.8. Предположим, что на референдуме один избиратель проранжировал возможные результаты выборов таким образом:

$$\text{ДДД} \succ \text{ДНД} \succ \text{ДНН} \succ \text{ДДН} \succ \text{ННН} \succ \text{НДД} \succ \text{НДН} \succ \text{ННД}$$

Сепарабельны ли предпочтения этого избирателя? Почему?

Как вы могли заметить в вопросе 9.8, бывает сложно определить, сепарабельны ли предпочтения избирателя на референдуме. Это происходит в первую очередь потому, что по самому определению сепарабельности требуется, чтобы мы рассматривали каждый возможный набор предложений по отдельности. На референдумах лишь с двумя предложениями задача состоит только в рассмотрении каждого предложения по отдельности. Но на референдумах с более чем двумя предложениями ситуация уже не такая простая.

Вопрос 9.9*. Предположим, что вы хотите узнать, сепарабельны ли предпочтения некоторого избирателя на референдуме.

(а) Если на референдуме только три предложения, то какое наибольшее число наборов предложений вам придется рассматривать?

(б) Если на референдуме только пять предложений, то какое наибольшее число наборов предложений вам придется рассматривать?

(в) Если на референдуме только десять предложений, то какое наибольшее число наборов предложений вам придется рассматривать?

(г) Как вы думаете, почему в пунктах (а)—(в) вопрос стоял о *наибольшем* числе наборов предложений, которое вам придется рассматривать? Может ли сложиться так, что вам достаточно будет рассмотреть меньшее число наборов предложений? Четко объясните ваш ответ.

Как вы можете видеть из вопроса 9.9, проверка того, сепарабельны ли предпочтения избирателя, может потребовать большой работы, особенно на референдумах с большим числом предложений. К счастью, есть некоторые способы сократить ее, и мы вскоре познакомимся с этими способами. Но вначале уделим некоторое время математической модели, которую обычно используют при изучении референдумов. Эта модель предоставляет удобный способ представлять предпочтения избирателей и будет очень полезна нам до конца этой главы.

Бинарные матрицы предпочтений

Каждому избирателю на референдуме мы можем сопоставить математическое представление предпочтений этого избирателя, называемое *бинарной матрицей предпочтений*. Такая матрица — это просто прямоугольный массив нулей и единиц, построенный на основании предпочтений так, как показано в следующем вопросе.

Вопрос 9.10*. Рассмотрим в очередной раз референдум о парковке КМД из вопроса-разминки 9.1. Для этого референдума бинарные матрицы предпочтений, соответствующие Дейву, Майку и Питу, показаны в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Бинарные матрицы предпочтений на референдуме КМД

$$\underset{\text{Дейв}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Майк}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Пит}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Как вы думаете, как матрицы из табл. 9.2 могли быть построены на основании предпочтений из табл. 9.1? (*Замечание*. Если вы ответите правильно, то найдете общее правило для построения и интерпретации бинарных матриц предпочтений.)

Вопрос 9.11. Какие из следующих массивов нулей и единиц являются бинарными матрицами предпочтений? Иначе говоря, какие из них могут быть использованы для представления предпочтений избирателей на референдуме с двумя предложениями?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вопрос 9.12. Выпишите бинарную матрицу предпочтений, представляющую предпочтения из вопроса 9.8. Какой набор предложений на соответствующем референдуме будет сепарабельным относительно избирателя, который придерживается таких предпочтений? Какой набор предпочтений не будет сепарабельным? Можно ли сказать, что с использованием бинарной матрицы предпочтений легче определить — какие наборы предпочтений сепарабельны, а какие нет? Четко объясните ваши ответы

Проверка сепарабельности

Теперь мы знаем, что такое бинарные матрицы предпочтений и как они строятся. Значит, мы готовы приступить к изучению некоторых методов, которые помогут нам легче справляться с проверкой — сепарабельны ли предпочтения избирателя на референдуме.

Метод 1. Симметрия

Определение 9.13.

- *Побитовое дополнение* строки в бинарной матрице предпочтений образуется перестановкой всех нулей и единиц в строке (т. е., заменой всех нулей единицами, а всех единиц — нулями.)

- Бинарная матрица предпочтений называется *симметричной*, если i-я, считая сверху, строка матрицы является побитовым дополнением i-й строки снизу.

Вопрос 9.14*. Какие из бинарных матриц предпочтений из табл. 9.2 симметричны? А какие несимметричны? Объясните ваши ответы в каждом случае.

Вопрос 9.15. Верхняя половина бинарной матрицы предпочтений избирателя показана ниже. В предположении, что матрица симметрична, найдите нижнюю половину.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Если нам известно, что бинарная матрица предпочтений избирателя симметрична, мы можем сделать кое-какие выводы о предпочтениях избирателя. Например, если мы знаем, какой результат для избирателя наиболее предпочтительный, то мы легко можем определить, какой результат для него наименее предпочтительный. И, как мы только что видели в вопросе 9.15, если нам известно, как выглядит верхняя половина симметричной матрицы предпочтений, мы легко можем определить, как выглядит нижняя.

Как вы могли заметить в вопросе 9.14, в табл. 9.2 есть только одна бинарная матрица предпочтений, которая является симметричной — та, которая соответствует избирателю с сепарабельными предпочтениями. Это наводит на мысль, что, возможно, существует некоторое соотношение между свойствами сепарабельности и симметрии. Конечно, было бы ошибкой делать общий вывод об особенностях этого соотношения, основываясь только на трех матрицах предпочтений из вопроса 9.14. Но нам помогут разобраться с деталями некоторые математические соображения.

Теорема 9.16. *Если предпочтения избирателя на референдуме сепарабельны, то бинарная матрица предпочтений этого избирателя будет симметрична*[1].

[1] Теорема 9.16 — первая в ряду результатов этой главы, которые мы сформулируем, но не докажем. Это не значит, что доказательства крайне сложные или недоступные для вашего понимания. Они просто используют некоторые обозначения, которые мы не вводили, и опираются на несколько более формальный (т. е. менее интуитивный) подход к идее сепарабельности.

Таблица 9.3

Бинарная матрица предпочтений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вопрос 9.17*. Какой вывод на основании теоремы 9.16 и вашего ответа на вопрос 9.12 вы можете сделать о предпочтениях, приведенных в вопросе 9.8?

Вопрос 9.18*. Если бинарная матрица предпочтений избирателя на выборах симметрична, то значит ли это, что предпочтения избирателя должны быть сепарабельны? Приведите убедительные доводы или пример, подтверждающий ваш ответ.

Итак, мы можем видеть, что хотя несимметричность бинарной матрицы предпочтений позволяет нам заключить, что предпочтения избирателя *не сепарабельны*, симметричность бинарной матрицы предпочтений не помогает нам, когда мы хотим доказать, что предпочтения избирателя *сепарабельны*. В этом случае нам необходим другой метод.

Метод 2. Объединения и пересечения

Исследуя предпочтения избирателей на референдуме, мы могли бы интуитивно придти к выводу, что сепарабельность некоторых наборов предложений должна быть связана с сепарабельностью других наборов предложений. Например, если мы знаем, что предложение 1 само по себе сепарабельно относительно некоторого избирателя V, и что предложение 2 тоже само по себе сепарабельно относительно V, то мы можем ожидать, что предложения 1 и 2 в совокупности будут также сепарабельны относительно v. Так ли это? Чтобы ответить на этот вопрос, давайте рассмотрим один пример.

Вопрос 9.19*. Бинарная матрица предпочтений из табл. 9.3 соответствует предпочтениям некоторого избирателя на референдуме с тремя предложениями.

(а) Сепарабельны ли предпочтения этого избирателя? Почему?

(б) Какие наборы предпочтений сепарабельны относительно этого избирателя? Объясните, как вы пришли к такому выводу.

(в) Основываясь на вашем ответе на пункт (б), какой вывод вы можете сделать о следующем утверждении:

Если на референдуме два набора S и T предложений сепарабельны относительно предпочтений некоторого избирателя, то объединение S и T (т. е. набор предложений, которые входят либо в S, либо в T, либо в оба этих набора) тоже сепарабельно относительно предпочтений этого избирателя.

Вопрос 9.19 показывает, что понятие сепарабельности в контексте референдумов не настолько удобно, как мы могли того ожидать. Фактически, вывод, который вы сделали относительно утверждения в пункте (в) вопроса 9.19, на первый взгляд, казалось бы, противоречит очень важной теореме в области экономики. Эта теорема, впервые появившаяся в 1968 г. в статье экономиста В. М. Гормана, утверждает в сущности, что в экономике сепарабельность обладает некоторыми удобными свойствами относительно таких операций, как объединение. Другими словами, если бы мы пытались решить, как инвестировать или распределять наши деньги, или какие различные покупки сделать, мы бы были гораздо удачливее. Такой вид задач отличается от тех, которые мы изучаем в этой главе. Действительно, тогда как у меня есть возможность купить немного золота и немного зерновых, я не могу проголосовать немного «да» и немного «нет». Голосуя, я должен сказать либо «да», либо «нет», а промежуточных вариантов нет. У этого различия, как оказывается, есть несколько значительных (и возможно неудачных) следствий.

Но важно заметить также, что еще не все потеряно. По крайней мере одно из удобных свойств, выполняющихся в мире экономики, выполняется и при проведении референдумов. Хотя мы не можем быть уверенными, что *объединение* сепарабельных наборов S и T сепарабельно, мы можем быть уверенными, что сепарабельно их *пересечение* (т. е. набор предложений, входящих и в S, и в T). Как мы узнаем из следующего вопроса, этот факт может быть очень полезен.

Вопрос 9.20*. Предположим, вам известно, что на референдуме с четырьмя предложениями все три набора предложений $\{A, B, C\}$, $\{A, C, D\}$ и $\{B, C, D\}$ сепарабельны относительно некоторого избирателя. Какие еще наборы предложений, если такие найдутся, тоже будут сепарабельными относительно этого избирателя? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ.

Вопрос 9.21. Предположим, вам известно, что на референдуме с n предложениями (где n обозначает произвольное число предложений) всевозможные наборы из $n - 1$ предложений сепарабельны относительно некоторого избирателя. Какие еще наборы предложений, если такие найдутся, тоже будут сепарабельными относительно этого избирателя? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ.

Некоторые возможные решения

Теперь, когда мы узнали, как понятие сепарабельности может влиять на результат референдума, мы закончим эту главу, кратко обсудив некоторые стратегии, которые предлагались для решения проблемы сепарабельности. Прежде чем двигаться дальше, заметьте, что в этом разделе мы затронем новые и захватывающие области исследований. По проблеме сепарабельности было написано только небольшое число статей, а те, что ближе всего подходят к нашим исследованиям, были опубликованы в самые последние годы. Это значит, что предстоит еще большая работа. Идеи, с которыми мы познакомимся в этом разделе — хорошее начало, но они, конечно же, не исчерпывают возможностей, которые появятся в ближайшем будущем, а некоторые из них еще только предстоит открыть.

Учитывая сказанное выше, давайте начнем с самого очевидного решения проблемы сепарабельности.

Решение №1. Избегайте несепарабельных предпочтений

Как мы видели в предыдущих примерах в этой главе, большая часть проблемных и парадоксальных явлений, которые могут возникнуть на референдумах, может быть отнесена к существованию избирателей с несепарабельными предпочтениями. Следующая теорема естественным образом формализует это наблюдение.

Теорема 9.22. *Референдум, в котором предпочтения всех избирателей сепарабельны, приводит к результату, побеждающему по Кондорсе, если такой существует.*

Вопрос 9.23. (а) Следует ли из теоремы 9.22, что на референдуме, в котором предпочтения всех избирателей сепарабельны, побеждающий результат не может быть наименее предпочтительным для всех избирателей? Объясните ваш ответ.

(б) Может ли на референдуме, в котором предпочтения всех избирателей сепарабельны, побеждающий результат быть наименее предпочтительным для всех избирателей? Приведите убедительные аргументы или пример, подтверждающий ваш ответ.

Еще один, не очень значительный результат, содержится в следующей теореме, касающейся возможности манипулирования избирателями на референдуме.

Теорема 9.24. *На референдуме, в котором предпочтения всех избирателей сепарабельны, невозможны обстоятельства, при которых избиратель может гарантировать более желательный результат, голосуя неискренне (т. е. голосуя не за тот результат, который он поставил на первое место в своем списке предпочтений).*

Обе теоремы, 9.22 и 9.24, приводят к положительным заключениям. Но правда, только если выполняются довольно строгие условия этих теорем. Чтобы применять эти теоремы, предпочтения каждого из избирателей на референдуме должны быть сепарабельны. То есть даже один случай несепарабельности может аннулировать заключение теоремы. Следующий вопрос иллюстрирует это явление.

Вопрос 9.25. Еще раз рассмотрим референдум о парковке КМД и предположим, что Дейв, Майк и Пит пересмотрели свои предпочтения, чтобы сформировать новые бинарные матрицы предпочтений, приведенные в табл. 9.4.

Таблица 9.4

Пересмотренные матрицы предпочтений на референдуме КМД

$$\underset{\text{Дейв}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{Майк}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{Пит}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(а) Согласно этим новым бинарным матрицам предпочтений, у кого из друзей — Дейва, Майка и Пита — сепарабельные предпочтения? У кого — несепарабельные? Объясните, как вы пришли к этому выводу.

(б) В предположении, что других избирателей, кроме Дейва, Майка и Пита нет, определите — существует ли побеждающий по Кондорсе исход референдума при этих пересмотренных матрицах предпочтений. Если да, будет ли этот исход объявлен итоговым результатом референдума?

(в) Постройте пример, показывающий, что если на референдуме со сколь угодно большим числом избирателей предпочтения всех, кроме одного, избирателей сепарабельны, то побеждающий по Кондорсе исход референдума может не стать итоговым результатом. (*Подсказка.* Используйте бинарные матрицы предпочтений из табл. 9.4.)

Решение № 2. Голосование за список

Проблема сепарабельности может быть очень острой, поскольку требуется просить избирателей разделить вопросы, которые для них взаимосвязаны. Поэтому сразу напрашивается второй способ решения задачи — просто не просить избирателей об этом. Иначе говоря, вместо того, чтобы рассматривать исход Да/Да/Нет как три различных исхода по трем предложениям (Да за первые два предложения и Нет за третье), мы можем рассматривать его как один голос за исход Да/Да/Нет по трем предложениям вместе. И даже еще лучше — если мы так поступим, то можем дать избирателям возможность указывать в бюллетенях свои полные списки предпочтений, а затем воспользоваться любым удобным методом из гл. 2—5 (таким, как правила большинства и Бордá, система единственного передаваемого голоса, одобрительное голосование и т. д.) для определения побеждающего результата. Такая техника часто называется голосованием за список.

Вопрос 9.26. Еще раз рассмотрим референдум из вопроса 9.3, и предположим, что предпочтения Дейва, Майка и Пита на этом референдуме представлены бинарными матрицами предпочтений из табл. 9.5.

Таблица 9.5

Матрицы предпочтений для референдума в квартире

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Дейв Майк Пит

(а) Предположим, что каждый из друзей — Дейв, Майк и Пит — проголосовал за самый предпочтительный для себя результат. Каким будет тогда результат референдума при голосовании за список?

(б) Считаете ли вы, что результат референдума при голосовании за список будет точнее отражать волю избирателей, чем результат при голосовании по методу предложение-за-предложением, который мы использовали в этой главе? Почему?

Вопрос 9.27. Напишите краткое рассуждение о доводах за и против голосования за список. Считаете ли вы, что на всех референдумах голосование за список следует использовать вместо стандартного метода предложение-за-предложением? Если да, то объясните почему. В противном случае опишите типы референдумов, на которых голосование за список будет наиболее приемлемым.

Решение № 3. Последовательное голосование

В конечном счете проблема сепарабельности сводится к недостатку информации. Избирателям может потребоваться информация о результате референдума по некоторым предложениям до того, как они сформулируют свои предпочтения по другим предложениям. Поэтому кажется вполне естественным попытаться предоставить эту информацию, проводя один за другим несколько референдумов, вместо того, чтобы требовать одновременного голосования по всем предложениям. Чтобы понять, как работает этот метод, давайте рассмотрим один пример.

Вопрос 9.28*. Опять вернемся к референдуму о парковке КМД из вопроса-разминки 9.1, но теперь предположим, что голосование проводится не одновременно по обоим предложениям, а поэтапно:

- Вначале избиратели проголосуют по предложению 1, и будет объявлен результат этого голосования.
- Затем, на отдельном референдуме, избиратели будут голосовать по предложению 2.

В предположении, что кроме Дейва, Майка и Пита других избирателей нет, а их предпочтения представлены в табл. 9.1, будет ли результат референдума, проведенного в два этапа, отличаться от результата при одновременном голосовании? Если да, то какой метод (последовательного или одновременного голосования), по вашему мнению, приводит к результату, точнее отражающему волю избирателей? Объясните ваш ответ.

Как мы видели в вопросе 9.28, последовательное голосование по крайней мере иногда приводит к более правильным результатам, чем одновременное голосование. Но всегда ли это так?

Вопрос 9.29. Предположим, что на референдуме с тремя предложениями предпочтения трех избирателей имеют такой вид:

- *Избиратель 1:*

$$\text{Да/Нет/Да} \succ \text{Да/Да/Нет} \succ \text{Да/Да/Да} \succ \ldots \succ \text{Да/Нет/Нет}$$

- *Избиратель 2:*

Да/Да/Нет ≻ Да/Да/Да ≻ Да/Нет/Да ≻ … ≻ Да/Нет/Нет

- *Избиратель 3:*

Нет/Да/Да ≻ Да/Нет/Нет ≻ Да/Да/Нет ≻ Да/Да/Да ≻…

…≻ Да/Нет/Да

(а) Каким был бы результат референдума при одновременном голосовании?

(б) Предположим, что референдум проводится последовательно в два этапа: сначала избиратели голосуют по предложению 1, а после того, как результат первого этапа будет объявлен, голосуют одновременно по предложениям 2 и 3. Каким был бы итоговый результат голосования при такой двухэтапной системе? Как вы думаете, этот результат лучше или хуже результата из пункта (а)?

(в) Предположим, что референдум проводится последовательно в три этапа: сначала избиратели голосуют по предложению 1, затем по предложению 3, а после этого по предложению 3. Каким был бы итоговый результат голосования при такой трехэтапной системе? Как вы думаете, этот результат лучше или хуже результата из пункта (а)?

(г) Предположим, что референдум проводится последовательно в два этапа: сначала избиратели голосуют одновременно по предложениям 1 и 2, а затем отдельно по предложению 3. Каким был бы итоговый результат голосования при такой двухэтапной системе? Как вы думаете, этот результат лучше или хуже результата из пункта (а)?

Вопрос 9.29 показывает (к удивлению!) что последовательное голосование не всегда приводит к лучшему результату, чем одновременное. На самом деле результат, к которому приводит одновременное голосование, в действительности может быть более желательным для большинства избирателей, чем результат, к которому приводит такой же референдум при последовательном голосовании. Оказывается, дополнительная информация, предоставляемая последовательным голосованием, иногда может повредить результату референдума. С учетом сказанного, последовательное голосование может быть полезным (или по крайней мере не таким вредным) в одном очень специальном случае.

Теорема 9.30. *Предположим, что на референдуме вначале избиратели голосуют одновременно по всем, кроме одного, предложения (с объявлением результата), а затем голосуют по оставшемуся предложению на отдельном референдуме. Пусть O обозначает результат референдума при такой двухэтапной последовательной системе, и пусть все избиратели голосуют искренне (т. е. за самый предпочтительный для себя исход). Тогда:*

- *Результат, к которому приводит одновременное голосование, для большинства избирателей не может быть предпочтительнее, чем O.*
- *O не может быть проигрывающим по Кондорсе.*
- *O не может быть наименее предпочтительным исходом для всех избирателей на референдуме.*

К сожалению, сценарий, описанный в теореме 9.30, — единственный, для которого доказано, что последовательное голосование является эффективным решением проблемы сепарабельности. И даже в этом очень специальном случае все еще остаются трудности, требующие разрешения.

Вопрос 9.31. Если бы вы хотели использовать метод, описанный в теореме 9.30, чтобы определить итоговый результат референдума, как бы вы решали — за какое предложение следует проголосовать в последнюю очередь? Четко объясните ваш ответ.

Вопрос 9.32. Может ли результат, к которому приводит одновременное голосование на референдуме с двумя предложениями, для большинства избирателей быть предпочтительнее того результата, к которому приводит последовательное голосование? Почему?

Решение №4. Бюллетени с условиями

Вопрос 9.33. Еще раз рассмотрим референдум о парковке КМД из вопроса-разминки 9.1, но теперь предположим, что каждый избиратель получает бюллетень, содержащий следующие вопросы, на каждый из которых следует ответить Да или Нет:

- Следует ли одобрить предложение 1?
- Следует ли одобрить предложение 2, если предложение 1 одобрено?
- Следует ли одобрить предложение 2, если предложение 1 не одобрено?

(а) Объясните, как такой бюллетень (часто называемый бюллетенем *с условиями*) может быть использован, чтобы имитировать последовательное голосование на референдуме.

(б) Какие есть преимущества и недостатки при использовании бюллетеней с условиями вместо последовательного голосования?

(в) Какие есть преимущества и недостатки при использовании бюллетеней с условиями вместо одновременного голосования?

(г) Пусть на референдуме проводится голосование только по двум предложениям. Может ли результат такого референдума при одновременном голосовании для большинства избирателей быть предпочтительнее, чем результат при использовании бюллетеней с условиями? Почему?

Решение №5 еще предстоит найти

Вопрос 9.34. Предложите метод решения проблемы сепарабельности, который отличается от тех, которые мы обсуждали. Проанализируйте доводы за и против вашего метода и опишите типы ситуаций, в которых он пригоден больше всего.

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 9.35. Может ли результат референдума с двумя предложениями и произвольным числом избирателей быть наименее предпочтительным для всех избирателей? Приведите убедительные аргументы или пример, подтверждающий ваш ответ.

Вопрос 9.36. (а) Может ли на референдуме, на котором у каждого избирателя все предпочтения сепарабельны и все избиратели голосуют искренне, проигрывающий по Кондорсе результат оказаться тем результатом, к которому приводит одновременное голосование? Приведите убедительный аргумент или пример, подтверждающий ваш ответ.

(б) Повторите пункт (а), но теперь предположите, что предпочтения всех избирателей несепарабельны.

Вопрос 9.37. Предположим, что на референдуме с тремя предложениями предпочтения одного из избирателей могут быть описаны таким образом:

- Наиболее предпочтительный исход — все предложения принимаются, наименее предпочтительный — все предложения отклоняются.
- Любой исход, в котором принимаются два предложения, предпочтительнее, чем исход, в котором принимается только одно предложение.

Могли ли предпочтения этого избирателя быть сепарабельными? Могли ли они быть несепарабельными? Приведите убедительные аргументы или примеры, которые подтверждают ваши ответы.

Вопрос 9.38. (а) Составьте перечень всех возможных бинарных матриц предпочтений для референдума с двумя предложениями.

(б) Какие матрицы из пункта (а) симметричны?

(в) Какие матрицы из пункта (а) соответствуют избирателям с сепарабельными предпочтениями?

(г) Можете ли вы, основываясь на ваших ответах на пункты (а)–(в), охарактеризовать взаимосвязь между сепарабельностью предпочтений избирателя и симметричностью матриц предпочтения для референдума с двумя предложениями?

Вопрос 9.39. (а) Сколько может быть различных бинарных матриц предпочтений на референдуме с двумя предложениями? Сколько из них симметричных матриц?

(б) Сколько может быть различных бинарных матриц предпочтений на референдуме с тремя предложениями? Сколько из них симметричных матриц?

(в) Сколько может быть различных бинарных матриц предпочтений на референдуме с n (где n обозначает некоторое произвольное число) предложениями? Сколько из них симметричных матриц?

(г) Используя теорему 9.16 и ваши ответы на пункты (а)–(в), объясните, почему вероятность того, что предпочтения произвольного взятого избирателя сепарабельны, убывает к нулю с ростом числа предложений в бюллетене.

(д) В 1990 г. в Калифорнии проводился референдум, в котором кроме местных инициатив на голосование были поставлены 28 предложений, значимых для населения всего штата. Как вы думаете, насколько вероятно, что у некоторых избирателей на референдуме были несепарабельные предпочтения? Объясните ваш ответ.

Вопрос 9.40. В ноябре 2004 г. в штате Колорадо в бюллетени было добавлено предложение, которое могло изменить способ, в соответствии с которым распределялись голоса выборщиков на президентских выборах в 2004 г. Исследуйте детали этого предложения и напишите резюме ваших изысканий. Включите в него полную формулировку предложения, описание предложенного метода распределения голосов выборщиков, и ответы на вопросы: кто добавил предложение в бюллетень, почему они это сделали, и каким был итог голосования. Как вы думаете, были ли предпочтения избирателей по этому предложению сепарабельны? Почему?

Вопрос 9.41. Разыщите подробную информацию о недавнем референдуме в вашем штате и напишите резюме ваших изысканий. Включите в него полные формулировки всех предложений референдума, итоги голосования и результат референдума по каждому предложению. Думаете ли вы, что у некоторых избирателей были несепарабельные предпочтения? Если да, то опишите любые возможные связи между предложениями референдума и объясните, как эти связи могли повлиять на сепарабельность предпочтений избирателей.

Вопрос 9.42. Могут ли предпочтения избирателя с симметричной бинарной матрицей предпочтений быть полностью несепарабельными (т. е. такими, что все возможные наборы предложений референдума несепарабельны относительно избирателя)? Приведите убедительные аргументы или пример, подтверждающий ваш ответ.

Ответы на вопросы

9.4. (а) Эта информация может изменить способ голосования для Дейва. Если он проголосует за самый предпочтительный для себя исход (Да/Нет), то результатом референдума станет наименее предпочтительный для него исход (Нет/Нет). Но если он проголосует неискренне, за второй по предпочтительности исход (Нет/Да), то последний и станет победившим результатом.

(б) Он сказал бы, что его ответ зависит от того, будет ли принято предложение 2.

(в) Он сказал бы, что хочет, чтобы предложение 1 было отклонено независимо от того, будет ли принято предложение 2.

9.6. (а) Предложение 1 сепарабельно только относительно предпочтений Пита. (Можете ли вы объяснить, почему?)

(б) Предложение 2 сепарабельно относительно предпочтений и Майка, и Пита.

(в) Только предпочтения Пита сепарабельны.

9.9. (а) Если предложений пять, то максимальное число наборов предпочтений, которые вам нужно рассмотреть, равно

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}=30.$$

(См. гл. 7, в которой обсуждаются эти обозначения.)

9.10. В каждой бинарной матрице предпочтений 1 обозначает Да, а 0 обозначает Нет. Каждая строка соответствует одному из возможных исходов референдума, и все они перечислены в порядке предпочтительности: наиболее предпочтительный для избирателя результат в верхней строке, а наименее предпочтительный — в нижней.

9.14. Симметрична только бинарная матрица предпочтений Пита.

9.17. Бинарная матрица предпочтений из вопроса 9.12 не должна быть симметричной. Поэтому предпочтения, приведенные в вопросе 9.8, не могут быть сепарабельными.

9.18. Бинарная матрица предпочтений избирателя может быть симметричной, а предпочтения избирателя при этом могут и не быть сепарабельными. Чтобы построить пример, иллюстрирующий этот факт, вам может потребоваться рассмотреть референдум, в котором больше двух предложений.

9.19. (а) Предпочтения избирателя не сепарабельны, поскольку бинарная матрица предпочтений из табл. 9.3 не симметрична.

(б) Каждое предложение по отдельности сепарабельно относительно избирателя. Кроме того, первое и третье предложения вместе сепарабельны относительно избирателя, точно так же, как и второе и третье предложения вместе. Все остальные наборы предложений не сепарабельны относительно избирателя.

(в) Для избирателя, бинарная матрица предпочтений которого представлена в табл. 9.3, первые два предложения сепарабельны по отдельности, но не вместе. Поэтому утверждение в пункте (в) ложно.

9.20. Следующие наборы предложений тоже должны быть сепарабельны относительно избирателя: $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$ и $\{C\}$.

9.28. При последовательной системе результатом референдума будет Да/Нет. Для двух из трех избирателей этот результат предпочтительнее, чем результат при одновременном голосовании.

ГЛАВА 10

Пропорциональное (анти)представительство

Центральные вопросы

- Какой метод в настоящее время используется для распределения мест в палате представителей США? Какие еще методы использовались для этого в прошлом?
- Что такое правило с квотой? Какие методы распределения удовлетворяют правилу с квотой, а какие не удовлетворяют ему?
- Какие бывают парадоксы распределения? Все ли методы распределения могут порождать парадоксы?
- Какой метод распределения самый лучший? Существует ли совершенный метод или по крайней мере такой, который лучше других?

Вопрос-разминка 10.1. Округлите следующие пятнадцать чисел (т. е. превратите их в целые без дробной части) так, чтобы сумма округленных чисел была бы равна сумме неокругленных чисел (это в точности 105).

6,408; 1,594; 2,226; 1,987; 8,622; 12,814; 3,826; 4,965; 9,175;
10,651; 11,693; 1,864; 6,716; 2,301; 20,158

Какой метод округления вы использовали? Подробно опишите, как вы решали: какие числа округлять до ближайшего большего, и какие — до ближайшего меньшего целого.

Так что же вы сделали с пятнадцатью числами из вопроса-разминки 10.1? Самый очевидный способ — *общепринятый* (число округляют до ближайшего большего целого числа, когда его дробная часть больше либо равна 0,5, и до ближайшего меньшего в противном случае). Но тем не менее в нашем случае мы сталкиваемся с одной проблемой, применяя этот метод: сумма округленных таким образом чисел равна 106, на единицу больше, чем сумма неокругленных чисел. Поэтому

нужно уменьшить одно из округленных чисел на единицу, но вот какое? То из округленных до ближайшего большего чисел, у которого наименьшая дробная часть? А может быть, то из них, у которого наименьшее отношение дробной части к самому числу в процентах? (Например, дробная часть числа 1,594 составляет $\frac{0{,}594}{1{,}594} = 37{,}26\,\%$ от самого числа, а дробная часть числа 8,622, хотя и больше, но составляет только $\frac{0{,}622}{8{,}622} = 7{,}21\,\%$ от самого числа.) Если только вы не применяли какой-нибудь особенно творческий подход, вы, вероятно, использовали один из этих двух методов округления, скорее всего, первый.

Вопрос 10.2. Ответьте еще раз на вопрос-разминку 10.1, использовав один из двух методов округления, описанных в предыдущем абзаце, тот, который вы не использовали до сих пор.

Как вы думаете, какой из методов округления самый лучший? И почему он самый лучший? Что же, ответы на эти вопросы сложнее, чем вы можете ожидать, и именно поэтому была написана эта глава и именно поэтому возникла тема *распределения*. Распределение обычно имеет дело с задачей: как округлить числа из некоторого набора так, чтобы сумма округленных чисел была равна сумме неокругленных чисел[1].

Если это кажется вам слишком отвлеченным, учтите, что как это ни удивительно, задача распределения обладает самыми насущными приложениями в политике и лежит в самом сердце одного захватывающего эпизода в политической истории США. Причина этого в том, что самый важный вид задачи распределения — распределить места в законодательном органе между набором штатов или округов таким образом, чтобы число мест в органе было бы пропорционально населению этих штатов или округов. Впервые эта задача возникла, когда наши отцы-основатели попытались распределить места в палате представителей США между первыми штатами.

Палата представителей США

Все началось в 1787 г., когда делегаты от каждого из первых тринадцати штатов встретились в Филадельфии на конституционном конвенте. Самые жаркие споры на конвенте касались, несомненно, организации законодательных органов в новом государстве. Крупнейшие штаты хотели, чтобы представительство в законодательных ор-

[1] Согласно словарю Вебстера слово *распределить* означает разделить и разбить на части в соответствии с планом; провести пропорциональное разделение или распределение чего-либо.

Таблица 10.1

Итоги общенациональной переписи населения 1790 г. по штатам

Штат	Население
Коннектикут	237 655
Делавэр	59 096
Джорджия	82 548
Кентукки	73 677
Мэриленд	319 728
Массачусетс	475 199
Нью-Гэмпшир	141 899
Нью-Джерси	184 139
Нью-Йорк	340 241
Северная Каролина	395 005
Пенсильвания	433 611
Род-Айленд	69 112
Южная Каролина	249 073
Вермонт	85 341
Вирджиния	747 550
Всего:	3 893 874

ганах было пропорционально населению штатов. Но меньшие штаты, конечно же, хотели, чтобы все штаты были представлены поровну. Делегаты конвента, проявив необыкновенную изобретательность, пришли к решению, удовлетворявшему всех — было принято и равное и пропорциональное представительство, в сенате и палате представителей соответственно. Они зафиксировали это в статье 1 раздела 1 конституции США.

В статье 1 раздела 2 описано, как должна формироваться палата представителей. Ясно, что смысл этого описания в том, что места представителей штатов должны быть распределены пропорционально численности населения этих штатов. Но на самом деле в конституции нигде точно не сказано, как именно должно проходить это распределение. У авторов конституции США, несомненно, были причины оставить эту важную деталь без упоминания. По-видимому, они думали, что с ней легко будет разобраться позднее, в более подходящее время, например, через несколько лет, когда пора будет распределять места в палате. Но как оказалось, это упущение в конституции вызвало бурю споров, гнева и разочарования среди членов конгресса.

А кроме того — множество научных исследований, касающихся математических аспектов проблемы распределения.

В защиту авторов конституции США следует сказать, что по-видимому, они и не представляли, насколько серьезные проблемы возникнут при построении пропорционального представительства. Распределение никогда подробно не изучалось до образования палаты представителей, а на первый взгляд задача распределения не выглядела такой уж сложной. Но что откроется, если рассмотреть ее поближе?

Начнем с самой первой проблемы распределения, с которой столкнулся конгресс. Это произошло в 1794 г.; данные о численности населения были взяты из результатов первой общенациональной переписи 1790 г. К тому времени существовало 15 штатов, данные об их численности представлены в табл. 10.1[1].

Конгресс должен быть распределить ровно 105 мест в палате представителей между пятнадцатью штатами. После дебатов билль о распределении, одобренный Александром Гамильтоном, прошел через конгресс и был передан президенту Вашингтону.

Метод распределения Гамильтона

В основании метода Гамильтона (и на самом деле, любого другого метода распределения) лежит понятие стандартной квоты. При распределении *стандартная квота* штата в точности равна числу мест, которые приходятся на штат согласно численности его населения. Например, в 1970 г. население Делавэра составляло

$$\frac{59\,096}{3\,893\,874} = 1{,}518\,\%$$

от общего населения США. Поэтому Делавэру выделяется ровно $0{,}01518 \times 105 = 1{,}594$ мест при первом распределении в палате. Мы назовем число 1,594 *стандартной квотой* для Делавэра, поскольку это точное число мест, которые были бы выделены Делавэру, если бы допускалось нецелое число мест.

Но здесь и кроется суть проблемы распределения: нецелое число мест невозможно! Итак, стандартная квота для Делавэра равна в точности 1,594, но ему должно быть выделено целое число мест — либо 1, либо 2. Какое же число выбрать? Казалось бы, логично ответить 2 — это соответствует обычному правилу округления чисел. Но если ана-

[1] На самом деле цифры, использованные конгрессом для распределения мест в 1794 г., несколько отличались от тех, что приведены в табл. 10.1. Данные не полностью включали число рабов и индейцев, проживавших в США в 1790 г.

логичным образом применять обычное правило округления ко всем стандартным квотам остальных 14 штатов, то в итоге может и не получиться требуемое число мест — 105. Мы столкнулись с похожей ситуацией в вопросе-разминке 10.1, когда обычное правило округления привело к целым числам, сумма которых не была равна 105. Собственно говоря, стандартные квоты для пятнадцати штатов из табл. 10.1 — это и есть 15 чисел вопроса-разминки 10.1. Итак, если бы мы попытались провести распределение мест в палате 1974 г., округляя квоты штатов согласно обычному правилу, то получили бы 106 мест, на одно больше, чем должно быть. Как же следует действовать, чтобы получить 105 мест? Вот что предложил Гамильтон:

Первый шаг Гамильтона. Вычислить стандартную квоту для каждого штата.

Второй шаг Гамильтона. Выделить каждому штату число мест, равное стандартной квоте, округленной до ближайшего меньшего целого числа.

Третий шаг Гамильтона. Подсчитать, сколько еще осталось мест (называемых *избыточными*) и распределить эти места по одному между штатами, дробные части стандартных квот которых наибольшие.

Вопрос 10.3*. Используйте метод Гамильтона, чтобы распределить 105 мест между 15 штатами, численность населения которых приведена в табл. 10.1. Какие штаты побеждают при методе Гамильтона, а какие проигрывают?

Вот здесь в нашем кратком уроке по истории США мы встречаем первый неожиданный поворот. Когда президент Вашингтон получил из конгресса билль, одобряющий метод Гамильтона для распределения мест в палате в 1794 г., он отклонил этот билль и отправил обратно в сенат. На этом билле стояло первое в истории США президентское вето!

Очень многие задавались вопросом, почему Вашингтон наложил на билль вето. Некоторые теоретики тайных заговоров утверждают, что причина этого в том, что его родной штат, Вирджиния, проигрывал при таком методе, получая 20 мест, в то время как стандартная квота была равна 20,158. Другие считают, что Вашингтон сделал это под влиянием Томаса Джефферсона, государственного секретаря и близкого друга президента, тоже жителя Вирджинии. В самом деле, метод распределения, принятый в тот раз, был изобретен самим Джефферсоном; он давал Вирджинии 21 место. Тем не менее, мы придерживаемся той точки зрения, что вето Вашингтона не было обусловлено эгоистическими причинами, поскольку методу Гамильтона были присущи некоторые серьезные проблемы, открывающиеся при ближайшем рассмотрении.

Одна из этих проблем состоит в том, что дробные части стандартных квот не всегда можно сравнить прямо. Например, в вопросе 10.3 согласно методу Гамильтона выделяется одно избыточное место Мэриленду, дробная часть квоты которого равна 0,622, а не Делавэру, дробная часть квоты которого равна 0,594. Но в процентах отношение дробной части к полной стандартной квоте для Делавэра больше, чем для Мэриленда.

Вопрос 10.4*. Вычислите, как в процентах выражается отношение дробной части к полной стандартной квоте для стандартных квот штатов Делавэра и Мэриленда, которые вы нашли в вопросе 10.3.

Вопрос 10.5. (а) У какой из стандартных квот, которые вы вычисляли в вопросе 10.3 для 15 штатов, процентное выражение отношения дробной части к полному значению наибольшее? У какой квоты оно наименьшее?

(б) Как вы думаете, с учетом вашего ответа на пункт (а), какой штат оказался в наилучшем, а какой в наихудшем положении при распределении из вопроса 10.3?

И в вопросе 10.3, и в вопросе 10.5 мы рассматривали дробные части квот, чтобы решить, сколько мест выделяется штатам по методу Гамильтона. Но, как вы догадываетесь, существуют и другие методы. Например, для каждого штата мы можем рассмотреть среднее число граждан, представленных каждым представителем штата.

Вопрос 10.6*. В распределении из вопроса 10.3 найдите среднее число граждан, представленных каждым представителем Делавэра. Затем проделайте те же вычисления для остальных 14 штатов.

Вопрос 10.7. Какой штат, согласно вычислениям вопроса 10.6, оказался в наилучшем положении при распределении из вопроса 10.3? А какой штат оказался в наихудшем положении?

Так что же делать с бедным штатом Делавэр? Ведь это был первый штат. Но тем не менее это действительно сложно — выделить Делавэру два места, а не одно, поскольку...

Вопрос 10.8. Повторите вопрос 10.6, но в этот раз предположите, что у Делавэра два представителя, а не один. Каким теперь оказалось положение Делавэра по сравнению с другими штатами?

А что можно сказать про Род-Айленд? Заслуживает ли он того, чтобы его положение было лучше, чем у других штатов? Давайте посмотрим, что произойдет с результатом вычислений из вопроса 10.6, если мы отнимем у Род-Айленда одно место? Конечно же, чтобы сохранить общее число представителей равным 105, нам придется отдать это лишнее место какому-нибудь другому штату. Поскольку население Вирджинии гораздо больше, чем население всех остальных штатов, результат вычислений вопроса 10.6 для этого штата изменится меньше всего, если мы отдадим лишний голос ему. Так и сделаем и посмотрим, что из этого выйдет.

Вопрос 10.9*. Повторите вопрос 10.6, но теперь предположите, что у Род Айленда только один представитель, а не два, а у Вирджинии 21 представитель вместо 20. (Замечание. Вычисления из вопроса 10.6 изменятся только для штатов Род-Айленд и Вирджиния.) Каким теперь оказывается положение этих штатов по сравнению с другими? Объясните ваш ответ.

Как вы думаете, улучшили ли мы систему, забрав одно место у Род Айленда и отдав его у Вирджинии? Что ж, Джордж Вашингтон и Томас Джефферсон положительно ответили на этот вопрос, и не только потому, что были родом из Вирджинии.

Метод распределения Джефферсона

Когда Вашингтон наложил вето на билль, одобряющий метод Гамильтона для распределения в 1794 г., в конгрессе не набралось достаточного для преодоления вето количества голосов. Поэтому был принят билль, одобряющий метод распределения, предложенный Томасом Джефферсоном.

Метод Джефферсона представляет собой пример *метода делителей*. Чтобы понять, что это значит, рассмотрим еще раз, как мы вычисляли стандартные квоты. Например, если нужно распределить 105 мест, а численность населения выражается числами из табл. 10.1, то для Коннектикута стандартная квота равна

$$\frac{237\,655}{3\,893\,874} \times 105 = 6{,}408,$$

а для Делавэра стандартная квота равна

$$\frac{59\,096}{3\,893\,874} \times 105 = 1{,}594.$$

Заметим, что наборы данных для вычислений этих двух стандартных квот почти одинаковы; отличаются численности населения штатов (числители дробей в левых частях равенств). Собственно говоря, стандартные квоты остальных штатов можно вычислить точно также — разделив численность населения штата на 3 893 874 (общее население страны), а затем умножив результат на 105 (общее число мест). Единственная величина, которая при вычислениях будет меняться от штата к штату — это население. Поэтому для вычисления стандартной квоты используется формула немного другого вида, но математически эквивалентная первой. Например, стандартная квота для Коннектикута вычисляется как

$$\frac{237\,655}{\frac{3\,893\,874}{105}} = 6{,}408,$$

а для Делавэра как

$$\frac{59\,096}{\frac{3\,893\,874}{105}} = 1{,}594.$$

Если записывать вычисления таким образом, разбираться в них становится немного сложнее. Но эта форма записи тоже полезна, поскольку позволяет подчеркнуть роль знаменателя $\frac{3\,893\,874}{105}$ (он равен 37 084,51) при вычислении стандартных квот штатов. Эта величина называется *стандартным делителем* системы, и полностью определяется общей численностью населения в системе и числом распределяемых мест. Заметьте, что величина стандартного делителя зависит не от численности населения любого отдельно взятого штата, а от общей численности населения всех штатов. Более того, как только стандартный делитель системы найден, стандартную квоту каждого штата в системе можно найти, разделив численность населения штата на стандартный делитель.

Вопрос 10.10. Для распределения в вопросе 10.3 найдите остальные стандартные квоты системы, используя стандартный делитель системы.

Метод Джефферсона называется методом делителя, поскольку согласно этому методу стандартный делитель изменяют до тех пор, пока вычисленные стандартные квоты, округляемые по некоторому обычному правилу, не приведут к правильному числу мест. Особенности метода Джефферсона описаны ниже.

Первый шаг Джефферсона. Вычислите стандартную квоту для каждого штата.

Второй шаг Джефферсона. Округлите каждую стандартную квоту до ближайшего меньшего целого числа, и проверьте, равна ли сумма округленных квот числу распределяемых мест. Если да, то процедура завершена, если же нет, то перейдите к третьему шагу.

Третий шаг Джефферсона. Выберите делитель, отличный от первоначально вычисленного стандартного делителя, и используйте этот новый делитель (или *модифицированный* делитель) для вычисления модифицированных стандартных квот всех штатов. (Чтобы сделать это, просто разделите численность населения каждого штата на модифицированный делитель.)

Четвертый шаг Джефферсона. Округлите каждую из модифицированных квот до ближайшего меньшего целого числа и проверьте, равна ли сумма округленных квот числу распределяемых мест. Если да, то процедура завершена. В противном случае повторяйте третий и четвертый шаги (с другими модифицированными делителями), пока процедура не завершится.

Заметьте, что третий и четвертый шаги включают последовательность проб и ошибок. Поэтому может случиться так, что для реализации метода Джефферсона требуется значительно больше времени, чем для метода Гамильтона. Но у метода Джефферсона по крайней мере есть одно явное преимущество — в соответствии с ним все квоты округляются по одному общему правилу. Метод Гамильтона в этом смысле ведет себя по-другому: в некоторых случаях определенная дробная часть может быть округлена с увеличением, а в других случаях та же самая дробная часть может быть округлена с уменьшением. По-видимому, именно постоянство соглашения об округлении, присущее методу Джефферсона, и заставило Вашингтона и Джефферсона считать, что этот метод справедливее, чем метод Гамильтона.

Вопрос 10.11*. (а) Используйте метод Джефферсона для распределения 105 мест между 15 штатами, перечисленными в табл. 10.1. Запишите распределения, к которым приводят все испробованные вами делители, включая те, для которых сумма мест не равна ровно 105.

(б) Какие штаты при распределении из пункта (а) оказываются в лучшем положении? Какие — в худшем?

Несмотря на бесспорный факт, что метод Гамильтона гораздо легче в использовании, чем метод Джефферсона, в 1794 г. при распределении мест в палате был использован именно метод Джефферсона (хотя, как мы уже говорили, данные о численности населения, использованные в 1794 г., несколько отличались от тех, что приведены в табл. 10.1). Если вы справились с вопросом 10.11 без ошибок, то убедились, что распределение, полученное по методу Джефферсона, отличается от распределения по методу Гамильтона (полученного в вопросе 10.3), но только в том, что в соответствии с методом Джефферсона Род-Айленд теряет одно место, которое переходит к Вирджинии. Итак, мы видим, что хотя оба метода могут приводить к одинаковому распределению мест для одной и той же системы, но так бывает не всегда. И действительно, в 1974 г. использовались данные, немного отличающиеся от рассмотренных нами, поэтому на самом деле по методу Гамильтона вторые места были выделены Делавэру и Род-Айленду, а согласно методу Джефферсона в пользу Вирджинии свое место терял Делавэр, а Род Айленд сохранял оба своих места.

Важно заметить, что в обоих случаях — и для распределения из вопроса 10.11, и для того, которое в действительности имело место в 1794 г., если сравнивать с результатом распределения по методу Гамильтона для той же системы, в пользу большого штата терял свое место малый штат. При использовании метода Джефферсона это явление возникает довольно регулярно, и следующие вопросы показывают, почему так происходит.

Вопрос 10.12. Объясните, почему на втором шаге метода Джефферсона всегда назначается слишком мало мест, за исключением практически невозможного случая, когда первоначально вычисленные стандартные квоты системы — целые числа (без дробных частей).

Таким образом, после второго шага метода Джефферсона всегда нужно распределять еще несколько мест. Поэтому, по методу Джефферсона, стандартный делитель всегда нужно уменьшать, поскольку при уменьшении стандартного делителя возрастают стандартные квоты (так как вы делите на меньшее число). Но при уменьшении стандартного делителя бóльшие стандартные квоты растут быстрее, чем меньшие. Например, обратите внимание, насколько выросли стандартные квоты Род Айленда и Вирджинии в вопросе 10.11 по сравнению со своими первоначальными значениями. (Квота Вирджинии должна была увеличиться намного сильнее, чем квота Рода Айленда.)

Поэтому у бóльших стандартных квот больше шансов превысить ближайшее большее целое число, когда стандартный делитель уменьшается. Таким образом, у штатов с бóльшими стандартными квотами (и, следовательно, с бóльшим населением) шансы получить дополнительные места при методе Джефферсона выше. В действительности если у некоторого штата стандартная квота значительно выше, чем квоты остальных штатов, то может случиться так, что эта бо́льшая стандартная квота превысит два ближайших целых числа еще до того, как будут распределены все дополнительные места. Следующий вопрос иллюстрирует такое странное явление.

Вопрос 10.13. Согласно переписи населения в 1820 г. население штата Нью-Йорк составило 1 368 775 человек, а население США в целом — 8 969 878 человек. На основе этих данных в 1822 г. нужно было распределить между штатами 213 мест в палате.

(а) Используя данные переписи 1820 г., вычислите стандартный делитель и стандартную квоту для Нью-Йорка.

(б) При распределении, имевшем место в 1822 г., использовался метод Джефферсона с модифицированным делителем 39 900. Найдите модифицированную стандартную квоту Нью-Йорка при этом модифицированном делителе и определите, сколько мест в итоге получил этот штат. Как вы думаете, справедливо ли было выделить столько мест Нью-Йорку? Почему?

Распределение 1822 г. вскрыло серьезный недостаток метода Джефферсона, однако, к сожалению, ничего не было сделано, чтобы исправить его. Возможно, сочли, что эта проблема возникла случайно, что с таким аномальным поведением встречаться практически не придется, так что не стоит уделять этому внимание. Но в точности то же самое произошло при следующем распределении в 1832 г., когда согласно методу Джефферсона Нью-Йорк получил 40 мест в палате, хотя его стандартная квота была равна всего лишь 38,59.

В то время все-таки пришлось заняться этой проблемой. Многие были возмущены, и среди них — блестящий оратор Даниэль Уэбстер. В одном из своих самых знаменитых выступлений он со страстью убеждал конгресс, что выделение 40 мест Нью-Йорку — факт, не только вызывающий беспокойство, но по существу антиконституционный.

После этого конгрессу были представлены два альтернативных метода. Один из них был предложен Джоном Куинси Адамс и очень напоминал метод Джефферсона. Только в отличие от последнего, на втором и четвертом шагах метода Адамса квоты округлялись до ближайшего большего, а не меньшего целого числа.

Вопрос 10.14*. (а) Используйте метод Адамса, чтобы распределить 105 мест между 15 штатами, перечисленными в табл. 10.1. Запишите распределения, соответствующие всем испробованным вами делителям, включая те, которые не дают требуемых 105 мест.

(б) Какие штаты оказались в наилучшем, а какие в наихудшем положении при распределении, полученном вами в пункте (а)?

Вопрос 10.15. Как следует модифицировать стандартный делитель на третьем шаге метода Адамса — увеличивать или уменьшать? Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ.

Поскольку метод Адамса — лишь зеркальное отражение метода Джефферсона, он, очевидно, ничем не лучше. На самом деле, как метод Джефферсона постоянно и несправедливо действует в пользу бо́льших штатов, так и метод Адамса постоянно и несправедливо действует в пользу меньших штатов. Поэтому метод Адамса никогда не использовался при распределении мест в палате США. Но мы можем предположить, что может быть, г-н Адамс просто в высшей степени поддерживал желание Отцов Основателей обеспечить некоторую защиту малым штатам.

Вторую альтернативу методу Джефферсона предложил конгрессу сам Даниэль Уэбстер. Мы изучим его метод в следующем разделе, но перед этим на некоторое время остановимся, чтобы формализовать некоторые наши наблюдения над действием метода Джефферсона.

Как мы только что отметили, при распределении 1832 г. Нью-Йорку было выделено 40 мест, в то время как стандартная квота для этого штата была равна 38,59. Используя современную терминологию, мы можем сказать, что этот пример иллюстрирует нарушение *правила квоты*. Это правило гласит, что при распределении каждый штат должен получить число мест, равное его квоте, округленной до ближайшего большего либо меньшего целого числа. Если при некотором методе распределения правило квоты выполняется всегда, то говорят, что этот метод *удовлетворяет квоте*. Метод Джефферсона *нарушает квоту*, поскольку может привести к тому, что при распределении правило квоты может нарушаться. (Метод Адамса тоже нарушает квоту, поскольку он является зеркальным отражением метода Джефферсона.) Более того, в действительности нарушать квоту для метода Джефферсона — в порядке вещей. Оказывается, если бы метод Джефферсона продолжали использовать и дальше, то начиная с 1852 г. при распределении мест в палате правило квоты нарушалось бы всегда[1].

Но 1832 г. положил конец использованию метода Джефферсона, и нам придется вернуться к Уэбстеру.

[1] После первого распределения мест в палате в 1794 г. было решено, что впредь места будут перераспределяться каждые 10 лет, когда год оканчивается на 2, и что для этого будут использоваться данные, полученные на два года раньше при переписи населения.

Метод распределения Уэбстера

Как и метод распределения Адамса, метод, предложенный Дэниэлем Уэбстером в 1832 г., использовал делитель, и отличался от метода Джефферсона только правилом округления. Собственно говоря, метод Уэбстера совпадает с методом Джефферсона, за исключением того, что на втором и четвертом шагах используется обыкновенный метод округления (вместо округления до ближайшего меньшего целого числа).

Вопрос 10.16*. (а) Используйте метод Уэбстера, чтобы распределить 105 мест между 15 штатами, перечисленными в табл. 10.1. Запишите распределения, соответствующие всем испробованным вами делителям, включая те, которые не дают требуемых 105 мест.

(б) Какие штаты оказались в наилучшем, а какие в наихудшем положении при распределении, полученном вами в пункте (а)?

Вопрос 10.17. Объясните, почему на третьем шаге метода Уэбстера может потребоваться изменять стандартный делитель и в сторону уменьшения, и в сторону увеличения.

Метод Уэбстера был использован при распределении 1842 г.; многие современные эксперты считают его лучшим методом распределения из когда-либо предложенных. Одна из причин состоит в том, что относительно метода Уэбстера и малые, и крупные штаты оказываются в одинаковом положении. Точнее говоря, метод Уэбстера слегка благоприятствует малым штатам, когда обыкновенное округление первоначально вычисленных стандартных квот дает слишком много мест, и он слегка благоприятствует крупным штатам, когда обыкновенное округление дает слишком мало мест. Но поскольку избыток мест так же вероятен, как и недостаток, этот метод вполне нейтрален.

Было показано, что метод Уэбстера (а в действительности любой метод с делителем) может нарушать правило квоты, но для того, чтобы построить примеры таких нарушений, требуется немалая изобретательность, так что они практически не встречаются в реальных ситуациях. На самом деле, если бы метод Уэбстера использовался при распределении мест в палате с 1794 по 2002 г., он ни разу не привел бы к нарушению правила квоты.

И даже при таких обстоятельствах из-за возможности нарушения правила квоты конгресс с подозрением относился к методу Уэбстера, особенно после фиаско 1832 г. Поэтому в 1850 г. конгрессмен Самуэль Винтон предложил новейший, как ему казалось, метод распределения. По иронии судьбы он совпадал с методом Гамильтона. В оправдание Винтона можно сказать, что к тому времени этот последний метод забыли все. Поэтому конгресс назвал новый метод методом Винтона, и поскольку он никогда не нарушает квоту, принял его с радостью. (Чтобы избежать путаницы, мы будем продолжать называть его методом Гамильтона).

Вопрос 10.18. Четко объясните, почему метод Гамильтона никогда не нарушает квоту.

В 1852 г. конгресс принял закон, одобряющий метод Гамильтона как официальный метод распределения мест в палате. Тем не менее, хотя методы Гамильтона и Уэбстера обычно приводят к одинаковым распределениям, к тому времени был принят неофициальный компромисс. Он состоял в том, что в 1852 г. и позднее конгресс выбирал общее число мест в палате таким образом, чтобы методы Гамильтона и Уэбстера приводили к одинаковым распределениям. А поскольку конгрессмены обычно не принимают законов, оставляющих их без работы, этот компромисс лучше описать так: в 1852 г. и позднее конгресс *увеличивал* общее число мест в палате таким образом, чтобы методы Гамильтона и Уэбстера приводили к одинаковым распределениям.

Это соглашение продержалось только до 1872 г., когда, прямо нарушая конституцию США (в ней сказано, что для распределения мест в палате должен использоваться некоторый предписанный метод) и закон (тот, что был принят в 1852 г. и предписывал метод Гамильтона как официальный), конгресс принял билль о распределении, которое не было основано ни на каком методе вообще. Боги распределения отомстили на президентских выборах в 1876 г., когда Резерфорд Б. Хейес победил Самуэля Тилдена благодаря тому, что численность коллегии выборщиков была основана на неконституционном распределении 1872 г. Если бы при распределении мест в палате в 1872 г. был использован метод Гамильтона или Уэбстера, то Тилден с легкостью победил бы на выборах. В 1882 г. конгресс смиренно вернулся к методу Гамильтона, и именно в этом месте наша история делает еще один неожиданный поворот.

Три парадокса распределения

Для процедуры распределения мест в палате в 1882 г. Бюро переписи США предоставило конгрессу таблицу распределений, к которым приводит метод Гамильтона, для различных количеств мест в палате — от 275 до 350. В этой таблице были приведены по-настоящему странные данные.

*14 лист, Матем. выборов

Если бы в палате было 299 мест, то стандартная квота для Алабамы была бы равна 7,646, для Иллинойса — 18,640, а для Техаса — 9,640. Расположив штаты по порядку, начав со штата с наибольшей дробной частью стандартной квоты, и закончив штатом с наименьшей дробной частью стандартной квоты, мы увидим, что Алабама оказывается 20-й среди 38 штатов. А при 299 местах в палате остается ровно 20 избыточных мест, которые по методу Гамильтона еще нужно распределить.

Но если увеличить число мест в палате до 300, то стандартные квоты, разумеется, несколько возрастут. Стандартная квота для Алабамы станет равной 7,671, для Иллинойса — 18,702, а для Техаса — 9,672. Теперь в списке штатов на 20-м месте окажется Иллинойс, а Техас будет следовать за ним. Кроме того, при 300 местах в палате остается 21 избыточное место, а не 20.

Вопрос 10.19. Согласно данным предыдущих двух абзацев, сколько мест получили бы Алабама, Иллинойс и Техас, если бы всего в 1882 г. в палате было 299 мест? А если бы в палате было 300 мест? Не кажется ли вам что-либо в этих двух возможных распределениях странным или необычным? Объясните свой ответ.

Такое исключительно несправедливое явление, которое мы наблюдали в вопросе 10.19, в действительности может встречаться довольно часто при использовании метода Гамильтона, когда численности населения штатов очень сильно различаются. Как было замечено в 1882 г., этот факт в конечном счете оправдывает вето, наложенное Джорджем Вашингтоном на метод Гамильтона за 88 лет до этого.

Кроме того, такое несправедливое явление предоставляет нам еще один пример парадокса, но уже при совершенно других исходных данных. Он противоречит здравому смыслу в области распределения точно так же, как парадокс Кондорсе на выборах из гл. 3, казалось бы, отрицает логику в области голосования. Действительно, увеличение числа мест в палате с 299 до 300 приводит к тому, что Алабама *теряет* одно место. Этот парадокс распределения (когда увеличение числа мест в системе распределения приводит к тому, что некоторый штат теряет место) обычно называют *парадоксом Алабамы*.

Так как же члены конгресса справились с этим парадоксом в 1882 г.? Они решили, что в палате теперь будет 325 мест, а при этом значении парадокс не проявляется. Потом они поплевали через левое плечо и стали уповать на то, что он не проявится и впредь. А затем наступил 1902 г.

Вопрос 10.20. Для процедуры распределения мест в палате в 1902 г. Бюро переписи США предоставило конгрессу таблицу распределений, к которым приводит метод Гамильтона, для различных количеств мест в палате — от 350 до 400. Если бы число мест в палате было равно 357, 382, 386, 389 или 390, то штат Мэн получил бы три места, а во всех остальных случаях — четыре. Аналогично, если бы в палате было 357 мест, то штат Колорадо получил бы два из них, а во всех остальных случаях — три. Можете ли вы на основании этих данных сделать вывод, что в 1902 парадокс Алабамы имел место хотя бы при одном возможном числе мест в палате между 350 и 400? Если да, то для какого числа мест в палате и для каких штатов?

И конечно же, в 1902 г. в конгресс был представлен билль о распределении мест в палате, в котором общее число мест было выбрано равным 357. (*...надо сделать паузу, чтобы осмыслить это утверждение...*) Как вы можете ожидать, дебаты по этому поводу были несколько оживленными. В конце концов в 1902 г. распределение прошло по методу Уэбстера, а общее число мест в палате было выбрано равным 386. Возникновение парадокса Алабамы в 1902 г. было последним и смертельным ударом по методу Гамильтона, и больше он никогда не использовался при распределении мест в палате. Тем не менее, ученые продолжали изучать метод Гамильтона и открыли еще два парадокса, присущие этому методу.

Первый из них, названный *парадоксом населения*, обнаружился вскоре после распределения 1902 г. Оказывается, метод Гамильтона приводит к тому, что Вирджиния уступает одно место Мэну, несмотря на то, что за предшествующие 10 лет в процентном отношении население Вирджинии выросло больше, чем население Мэна.

Вопрос 10.21*. По данным Бюро переписи США, в период с 1990 по 2000 г. население Северной Каролины выросло с 6 630 406 до 8 049 313 человек, а население Мичигана — с 9 296 954 до 9 938 444 человек. При распределении 2002 г., основанном на этих данных 2000 г., Северная Каролина получила дополнительное место в палате, а Мичиган потерял одно место. Основываясь только на этих данных, можете ли вы сделать вывод, что в 2002 г. имел место парадокс населения? Почему?

Вопрос 10.22. По данным Бюро переписи США, в период с 1990 по 2000 г. население Невады выросло с 1 201 598 до 1 998 257 человек, а население Иллинойса — с 11 435 813 до 12 419 293 человек. При распределении 2002 г., основанном на этих данных 2000 г., Невада получила дополнительное место в палате, а Иллинойс потерял одно место. Основываясь только на этих данных, можете ли вы сделать вывод, что в 2002 г. имел место парадокс населения? Почему?

Третий и последний парадокс распределения был открыт в 1907 г., когда к США присоединился новый, 46 штат Оклахома. Поскольку время нового распределения еще не пришло, конгресс попросту решил увеличить число мест в палате, чтобы предоставить Оклахоме число мест, пропорциональное ее населению. В результате число мест в палате выросло на 5, с 386 до 391. Но впоследствии обнаружилось, что если бы метод Гамильтона использовался бы в 1902 г. для распределения 386 мест между 45 штатами, а затем в 1907 г. для распределения 391 места между 46 штатами, то Нью-Йорк уступил бы одно место Мэну! Другими словами, добавление одного штата и причитающихся ему мест в палате изменило число мест, выделенных другим штатам (и в сторону увеличения, и в сторону уменьшения). Неудивительно, что случаи вроде этого служат примерами парадокса, который в наши дни называют *парадоксом нового штата*. Открытие парадокса населения и парадокса нового штата в начале XX века подтвердило правильность принятого конгрессом в 1902 г. решения прекратить использование метода Гамильтона. Эти парадоксы, как и парадокс Алабамы, перестали доставлять конгрессу беспокойство. Кроме того, оказалось, что они невозможны при методах делителя, таких, как методы Джефферсона, Адамса и Уэбстера. (См. вопрос 10.32.)

Метод распределения Хилла

Хотя мы довели наш урок истории только до 1907 г., мы уже приближаемся к концу рассказа о распределении. Собственно говоря, нам осталось обсудить только один метод — тот, который используется для распределения мест в палате представителей США в настоящее время.

Как мы сказали в предыдущем разделе, для распределения мест в палате в 1902 г. был использован метод Уэбстера. А для распределения в 1912 г. Уолтер Уиллкокс, первый американец, изучавший распределение с теоретической точки зрения, успешно убедил конгресс, что нужно продолжать использовать метод Уэбстера. Приблизительно в это же время Джозеф Хилл, ведущий статистик Бюро переписи США, при полном одобрении известного математика Эдварда Хантингтона предложил новый метод.

Метод Хилла представляет собой очередной метод делителя, и почти полностью совпадает с методом Уэбстера. Единственное отличие между этими двумя методами состоит в определении критическо-

го значения для округления квот. Согласно методу Уэбстера, мы округляем квоту до ближайшего большего целого числа, если ее дробная часть больше или равна 0,50, и до ближайшего меньшего целого числа в противном случае. Критическое значение 0,50 мы можем рассматривать как дробную часть *среднего арифметического* двух ближайших к квоте целых чисел. Например, согласно методу Уэбстера, мы округляем квоту 5,482 до ближайшего меньшего целого числа, поскольку ее дробная часть меньше, чем дробная часть 5,50 — среднего арифметического чисел 5 и 6.

Согласно же методу Хилла, чтобы определить критическое значение для округления квоты, мы используем *среднее геометрическое* двух ближайших к квоте целых чисел. Среднее геометрическое любых двух целых чисел x и y равно в точности $\sqrt{x \cdot y}$. Таким образом, если принят метод Хилла, то мы округляем квоту до ближайшего большего целого числа, если ее дробная часть больше или равна дробной части среднего геометрического двух ближайших к квоте целых чисел, и до ближайшего меньшего целого числа в противном случае. Это гораздо проще сделать, чем сказать! Например, для квоты 5,482 среднее геометрическое двух ближайших целых чисел равно $\sqrt{5 \cdot 6} = 5{,}477$ (с точностью до трех знаков после запятой). А поскольку дробная часть числа 5,482 больше, чем десятичная часть числа 5,477, то по методу Хилла мы должны округлить квоту 5,482 до 6. Но поскольку $\sqrt{15 \cdot 16} = 15{,}492$, по методу Хилла мы должны округлять квоту 15,482 до 15.

Вопрос 10.23*. (а) Используйте метод Хилла, чтобы распределить 105 мест между 15 штатами, перечисленными в табл. 10.1. Запишите распределения, соответствующие всем испробованным вами делителям, включая те, которые не дают требуемых 105 мест.

(б) Какие штаты оказались в наилучшем, а какие в наихудшем положении при распределении, полученном вами в пункте (а)?

(в) Сравните распределение, найденное вами по методу Хилла с распределениями, которые вы нашли в предыдущих вопросах по методам Гамильтона, Джефферсона, Адамса и Уэбстера.

Вопрос 10.24. Дает ли метод Хилла какие-либо преимущества малым или крупным штатам, или он в этом смысле нейтрален? (*Подсказка.* Обратите внимание на два предложения непосредственно перед вопросом 10.23).

В 1922 г. для распределения рассматривались оба метода — и Уэбстера, и Хилла, — и они приводили к значительно отличающимся результатам. К тому времени число мест в палате было зафиксировано законом, и в результате несоответствия между методами Уэбстера и Хилла билль о распределении не прошел вообще. Поэтому за штатами сохранились те места, которые были выделены в 1912 г., а никакого перераспределения не проводилось. (Что, кстати, было прямым нарушением конституции).

В 1932 г., когда проходила подготовка к распределению, для изучения методов Уэбстера и Хилла был образован комитет из членов национальной академии наук. Комитет поддержал метод Хилла. Это была бесспорная победа в борьбе между двумя методами. Тогда по причудливой прихоти судьбы оба метода — и Уэбстера, и Хилла — привели к одинаковым распределениям, основанным на данных переписи 1930 г. Так что сторонники обоих методов могли утверждать, что в 1932 г. был использован именно их метод.

При распределении в 1942 г. методы Уэбстера и Хилла вновь очень близко подошли к тому, чтобы привести к одинаковым результатам. Единственная разница между ними состояла в том, что по методу Хилла одно добавочное место получал Арканзас за счет Мичигана. В то время Мичиган был по преимуществу республиканским штатом, а в Арканзасе имелась тенденция голосовать в поддержку демократов и их предложений. Так что голосование по итоговому распределению проходило в соответствии с партийными линиями — демократы поддерживали метод Хилла, а республиканцы — метод Уэбстера. Поскольку большинство было у демократов, конгресс одобрил метод Хилла. Затем президент Франклин Д. Рузвельт, тоже демократ, придал этому методу силу «постоянного закона», и с тех пор он используется при всех перераспределениях.

Другие теоремы невозможности

Как мы видели, в наши дни ученые, работающие в области распределения, высоко ценят и метод Уэбстера, и метод Хилла. На самом деле большинство современных специалистов являются сторонниками одного их этих двух методов, и тому есть важная причина — оба они относительно нейтральны в распределении влияния между крупными и малыми штатами, и оба не приводят к трем парадоксам распределения, изученным два раздела назад.

Но при этом оба метода — и Уэбстера, и Хилла — могут нарушать квоту, что наводит на мысль: «Хорошо бы найти такой метод распределения, который не приводил бы к парадоксам *и* никогда не нарушал бы квоту». И в 1970-х гг. два математика, Мишель Балинский и Пейтон Янг решили отыскать такую систему. Результат их поисков мог бы удивить нас в то время, когда мы читали гл. 1, но не теперь.

Теорема Балинского—Янга. *Метод распределения не может всегда удовлетворять квоте и при этом никогда не приводить к парадоксам.*

Идея, лежащая в основе доказательства теоремы Балинского—Янга, на самом деле очень проста. Вначале они показали, что единственные методы, свободные от парадокса населения, — это методы делителя. А еще до Балинского и Янга было известно, что любой метод делителя может нарушать квоту. Итак, для того, чтобы избежать парадокса населения, вы должны пользоваться методом делителя. А как только вы избираете какой-нибудь метод делителя, вы подвергаетесь риску нарушить квоту. Из этих двух фактов легко следует теорема Балинского—Янга.

Вопрос 10.25. Теперь, когда вы знакомы с теоремой Балинского—Янга, как вы думаете, что важнее для метода распределения — чтобы он никогда не нарушал квоту, или чтобы не приводил к парадоксу населения? (Помните, что вы никогда не добьетесь одновременного выполнения этих свойств!) Приведите убедительные доводы, подтверждающие ваш ответ.

Как и теорема Эрроу в области избирательных систем, теорема Балинского—Янга в области пропорционального представительства возвращает нас туда, откуда мы начали. Она показывает, что, как и в случае выборов, пропорциональное представительство не может быть свободным от противоречий.

И даже с учетом сказанного, некоторые методы распределения явно лучше других. Например, метод Гамильтона, очевидно, проще всех в применении. Поэтому, несмотря на все его недостатки, он все еще используется во многих странах. Метод Уэбстера с математической точки зрения на первый взгляд кажется самым справедливым. Но Национальная академия наук США одобрила именно метод Хилла, в конце 1920 гг. тщательно сравнив его с методом Уэбстера. Следует заметить еще, что когда в 1980 г. Балинский и Янг впервые представили доказательство своей знаменитой теоремы невозможности, они продолжали убежденно доказывать, что наилучший метод — это метод Уэбстера.

Как и в случае с выборами, мы можем никогда не придти к определенному решению проблемы распределения. Тем не менее, изучив эту главу, мы познакомились со средствами, позволяющими анализировать различные методы распределения и подойти к задаче пропорционального представительства с разумной и логичной точки зрения.

Заключительные замечания

В этой главе мы рассмотрели пять различных методов распределения мест в законодательном органе, которые основываются на численности населения в представляемых штатах и округах. В каждом случае для экономии места мы рассматривали только один пример — первоначальное распределение мест в палате представителей США. Исследованные нами методы, очевидно, могут быть использованы в огромном числе ситуаций. Например, при распределении фиксированного числа мест между округами штатов, или мест в наблюдательном совете города между районами, или при распределении сластей среди детей одной семьи.

Для того, чтобы исследовать проблему распределения подробнее, вам может потребоваться изучить больше примеров распределения в других книгах или в Интернете. В этих и других источниках вы можете обнаружить, что у обсуждавшихся нами методов распределения есть другие названия. Например, метод Гамильтона иногда называют методом наибольших делителей или методом д'Ондта (так принято в Европе). Метод Адамса иногда называют методом наименьших дробей, метод Уэбстера — методом главных дробей или методом Уэбстера—Уиллкокса, а метод Хилла — методом равных пропорций или методом Хилла—Хантингтона.

Вопросы для дальнейшей работы

Вопрос 10.26. Когда в 1790 г. проводилась первая национальная перепись США, Мэн все еще считался частью Массачусетса. Если бы тогда Мэн считался отдельным штатом, то в 1794 места в палате должны были распределяться между 16, а не между 15 штатами. В предположении, что население Мэна в 1790 г. составляло 96 643 человека, пересчитайте распределение в 1794 г., считая Мэн отдельным штатом и пользуясь табл. 10.1. Примените по крайней мере два различных метода распределения, изученных в этой главе и запишите сравнительный анализ результатов этих двух методов и распределения, которое вы вычислили для 15 штатов. (*Замечание.* Когда вы будете вычислять новое распределение, не забудьте скорректировать численность населения Массачусетса, вычтя из нее численность населения Мэна.)

Вопрос 10.27. Вы помните о маркизе де Кондорсе? Оказывается, и он предлагал свой метод распределения. Его метод был одним из методов делителя, но маркиз ввел другое соглашение об округлении.

Согласно его методу, квоту следовало округлять до ближайшего большего целого числа, если ее дробная часть была больше или равна 0,40, и до ближайшего меньшего в противном случае. Каким штатам благоприятствует метод Кондорсе — крупным или малым, или он нейтрален в этом отношении? Или данной информации недостаточно, чтобы ответить на этот вопрос? Объясните свой ответ.

Вопрос 10.28. Изучите метод распределения Лаундса и запишите полный отчет о ваших изысканиях. Включите в него описание того, как метод работает, по крайней мере два небольших числовых примера, которые иллюстрируют понятие «относительных дробных частей», кто первый предложил этот метод и когда это произошло, как этот метод соотносится с другими обсужденными нами методами распределения. Если вы можете выяснить это, то запишите, может ли этот метод нарушать квоту и не приводит ли к какому-нибудь из описанных нами трех парадоксов распределения.

Вопрос 10.29. Изучите метод распределения Дина (известный также как метод среднего гармонического) и запишите полный отчет о ваших изысканиях. Включите в него описание того, как метод работает, по крайней мере два небольших числовых примера, которые иллюстрируют понятие *среднего гармонического* двух чисел, кто первый предложил этот метод и когда это произошло, как этот метод соотносится с другими обсужденными нами методами распределениями. Если вы можете выяснить это, то запишите, может ли этот метод нарушать квоту и не приводит ли к какому-нибудь из описанных нами трех парадоксов распределения.

Вопрос 10.30. Выясните, в каких странах мира в настоящее время используется метод Гамильтона для распределения мест в правительственных законодательных органах. Затем выясните, в каких странах в настоящее время используют метод Джефферсона.

Вопрос 10.31. Как вы думаете, какой из обсужденных нами в этой главе методов распределения (включая методы из вопросов 10.27, 10.28 и 10.29, если вы работали над этими вопросами) самый лучший и почему? Приведите убедительные аргументы, подтверждающие ваш ответ.

Вопрос 10.32. Почему методы делителя не могут приводить ни к одному из изученных нами в этой главе трех парадоксов распределения? Найдите свое объяснение, или найдите информацию в какихлибо источниках и запишите резюме ваших изысканий.

Вопрос 10.33. Напишите краткую биографию Уолтера Уиллкокса, включите в нее его самые важные достижения в области распределения и вне ее.

Вопрос 10.34. Напишите краткую биографию Эдварда Хантингтона, включите в нее его самые важные достижения и в области распределения, и вне ее.

Вопрос 10.35. Напишите краткие биографии Мишеля Балинского и Пейтона Янга, включите в них самые важные достижения этих ученых и в области распределения, и вне ее.

Вопрос 10.36. Найдите экземпляр статьи 1 раздела 2 конституции США, и запишите резюме того, что в ней говорится о распределении. Затем проведите критический анализ этого раздела конституции, указав недостатки в описании того, как должны распределяться между штатами места в палате представителей США.

Вопрос 10.37. Найдите экземпляр текста вето, которое Джордж Вашингтон наложил на метод распределения Гамильтона, и запишите резюме этого текста. Затем проведите его критический анализ. Как вы думаете, действовал ли Вашингтон в личных целях или он действительно видел некоторые недостатки в методе Гамильтона?

Вопрос 10.38. Найдите экземпляр речи Дэниэля Уэбстера, с которой он обратился к конгрессу и в которой утверждал, что было антиконституционно выделить 40 мест Нью-Йорку в 1832 г. Напишите резюме и проведите анализ речи Уэбстера, оценивая его аргументы с учетом того, что вы узнали в этой главе. Как вы думаете, удалось ли Уэбстеру представить ситуацию наилучшим образом, или его аргументация могла бы быть сильнее?

Вопрос 10.39. Напишите полный отчет о том, как проходило распределение мест в палате представителей США в 1872 г.

Вопрос 10.40. Изучите результаты двух самых последних распределений в палате представителей США, в 1992 и 2002 гг., сравните их и запишите резюме сравнительного анализа. Какие штаты получили места, а какие потеряли в период с 1992 по 2002 г.? Как вы думаете, было ли справедливым распределение 2002 г. по отношению к вашему штату? Что можно сказать о вашем штате, основываясь на данных о численности его населения: он представлен в палате с избытком, с недостатком или совершенно правильно?

Вопрос 10.41. В 1991 г. в федеральном окружном суде США прошел судебный процесс *Монтана* против *Министерства Торговли*

США. Разыщите подробности этого судебного процесса и последовавшее решение Верховного Суда. Напишите отчет о ваших изысканиях, включите в него результат первого судебного процесса и решение Верховного Суда, а также ваши собственные соображения о том, каким результатом должен был кончиться судебный процесс.

Вопрос 10.42. Найдите в СМИ статью, в которой положительно оценивается метод, используемый в настоящее время для распределения мест в палате представителей США (метод Хилла). Запишите резюме статьи и проведите ее критический анализ, основываясь на том, что вы узнали в этой главе.

Вопрос 10.43. Найдите в СМИ статью, в которой метод, используемый в настоящее время для распределения мест в палате представителей США (метод Хилла), оценивается отрицательно или в которой ставится под сомнение его конституционность. Запишите резюме статьи и проведите ее критический анализ, основываясь на том, что вы узнали в этой главе.

Вопрос 10.44. Если бы в 1992 г. для распределения в палате был использован метод Гамильтона, то повлияло ли бы это на результат выборов президента США в 2000 г.? Если да, то как? (*Замечание*. этот вопрос нельзя назвать тривиальным, но все же он гораздо проще, чем кажется на первый взгляд.)

Вопрос 10.45. Если бы в 1992 г. для распределения в палате был использован метод Джефферсона, то повлияло ли бы это на результат выборов президента США в 2000 г.? Если да, то как?

Вопрос 10.46. Создайте таблицу (используя Microsoft Excel или похожую программу), позволяющую проводить вычисления для одного или нескольких изученных нами в этой главе методов распределения. (Среди специальных функций Excel вам могут понадобиться только ROUNDDOWN для методов Гамильтона и Джефферсона, ROUNDUP для метода Адамса, ROUND для метода Уэбстера и SQRT для метода Хилла.) Затем используйте эту таблицу для вычисления распределения в палате в каком-нибудь году, который мы не рассматривали.

Вопрос 10.47. После того, как члены палаты представителей распределены, каждый штат должен быть разбит на предписанное число избирательных округов для выборов в конгресс. Этот процесс иногда называют *gerrymandering*[1]. Выясните, как появилось на свет

[1] *Gerrymandering* означает подтасовывание результатов выборов, предвыборные махинации. — *Прим. перев.*

это слово. Запишите резюме ваших изысканий, включите в него данные о том, когда впервые было использовано слово "*gerrymandering*", откуда произошли обе его части ("*gerry*" и "*mandering*") и в честь кого оно создано.

Ответы на вопросы

10.3. Должно оказаться девять избыточных мест. При окончательном распределении Коннектикуту следует выделить 6 мест, Делавэру — 1 место, Мэрилэнду — 9 мест, и Вирджинии — 20 мест.

10.4. По поводу этих процентов см. первый абзац после вопроса-разминки 10.1.

10.6. У Делавэра один представитель при населении 59 096 человек. Поэтому каждый из представителей Делавэра представляет в среднем

$$\frac{59\,096}{1} = 59\,096 \text{ граждан.}$$

Вычисления для остальных штатов аналогичны (но, возможно, более интересны).

10.9. Если упорядочить штаты по тому, насколько распределение им благоприятствует, то согласно пересмотренным данным, Вирджиния окажется на четвертом месте, а Род-Айленд — на последнем (ниже, чем Делавэр!).

10.11. Если в качестве модифицированного делителя взять 35 000, то распределение будет корректным, хотя вполне возможно, что вы нашли другой делитель, который тоже работает. (Вообще говоря, существует более одного модифицированного делителя среди тех, которые приводят к совершенно корректному числу мест.) Окончательное распределение будет совпадать с распределением из вопроса 10.3, за исключением того, что Род-Айленд уступит одно место Вирджинии.

10.14. Если в качестве модифицированного делителя взять 39 600, то распределение будет корректным. Если сравнить это распределение с тем, которое было получено в вопросе 10.3, то четыре штата получат по дополнительному месту, а четыре — потеряют по одному месту.

10.16. Если в качестве модифицированного делителя взять 37 616, то распределение будет корректным. Конечное распределение в этом случае будет совпадать с тем, которое было получено в вопросе 10.3, за исключением того, что Мэрилэнд уступит одно место Делавэру.

10.21. В период с 1990 по 2000 г. население Северной Каролины выросло на

$$\frac{8\,049\,313 - 6\,630\,406}{6\,630\,406} = 21{,}4\,\%,$$

а население Мичигана за то же время — на

$$\frac{9\,938\,444 - 9\,296\,954}{9\,296\,954} = 6{,}9\,\%.$$

Так что нельзя считать, что имеет место парадокс населения.

10.23. Если в качестве модифицированного делителя взять 37 670, то распределение будет корректным. Конечное распределение в этом случае будет совпадать с тем, которое было получено в вопросе 10.3, за исключением того, что Северная Каролина уступит одно место Делавэру.

Список литературы

[1] *Angel A., Porter S.* A Survey of Mathematics with Applications. 6th edition. Boston: Addison Wesley, 2001.

[2] *Arrow K. J.* Social Choice and Individual Values. N. Y.: John Wiley and Sons, 1951. Рус. пер.: *Эрроу К. Дж.* Коллективный выбор и индивидуальные ценности. М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004.

[3] *Arrow K. J.* Social Choice and Individual Values. 2nd edition. N. Y.: John Wiley and Sons, 1963.

[4] *Aufman R., Lockwood J., Nation R., Clegg D.* Mathematical Excursions. Boston: Houghton Mifflin, 2004.

[5] *Balinski M., Young H. P.* Fair Representation. New Haven: Yale University Press, 1982.

[6] *Banzhaf J.* Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis // Rutgers Law Review. 1965. V. 13. P. 317—343.

[7] *Bennett J., Briggs W.* Using and Understanding Mathematics: A Quantitative Reasoning Approach. 2nd edition, Boston: Addison Wesley, 2002.

[8] *Blitzer R.* Thinking Mathematically. 3rd edition. NJ: Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005.

[9] *Bradley J., Kilgour D. M.* Can sequential elections solve the non-separability problem? Preprint, 1997.

[10] *Brams S. J., Kilgour D. M., Zwicker W. S.* Voting on referenda: The separability problem and possible solutions. Electoral Studies. 1997. V. 16(3). P. 359—377.

[11] *Brams S. J., Kilgour D. M., Zwicker W. S.* The paradox of multiple elections. Social Choice and Welfare. 1998. V. 15. P. 211–236.

[12] *Brams S. J., Taylor A. D.* Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[13] *Buchanan M.* How strategists design the perfect candidate // Science. 2004. V. 306. P. 799–800.

[14] *Carroll M. T., Rykken E. K., Sorenson J. M.* The Canadians should have won!? // Math Horizons. 2003, February. P. 5–9.

[15] The Center for Voting and Democracy. `http://www.fairvote.org/`

[16] Certified List of Candidates: October 7, 2003 Statewide Special Election. `http://www.ss.ca.gov/elections/2003\cert\list.pdf`

[17] *Deegan J., Packel E.* A new index for simple n-person games // International Journal of Game Theory. 1978. V. 7. P. 113–123.

[18] *Elenow J. M., Hinich M. J.* The Spatial Theory of Voting. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

[19] *Elgot C. C.* Truth functions realizable by single threshold organs // AIEE Conference Paper. 1960. P. 60–1311.

[20] COMAP (Consortium for Mathematics and its Applications). For All Practical Purposes. 6th edition. N. Y.: Freeman, 2003.

[21] *Geanakoplos J.* Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem. `http://cowles.econ.yale.edu/P/cd/d11a/d1123-r.pdf`

[22] *Gorman W. M.* The structure of utility functions // Review of Economic Studies. 1968. V. 35. P. 367–390.

[23] *Hallett G. H.* Proportional Representation — The Key to Democracy. N. Y.: National Municipal League, 1940.

[24] The Heisman Trophy. `http://www.heisman.com/`

[25] *Hinich M. J., Munger M. C.* Analytical Politics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[26] *Hodge J. K.* Separable Preference Orders. Ph.D. thesis, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, August 2002.

[27] *Johnston R. J.* On the measurement of power: Some reactions to Laver // Environment and Planning. 1978. V. 10A. P. 907–914.

[28] *Kilgour D. M.* A formal analysis of the amending formula of Canada's Constitution Act. // Canadian Journal of Political Science. 1983. V. 16. P. 771–777.

[29] *Lacy D., Niou E. M.S.* A problem with referendums // Journal of Theoretical Politics. 2000. V. 12(1). P. 5–31.

[30] Dave Leip's Atlas of U. S. Presidential Elections. `http://www.uselectionatlas.org/`

[31] *May K.* A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions // Econometrica. 1952. V. 20. P. 680–684.

[32] *Mill J. S.* Considerations on Representative Government / Edited with an introduction by Currin V. Shields. Indianapolis: Bobbs-Merrill, 1958.

[33] Minnesota State General Election: Official Results. `http://www.sos.state.mn.us/election/genstate.pdf`

[34] *Parker J.* R.L. Moore: Mathematician and Teacher. Spectrum Series. Washington: Mathematical Association of America, 2005.

[35] *Saari D. G.* Basic Geometry of Voting. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[36] *Saari D. G.* Chaotic Elections: A Mathematician Looks at Voting. Providence, RI: AMS, 2001.

[37] *Saari D. G.* Decisions and Elections: Explaining the Unexpected. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[38] *Shapley L., Shubik M.* A method for evaluating the distribution of power in a committee system // American Political Science Review. 1954. V. 48. P. 787–792.

[39] *Shepsle K. A., Bonchek M. S.* Analyzing Politics: Rationality, Behaviors, and Institutions. N. Y.: W. W. Norton and Company, 1997.

[40] *Smith K.* The Nature of Problem Solving in Algebra. Belmont, CA: Brooks Cole, 2004.

[41] *Staszkow R., Bradshaw R.* The Mathematical Palette. 3rd edition. Pacific Grove, CA: Brooks Cole, 2004.

[42] Statement of Vote: 2003 Statewide Special Election. `http://www.ss.ca.gov/elections/sov/2003\special/contents.htm`

[43] Statistics in Sports. `http://www.amstat.org/sections/sis/`

[44] *Straffin Ph.D.* Game Theory and Strategy // New Mathematical Library. Washington: Mathematical Association of America, 2001.

[45] *Tannenbaum P.* Excursions in Modern Mathematics. 5th edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003.

[46] *Tannenbaum P. Arnold R.* Excursions in Modern Mathematics. 4th edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

[47] *Taylor A. D.* Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof. N. Y.: Springer-Verlag, 1995.

[48] Two Cousins College Football Emporium. `http://www.2cuz.com/`

[49] U. S. Census Bureau. `http://www.census.gov/`

[50] U. S. Federal Election Commission. `http://www.fec.gov/`