

ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ.
MÉMOIRES
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.
VIII SÉRIE.

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

Томъ III. № 5.

Volume III. № 5.

НОВЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ
НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЕЙ.

А. Марковъ.



(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 30 августа 1895).

— 88 —

С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1896. ST.-PÉTERSBOURG.

Продается у комиссіонеровъ Императорской
Академіи Наукъ:

Н. Н. Глазунова, М. Эггерса и Комп. и К. Л. Риккера
въ С.-Петербургѣ,
Н. П. Карбасникова въ С.-Петербургѣ, Москвѣ и Варшавѣ,
М. В. Ключкина въ Москвѣ,
Н. Киммеля въ Ригѣ,
Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ,
Фоссъ (Г. Гэссель) въ Лейпцигѣ.

Commissionaires de l'Académie IMPÉRIALE des
Sciences:

J. Glasounof, M. Eggers & Cie, et C. Ricker à St.-Péters-
bourg,
N. Karbasnikof à St.-Pétersbourg, Moscou et Varsovie,
M. Klukine à Moscou,
N. Kymmel à Riga,
N. Oglobline à St.-Pétersburg et Kief,
Voss' Sortiment (G. Haessel) à Leipzig.

Цена: 80 к. — Prix: 2 Mrk.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

С.-Петербургъ, Январь 1896 г.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *Н. Дубровинъ*.

Типографія Императорской Академіи Наукъ. (Вас. Остр., 9 лин., № 12).

Въ разсужденіи «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей» мы показали, какимъ образомъ по даннымъ величинамъ интеграловъ

$$\int_0^1 f(y) dy, \int_0^1 y f(y) dy, \int_0^1 y^2 f(y) dy, \dots, \int_0^1 y^{i-1} f(y) dy$$

находятся предѣльныя величины нѣкоторыхъ другихъ интеграловъ, если функція $f(y)$ ограничена однимъ неравенствомъ

$$f(y) > 0.$$

Напомнимъ, что вопросы объ этихъ предѣльныхъ величинахъ подняты Чебышевымъ въ мемуарѣ *) «Sur les valeurs limites des intégrales» и рѣшеніе ихъ основано на доказанныхъ и обобщенныхъ нами неравенствахъ Чебышева.

Въ настоящей статьѣ мы покажемъ, какъ рѣшаются подобныя задачи, если функція $f(y)$ ограничена двумя неравенствами

$$L > f(y) > 0.$$

§ 1. Начнемъ съ такой задачи:

Даны

$$\int_0^1 f(y) dy = \alpha_0, \int_0^1 y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \int_0^1 y^{i-1} f(y) dy = \alpha_{i-1} \quad (1);$$

требуется найти наибольшее и наименьшее значенія интеграла

$$\int_0^1 y^i f(y) dy,$$

при условіи

$$L > f(y) > 0 \quad (2).$$

*) Journal de Liouville; 1874.

Приступая къ рѣшенію нашей задачи, положимъ, что мы остановились на какой нибудь определенной функціи $f(y)$, которая удовлетворяетъ условіямъ (1) и (2).

Возьмемъ между 0 и l какія нибудь $i+1$ чиселъ

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \xi_{i+1}$$

и около нихъ бесконечно малые элементы одной и той же длины σ .

Затѣмъ на этихъ элементахъ σ попробуемъ дать функціи $f(y)$ такія, положительныя или отрицательныя, постоянныя приращенія

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \delta_{i+1},$$

которые не нарушали бы ни одного изъ условій (1) и (2).

Предполагая элементы σ бесконечно малыми, мы вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ предполагать, что на каждомъ изъ нихъ, въ отдѣльности, $f(y)$ можетъ достигать только одного изъ своихъ крайнихъ значеній L и 0 , а не обоихъ.

Если на какомъ нибудь элементѣ σ функція $f(y)$ не имѣетъ ни одного изъ своихъ крайнихъ значеній L и 0 , то соответствующее приращеніе δ должно быть только численно достаточно малымъ, знакъ же его можетъ быть произвольнымъ.

Это приращеніе δ должно быть отрицательнымъ, если на элементѣ σ функція $f(y)$ имѣетъ крайнее значеніе L ; напротивъ δ должно быть положительнымъ, если на элементѣ σ функція $f(y)$ имѣетъ значеніе 0 .

Такъ ограничены δ условіемъ

$$L > f(y) > 0.$$

Что же касается требованія неизмѣнности величинъ

$$\int_0^l f(y) dy, \int_0^l y f(y) dy, \dots, \int_0^l y^{i-1} f(y) dy,$$

то въ виду бесконечной малости элементовъ σ оно выражается системой уравненій

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_i + \delta_{i+1} = 0,$$

$$\delta_1 \xi_1 + \delta_2 \xi_2 + \dots + \delta_i \xi_i + \delta_{i+1} \xi_{i+1} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\delta_1 \xi_1^{i-1} + \delta_2 \xi_2^{i-1} + \dots + \delta_i \xi_i^{i-1} + \delta_{i+1} \xi_{i+1}^{i-1} = 0.$$

Отсюда находимъ

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_1)}, \delta_2 = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_2)}, \dots, \delta_i = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_i)}, \delta_{i+1} = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_{i+1})},$$

полагая

$$O(y) = (y - \xi_1)(y - \xi_2) \dots (y - \xi_i)(y - \xi_{i+1}),$$

причемъ общій множитель ε можетъ имѣть любое значеніе.

Найденныя нами выраженія для приращеній

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \delta_{i+1}$$

показываютъ, что ихъ знаки одинаковы со знаками

$$(-1)^i \varepsilon, (-1)^{i-1} \varepsilon, \dots, -\varepsilon, \varepsilon,$$

если

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_i < \xi_{i+1},$$

какъ мы и предполагаемъ.

Слѣдовательно разбираемое нами измѣненіе функціи $f(y)$ возможно тогда и только тогда, когда знаки

$$(-1)^i \varepsilon, (-1)^{i-1} \varepsilon, \dots, -\varepsilon, \varepsilon$$

не противурѣчатъ вышесдѣланнымъ замѣчаніямъ о знакахъ δ для тѣхъ элементовъ σ , гдѣ $f(y)$ имѣетъ свои предѣльные значенія 0 и L .

Соотвѣтствующее приращеніе интеграла

$$\int_0^L y^i f(y) dy$$

равно

$$\sigma \{ \delta_1 \xi_1^i + \delta_2 \xi_2^i + \dots + \delta_i \xi_i^i + \delta_{i+1} \xi_{i+1}^i \} = \sigma \varepsilon \left\{ \frac{\xi_1^i}{\theta'(\xi_1)} + \frac{\xi_2^i}{\theta'(\xi_2)} + \dots + \frac{\xi_{i+1}^i}{\theta'(\xi_{i+1})} \right\},$$

что приводится къ

$$\sigma \varepsilon;$$

такъ какъ

$$\frac{\xi_1^i}{\theta'(\xi_1)} + \frac{\xi_2^i}{\theta'(\xi_2)} + \dots + \frac{\xi_i^i}{\theta'(\xi_i)} + \frac{\xi_{i+1}^i}{\theta'(\xi_{i+1})} = 1,$$

въ силу извѣстной формулы:

$$\frac{1}{\theta(z)} = \frac{1}{(z - \xi_1) \theta'(\xi_1)} + \frac{1}{(z - \xi_2) \theta'(\xi_2)} + \dots + \frac{1}{(z - \xi_{i+1}) \theta'(\xi_{i+1})}.$$

Мы видимъ, что при $\varepsilon > 0$ нашъ интегралъ получаетъ положительное приращеніе, а при $\varepsilon < 0$ напротивъ отрицательное.

Поэтому функція $f(y)$ не даетъ наибольшаго значенія для интеграла

$$\int_0^L y^i f(y) dy,$$

если ε можно взять положительнымъ, и не даетъ наименьшаго значенія для того же интеграла, если ε можно взять отрицательнымъ; наконецъ она не даетъ ни наибольшаго ни наименьшаго значенія, если за ε можно брать числа любого знака.

Отсюда вытекають слѣдующія заключенія.

I. Интегралъ

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

не достигаетъ ни наибольшей ни наименьшей величины, если на какой нибудь части промежутка отъ $y = 0$ до $y = l$ функція $f(y)$ не достигаетъ ни одного изъ своихъ предѣльныхъ значеній 0 и L .

II. Интегралъ

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

не достигаетъ наибольшей величины, если между 0 и l можно указать, въ порядкѣ возрастающихъ значеній y , $i+1$ промежутковъ, гдѣ поочередно $f(y)$ равняется 0 и L , причемъ въ послѣднемъ промежуткѣ

$$f(y) = 0.$$

III. Интегралъ

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

не достигаетъ наименьшей величины, если между 0 и l можно указать, въ порядкѣ возрастающихъ значеній y , $i+1$ промежутковъ, гдѣ поочередно $f(y)$ равняется 0 и L , причемъ въ послѣднемъ промежуткѣ

$$f(y) = L.$$

Итакъ, если нельзя удовлетворить условіямъ (1) и (2) такою функціею $f(y)$, которой соответствовало бы дѣленіе всего промежутка, отъ $y = 0$ до $y = l$, на i или меньшее число частей, идѣ поочередно

$$f(y) = 0 \text{ и } f(y) = L;$$

то предѣльныя величины интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

соответствуютъ такимъ функціямъ $f(y)$, для которыхъ весь промежутокъ, отъ

$$y = 0 \text{ до } y = l,$$

дѣлится на $i+1$ частей, идѣ поочередно

$$f(y) = 0 \text{ и } f(y) = L.$$

При этомъ въ последней части, которая заканчивается числомъ l , должно быть

$$f(y) = L$$

для наибольшей и

$$f(y) = 0$$

для наименьшей величины интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy.$$

§ 2. Положимъ теперь, что соотвѣтственно значеніямъ функціи $f(y)$ весь промежутокъ, отъ

$$y = 0 \text{ до } y = l,$$

дѣйствительно дѣлится на $i + 1$ частей, гдѣ поочередно

$$f(y) = 0 \text{ и } f(y) = L;$$

именно

$$f(y) = \frac{1 + (-1)^i}{2} L, \quad \text{или} \quad f(y) = \frac{1 - (-1)^i}{2} L, \quad \text{при } 0 < y < y_1,$$

$$f(y) = \frac{1 + (-1)^{i-1}}{2} L, \quad \text{или} \quad f(y) = \frac{1 - (-1)^{i-1}}{2} L, \quad \text{при } y_1 < y < y_2,$$

.....

$$f(y) = 0, \quad \text{или} \quad f(y) = L, \quad \text{при } y_{i-1} < y < y_i,$$

$$f(y) = L, \quad \text{или} \quad f(y) = 0, \quad \text{при } y_i < y < l.$$

Пусть далѣе $F(y)$ какая нибудь другая функція, удовлетворяющая тѣмъ же условіямъ (1) и (2):

$$\int_0^l F(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^l y F(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^l y^{i-1} F(y) dy = \alpha_{i-1},$$

$$L > F(y) > 0.$$

Тогда

$$\int_0^l \Omega(y) f(y) dy = \int_0^l \Omega(y) F(y) dy$$

для всякой цѣлой функціи $\Omega(y)$, степень которой меньше i .

По этому, рассматривая разность

$$\int_0^l y^i f(y) dy - \int_0^l y^i F(y) dy,$$

мы можемъ прибавить къ y^i любую цѣлую функцію $\Omega(y)$ степени $i - 1$.

Принимая за $\Omega(y)$ разность

$$(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_{i-1})(y - y_i) - y^i,$$

получаемъ

$$\int_0^l y^i f(y) dy - \int_0^l y^i F(y) dy = \int_0^l \{f(y) - F(y)\} (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_i) dy.$$

Всѣ элементы послѣдняго интеграла

$$\int_0^l \{f(y) - F(y)\} (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_i) dy$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; именно знакъ $+$, если $f(y) = L$ при $y_i < y < l$, и знакъ $-$, если $f(y) = 0$ при $y_i < y < l$.

Слѣдовательно тотъ же знакъ имѣетъ и разность

$$\int_0^l y^i f(y) dy - \int_0^l y^i F(y) dy.$$

Такимъ образомъ провѣряется наше рѣшеніе и доказывается единственность его.

Мы исключили тѣ случаи, когда условіямъ (1) и (2) можетъ удовлетворять такая функція $f(y)$, которой соотвѣтствуетъ дѣленіе всего промежутка, отъ $y = 0$ до $y = l$, на i , или меньшее число, частей, гдѣ поочередно $f(y) = 0$ и $f(y) = L$.

Обращаясь къ исключеннымъ случаямъ, допустимъ, что соотвѣтственно значеніямъ 0 и L функція $f(y)$ промежутка, отъ $y = 0$ до $y = l$, дѣлится на $k + 1$ частей, при чемъ $k < i$.

Такая функція $f(y)$, на основаніи предыдущаго, должна представлять единственное рѣшеніе задачи объ опредѣленіи наибольшей или наименьшей величины интеграла

$$\int_0^l y^k f(y) dy,$$

когда даны

$$\int_0^l f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^l y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^l y^{k-1} f(y) dy = \alpha_{k-1}$$

и условіе

$$L > f(y) > 0.$$

Слѣдовательно данное нами значеніе α_k интеграла

$$\int_0^l y^k f(y) dy$$

оказывается наибольшимъ или наименьшимъ изъ всѣхъ, какія только можетъ получать этотъ интегралъ при условіяхъ

$$\int_0^l f(y) dy = \alpha_0, \int_0^l y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \int_0^l y^{k-1} f(y) dy = \alpha_{k-1},$$

$$L > f(y) > 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ совокупность условій

$$\int_0^l f(y) dy = \alpha_0, \int_0^l y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \int_0^l y^{k-1} f(y) dy = \alpha_{k-1}, \int_0^l y^k f(y) dy = \alpha_k,$$

$$L > f(y) > 0$$

опредѣляетъ функцію $f(y)$, помимо всѣхъ другихъ требованій.

Именно, имъ удовлетворяетъ только одна вышеупомянутая функція $f(y)$, которой соответствуетъ дѣленіе всего промежутка, отъ 0 до l , на $k+1$ частей, гдѣ поочередно

$$f(y) = 0 \text{ и } f(y) = L.$$

Такіе случаи по справедливости надо считать исключительными и они не могутъ встрѣтиться, если числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ взяты изъ равенствъ

$$\alpha_0 = \int_0^l F(y) dy, \alpha_1 = \int_0^l y F(y) dy, \dots, \alpha_{i-1} = \int_0^l y^{i-1} F(y) dy \quad (3),$$

гдѣ $F(y)$ какая нибудь данная функція, всѣ значенія которой удовлетворяютъ условію

$$L > F(y) > 0,$$

но не всѣ совпадаютъ съ 0 или L .

§ 3. Посмотримъ теперь, какъ изъ указанныхъ нами условій на самомъ дѣлѣ можно найти функцію $f(y)$, дающую наименьшее значеніе для интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

и функцію $f(y)$, дающую наибольшее значеніе для того же интеграла.

Для отличія ихъ другъ отъ друга будемъ обозначать: первую изъ нихъ черезъ f_{\min} , а вторую черезъ f_{\max} .

Далѣе условимся обозначать черезъ

$$\xi', \xi'', \eta', \eta''$$

— съ разными значками внизу или безъ значковъ — соотвѣтственно тѣ величины y , гдѣ въ порядкѣ возрастающихъ значеній y происходитъ переходъ

$$f_{min} \text{ отъ } 0 \text{ къ } L, f_{max} \text{ отъ } 0 \text{ къ } L, f_{min} \text{ отъ } L \text{ къ } 0, f_{max} \text{ отъ } L \text{ къ } 0.$$

Наконецъ условимся обозначать

$$\begin{array}{llll} \text{черезъ } V_i^{(')} (z) & \text{произведеніе всѣхъ множителей } z - \xi', \\ \text{» } V_i^{(')} (z) & \text{» } \text{» } \text{» } z - \xi'', \\ \text{» } U_i^{(')} (z) & \text{» } \text{» } \text{» } z - \eta', \\ \text{» } U_i^{(')} (z) & \text{» } \text{» } \text{» } z - \eta''. \end{array}$$

При нашихъ обозначеніяхъ условія (1) задачи выразятся для функций f_{min} и f_{max} уравненіями

$$\left. \begin{array}{l} L(\Sigma \eta' - \Sigma \xi') = \alpha_0, \quad L(l + \Sigma \eta'' - \Sigma \xi'') = \alpha_0, \\ L(\Sigma \eta'^2 - \Sigma \xi'^2) = 2\alpha_1, \quad L(l^2 + \Sigma \eta''^2 - \Sigma \xi''^2) = 2\alpha_1, \\ \dots \dots \dots \\ L(\Sigma \eta'^i - \Sigma \xi'^i) = i\alpha_{i-1}, \quad L(l^i + \Sigma \eta''^i - \Sigma \xi''^i) = i\alpha_{i-1}. \end{array} \right\} \quad (4) *$$

А наименьшая и наибольшая величины интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

соотвѣтственно будутъ

$$\left. \begin{array}{l} h_i' = \int_0^l y^i f_{min} dy = L \left(\Sigma \frac{\eta'^{i+1}}{i+1} - \Sigma \frac{\xi'^{i+1}}{i+1} \right) \\ h_i'' = \int_0^l y^i f_{max} dy = L \left(\frac{l^{i+1}}{i+1} + \Sigma \frac{\eta''^{i+1}}{i+1} - \Sigma \frac{\xi''^{i+1}}{i+1} \right) \end{array} \right\} \quad (5).$$

Для дальнѣйшаго важно разсмотрѣть отдѣльно случай i четнаго и случай i нечетнаго. Если i равно четному числу $2n$, имѣемъ $4n$ неизвѣстныхъ

$$\begin{array}{l} \xi'_1 < \eta'_1 < \xi'_2 < \eta'_2 < \dots < \xi'_n < \eta'_n, \\ \eta''_1 < \xi''_1 < \eta''_2 < \xi''_2 < \dots < \eta''_n < \xi''_n, \end{array}$$

и опредѣляющія ихъ уравненія (4) равносильны требованію, чтобы первые $2n$ членовъ разложеній выраженій

$$\Sigma \frac{L}{z - \xi'} - \Sigma \frac{L}{z - \eta'},$$

*) Σ знакъ суммы.

и

$$\frac{L}{z} + \sum \frac{L}{z - \xi''} - \sum \frac{L}{z - \eta''} - \frac{L}{z - l},$$

по убывающимъ степенямъ z , совпадали съ

$$-\frac{\alpha_0}{z^2} - \frac{2\alpha_1}{z^3} - \frac{3\alpha_2}{z^4} - \dots - \frac{2n\alpha_{2n-1}}{z^{2n+1}}.$$

Откуда, помноживъ всё выраженіе на dz и проинтегрировавъ отъ z до ∞ , выводимъ, что первые $2n$ членовъ разложеній, по убывающимъ степенямъ z , выражений

$$L \log \frac{(z - \xi_1') (z - \xi_2') \dots (z - \xi_n')}{(z - \eta_1') (z - \eta_2') \dots (z - \eta_n')}$$

и

$$L \log \frac{z (z - \xi_1'') (z - \xi_2'') \dots (z - \xi_n'')}{(z - \eta_1'') (z - \eta_2'') \dots (z - \eta_n'') (z - l)}$$

должны совпадать съ

$$\frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_2}{z^3} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{z^{2n}}.$$

Иначе сказать, должны существовать такого рода формулы

$$\frac{V_{2n}^{(r)}(z)}{U_{2n}^{(r)}(z)} = e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}} \left(1 + \frac{h'_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \dots \right),$$

$$\frac{z V_{2n}^{(r)}(z)}{(z - l) U_{2n}^{(r)}(z)} = e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}} \left(1 + \frac{h''_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \dots \right),$$

или, что все равно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_{2n}^{(r)}(z)}{U_{2n}^{(r)}(z)} &= e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}} + \frac{h'_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \dots, \\ \frac{z V_{2n}^{(r)}(z)}{(z - l) U_{2n}^{(r)}(z)} &= e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}} + \frac{h''_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ нетрудно видѣть, что h'_{2n} и h''_{2n} опредѣляются по формуламъ (5), при $i = 2n$, т. е. представляютъ соотвѣтствующія нашимъ даннымъ предѣльныя величины интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy.$$

Введемъ теперь функцію $F(y)$, о которой мы упомянули въ концѣ предыдущаго параграфа; такъ что числа α мы будемъ опредѣлять уравненіями (3).

Тогда полученныя нами формулы (6) можно замѣнить слѣдующими вполне имъ равносильными

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_{2n}^{(i)}(z)}{U_{2n}^{(i)}(z)} &= e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h'_{2n} - \alpha_{2n}}{L z^{2n+1}} + \dots \\ \frac{z V_{2n}^{(ii)}(z)}{(z-l) U_{2n}^{(ii)}(z)} &= e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h''_{2n} - \alpha_{2n}}{L z^{2n+1}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7),$$

вторую изъ которыхъ мы перепишемъ еще такъ

$$\frac{V_{2n}^{(ii)}(z)}{U_{2n}^{(ii)}(z)} = \frac{z-l}{z} e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h''_{2n} - \alpha_{2n}}{L z^{2n+1}} + \dots \quad (8).$$

Совершенно такимъ же путемъ при $i = 2n-1$ найдемъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{z V_{2n-1}^{(i)}(z)}{U_{2n-1}^{(i)}(z)} &= e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h'_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n}} + \dots \\ \frac{V_{2n-1}^{(ii)}(z)}{(z-l) U_{2n-1}^{(ii)}(z)} &= e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h''_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

Послѣднія формулы мы перепишемъ еще такъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_{2n-1}^{(i)}(z)}{U_{2n-1}^{(i)}(z)} &= \frac{1}{z} e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h'_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n+1}} + \dots \\ \frac{V_{2n-1}^{(ii)}(z)}{U_{2n-1}^{(ii)}(z)} &= (z-l) e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h''_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n+1}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и такъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{(z-l) V_{2n-1}^{(i)}(z)}{U_{2n-1}^{(i)}(z)} &= \frac{z-l}{z} e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h'_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n}} + \dots \\ \frac{V_{2n-1}^{(i)}(z)}{z U_{2n-1}^{(i)}(z)} &= \frac{z-l}{z} e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} + \frac{h''_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

Замѣтимъ, что числа h'_{2n-1} и h''_{2n-1} опредѣляются формулами (5) при $i = 2n-1$.

§ 4. Изъ формулъ (7), (8) и (10) въ виду того, что степени функцій

$U_{2n}^{(i)}(z), \quad U_{2n}^{(ii)}(z) \quad \text{и} \quad U_{2n-1}^{(i)}(z)$
равны n , а степень функцій
 $U_{2n-1}^{(ii)}(z)$

равна $n-1$, вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема I.

Если функція $F(y)$ удовлетворяетъ условію

$$L > F(y) > 0,$$

то возможны такія разложенія

$$e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} = 1 + \frac{p_1'}{z - q_1' - \frac{p_2'}{z - q_2' - \frac{p_3'}{z - q_3' - \dots}}} \quad (12)$$

$$\frac{z-l}{z} e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} = 1 - \frac{p_1''}{z - q_1'' - \frac{p_2''}{z - q_2'' - \frac{p_3''}{z - q_3'' - \dots}}} \quad (13),$$

$$\frac{1}{z} e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} = \frac{r_1'}{z - s_1' - \frac{r_2'}{z - s_2' - \frac{r_3'}{z - s_3' - \dots}}} \quad (14),$$

$$(z-l) e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} = z - s_0'' - \frac{r_1''}{z - s_1'' - \frac{r_2''}{z - s_2'' - \dots}} \quad (15),$$

гдѣ всѣ коэффициенты

$$p, q, r, s$$

числа положительныя, равно какъ и разности

$$l-q \quad \text{и} \quad l-s.$$

Подходящими дробями для разложений (12), (13), (14) и (15) соответственно служатъ

$$\frac{V_{2n}^{(l)}(z)}{U_{2n}^{(l)}(z)}, \quad \frac{V_{2n}^{(n)}(z)}{U_{2n}^{(n)}(z)}, \quad \frac{V_{2n-1}^{(l)}(z)}{U_{2n-1}^{(l)}(z)} \quad \text{и} \quad \frac{V_{2n-1}^{(n)}(z)}{U_{2n-1}^{(n)}(z)}.$$

Вмѣсто указанныхъ четырехъ разложений (12), (13), (14) и (15) мы будемъ пользоваться другими тѣсно съ ними связанными.

Новыя разложения вытекаютъ изъ формулъ (7), (8), (9) и (11), и заключаются въ слѣдующей теоремѣ.

Теорема II.

Если функция $F(y)$ удовлетворяетъ условію

$$L > F(y) > 0,$$

то возможны такія разложенія

$$e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \frac{c_3}{z - \frac{c_4}{1 - \dots}}}}} \quad (16),$$

$$e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} = 1 + \frac{\gamma_1}{z-l + \frac{\gamma_2}{1 + \frac{\gamma_3}{z-l + \frac{\gamma_4}{1 + \dots}}}} \quad (17),$$

$$\frac{z-l}{z} e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} = 1 - \frac{\partial_1}{z - \frac{\partial_2}{1 - \frac{\partial_3}{z - \frac{\partial_4}{1 - \dots}}}} \quad (18),$$

$$\frac{z-l}{z} e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} = \frac{1}{1 + \frac{\delta_1}{z-l + \frac{\delta_2}{1 + \frac{\delta_3}{z-l + \dots}}}} \quad (19),$$

при помощи которых введенныя нами функции U и V определяются какъ формулами

$$\frac{V_{2n}^{(l)}(z)}{U_{2n}^{(l)}(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \frac{c_3}{z - \dots - \frac{c_{2n-1}}{z - c_{2n}}}}}} \quad (20),$$

$$\frac{z V_{2n-1}^{(l)}(z)}{U_{2n-1}^{(l)}(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \frac{c_3}{z - \dots - \frac{c_{2n-1}}{z}}}}} \quad (21),$$

$$\frac{V_{2n}^{(l')}(z)}{U_{2n}^{(l')}(z)} = 1 - \frac{\partial_1}{z - \frac{\partial_2}{1 - \frac{\partial_3}{z - \dots - \frac{\partial_{2n-1}}{z - \partial_{2n}}}}} \quad (22),$$

$$\frac{V_{2n-1}^{(l')}(z)}{z U_{2n-1}^{(l')}(z)} = 1 - \frac{\partial_1}{z - \frac{\partial_2}{1 - \frac{\partial_3}{z - \dots - \frac{\partial_{2n-1}}{z}}}} \quad (23),$$

такъ и формулами

$$\frac{V_{2n}^{(')} (z)}{U_{2n}^{(')} (z)} = 1 + \frac{\gamma_1}{z-l + \frac{\gamma_2}{1 + \frac{\gamma_3}{z-l + \dots + \frac{\gamma_{2n-1}}{z-l + \gamma_{2n}}}}} \quad (24),$$

$$\frac{V_{2n-1}^{(')} (z)}{(z-l) U_{2n-1}^{(')} (z)} = 1 + \frac{\gamma_1}{z-l + \frac{\gamma_2}{1 + \frac{\gamma_3}{z-l + \dots + \frac{\gamma_{2n-1}}{z-l}}} \quad (25),$$

$$\frac{V_{2n}^{(')} (z)}{U_{2n}^{(')} (z)} = \frac{1}{1 + \frac{\delta_1}{z-l + \frac{\delta_2}{1 + \dots + \frac{\delta_{2n-1}}{z-l + \delta_{2n}}}}} \quad (26),$$

$$\frac{(z-l) V_{2n-1}^{(')} (z)}{U_{2n-1}^{(')} (z)} = \frac{1}{1 + \frac{\delta_1}{z-l + \frac{\delta_2}{1 + \dots + \frac{\delta_{2n-1}}{z-l}}} \quad (27).$$

Здѣсь всѣ коэффициенты

c, d, γ, δ

числа положительныя.

Выводъ указанныхъ нами разложеній не представляетъ никакихъ затрудненій.

§ 5. Одно изъ преимуществъ разложеній (16), (17), (18) и (19), типъ которыхъ нами заимствованъ изъ мемуара Стиелтьеса «Recherches sur les fractions continues», передъ (12), (13), (14) и (15) состоитъ въ простотѣ соотношеній между ихъ коэффициентами

c, d, γ, δ

съ одной стороны и числами

α, h', h''

съ другой.

Именно, въ силу извѣстныхъ предложеній теоріи непрерывныхъ дробей, эти соотношенія выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} c_1 = \gamma_1 &= \frac{\alpha_0}{L}, & d_1 = \delta_1 &= l - \frac{\alpha_0}{L} \\ L c_1 c_2 \dots c_i &= \alpha_{i-1} - h'_{i-1}, & L d_1 d_2 \dots d_i &= h''_{i-1} - \alpha_{i-1} \\ L \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2m-1} &= \alpha_{2m-2} - h'_{2m-2}, & L \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{2m-1} &= h''_{2m-2} - \alpha_{2m-2} \\ L \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2m} &= h''_{2m-1} - \alpha_{2m-1}, & L \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{2m} &= \alpha_{2m-1} - h'_{2m-1} \end{aligned} \right\} \quad (28),$$

изъ которыхъ непосредственно вытекають неравенства

$$c_i > 0, \quad d_i > 0, \quad \gamma_i > 0, \quad \delta_i > 0;$$

ибо

$$h'_{i-1} < a_{i-1} < h''_{i-1}.$$

Другое преимущество разложений (16), (17), (18) и (19) заключается въ приводимыхъ нами ниже простыхъ предложеніяхъ.

Если обыкновенная несократимая дробь $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ равна

$$\frac{1}{1 - \frac{a_1}{z - \frac{a_2}{1 - \frac{a_3}{z - \frac{a_4}{1 - \dots - \frac{a_i}{\frac{1 - (-1)^i}{z^2}}}}}}}$$

и всѣ числа

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \dots, a_i$$

больше нуля, то всѣ корни уравненія

$$\psi(z) = 0,$$

равно какъ и всѣ корни уравненія

$$\varphi(z) = 0,$$

вещественны, различны между собой и не меньше нуля; при томъ корни одного изъ этихъ уравненій перемежаются съ корнями другого.

Подобнымъ же образомъ, если обыкновенная несократимая дробь $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ равна

$$\frac{1}{1 + \frac{a_1}{z - l + \frac{a_2}{1 + \frac{a_3}{z - l + \dots + \frac{a_i}{\frac{1 - (-1)^i}{(z - l)^2}}}}}}$$

и всѣ числа

$$a_1, \quad a_2, \dots, a_i$$

по прежнему больше нуля, то всѣ корни уравненія

$$\psi(z) = 0,$$

равно какъ и всѣ корни уравненія

$$\Phi(z) = 0,$$

вещественны, различны между собой и не больше l ; при томъ корни одного изъ этихъ уравненій перемежаются съ корнями другого.

Благодаря такимъ простымъ предложеніямъ, является возможность обратной проверки нашихъ заключеній, основанныхъ на томъ, что задача, объ опредѣленіи наибольшаго и наименьшаго значенія интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

при условіяхъ

$$\int_0^l f(y) dy = \int_0^l F(y) dy, \dots, \int_0^l y^{i-1} f(y) dy = \int_0^l y^{i-1} F(y) dy,$$

$$L > f(y) > 0,$$

должна имѣть рѣшеніе и что, слѣдовательно, должны существовать функціи

$$U_i^{(n)}(z), \quad V_i^{(n)}(z), \quad U_i^{(m)}(z), \quad V_i^{(m)}(z),$$

отъ которыхъ зависитъ это рѣшеніе.

Намъ достаточно теперь знать о существованіи этихъ функцій при какомъ нибудь значеніи i для того, чтобы при помощи послѣдовательныхъ увеличеній числа i на единицу можно было заключить объ ихъ существованіи при всѣхъ дальнѣйшихъ значеніяхъ i .

А при $i=1$ ихъ существованіе не подлежитъ никакому сомнѣнію, такъ какъ въ этомъ случаѣ онѣ опредѣляются весьма простыми равенствами

$$V_1^{(n)}(z) = U_1^{(n)}(z) = 1, \quad U_1^{(n)}(z) = z - \frac{\alpha_0}{L}, \quad V_1^{(n)}(z) = z - l + \frac{\alpha_0}{L}.$$

§ 6. До сихъ поръ рѣчь шла только о предѣльныхъ величинахъ интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy.$$

Нетрудно однако убѣдиться, что найденныя нами функціи f_{min} и f_{max} даютъ рѣшеніе и для общей задачи:

Соответственно даннымъ

$$\int_0^l f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^l y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^l y^{i-1} f(y) dy = \alpha_{i-1}$$

и условію

$$0 < f(y) < L$$

найти точные высшій и низшій предѣлы для интеграла

$$\int_0^l \Phi(y) f(y) dy,$$

идеь данная функція $\Phi(y)$ такова, что ея производная i -го порядка

$$\frac{d^i \Phi(y)}{dy^i} = \Phi^i(y),$$

въ промежуткѣ отъ $y = 0$ до $y = l$, сохраняетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ.

Дѣйствительно, принимая обозначенія § 2 и полагая

$$\Omega(y) = \Phi(y_1) \frac{(y-y_2)\dots(y-y_i)}{(y_1-y_2)\dots(y_1-y_i)} + \dots + \Phi(y_i) \frac{(y-y_1)\dots(y-y_{i-1})}{(y_i-y_1)\dots(y_i-y_{i-1})},$$

можемъ написать такія равенства

$$\int_0^l \Phi(y) F(y) dy - \int_0^l \Phi(y) f(y) dy = \int_0^l \{\Phi(y) - \Omega(y)\} \{F(y) - f(y)\} dy$$

и

$$\Phi(y) - \Omega(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_i)\Phi^i(y')}{1.2.3\dots i},$$

гдѣ y' мѣняется вмѣстѣ съ y , но всегда остается между 0 и l .

Слѣдовательно

$$\int_0^l \Phi(y) F(y) dy - \int_0^l \Phi(y) f(y) dy = \int_0^l \frac{(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_i)}{1.2.3\dots i} \{F(y) - f(y)\} \Phi^i(y') dy.$$

А изъ подъ знака послѣдняго интеграла можно вынести среднее значеніе множителя $\Phi^i(y')$, такъ какъ произведеніе

$$\frac{(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_i)}{1.2\dots i} \{F(y) - f(y)\}$$

сохраняетъ у насъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ: $+$ для $f(y) = f_{min}$ и $-$ для $f(y) = f_{max}$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ формулѣ

$$\int_0^l \Phi(y) F(y) dy = \int_0^l \Phi(y) f(y) dy + \Phi^i(\xi) \int_0^l \frac{\{F(y) - f(y)\} \omega(y) dy}{1.2.3\dots i} \quad (29),$$

гдѣ

$$\omega(y) = (y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_i),$$

а ξ нѣкоторое среднее число между 0 и l .

Наша формула (29) относится ко всякой функціи $\Phi(y)$.

Для тѣхъ же функцій $\Phi(y)$, производныя которыхъ i -го порядка

$$\Phi^i(y)$$

сохраняютъ, въ промежуткѣ отъ $y=0$ до $y=l$, постоянно одинъ и тотъ же знакъ, она вполне опредѣляетъ знакъ разности

$$\int_0^l \Phi(y) F(y) dy - \int_0^l \Phi(y) f(y) dy.$$

Именно, при

$$\Phi^i(y) > 0$$

эта разность оказывается числомъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, будетъ ли $f(y)$ функціею f_{min} или f_{max} ; если же

$$\Phi^i(y) < 0,$$

функціи f_{min} и f_{max} мѣняются ролями.

§ 7. Примѣняя этотъ результатъ къ функціи

$$\Phi(y) = \frac{1}{z-y}$$

и предполагая для опредѣленности число z бѣльшимъ чѣмъ l , приходимъ къ такой теоремѣ.

Теорема III.

Если при

$$L > F(y) > 0 \quad \text{и} \quad z > l > 0$$

мы разложимъ выраженія

$$\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y} \quad \text{и} \quad \frac{-1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}$$

е

и

$$\frac{z}{z-l} e$$

соотвѣтственно въ непрерывныя дроби

$$\frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \frac{c_3}{z - \dots}}}}$$

и

$$\frac{1}{1 - \frac{\partial_1}{z - \frac{\partial_2}{1 - \frac{\partial_3}{z - \dots}}}},$$

и затѣмъ ограничимся въ этихъ дробяхъ какимъ нибудь числомъ первыхъ звеньевъ, то всегда будемъ имѣть величины соответственно меньшія чѣмъ

$$e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} \quad \text{и} \quad \frac{z}{z-l} e^{-\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}}.$$

Если же мы разложимъ, при тѣхъ же условіяхъ,

$$L > f(y) > 0 \quad \text{и} \quad z > l > 0,$$

выраженія

$$e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} \quad \text{и} \quad \frac{z}{z-l} e^{-\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}}$$

соответственно въ непрерывныя дроби

$$1 + \frac{\gamma_1}{z-l + \frac{\gamma_2}{1 + \frac{\gamma_3}{z-l + \frac{\gamma_4}{1 + \dots}}}} \quad \text{и} \quad 1 + \frac{\delta_1}{z-l + \frac{\delta_2}{1 + \frac{\delta_3}{z-l + \frac{\delta_4}{1 + \dots}}}}$$

и въ послѣднихъ дробяхъ ограничимся какимъ нибудь числомъ первыхъ звеньевъ, то при нечетномъ числѣ звеньевъ получимъ величины соответственно меньшія чѣмъ наши выраженія

$$e^{\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}} \quad \text{и} \quad \frac{z}{z-l} e^{-\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}},$$

а при четномъ — напротивъ большія чѣмъ они.

Отсюда вытекаетъ новый способъ для приближеннаго вычисленія интеграла

$$\int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}:$$

приближенныя величины этого интеграла выражаются у насъ логарифмами рациональных дробей.

Въ предѣльномъ случаѣ, когда $L = \infty$, нашъ способъ долженъ сводиться къ обыкновенному разложенію самого интеграла

$$\int_0^l \frac{F(y) dy}{z-y}$$

въ непрерывную дробь.

Переходъ отъ безконечнаго значенія L къ конечному, если только онъ допускается условіемъ

$$L > F(y),$$

долженъ сопровождаться, вообще говоря, усложненіемъ вычисленій и повышеніемъ точности получаемыхъ приближеній.

Съ точки зрѣнія точности результатовъ наивыгоднѣйшимъ будетъ, конечно, наименьшее изъ всѣхъ возможныхъ значеній L , т. е. точный высшій предѣлъ всѣхъ значеній функціи $F(y)$, въ промежуткѣ отъ $y=0$ до $y=l$.

§ 8. *Перейдемъ теперь къ вопросу о предѣльныхъ величинахъ интеграла*

$$\int_0^x f(y) dy,$$

если данное число x заключается между 0 и l , а остальные условія остаются прежними.

Предварительно, однако, докажемъ слѣдующее предложеніе.

Если

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots < \xi_k < \xi_{k+1} < \dots < \xi_i < \xi_{i+1}$$

и $\theta(z)$ означаетъ произведеніе

$$(z - \xi_1)(z - \xi_2) \dots (z - \xi_i)(z - \xi_{i+1}),$$

то сумма

$$\frac{1}{\theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\theta'(\xi_2)} + \dots + \frac{1}{\theta'(\xi_k)}$$

имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и ея послѣдній членъ

$$\frac{1}{\theta'(\xi_k)}.$$

Для доказательства этого вспомогательнаго предложенія припомнимъ, что для всякой цѣлой функціи $\Omega(z)$, степень которой меньше i , сумма

$$\frac{\Omega(\xi_1)}{\theta'(\xi_1)} + \frac{\Omega(\xi_2)}{\theta'(\xi_2)} + \dots + \frac{\Omega(\xi_{i+1})}{\theta'(\xi_{i+1})}$$

равна нулю.

Въ виду произвольности цѣлой функціи $\Omega(z)$, которая должна быть только степени $i-1$ или меньшей, можно положить

$$\Omega(\xi_1) = \Omega(\xi_2) = \dots = \Omega(\xi_k) = 1,$$

$$\Omega(\xi_{k+2}) = \Omega(\xi_{k+3}) = \dots = \Omega(\xi_{i+1}) = 0.$$

Для опредѣленной такимъ образомъ функціи $\Omega(z)$ получимъ

$$\frac{1}{\theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\theta'(\xi_2)} + \dots + \frac{1}{\theta'(\xi_k)} + \frac{\Omega(\xi_{k+1})}{\theta'(\xi_{k+1})} = 0.$$

Съ другой стороны нетрудно видѣть, что между $z = \xi_k$ и $z = \xi_{k+2}$ первая производная нашей функціи $\Omega(z)$ по z не можетъ обращаться въ нуль и слѣдовательно должна оставаться отрицательною; а сама функція $\Omega(z)$ должна убывать.

Поэтому

$$0 < \Omega(\xi_{k+1}) < 1,$$

а сумма

$$\frac{1}{\theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\theta'(\xi_2)} + \dots + \frac{1}{\theta'(\xi_k)}$$

заключается между

$$0 \text{ и } \frac{-1}{\theta'(\xi_{k+1})}.$$

Отсюда и вытекаетъ высказанное нами предложеніе, такъ какъ $\theta'(\xi_k)$ и $\theta'(\xi_{k+1})$ числа разныхъ знаковъ.

Обращаясь къ нашей задачѣ, положимъ (какъ въ § 1), что мы остановились на какой нибудь опредѣленной функціи $f(y)$, которая удовлетворяетъ условіямъ (1) и (2). Затѣмъ попробуемъ сдѣлать въ $f(y)$ то самое измѣненіе, которое мы разсматривали въ § 1, при чемъ сохранимъ и обозначенія § 1.

Пусть

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k < x < \xi_{k+1} < \xi_{k+2} < \dots < \xi_{k+1}.$$

При такомъ предположеніи разбираемому нами измѣненію функціи $f(y)$ соответствуетъ приращеніе интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

равное

$$(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k) \sigma,$$

т. е.

$$\varepsilon \sigma \left\{ \frac{1}{\theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\theta'(\xi_2)} + \dots + \frac{1}{\theta'(\xi_k)} \right\}.$$

Послѣднее выраженіе, въ силу только что доказаннаго предложенія, имѣетъ знакъ одинаковый съ

$$\delta_k = \frac{\varepsilon}{\theta'(\xi_k)}.$$

Слѣдовательно приращеніе интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

будетъ положительнымъ при $\delta_k > 0$ и отрицательнымъ при $\delta_k < 0$.

Отсюда нетрудно вывести такія заключенія.

I. Интегралъ

$$\int_0^x f(y) dy$$

не достигаетъ наименьшаго значенія, если можно найти $i+1$ промежутковъ, удовлетворяющихъ условіямъ:

- а) какъ между 0 и x , такъ и между x и l , лежитъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ;
- б) функція $f(y)$ въ этихъ промежуткахъ, которые мы располагаемъ въ порядкѣ возрастающихъ значеній y , поочередно не достигаетъ то значенія 0, то значенія L ;
- с) въ последнемъ изъ промежутковъ, лежащихъ между 0 и x , функція $f(y)$ не достигаетъ значенія 0.

II. Интеграль

$$\int_0^x f(y) dy$$

не достигаетъ своего наибольшаго значенія, если можно найти $i+1$ промежутковъ, удовлетворяющихъ условіямъ:

- а) какъ между 0 и x , такъ и между x и l , лежитъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ;
- б) функція $f(y)$ въ этихъ промежуткахъ, которые мы располагаемъ въ порядкѣ возрастающихъ значеній y , поочередно не достигаетъ то значенія 0 то значенія L ;
- с) въ последнемъ изъ промежутковъ, лежащихъ между 0 и x , функція $f(y)$ не достигаетъ значенія L .

Что касается тѣхъ случаевъ, когда при $y < x$ или при $y > x$ функція $f(y)$ постоянно равна 0 или постоянно равна L , то на основаніи изслѣдованій предыдущихъ параграфовъ мы можемъ утверждать, что безъ измѣненія величины интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

можно въ этихъ случаяхъ замѣнить функцію $f(y)$ другою, значенія которой дѣлятъ весь промежутокъ отъ 0 до l на $i+2$ частей, гдѣ поочередно она равна 0 и L , при чемъ x будетъ границею двухъ изъ этихъ частей.

Изъ всего сказаннаго нами ясно, что при разысканіи наибольшаго и наименьшаго значеній интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

можно ограничиться такими функціями $f(y)$, для которыхъ весь промежутокъ отъ 0 до l дѣлится на $i+2$ или $i+1$ частей, гдѣ поочередно функція имѣетъ значенія 0 и L ; меньшаго числа частей мы не допускаемъ, согласно прежнимъ объясненіямъ.

Нетрудно также видѣть, что изъ оставшихся случаевъ можно исключить тѣ, гдѣ x лежитъ внутри какой нибудь одной изъ вышеупомянутыхъ частей, а не служитъ границею двухъ частей, такъ что при переходѣ y черезъ значеніе x величина функція $f(y)$ не мѣняется.

Остается разсматривать только тѣ функція $f(y)$, значеніями 0 и L которыхъ весь промежутокъ, отъ $y=0$ до $y=l$, дѣлится на $i+2$ или $i+1$ частей, при чемъ $y=x$ служитъ границею двухъ частей.

Наконецъ и случай $i+1$ частей надо признать исключительнымъ, такъ какъ онъ можетъ быть только при x равномъ одному изъ корней уравненій

$$U_i^{(i)}(x) = 0, \quad V_i^{(i)}(x) = 0, \quad U_i^{(i+1)}(x) = 0, \quad V_i^{(i+1)}(x) = 0.$$

Итакъ, вопросъ о предѣльныхъ величинахъ интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

долженъ разрѣшаться такими функциями $f(y)$ значеніями 0 и L которыхъ весь промежутокъ, отъ $y=0$ до $y=l$, дѣлится на $i+2$ частей, при чемъ x служитъ границею двухъ изъ нихъ.

Различая же наибольшую величину интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

отъ наименьшей, мы должны, въ силу предыдущихъ заключеній, поставить еще одно требованіе.

Именно, при разысканіи наибольшей величины интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

мы должны требовать, чтобы при переходѣ y черезъ x , отъ меньшихъ величинъ къ большимъ, функція $f(y)$ переходила отъ значенія L къ значенію 0.

Напротивъ, при разысканіи наименьшей величины интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

мы должны требовать, чтобы при переходѣ y черезъ x , отъ меньшихъ величинъ къ большимъ, функція $f(y)$ переходила отъ значенія 0 къ значенію L .

§ 9. Этими условіями искомыя функціи $f(y)$ вполне опредѣляются, что мы сейчасъ и докажемъ.

Пусть въ самомъ дѣлѣ мы нашли какую нибудь функцію $f(y)$, значенія 0 и L которой отдѣляются другъ отъ друга такими величинами y :

$$y_1, y_2, \dots, y_k, x, y_{k+1}, \dots, y_i,$$

при чемъ

$$y_1 < y_2 < \dots < y_k < x < y_{k+1} < \dots < y_i.$$

Пусть далѣе $F(y)$ какая нибудь другая функція, удовлетворяющая условіямъ (1) и (2), такъ что

$$\int_0^l F(y) dy = \int_0^l f(y) dy, \int_0^l y F(y) dy = \int_0^l y f(y) dy, \dots, \int_0^l y^{i-1} F(y) dy = \int_0^l y^{i-1} f(y) dy,$$

$$L > F(y) > 0.$$

Тогда для всякой цѣлой функціи $\Omega(y)$, степень которой меньше i , должно быть

$$\int_0^l \{f(y) - F(y)\} \Omega(y) dy = 0.$$

Распорядимся коэффициентами этой функціи $\Omega(y)$ такъ, чтобы было

$$\Omega(y_1) = \Omega(y_2) = \dots = \Omega(y_k) = 1, \quad \Omega(y_{k+1}) = \dots = \Omega(y_i) = 0,$$

т. е. положимъ

$$\Omega(y) = \frac{(y-y_2)\dots(y-y_i)}{(y_1-y_2)\dots(y_1-y_i)} + \frac{(y-y_1)(y-y_3)\dots(y-y_i)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)\dots(y_2-y_i)} + \dots + \frac{(y-y_1)\dots(y-y_{k-1})(y-y_{k+1})\dots(y-y_i)}{(y_k-y_1)\dots(y_k-y_{k-1})(y_k-y_{k+1})\dots(y_k-y_i)}.$$

Введемъ еще функцію $\omega(y)$ равную единицѣ при $0 < y < x$ и нулю при $x < y < l$, такъ что

$$\int_0^l \{f(y) - F(y)\} \omega(y) dy = \int_0^x f(y) dy - \int_0^x F(y) dy.$$

Сравнивая между собой взятые нами функціи $\Omega(y)$ и $\omega(y)$, не трудно убѣдиться, что при непрерывномъ возрастаніи y ихъ разность

$$\omega(y) - \Omega(y)$$

мѣняетъ свой знакъ тогда и только тогда, когда y переходитъ черезъ значенія

$$y_1, y_2, \dots, y_k, x, y_{k+1}, \dots, y_i.$$

Именно, должно быть

$$\begin{aligned} (-1)^k \{ \omega(y) - \Omega(y) \} &> 0, \text{ при } 0 < y < y_1, \\ (-1)^{k-1} \{ \omega(y) - \Omega(y) \} &> 0, \text{ при } y_1 < y < y_2, \\ &\dots \dots \dots \\ - \{ \omega(y) - \Omega(y) \} &> 0, \text{ при } y_{k-1} < y < y_k, \\ \omega(y) - \Omega(y) &> 0, \text{ при } y_k < y < x, \\ - \{ \omega(y) - \Omega(y) \} &> 0, \text{ при } x < y < y_{k+1}, \\ &\dots \dots \dots \\ (-1)^{i-k+1} \{ \omega(y) - \Omega(y) \} &> 0, \text{ при } y_i < y < l. \end{aligned}$$

Подобнымъ же образомъ мѣняетъ свой знакъ и разность

$$f(y) - F(y).$$

Поэтому произведение

$$\{f(y) - F(y)\} \{\omega(y) - \Omega(y)\},$$

для всѣхъ разсматриваемыхъ нами значеній y , сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ: оно будетъ постоянно числомъ положительнымъ, если въ промежуткѣ

$$\text{отъ } y = y_k \text{ до } y = x$$

функция $f(y)$ имѣетъ величину L ; напротивъ оно будетъ числомъ отрицательнымъ, если въ томъ же промежуткѣ

$$\text{отъ } y = y_k \text{ до } y = x$$

функция $f(y)$ имѣетъ величину 0.

Слѣдовательно разность

$$\int_0^x f(y) dy - \int_0^x F(y) dy,$$

равная

$$\int_0^1 \{f(y) - F(y)\} \{\omega(y) - \Omega(y)\} dy,$$

навѣрно число положительное, если

$$f(y) = L \text{ при } y_k < y < x;$$

напротивъ эта разность число отрицательное, если

$$f(y) = 0 \text{ при } y_k < y < x.$$

Такимъ образомъ подтверждается правильность нашего рѣшенія и доказывается единственность его.

Небольшое исключеніе представляютъ тѣ случаи, когда x меньше всѣхъ

$$y_1, y_2, \dots, y_i$$

или больше ихъ всѣхъ.

Въ этихъ случаяхъ, очевидно, интегралъ

$$\int_0^x f(y) dy$$

получаетъ при нашей функции $f(y)$ свое наибольшее или наименьшее значеніе; но онъ можетъ получать то же значеніе и при другихъ функцияхъ $f(y)$.

§ 10. Покажемъ теперь, какъ при помощи ранѣ введенныхъ нами функций U и V , можно на самомъ дѣлѣ найти искомую функцию $f(y)$ или, лучше сказать, соответствующія ей числа

$$y_1, y_2, \dots, y_i.$$

Предварительно условимся обозначать черезъ η тѣ величины y , гдѣ происходитъ переходъ функции $f(y)$ отъ L къ 0, а черезъ ξ тѣ, гдѣ происходитъ обратный переходъ отъ 0 къ L ; при этомъ между числами η и ξ не будемъ считать x .

Условимся также произведение всѣхъ множителей $z - \xi$ обозначать черезъ $P(z)$, а произведение всѣхъ множителей $z - \eta$ черезъ $Q(z)$.

Наконецъ символами

$$\sum_x \xi \text{ и } \sum_x \eta$$

будемъ обозначать соответственно сумму всѣхъ ξ , меньшихъ x , и сумму всѣхъ η , меньшихъ x .

Этихъ обозначеній мы будемъ придерживаться во всѣхъ дальнѣйшихъ выводахъ о предѣльныхъ величинахъ интеграла

$$\int_0^x f(y) dy.$$

Мы разберемъ здѣсь подробно тотъ случай, когда i число четное $2n$ и требуется найти наименьшее значеніе интеграла

$$\int_0^x f(y) dy.$$

Для рѣшенія нашей задачи приходится разсматривать отдѣльно два предположенія, которыя отличаются другъ отъ друга величиною функции $f(y)$ для значеній y смежныхъ съ нулемъ.

Въ одномъ изъ этихъ предположеній, которое мы назовемъ первымъ, числа ξ и η располагаются согласно слѣдующей схемѣ:

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \dots < \xi_{k-1} < \eta_{k-1} < x < \eta_k < \xi_k < \dots < \eta_n < \xi_n < l;$$

въ другомъ, которое мы назовемъ вторымъ, они располагаются согласно слѣдующей схемѣ:

$$0 < \eta_1 < \xi_1 < \dots < \xi_{k-1} < \eta_k < x < \eta_{k+1} < \xi_k < \dots < \eta_n < \xi_{n-1} < \eta_{n+1} < l.$$

Начнемъ съ перваго предположенія.

При этомъ предположеніи, произведя такія же выкладки какъ въ § 3, находимъ, что разложение разности

$$\frac{(z-x) P(z)}{(z-l) Q(z)} - e = \frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}.$$

по убывающимъ степенямъ z должно начинаться къ члена вида $\frac{h}{z^{2n+1}}$ и что слѣдовательно

$$\frac{z-x}{z-l} \frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{V_{2n}^{(r)}(z)}{U_{2n}^{(r)}(z)} = \frac{K'}{(z-l) Q(z) U_{2n}^{(r)}(z)},$$

гдѣ K' означаетъ число постоянное.

Сопоставляя этотъ результатъ съ разложеніемъ $\frac{V_{2n}^{(r)}(z)}{U_{2n}^{(r)}(z)}$ въ непрерывную дробь (24) приходимъ къ такой формулѣ

$$\frac{z-x}{z-l} \frac{P(z)}{Q(z)} = 1 + \frac{\gamma_1}{z-l + \frac{\gamma_2}{1 + \frac{\gamma_3}{z-l + \dots + \frac{\gamma_{2n}}{1 + \frac{\gamma}{z-l}}}}},$$

которая равносильна двумъ

$$(z-x) P(z) = (z-l) V_{2n}^{(r)}(z) + \gamma V_{2n-1}^{(r)}(z),$$

$$Q(z) = U_{2n}^{(r)}(z) + \gamma U_{2n-1}^{(r)}(z).$$

Остается найти только постоянное число γ .

Оно опредѣляется условіемъ, что цѣлая функція, отъ z ,

$$(z-l) V_{2n}^{(r)}(z) + \gamma V_{2n-1}^{(r)}(z)$$

должна дѣлиться на $z-x$.

Это условіе даетъ намъ уравненіе

$$(x-l) V_{2n}^{(r)}(x) + \gamma V_{2n-1}^{(r)}(x) = 0,$$

откуда находимъ

$$\gamma = \frac{(l-x) V_{2n}^{(r)}(x)}{V_{2n-1}^{(r)}(x)}.$$

Тѣ же функціи $P(z)$ и $Q(z)$ могутъ быть опредѣлены и другими формулами.

Для вывода другихъ формулъ замѣтимъ, что разложеніе разности

$$\frac{(z-x) P(z)}{z Q(z)} - \frac{z-l}{z} e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}},$$

по убывающимъ степенямъ z , должно также начинаться съ члена вида $\frac{h}{z^{2n+1}}$ и что слѣдовательно

$$\frac{(z-x) P(z)}{z Q(z)} - \frac{V_{2n}^{(n)}(z)}{U_{2n}^{(n)}(z)} = \frac{-K''}{z Q(z) U_{2n}^{(n)}(z)},$$

гдѣ K'' число постоянное.

Затѣмъ остается сопоставить этотъ результатъ съ разложениемъ $\frac{V_{2n}^{(n)}(z)}{U_{2n}^{(n)}(z)}$ въ непрерывную дробь (22), чтобы придти къ формулѣ

$$\frac{(z-x) P(z)}{z Q(z)} = 1 - \frac{\partial_1}{z - \frac{\partial_2}{1 - \frac{\partial_3}{z - \dots - \frac{\partial_{2n-1}}{z - \frac{\partial_{2n}}{1 - \frac{\partial}{z}}}}}},$$

которая равносильна двумъ

$$\begin{aligned} (z-x) P(z) &= z V_{2n}^{(n)}(z) - \partial V_{2n-1}^{(n)}(z), \\ Q(z) &= U_{2n}^{(n)}(z) - \partial U_{2n-1}^{(n)}(z). \end{aligned}$$

Что касается постоянного числа ∂ , то оно опредѣляется уравненіемъ

$$\partial = \frac{x V_{2n}^{(n)}(x)}{V_{2n-1}^{(n)}(x)}.$$

Мы привели всѣ эти формулы для того, чтобы рѣшить вопросъ о возможности перваго предположенія. Въ силу предложеній, приведенныхъ въ § 5, условія этой возможности, очевидно, выражаются неравенствами

$$\gamma > 0 \text{ и } \partial > 0,$$

которые сводятся къ одному

$$\gamma \partial > 0,$$

такъ какъ γ и ∂ не могутъ одновременно оказаться отрицательными.

Невозможность для γ и ∂ одновременно быть отрицательными вытекаетъ изъ слѣдующихъ простыхъ формулъ

$$\begin{aligned} K' &= \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n} \gamma, \quad K'' = \partial_1 \partial_2 \dots \partial_{2n} \partial, \\ \frac{z V_{2n}^{(n)}(z)}{(z-l) U_{2n}^{(n)}(z)} - \frac{V_{2n}^{(n)}(z)}{U_{2n}^{(n)}(z)} &= \frac{K' + K''}{z^{2n+1}} + \dots = \frac{h_{2n}'' - h_{2n}'}{L z^{2n+1}} + \dots, \end{aligned}$$

которыя даютъ такое равенство

$$L \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n} \gamma + L \partial_1 \partial_2 \dots \partial_{2n} \partial = h''_{2n} - h'_{2n},$$

гдѣ произведенія

$$L \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n}, \quad L \partial_1 \partial_2 \dots \partial_{2n}$$

и разность

$$h''_{2n} - h'_{2n}$$

числа положительныя.

Итакъ, первое предположеніе оправдывается тогда и только тогда, когда

$$\gamma \partial > 0,$$

т. е. когда

$$V_{2n}^{(\gamma)}(x) \quad \text{и} \quad V_{2n}^{(\partial)}(x)$$

числа одного и того же знака.

Тѣмъ же путемъ придемъ для второго предположенія къ формуламъ

$$\frac{z(z-x)P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n-1}}{z - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c}{z}}}}}},$$

$$(z-x)P(z) = V_{2n}^{(\gamma)}(z) - c V_{2n-1}^{(\gamma)}(z),$$

$$Q(z) = z U_{2n}^{(\gamma)}(z) - c U_{2n-1}^{(\gamma)}(z),$$

$$c = \frac{V_{2n}^{(\gamma)}(x)}{V_{2n-1}^{(\gamma)}(x)},$$

$$\frac{(z-l)(z-x)P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 + \frac{\delta_1}{z-l + \frac{\delta_2}{1 + \dots + \frac{\delta_{2n}}{1 + \frac{\delta}{z-l}}}}},$$

$$(z-x)P(z) = V_{2n}^{(\gamma)}(z) + \delta V_{2n-1}^{(\gamma)}(z),$$

$$Q(z) = (z-l) U_{2n}^{(\gamma)}(z) + \delta U_{2n-1}^{(\gamma)}(z),$$

$$\delta = - \frac{V_{2n}^{(\gamma)}(x)}{V_{2n-1}^{(\gamma)}(x)},$$

$$L c_1 c_2 \dots c_{2n} c + L \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{2n} \delta = h''_{2n} - h'_{2n}.$$

Отсюда видно, что второе предположеніе оправдывается, когда $V_{2n}^{(r)}(x)$ и $V_{2n}^{(r')}(x)$ числа различныхъ знаковъ.

Итакъ, надо остановиться на первомъ предположеніи при

$$V_{2n}^{(r)}(x) V_{2n}^{(r')}(x) > 0$$

и на второмъ при

$$V_{2n}^{(r)}(x) V_{2n}^{(r')}(x) < 0.$$

Подобнымъ же образомъ рѣшается наша задача и въ остальныхъ случаяхъ, для которыхъ мы приведемъ здѣсь только окончательные выводы.

§ II. I. Если даны

$$\int_0^1 f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^1 y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^1 y^{2n-1} f(y) dy = \alpha_{2n-1}$$

и условіе

$$L > f(y) > 0,$$

то наименьшее значеніе интеграла

$$\int_0^x f(y) dy,$$

опредѣляется при

$$V_{2n}^{(r)}(x) V_{2n}^{(r')}(x) > 0$$

формулами

$$\frac{(z-x) P(z)}{z Q(z)} = 1 - \frac{\partial_1}{z - \frac{\partial_2}{1 - \dots - \frac{\partial_{2n-1}}{z - \frac{\partial_{2n}}{1 - \frac{\partial}{z}}}}}$$

$$\partial = \frac{x V_{2n}^{(r')}(x)}{V_{2n-1}^{(r)}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

а при

$$V_{2n}^{(r)}(x) V_{2n}^{(r')}(x) < 0$$

формулами

$$\frac{z(z-x) P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n-1}}{z - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c}{z}}}}}},$$

$$c = \frac{V_{2n}^{(r)}(x)}{V_{2n-1}^{(r')}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\}.$$

II. Если даны

$$\int_0^1 f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^1 y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^1 y^{2n} f(y) dy = \alpha_{2n}$$

и условие

$$L > f(y) > 0,$$

то наименьшее значение интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

опредѣляется при

$$V_{2n+1}^{(')} (x) \quad V_{2n+1}^{(')} (x) > 0$$

формулами

$$\frac{(z-x) P(z)}{Q(z)} = 1 - \frac{\partial_1}{z - \frac{\partial_2}{1 - \frac{\partial_3}{z - \dots - \frac{\partial_{2n}}{1 - \frac{\partial_{2n+1}}{z - \partial}}}}},$$

$$\partial = \frac{V_{2n+1}^{(')} (x)}{V_{2n}^{(')} (x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

а при

$$V_{2n+1}^{(')} (x) \quad V_{2n+1}^{(')} (x) < 0$$

формулами

$$\frac{(z-x) P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c_{2n+1}}{z - c}}}}},$$

$$c = \frac{x V_{2n+1}^{(')} (x)}{V_{2n}^{(')} (x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\}.$$

III. Если даны

$$\int_0^1 f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^1 y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^1 y^{2n-1} f(y) dy = \alpha_{2n-1}$$

и условие

$$L > f(y) > 0,$$

то наибольшее значение интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

опредѣляется при

$$U_{2n}^{(')} (x) \quad U_{2n}^{(')} (x) > 0$$

формулами

$$\frac{z P(z)}{(z-x) Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n-1}}{z - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c}{z}}}}}},$$

$$c = \frac{x U_{2n}^{(r)}(x)}{U_{2n-1}^{(r)}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ x + \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

а при

$$U_{2n}^{(r)}(x) U_{2n}^{(r')}(x) < 0$$

формулами

$$\frac{P(z)}{z(z-x) Q(z)} = 1 - \frac{\partial_1}{z - \frac{\partial_2}{1 - \dots - \frac{\partial_{2n-1}}{z - \frac{\partial_{2n}}{1 - \frac{\partial}{z}}}}},$$

$$\partial = \frac{U_{2n}^{(r')}(x)}{U_{2n-1}^{(r')}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ x + \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\}.$$

IV. Если даны

$$\int_0^1 f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^1 y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^1 y^{2n} f(y) dy = \alpha_{2n}$$

и условие

$$L > f(y) > 0,$$

то наибольшее значение интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

опредѣляется при

$$U_{2n+1}^{(r)}(x) U_{2n+1}^{(r')}(x) > 0$$

формулами

$$\frac{P(z)}{(z-x) Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c_{2n+1}}{z - c}}}}},$$

$$c = \frac{U_{2n+1}^{(r)}(x)}{U_{2n}^{(r)}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ x + \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\}$$

а при

$$U_{2n+1}^{(')} (x) U_{2n+1}^{(')} (x) < 0$$

формулами

$$\frac{P(z)}{(z-x) Q(z)} = 1 - \frac{\partial_1}{z - 1 - \frac{\partial_2}{1 - \frac{\partial_{2n}}{1 - \frac{\partial_{2n+1}}{z - \partial}}}}$$

$$\partial = \frac{x U_{2n+1}^{(')} (x)}{U_{2n}^{(')} (x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ x + \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\}.$$

§ 12. Во всѣхъ нашихъ разсужденіяхъ мы предполагали l числомъ конечнымъ.

Посмотримъ теперь, какъ надо измѣнить наши выводы для $l = \infty$.

Вопросъ о наименьшей величинѣ интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

рѣшается и для $l = \infty$, очевидно, прежними формулами, которыя приводятъ къ разложенію выраженія

$$\frac{1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{(z-y)^e}$$

въ непрерывную дробь

$$\frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \frac{c_3}{z - \dots}}}}$$

Вопросъ же о наибольшей величинѣ интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy$$

падаетъ, такъ какъ ее можно сдѣлать произвольно большою. Вмѣстѣ съ тѣмъ приходится отбросить функціи $U^{(n)}$ и $V^{(n)}$ и тѣ непрерывныя дроби, которыя такъ или иначе связаны съ ними.

Далѣе падаетъ вопросъ о наибольшей величинѣ интеграла

$$\int_0^l \Phi(y) f(y) dy$$

для всякой данной функции $\Phi(y)$, производная которой i -го порядка постоянно остается, въ промежуткѣ отъ $y=0$ до $y=l$, положительною; такъ какъ при нашихъ данныхъ этотъ интегралъ можно сдѣлать произвольно большимъ.

Вопросъ же о наименьшей величинѣ того же интеграла

$$\int_0^l \Phi(y) f(y) dy$$

рѣшается, очевидно по прежнему вмѣстѣ съ вопросомъ о наименьшей величинѣ интеграла

$$\int_0^l y^i f(y) dy.$$

Теорема III, въ виду сдѣланнаго въ ней предположенія

$$z > l,$$

теряетъ значеніе.

Но можно было сдѣлать другое предположеніе:

$$z < 0.$$

Останавливаясь на этомъ предположеніи и для удобства полагая

$$z = -t,$$

мы можемъ рядомъ съ теоремой III поставить слѣдующую, которая сохраняетъ свою силу и при $l = \infty$.

Теорема IV.

Если при

$$L > F(y) > 0 \quad \text{и} \quad t > 0$$

мы разложимъ выраженіе

$$\frac{-1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{t+y}$$

въ непрерывную дробь

$$\frac{1}{1 + \frac{c_1}{t + \frac{c_2}{1 + \frac{c_3}{t + \dots}}}},$$

то всѣ коэффициенты c будутъ числами положительными и можно написать неравенства

$$\frac{1}{1 + \frac{c_1}{t + \frac{c_2}{1 + \dots + \frac{c_{2n-1}}{t}}}} < \frac{-1}{L} \int_0^l \frac{F(y) dy}{t+y} < \frac{1}{1 + \frac{c_1}{t + \frac{c_2}{1 + \dots + \frac{c_{2n-1}}{t + c_{2n}}}}} \quad (30)$$

§ 13. Въ вопросѣ о предѣльныхъ величинахъ интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

надо обратить, при $l = \infty$, особое вниманіе на тѣ случаи, гдѣ наибольшимъ изъ всѣхъ введенныхъ въ § 10 чиселъ ξ и η является нѣкоторое ξ .

Это послѣднее ξ , конечно, надо принять равнымъ ∞ . Такимъ образомъ вмѣсто прежнихъ $i+2$ частей, на которыя дѣлятъ числа x , ξ и η промежутокъ отъ 0 до l , мы будемъ имѣть только $i+1$ частей, если не считать особенную часть между $\xi = \infty$ и $l = \infty$.

Отбросивъ часть между двумя безконечностями мы вынуждены условіе

$$\int_0^l y^{i-1} f(y) dy = \alpha_{i-1}$$

замѣнить неравенствомъ

$$\int_0^l y^{i-1} f(y) dy < \alpha_{i-1};$$

всѣ же остальные требованія остаются прежними.

Затѣмъ при изслѣдованіи возможности рѣшенія отпадаетъ требованіе, чтобы всѣ ξ и η не превосходили l , такъ какъ $l = \infty$.

Послѣ сдѣланныхъ нами замѣчаній нетрудно уже преобразовать результаты, относящіеся къ предѣльнымъ величинамъ интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

для l конечнаго, въ соотвѣтственные результаты для $l = \infty$, которые мы приводимъ ниже.

I. При условіяхъ

$$\int_0^\infty f(y) dy = \alpha_0, \int_0^\infty y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \int_0^\infty y^{2n-2} f(y) dy = \alpha_{2n-2}, \int_0^\infty y^{2n-1} f(y) dy \leq \alpha_{2n-1},$$

$$L > f(y) > 0,$$

наименьшая величина интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

опредѣляется формулами

$$\frac{z(z-x)P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c}{z}}}}},$$

$$c = \frac{V_{2n}^{(1)}(x)}{V_{2n-1}^{(1)}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

если

$$V_{2n}^{(r)}(x) V_{2n-1}^{(r)}(x) > 0,$$

и формулами

$$\frac{(z-x) P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n-1}}{z-c}}}},$$

$$c = \frac{c_{2n} x V_{2n-1}^{(r)}(x)}{x V_{2n-1}^{(r)}(x) - V_{2n}^{(r)}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

если

$$V_{2n-1}^{(r)}(x) V_{2n}^{(r)}(x) < 0.$$

II. При условіяхъ

$$\int_0^\infty f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^\infty y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^\infty y^{2n-1} f(y) dy = \alpha_{2n-1}, \quad \int_0^\infty y^{2n} f(y) dy \leq \alpha_{2n},$$

$$L > f(y) > 0,$$

наименьшая величина интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

опредѣляется формулами

$$\frac{(z-x) P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c_{2n+1}}{z-c}}}}},$$

$$c = \frac{x V_{2n+1}^{(r)}(x)}{V_{2n}^{(r)}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

если

$$V_{2n+1}^{(r)}(x) V_{2n}^{(r)}(x) > 0,$$

и формулами

$$\frac{z(z-x) P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c}{z}}}}},$$

$$c = \frac{c_{2n+1} V_{2n}^{(r)}(x)}{V_{2n}^{(r)}(x) - V_{2n+1}^{(r)}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

если

$$V_{2n+1}^{(r)}(x) - V_{2n}^{(r)}(x) < 0.$$

III. При условіяхъ

$$\int_0^\infty f(y) dy = \alpha_0, \int_0^\infty y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \int_0^\infty y^{2n-2} f(y) dy = \alpha_{2n-2}, \int_0^\infty y^{2n-1} f(y) dy \leq \alpha_{2n-1},$$

$$L > f(y) > 0,$$

наибольшая величина интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

опредѣляется формулами

$$\frac{z P(z)}{(z-x) Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c}{z}}}}},$$

$$c = \frac{x U_{2n}^{(r)}(x)}{U_{2n-1}^{(r)}(x)}, \int_0^x f(y) dy = L \left\{ x + \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

если

$$U_{2n}^{(r)}(x) - U_{2n-1}^{(r)}(x) > 0,$$

и формулами

$$\frac{P(z)}{(z-x) Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n-1}}{z - c}}}},$$

$$c = \frac{c_{2n} U_{2n-1}^{(r)}(x)}{U_{2n-1}^{(r)}(x) - U_{2n}^{(r)}(x)}, \int_0^x f(y) dy = L \left\{ x + \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

если

$$U_{2n}^{(r)}(x) - U_{2n-1}^{(r)}(x) < 0.$$

IV. При условіяхъ

$$\int_0^\infty f(y) dy = \alpha_0, \int_0^\infty y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \int_0^\infty y^{2n-1} f(y) dy = \alpha_{2n-1}, \int_0^\infty y^{2n} f(y) dy \leq \alpha_{2n},$$

$$L > f(y) > 0,$$

наибольшая величина интеграла

$$\int_0^x f(y) dy$$

опредѣляется формулами

$$\frac{P(z)}{(z-x) Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c_{2n+1}}{z-c}}}}},$$

$$c = \frac{U_{2n+1}^{(1)}(x)}{U_{2n}^{(1)}(x)}, \quad \int_0^\infty f(y) dy = L \left\{ x + \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

если

$$U_{2n+1}^{(1)}(x) U_{2n}^{(1)}(x) > 0,$$

и формулами

$$\frac{z P(z)}{(z-x) Q(z)} = \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n}}{1 - \frac{c}{z}}}}},$$

$$c = \frac{c_{2n+1} x U_{2n}^{(1)}(x)}{x U_{2n}^{(1)}(x) - U_{2n+1}^{(1)}(x)}, \quad \int_0^x f(y) dy = L \left\{ x + \sum_x \eta - \sum_x \xi \right\},$$

если

$$U_{2n+1}^{(1)}(x) U_{2n}^{(1)}(x) < 0.$$

Мы сохранили здѣсь обозначенія § 11.

§ 14. Опредѣленіе коэффициентовъ

$$c, \delta, \gamma, \delta,$$

по даннымъ числамъ α , не представляетъ никакихъ теоретическихъ затрудненій, но требуетъ довольно длинныхъ вычисленій.

Чтобы найти, напримѣръ, коэффициенты c можно поступать слѣдующимъ образомъ.

Сначала обращаемъ выраженіе

$$\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \frac{\alpha_2}{Lz^3} + \dots$$

е

въ рядъ

$$1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \dots,$$

коэффициенты β котораго послѣдовательно вычисляемъ по формуламъ

$$\left. \begin{aligned} L \beta_0 &= \alpha_0, \\ 2 L \beta_1 &= 2\alpha_1 + \alpha_0 \beta_0, \\ 3 L \beta_2 &= 3\alpha_2 + 2\alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_1, \\ 4 L \beta_3 &= 4\alpha_3 + 3\alpha_2 \beta_0 + 2\alpha_1 \beta_1 + \alpha_0 \beta_2, \\ 5 L \beta_4 &= 5\alpha_4 + 4\alpha_3 \beta_0 + 3\alpha_2 \beta_1 + 2\alpha_1 \beta_2 + \alpha_0 \beta_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (31).$$

Затѣмъ для разложенія ряда

$$1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \dots$$

въ непрерывную дробь

$$\frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \frac{c_3}{z - \dots}}}}$$

вычисляемъ, при $n = 1, 2, 3, \dots$, величины определителей

$$B_n = \begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-1} & \beta_n & \dots & \beta_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-1} & \beta_n & \beta_{n+1} & \dots & \beta_{2n-1} \end{vmatrix} \quad (32),$$

съ помощью которыхъ находимъ наконецъ коэффициенты c изъ такихъ формулъ

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= B_1, \quad c_2 = \frac{A_2}{B_1}, \quad c_3 = \frac{B_2}{B_1 A_2} \\ c_{2n} &= \frac{B_{n-1} A_{n+1}}{B_n A_n}, \quad c_{2n+1} = \frac{A_n B_{n+1}}{B_n A_{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (33)^*$$

§ 15. Однимъ изъ слѣдствій добытыхъ нами результатовъ является такая теорема.

*) Stieltjes. Recherches sur les fractions continues.

Теорема V.

Если рядъ

$$1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \dots$$

обращается въ непрерывную дробь вида (C):

$$\frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \frac{c_3}{z - \dots}}}} \quad (C)$$

съ положительными числителями c ; то должны быть положительными не только все его коэффициенты β , но и все коэффициенты α ряда

$$\frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_2}{z^3} + \dots,$$

въ который разлагается его логарифмъ:

$$\log \left(1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \dots \right).$$

Кромѣ того выраженія

$$\frac{z}{\beta_0} \log \left(1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \dots \right) \quad \text{и} \quad \left(1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \dots \right)^\mu,$$

при произвольномъ значеніи μ лежащемъ только между 0 и 1, должны разлагаться въ непрерывныя дроби того же вида (C) и также съ положительными числителями.

Пусть въ самомъ дѣлѣ

$$\begin{aligned} e^{\frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_2}{z^3} + \dots} &= 1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \frac{c_3}{z - \dots}}}} \end{aligned}$$

при чемъ всѣ числа

$$c_1, c_2, c_3, \dots$$

больше нуля.

Обозначимъ, подобно прежнему, черезъ

$$\frac{V_{2n}^{(r)}(z)}{U_{2n}^{(r)}(z)}$$

обыкновенную несократимую дробь равную

$$\frac{1}{1 - \frac{c_1}{z - \frac{c_2}{1 - \dots - \frac{c_{2n-1}}{z - c_{2n}}}}}$$

а корни уравненій

$$V'_{2n}(z) = 0 \quad \text{и} \quad U'_{2n}(z) = 0$$

соотвѣтственно черезъ

$$\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n \quad \text{и} \quad \eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_n.$$

Въ виду положительности чиселъ c , всѣ эти корни будутъ также числами положительными и расположатся въ возрастающемъ порядкѣ такъ:

$$\xi'_1 < \eta'_1 < \xi'_2 < \eta'_2 < \dots < \xi'_n < \eta'_n.$$

Съ другой стороны, на основаніи предыдущихъ изслѣдованій, нетрудно видѣть, что числа ξ' и η' должны быть связаны съ коэффициентами α уравненіями

$$\eta'_1 - \xi'_1 + \eta'_2 - \xi'_2 + \dots + \eta'_n - \xi'_n = \alpha_0$$

$$\eta_1'^2 - \xi_1'^2 + \eta_2'^2 - \xi_2'^2 + \dots + \eta_n'^2 - \xi_n'^2 = 2\alpha_1$$

.....

$$\eta_1^{2n} - \xi_1^{2n} + \eta_2^{2n} - \xi_2^{2n} + \dots + \eta_n^{2n} - \xi_n^{2n} = 2n\alpha_{2n-1}.$$

Здѣсь всѣ разности

$$\eta_l{}^{,k} = \xi_l{}^{,k}$$

больше нуля.

По этому и всѣ выраженія

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}$$

также больше нуля.

Такимъ образомъ, въ виду произвольности числа n , мы убѣждаемся въ положительности всѣхъ коэффициентовъ α .

Для доказательства второй части нашей теоремы замѣтимъ, что согласно разысканіямъ §§ 1, 2 и 3 дробь

$$\frac{V_{2n}^{(1)}(z)}{U_{2n}^{(1)}(z)}$$

дастъ рѣшеніе вопроса о наименьшей величинѣ интеграла

$$\int_0^\infty y^{2n} f(y) dy$$

при условіяхъ, выражаемыхъ равенствами

$$\int_0^\infty f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^\infty y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^\infty y^{2n-1} f(y) dy = \alpha_{2n-1}$$

и неравенствами

$$0 < f(y) < 1.$$

Слѣдовательно въ условіяхъ этого вопроса нѣтъ никакого противурѣчія.

А въ такомъ случаѣ не можетъ оказаться никакого противурѣчія въ условіяхъ и по замѣнѣ неравенствъ

$$0 < f(y) < 1$$

на неравенства

$$0 < f(y) < L,$$

если всѣ прочія условія останутся безъ измѣненія и данное число L больше единицы.

Что же касается вопроса о наименьшей величинѣ интеграла

$$\int_0^\infty y^{2n} f(y) dy,$$

когда даны

$$\int_0^\infty f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^\infty y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^\infty y^{2n-1} f(y) dy = \alpha_{2n-1}$$

и неравенства

$$0 < f(y) < L,$$

то его рѣшеніе при произвольномъ n сводится, какъ мы видѣли, къ разложенію въ непрерывную дробь вида (C) выраженія

$$e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \frac{\alpha_2}{Lz^3} + \dots} \quad \text{равнаго} \quad \left(1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \frac{\beta_2}{z^3} + \dots \right)^{\frac{1}{L}},$$

если L число конечное, и выраженія

$$1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0 z} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0 z^2} + \dots \text{ равнаго } \frac{z}{\beta_0} \log \left(1 + \frac{\beta_0}{z} + \frac{\beta_1}{z^2} + \dots \right),$$

если $L = \infty$.

Всѣ числители s этой непрерывной дроби, при $L > 1$, должны быть положительными; такъ какъ появленіе отрицательныхъ числителей s указывало бы на несовмѣстность нашихъ данныхъ:

$$\int_0^\infty f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^\infty y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^\infty y^{2n-1} f(y) dy = \alpha_{2n-1},$$

$$0 < f(y) < L,$$

а обращеніе одного изъ числителей s въ нуль указывало бы на исключительный случай, при которомъ условія

$$\int_0^\infty f(y) dy = \alpha_0, \quad \int_0^\infty y f(y) dy = \alpha_1, \dots, \quad \int_0^\infty y^{2n-1} f(y) dy = \alpha_{2n-1}$$

несовмѣстны съ неравенствами

$$0 < f(y) < 1.$$

Итакъ высказанная нами теорема доказана вполне.

§ 16. Въ заключеніе остановимся еще на томъ способѣ приближеннаго вычисленія интеграловъ, который вытекаетъ изъ нашихъ изслѣдованій.

Объ одномъ частномъ примѣненіи этого способа мы упомянули уже въ § 7 по поводу разложенія выраженій

$$\frac{1}{L} \int_0^L \frac{F(y) dy}{z-y} \quad \text{и} \quad \frac{-1}{L} \int_0^L \frac{F(y) dy}{z-y}$$

въ непрерывныя дроби.

Онъ состоитъ въ замѣнѣ вычисляемаго интеграла

$$\int_0^L F(y) \Phi(y) dy$$

интеграломъ

$$\int_0^L f_{\min} \Phi(y) dy \quad \text{или} \quad \int_0^L f_{\max} \Phi(y) dy,$$

который сводится къ суммѣ интеграловъ вида

$$L \int_0^\eta \Phi(y) dy, \quad L \int_\xi^\eta \Phi(y) dy, \quad L \int_\xi^l \Phi(y) dy.$$

Мы придерживаемся здѣсь обозначеній § 3, соединяя только ξ' и ξ'' въ одномъ знакѣ ξ , а η' и η'' въ одномъ знакѣ η .

Погрѣшность получаемой такимъ образомъ приближенной формулы легко выражается черезъ среднее значеніе соотвѣтствующей производной функции $\Phi(y)$, согласно результатамъ § 6.

Положимъ теперь

$$\Phi(y) = \varphi'(y) \quad \text{а} \quad F'(y) = g(y),$$

имѣя въ виду сблизить нашъ способъ приближеннаго вычисленія интеграловъ съ однимъ изъ способовъ, указанныхъ Чебышевымъ въ статьѣ *) «Sur les quadratures».

При установленныхъ нами обозначеніяхъ интегралъ

$$\int_0^l f(y) \Phi(y) dy$$

сводится къ суммѣ

$$M\varphi(l) - N\varphi(o) + L\Sigma\varphi(\eta) - L\Sigma\varphi(\xi),$$

гдѣ M и N равны 0 или L .

Съ другой стороны интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^l g(y) \varphi(y) dy = F(l) \varphi(l) - F(o) \varphi(o) - \int_0^l F(y) \Phi(y) dy.$$

Сопоставляя всѣ наши замѣчанія, нетрудно придти къ приближенной формулѣ вида

$$\int_0^l g(y) \varphi(y) dy = L' \varphi(l) - L'' \varphi(o) + L\Sigma\varphi(\xi) - L\Sigma\varphi(\eta) \quad (34),$$

гдѣ

$$L' = F(l) - M \quad \text{и} \quad L'' = F(o) - N.$$

Въ этой приближенной формулѣ $F(y)$ означаетъ какую нибудь положительную функцию, удовлетворяющую условію

$$F'(y) = g(y);$$

такъ что

$$F(y) = \int_0^y g(y) dy + C$$

*) Journal de Liouville, II Série XIX, 1874.

и постоянное C должно быть назначено согласно неравенству

$$\int_0^y g(y) dy + C > 0,$$

при всѣхъ значеніяхъ y , лежащихъ между 0 и l .

Затѣмъ число L ограничено неравенствомъ

$$L > \int_0^y g(y) dy + C,$$

при тѣхъ же значеніяхъ y .

Наконецъ, если буквою i обозначить по прежнему число величинъ ξ и η , входящихъ въ составъ приближенной формулы (34), то ея погрѣшность можно представить въ видѣ произведенія

$$K \varphi^{i+1}(\xi),$$

гдѣ K число постоянное, а ξ заключается между 0 и l .

Числа L' и L'' , вообще говоря, отличны отъ нуля и отъ $\pm L$.

Если же L' и L'' приводятся къ 0 или $\pm L$, наша формула становится по вышнему виду, совершенно одинаковою съ тою, которою занимается Чебышевъ въ §§ 7, 8, 9 и 10 вышеупомянутой статьи «Sur les quadratures».

Вся разниа состоитъ только въ величинѣ общаго множителя при значеніяхъ функціи $\varphi(y)$, взятыхъ по переменѣ со знаками $+$ и $-$.

Однако, благодаря измѣненію величины этого множителя, мы можемъ утверждать, что въ нашихъ вычисленіяхъ не встрѣтятся мнимыхъ чиселъ.

Для формулы же Чебышева вопросъ объ отсутствіи мнимыхъ чиселъ остается открытымъ.

Равнымъ образомъ намъ неизвѣстно, чтобы кто нибудь нашелъ выраженіе дополнительнаго члена этой формулы.

Числа L' и L'' могутъ обращаться въ нуль или $\pm L$ только въ тѣхъ случаяхъ, когда интегралъ

$$\int_0^l g(y) dy,$$

равенъ нулю или представляетъ одно изъ крайнихъ значеній интеграла

$$\int_0^y g(y) dy$$

при

$$0 < y < l.$$

Если интегралъ

$$\int_0^l g(y) dy$$

равенъ нулю, то для обращенія L' и L'' въ нуль или $\pm L$ мы должны положить

$$C = 0 \quad \text{или} \quad C = L.$$

Полагать

$$C = 0$$

можно только въ томъ случаѣ, если для всѣхъ значеній y , лежащихъ между 0 и l , имѣеть мѣсто неравенство

$$\int_0^y g(y) dy \geq 0.$$

Напротивъ приравнивать C числу L можно только въ томъ случаѣ, если

$$\int_0^y g(y) dy \leq 0$$

для всѣхъ значеній y , лежащихъ между 0 и l .

Числу же L , какъ при

$$\int_0^y g(y) dy \geq 0 \quad (0 < y < l)$$

такъ и при

$$\int_0^y g(y) dy \leq 0 \quad (0 < y < l),$$

мы должны дать значеніе не меньшее чѣмъ наибольшая изъ абсолютныхъ величинъ интеграла

$$\int_0^y g(y) dy$$

при

$$0 < y < l.$$

Итакъ, если

$$\int_0^l g(y) dy = 0$$

а интегралъ

$$\int_0^y g(y) dy,$$

въ промежуткѣ отъ $y = 0$ до $y = l$, сохраняетъ постоянно одинъ знакъ, то приближеннымъ образомъ мы можемъ представить интегралъ

$$\int_0^l g(y) \varphi(y) dy$$

въ видѣ суммы произведеній нѣкоторыхъ значеній функции $\varphi(y)$, въ промежуткѣ отъ $y = 0$ до $y = l$, на одно и то же число L , взятое по переменнѣ со знаками $+$ и $-$.

Это число L ограничено однимъ неравенствомъ

$$L^2 \geq \left\{ \int_0^y g(y) dy \right\}^2,$$

которое должно оправдываться при всѣхъ значеніяхъ y , въ промежуткѣ отъ $y=0$ до $y=l$.

Сдѣлаемъ теперь другое предположеніе :

$$\int_0^l g(y) dy = L,$$

которое влечетъ за собою равенство

$$C = 0$$

и возможно только въ томъ случаѣ, когда для всего промежутка отъ $y=0$ до $y=l$ величина интеграла

$$\int_0^y g(y) dy$$

лежитъ между 0 и L и достигаетъ значенія L при $y=l$.

Разсматривая при этихъ предположеніяхъ формулу (34), мы приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Если для всѣхъ значеній y , лежащихъ между 0 и l , имѣемъ

$$0 \leq \int_0^y g(y) dy \leq \int_0^l g(y) dy,$$

то приближеннымъ образомъ можемъ представить интегралъ

$$\int_0^l g(y) \varphi(y) dy$$

въ видѣ суммы произведеній нѣкоторыхъ значеній функции $\varphi(y)$, въ промежуткѣ отъ $y=0$ до $y=l$, на величину интеграла

$$\int_0^l g(y) dy$$

взятую по переменнѣ съ знакомъ $+$ и $-$.

Прибавимъ, что за нижній предѣлъ разсматриваемыхъ нами интеграловъ можно вмѣсто нуля взять любое другое число.

§ 17. Пусть, напримѣръ,

$$g(y) = y$$

и намъ надо вычислить интегралъ

$$\int_{-1}^{+1} g(y) \varphi(y) dy = \int_{-1}^{+1} y \varphi(y) dy.$$

Тогда

$$\int_{-1}^{+1} g(y) dy = \int_{-1}^{+1} y dy = 0$$

и

$$\int_{-1}^y g(y) dy = \int_{-1}^y y dy = \frac{y^2 - 1}{2}.$$

Соотвѣтственно этому можемъ положить

$$C = L = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad F(y) = \frac{y^2}{2},$$

связывая приближенное выраженіе разсматриваемаго интеграла съ разложениемъ въ непрерывную дробь одной изъ слѣдующихъ четырехъ функций отъ z :

$$e^{\int_{-1}^{+1} \frac{y^2 dy}{z-y}}, \quad \frac{z-1}{z+1} e^{\int_{-1}^{+1} \frac{y^2 dy}{z-y}}, \quad \frac{1}{z+1} e^{\int_{-1}^{+1} \frac{y^2 dy}{z-y}}, \quad (z-1) e^{\int_{-1}^{+1} \frac{y^2 dy}{z-y}}.$$

Мы не будемъ останавливаться на всѣхъ этихъ непрерывныхъ дробяхъ, а ограничимся только первыми звеньями одной изъ нихъ:

$$\frac{z-1}{z+1} e^{\int_{-1}^{+1} \frac{y^2 dy}{z-y}} = 1 - \frac{\frac{4}{3}}{z + \frac{2}{3} - \frac{\frac{7}{135}}{z - \frac{\frac{2612}{6615}}{z - \dots}}}$$

Ея подходящимъ дробямъ

$$\frac{z - \frac{2}{3}}{z + \frac{2}{3}} \quad \text{и} \quad \frac{z^2 - \frac{2}{3}z - \frac{7}{135}}{z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{7}{135}}$$

соотвѣтствуютъ такіа формулы

$$\int_{-1}^{+1} y \varphi(y) dy = \frac{1}{2} \left\{ \varphi\left(\frac{2}{3}\right) - \varphi\left(-\frac{2}{3}\right) \right\} + \frac{7}{405} \varphi'''(\xi_0)$$

и

$$\int_{-1}^{+1} y \varphi(y) dy = \frac{1}{2} \{ \varphi(z_1) - \varphi(z_2) + \varphi(z_3) - \varphi(z_4) \} + A \varphi^v(\xi),$$

гдѣ

$$z_1 = -z_4 = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{22}{135}} = 0,73702....$$

$$z_2 = -z_3 = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{22}{135}} = 0,07035....$$

$$A = \frac{1306}{2296350}$$

и наконецъ

$$\zeta_0 \text{ и } \zeta_1$$

нѣкоторыя среднія числа между -1 и $+1$.

Для другого примѣра возьмемъ интеграль

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(y) dy,$$

гдѣ

$$g(y) = 1.$$

Въ такомъ случаѣ, для полученія формулъ желаемого вида, надо положить

$$L = \int_{-1}^{+1} g(y) dy = 2, \quad F(y) = \int_{-1}^y g(y) dy = 1 + y$$

и разлагать въ непрерывныя дроби слѣдующія выраженія

$$e^{\int_{-1}^{+1} \frac{(1+y) dy}{2(z-y)}}, \quad \frac{z-1}{z+1} e^{\int_{-1}^{+1} \frac{(1+y) dy}{2(z-y)}}, \quad \frac{1}{z+1} e^{\int_{-1}^{+1} \frac{(1+y) dy}{2(z-y)}}, \quad (z-1) e^{\int_{-1}^{+1} \frac{(1+y) dy}{2(z-y)}}.$$

Ограничиваясь опять первыми звеньями одной изъ этихъ непрерывныхъ дробей, получаемъ

$$(z-1) e^{\int_{-1}^{+1} \frac{(1+y) dy}{2(z-y)}} = z - \frac{\frac{1}{6}}{z - \frac{\frac{13}{60}}{z - \frac{\frac{3821}{16380}}{z - \frac{\frac{3005293}{(3276)(3821)}}{z - \dots}}}}$$

и соотвѣтственно подходящимъ дробямъ

$$z, \quad \frac{z^2 - \frac{1}{6}}{z}, \quad \frac{z \left(z^2 - \frac{23}{60} \right)}{z^2 - \frac{13}{60}}$$

можемъ написать такія формулы

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(y) dy = 2\varphi(0) + \frac{1}{3} \varphi''(\xi_0),$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(y) dy = 2 \left\{ \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) - \varphi(0) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}\right) \right\} + \frac{13}{1080} \varphi^{IV}(\xi_1),$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(y) dy = 2 \left\{ \varphi\left(\sqrt{\frac{23}{60}}\right) - \varphi\left(\sqrt{\frac{13}{60}}\right) + \varphi(0) - \varphi\left(-\sqrt{\frac{13}{60}}\right) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{23}{60}}\right) \right\} + A \varphi^{VI}(\xi),$$

гдѣ

$$A = \frac{3821}{360.75600},$$

а ξ_0 , ξ_1 и ξ нѣкоторыя среднія числа между -1 и $+1$.