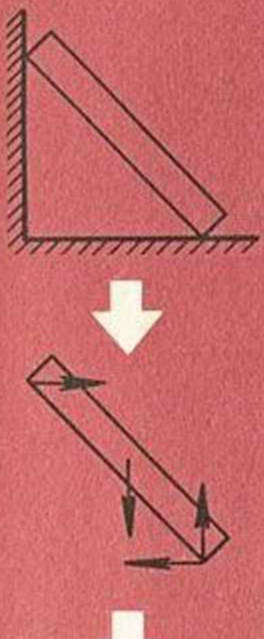
В. И. ГУТМАН
В. Н. МОЩАНСКИЙ

АЛГОРИТМЫ решения задач по механике в средней школе

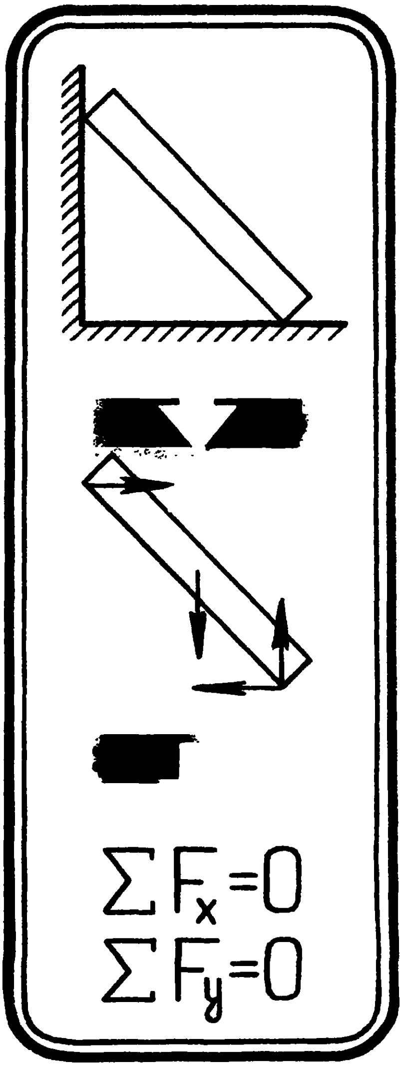


$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

«ПРОСВЕЩЕНИЕ»

В. И. ГУТМАН
В. Н. МОЩАНСКИЙ

АЛГОРИТМЫ решения задач по механике в средней школе



«ПРОСВЕЩЕНИЕ»

ББК 74.265.1
Г97

Рецензенты:
учитель физики средней школы № 16 Москвы *Г. А. Полякова,* учитель *А. З. Синяков*

Гутман В. И., Мощанский В. Н.

Г97 Алгоритмы решения задач по механике в средней школе: Кн. для учителя.— М.: Просвещение, 1988.— 95 с.: ил.

ISBN 5-09-000214-2

В книге сформулированы дидактически обоснованные требования к конструированию алгоритмов решения задач по механике и даны методические рекомендации по использованию алгоритмического подхода к решению задач на уроках физики.

$Г \frac{4306010000-262}{103(03)-88}$ 139—88 ББК 74.265.1

ISBN 5-09-000214-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное методическое пособие преследует цель показать, в чем состоит алгоритмический подход к решению задач по курсу механики VIII класса, какими могут быть алгоритмы решения механических задач и как их использовать для формирования у школьников умений решать задачи по механике. Мы пытались сконструировать такие алгоритмы, которые отвечали бы требованиям механики как науки, позволяли бы решать все задачи того класса, для которого предназначен алгоритм, и которые были бы дидактически оправданными и обоснованными. Последнее означает, что требования, предъявляемые к алгоритмам в математических науках, пришлось скорректировать и дополнить с учетом дидактических соображений. В результате этого получились не алгоритмы в строгом смысле слова, а предписания алгоритмического типа, предназначенные для обучения школьников методам решения механических задач. Реализация этих намерений породила у нас надежду на то, что наши рекомендации в основном не повторяют тех, которые имеются в методической литературе.

Использование алгоритмов во многом рационализирует и облегчает процесс формирования у школьников умений решать физические задачи. Может быть, использование алгоритмов в обучении физике будет даже способствовать осознанию школьниками важного в современной науке понятия «алгоритм» и тем самым содействовать решению задачи всеобщей компьютерной грамотности, которая поставлена перед системой народного образования.

В первом разделе пособия рассматриваются общие вопросы использования алгоритмического подхода к решению физических задач и даются рекомендации по составлению алгоритмов и методике их использования в обучении физике в школе. В последующих разделах формулируются алгоритмы по всем темам школьного курса механики, показывается, на каких задачах можно обосновать алгоритмы и на каких обучать школьников их применению.

Структура этих разделов такова. Вначале определяется круг тех теоретических знаний, которые должны быть усвоены учащимися для успешного овладения методом решения задач данного класса. В ряде случаев при этом делаются методические замечания об изложении тех или иных понятий и законов в школьном курсе физики, позволяющие понять те трактовки, которые будут далее использоваться при формулировке алгоритмов.

Далее рассматриваются основные трудности и типичные ошибки, которые обнаруживаются в процессе усвоения учащимися основных понятий и законов данной темы и мешают успешному овладению методом решения задач данного класса.

После этого выделяются основные типы задач по тому или иному разделу школьного курса механики; при этом последовательность этих типов задач мы старались привести в соответствие с последовательностью изложения материала, предусмотренной программой по физике для средней школы. Надо иметь в виду, что мы вовсе не пытались дать строгую классификацию задач, а просто старались внести логику в последовательность задач, решаемых на уроке (эта логика задается структурой механики как науки и дидактическими соображениями).

Такова вводная методическая часть в каждом разделе данного пособия. Вслед за этим рассматривается решение одной-двух задач, на которых может быть сконструирован алгоритм на уроках физики, дается его формулировка, после чего рассматривается решение задач, преследующих цель научить школьников использовать алгоритм. Каждая из задач позволяет конкретизировать и дополнить предписания алгоритма частными рекомендациями, показывающими, как надо выполнять то или иное предписание.

Это последнее связано с тем, что в качестве одной из своих главных целей мы видели составление таких алгоритмов, которые бы выражали лишь основные черты метода решения задач данного класса, позволяли бы школьникам правильно определить общее направление поиска плана решения задачи и оставляли бы возможности для самостоятельной мыслительной деятельности учащихся.

В число задач, решение которых приводится в каждом разделе, мы старались включить прежде всего те, на которых можно непосредственно обосновать алгоритм на уроке, поэтому обойтись без общеизвестных задач не представлялось возможным. Последовательность задач, как правило, соответствует той, которой целесообразно придерживаться для обучения применению алгоритма. Среди задач есть и такие, которые по степени своей сложности могут быть решены только на факультативных занятиях.

В конце каждого раздела приводятся те частные дополнения, которые могут быть сделаны к алгоритму по мере решения ряда задач.

Пособие написано в соответствии с новой программой по физике для средней школы. Правда, раздел «Статика» исключен из курса физики второй ступени. Однако на факультативных занятиях задачи по статике, конечно, должны решаться, поэтому, а также учитывая практическую важность этого раздела и данного класса задач, мы сочли необходимым рассмотреть и алгоритм решения задач по статике, что обеспечивает целостность раскрытия всех методов решения задач по механике.

Пособие написано на основе многолетнего опыта преподавания механики в школе и в вузе и обобщения опыта использования алгоритмов в обучении учителями физики г. Пскова и Псковской области. Нам помог опыт работы наших коллег: Э. М. Марголина, А. В. Постникова, В. И. Сосновского, К. В. Любимова, В. М. Чиганашкина, Р. Я. Кроликовой и многих других. Пользуясь случаем, мы выражаем им глубокую благодарность.

Очень многое как в конструировании алгоритмов, так и в практической проверке методики их использования на уроках физики сделала Галина Федоровна Мощанская, светлой памяти которой авторы и посвящают эту книгу.

§ 1. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Известно, что усвоение знаний происходит в процессе их применения — вначале в ситуации, сходной с той, что использовалась учителем при объяснении, а затем в новых ситуациях. Решение физических задач является одним из средств, обеспечивающих применение, перенос знаний, а потому и их усвоение. Не может учащийся усвоить законы Ньютона, пока он многократно не поупражняется в поиске взаимодействующих тел, сил, характеризующих взаимодействие, в нахождении их равнодействующей и обусловленного ею ускорения. С другой стороны, и решение задач не может быть успешным без знания некоторых теоретических положений и выражающих их уравнений, которые, прежде чем применять, надо знать (все это очень взаимосвязано).

Решение задач по праву считается одним из средств развития мышления. Но не всякая задача и не всякая организация ее решения в классе способствует развитию мыслительных способностей. Ни задача на подстановку в формулу числовых значений (хотя поначалу и такие очень нужны), ни непосильные для большинства в классе задачи не разовьют мышления (равно как и решение задачи одним учеником у доски, когда класс просто копирует написанное). Здесь очень важен дидактически обоснованный подбор системы задач и формы организации их решения на уроке.

К сожалению, опыт показывает, что многие учащиеся и выпускники школ испытывают большие трудности в решении даже стандартных типовых задач. Отсутствие у школьников умений решать задачи (и это, может быть, самое плохое) создает у них отрицательное отношение к физике, разрушает интерес, подрывает веру в собственные силы.

Причин, объясняющих неумение школьников решать задачи, много. Это и перегрузка школьного курса физики учебным материалом, не позволяющая выделить достаточное время на тренировку и упражнения; и наблюдающаяся еще в практике бессистемность в подборе задач, проявляющаяся в том, что учащимся предлагается случайный набор задач, не соответствующий необходимому переходу от простого к сложному, от одного типа к другому; и просто стремление отдельных учителей задавать на дом побольше задач в надежде, что большое число решаемых задач автоматически сформирует нужные умения. Мало пользы приносит и такая организация решения задач на уроке, когда учащиеся один за другим решают задачи у доски, а класс находится в позиции молчаливого созерцателя. Нельзя признать, что и в методике физики проблема формирования умений решать задачи и использовать их для углубления и конкретизации знаний решена достаточно успешно. Существует ряд полезных методических пособий и статей по данной проблеме (работы С. Е. Каменецкого и В. П. Орехова, А. В. Усовой, Н. Н. Тулькибаевой, В. И. Сосновского, К. В. Любимова, О. Ф. Кабардина, В. А. Орлова, А. В. Пономаревой, Э. Е. Эвенчик, Х. Ф. Таммета, В. В. Карнеля, В. И. Лукашика, А. П. Рымкевича и ряда других). Однако нельзя считать, что методикой физики определена система работы учителя по формированию у школьников умений решать задачи.

Главная же причина, приводящая к тому, что многие учащиеся не умеют решать типовые стандартные задачи, состоит в том, что школьники не учатся зачастую методам решения задач, а просто пытаются их решать путем проб и ошибок, стремясь найти подходящую формулу, ведущую к ответу. Методы же решения отдельных классов задач могут быть выражены в форме алгоритмов.

Алгоритм можно понимать как систему предписаний, последовательное выполнение которых позволяет решить все задачи, относящиеся к определенному классу. О пользе алгоритмов ныне много говорится и пишется, и многие учителя с успехом используют их для обучения школьников умениям решать задачи. Однако результаты контрольных работ в школах и вступительных экзаменов в вузах свидетельствуют о том, что во многих школах учащиеся не слышали об алгоритмах и не владеют даже элементарными приемами рассуждений при решении наиболее распространенных типовых задач, т. е. богатейшие возможности, заложенные в алгоритмическом подходе к решению задач, в практике работы школ зачастую не используются. Это связано с тем, что хотя и изредка, но встречаются возражения против использования алгоритмов, а среди их сторонников нет единства в вопросе о том, какими должны быть алгоритмы решения отдельных типов задач.

Иногда считают, что для того, чтобы приучить школьников к использованию алгоритмов, требуется значительное время, а его у учителя физики всегда не хватает. Действительно, без затрат времени на обучение использованию алгоритмов не обойдешься, но эти затраты времени в начальный период введения алгоритмов потом сторицей окупаются, как окупается снижение уровня производительности при внедрении новой техники той более высокой производительностью и более высоким качеством продукции, которая достигается в конечном итоге в результате модернизации. Бояться затрат времени на обучение алгоритмическому подходу — значит оставаться в рамках старых методов, не дающих хороших результатов.

Возражения против алгоритмов иногда опираются на то, что алгоритм приучает действовать по образцу, а ныне ставится задача формирования творческого мышления. С такой точкой зрения тоже нельзя согласиться. Польза алгоритмов несомненна и состоит в следующем.

Во-первых, решение задач по алгоритму — вовсе не механический процесс, не требующий мышления. Ведь в процессе алгоритмического решения задачи учащийся должен распознать класс, к которому относится данная задача, т. е. в результате сравнения новой задачи с ранее решенными он должен обнаружить общность, сходство задач и лишь потом выбрать нужный алгоритм. Применение алгоритма требует конкретизации знаний, переноса знаний на сходную или новую ситуацию, а это учит школьника думать.

Во-вторых, в обучении физике используются, строго говоря, не алгоритмы, а предписания алгоритмического типа. Это значит, что система таких предписаний не регламентирует жестким образом буквально всех действий, которые надо осуществить, чтобы с неизбежностью получить верное решение (полная система предписаний, образующая алгоритм в строгом смысле слова, должна содержать не один десяток пунктов и вряд ли, действительно, была бы полезна). Следовательно, в предписаниях алгоритмического типа, которые мы лишь условно называем алгоритмами, даются указания, определяющие лишь общие направления поиска плана решения задачи и оставляющие обширные возможности для самостоятельного решения учащимися ряда вопросов. Каждое предписание лишь указывает, что надо делать, а вот как делать — учащийся должен решать сам, и тут есть над чем подумать — и немало подумать. Вот только такие алгоритмы мы и считаем полезными и в их составлении видели свою главную задачу.

В-третьих, польза алгоритмов состоит в том, что алгоритмический метод подготавливает учащихся к решению и творческих задач, так как в алгоритмическом решении типовых задач формируются те мыслительные действия и умения, которые затем с автоматизмом навыка будет выполнять учащийся, переходя от решения типовых задач к творческим (подобно тому, как летчик-испытатель высшего класса не задумываясь выполняет те стандартные операции, которым он когда-то на первых шагах своего обучения летному делу выучился по предписаниям алгоритмического типа). Развитие мышления осуществляется по ступеням, «перепрыгивать» через которые — значит вредить процессу формирования умственных умений. И ставя цель формирования творческого мышления, надо начать с формирования простейших мыслительных действий и умений: тут, как и везде, «большие скачки» могут принести только вред.

В-четвертых, польза алгоритмов в том, что они облегчают школьникам процесс овладения умениями решать задачи и позволяют научить всех учащихся, а не избранных, решать типовые задачи, так как учить решать задачи — это учить методу рассуждений, а алгоритмы как раз и задают метод.

В-пятых, использование понятия «алгоритм» на уроках физики позволяет постепенно приучать школьников к этому важному понятию, без которого невозможно решить поставленную перед народным образованием задачу обеспечения всеобщей компьютерной грамотности молодежи.

И последнее о пользе алгоритмов. Их применение учащимися, помогая им научиться решать задачи, создает у них уверенность в своих силах и способностях, что крайне важно в деле обучения.

Таким образом, не считая алгоритмы панацеей от всех бед, надо признать, что обучение решению задач по алгоритмам есть одна из первых ступеней формирования умений решать задачи вообще, и с нее надо начинать формирование этих умений, постепенно переходя к решению нестандартных творческих задач. В них учащиеся тоже будут пользоваться алгоритмическими предписаниями, но это будет делаться уже автоматически, в результате чего ум будет «освобожден» для выполнения творческих действий.

Какими должны быть алгоритмы решения физических задач?

Когда речь идет об алгоритме в строгом смысле слова, то считается, что каждое предписание должно быть элементарным, т. е. содержать указания на выполнение одного простейшего действия, а весь набор предписаний должен быть таким, чтобы он позволял решать все задачи данного класса. Следовательно, элементарность каждого предписания и полнота набора предписаний — это два важнейших требования, предъявляемых к алгоритмам вообще.

Однако если речь идет об алгоритмах решения задач, т. е. фактически не об алгоритмах в строгом смысле слова, а о предписаниях алгоритмического типа, то указанные требования должны быть оценены дидактически. Допустим, мы хотим полностью выполнить требование элементарности предписания, составляя алгоритм решения динамических задач. Начинать их решение надо с выбора системы отсчета. Выбор системы отсчета предполагает выбор тела отсчета, начала системы координат, положительного направления осей и момента времени, принимаемого за начальный, т. е. в целом выполнения четырех операций. Далее надо найти силы, действующие на тело, что также должно быть регламентировано в виде нескольких указаний. Очевидно, что в целом при таком подходе получится алгоритм, содержащий не один десяток предписаний. Такой алгоритм будет дидактически неоправдан по двум соображениям. Во-первых, он будет громоздким и его трудно запомнить учащимся (а в конечном счете алгоритм должен прочно удерживаться в памяти). Во-вторых, мелочное регламентирование всех действий учащегося ограничивает возможности самостоятельной мыслительной деятельности. Следовательно, по дидактическим соображениям требование элементарности предписаний не может быть выполнено в полной мере, и можно говорить лишь о необходимости относительной элементарности предписаний. Необходимость же удержания алгоритмов в памяти (а без этого учащийся не может им пользоваться) приводит к выдвижению другого требования: алгоритм должен быть лаконичным, во всяком случае он должен содержать не более десятка предписаний. Это требование выполнить нелегко, о чем свидетельствуют алгоритмы, приводимые в некоторых методических работах и содержащие более двух десятков предписаний.

Лаконичность алгоритмов может быть достигнута прежде всего за счет такой формулировки предписаний, при которой в них указывается лишь общее направление поиска плана решения задачи, без мелочной регламентации буквально всех действий. И именно такие предписания, как указывалось выше, облегчая учащимся решение задачи, предоставляют большие возможности для самостоятельной мыслительной работы и задают метод решения в общем виде, в его основных чертах.

Громоздкими алгоритмы получаются тогда, когда в число предписаний включаются пункты общего плана решений любой физической задачи (типа — изучить и записать условие, выполнить чертеж и т. д.). Этот план содержит около десятка пунктов, к которым надо добавить еще предписания, специфичные для решения данного класса задач. Чтобы выполнить требование лаконичности, следует не включать в алгоритм элементы общего плана решения любой физической задачи и ограничиться лишь теми предписаниями, которые специфичны для данного класса задач.

Сказанное не означает недооценки роли общего плана решения любой физической задачи. Этот план учащиеся должны знать, надо приучить их пользоваться этим планом при решении любой задачи вне зависимости от того, решается ли она алгоритмически, или нет (в последнем случае этот план особенно важен).

Итак, к числу основных требований, предъявляемых к алгоритму решения физических задач, надо отнести следующие:

1) алгоритм должен быть лаконичным;

2) каждое предписание должно быть по возможности относительно элементарным;

3) набор предписаний должен обладать такой степенью полноты, чтобы на его основе можно было решать достаточно широкий, законченный класс задач;

4) каждое предписание и вся система должны выражать самые существенные операции, необходимые для решения данного класса задач, и тем самым выражать основные черты метода решения этих задач, оставляя возможности для самостоятельной мыслительной работы учащихся.

Так как, по нашему мнению, от алгоритмов надо отличать общий план решения любой физической задачи и не включать в алгоритм его элементы, то об этом плане следует сказать особо (тем более, что по поводу него есть разные точки зрения).

Возможный вариант этого плана сводится к следующему:

1. Изучение условия задачи.
2. Запись условия в буквенных обозначениях.
3. Выполнение чертежа, схемы.
4. Анализ физических процессов, происходящих в ситуации, описанной в условии, и выявление тех законов, которым подчиняются эти процессы. Составление плана решения.
5. Запись уравнений законов и решение полученной системы уравнений относительно искомой величины с целью получения ответа в общем виде.
6. Исследование полученного решения в общем виде.
7. Выражение всех величин в единицах СИ.
8. Проверка решения путем действий над единицами измерения величин.
9. Подстановка числовых значений величин с наименованиями их

единиц в формулу для нахождения ответа и вычисление искомой величины.

10. Оценка разумности и достоверности полученного результата.

Учащиеся должны быть приучены решать все задачи по этому плану и твердо знать эту последовательность действий. Однако, как уже отмечалось, этот набор предписаний не является алгоритмом. Дело в том, что алгоритм рассчитан на узкий класс задач, план же решения используется при решении любой физической задачи (хотя и не во всякой задаче при ее решении реализуются буквально все пункты плана — например, не всегда нужен чертеж). Кроме того, знание алгоритма в большей мере предопределяет успех решения, нежели знание плана.

Поскольку в литературе по методике физики можно найти планы решения задачи, несколько отличающиеся от данного, прокомментируем отдельные этапы этого плана.

Изучение условия состоит в неоднократном чтении текста задачи с целью уяснения того, что требуется найти, что известно, какие табличные данные могут потребоваться, в чем смысл допущений в условии задачи (например, что значит «нить невесома и нерастяжима»). Условие можно считать изученным, если учащийся может передать содержание задачи своими словами. Хотелось бы подчеркнуть, что, как показывает опыт, часто учащийся не может решить задачу потому, что он не усвоил ее содержание.

Форма записи условия может быть разной. Мы предпочитаем использовать самую простую, не требующую лишних слов типа «дано», «найти». Вначале слева записывается искомая величина, а под отделяющей ее горизонтальной чертой записываются известные величины, и вся запись отделяется вертикальной чертой. Такая форма записи заставляет учащегося прежде всего видеть искомую величину и позволяет по ходу решения дописывать в условие недостающие табличные данные.

Перевод величин в одну систему единиц можно отнести на дальнейшее. Как бы важен ни был этот шаг решения, все же самое главное — это получить решение в общем виде, а потому следует прежде всего заняться поиском решения, а не переводом единиц, который может отвлечь учащегося от главного.

А главным в решении является анализ процессов, происходящих в ситуации, описанной в условии задачи, и надо приучить учащегося к тому, чтобы он прежде всего выяснил процесс, описанный в условии в явном или неявном виде, так как если установлен физический процесс, то можно решить, какой физический закон его описывает. Если сказано, например, что тело движется с постоянным ускорением, то ясно, что движение равнопеременное, значит, перемещение меняется по квадратичному, а скорость — по линейному закону. Если в условии сказано, что запаянная с одного конца трубка медленно опускается открытым концом в воду, то ясно, что воздух в трубке сжимается и осуществляется изотермический процесс, а значит, применим закон Бойля — Мариотта. Приучая школьников к необходимости в первую очередь выявить физический процесс, происходящий в ситуации, описанной в условии, мы предотвращаем то бездумное манипулирование случайно приходящими на ум формулами, которое так часто наблюдается, когда учащийся решает задачу. При составлении плана решения выясняется, какие тела описаны в условии, какие явления с ними происходят, какие величины их описывают и какими уравнениями они связаны.

Исследование решения в общем виде не всегда можно осуществить, и тем не менее следует учащихся приучать к тому, чтобы они посмотрели на итоговую формулу и поискали, что из нее следует, какие частные случаи возможны и т. д. Например, если дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, зависит от синуса двойного угла бросания, то отсюда следует, что максимальная дальность полета будет при угле $\alpha = 45°$.

Опыт показывает, что учащиеся, получив ответ задачи, не задумываются над тем, как он соотносится с жизненным опытом, с реальностью. Так, получив, что сила тока в комнатной проводке равна 1000 А, ученик может спокойно записать это в ответе. Или, подсчитав по условию задачи мощность двигателя мотоцикла, учащийся может, не усомнясь в результате, записать значение мощности 100 кВт. Приучение к оценке реальности ответа делает знания по физике жизненными, и этим никак нельзя пренебрегать.

Если к работе по этому плану учащиеся приучены, то при введении алгоритмов они им успешно пользуются; хотя элементы этого плана не входят в алгоритм, но ряд из них необходим и при алгоритмическом решении задач (например, такие пункты плана, как 1, 2, 3, 6—10).

Успех обучения алгоритмическому способу решения задач во многом зависит от того, как вводится алгоритм. Алгоритм не должен механически навязываться учащимся. На основании решения двух-трех задач данного класса учащиеся под руководством учителя должны сами обнаружить общность логики рассуждений при решении этих задач, вычленить операции, из которых складывается метод решения, и относительно самостоятельно сконструировать алгоритм. После этого решаются одна-две задачи на доске для того, чтобы учащиеся научились сознательно выполнять каждую операцию. В дальнейшем методические формы решения задач должны обеспечить увеличение самостоятельности учащихся. Полезно использовать следующие формы организации решения задач на уроке:

а) объяснение решения задачи учителем методом беседы (так решаются задачи нового типа);

б) решение задачи на доске одним из учащихся с привлечением к ходу решения всего класса;

в) коллективное обсуждение хода, плана решения задачи всем классом с последующим самостоятельным выполнением решения в тетрадях всеми учащимися;

г) относительно самостоятельное решение задачи всеми учащимися класса с комментированием некоторых наиболее трудных шагов решения учащимися и указаниями учителя отдельным учащимся;

д) совершенно самостоятельное решение учащимися задачи с последующей устной или письменной проверкой решения.

Очевидно, каждая последующая форма организации решения задачи в классе предусматривает более высокий уровень самостоятельности учащихся. Использование всех этих разнообразных форм очень полезно для обучения школьников методам решения задач. Во всяком случае очень распространенное ранее в практике преподавания решение задачи одним учащимся на доске без привлечения класса к работе выглядело бы сейчас безнадежно архаично. По мере повышения степени самостоятельности учащихся в решении задач данного типа происходит запоминание алгоритма и его окончательное усвоение. При этом происходит «свертывание алгоритма», т. е. некоторые шаги решения учащиеся могут выполнять устно (например, устно находить алгебраические значения проекций векторов), запись решения при этом сокращается.

Успех в обучении школьников алгоритмическому способу решения задач зависит от того, насколько последовательно приучает их учитель к использованию алгоритма. На первых шагах этой работы надо требовать от учащихся неукоснительного выполнения каждого предписания и использования в заданной последовательности. Только в результате этого учащиеся через некоторое время убеждаются в большой пользе алгоритмов и обретают уверенность в своих возможностях решать задачи.

По мере того как по введенному алгоритму решается ряд задач, возникает необходимость в частных дополнениях и комментариях, поясняющих, как выполнять то или иное предписание (например, как рационально выбирать систему отсчета, как находить силы, действующие на тело, и их направление). Эти дополнения, как и сами алгоритмы, следует записывать в тетрадях.

Подбор задач по теме с целью упражнений в применении алгоритмов должен быть таким, чтобы каждая задача учила тому, как выполнять то или иное предписание, и давала возможность сделать конкретизирующее дополнение к отдельным предписаниям, т. е. каждая задача должна учить чему-то новому в использовании алгоритма (этим и продиктованы подбор и последовательность задач, приводимых в последующих параграфах пособия).

Алгоритмы могут быть составлены, конечно, не по всем разделам курса физики. Наиболее легко могут быть алгоритмизированы методы решения задач по всем разделам курса механики VIII класса, по калориметрии, по расчетам электрических цепей на основе уравнений Кирхгофа. В данной работе рассматриваются только алгоритмы решения задач по курсу механики VIII класса. В связи с этим сделаем одно замечание, относящееся к решению всех задач по механике и необходимое для понимания последующих разделов данного пособия.

При решении задач по механике часто используются уравнения законов в векторной форме, поэтому крайне важно научить школьников оперированию с векторными величинами. В частности, надо систематически обращать внимание учащихся на то, что в уравнения в векторной форме нельзя подставлять числовые значения величин и производить расчеты. Надо приучать школьников к тому, что нельзя бездумно убирать стрелки в векторном уравнении (ведь уравнения $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ и $F=F_1+F_2$ отнюдь не тождественны), равно как нельзя бездумно и ставить стрелки по формальным соображениям. Так, учащиеся иногда считают, что так как сила — вектор, а произведение вектора на скаляр дает вектор, то можно, например, написать: $\vec{F}_{\text{тр}}=\mu\vec{N}$. Следует обратить внимание учащихся на то, что формально-математический подход к написанию формул в физике недопустим, так как возможность той или иной трактовки уравнения в физике определяется опытом; опыт же говорит нам о том, что векторы силы трения и силы нормального давления не могут быть направлены одинаково.

Для произведения расчетов надо перейти от векторной формы записи уравнений к скалярной по определенному правилу. Суть этого правила может быть разъяснена следующим образом.

Рассматривая в VIII классе («Физика-8».— М., 1986, И. К. Кикоина, А. К. Кикоина) проекции векторов на оси, мы показываем учащимся, что проекция суммы (или разности) векторов на каждую ось равна сумме (или разности) проекций слагаемых векторов, т. е. если

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b},$$

то

$$c_x=a_x+b_x,$$
$$c_y=a_y+b_y,$$
$$c_z=a_z+b_z.$$

Эти результаты дают основание сформулировать следующий вывод: *всякое векторное уравнение можно заменить тремя скалярными, для чего надо все векторы заменить их проекциями на оси, не меняя знаков между членами уравнения, после чего найти алгебраические значения проекций и подставить их в уравнения.*

Это правило должно быть твердо усвоено учащимися, иначе они будут допускать много ошибок при использовании векторных уравнений. Надо иметь также в виду, что нахождение алгебраических значений проекций вызывает у учащихся ряд трудностей.

Алгебраические значения проекций находятся по правилу: *проекция вектора $\vec{a}$ на ось Ox*

$$a_x=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, Ox}).$$

Так как в VIII классе учащиеся еще не владеют как следует тригонометрическими функциями, то нахождение алгебраических значений проекций можно осуществлять так, как указано в учебнике «Физика-8», или же разлагать вектор на составляющие по осям, после чего находить проекции составляющих по правилу: *если вектор и ось параллельны и одинаково направлены, то проекция вектора равна модулю вектора со знаком «+», если они антипараллельны, то проекция равна модулю вектора со знаком «—»; если вектор и ось перпендикулярны, то проекция равна* 0.

Целесообразно приучать школьников к следующей последовательности действий при оперировании векторными уравнениями.

После того как уравнение записано в векторной форме (например, $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$), записывается уравнение в проекциях: $v_x=v_{0x}+a_xt$ (знаки проекции скрыты в обозначениях). Затем после выбора оси находятся алгебраические значения проекций и уравнение записывается через модули, после чего в уравнение подставляются числовые значения величин. Так как в условиях задач обычно даются числовые значения модулей векторов, а не значения проекций с учетом знаков, то целесообразно подставлять числовые значения именно в уравнение, написанное в модулях, а не в проекциях (в условии задачи нельзя задать значение проекции, так как знак проекции зависит от выбора положительного направления оси, а учащийся может выбрать их как угодно). Заметим попутно, что в обозначении проекции всегда следует ставить индекс оси, т. е. проекцию вектора $\vec{a}$ на ось Ox обозначать a_x, а не a, поскольку так часто обозначают модуль вектора, опуская вертикальные черточки в обозначении вектора.

После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению алгоритмов решения задач по механике.

§ 2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Для овладения методом решения кинематических задач учащиеся должны усвоить следующие вопросы: понятия — система отсчета, скорость, ускорение; уравнения, определяющие зависимость координат и скорости от времени в равномерном и равноускоренном движениях, закон сложения скоростей Галилея, идею о том, что всякое движение можно разложить на два (в общем случае — на три) простых движения вдоль осей координат; идею о том, что любое тело, какую бы скорость оно ни имело, будет двигаться под действием притяжения к Земле с ускорением, равным g, направленным вертикально вниз (при отсутствии сопротивления среды).

Решение кинематических задач вызывает затруднения, связанные прежде всего с тем, что учащиеся не могут разобраться в обилии формул, с которыми они знакомятся в кинематике, и не всегда понимают, что есть формулы, выражающие определения кинематических величин (скорости и ускорения), и есть кинематические уравнения движения двоякого рода: уравнения, выражающие зависимость координат от времени, и уравнения, выражающие зависимость скорости от времени. И вообще-то большинство кинематических задач, как для равномерного, так и для равноускоренного движения, могут быть решены на основе двух уравнений:

$$x=x_0+v_{0x}t+\frac{a_xt^2}{2},\quad v_x=v_{0x}+a_xt.$$

Эти уравнения при $a=0$ переходят в уравнения для равномерного движения, которые являются следствиями этих основных.

Есть и еще одно следствие из этих уравнений:

$$v_x^2 = v_{0x}{}^2 + 2a_x s_x,$$

которое позволяет найти скорость, если задано не время движения, а то перемещение, в конце которого определяется скорость. Важно, чтобы учащиеся понимали, что эти уравнения связывают положение и скорость точки в начальный момент времени $t=0$ (т. е. начальные условия — x_0 и v_{0x}) и положение и скорость точки в другом ее состоянии, в другой, последующий момент времени, и потому эти уравнения позволяют решить основную задачу механики, если задано ускорение. Зная начальные условия и ускорение, можно написать эти уравнения для любого интересующего нас момента времени, для любой точки траектории и найти искомые величины. В этом суть решения большинства кинематических задач, и это учащиеся должны хорошо понимать.

Много трудностей вызывает у учащихся рациональный выбор системы отсчета. В связи с этим следует разъяснить, что в кинематике нет никаких ограничений в том, с каким телом связывается система отсчета, что принимается за начало системы координат, за начальный момент времени. Однако, хотя систему отсчета можно выбрать произвольно и по-разному, ее следует выбирать так, чтобы легко было определить начальные условия и чтобы в ней движение описывалось наиболее простым образом (учащиеся склонны систему отсчета связывать с Землей, что отнюдь не всегда является рациональным). Сложным является для учащихся и описание данного движения в разных системах отсчета, а также определение в них скорости тела.

Вообще, как показывает опыт, координатный метод решения кинематических задач и соответствующий алгоритм усваивается учащимися очень нелегко и в полной мере может быть изучен на факультативных занятиях.

Среди разнообразных кинематических задач можно выделить задачи на прямолинейное равномерное движение одной точки и системы точек, задачи на сложение движений, когда системы отсчета движутся вдоль одной прямой и во взаимно перпендикулярных направлениях, задачи на прямолинейное равнопеременное движение, когда по начальным условиям определяется последующее состояние точки. К кинематическим же относятся и задачи на свободное падение тела в поле силы тяжести (тело может быть брошено вертикально вверх, горизонтально, под углом к горизонту). Эти задачи часто решаются после изучения динамики, хотя по сути дела являются кинематическими. «Динамический элемент» в них состоит лишь в том, что как бы тело ни было брошено в поле силы тяжести, последняя в соответствии со вторым законом Ньютона сообщает ему ускорение $\vec{g}$. Для усвоения этой мысли, рассматривая движение тела, брошенного в поле силы тяжести, можно сообщить учащимся, что во всех случаях тело имеет ускорение $\vec{g}$, направленное вертикально вниз; вдоль горизонтальной оси $g_x=0$, т. е. тело движется равномерно, вдоль вертикальной оси $g_y=\text{const}$, т. е. тело движется равнопеременно. Позже этому будет дано строгое объяснение на основе второго закона Ньютона. Однако уже и в кинематике можно привести довод, подтверждающий справедливость этого утверждения. Рассматривая в этой теме ускорение свободного падения и известные опыты Галилея, показавшие, что при отсутствии сопротивления все тела падают с одинаковым ускорением, можно сообщить, что Галилей изучал и движение тела, брошенного горизонтально, под углом к горизонту, и показал, что если одновременно одно тело отпустить ($v_0=0$), а второму сообщить горизонтальную скорость, то они пройдут до момента падения разные пути, причем при большой начальной скорости второе тело может пройти очень большой путь. Однако упадут оба тела одновременно (полезно показать это на опыте с известным прибором).

Такое забегание вперед оправдывается тем, что, сделав его, мы существенно увеличиваем круг задач для отработки координатного метода в кинематике (а для этого нужно решение достаточно большого числа задач). Оставляя за учителем право решать этот вопрос, мы тем не менее рассмотрим решение задач о движении тела, брошенного в поле силы тяжести, в разделе «Кинематика». В остальном же перечень видов задач, приведенный выше, соответствует последовательности изложения кинематики в стабильном учебнике.

Алгоритм решения кинематических задач может быть введен уже при изучении равномерного прямолинейного движения. При этом целесообразно это сделать на задачах о движении двух материальных точек, так как это позволяет сформулировать алгоритм практически в полном виде и показать его полезность (чего нельзя сделать на основе простых задач о движении одной точки).

Задача 1. Два автомобиля движутся прямолинейно в одну сторону с постоянными скоростями v_1 и v_2 (причем $v_1 > v_2$), и в некоторый момент времени расстояние между ними равно s. Через сколько времени и в каком месте первый автомобиль догонит второй?

x_C, τ — ?

v_1
v_2
s

Решение

1. Используя общий план решения любой физической задачи, после изучения и записи условия, выполнения чертежа (рис. 1), выбираем систему отсчета, т. е. тело отсчета (Земля), начало системы координат (точка A), положительное направление оси (направление движения) и момент времени, принимаемый за начальный (момент, когда автомобили находились на расстоянии s). Анализируем описанные в тексте физические процессы.

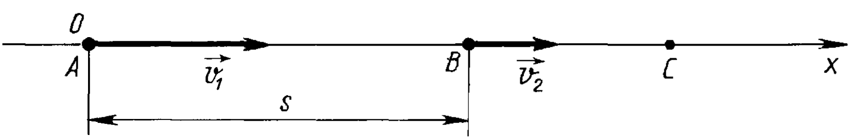


Рис. 1

2. Обе материальные точки движутся равномерно и прямолинейно, следовательно, их движения описываются уравнениями:

$$x_1 = x_{01} + v_{1x}t, \quad x_2 = x_{02} + v_{2x}t.$$

3. Чтобы решить вопрос о последующем состоянии точек, надо знать их начальные состояния, начальные условия, т. е. координаты и скорости в момент времени, принимаемый за начальный. Начальная скорость обычно обозначается v_0. Так как автомобили движутся равномерно, то их начальная скорость совпадает со скоростями в любые последующие моменты и потому:

$$x_{01} = 0, \quad v_{01x} = v_1; \quad x_{02} = s, \quad v_{02x} = v_2.$$

С учетом этого уравнения примут вид: $x_1 = v_1 t$, $x_2 = s + v_2 t$.

4. Эти уравнения справедливы для любого момента времени, для любой точки траектории (здесь t — переменная величина, которая может принимать любые значения). Следовательно, они справедливы и для интересующего нас момента, когда первый автомобиль догонит второй в точке C. Обозначим этот момент времени τ. Тот факт, что один автомобиль догнал другой, означает, что в момент $t = \tau$ они находились в одной и той же точке пространства, т. е. $x_1 = x_2 = x_C$. Тем самым мы выявили в тексте задачи дополнительные условия, выразили их на математическом языке, и теперь можно написать уравнения для данного момента времени, т. е. для движения в точке C:

$$\begin{cases} x_C = v_1 \tau, \\ x_C = s + v_2 \tau. \end{cases}$$

Отсюда

$$\tau = \frac{s}{v_1 - v_2}, \quad x_C = \frac{v_1 s}{v_1 - v_2}.$$

После решения данной задачи выделяются основные этапы, «шаги» решения, затем решается другая задача по тем же этапам.

Задача 2. Два автомобиля движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями v_1 и v_2. Первый автомобиль проходит пункт A на промежуток времени Δt раньше, чем второй проходит пункт B. Определить, когда и где произойдет их встреча, если расстояние между A и B равно s.

τ, x_C — ?

v_1
v_2
s
Δt

Решение

1. Выберем систему отсчета (рис. 2). Систему координат свяжем с Землей, начало отсчета выберем в точке A, за положительное направление оси Ox примем направление от A к B, за начальный момент времени $t = 0$ примем момент, когда первый автомобиль проходил точку A.

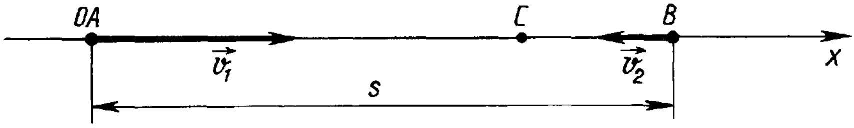


Рис. 2

2. Из условия ясно, что оба автомобиля двигались равномерно, следовательно, можно написать для каждого кинематические уравнения равномерного движения:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v_{1x}t_1, \\ x_2 = x_{02} + v_{2x}t_2. \end{cases}$$

3. Для определения того, где будет находиться материальная точка в последующие моменты времени, надо знать начальные условия (а если движение равноускоренное, то и ускорение точки). Определим начальные условия:

$$x_{01} = 0,\ v_{01x} = v_1 = \text{const};\ x_{02} = s,\ v_{02x} = -v_2 = \text{const}.$$

Так как первый автомобиль раньше прошел точку A, чем второй точку B, то

$$t_2 = t_1 - \Delta t.$$

С учетом этого уравнения приобретут вид:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 t_1, \\ x_2 = s - v_2(t_1 - \Delta t). \end{cases}$$

4. Эти уравнения справедливы для любого момента времени, для любой точки траектории, следовательно, они справедливы и для интересующего нас момента — момента встречи. В условии задачи явно заданы четыре величины (s, v_1, v_2, Δt), но, кроме этого, в тексте содержится дополнительное условие, состоящее в том, что автомобили встретились в некоторый момент времени в некоторой точке траектории. Эти дополнительные условия надо выразить на математическом языке и ввести в уравнения движения. Обозначим время, прошедшее до момента встречи, через τ, а координату точки встречи (точки C) — x_C. Слова условия о том, что автомобили встретились, означают, что в момент $t_1 = \tau$ координаты автомобилей одинаковы, т. е. для точки C имеем:

$$t_1 = \tau,\ x_1 = x_2 = x_C.$$

Напишем уравнения движения для момента τ, для точки C:

$$\begin{cases} x_C = v_1\tau, \\ x_C = s - v_2(\tau - \Delta t). \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений дает:

$$\tau = \frac{s + v_2\Delta t}{v_1 + v_2},\quad x_C = \frac{s + v_2\Delta t}{v_1 + v_2} v_1.$$

Сравнение решения обеих задач позволяет выявить общность в последовательности действий и сформулировать следующий *алгоритм решения кинематических задач:*

1) выбрать систему отсчета (это предполагает выбор тела отсчета, начала системы координат, положительного направления осей, момента времени, принимаемого за начальный);

2) определить вид движения вдоль каждой из осей и написать *кинематические уравнения движения вдоль каждой оси — уравнения для координаты и для скорости (если тел несколько, уравнения пишутся для каждого тела);*

3) определить начальные условия (координаты и проекции скорости в начальный момент времени), а также проекции ускорения на оси[1] *и подставить эти величины в уравнения движения;*

4) определить дополнительные условия, т. е. координаты или скорости для каких-либо моментов времени (для каких-либо точек траектории), и написать кинематические уравнения движения для выбранных моментов времени (т. е. подставить эти значения координат и скорости в уравнения движения);

5) полученную систему уравнений решить относительно искомых величин.

Формулируя этот алгоритм, надо объяснить учащимся, что в задачах 1 и 2, на решение которых опиралось его обоснование, материальные точки двигались равномерно вдоль одной оси; однако в дальнейшем будут изучаться другие виды движения, описываемые другими кинематическими уравнениями, и чтобы знать, какое уравнение использовать, надо прежде всего установить, каков вид движения материальной точки вдоль оси. При этом иногда придется рассматривать движение вдоль не одной, а двух осей, и надо будет выяснять вид движения вдоль каждой оси.

Опыт показывает, что обучение применению этого алгоритма происходит отнюдь не легко даже и на факультативных занятиях, где алгоритм может быть дан (в отличие от обязательного курса) в полном виде. Только после длительных упражнений в применении алгоритма учащиеся начинают сознательно выполнять все операции и ощущают универсальность и пользу алгоритма. Дело в том, что выполнение каждой из указанных в алгоритме операций отнюдь не тривиально и требует серьезной самостоятельной работы в каждом конкретном случае. В связи с этим прокомментируем отдельные операции и дадим некоторые разъяснения на конкретных примерах, которые могут быть использованы на факультативных занятиях. Заметим, что все задачи, приводимые в последующем в качестве примеров, решаются по алгоритму, однако, в целях сокращения записей, мы не всегда выделяем в решении все пункты алгоритма и в ряде случаев приводим сокращенное, «свернутое» решение.

После упражнений в применении алгоритма для решения задач на равномерное прямолинейное движение следует перейти к решению задач на сложение движений и показать, что и в этих задачах может быть использован данный алгоритм, только помимо кинематических уравнений движения надо воспользоваться законом сложения скоростей Галилея в векторной форме $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'$ и перейти от нее к скалярной. Решение этих задач очень полезно осуществлять при разном выборе систем отсчета и показать, как рациональный выбор системы отсчета упрощает решение.

---

[1] Это предписание об ускорении следует добавить после решения задач на ускоренное движение.

Задача 3. Катер, двигаясь против течения реки, проплывает около стоящего на якоре буя и встречает там плот. Через 12 мин после встречи катер повернул обратно и догнал плот на расстоянии 800 м ниже буя. Найти скорость течения реки.

v_0 — ?
$s=800$ м
$t_1=12$ мин

Первый вариант решения

Систему отсчета свяжем с буем. За начальный момент времени возьмем момент, когда катер встретил плот (рис. 3).

Плот относительно буя движется со скоростью v_0. Скорость катера относительно буя обозначим v. По закону сложения скоростей $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_0$, где v_1 — скорость катера относительно плота (движущейся воды). Тогда при движении вверх по реке $-v=v_0-v_1$ и $v=v_1-v_0$, а при движении вниз по реке $v=v_0+v_1$. Запишем уравнения движения тел:

$$\begin{cases} x_п=v_0t, \\ x_к=-(v_1-v_0)t_1+(v_1+v_0)(t-t_1), \end{cases}$$

где t — время, отсчитываемое от начального момента до любого последующего. Для момента, когда катер догонит плот (для точки A), имеем: $t=\tau$, $x_п=x_к=s$, $v_0\tau=-(v_1-v_0)t_1+(v_1+v_0)(\tau-t_1)$, откуда

$$\tau=2t_1,\ s=v_0\tau \text{ и } v_0=\frac{s}{2t_1}=1{,}1 \text{ м/с}.$$

Второй вариант решения

Систему отсчета свяжем с плотом. Тогда уравнения движения будут:

$$\begin{cases} x_п=0 \text{ (в любой момент времени)}, \\ x_к=-v_1t_1+v_1(t-t_1). \end{cases}$$

Для точки A имеем: $t=\tau$, $x_п=x_к$, $0=-v_1t_1+v_1\tau-v_1t_1$. Тогда

$$\tau=2t_1,\ v_0=\frac{s}{2t_1}.$$

Очевидно, что второй вариант решения проще.

При изучении кинематических уравнений равноускоренного прямолинейного движения обычно решаются тренировочные задачи, показывающие применение этих уравнений. Это, конечно, необходи-

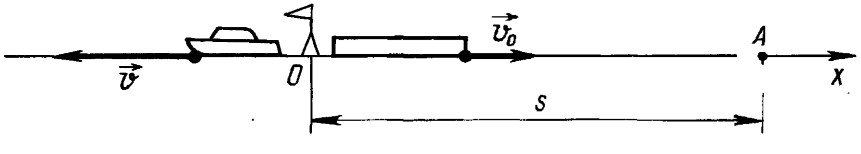


Рис. 3

мо, но такие задачи столь просты, что полезность алгоритма при этом не ощущается и он не используется в полной мере. Поэтому полезно решать и такие задачи, в которых алгоритм используется явно и позволяет решить многие вопросы, связанные с заданным в условии движением. Такими могут быть задачи о движении по наклонной плоскости. Естественно, что до изучения динамики нельзя показать, что в этом случае $a=g\sin\alpha$ (при отсутствии трения). Поэтому, показав это движение на опыте, надо рассказать о том, что Галилей, исследуя это движение, доказал, что оно будет равноускоренным. В условии задачи при этом надо задавать значение постоянного ускорения (в динамике к этому вопросу полезно вновь вернуться, показав что $a=g\sin\alpha$). Важно подчеркнуть при этом, что задачи, в которых тело движется равноускоренно, решаются точно по такому же алгоритму, как и задачи на равномерное движение, т. е. сформулированный ранее алгоритм дает общий метод решения всех задач по кинематике (в двух алгоритмах нет никакой нужды). Единственное дополнение, которое надо сделать к алгоритму,— это указание на необходимость определения проекций ускорений на оси. Все это можно разъяснить при решении следующей задачи.

Задача 4. Тело начинает двигаться с начальной скоростью 0,2 м/с вверх по наклонному желобу с постоянным ускорением 0,1 м/с^2. Определить время движения до остановки t_1, путь, который пройдет тело за это время s_1, через сколько времени тело вернется в начальное положение t_2 и какой путь пройдет за это время s_2, путь s_3, пройденный за время $t_3=3$ с, где будет находиться тело, когда его скорость $v_1=0{,}1$ м/с.

t_1, s_1, t_2, s_2, x_1, s_3 — ?

$v_0=0{,}2$ м/с
$a=0{,}1$ м/с^2
$v_1=0{,}1$ м/с
$t_3=3$ с

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на чертеже (рис. 4). Так как движение равноускоренное, то уравнения движения вдоль оси будут иметь вид:

$$\begin{cases} x=x_0+v_{0x}t+\dfrac{a_xt^2}{2}, \\ v_x=v_{0x}+a_xt. \end{cases}$$

Определим начальные условия $x_0=0$, $v_{0x}=v_0$. Так как движение вверх по наклонной плоскости будет замедленным, а вниз ускоренным (что может быть показано на опыте или с помощью стробограммы), то ускорение в течение всего времени движения будет направлено

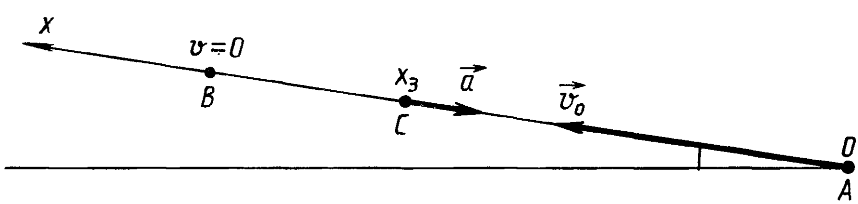


Рис. 4

вниз, а поэтому $a_x = -a$. С учетом сказанного и начальных условий уравнения примут вид:

$$\begin{cases} x = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}, \\ v_x = v_0 - at. \end{cases}$$

Эти уравнения справедливы для любого момента времени (здесь t — переменная величина). Напишем эти уравнения для интересующих нас моментов времени — t_1 (когда тело находится в точке B), t_2 (когда оно вернется в точку A), t_3 (когда оно окажется в точке C). Для этого надо определить координаты и скорости в данных точках (дополнительные условия) и подставить все эти значения в уравнения движения.

Для точки B имеем: $t = t_1$, $x = s$, $v = 0$. Тогда

$$\begin{cases} s_1 = v_0 t_1 - \dfrac{at^2}{2}, \\ 0 = v_0 - at_1. \end{cases}$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = 2 \text{ с}, \quad s_1 = 0{,}2 \text{ м}.$$

Для точки A имеем: $t = t_2$, $x = 0$. Тогда

$$0 = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}.$$

Отсюда

$$t_2 = \frac{2v_0}{a} = 4 \text{ с}.$$

Путь, пройденный к моменту t_2,

$$s_2 = 2s_1 = 0{,}4 \text{ м}.$$

Для точки C имеем: $t = t_3$, $x = x_3$,

$$x_3 = v_0 t_3 - \frac{at_3^2}{2} = 0{,}15 \text{ м}.$$

Очевидно, что за время $t_3 = 3$ с тело дошло до верхней точки B и стало двигаться вниз. Путь, пройденный до точки B, равен 0,2 м, путь, пройденный от точки B до точки C, будет: 0,2 м $-$ 0,15 м $=$ $=$ 0,05 м; тогда искомый путь, пройденный к моменту t_3, будет:

$$s_3 = AB + BC = 0{,}2 \text{ м} + 0{,}05 \text{ м} = 0{,}25 \text{ м}.$$

Чтобы найти, где находится тело к моменту, когда его скорость станет $v_1 = 0{,}1$ м/с, можно воспользоваться вышеприведенными уравнениями движения для координаты и скорости и, определив по последнему время движения до момента, когда $v_1 = 0{,}1$ м/с, найти искомую координату x_1. Однако проще найти ее, используя уравнение

$$v_x^2 - {v_{0x}}^2 = 2a_x s_x,$$

где s_x — перемещение до данного момента, равное координате в этот момент x_1. Тогда

$$v_1^2 - v_0^2 = -2ax_1 \text{ и } x_1 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a} = 0{,}15 \text{ м}.$$

Обстоятельный анализ хотя бы части этой задачи с классом под руководством учителя позволяет отработать умения в применении всех предписаний алгоритма, показать целесообразность использования уравнения $v = f(s)$ и разъяснить отличие понятий: путь, перемещение, координата (во всяком случае это следует сделать на факультативных занятиях).

После этого полезно решить задачу о координате встречи двух тел, одно из которых приобретает скорость, направленную вверх по наклонной плоскости, а другое — вниз (при заданном ускорении).

При выборе системы отсчета очень важно приучать учащихся к необходимости четко фиксировать начало системы координат и момент времени, принимаемый за начальный. Для иллюстрации этой мысли приведем в качестве примера следующую задачу.

Задача 5. В некоторый момент времени тело начало двигаться из состояния покоя равноускоренно и имело в точке с координатой 2 м скорость 2 м/с, а в точке с координатой 3 м скорость 3 м/с. Определить, было ли тело в процессе движения в точке с координатой 1 м.

x_0 — ?
$x_1 = 1$ м
$x_2 = 2$ м
$x_3 = 3$ м
$v_2 = 2$ м/с
$v_3 = 3$ м/с

Решение

Прежде всего, анализируя условие задачи, надо перевести на математический язык вопрос задачи — что значит «было ли тело в точке с координатой 1 м?». Здесь неизвестно, откуда тело начало двигаться, т. е. его начальное положение — x_0. Если $x_0 > 1$ м, то точка не проходила положения с координатой $x_1 = 1$ м, если $x_0 < 1$ м, то это положение точка проходила в процессе движения. Следовательно, вопрос задачи в том, какова начальная координата x_0.

Выбираем систему отсчета, приняв за начало системы координат некоторую точку O, от которой ведется отсчет координат, а за начальный момент времени тот, с которого тело начало движение, т. е. при $t = 0$, $v_0 = 0$ (однако это не значит, что точка находилась в этот момент в начале отсчета координаты — в точке O, положение точки в этот момент может быть, например, либо O_1, либо O_2 — рис. 5).

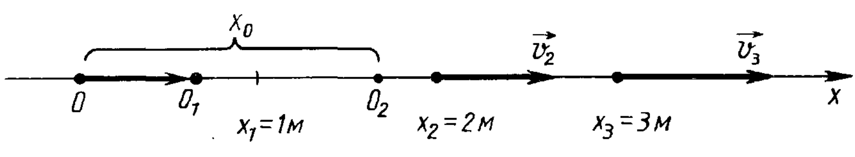


Рис. 5

Отсюда видно, что предписание «выбрать систему отсчета» в каждом конкретном случае требует серьезной мыслительной работы учащегося и отнюдь не сводится к механической деятельности по образцу.

Дальнейшее решение задачи состоит в следующем. Так как в условии задачи сказано, что точка движется равноускоренно с $v_0=0$, то ясно, какие уравнения движения надо написать. Обычно учащиеся в такого рода задачах пишут уравнения вида $x=f(t)$, $v=\varphi(t)$, т. е. уравнения

$$x=x_0+\frac{a_x t^2}{2},\quad v_x=a_x t.$$

Эти уравнения можно написать для заданных точек с координатами x_1 и x_2 (соответственно для моментов времени t_2 и t_3). Однако поскольку время не требуется найти, то целесообразно воспользоваться уравнением, не содержащим времени, т. е. уравнением вида $v_x=f(s_x)$.

Таким образом, эта задача также позволяет показать, что в случаях, когда время не задано и его не требуется найти, полезно пользоваться уравнением вида $v_x=f(s_x)$. Итак, имеем: $v_x^2=2a_x s_x$, а так как $s_x=x-x_0$ и направления скорости, ускорения и перемещения совпадают с направлением оси, то $v^2=2a(x-x_0)$. Это уравнение справедливо для каждой точки траектории, в том числе и для точек с координатами x_2 и x_3. Тогда с учетом этих дополнительных условий имеем:

$$\begin{cases} v_2^2=2a(x_2-x_0), \\ v_3^2=2a(x_3-x_0). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$x_0=\frac{v_2^2x_3-v_3^2x_2}{v_2^2-v_3^2}=1{,}2\ \text{м}.$$

Следовательно, тело начало двигаться из положения с координатой 1,2 м, а значит, в процессе движения оно не проходило положение с координатой $x_1=1$ м.

Ход рассуждений может быть и другим. Допустим, что тело проходило положение с координатой $x=1$ м. Тогда

$$\begin{cases} v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1), \\ v_3^2-v_2^2=2a(x_3-x_2). \end{cases}$$

Исключая из системы уравнений одно неизвестное a, можно найти и другое неизвестное v_1; получается $v_1=\sqrt{-1}$, что не имеет смысла, следовательно, исходное положение о том, что тело проходило положение с координатой $x_1=1$ м, неверно.

Однако этот вариант решения требует догадки, и вряд ли можно надеяться, что учащиеся самостоятельно изберут его.

Применение алгоритма к решению задачи на свободное падение тел полезно показать на следующей задаче.

Задача 6. Свободно падающее тело за последнюю секунду сво-

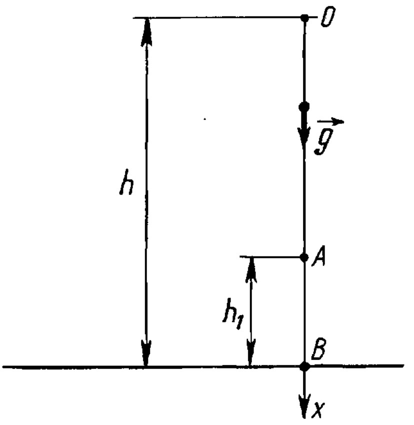


Рис. 6

его падения проходит путь h_1. Определить высоту и время всего падения.

h, τ — ?
$t_1 = 1$ с
h_1
g

Решение

Очень часто учащиеся связывают систему отсчета с Землей и направляют ось из точки падения вверх. Это вполне правомерно, однако при таком выборе системы отсчета неизвестна начальная координата, к тому же проекция ускорения будет отрицательна. Можно (и в некотором отношении это удобнее) за начало системы координат взять связанную с Землей точку, из которой началось падение, тогда при любой высоте падения начальная координата известна: $x_0 = 0$, ось же Ox направить вниз (рис. 6).

С учетом начальных условий ($x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$) запишем

$$x = \frac{gt^2}{2}.$$

Для точки B имеем: $t = \tau$, $x = h$. Тогда

$$h = \frac{g\tau^2}{2}.$$

Для точки A: $t = \tau - t_1$, $x = h - h_1$. Тогда

$$h - h_1 = \frac{g(\tau - t_1)^2}{2},$$

откуда

$$\tau = \frac{gt_1^2 + 2h_1}{2gt_1}, \quad h = \frac{(2h_1 + gt_1^2)^2}{8gt_1^2}.$$

Далее решаются задачи на движение тел, брошенных вертикально вверх. Вот одна из таких задач.

Задача 7. С вертолета, поднимающегося вертикально вверх со скоростью v_0, с высоты h над Землей отпускают тело. Определить, через сколько времени оно упадет на Землю и с какой скоростью.

τ, v —?
v_0
h
g

Решение

Обычно учащиеся не сознают, что в момент отпускания тела с поднимающегося вверх вертолета его скорость по отношению к Земле будет равна скорости вертолета, а по отношению к вертолету она будет равна нулю. Разъяснив это, выбираем систему отсчета, как указано на чертеже (рис. 7).

Уравнения движения тела будут:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ v_x = v_{0x} + a_x t. \end{cases}$$

Учитывая начальные условия и то, что $a_x = -g$ на всем протяжении движения тела, имеем:

$$\begin{cases} x = h + v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}, \\ v_x = v_0 - gt. \end{cases}$$

Для момента падения тела на землю (точка O) $t = \tau$, $x = 0$, $v_x = -v$. Тогда

$$\begin{cases} 0 = h + v_0\tau - \dfrac{g\tau^2}{2}, \\ v = v_0 - g\tau. \end{cases}$$

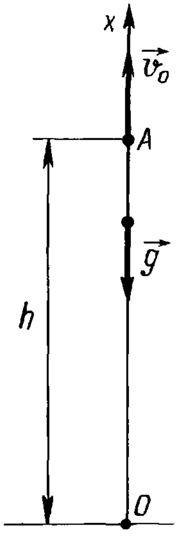


Рис. 7

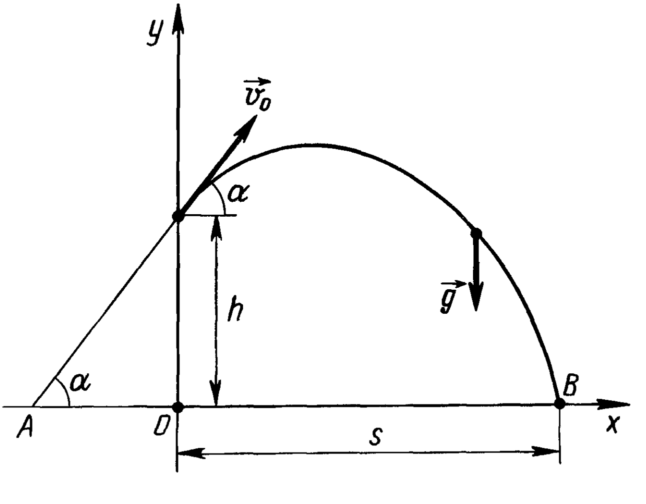


Рис. 8

Отсюда, решая систему уравнений, можно найти τ и v:

$$\tau=\frac{\sqrt{2gh+v_0^2}+v_0}{g}, \quad v=\sqrt{2gh+v_0^2}.$$

Решение первых задач на движение тела, брошенного горизонтально или под углом к горизонту, также следует выполнить с использованием алгоритма, после чего необходимы упражнения в решении этого типа задач. Приведем примеры двух таких задач.

Задача 8. Какую минимальную скорость должен иметь мотоциклист при отрыве от края трамплина с углом наклона к горизонту α, чтобы перепрыгнуть ров шириной s, если высота края трамплина h?

v_0 — ?
α
h
s
g

Решение

При решении этой задачи учащиеся часто ось Ox проводят вдоль дна рва, что не позволяет определить начальную координату y_0, так как не задана глубина рва. Иногда за начало системы координат берут точку A, что осложняет определение начальной координаты x_0. Удобнее всего выбрать начало осей так, как указано на рисунке 8.

Сложное движение мотоциклиста можно разложить на два простых вдоль осей координат. Определим вид каждого из них. Так как тело, брошенное как угодно вблизи Земли, имеет ускорение $\vec{g}$, направленное вертикально вниз в любой точке траектории, то $a_x=0$, и, следовательно, вдоль оси Ox движение будет равномерным, а $a_y=\text{const}$, т. е. вдоль оси Oy движение будет равноускоренным. Тогда уравнения движения вдоль осей будут иметь вид:

$$\begin{cases} x=x_0+v_{0x}t, \\ y=y_0+v_{0y}t+\frac{a_yt^2}{2}. \end{cases}$$

Уравнения для скорости, видимо, не потребуются, так как в условии задачи не ставится вопрос о скорости.

Запишем начальные условия:

$$x_0=0, \ v_{0x}=v_0\cos\alpha; \ y_0=h, \ v_{0y}=v_0\sin\alpha.$$

С учетом их уравнения примут вид:

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t, \\ y=h+v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Требование найти именно минимальную скорость означает, что тело попадает на край рва, т. е. в точку B: $t=\tau$, $x=s$, $y=0$. Тогда

$$\begin{cases} s=v_0\cos\alpha\cdot\tau, \\ 0=h+v_0\sin\alpha\cdot\tau-\frac{g\tau^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $$v_0 = \frac{s}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h + s\,\mathrm{tg}\,\alpha)}}.$$

Задача 9. С высоты h над Землей падает тело. С Земли из точки, находящейся на расстоянии l по горизонтали от линии падения тела, производится выстрел из винтовки так, что пуля вылетает под углом к горизонту со скоростью v_0. Под каким углом должна располагаться винтовка, чтобы пуля попала в тело, если выстрел производится одновременно с началом падения?

α — ?
h
l
v_0

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 9.

Тело 2 движется равноускоренно только вдоль оси Oy, поэтому

$$x_2 = \mathrm{const},\quad y_2 = y_{02} + v_{02y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Сложное движение тела 1 представляет собой совокупность двух простых движений вдоль осей. Вдоль Ox движение равномерное, вдоль Oy — равноускоренное, поэтому

$$x_1 = x_{01} + v_{01x}t,\quad y_1 = y_{01} + v_{01y}t + \frac{a_{1y}t^2}{2}$$

Определим начальные условия и проекции ускорения на оси. Для тела 1: $x_{01} = 0$, $y_{01} = 0$, $v_{01x} = v_0\cos\alpha$, $v_{01y} = v_0\sin\alpha$, $a_{1y} = -g$. Для тела 2: $x_{02} = l$, $y_{02} = h$, $v_{02} = 0$, $a_{2y} = -g$.

Определим дополнительные условия. Для момента попадания пули в цель $t = \tau$. Пуля и тело находятся при этом в одной точке — точке A, следовательно, для точки A имеем: $x_1 = x_2 = l$, $y_1 = y_2$.

С учетом начальных и дополнительных условий уравнения движения для точки A примут вид:

$$\begin{cases} l = v_0\cos\alpha\cdot\tau, \\ h - \dfrac{g\tau^2}{2} = v_0\sin\alpha\cdot\tau - \dfrac{g\tau^2}{2}. \end{cases}$$

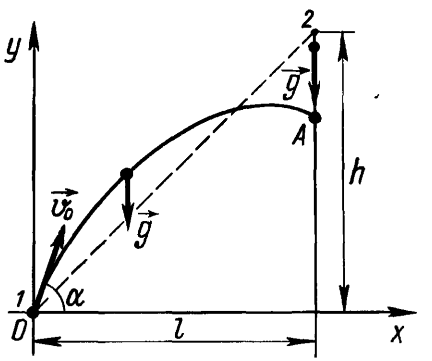


Рис. 9

Решение системы уравнений дает ответ:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{l}.$$

При решении этой задачи надо учесть, что не всегда пуля попадает в падающее тело. При некоторых значениях v_0 пуля не долетит до линии падения тела *2*, т. е. максимальная дальность полета s_{max} будет меньше l ($s_{max}<l$).

Найдем, при каком условии пуля попадет в тело *2*. Это возможно, если $s_{max}>l$ или $\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}>l$, т. е. если $v_0>\sqrt{\frac{lg}{\sin 2\alpha}}$.

Задачу можно решить проще, если связать систему отсчета с падающим телом, однако учащиеся обычно предлагают изложенный выше вариант решения и легче воспринимают его.

Подведем краткий итог сказанному о координатном методе решения кинематических задач.

Для решения кинематической задачи надо, прежде всего, знать начальные условия, т. е. положение и скорость точки в начальный момент. Они явно определяются только после выбора системы отсчета и зависят от того, как она выбрана, поэтому система отсчета выбирается так, чтобы начальные условия могли быть определены наиболее простым образом. Подставив начальные условия в уравнения движения, мы придаем ему конкретный вид, «привязывая» его к системе отсчета.

Кроме этого, в содержании задачи всегда можно найти то, что мы называем «дополнительными условиями». Дополнительные условия — это координаты или скорость точки в какой-либо интересующий нас момент времени движения. Если начальные условия задают начальное состояние, то «дополнительные условия» задают последующее состояние точки. И суть многих задач сводится к тому, чтобы по начальным условиям и выбранному уравнению движения найти последующее состояние в какой-либо момент, т. е. определить, где точка находится или с какой скоростью она движется (или сколько времени она движется до заданного состояния). Дополнительные условия так или иначе заданы текстом задачи, и их надо перевести на язык математических величин. Например, указывается, что движущиеся точки в некоторый момент времени встретились. Это значит, что в какой-то определенный момент времени $t=\tau$ обе точки имеют одинаковые координаты, т. е. $x_1=x_2$.

Найдя эти дополнительные условия и выразив их математически, надо подставить их в уравнения движения, т. е. уравнения, написанные для любого момента времени, для любой точки траектории, написать для интересующего нас момента времени движения, для определенной точки траектории.

Во многих относительно элементарных задачах решение по сути дела в том и состоит, что, выбрав систему отсчета, определив начальные условия и написав уравнения движения, определяют дополнительные условия и подставляют их в уравнения движения.

Однако в ряде не совсем стандартных задач, которые могут решаться на факультативных занятиях, использование перечисленных выше операций, составляющих алгоритм, не позволяет решить задачу, так как уравнений получается меньше, чем неизвестных. В таких случаях надо отыскать в содержании задачи неиспользованные условия (мы будем называть их «неявными условиями»). Эти неявные условия, как правило, прямо в тексте задачи не отыщешь, и в качестве их могут выступать ограничения, накладываемые на движения, или дополнительные связи между величинами, обусловленные особенностями происходящего движения. В каждой задаче эти неявные условия могут быть совершенно разными, и для их отыскания нельзя дать одного общего рецепта. Тут мышление учащегося не может быть стандартным, и вступает в силу догадка, интуиция, т. е. от мышления по образцу, по алгоритму необходим переход к элементам творческого мышления. Алгоритм и в этих случаях оказывается необходимым, но уже недостаточным, поэтому полезно на факультативных занятиях дополнить ранее сформулированный алгоритм рекомендацией общего плана: *если в результате использования алгоритма получилась система уравнений, число которых меньше числа неизвестных, следует проанализировать особенности движения, чтобы найти неявные условия, выражающие связи между величинами, обусловленные характером движения и возможными ограничениями.*

Итак, анализируя содержание задачи, полезно выделять начальные условия, дополнительные условия и неявные условия.

Приведем примеры таких задач.

Задача 10. Тело *1* начинает двигаться с начальной скоростью $v_{01}=2$ м/с, с постоянным ускорением. Через время $\Delta t=10$ с после начала его движения из той же точки начинает двигаться тело *2* с начальной скоростью $v_{02}=12$ м/с и с тем же ускорением. При каком значении ускорения тело *2* обгонит тело *1*?

a — ?
$v_{01}=2$ м/с $v_{02}=12$ м/с $\Delta t=10$ с

Решение

Приняв линию движения за ось Ox и момент выхода из начальной точки первого тела за начальный, напишем уравнения движения:

$$\begin{cases} x_1=v_{01}t+\dfrac{at^2}{2}, & v_1=v_{01}+at; \\ x_2=v_{02}(t-\Delta t)+\dfrac{a(t-\Delta t)^2}{2}, & v_2=v_{02}+a(t-\Delta t). \end{cases}$$

Очевидно, что одни эти уравнения не позволяют решить задачу, если даже в качестве дополнительного условия принять, что в момент обгона $x_1=x_2$ (уравнений меньше, чем неизвестных). Нужно найти какие-то неявные условия, связанные с особенностью движения.

Известно, что координаты при обгоне одинаковые, а скорости? Тело *2* обгонит тело *1*, если в момент, когда они поравняются, скорости будут подчиняться соотношению $v_2>v_1$, т. е. $v_2-v_1>0$.

Вот это и есть неявное условие, которое в данной задаче надо увидеть и принять во внимание. Отсюда

$$v_{02}+a(t-\Delta t)>v_{01}+at \text{ и } v_{02}-a\Delta t>v_{01},$$

поэтому

$$a<\frac{v_{02}-v_{01}}{\Delta t}, \text{ т. е. } a<1 \text{ м/с}^2.$$

Задачу можно решить иначе, связав систему отсчета с телом *1*. Тогда тело *2* будет в этой системе отсчета двигаться равномерно. В момент начала движения тела *2* скорость тела *1* будет $v_{01}+a\Delta t$. Очевидно, что обгон произойдет, если $v_{01}+a\Delta t<v_{02}$, т. е. если $a<\frac{v_{02}-v_{01}}{\Delta t}$. Объясним полученный результат. Если бы ускорение было $a\geqslant 1$ м/с^2, то за время $\Delta t=10$ с тело *1* приобрело бы скорость $v_1\geqslant 12$ м/с, т. е. такую же, как начальная скорость тела *2* ($v_{02}=$ $=12$ м/с), и при одинаковом ускорении тело *2* никогда бы не смогло догнать тело *1*.

Приведем еще один пример, поясняющий смысл того, что мы называем «неявными условиями».

Задача 11. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Определить координаты тела h и s в тот момент, когда тело будет иметь скорость v_1.

h, s — ?
v_0
α
v_1

Решение

Выберем систему отсчета, как показано на рисунке 10. Напишем уравнения движения и, определив начальные условия, подставим их в уравнения:

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t, & v_x=v_0\cos\alpha; \\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}, & v_y=v_0\sin\alpha-gt. \end{cases}$$

Определим дополнительные условия.

Для точки A имеем:

$t=\tau$, $x=s$, $y=h$, $v=v_1$.

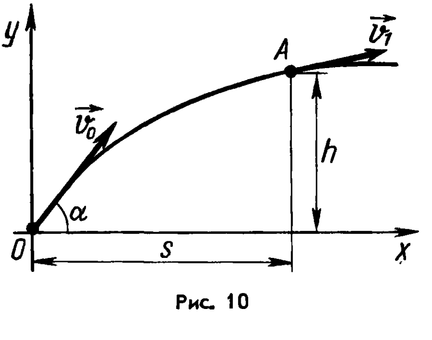


Рис. 10

Получим уравнения:

$$\begin{cases} s=v_0\cos\alpha\cdot\tau, \; v_x=v_0\cos\alpha; \\ h=v_0\sin\alpha\cdot\tau-\frac{g\tau^2}{2}, \; v_y=v_0\sin\alpha-g\tau. \end{cases}$$

Очевидно; что в системе четырех уравнений пять неизвестных и нужно еще одно уравнение. Таким является уравнение, устанавливающее связь v_1, v_x, v_y, т. е. $v_1^2=v_x^2+v_y^2$.

Решая систему этих пяти уравнений, найдем h и s.

Итак, сформулированный на первых кинематических задачах алгоритм по мере его применения к решению задач разного типа постепенно все более и более осознается учащимися, у них вырабатывается умение пользоваться им, уверенность в его универсальности и, как показал наш опыт, уверенность в возможности решать на его основе разные задачи.

Вместе с тем учащиеся приобретают умения выполнять общие предписания алгоритма в решении конкретных задач и убеждаются в том, что алгоритм дает лишь общее направление поиска пути решения задачи. Как применить каждое предписание — зависит от конкретных условий задачи и требует серьезной и нестандартной мыслительной деятельности. В результате решения ряда задач по данной теме с использованием агоритма возникает возможность сделать ряд частных конкретизирующих дополнений к нему, показывающих, как использовать каждое предписание. Эти дополнения состоят в следующем:

1. Систему отсчета не обязательно следует связывать с неподвижным телом (Землей). В ряде случаев задача решается проще, если система отсчета связана с движущимся телом.

2. Систему отсчета надо выбирать так, чтобы наиболее простым образом можно было определить начальные условия.

3. Если вид движения на разных его этапах различен, то уравнения следует писать для каждого этапа в отдельности.

4. При выборе системы отсчета надо четко установить, какая точка принимается за начало осей координат и какой момент времени — за начальный.

5. В задачах на движение системы материальных точек уравнения пишутся для каждой точки в отдельности, и если они начали двигаться неодновременно, то для каждой точки — свое время.

6. В решении кинематических задач всегда надо выявить начальные условия, перевести на язык физических величин дополнительные условия, определяющие положение и скорость тела в какой-либо последующий момент времени, а если число уравнений будет недостаточным для нахождения искомой величины, то надо попытаться выявить дополнительные связи и соотношения, так называемые неявные условия.

7. В задачах о движении тел, брошенных как угодно вблизи Земли, любое тело (при отсутствии сопротивления) всегда движется с вертикально направленным ускорением $\vec{g}$, вне зависимости от модуля и направления начальной скорости.

В порядке упражнений в применении алгоритма могут быть решены из стабильного задачника задачи №№ 23, 63, 65, 73, 79, 86, 191, 203, 212[1].

§ 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ДИНАМИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задачи по динамике в школьном курсе физики могут решаться либо на основе законов Ньютона, либо с использованием законов сохранения энергии и импульса. В данном разделе мы рассмотрим решение динамических задач на основе законов Ньютона.

Для овладения методом решения этих задач учащиеся должны усвоить следующее:

— понятие силы как вектора, имеющего абсолютное значение (модуль), направление и точку приложения;

— понятие ускорения как вектора, который в ускоренном прямолинейном движении направлен так же, как и скорость, в замедленном — противоположно ей, но всегда направлен так же, как и вектор изменения скорости; в движении по окружности с постоянной по модулю скоростью — по радиусу к центру окружности;

— формулировки и физическую сущность трех законов Ньютона;

— типы сил, рассматриваемых в механике (силы тяготения, упругости, трения);

— законы, показывающие, от чего зависят силы того или иного типа, и то, как определяется направление сил каждого типа.

При решении задач по динамике учащиеся сталкиваются с рядом трудностей, связанных с формальным усвоением понятий и законов динамики, и именно решение задач позволяет обеспечить их глубокое, неформальное усвоение.

Одна из основных трудностей состоит в определении того, какие силы действуют на тело. Учащиеся либо упускают из виду действие какой-либо силы, либо прикладывают к телу «лишние» силы, не обусловленные реальным взаимодействием тел.

Иногда учащиеся забывают, что ускорение обусловлено всегда равнодействующей всех сил, и считают, что ускорение сообщает лишь та сила, которая направлена в сторону ускорения. До сих пор бытует еще представление о неких «ускоряющих» силах (как будто есть силы, которые не сообщают ускорения). Причем иногда «ускоряющую» силу вводят как некую самостоятельную силу, не обусловленную каким-либо реальным действием на точку других тел. Примером такого заблуждения является встречающееся еще утверждение о том, что на тело, скатывающееся с наклонной плоскости, действует, помимо сил тяжести, реакции опоры и трения, еще и «скатывающая» сила, которая и является «ускоряющей» силой. Для

---

[1] Здесь и далее номера задач указываются из сборника задач по физике А. П. Рымкевича и П. А. Рымкевича (М.: Просвещение, 1984).

предотвращения этих заблуждений при формировании понятия силы необходимо систематически подчеркивать, что силы не есть нечто реально существующее наряду с телами или помимо них, что сила — это характеристика (мера) действия одного тела на другое, введенная для описания реального явления — явления взаимодействия.

Найти силы, приложенные к телу, значит найти, какие тела действуют на данное тело, и сколько действий производится на тело, столько и сил к нему приложено. Например, если по поверхности стола с помощью нити перемещают брусок, то на него действуют три тела: Земля, нить и стол, причем стол производит два действия — он вследствие деформации действует на брусок с силой упругости и вследствие шероховатости своей поверхности обеспечивает действие на брусок силы трения.

При изображении сил часто возникают затруднения в определении направления сил упругости и трения. Силы упругости, в частности натяжения в нитях, тросах или силы реакции опоры, направлены всегда в сторону, противоположную смещению частиц тела при его деформации. Значит, чтобы найти, как направлена сила упругости, надо выяснить, куда перемещаются частицы тела при его деформации. Так, если нить растягивается, то сила натяжения действует на тело со стороны нити в направлении, в котором сокращалась бы растянутая нить. Сила реакции опоры направлена в сторону, противоположную прогибу опоры, и всегда перпендикулярна опоре. Сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную относительной скорости, а сила трения покоя направлена в сторону, противоположную возможному движению.

В задачах о движении тела, тормозящегося действием силы трения, учащиеся склонны считать, что на тело действует некая «движущая сила» в направлении движения, в связи с чем важно подчеркивать, что сила — не причина движения, а причина его изменения, что в данном случае нет тел (а потому и сил), действующих в направлении скорости. При этом ускорение направлено в сторону, противоположную скорости, так как движение замедленное (учащиеся склонны вектор ускорения направлять всегда в сторону движения), и сообщается оно действием силы трения.

Ряд затруднений возникает у учащихся в связи с выбором системы отсчета. При решении задач по кинематике никакие ограничения на выбор системы отсчета не накладывались. При решении задач по динамике прежде всего надо знать, в какой системе отсчета — инерциальной (ИСО) или неинерциальной (НИСО) — будет решаться задача. Школьники знают о существовании и тех и других, но на уроках физики решают задачи лишь в ИСО (силы инерции рассматриваются лишь на факультативных занятиях).

В связи с этим на ряде задач надо показать, что в системах отсчета, движущихся относительно инерциальной прямолинейно и ускоренно или вращающихся, законы Ньютона невыполнимы, эти системы являются неинерциальными, и, желая использовать при решении задачи законы Ньютона, необходимо выбрать именно инерциальную систему отсчета.

В ряде задач рассматривается движение не одной точки, а системы точек. Задачи на систему материальных точек решаются также на основе использования второго закона Ньютона, который пишется для каждой точки в отдельности. Следует предостеречь учащихся от попыток при решении такого рода задач писать закон не для отдельных тел, а для всей системы в целом. Например, решая задачу о движении железнодорожного состава из нескольких вагонов, учащиеся формально пишут второй закон, приравнивая векторную сумму всех сил, действующих на отдельные вагоны, к произведению ускорения на суммарную массу, забывая при этом, что закон Ньютона сформулирован для одной точки и что силы, действующие на отдельные вагоны, различны и искать равнодействующую сил, действующих на разные тела, не имеет смысла.

Среди задач по динамике можно выделить задачи на прямолинейное и криволинейное движение точки, и естественно, с первых и надо начинать. После формирования умения решать задачи на движение одной материальной точки следует перейти к решению задач на движение системы материальных точек (сначала вдоль одной прямой, а затем — вдоль двух).

Из основного закона динамики $\vec{F}=m\vec{a}$ следует, что возможны два типа динамических задач. Если заданы силы (или их можно определить) и известна масса точки, то из второго закона Ньютона можно определить ускорение, а зная его, по кинематическим уравнениям можно определить движение, т. е. координаты или скорость в любой момент времени. Если же известно ускорение, то можно определить силы, действующие на точку (или их составляющие в определенных направлениях, или углы, которые образуют векторные величины с избранными направлениями). Таким образом, оба эти типа задач решаются на основе использования закона Ньютона, из векторной записи которого $\vec{F}=m\vec{a}$ следуют скалярные уравнения вида:

$$\begin{cases} F_x=ma_x; \\ F_y=ma_y; \\ F_z=ma_z. \end{cases}$$

При изучении первой темы динамики «Законы Ньютона» обычно решаются достаточно простые задачи, на которых алгоритм в полной мере ввести невозможно. Его следует обосновать, когда изучаются виды сил — сила упругости, сила тяжести.

Наиболее подходящей задачей для обоснования алгоритма является следующая.

Задача 1. Гирю массой m, подвешенную на нити, поднимают вверх с постоянным ускорением из состояния покоя. Каково будет перемещение гири за время t после начала движения, если жесткость нити k, а удлинение нити Δl?

s — ?
m
t
k
Δl

Решение

1. Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 11, приняв за начало отсчета системы координат точку, связанную жестко с Землей,— точку O, в которой находилось тело в начальный момент. Так как тело находилось в равноускоренном движении, то для нахождения перемещения за заданное время надо знать ускорение. А ускорение по второму закону Ньютона определяется равнодействующей всех сил, приложенных к телу, поэтому следующий за выбором системы отсчета шаг должен состоять в нахождении сил.

2. На гирю действуют только два тела: Земля и нить, действия которых характеризуются соответственно силой тяжести, направленной вертикально вниз $\vec{F}_т$, и силой натяжения нити $\vec{T}$, которая направлена, как и любая сила упругости, в сторону, противоположную смещению частиц тела (нити) при его деформации, т. е. в данном случае — вдоль по нити вверх. Ускорение в равноускоренном движении направлено в ту же сторону, что и скорость, т. е. вверх.

3. Второй закон Ньютона для данного случая имеет вид:

$$\vec{F}_т + \vec{T} = m\vec{a}.$$

Запишем закон в проекциях на ось Ox:

$$F_{тx} + T_x = ma_x, \quad T - F_т = ma.$$

4. Чтобы найти ускорение, надо, исходя из физической природы сил, выразить силы через величины, от которых они зависят:

$$F_т = mg, \quad T = k\Delta l.$$

Подставив эти выражения в закон Ньютона, найдем ускорение:

$$a = \frac{k\Delta l - mg}{m}.$$

5. Для определения перемещения воспользуемся уравнением кинематики:

$$x = \frac{at^2}{2}.$$

6. Решая систему уравнений, получим:

$$s = x = \frac{k\Delta l - mg}{2m} t^2.$$

Анализ этапов решения этой и ей подобных задач (например, задачи о силе давления тела на пол ускоренно движущегося лифта) позволяет сконструировать следующий *алгоритм решения задач по динамике:*

1. Выбрать систему отсчета.

2. Найти все силы, действующие на тело, и изобразить их на чертеже. Определить (или предположить) направление ускорения и изобразить его на чертеже.

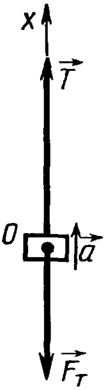


Рис. 11

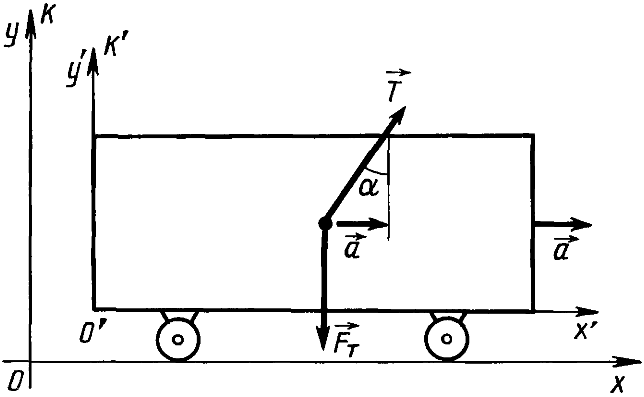


Рис. 12

3. Записать уравнение второго закона Ньютона в векторной форме и перейти к скалярной записи, заменив все векторы их проекциями на оси координат.

4. Исходя из физической природы сил, выразить силы через величины, от которых они зависят.

5. Если в задаче требуется определить положение или скорость точки, то к полученным уравнениям динамики добавить кинематические уравнения.

6. Полученную систему уравнений решить относительно искомых.

Решение последующих задач преследует цель формирования умений применять алгоритм, а также позволит сделать ряд частных дополнений к основным предписаниям алгоритма, поясняющих, как выполнять эти предписания. Приведем лишь некоторые из этих задач.

Прежде всего надо показать учащимся необходимость выбора ИСО при решении задач на основе законов Ньютона. Для этого полезна следующая задача.

Задача 2. Вагон движется по горизонтальному пути с постоянным ускорением $\vec{a}$. К потолку вагона подвешен отвес. Найти угол отклонения отвеса от вертикали и силу натяжения нити, если масса отвеса m.

α, T — ?	Решение
a m	Определив, что отвес не будет располагаться вертикально при наличии ускорения, а в силу инерции будет отклонен на угол α, выполняем чертеж (рис. 12).

Применяя алгоритм, ставим вопрос о выборе системы отсчета. Обычно от учащихся поступают два предложения: связать систему отсчета с Землей и связать ее с вагоном. Обсуждаем каждое из них.

Допустим, систему отсчета связали с вагоном (система K'). Ищем силы, приложенные к шарику отвеса (это сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила натяжения $\vec{T}$). Иногда учащиеся предлагают и третью силу — «ускоряющую», направленную, как и ускорение a, что требует от учителя разъяснения того, что на шарик действуют лишь два тела — Земля и нить, а потому и сил может быть только две — $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$, и так как других действий тел нет, то нет и других сил, кроме этих. Очевидно, что равнодействующая $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$ отлична от нуля. $\vec{F}_т+\vec{T}\neq 0$, так как две силы, направленные под углом, не могут уравновешивать друг друга, а следовательно, по второму закону Ньютона и ускорение шарика не равно нулю. Однако в системе отсчета, связанной с вагоном (K'), шарик неподвижен — $v=0$ и $a=0$. Итак, имеем в K': $\vec{F}_т+\vec{T}\neq 0$, $a=0$, что явно противоречит закону Ньютона: есть сила, но нет ускорения. Следовательно, в этой системе отсчета, связанной с вагоном, закон Ньютона не выполняется, она является НИСО. Поэтому, желая воспользоваться при решении задачи законом Ньютона, надо взять систему отсчета, связанную не с движущимся ускоренно вагоном, а с Землей. В этой системе K — $\vec{F}_т+\vec{T}\neq 0$ и $a\neq 0$, что соответствует закону динамики (есть сила и есть ускорение). Таким образом, учащиеся на конкретном примере еще раз убеждаются в том, что не все системы отсчета являются инерциальными, не во всех выполняются законы Ньютона; они не выполняются в тех системах отсчета, которые движутся относительно Земли прямолинейно и ускоренно (о том, что и Земля не является строго ИСО, следует сообщить позже, например решая задачу о коническом маятнике, когда учащиеся убедятся в том, что вращающиеся системы также не являются ИСО).

Таким образом, желая воспользоваться законами Ньютона, свяжем систему отсчета с Землей.

Дальнейшее решение задачи в соответствии с алгоритмом сводится к следующему. По закону Ньютона в системе отсчета K имеем:

$$\vec{F}_т+\vec{T}=m\vec{a},$$

откуда

$$\begin{cases} F_{тx}+T_x=ma_x, \\ F_{тy}+T_y=ma_y, \end{cases} \qquad \begin{cases} T\sin\alpha=ma; \\ T\cos\alpha=mg; \end{cases} \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{g}, \quad T=m\sqrt{a^2+g^2}.$$

На первых порах полезно требовать от учащихся записи уравнений закона в обозначениях проекций, и лишь потом стоит разрешить сразу писать не обозначения проекции $F_{тx}$, T_x, a_x, $F_{тy}$, T_y, a_y, а их алгебраические значения. Это «свертывание» алгоритма не следует форсировать — пусть учащиеся сами «устанут» от этих записей.

После решения задачи в ИСО может возникнуть вопрос о том, как быть, если выбрать систему отсчета, связанную с вагоном,— НИСО K'. Рассмотрение этого вопроса, уместное на факультативных занятиях, сводится к следующему.

Так как в системе отсчета K' у точки (отвеса) нет ускорения ($a=0$), а сумма $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$ отлична от 0, то для того, чтобы воспольtзоваться законом динамики $\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$, надо допустить, что существует еще сила $\vec{F}_и$ такая, что $\vec{F}_и+\vec{F}_т+\vec{T}=0$. Очевидно, что эта сила должна быть противоположна ускорению системы отсчета $\vec{a}$ и равна ma, т. е. $\vec{F}_и=-m\vec{a}$. Эту силу, введение которой позволяет формально воспользоваться законом динамики в НИСО, называют силой инерции. Тогда $\vec{F}_и+\vec{F}_т+\vec{T}=m\vec{a}'$, где $a'=0$. Очевидно, что введение этой силы — лишь формальный прием, ведь сила $F_и$ не обусловлена реальным действием на тело со стороны других тел, т. е. эта сила не является силой в ньютоновском смысле слова, она не есть мера действия одного тела на другое, так как нельзя найти тело, действие которого на отвес характеризовалось бы этой силой. Сила инерции обусловлена не реальным действием на тело других тел, а ускоренным движением системы отсчета. Следовательно, в НИСО решение имеет вид:

$$\vec{F}_т+\vec{T}+\vec{F}_и=0,\ \vec{F}_т=m\vec{g},\ \vec{F}_и=-m\vec{a},$$

откуда $T\sin\alpha=ma,\quad T\cos\alpha=mg.$

Результат будет тот же.

Итак, решение данной задачи позволяет показать учащимся, что, применяя законы Ньютона для решения динамических задач, надо обязательно выбирать ИСО. Этот вывод может быть закреплен и при решении задач об ускоренно движущемся лифте.

Говоря о выборе системы отсчета в решении задач по динамике, следует оговорить также, как выбирать начало системы координат. Если в задаче не требуется определить положение точки (как, например, в задаче 2), то начало системы координат можно поместить в любую точку тела, с которым связали ИСО. Если же требуется определить положение точки (как, например, в задаче 1), то начало системы координат следует выбрать так, чтобы было удобно определять начальные условия и искомую конечную координату.

При изучении силы трения важно показать, что она пропорциональна силе нормального давления (реакции опоры), которая не всегда равна силе тяжести, как иногда склонны считать учащиеся, полагая, что лишь на наклонной плоскости эти силы неодинаковы. Для разъяснения этой мысли полезна следующая задача.

Задача 3. По горизонтальной плоскости начинает двигаться с постоянным ускорением тело массой m, на которое действует сила $\vec{F}$, направленная под углом α к горизонту. Найти положение тела к моменту t, если коэффициент трения μ.

x — ?

F
m
t
μ

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 13, найдем приложенные к телу силы, изобразим ускорение и запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$\vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_т+\vec{F}_{тр}=m\vec{a}.$$

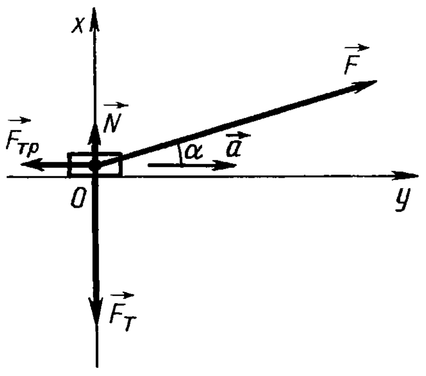


Рис. 13

Перейдем к скалярной форме записи:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - F_{тр} = ma, \\ -mg + N + F\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

$$F_т = mg, \quad F_{тр} = \mu N,$$

$$ma = F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha);$$

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)}{m}.$$

Зная a, из уравнения кинематики $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$, с учетом начальных условий, найдем положение тела к моменту t:

$$x = \frac{at^2}{2}.$$

Из решения следует, что в данном случае $N < F_т$ на $F\sin\alpha$ и $F_{тр} = \mu(mg - F\sin\alpha)$.

После решения задач на динамику прямолинейного движения одной материальной точки следует перейти к задачам на движение системы материальных точек. В условиях таких задач часто делается оговорка о невесомости и нерастяжимости нитей, связывающих тела системы. Поясним, в чем смысл этих ограничений.

Пусть нить связывает два тела *1* и *2* (рис. 14). На тела *1* и *2* действуют силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. По третьему закону Ньютона тела действуют на нить силами $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$. Следовательно, на нить действуют две силы: $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$. Если масса ее m, то по второму закону Ньютона имеем (для нити): $\vec{T}_1' + \vec{T}_2' = m\vec{a}$, а из

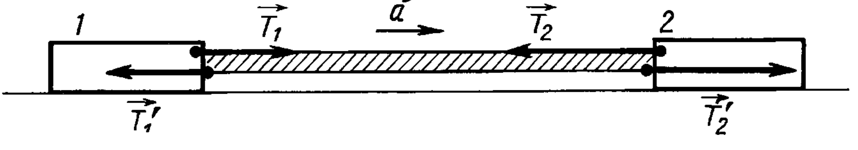


Рис. 14

невесомости нити следует, что $m=0$, поэтому $T_1'=T_2'$, а следовательно, $T_1=T_2=T$. Итак, если в условии задачи сделана оговорка, что нить невесома, то это означает, что силы, с которыми нить действует на связываемые ею тела, одинаковы по модулю. Оговорка о нерастяжимости нити означает, что тела движутся с одинаковым ускорением.

Задача 4. По горизонтальной поверхности перемещают с постоянным ускорением три бруска массами m_1, m_2, m_3, связанные невесомыми и нерастяжимыми нитями, действуя на первый брусок нитью, расположенной горизонтально, силой F. Определить ускорение системы и силы натяжения нитей, связывающих бруски, если коэффициент трения между брусками и поверхностью μ.

a, T_1, T_2 — ?
m_1
m_2
m_3
F
μ

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 15, найдем все силы, действующие на каждое из тел системы, изобразим ускорение системы. Очевидно, что ввиду нерастяжимости нитей ускорения всех тел одинаковы, а ввиду невесомости нитей силы, действующие со стороны первой связывающей нити на бруски *1* и *2*, одинаковы по модулю и равны T_1, и аналогично одинаковы силы, действующие на бруски *3* и *2* со стороны связывающей их нити (сила T_2), однако $T_1 \neq T_2$.

Так как второй закон Ньютона сформулирован для материальной точки, то его надо написать для каждого бруска в отдельности; тогда имеем:

$$\begin{cases} \vec{F}+\vec{F}_{т1}+\vec{N}_1+\vec{T}_1+\vec{F}_{тр1}=m_1\vec{a}, \\ \vec{T}_1+\vec{F}_{т2}+\vec{N}_2+\vec{T}_2+\vec{F}_{тр2}=m_2\vec{a}, \\ \vec{T}_2+\vec{F}_{т3}+\vec{N}_3+\vec{F}_{тр3}=m_3\vec{a}. \end{cases}$$

Отсюда в скалярном виде получим:

$$\begin{cases} F-T_1-F_{тр1}=m_1a, \\ T_1-T_2-F_{тр2}=m_2a, \\ T_2-F_{тр3}=m_3a, \\ F_{т1}=N_1, \\ F_{т2}=N_2, \\ F_{т3}=N_3. \end{cases}$$

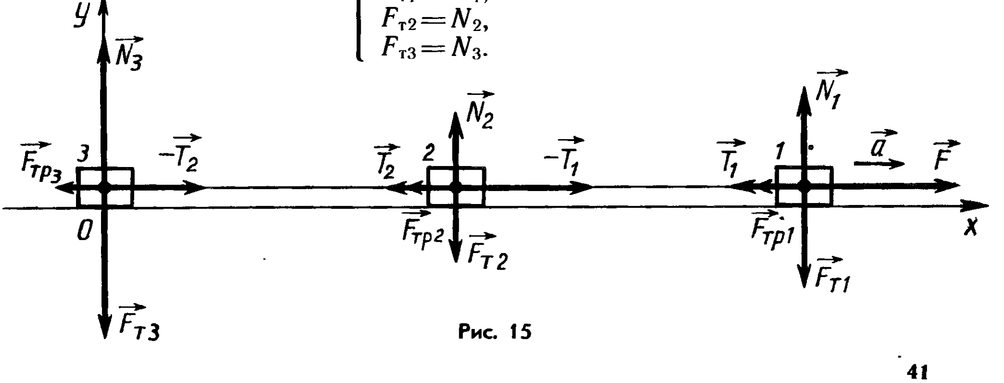


Рис. 15

При этом $F_{тр}=\mu mg$, $F_т=mg$.

Решая систему уравнений, получим:

$$a=\frac{F-\mu g(m_1+m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3},$$

после чего легко найти T_1 и T_2.

Итак, решая задачи на систему материальных точек, надо уравнения второго закона Ньютона записывать для каждой точки в отдельности.

Далее следует показать, что иногда систему координат полезно выбирать для каждого из тел системы в отдельности.

Задача 5. Два тела, соединенные невесомой нерастяжимой нитью, расположены на наклонной плоскости, как показано на чертеже (рис. 16). Определить ускорение системы тел, если $m_1=4$ кг, $m_2=1$ кг, $\alpha=30°$ (массой блока и трением в нем можно пренебречь).

Рассмотреть два случая. Коэффициент трения: а) $\mu=0,4$, б) $\mu=0,1$.

a — ?
$m_1=4$ кг
$m_2=1$ кг
$\alpha=30°$
$\mu_1=0,4$
$\mu_2=0,1$

Решение

Рассмотрим сначала случай, когда $\mu=0,4$. Очевидно, что, связав систему отсчета с Землей, было бы нерационально ограничиваться одной системой координат и следует выбрать две системы координат для каждого из тел в отдельности — систему xOy для тела *1* и систему $x'O'$ для тела *2* (рис. 16). Было бы хорошо выбрать системы координат так, чтобы оси Ox и $O'x'$ были направлены в сторону, в которую направлены ускорения тел *2* и *1* (сонаправленные системы координат). Выбор систем координат, указанный на чертеже, соответствует предположению о движении тела *1* вниз по наклонной плоскости, а тела *2* — вертикально вверх. Однако мы не знаем, как на самом деле направлены ускорения тел. И в принципе возможны три случая: тот, что указан на чертеже и соответствует движению тела *1* вниз по наклонной плоскости; случай, когда тело *1* будет двигаться вверх по наклонной плоскости; и случай, когда система тел

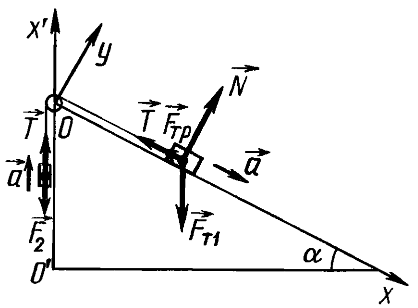


Рис. 16

останется в покое. Принципиальное различие этих трех случаев состоит в том, что в зависимости от того, какое предположение о движении мы сделали, будет в ту или иную сторону направлена и сила трения. А от того, куда направлена она, будет существенно меняться не только направление, но и модуль ускорения.

Рассмотрим случай, когда $\mu=0{,}4$ и оси направлены так, как на рисунке 16, считая, что тело *1* движется вниз по наклонной плоскости. Действуя по алгоритму, получим уравнения динамики для каждого из тел в следующем виде:

$$\begin{cases} m_1 g \sin\alpha - \mu N - T = m_1 a, \\ T - m_2 g = m_2 a, \\ N - m_1 g \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$a = \frac{m_1 \sin\alpha - \mu m_1 \cos\alpha - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

Подставляя числовые значения, получим: $a = -0{,}76$ м/с^2. Модуль ускорения не может быть отрицательным, следовательно, сделанное предположение о направлении движения тел неверно, и надо предположить, что система тел движется в противоположную сторону. Однако нельзя считать, что при этом ускорение будет $+0{,}76$ м/с^2, так как если тело *2* движется не вниз, а вверх по наклонной плоскости, то сила трения будет направлена в обратную сторону по сравнению с тем, как указано на чертеже, а это меняет вид уравнения динамики для данного тела.

Оставив выбор направления осей прежним и считая, что сила трения действует теперь не вверх, а вниз по наклонной плоскости, получим следующие уравнения динамики:

$$-T + m_1 g \sin\alpha + \mu N = -m_1 a,$$
$$-m_2 g + T = -m_2 a.$$

Отсюда найдем:

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin\alpha - \mu m_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2} \cdot g = -47{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Отрицательное значение модуля a означает, что и этот выбор направления движения неверен. Остается предположить, что при данных условиях задачи система не движется, т. е. ее ускорение $a=0$.

Теперь решим задачу при значении коэффициента трения $\mu=0{,}1$. Предположив, что система тел движется так, как указано на рисунке 16, получим $a=1{,}3$ м/с$^2>0$, а это означает, что сделанное предположение о направлении движения грузов справедливо. Если бы мы предположили, что тело *2* движется вверх по наклонной плоскости, то получили бы ускорение $a = -2{,}7$ м/с^2, т. е. опять не только знак, но и модуль ускорения был бы иной, что и понятно, так как при этом сила трения должна бы иметь обратное направление.

Итак, решение данной задачи показывает, что в ряде случаев полезно выбирать не одну систему координат, а две сонаправленные. Кроме того, решение задачи учит осмотрительности в определении направления силы трения.

Рассмотрим теперь решение задач по динамике криволинейного движения.

В средней школе решаются только задачи на динамику движения точки по окружности, притом, как правило, рассматривается лишь движение по окружности с постоянной по модулю скоростью. В основе решения задач на движение точки по окружности также лежит второй закон Ньютона, однако специфика решения этого класса задач состоит в способах нахождения ускорения точки. При решении задач на прямолинейное движение точки находятся составляющие ускорения на оси декартовой системы координат, в которой движется тело: $a_x=\frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y=\frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z=\frac{d^2z}{dt^2}$.

При рассмотрении движения точки по окружности легче находятся составляющие ускорения в направлении нормали и касательной к окружности $-a_n=\frac{v^2}{r}$ и $a_\tau=\frac{dv}{dt}$, так что $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$. Поэтому при описании движения точки по окружности выбираются ось нормали n, касательная ось τ и перпендикулярная к ним ось бинормали b (оси естественного трехгранника). Эта система осей $(n,\ \tau,\ b)$, строго говоря, не является системой координат. Особенность ее в том, что мы можем поместить начало этой системы в любую точку окружности, по которой движется материальная точка, т. е., вообще говоря, мы считаем эту систему осей движущейся вместе с точкой и в то же время пользуемся законами Ньютона, которые выполнимы лишь в ИСО, а ведь система отсчета, начало которой движется по окружности, не может считаться инерциальной. Следовательно, система осей $(n,\ \tau,\ b)$, строго говоря, не система отсчета, а система направлений, вдоль которых наиболее удобно определять составляющие ускорения в случае движения по окружности. Система же отсчета при решении таких задач связывается не с движущейся по окружности точкой, а с Землей (лабораторией), т. е. является ИСО. Это обстоятельство, как правило, не осознается, и задачи решаются в системе осей $(n,\ \tau,\ b)$, как в обычной инерциальной системе отсчета. Поэтому иногда у учащихся возникает вопрос: с чем связываются оси в таких задачах? Если с движущейся точкой, то почему такая система является инерциальной? При возникновении таких вопросов, видимо, и следует пояснить, что оси $(n,\ \tau,\ b)$ не являются, строго говоря, системой отсчета, так как это лишь направления, вдоль которых легче всего можно найти составляющие ускорения $a_n=\frac{v_2}{r}$, $a_\tau=\frac{dv}{dt}$, $a_b=0$ ($a_b=0$ во всех случаях, так как ось b перпендикулярна к плоскости траектории и вдоль нее нет движения, а потому и ускорения, и тем не менее эта ось нужна в решении задач, например в задачах о коническом маятнике).

В ряде задач на движение точек по окружности можно ограничиться одной осью n, так как в таких случаях, когда $|\vec{v}| = \text{const}$, $a_\tau = 0$.

Рассмотрим, как решается простейшая задача данного типа.

Задача 6. Автомобиль массой m движется по выпуклому мосту, радиус кривизны которого r. Определить силу давления автомобиля на мост в его средней точке (рис. 17), считая, что скорость автомобиля в ней v.

$F_т$ — ?

m
r
v

Решение

Выберем систему отсчета, связав ее с Землей (мостом). Так как точка, движущаяся по окружности, имеет ускорение, направленное по радиусу к центру (нормальное ускорение a_n), то проведем ось n, в направлении которой легко определять ускорение. Найдем силы, действующие на точку ($\vec{F}_т$ и $\vec{N}$). Напишем второй закон Ньютона в векторной форме: $\vec{F}_т + \vec{N} = m\vec{a}_n$ и перейдем к скалярной записи его: $F_т - N = ma_n$. Учитывая, что $a_n = \frac{v^2}{r}$, $F_т = mg$, а искомая сила $\vec{F}_т = -\vec{N}$, получим:

$$F_т = N = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right).$$

Как видно, алгоритм решения этих задач не отличается по форме от ранее сформулированного алгоритма решения задач на динамику прямолинейного движения точки, если не оговаривать специфику осей n, τ, b (следует ли это делать на уроках — решать учителю). Естественно, что при решении указанной выше задачи можно ограничиться лишь одной осью n. Необходимость осей τ и b будет осознаваться при решении других задач, что позволит постепенно дополнить пункт 1 алгоритма (вначале можно указать лишь необходимость введения оси n).

Задача 7. Шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, движется по окружности в вертикальной плоскости. Найти силу натяжения нити в точке, направление на которую из центра окружности составляет угол α с вертикалью (рис. 18), если скорость шарика в этой точке v.

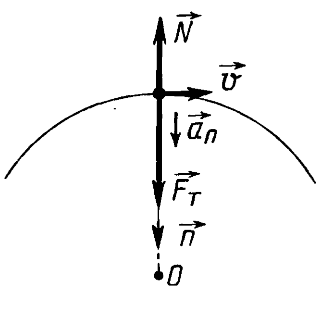


Рис. 17

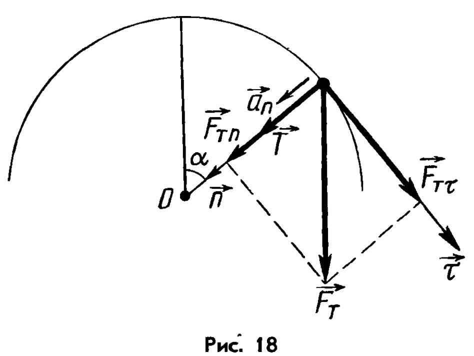


Рис. 18

T — ?
m
l
v
α

Решение

Телом отсчета будем считать лабораторию. Проведем ось n, вдоль которой направлено ускорение a_n. Очевидно, что здесь имеет смысл провести еще одну ось — касательную τ. Действительно, изобразив силы $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$, можно видеть, что отлична от 0 сумма проекций сил и на ось n, и на касательную к окружности. Следовательно, у точки есть не только нормальное ускорение $\vec{a}_n$, характеризующее быстроту изменения скорости по направлению, но и ускорение вдоль касальной. И хотя в основном курсе физики средней школы (во всяком случае в VIII классе) касательное (тангенциальное) ускорение не изучается и в данной задаче с ним не приходится оперировать, все же следует указать, что так как проекция силы $\vec{F}_т$ на касательную отлична от нуля, то у точки есть ускорение вдоль этого направления. Очевидно, что это ускорение, называемое тангенциальным ($\vec{a}_\tau$), направлено здесь так же, как и скорость, и характеризует быстроту изменения скорости по модулю — ведь составляющая силы $\vec{F}_т$ вдоль касательной направлена так же, как и скорость, и приводит к увеличению модуля скорости.

Итак, имеем:

$$\vec{F}_{тn} + \vec{T} = m\vec{a}_n.$$

$F_{т\tau} = ma_\tau$ (это последнее уравнение при решении задачи не используется).

В скалярной форме:

$$F_{тn} + T = ma_n \quad \text{или} \quad mg\cos\alpha + T = m\frac{v^2}{r}.$$

Откуда

$$T = m\left(\frac{v^2}{r} - g\cos\alpha\right).$$

Необходимость оси бинормали ощущается при решении следующей задачи.

Задача 8. На горизонтальном диске, вращающемся равномерно с угловой скоростью ω, установлен отвес, шарик которого имеет массу m. Определить угол отклонения отвеса (рис. 19), если радиус окружности, по которой движется шарик, равен r.

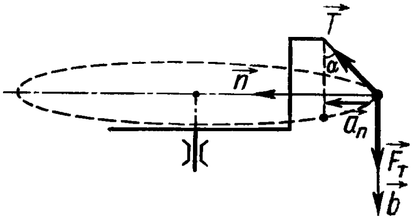


Рис. 19

α — ?
ω
m
r

Решение

В качестве тела отсчета выберем лабораторию. Проведем ось n (можно провести и ось τ, но при решении задачи она не будет использоваться). Изобразим силы, действующие на шарик ($\vec{F}_т$ и $\vec{T}$). Очевидно, что сумма проекций сил в направлении n отлична от 0 и сообщает нормальное ускорение. Имеет смысл вопрос о том, какова сумма проекции сил в вертикальном направлении, поэтому полезно провести ось $b \perp n$. Итак, имеем:

$$\begin{cases} \vec{T}_n = m\vec{a}_n, \\ \vec{F}_b + \vec{F}_т = 0, \end{cases}$$

так как вдоль b точка не движется, то $v = 0$ и $a_b = 0$, отсюда:

$$\begin{cases} T_b = F_т, \\ T_n = ma_n. \end{cases}$$

Так как $T_n = T \sin\alpha$, $a_n = \omega^2 r$, то

$$T \sin\alpha = \omega^2 rm.$$

Так как $T_b = T\cos\alpha$, а $F_т = mg$, то

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Отсюда $$\frac{mg}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = \omega^2 rm \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

При решении этой задачи полезно предложить учащимся описать и объяснить поведение отвеса в системе отсчета, связанной с диском (K').

В этой системе отсчета отвес находится в наклонном положении и покоится, т. е. $v' = 0$, а потому и $a' = 0$.

Очевидно, что и в этой системе отсчета на шарик действуют те же силы — $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$. Так как они направлены под углом друг к другу, то их равнодействующая отлична от 0, т. е. имеем $\vec{F}_т + \vec{T} \neq 0$. Но $a' = 0$, что явно противоречит закону Ньютона (есть сила, но нет ускорения). Отсюда следует вывод о том, что вращающиеся системы отсчета не являются инерциальными, в них не выполняются законы Ньютона.

Этот вывод позволяет поставить следующую проблему. Земля вращается вокруг своей оси и связанная с нею система отсчета является неинерциальной. Но тогда законы Ньютона несправедливы по отношению к системам отсчета, связанным с Землей, а до сих пор мы ими пользовались. Обсуждение этой проблемы приводит к выводу, что системы отсчета, связанные с Землей, действительно не являются строго инерциальными, и можно обнаружить отступление от законов Ньютона. Более инерциальной является система отсчета, связанная с Солнцем и звездами, но и она не является строго инерциальной. Следовательно, законы Ньютона выполняются на

Земле не абсолютно строго, но в большинстве случаев можно с успехом пользоваться ими, пренебрегая незначительными отступлениями.

Решение этой задачи, как и задачи 2, позволяет рассмотреть важные теоретические вопросы, а это показывает, что функции решения задач не сводятся лишь к упражнениям, что решение задач можно использовать для получения важных теоретических выводов.

Итак, в процессе решения задач алгоритм дополняется следующими частными комментариями, конкретизирующими основные предписания:

1. При решении задач с использованием законов Ньютона необходимо выбирать ИСО и не пользоваться системой отсчета, связанной с ускоренно движущимися телами.

2. Если в задаче не требуется определить координату или скорость точки, то начало системы координат можно поместить в любую точку тела отсчета; в противном случае его следует поместить в такую точку, чтобы удобно было определять начальные условия.

3. В ряде задач можно выбирать две системы координат, что облегчает нахождение проекций сил и ускорений для отдельных тел системы (или отдельных этапов движения).

4. Если в условии задачи говорится о системе материальных точек, то уравнения второго закона Ньютона надо писать для каждого тела системы в отдельности и решать полученную систему уравнений.

В качестве упражнений в применении алгоритма могут быть использованы задачи из сборника задач А. П. Рымкевича и П. А. Рымкевича №№ 248, 236, 241, 270, 283, 284, 288.

§ 4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО СТАТИКЕ

Для успешного овладения методом решения задач по статике учащиеся должны усвоить следующие понятия и идеи:

— понятие силы;
— понятие о сложении сил и равнодействующей;
— понятие о плече силы и моменте силы;
— два условия равновесия тела;
— понятие о центре тяжести тела.

Понятие силы формировалось при изучении динамики материальной точки. В статике, как правило, рассматривается твердое тело, и очень важно научить учащихся четко определять точку приложения силы. При этом надо показать, что точку приложения силы можно переносить в теле вдоль линии действия силы и это не изменит результат действия силы на тело.

В том случае, когда все силы можно привести в одну точку, перенося их вдоль линии действия, их можно заменить одной силой — равнодействующей. Надо иметь в виду, что не всегда система сил может быть сведена к равнодействующей. Если на тело действуют две равные и противоположно направленные силы $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, направленные не по одной прямой (пара сил), то эта система сил не имеет равнодействующей. Она будет производить вращающее действие, определяемое моментом пары сил $M = F \cdot l$, где $F = F_1 = F_2$, а l — плечо пары сил, равное кратчайшему расстоянию между линиями действия сил. Пара сил не имеет равнодействующей, но при ее действии на тело векторная сумма сил равна 0, т. е. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Поэтому, формулируя первое условие равновесия, надо говорить о равенстве нулю не равнодействующей, а векторной суммы сил. Равнодействующая — это такая сила, действие которой равноценно действию нескольких сил, которые она заменяет. Равнодействующая находится как сумма векторов сил, но это не определение ее, а правило нахождения. Следовательно, понятия «равнодействующая» и «векторная сумма сил» не тождественны.

Для усвоения материала этого раздела очень важно убедить учащихся в том, что для оценки вращающего действия силы на тело, имеющее ось вращения, ранее введенного понятия силы недостаточно, так как вращающее действие силы зависит не только от модуля силы, но и от положения линии действия силы по отношению к оси. Чем дальше линия действия данной силы от оси, тем больше вращающее действие. Этот вывод можно получить на основе опыта, в котором вращению диска на горизонтальной оси препятствует прикрепленная к нему вертикально расположенная пружина, по растяжению которой оценивается вращающее действие силы; при этом меняется сначала значение силы (число грузов, подвешенных к нити, прикрепленной к диску), а затем при той же точке приложения меняется линия действия силы (нить перекидывается через блок).

В основе решения всех задач по статике в средней школе лежат два уравнения: $\sum_i \vec{F}_i = 0$; $\sum_i M_i = 0$, которые в школьном курсе физики называют условиями равновесия. (Заметим, что в механике их называют уравнениями равновесия, а условиями равновесия называют уравнения, не включающие связи, например принцип виртуальных перемещений, принцип минимума потенциальной энергии.)

Во втором условии равновесия используется понятие момента силы относительно оси. В школьном курсе физики рассматриваются лишь такие задачи, в которых силы лежат в одной плоскости, перпендикулярной к оси. Пересечение оси с плоскостью дает точку, поэтому иногда говорят о моменте силы относительно этой точки. Однако надо учитывать, что в механике помимо скалярной величины — момент силы относительно оси — вводится и другая величина — $M = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный в точку приложения силы. Поэтому в школьном курсе следует говорить о моменте силы относительно оси, а не точки, хотя в задачах, решаемых в школьном курсе (в которых силы лежат в плоскости, перпендикулярной к оси), модули момента силы относительно оси и точки совпадают.

Применение условий равновесия к решению задач по статике вызывает у школьников ряд трудностей. К числу их, прежде всего, относится определение плеча при нахождении момента силы. Наиболее распространенная ошибка учащихся при этом состоит в том, что за плечо силы принимается расстояние от точки приложения силы до оси, а не длина перпендикуляра, опущенного на линию действия силы из точки пересечения оси с плоскостью, в которой лежит сила. В связи с этим следует на ряде задач показать, что эти понятия нельзя отождествлять.

Другая трудность состоит в отыскании оси, относительно которой целесообразно определять моменты сил. Если тело находится в равновесии, то никакой явной оси вращения, как правило, нет, что и затрудняет учащихся. В связи с этим надо систематически разъяснять, что ось вращения можно провести через любую точку, так как если тело находится в равновесии, то относительно какой угодно оси оно не вращается, а значит, относительно любой оси сумма моментов сил должна равняться нулю, поэтому ось вращения можно провести через любую точку. Однако целесообразнее всего ее проводить через ту точку, через которую проходит наибольшее число линий действия сил, так как плечи, а значит, и моменты таких сил будут равны нулю и уравнение будет иметь наиболее простой вид. Очень важно при решении каждой задачи подчеркивать, через какую точку проходит ось и то, что она перпендикулярна плоскости чертежа.

Третья трудность связана с определением сил реакции вообще и сил реакции, действующих в шарнирах, в частности. Этот вопрос мы подробнее рассмотрим позже, а пока лишь отметим следующее. Силы реакции отличаются от так называемых активных сил тем, что они не могут привести тело в движение. Силы реакции заменяют действие связей, ограничивающих движение тела. Модуль и направление сил реакции определяются модулем и направлением активных сил и направлением возможного движения тела. Точки приложения сил реакции находятся в точках соприкосновения тел и связей. Если направление действия активных сил известно, то направление сил реакции выбирается противоположным направлению возможного движения тела под действием активных сил. Если этого сделать нельзя, то направление сил реакции выбирается предположительно, и о действительном их направлении можно судить по знаку проекций сил реакций, полученному в ходе решения.

Среди задач по статике в средней школе можно выделить следующие типы, определяющие подбор и последовательность решения задач по данной теме:

1) задачи, в которых используется только первое условие равновесия;

2) задачи, в которых используется только второе условие равновесия;

3) задачи, в которых должны использоваться оба условия равновесия;

4) задачи на нахождение центра тяжести.

После рассмотрения первого условия равновесия следует решить задачу на его применение, которая позволяла бы сформулировать ряд положений алгоритма. Такой может быть, например, следующая задача.

Задача 1. При каком предельном угле наклона плоскости к горизонту находящееся на ней тело еще не будет скользить вдоль плоскости, если коэффициент трения между телом и поверхностью μ?

α — ?

μ
$v=0$

Решение

1. Выберем систему отсчета, как указано на чертеже (рис. 20).

2. Очевидно, что тело находится в равновесии, следовательно, векторная сумма сил, действующих на тело, должна равняться нулю. Значит, для использования первого условия равновесия надо найти все силы, приложенные к телу. На тело действуют сила тяжести $\vec{F}_т$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная в сторону, противоположную возможному движению.

3. Напишем первое условие равновесия в векторной форме:

$$\vec{F}_т+\vec{N}+\vec{F}_{тр}=0.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} F_т \sin\alpha - F_{тр}=0, \\ -F_т \cos\alpha + N=0. \end{cases}$$

4. Выразим силы через величины, от которых они зависят. Сила трения покоя может принимать различные значения. При предельном угле наклона плоскости она будет иметь максимальное значение, равное силе трения скольжения, т. е. $F_{тр}=\mu N$. Сила тяжести $F_т=mg$.

5. Решение системы уравнений дает

$$\operatorname{tg}\alpha=\mu.$$

Итак, решение задач по статике, как и решение задач по динамике, требует выбора системы отсчета, отыскания сил и их выражения через величины, от которых они зависят.

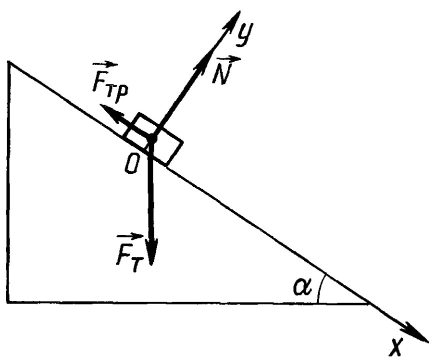


Рис. 20

В качестве упражнений в применении первого условия равновесия можно решить следующую задачу.

Задача 2. К середине невесомого троса, концы которого жестко закреплены, подвешен груз массой m, под действием которого трос провисает так, что каждая из его половин образует угол α с горизонталью. Определить силы, с которыми трос действует на груз.

T_1, T_2 — ?
m
α

Решение

Выбрав систему отсчета, как показано на чертеже (рис. 21), найдем силы, действующие на груз — $\vec{F}_т$, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$.

Применим первое условие равновесия:

$$\vec{F}_т+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} T_1\cos\alpha-T_2\cos\alpha=0, \\ T_1\sin\alpha-T_2\sin\alpha-F_т=0. \end{cases}$$

Следовательно, $T_1=T_2=T$ и $T=\dfrac{mg}{2\sin\alpha}$.

С такой же по модулю силой груз будет действовать на части троса. Отсюда видно, что чем меньше угол провисания, тем большие силы действуют на трос, и при малом α они могут во много раз превышать вес груза, подвешенного к тросу. Это объясняет возможность обрыва сильно натянутых проводов при их обледенении, возможность вытаскивания застрявшей автомашины за счет небольшой силы, действующей на середину троса, связывающего автомобиль с какой-либо жесткой опорой (например, деревом).

После изучения второго условия равновесия следует решить задачу на его применение, после чего можно будет на основе анализа решенных задач сконструировать алгоритм.

Задача 3. Однородную балку массой m, лежащую на земле, поднимают в вертикальное положение с помощью троса, прикрепленного к одному из ее концов и расположенного под углом α к горизонту. Какова будет сила натяжения троса в начальный момент отрыва балки от поверхности Земли?

T — ?
m
α

Решение

1. Выберем систему отсчета (рис. 22).

2. Определим силы, действующие на балку. На балку действует сила тяжести $\vec{F}_т$, приложенная к центру тяжести, который ввиду однородности балки расположен посередине ее, сила натяжения троса $\vec{T}$ и сила реакции со стороны Земли в точке B — $\vec{N}$, направление которой неизвестно. Очевидно лишь, что она не перпендикулярна к Земле, так как в этом случае не могло бы быть выполнено первое условие равновесия. Если не искать направление силы реакции, то нельзя использовать и первое условие равновесия.

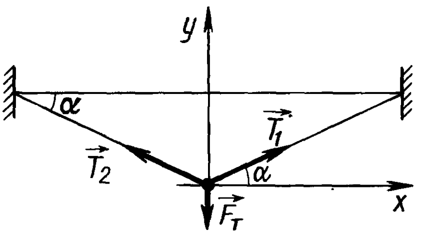


Рис. 21

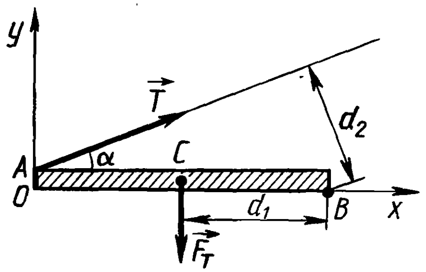


Рис. 22

3. Так как балка находится в равновесии, то выполнимо и второе условие равновесия. Попробуем решить задачу, используя только его. А чтобы не определять момент силы реакции, будем считать, что ось проходит через точку ее приложения (точку B) и перпендикулярна плоскости чертежа. Тогда при любом направлении этой силы момент ее будет равен нулю.

4. Определим плечи сил $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$, введя длину балки l:

$$d_1 = \frac{l}{2}, \quad d_2 = l \sin \alpha.$$

Найдем моменты сил:

$$M_1 = F_т d_1 = F_т \frac{l}{2} (F_т = mg),$$
$$M_2 = Tl \sin \alpha.$$

Применим второе условие равновесия, учитывая, что момент силы M_1 вызывает вращение балки относительно оси по часовой стрелке, а момент силы M_2 стремится вызвать вращение в противоположном направлении (этим и обусловлены знаки моментов сил):

$$mg \frac{l}{2} - Tl \sin \alpha = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{mg}{2 \sin \alpha}.$$

Обобщая действия, выполненные при решении обеих задач, можно сформулировать следующий *алгоритм решения задач по статике:*

1. Выбрать систему отсчета.

2. Найти все силы, приложенные к телу, находящемуся в равновесии.

3. Написать уравнение, выражающее первое условие равновесия, в векторной форме и перейти к скалярной его записи.

4. Выбрать ось, относительно которой целесообразно определять моменты сил.

5. Определить плечи сил и написать уравнение, выражающее второе условие равновесия.

6. Исходя из природы сил, выразить силы через величины, от которых они зависят, и решить полученную систему уравнений относительно искомых величин.

В качестве примера того, как применяется этот алгоритм, рассмотрим решение следующей задачи, которая полезна для того, чтобы учащиеся научились выбирать ось вращения и определять плечи сил.

Задача 4. Однородная лестница прислонена к идеально гладкой стене. При каком предельном угле наклона лестницы к полу она еще не проскальзывает, если коэффициент трения между полом и лестницей μ?

Решение

1. Выберем систему отсчета, как показано на рисунке 23.

2. Найдем приложенные к лестнице силы. На лестницу действуют сила тяжести $\vec{F}_т$, приложенная к центру — точке C, сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная в сторону, противоположную возможному движению нижнего конца лестницы, силы реакции опор $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, перпендикулярные к опорам.

3. Напишем первое условие равновесия:

$$\vec{F}_т+\vec{N}_1+\vec{F}_{тр}+\vec{N}_2=0,$$

откуда

$$\begin{cases} N_2-F_{тр}=0, \\ N_1-F_т=0. \end{cases}$$

4. Проведем ось через точку A, через которую проходят линии действия двух сил $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр}$, так как при таком выборе моменты этих сил равны нулю (ось перпендикулярна плоскости чертежа).

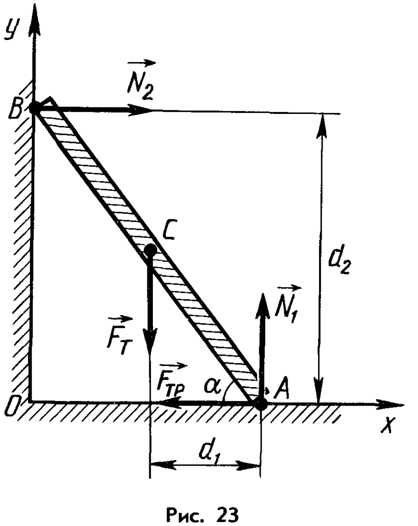


Рис. 23

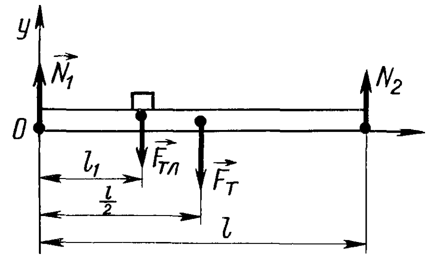


Рис. 24

5. Определим плечи этих сил — d_1 и d_2 и напишем второе условие равновесия, введя длину лестницы l:

$$F_т\frac{l}{2}\cos\alpha - N_2 l\sin\alpha = 0.$$

6. Выразим силы через величины, от которых они зависят: $F_т = mg$, $F_{тр} = \mu N_1$ (речь идет о максимальной силе трения покоя, которая равна силе трения скольжения, что и позволяет считать искомый угол α предельным углом).

Итак, решая систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} N_2 = \mu N_1, \\ N_1 = mg, \\ \frac{1}{2}mg\cos\alpha - N_2\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\mu}.$$

В порядке упражнений в самостоятельном применении алгоритма полезно решить следующую задачу, показывающую возможность использования как двух, так и одного условия равновесия.

Задача 5. Балка массой m и длиной l опирается своими концами на опоры. На расстоянии l_1 от левого конца балки лежит груз массой m_1. Определить силы давления балки на опоры.

N_1', N_2' — ?
m
m_1
l
l_1

Решение

Выберем систему отсчета, как показано на рисунке 24. На балку действуют 4 силы: сила тяжести балки $\vec{F}_т$, сила тяжести груза $\vec{F}_{тл}$, реакции опор $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Искомые силы давления балки на опоры по третьему закону Ньютона равны силам реакции ($\vec{N}_1' = -\vec{N}_1$, $\vec{N}_2' = -\vec{N}_2$). Учащиеся часто и эти силы прикладывают к балке, поэтому надо четко разъяснить, где точки их приложения.

По первому условию равновесия

$$\vec{F}_т + \vec{F}_{тл} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0 \text{ и } N_1 + N_2 - F_т - F_{тл} = 0.$$

В этом уравнении два неизвестных, поэтому воспользуемся вторым условием равновесия, считая, что ось проходит через левый конец балки перпендикулярно к плоскости чертежа. Тогда плечо силы $\vec{N}_1$ равно 0, плечо силы $\vec{F}_т - \frac{l}{2}$, плечо силы $\vec{F}_{тл} - l_1$, плечо силы $\vec{N}_2 - l$. Считая, что моменты сил, стремящихся вызвать вращение против часовой стрелки, положительны, а в противоположную сторону — отрицательны, напишем правило моментов:

$$-F_{тл}l - F_т\frac{l}{2} + N_2 l = 0,$$

откуда

$$N_2 = \frac{2m_1 g l_1 + mgl}{2l}.$$

Из первого уравнения можно найти

$$N_1 = F_т + F_{тл} - N_2,$$

где сила N_2 уже определена.

Далее полезно показать, что задачу можно было бы решить, используя лишь второе условие равновесия, написав его сначала относительно оси, проходящей через левый, а затем относительно оси, проходящей через правый конец балки.

В предыдущих задачах направления сил реакции определялись относительно просто. Однако не всегда их направления столь уж очевидны для учащегося. Вот пример такой задачи, в которой направление силы реакции можно вначале определить лишь в порядке предположения.

Задача 6. На однородный стержень *OB* массой *m*, закрепленный у стенки шарнирно в точке *O*, действует груз, привязанный к нити, которая перекинута через блок, как указано на чертеже (рис. 25), и образует угол α со стержнем. Определить силу тяжести груза и силу реакции в шарнире.

$F_{т1}$ R — ?
α m

Решение

Выбрав систему отсчета, как указано на рисунке 25, найдем приложенные к стержню силы. На стержень действует сила тяжести $\vec{F}_т$, приложенная в центре тяжести — точке *C*, сила натяжения нити $\vec{T}$, которая равна $F_{т1}$, если считать нить невесомой, и реакция в шарнире в точке $O - \vec{R}$. Как она направлена? Если бы нить была перпендикулярна стержню, т. е. $\alpha = 90°$, то сила $\vec{R}$ была бы направлена вдоль оси *Oy*, так как никакие активные силы вдоль *Ox* не действуют и в точке *A* не будет возникать сил, препятствующих возможному движению вдоль *Ox*.

При том условии задачи, которое нам задано ($\alpha \neq 90°$), активные силы ($\vec{F}_т$ и $\vec{T}$) стремятся вызвать движение стержня и вдоль оси *Ox*, и вдоль оси *Oy*, следовательно, сила реакции $\vec{R}$ направлена так, что есть отличные от нуля составляющие ее вдоль обеих осей, т. е. сила $\vec{R}$ направлена не вдоль стенки, а под углом к ней. Причем, учитывая, как направлены активные силы $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$, можно видеть, что сила $\vec{R}$

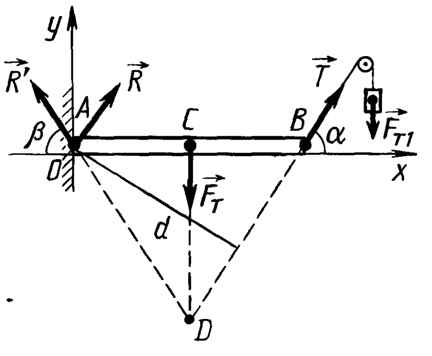


Рис. 25

должна быть направлена так, чтобы ее составляющие были направлены в стороны, противоположные возможным движениям стержня в направлениях осей Ox и Oy, т. е. сила реакции должна быть направлена, как указано на чертеже (см. вектор $\vec{R}'$).

Допустим, учащийся не сумел правильно определить направление силы реакции и предположил, что она направлена так, как изображен на чертеже вектор $\vec{R}$. Рассмотрим получаемое при этом решение. Первое условие равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{F}_т+\vec{T}+\vec{R}=0, \\ T\cos\alpha+R_x=0, \\ -F_т+T\sin\alpha+R_y=0. \end{cases}$$

Приняв, что ось проходит через точку O, и определив плечо силы $\vec{T}$ (d), напишем второе условие равновесия:

$$F_т\frac{l}{2}-Td=0 \quad (d=l\sin\alpha).$$

Отсюда

$$T=\frac{F_т}{2\sin\alpha}, \quad F_{т1}=T.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$R_y=F_т-\frac{F_т\sin\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{F_т}{2}; \quad R_x=-\frac{F_т\cos\alpha}{2\sin\alpha}=-\frac{F_т}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отрицательное значение проекции R_x означает, что сила реакции в действительности направлена иначе, чем изображен вектор $\vec{R}$, а именно — составляющая силы реакции вдоль оси Ox должна быть направлена противоположно оси Ox, т. е. реакция в шарнире должна быть направлена так, как изображен на чертеже вектор $\vec{R}'$. Искомое значение модуля силы будет:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\frac{F_т}{2}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{F_т}{2\sin\alpha}.$$

Итак, если направление силы реакции неизвестно, то можно выбрать его предположительно, а о действительном направлении ее судить по знакам проекций силы реакции, которые получаются в ходе решения.

Рассмотрим другой способ определения сил реакции, который опирается на теорему о трех силах. Суть ее в том, что если при действии трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, тело находится в равновесии, то их линии действия пересекаются в одной точке. Например, в задаче 6 сила реакции в шарнире должна быть направлена так, чтобы линии ее действия пересекались в той же точке D, в которой пересекаются линии действия сил $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$ (в противном случае сумма моментов сил относительно точки D не будет равна нулю, а если тело в равновесии, то это условие должно выполняться относительно любой оси, в том числе и той, которая не принадлежит телу). Поэтому чтобы найти, как направлена сила реакции в шарнире, надо найти точку пересечения двух сил $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$ (точку D) и провести через нее и точку O шарнира линию, вдоль которой и должна быть направлена сила реакции.

Рассмотрим еще одну задачу, которую можно решить с использованием данной теоремы.

Задача 7. Однородный стержень массой m шарнирно закреплен у стенки и образует с ней угол α, упираясь своей серединой на стержень, жестко закрепленный в стенке и расположенный перпендикулярно к ней. Определить силы реакции, действующие на стержень со стороны шарнира и упора.

$\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — ?
m
α

Решение

Выполнив чертеж и выбрав систему отсчета, как показано на рисунке 26, найдем приложенные к стержню силы. На него действуют сила тяжести $\vec{F}_т$, приложенная в центре тяжести — точке C, сила реакции упора, действующая в этой же точке перпендикулярно стержню ($\vec{N}_1$), и сила реакции в шарнире $\vec{N}_2$. Эта сила должна быть направлена так, чтобы линии действия всех трех сил пересекались в одной точке. Но так как силы $\vec{F}_т$ и $\vec{N}_1$ проходят через точку C, то и линия действия силы $\vec{N}_2$ должна проходить через точку C, т. е. сила $\vec{N}_2$ должна действовать вдоль стержня, причем она должна быть направлена противоположно равнодействующей сил $\vec{F}_т$ и $\vec{N}_1$, т. е. так, как указано на рисунке 26.

Запишем первое условие равновесия:

$$\vec{F}_т + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} N_1 \cos\alpha - N_2 \sin\alpha = 0, \\ N_1 \sin\alpha + N_2 \cos\alpha = mg, \end{cases}$$

следовательно, $N_1 = N_2 \operatorname{tg}\alpha$ и $N_2 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha + N_2 \cos\alpha = mg$. Тогда

$$N_2 = mg \cos\alpha, \quad N_1 = mg \sin\alpha.$$

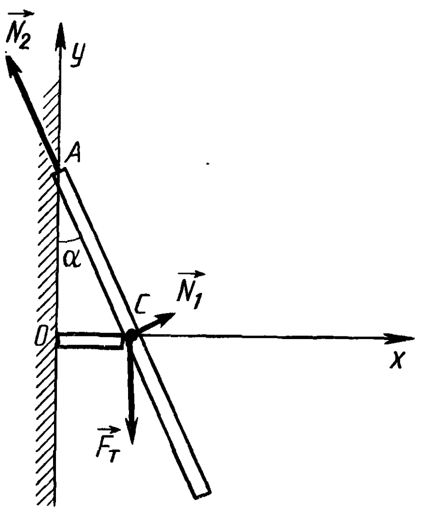


Рис. 26

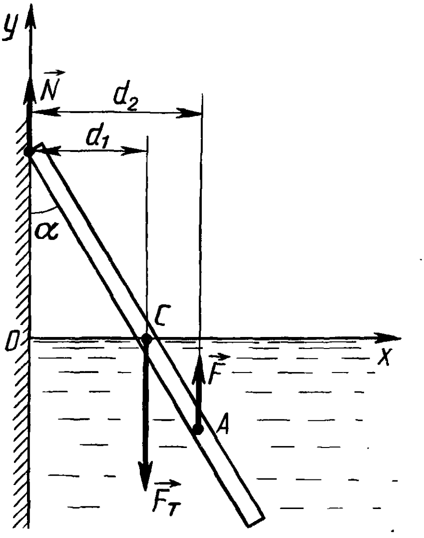


Рис. 27

Для повторения гидростатики и формирования умения определять силу реакции в шарнире полезно далее решить следующую задачу.

Задача 8. Однородный стержень, шарнирно укрепленный одним концом на вертикальной стенке сосуда с жидкостью, имеющей плотность ρ_1, плавает в жидкости, будучи отклонен от стенки на некоторый угол. Определить плотность материала стержня и реакцию в шарнире, если стержень погружен в жидкость до середины, а объем стержня V.

ρ_2, N — ?
ρ_1 V

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на чертеже (рис. 27). Рассмотрим действующие на стержень силы. Это будут сила тяжести $\vec{F}_т$, приложенная в точке C — центре тяжести, выталкивающая сила $\vec{F}$, приложенная в точке A — центре тяжести вытесненной жидкости, и реакция шарнира $\vec{N}$, которая обусловлена действием активных сил $\vec{F}_т$ и $\vec{F}$. Силы $\vec{F}_т$ и $\vec{F}$ параллельны, поэтому реакция $\vec{N}$ может быть направлена только вдоль стенки.

По первому условию равновесия

$$\vec{F}_т+\vec{F}+\vec{N}=0,$$

что в проекциях на ось Oy дает

$$-F_т+F+N=0.$$

Тогда

$$N=F_т-F.$$

Зная силы $F_т$ и F, можем найти N:

$$F_т=m_2g=\rho_2Vg,$$

где m_2 — масса стержня, а V — его объем;

$$F=m_1g=\rho_1g\frac{V}{2},$$

где m_1 — масса вытесненной жидкости, а $\frac{V}{2}$ — ее объем.

Тогда

$$N=F_т-F=\rho_2gV-\rho_1g\frac{V}{2}=gV\left(\rho_2-\rho_1\cdot\frac{1}{2}\right).$$

Для того чтобы найти N, нужно знать ρ_2. Воспользуемся вторым условием равновесия.

Найдем сумму моментов всех сил, действующих относительно оси, проходящей через шарнир, перпендикулярно плоскости чертежа. Момент силы $\vec{N}$ относительно этой оси равен 0, так как сила пересекает ось и плечо ее равно 0. Получаем:

$$F_тd_1-Fd_2=0,$$

где $d_1=\frac{l}{2}\sin\alpha$, а $d_2=\frac{3}{4}l\sin\alpha$.

Тогда

$$F_т\frac{l}{2}\sin\alpha-F\cdot\frac{3}{4}\cdot l\sin\alpha=0,$$

$$\frac{F_т}{2}-\frac{3}{4}F=0,\ 2F_т-3F=0.$$

Подставляя $F_т$ и F, получаем:

$$2\rho_2gV-3\rho_1g\frac{V}{2}=0,$$

откуда

$$\rho_2=\frac{3}{4}\rho_1.$$

Тогда

$$N=gV\left(\frac{3}{4}\rho_1-\frac{\rho_1}{2}\right)=\frac{\rho_1gV}{4}.$$

Задача 9. На концах стержня длиной l и массой m укреплены два шара радиусами r_1 и r_2 и массами m_1 и m_2. Найти центр тяжести полученной системы (штанги).

x_C — ?
m
m_1
m_2
l
r_1
r_2

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 28. Полагая, что центр тяжести системы есть точка C, будем считать, что штанга подвешена в этой точке. В этом случае она должна находиться в равновесии. Тогда на нее действуют следующие силы: $\vec{F}_{т_1}$, $\vec{F}_{т_2}$, $\vec{F}_т$ и $\vec{T}$, где $\vec{T}$ — сила натяжения в подвесе.

Исходя из условий равновесия, имеем:

$$\vec{F}_{т1}+\vec{F}_{т2}+\vec{F}_т+\vec{T}=0,$$

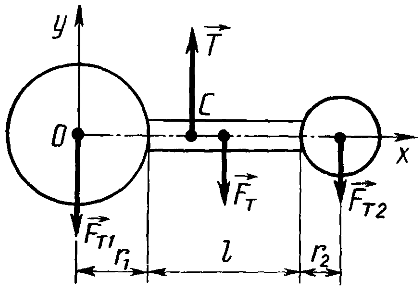


Рис. 28

$$F_{т2}(r_1+l+r_2)+F_т\left(r_1+\frac{l}{2}\right)-Tx_C=0,$$
$$-F_{т1}-F_{т2}-F_т+T=0$$

(здесь x_C— координата центра тяжести).

Отсюда

$$T=F_{т1}+F_{т2}+F_т,\ x_C=\frac{m_2(r_1+r_2+l)+m(r_1+\frac{l}{2})}{m_1+m_2+m}.$$

Задачу можно решить, используя лишь второе условие равновесия.

Таким образом, решение приведенных выше задач позволяет сформулировать ряд дополнений к основным предписаниям алгоритма, в которых раскрывается порядок выполнения этих предписаний.

1. Если направление силы реакции неизвестно, то можно выбрать его предположительно и по знаку проекций судить о правильности определения направления силы реакции, либо же воспользоваться теоремой о трех силах.

2. Для определения центра тяжести тела надо предположить его месторасположение и считать, что в этой точке тело подвешено и потому будет находиться в равновесии, что позволяет применить условия равновесия.

3. В ряде задач можно использовать лишь второе условие равновесия, написав дважды его уравнение — сначала для одной оси, а потом считая, что ось проходит через другую точку.

В качестве упражнений в применении алгоритма могут быть использованы задачи из сборника задач А. П. Рымкевича и П. А. Рымкевича №№ 301, 303, 321, 325, 334.

§ 5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Для успешного решения задач с использованием закона сохранения импульса учащиеся должны в первую очередь усвоить следующее:

1. Решение основной задачи механики в ряде случаев упрощается, если пользоваться не законами динамики, а выведенными из них следствиями — законами сохранения импульса и энергии,

которые избавляют от необходимости анализировать и учитывать силы, с которыми взаимодействуют тела (эти силы при взаимодействии могут сложным образом меняться, что и осложняет применение законов динамики).

2. Важнейшей динамической характеристикой материальной точки является величина «импульс точки», которая служит мерой движения и позволяет написать второй закон динамики для точки в виде $\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v})$.

3. Для системы материальных точек существуют два закона, связанных с понятием импульс:

а) $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ — закон изменения импульса системы,

б) $\Delta\vec{p} = 0$ — закон сохранения суммарного импульса системы.

4. Закон $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ по форме совпадает с основным законом динамики в его ньютоновской формулировке, но в него входит уже не изменение импульса точки, а изменение суммарного импульса системы точек, и не равнодействующая всех сил, приложенных к точке, а векторная сумма внешних сил, действующих на тела системы (главный вектор внешних сил), которую нельзя отождествлять с равнодействующей.

5. Закон изменения импульса справедлив всегда для механической системы материальных точек; закон сохранения импульса, строго говоря, справедлив лишь для замкнутых систем.

6. Поскольку замкнутая система — это идеализация, то в реальных случаях закон сохранения импульса применим в векторной форме лишь для кратковременных (ударных) взаимодействий, при которых внутренние силы много больше внешних, каковыми потому и можно пренебречь.

В случае, если система незамкнутая, но сумма проекций внешних сил на какую-либо ось равна нулю $-F_x = 0$, то $\Delta p_x = 0$ и $p_x = \mathrm{const}$, т. е. сохраняется сумма проекций импульсов на данную ось (что очень часто и имеет место).

Таков необходимый минимум знаний, обеспечивающий успешность решения задач, связанных с понятием «импульс». Однако в школьном курсе физики закон изменения импульса системы не изучается. И тем не менее мы сочли необходимым включить этот закон в перечень необходимых знаний, чтобы этот перечень был целостным и полным и учитель не упускал бы из виду данный закон. К тому же (и это — главное) закон изменения импульса системы, бесспорно, должен изучаться на факультативных занятиях, что позволит учащимся лучше понять границы применимости закона сохранения импульса и решать с его использованием более широкий класс задач. В связи с этим приведем вывод, позволяющий учащимся осознать существование двух законов, связанных с понятием «импульс». Этот вывод может быть дан на факультативных занятиях по механике.

Пусть имеется система двух материальных точек с массами m_1 и m_2, которые движутся со скоростями $\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$ и взаимодействуют друг с другом с силами $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$ (внутренние силы). Пусть внешние силы, действующие на точки, соответственно $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

В результате взаимодействия скорости точек изменились, став $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Напишем для каждой точки второй закон Ньютона:

$$(\vec{F}_1+\vec{f}_{12})\Delta t=m_1\vec{v}_1-m_1\vec{v}_{01},$$

$(\vec{F}_2+\vec{f}_{21})\Delta t=m_2\vec{v}_2-m_2\vec{v}_{02}$ (здесь Δt — время взаимодействия). Сложим почленно эти уравнения, учтя, что по третьему закону Ньютона $\vec{f}_{12}=-\vec{f}_{21}$, а поэтому $\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}=0$.

В результате получим

$$(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\Delta t=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{01}+m_2\vec{v}_{02}).$$

Обозначим суммарный импульс системы до взаимодействия $\vec{p}_1=m_1\vec{v}_{01}+m_2\vec{v}_{02}$, а после взаимодействия — $\vec{p}_2=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$. Тогда

$$(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\Delta t=\vec{p}_2-\vec{p}_1,$$

где $\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Delta p$ — изменение суммарного импульса всей системы, а $\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}$ — векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему. Итак, имеем:

$$\vec{F}\Delta t=\Delta\vec{p}.$$

Полученное выражение называется законом (в механике говорят «теоремой») изменения суммарного импульса системы. Его смысл в том, что суммарный импульс системы изменяется только под действием внешних сил и тем в большей мере, чем больше сумма сил и время их действия.

Пусть система замкнутая, т. е. на принадлежащие ей тела внешние силы не действуют. Тогда $\vec{F}=0$ и $\Delta\vec{p}=0$, следовательно, $\vec{p}_1=\vec{p}_2$ или $\vec{p}=\text{const}$, т. е. имеет место закон сохранения суммарного импульса системы.

При решении задач по данной теме у школьников обычно возникают следующие трудности, связанные:

1) с тем, как выделить систему взаимодействующих тел и определить, какие силы являются в данной системе внутренними, а какие — внешними;

2) с тем, когда можно пользоваться законом сохранения импульса, а когда нет;

3) с выбором тех состояний системы, в которых можно и целесообразно сравнивать импульсы;

4) с расчленением стадии взаимодействия тел системы и стадии движения тел после взаимодействия (это ярко проявляется при анализе известных опытов по взаимодействию тележек, расталкиваемых пружиной).

В алгоритме и комментариях к нему должны быть указания, направленные на предотвращение этих трудностей.

Подбор задач по теме, типы задач также определяются необходимостью уменьшить эти трудности и раскрыть те положения, которые составляют существо закона сохранения импульса и определяют границы его применимости.

В целом среди задач по теме «Закон сохранения импульса» можно выделить следующие типы задач, в которых надо найти:

1) скорости тел незамкнутой системы, для которой суммарный импульс сохраняется только для движения вдоль какой-либо одной оси;

2) скорости тел при их ударном взаимодействии на основе закона сохранения импульса (система может считаться приблизительно замкнутой);

3) не только скорости, полученные в результате взаимодействия, но и другие величины (например, перемещение), характеризующие движение после взаимодействия тел выделенной системы (в таких задачах помимо закона сохранения импульса приходится применять и другие физические законы).

Последовательность задач, решаемых на уроках, определяется последовательностью перечисленных типов задач, а их число зависит от уровня обученности учащихся данного класса, но, думается, не может быть меньшим, чем то, что приведено в данном параграфе.

Сконструировать на уроке алгоритм на основе решения одной задачи трудно ввиду обилия положений, которые при этом надо обосновать; лучше при этом использовать не одну сложную задачу, а две относительно простые.

При решении первой задачи надо показать учащимся, как выделять систему взаимодействующих тел, определять внешние и внутренние силы, выделять состояния, в которых сравниваются импульсы. При этом целесообразно начать с такой задачи, решение которой позволило бы показать применение закона сохранения суммы проекций импульса вдоль одной оси.

Задача 1. В тележку с песком массой m_1, движущуюся горизонтально со скоростью v_1 (трение отсутствует), падает по вертикали камень массой m_2 со скоростью v_2. Найти скорость тележки после застревания камня в песке.

v_1' — ?
m_1
v_1
m_2
v_2

Решение

Так как при внедрении камня в песок силы взаимодействия меняются сложным образом, то использовать второй закон Ньютона для нахождения ускорения и затем скорости тележки было бы затруднительно. Поэтому логично попытаться решить задачу на основе закона сохранения импульса.

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 29. В качестве системы взаимодействующих тел выберем тележку и камень. Естественно, что оба эти тела взаимодействуют и с Землей, но именно у тележки и камня в результате их взаимодействия меняется движение.

Далее, чтобы решить вопрос о возможности использования закона сохранения импульса, надо установить, является ли система замкнутой, а для этого надо выяснить, какие силы действуют на тела системы и какие из них являются внутренними, а какие — внешними. Очевидно, что силы взаимодействия камня и тележки являются внутренними, а силы тяжести тележки ($\vec{F}_{т1}$), камня ($\vec{F}_{т2}$), реакция опоры ($\vec{N}$) — внешними. Эти последние нельзя считать пренебрежимо малыми, следовательно, система незамкнутая и законом сохранения импульса в векторной форме пользоваться нельзя. Однако нетрудно видеть, что проекции внешних сил на ось Ox равны нулю, поэтому нет никаких динамических причин, которые могли бы изменить импульс системы вдоль оси Ox, следовательно, можно написать закон сохранения проекций импульсов на ось Ox. А для его применения надо сравнить импульсы системы тел в два последовательных момента времени (в двух состояниях) и в качестве таковых, естественно, взять состояние, предшествующее взаимодействию, и состояние движения непосредственно после взаимодействия.

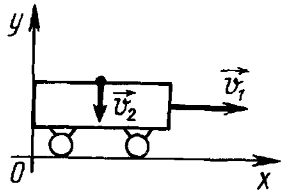


Рис. 29

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у тележки	$m_1\vec{v}_1$	$m_1\vec{v}_1'$
у камня	$m_2\vec{v}_2$	$m_2\vec{v}_1'$

Так как суммарный импульс системы вдоль оси Ox сохраняется, то

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=(m_1+m_2)v'_{1x}.$$

Отсюда

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v'_1 \text{ и } v'_1=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Анализ этой задачи позволяет сделать вывод, что, решая задачи на основе законов, связанных с понятием «импульс», надо выбрать систему отсчета, выделить систему взаимодействующих тел, определить, какие силы являются внутренними, а какие — внешними, определить импульсы тел до и после взаимодействия, и если система незамкнутая, но сумма проекций внешних сил на одну из осей равна нулю, то будет сохраняться сумма проекций импульсом на эту ось. Все эти утверждения составляют предписания алгоритма, полная формулировка которого может быть дана после решения задачи на закон сохранения импульса, который можно применять, если можно пренебречь внешними силами в сравнении с внутренними.

Вообще говоря, утверждение о сохранении суммы проекций импульса вдоль оси Ox не является достаточно убедительным и принимается учащимися чисто интуитивно. Но в основном курсе физики другого выхода нет. На факультативных же занятиях это утверждение можно обосновать, используя закон изменения импульса. Действительно, согласно этому закону

$$(m_1+m_2)\vec{v}'_1-(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)=(\vec{F}_{т1}+\vec{F}_{т2}+\vec{N})\Delta t,$$

где Δt — время взаимодействия.

В проекциях на ось Ox получим:

$$(m_1+m_2)v'_{1x}-(m_1v_{1x}+m_2v_{2x})=0.$$

В проекциях на ось Oy получим:

$$-m_2 v_2 = (N - F_{т1} - F_{т2})\Delta t,$$

т. е. $N \neq F_{т1} + F_{т2}$ и вдоль этой оси суммарный импульс не сохраняется.

Задача 2. Горизонтально летящая пуля массой 10 г, двигаясь со скоростью 100 м/с, попадает в лежащий на горизонтальном столе брусок массой 100 г и, пробив его, движется со скоростью 90 м/с. Найти скорость бруска после пробивания его пулей. Сравнить внешние силы с внутренними, если время движения пули в бруске 0,001 с, а коэффициент трения между бруском и столом 0,1.

v_2' — ?
$m_1 = 10$ г
$m_2 = 100$ г
$v_1 = 100$ м/с
$v_1' = 90$ м/с
$v_2 = 0$
$\mu = 0,1$
$\Delta t = 0,001$ с

Решение

Будем анализировать процессы, происходящие в ситуации, описанной в задаче, опираясь на те предписания, которые были сделаны на основе решения предыдущей задачи.

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 30. В качестве системы взаимодействующих тел выберем систему «брусок — пуля». Силы, с которыми пуля действует на брусок, а брусок на пулю, будут внутренними; силы тяжести пули и бруска, сила реакции стола, сила трения, действующая на брусок,— внешние.

На первый взгляд внешние силы немалы, система незамкнутая, следовательно, закон сохранения импульса неприменим.

Двигаясь в бруске, пуля испытывает силу сопротивления, которая меняется по неизвестному закону с изменением скорости, поэтому найдем среднюю силу, с которой брусок действует на пулю $\vec{F}_{ср}$. Кроме того, на пулю действует сила тяжести ее — $\vec{F}_{т1}$. Тогда по закону Ньютона

$$(\vec{F}_{ср} + \vec{F}_{т1})\Delta t = \Delta \vec{p},$$

где $\Delta \vec{p}$ — изменение импульса пули, который менялся от значения $m_1 \vec{v}_1$ до значения $m_1 \vec{v}_1'$.

Итак,

$$(\vec{F}_{ср} + \vec{F}_{т1})\Delta t = m_1 \vec{v}_1' - m_1 \vec{v}_1,$$

откуда в проекциях на ось имеем:

$$-F_{ср}\Delta t = m_1 v_1' - m_1 v_1;$$

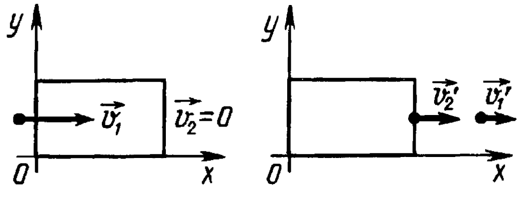


Рис. 30

и тогда

$$F_{ср}=\frac{m(v_1-v_1')}{\Delta t}=100\ \text{Н}.$$

С такой же силой пуля действует на брусок и изменяет его движение. Найдем значения внешних сил:

сила тяжести пули $F_{т1}=m_1g=0,1$ Н,

сила тяжести бруска $F_{т2}=m_2g=1$ Н,

сила реакции опоры в период взаимодействия бруска и пули $N=(m_1+m_2)g=1,1$ Н,

сила трения $F_{тр}=\mu N=0,11$ Н.

Сравнение значений $F_{ср}$ с $F_{т1}$, $F_{т2}$, N и $F_{тр}$ показывает, что внешние силы много меньше внутренних. Относительно большое значение внутренней силы $F_{ср}$ связано с тем, что время взаимодействия очень мало. Такое кратковременное взаимодействие тел называется ударным. К ударным взаимодействиям относятся такие явления, как столкновение движущихся тел и частиц, разрыв тела на части и т. д.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: *при кратковременных (ударных) взаимодействиях тел внутренние силы во много раз превышают внешние, каковыми можно поэтому пренебречь и, считая систему замкнутой, применить закон сохранения импульса.*

Воспользуемся этим законом для решения данной задачи.

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у пули	$m_1\vec{v}_1$,	$m_1\vec{v}_1'$,
у бруска	0,	$m_2\vec{v}_2'$.

Тогда закон сохранения импульса системы запишется в виде:

$$m_1\vec{v}_1'+m_2\vec{v}_2'-m_1\vec{v}_1=0.$$

В проекциях на ось получим:

$$m_1v_1'+m_2v_2'-m_1v_1=0.$$

Отсюда

$$v_2'=\frac{m_1(v_1-v_1')}{m_2}=1\ \text{м/с}.$$

Проанализировав с учащимися основные шаги решения этих двух задач, можно дать окончательную формулировку алгоритма решения задач с использованием закона сохранения импульса:

1. Выбрать систему отсчета.

2. Выделить систему взаимодействующих тел и выяснить, какие силы для нее являются внутренними, а какие — внешними.

3. Определить импульсы всех тел системы до и после взаимодействия.

4. Если в целом система незамкнутая, но сумма проекций сил на одну из осей равна нулю, то следует написать закон сохранения лишь в проекциях на эту ось.

5. Если внешние силы пренебрежимо малы в сравнении с внутренними (как в случае удара тел), то следует написать закон сохранения суммарного импульса в векторной форме и перейти к скалярной.

На факультативных занятиях к этим предписаниям алгоритмов следует добавить еще одно:

если на тела системы действуют внешние силы и ими нельзя пренебречь, то следует написать закон изменения импульса в векторной форме и перейти к скалярной.

Таким образом, алгоритм на этих двух задачах введен. Теперь надо на ряде задач показать, как применять предписания алгоритма, обеспечить систему упражнений, закрепляющую знание алгоритма, и внести ряд дополнений к алгоритму.

Задача 2 может быть использована для обоснования ряда важных положений, связанных с применением закона сохранения импульса и раскрытием его смысла.

Прежде всего полезно показать, что закон сохранения импульса включает в себя утверждение о том, что на сколько уменьшился импульс одного тела, на столько он увеличился у другого тела, т. е. в процессе взаимодействия произошла передача не скорости и не массы, а именно импульса, который тем самым является важнейшей самостоятельной характеристикой движущегося тела, а не просто комбинацией величин m и v.

Выясним, на сколько изменился импульс пули и бруска, и сравним эти величины.

Изменение импульса пули будет:

$$\Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 < 0,$$

а бруска —

$$\Delta p_2 = m_2 v_2' - 0 = \frac{m_2 m_1 (v_1 - v_1')}{m_2} = m_1 (v_1 - v_1') > 0.$$

Очевидно, что изменения импульса по модулю одинаковы, а различия в знаках означают, что импульс пули уменьшился, а импульс бруска на столько же увеличился, значит, произошла передача импульса от одного тела к другому.

Дальнейшее использование этой задачи может состоять в том, что на основе ее можно показать, что в случае, если надо определить не скорость тела после его взаимодействия, а его дальнейшее движение, надо помимо использования закона сохранения импульса воспользоваться другими физическими законами. При этом очень важно показать учащимся необходимость разграничения двух стадий движения — стадии взаимодействия тел и стадии их последующего движения после взаимодействия.

Для этого дополним условие задачи требованием найти перемещение бруска после его пробивания пулей.

Анализируя происходящие процессы, можно выделить две стадии: первая — это пробивание пулей бруска и их взаимодействие, в результате которого происходит передача импульса от пули к бруску и он приобретает скорость v_2'. Вторая стадия — это движение бруска, при котором пуля уже не действует на брусок, а брусок движется замедленно в результате действия на него силы трения со стороны поверхности, по которой осуществляется перемещение (здесь импульс уже, конечно, меняется).

Очевидно, что нахождение перемещения бруска при замедленном его движении до остановки осуществляется на основе уравнения кинематики

$$0 - v_{2x}'^2 = 2a_x s_x$$

и уравнения динамики, позволяющего найти ускорение:

$$\vec{F}_{т2} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m_2\vec{a}.$$

В результате получаем, что

$$a = \mu g, \text{ а } s = \frac{v_2'^2}{2\mu g}.$$

Отсюда вытекает дополнение к алгоритму: если надо определить не скорости тел после взаимодействия, а их последующее движение, то кроме уравнений, связанных с понятием «импульс», следует использовать другие физические законы (уравнения динамики, кинематики, энергетические законы) и полученную систему уравнений решить относительно искомой величины.

Решение последующих задач должно быть направлено на упражнения в применении алгоритма и раскрытие некоторых положений, показывающих, как выполнять сформулированные ранее предписания алгоритма.

Прежде всего следует показать применение закона сохранения проекции импульса. Для этого полезна следующая задача.

Задача 3. Конькобежец массой m_1, стоя на льду, бросает кусок льда массой m_2 со скоростью v_2 под углом α к горизонту (рис. 31). Определить скорость конькобежца после броска.

v_1 — ?
m_1
m_2
v_2
α

Решение

Выбрав систему отсчета, как указано на чертеже, и выделив систему взаимодействующих тел (человек — кусок льда), определяем импульсы тел.

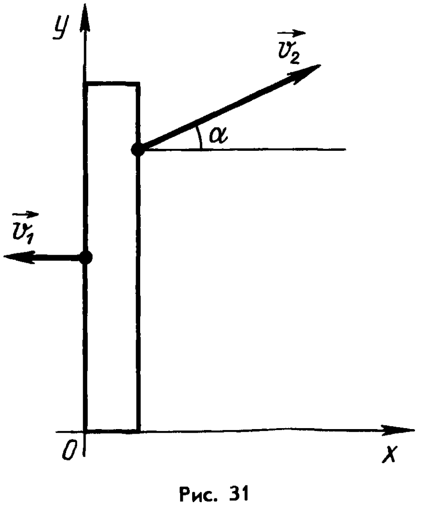


Рис. 31

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у человека	0	$m_1\vec{v}_1$
у куска льда	0	$m_2\vec{v}_2$

Внутренние силы — это силы взаимодействия человека и куска льда, направленные по линии бросания. К внешним силам относятся силы тяжести человека и куска льда ($\vec{F}_т$) и сила реакции льда ($\vec{N}$) (силой трения можно пренебречь). Обычно учащиеся считают, что и в период броска $F_т = N$, что создает у них иллюзию применимости закона сохранения импульса. Но обращает на себя внимание то, что импульсы человека и куска льда после толчка направлены не по одной прямой, а потому $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \neq 0$, как должно бы быть в соответствии с законом сохранения. Следовательно, в данном случае надо применять закон сохранения проекций импульса:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \text{ и } v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 \cos\alpha.$$

Далее надо особо подчеркнуть, что закон сохранения носит векторный характер. Для разъяснения этой мысли полезно решить следующую задачу.

Задача 4. Шар массой 1 кг, двигаясь по столу со скоростью 5 м/с, ударился о покоящийся шар с такой же массой, который приобрел при этом скорость 3 м/с, направленную под углом $\alpha_1 = 53°$ к линии движения первого шара (удар не лобовой). Определить модуль и направление скорости первого шара графически, считая удар упругим.

v_1', α_2 — ?
$v_1 = 5$ м/с
$m_1 = m_2 = 1$ кг
$\alpha_1 = 53°$
$v_2' = 3$ м/с

Решение

Свяжем начало системы отсчета с точкой, в которой произошел удар, и направим оси, как указано на чертеже (рис. 32). Силы, с которыми взаимодействуют шары, — внутренние; силы тяжести, трения — внешние.

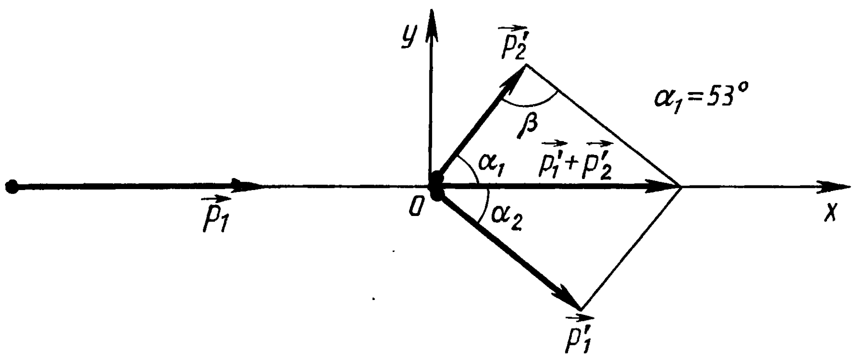


Рис. 32

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у шара *1*	$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$	$\vec{p}_1' = m\vec{v}_1'$
у шара *2*	0	$\vec{p}_2' = m\vec{v}_2'$

Взаимодействие носит ударный характер, поэтому применим закон сохранения импульса. Так как задача должна решаться геометрически, то переходить к скалярной форме нет нужды, и поэтому, изобразив векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2'$ в масштабе с учетом угла α_1, можно найти $\vec{p}_1'$. Действительно, после удара суммарный импульс системы $\vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ должен быть таким же, каким он был до удара и по модулю, и по направлению, т. е. равным $\vec{p}_1$, следовательно, именно векторная сумма импульсов сохраняется и по модулю, и по направлению. Поэтому, построив на чертеже вектор $\vec{p}_1' + \vec{p}_2'$, равный $\vec{p}_1$ по модулю и направленный так же, как $\vec{p}_1$, и считая его диагональю параллелограмма, сторонами которого являются $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$, надо построить на этой диагонали и на известной стороне $\vec{p}_2'$ параллелограмм, другая сторона которого даст $\vec{p}_1'$. Построение показывает, что угол, под которым разлетаются шары, будет прямым, т. е. $\alpha_2 = 90° - 53° = 37°$, а модуль $v_1' = 4$ м/с.

Задача полезна тем, что в ее решении явно выступает сохранение суммарного импульса системы и по модулю, и по направлению, т. е.

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1, \text{ но } p_1' + p_2' \neq p_1.$$

При повторении механики, когда учащиеся познакомятся с теоремой косинусов, полезно решить эту задачу уже более строго, используя для решения и закон сохранения импульса, и закон сохранения энергии.

По закону сохранения импульса $m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2'$ и $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$, т. е. $\vec{v}_1$ есть диагональ параллелограмма со сторонами $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ и углами $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ и β. По теореме косинусов

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 - 2v_1'v_2' \cos \beta.$$

По закону сохранения механической энергии, справедливому в данном случае, так как в системе действуют только потенциальные силы, имеем:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} \text{ и } v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Подставляя значение v_1^2 в теорему косинусов, получим, что $2v_1'v_2' \cos \beta = 0$, что возможно, если $\beta = 90°$, а следовательно, и $\alpha = 90°$, т. е. шары разлетаются под прямым углом.

Указание алгоритма «выбрать систему отсчета» учащиеся подчас выполняют формально и в ходе решения забывают о том, в какой системе отсчета ведется рассмотрение процессов. Чтобы показать, как важно учитывать в ходе решения выбранную вначале систему отсчета, полезно решить следующую задачу.

Задача 5. Человек массой m_1 за время Δt переходит с кормы на нос покоившейся первоначально лодки длиной l и массой m_2. Найти скорость, которую в результате этого приобретет лодка, если сопротивлением воды можно пренебречь.

v_2 — ?
m_1
m_2
Δt
l

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на чертеже (рис. 33), связав ее с Землей. Будем рассматривать систему «человек — лодка». Силы, с которыми взаимодействуют эти тела,— внутренние. Кроме них на тела системы действуют внешние силы (силы притяжения к Земле, выталкивающая сила), т. е. система незамкнутая. Однако проекции этих сил на ось Ox равны нулю, и потому для движения вдоль этой оси можно написать закон сохранения в проекциях импульсов на эту ось.

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у человека	0	$m_1\vec{v}_1$
у лодки	0	$m_2\vec{v}_2$

Обычно учащиеся далее пишут:

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=0 \text{ и } m_1v_1-m_2v_2=0,$$

считая, что лодка приобрела скорость $\vec{v}_2$, направленную противоположно $\vec{v}_1$ (что, конечно, верно), но полагая при этом что $v_1=\frac{l}{\Delta t}$, что неверно, так как $\frac{l}{\Delta t}$ — это скорость человека относительно лодки, а $\vec{v}_2$ — это скорость лодки относительно Земли, т. е. в уравнении закона сохранения оказались величины, отсчитываемые относительно разных систем отсчета.

Правильное решение должно опираться на закон сложения скоростей:

$$v_x=v_{1x}+v_{2x},$$

откуда

$$v=v_1-v_2,$$

где v — скорость человека относительно Земли. Тогда по закону сохранения проекций импульса имеем:

$$m_1v_x+m_2v_{2x}=0,$$

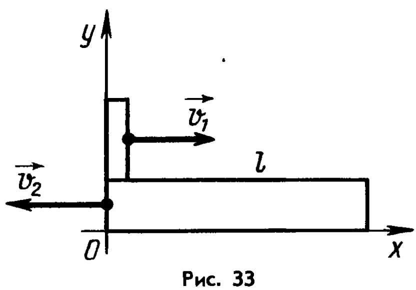


Рис. 33

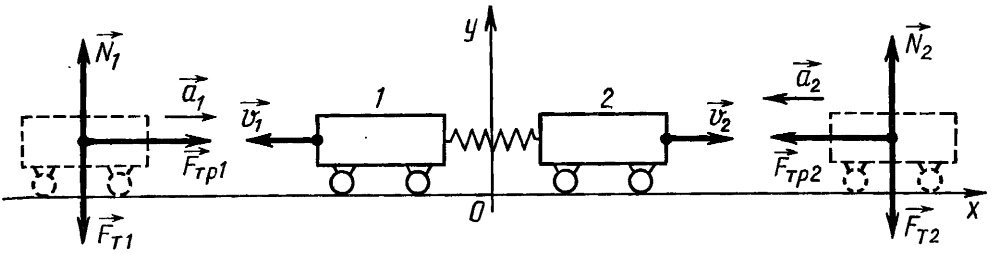


Рис. 34

где все импульсы отсчитываются относительно одной и той же системы отсчета, связанной с Землей.

Далее получим:

$$m_1(v_1-v_2)-m_2v_2=0 \text{ и } v_2=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}=\frac{m_1l}{(m_1+m_2)\Delta t}.$$

Итак, из решения задачи следует вывод, дополняющий алгоритм: *при использовании закона сохранения импульса необходимо, чтобы все величины, входящие в него, были отсчитаны относительно одной и той же системы отсчета.*

Чтобы учащиеся научились разграничивать стадию взаимодействия тел системы и стадию последующего движения после взаимодействия, полезно решить задачу о расталкивании тележек пружиной, описанная в которой ситуация используется в учебнике «Физика-8» для введения понятия массы. Эта задача отнюдь не всегда понимается и решается верно, что мешает осознанию соответствующего этой задаче демонстрационного эксперимента, обычно используемого на уроках.

Задача 6. Две тележки массами m_1 и m_2, где $m_2=3m_1$, связаны сжатой пружиной, которая стянута нитью. Определить отношение перемещений, которые пройдут тележки после пережигания нити, если коэффициент трения о поверхность стола μ.

$\frac{s_1}{s_2}$ — ?

$m_2=3m_1$

μ

Решение

Выберем систему отсчета, как показано на чертеже (рис. 34). В системе двух взаимодействующих тележек силы, с которыми пружина действует на тележки, будут внутренними, силы тяжести ($\vec{F}_{т1}$ и $\vec{F}_{т2}$), силы трения ($\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$) и реакции опоры ($\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$) будут внешними. Так как время взаимодействия тележек посредством пружины мало, то внешними силами можно пренебречь в сравнении с внутренними и применять закон сохранения импульса к процессу их взаимодействия.

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у тележки *1*	0	$m_1\vec{v}_1$
у тележки *2*	0	$m_2\vec{v}_2$

Тогда имеем:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=0 \text{ и } -m_1v_1+m_2v_2=0.$$

Следовательно, в результате взаимодействия тележки приобрели скорости v_1 и v_2, обратно пропорциональные массам. Этим исчерпывается первая стадия процесса. Далее тележки движутся, не взаимодействуя друг с другом, испытывая действие сил трения, вследствие чего их движение будет замедленным и, пройдя соответственно расстояния s_1 и s_2, они остановятся. Это — вторая стадия описанного в задаче процесса.

Чтобы найти перемещение тележек в равнозамедленном движении, надо знать ускорения a_1 и a_2, которые тележки приобретают после того, как прекратилось действие пружины, а для этого воспользуемся законом Ньютона, написав его для каждой тележки:

$$\begin{cases} \vec{F}_{т1}+\vec{N}_1+\vec{F}_{тр1}=m_1\vec{a}_1, \\ \vec{F}_{т2}+\vec{N}_2+\vec{F}_{тр2}=m_2\vec{a}_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$F_{тр1}=m_1a_1, \quad F_{тр2}=m_2a_2,$$

а так как $F_{тр}=\mu N=\mu mg$, то $a_1=a_2=\mu g$.

Перемещения тележек найдем, зная ускорение, начальные скорости (v_1 и v_2) и их конечную скорость, равную нулю, пользуясь уравнением кинематики

$$v_x^2-v_{0x}^2=2a_xs_x:$$

$$\begin{cases} 0-v_{1x}^2=2a_xs_{1x}, \\ 0-v_{2x}^2=2a_xs_{2x}; \end{cases} \qquad \begin{cases} -v_1^2=-2as_1, \\ -v_2^2=-2as_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{v_1^2}{v_2^2}.$$

А так как по закону сохранения импульса $\frac{v_1}{v_2}=\frac{m_2}{m_1}$, то

$$\frac{s_1}{s_2}=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2=9.$$

Полезно подчеркнуть, что в процессе взаимодействия тележки получают ускорения a_1' и a_2', связанные с соотношением $\frac{a_1'}{a_2'}=\frac{m_2}{m_1}$, являющимся следствием второго и третьего законов Ньютона. Ускорения же, которые они приобретают на второй стадии процесса,— a_1 и a_2 — вызваны действием сил трения и одинаковы для обоих тел. В известных опытах с взаимодействием тележек об ускорениях a_1' и a_2' судят по приобретенным при взаимодействии скоростям $v_1=a_1't$ и $v_2=a_2't$ (t — время взаимодействия), а скорости, как было показано, определяются массами m_1 и m_2 и могут быть оценены по времени прохождения тележками одинаковых перемещений, проходимых до упоров, равноудаленных от начальных положений тележек (при этом трение должно быть пренебрежимо мало).

Итак, в результате решения задач, предлагаемых учащимся после того, как сформулирован алгоритм, можно сделать следующие добавления, примечания к алгоритму, уточняющие его основные предписания:

1. Применяя закон сохранения импульса, надо следить за тем, чтобы импульсы всех тел, входящие в уравнения, были отсчитаны относительно одной и той же системы отсчета.

2. Если в задаче требуется не только определить скорость какого-либо тела системы после взаимодействия, но и найти перемещение этого тела в результате приобретенной при взаимодействии скорости, то надо четко разграничивать два этапа описанного в задаче механического процесса: первый — этап взаимодействия, в результате которого тела приобретают некоторые скорости; второй — этап движения после прекращения взаимодействия тел выделенной системы. При этом помимо уравнений, связанных с понятием «импульс», надо использовать другие физические законы (уравнения динамики, кинематики, энергетические законы).

Приведенные выше задачи служат обоснованием основных положений, связанных с законами изменения и сохранения импульса.

Все последующие задачи должны обеспечивать тренировку учащихся в применении данных положений. К числу их относятся задачи из задачника А. П. Рымкевича и П. А. Рымкевича №№ 347, 349, 350, 353, 354 и др.

§ 6. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Успех в решении задач энергетическим методом во многом определяется тем, как введены энергетические понятия в теоретическом плане. Поэтому прежде всего рассмотрим, какие недостатки в усвоении энергетических понятий и их применении к решению задач обнаруживаются у учащихся и какой должна быть для их предотвращения трактовка этих понятий при их теоретическом рассмотрении на уроках.

К числу недостатков в понимании и применении понятий «работа» и «энергия» относится следующее:

1. Так как при изложении этих вопросов обычно не вводится понятие механического состояния, то не проводится и разграничение понятий энергии как характеристики состояния и работы как характеристики процесса. Отсюда — представления учащихся о «запасе работы», толкование величины ΔA как «изменения работы». В связи с этим при решении задач энергетическим методом учащиеся часто не понимают, что прежде всего надо разумно выбрать два состояния и сравнить полную механическую энергию в них.

2. Так как обычно учащимся не дается понятие потенциальных сил, то они нечетко представляют, что такое потенциальная энергия и на вопрос: «Когда тела обладают потенциальной энергией?» — часто отвечают: «Когда тело поднято на некоторую высоту», не понимая, что и будучи опущенным в яму оно будет обладать потенциальной энергией по отношению к соответствующим образом

выбранному нулевому уровню. Выбор же нулевого уровня отсчета потенциальной энергии делается часто учащимися нерациональным образом.

3. Закон сохранения механической энергии часто считают выполняющимся для замкнутых систем и не связывают его с действием потенциальных (консервативных) сил. В связи с этим учащиеся не всегда правильно подходят к вопросу о применении этого закона.

Так, рассматривая явление неупругого удара (например, в задаче о баллистическом маятнике), исходя из замкнутости системы, они делают неверный вывод о возможности применения к взаимодействию пули и ящика закона сохранения энергии, в то время как для акта взаимодействия нужно использовать закон сохранения импульса и лишь потом, при движении системы «пуля — ящик» в потенциальном поле, использовать закон сохранения энергии.

Вообще вопрос о возможности применения энергетических законов решается учащимися с большим трудом.

Рассмотрим кратко, как можно предотвратить указанные недостатки за счет введения некоторых изменений в трактовку энергетических понятий в курсе физики VIII класса (это позволит к тому же лучше понять смысл и мотивы введения предлагаемого ниже алгоритма) [1].

1. МЕХАНИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ И ЕГО ОПИСАНИЕ

Поскольку понятие состояния широко используется в курсах физики IX и X класса, постольку уже в VIII классе следует дать понятие механического состояния, опираясь на житейское толкование термина «состояние», согласно которому состояние объекта — это то, что он собой представляет в данный момент времени. Когда мы говорим: «Объект (например, материальная точка) находится в данном состоянии», это значит, что он в определенный момент времени характеризуется определенными величинами — параметрами состояния. Задать механическое состояние — значит задать его параметры: мгновенные значения координат и скорости. Находиться в данном состоянии — не значит покоиться, состояние — не покой, а момент движения.

Не все физические величины есть характеристики состояния. Ряд величин характеризуют не состояние, а процесс его изменения в течение некоторого времени — таковы перемещение, средняя скорость, импульс силы, количество теплоты (для этих величин в принципе нельзя задать мгновенные значения).

---

[1] Более подробно о введении понятий энергии и работы в VIII классе см.: Гутман В. И., Мощанский В. Н. О введении понятия энергии при изучении механики в VIII классе // Преподавание физики в средней школе.— Л., 1976.

2. РАБОТА СИЛЫ

Введя понятие работы силы (не следует употреблять, как неопределенный, термин «работа тела») как произведение модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между перемещением и силой, следует подчеркнуть, что работа силы есть характеристика не состояния, а процесса его изменения, так как бессмысленно говорить о работе в данный момент, в данном состоянии. Перемещение всегда сколь-нибудь долго длится, и можно говорить лишь о работе на некотором перемещении, за некоторое время. Поэтому величину ΔA нельзя понимать как «изменение работы» при переходе из одного состояния в другое (так обозначают обычно элементарную работу).

3. РАБОТА СИЛ РАЗНОГО ТИПА

Далее рассматривается (как это и делается в учебнике VIII класса) работа сил разного типа при переходе из одного состояния в другое и получаются следующие результаты:

а) работа равнодействующей каких угодно сил

$$A_{12}=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right);$$

б) работа силы тяжести

$$A_{12}=-(mgh_2-mgh_1)=-\Delta(mgh);$$

в) работа силы упругости

$$A_{12}=-\left(\frac{kx_2^2}{2}-\frac{kx_1^2}{2}\right)=-\Delta\left(\frac{kx^2}{2}\right);$$

г) работа силы трения при переходе из состояния *1* в состояние *2* по прямой длиной s и по ломаной со звеньями s_1 и s_2. В первом случае

$$A_{12}=-F_{\text{тр}}s,$$

во втором случае

$$A'_{12}=-F_{\text{тр}}(s_1+s_2),$$

но $s\neq s_1+s_2$ и $A'_{12}\neq A_{12}$.

При изложении этих вопросов делается вывод о том, что, в отличие от работы силы трения, работа сил тяготения и сил упругости не зависит от формы траектории, по которой происходит переход из одного состояния в другое. Силы, работа которых не зависит от формы траектории, по которой осуществляется переход из одного состояния в другое, относятся к потенциальным силам. Силы тяготения и упругости — потенциальные силы, в отличие от непотенциальной силы трения.

Необходимо также показать учащимся, что работа сил реакции при отсутствии трения всегда равна нулю, а значит, пользуясь энергетическими законами, силы реакции не следует принимать во внимание.

4. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И ЕЕ ВИДЫ

Полученные выше результаты расчета работы сил разного типа анализируются, сравниваются. Общность результатов, сформулированных в пунктах а), б), в), в том, что изменение состояния характеризовалось работой, которая оказалась равной изменению некоторых величин — $\frac{mv^2}{2}$, mgh, $\frac{kx^2}{2}$. Эти величины зависят от параметров состояния (координат и скорости), различны в разных состояниях и потому позволяют отличать одно состояние от другого, т. е. их можно считать разными видами некоторой характеристики состояния, которая называется механической энергией.

Энергия — это характеристика состояния, зависящая от параметров состояния и такая, что ее изменение определяется работой.

Вместе с тем эти величины, несмотря на общность, существенно различаются между собой. Величина $\frac{mv^2}{2}$ зависит от скорости и не связана с действием определенного типа сил. Величины mgh, $\frac{kx^2}{2}$ зависят от координат и связаны с действием на тело потенциальных сил.

Величина, характеризующая состояние движущегося тела, зависящая от скорости и такая, что ее изменение равно работе равнодействующей каких угодно сил, называется кинетической энергией.

Величина, характеризующая состояние тела, на которое действуют потенциальные силы, зависящая от положения (координат) тела и такая, что ее изменение определяется работой потенциальных сил, называется потенциальной энергией.

Итак, если тело движется, оно обладает (его состояние характеризуется) кинетической энергией; если на тело действуют потенциальные силы, оно обладает (его состояние характеризуется) потенциальной энергией.

Надо отметить, что главное на уроках — не в запоминании учащимися этих формулировок, а в усвоении всех существенных признаков, сторон этих понятий.

Далее показывается, что потенциальная энергия есть энергия взаимодействия, что для однозначного определения ее значения надо выбрать нулевой уровень ее отсчета, и это можно сделать по-разному, что от выбора нулевого уровня зависит значение и знак потенциальной энергии, что работа потенциальных сил всегда равна изменению потенциальной энергии со знаком минус, т. е. $A_{пот} = -\Delta E_p$.

В связи с этим, если тело переходит из состояния *1* в нулевое состояние, то $A_{10} = E_{p1}$, т. е. потенциальная энергия в данном состоянии равна работе потенциальных сил при переходе тела из данного состояния в нулевое.

В заключение этого раздела вводится понятие полной механической энергии и обосновываются законы изменения и сохранения энергии.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Подобно тому, как это делалось при изучении импульса тела, и в этой теме надо четко разъяснить учащимся, что в механике есть два связанных между собой энергетических закона: закон изменения механической энергии $\Delta E = E_2 - E_1 = A_{\text{непот}}$ и закон ее сохранения $\Delta E = E_2 - E_1 = 0$. Первый справедлив, если действуют непотенциальные силы, второй — в случае действия только потенциальных сил.

Это можно показать следующим образом.

Пусть точка переходит из состояния *1*, характеризуемого величинами E_{k1} и E_{p1}, в состояние *2*, характеризуемое величинами E_{k2} и E_{p2}, и на точку действуют как потенциальные, так и непотенциальные силы. Что можно сказать о полной механической энергии в этих состояниях?

Работа равнодействующих каких угодно сил $A_{12} = A_{\text{пот}} + A_{\text{непот}} = \Delta E_k$. Но, как было показано, $A_{\text{пот}} = -\Delta E_p$. Следовательно, $A_{12} = -\Delta E_p + A_{\text{непот}} = \Delta E_k$. Отсюда $\Delta E = E_2 - E_1 = A_{\text{непот}}$, а если действуют только потенциальные силы, то $A_{\text{непот}} = 0$ и $\Delta E = E_2 - E_1 = 0$ — закон сохранения механической энергии.

Предложенный выше вариант изложения энергетических понятий не требует коренных изменений в принятой ныне логике изложения этих вопросов в VIII классе, но предусматривает бо́льшую четкость и строгость в трактовке понятий и, как показал наш многолетний опыт, облегчает учащимся процесс решения задач энергетическим методом. Кроме того, такая трактовка больше готовит учащихся к изучению физики в IX и X классах. Правда, в последних изданиях стабильного учебника закон изменения механической энергии явно не формулируется в виде $\Delta E = A_{\text{непот}}$, хотя уравнение $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{\text{тр}}$ приводится и его приходится использовать при решении ряда задач, приводимых авторами учебника для упражнений. Думается, что его явная формулировка в курсе механики была бы весьма полезна, тем более, что это, как было нами ранее показано, может быть сделано очень легко. Во всяком случае без этого закона нельзя обойтись на факультативных занятиях. Поэтому в предыдущем изложении мы и показали, как можно ввести этот закон хотя бы в факультативном курсе. Тем не менее в дальнейшем алгоритм формулируется на основе задач, решаемых с использованием только закона сохранения энергии, а задачи на закон изменения энергии, позволяющие сделать дополнение к алгоритму и решаемые на факультативных занятиях, приводятся отдельно в конце параграфа.

Перечисленные выше понятия и положения и составляют круг знаний, который обеспечивает успех учащихся в решении задач энергетическим методом.

К основным типам задач, которые целесообразно решить на уроках по данной теме, относятся следующие задачи:

1) на расчёт работы сил разного типа (в том числе и на расчет работы по изменению энергии);

2) решаемые только на основе закона сохранения энергии;

3) решаемые как динамически, так и энергетически и показывающие преимущества энергетического метода;

4) для решения которых надо воспользоваться не только энергетическим методом, но и другими законами механики (уравнениями кинематики и динамики);

5) решаемые на основе использования обоих законов сохранения (и импульса, и энергии).

Эти типы задач даны в той последовательности, в которой их следует решать на уроках.

Прежде чем обосновать выражаемый в алгоритме энергетический метод решения задач, необходимо научить школьников рассчитывать работу сил и значения потенциальной и кинетической энергии. Для того чтобы учащиеся научились рассчитывать работу силы, надо, чтобы они усвоили, что работа совершается только тогда, когда тело движется и на него действует сила, имеющая составляющую вдоль линии, по которой движется тело.

Расчет кинетической энергии в выбранной системе отсчета не представляет труда. А вот расчет потенциальной энергии подчас вызывает затруднения, связанные с выбором нулевого уровня. Поэтому полезно подсчитать потенциальную энергию тела относительно разных нулевых уровней. Для этого может быть решена такая задача.

Задача 1. На балконе третьего этажа, расположенного на высоте 12 м от земли, находится тело массой 5 кг. Найти его потенциальную энергию относительно поверхности Земли, относительно пятого этажа, высота которого 18 м, и относительно дна котлована глубиной 4 м (рис. 35).

E_p — ?
$m=5$ кг
$h_1=12$ м
$h_2=4$ м
$h_3=18$ м

Решение

Так как на тело действует потенциальная сила (сила тяжести), то оно обладает потенциальной энергией, зависящей от высоты тела по отношению к выбранному нулевому уровню.

Потенциальная энергия всегда равна работе потенциальной силы при переходе тела из данного состояния в нулевое.

Относительно поверхности Земли тело обладает потенциальной энергией

$$E_{p1}=A_{10}=F_т h_1 \cos 0=mgh_1=600 \text{ Дж}.$$

Относительно дна котлована его потенциальная энергия будет

$$E_{p2}=F_т(h_1+h_2)\cos 0=mg(h_1+h_2)=800 \text{ Дж}.$$

Относительно пятого этажа потенциальная энергия тела будет

$$E_{p3}=F_т(h_3-h_1)\cos 180°=-300 \text{ Дж}.$$

Таким образом, значение потенциальной энергии и ее знак зависит от выбора нулевого уровня и определяется работой потенциальных сил при переходе на нулевой уровень.

После того как учащиеся научились рассчитывать значения работы и механической энергии, можно перейти к задачам, на осно-

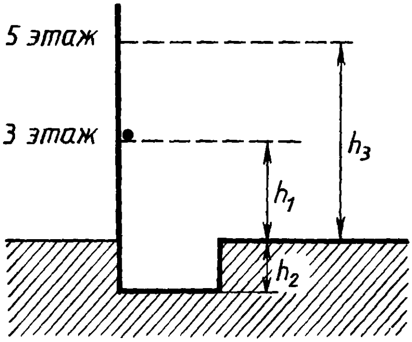


Рис. 35

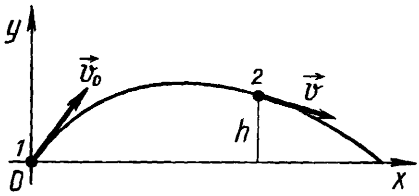


Рис. 36

ве которых можно рассмотреть суть энергетического метода, выраженного в форме алгоритма. Эти задачи могут быть такими.

Задача 2. Тело брошено с поверхности земли под углом к горизонту со скоростью v_0. Найти его скорость на некоторой высоте h, если сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

v — ?
v_0 h

Решение

Естественно, что прежде, чем анализировать происходящие процессы, надо выбрать систему отсчета. Далее, желая решать задачу энергетически, мы должны применить закон сохранения, а для этого надо найти энергию в каких-либо двух состояниях, следовательно, надо прежде всего выбрать эти состояния. Естественно выбирать состояния так, чтобы в число параметров этих состояний входили как известные, так и искомые величины. Таковыми в данном случае являются состояния *1* и *2*, указанные на рисунке 36.

Так как в дальнейшем потребуется определить потенциальную энергию, то надо договориться о нулевом уровне ее отсчета. В качестве такового выберем поверхность Земли.

Чтобы решить, применим ли закон сохранения механической энергии, надо выяснить, какие силы действуют на тело — потенциальные или непотенциальные. В данном случае на тело действует только потенциальная сила — сила тяжести. Следовательно, применим закон сохранения механической энергии. Запишем его в виде: $E_2=E_1$ и, найдя значения энергии E_1 и E_2, подставим их в написанное уравнение закона сохранения энергии. Тогда получим

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+mgh.$$

Отсюда

$$v=\sqrt{v_0^2-2gh}\ .$$

Заметим, что эту задачу можно решить и кинематически, задав угол α, но это решение будет во много раз более сложным и громоздким.

Решив эту задачу, надо обсудить с учащимися, каковы были основные шаги, выполненные в ходе ее решения, и, пользуясь ими, попытаться решить следующую задачу, чтобы выяснить, являются ли эти шаги (действия) применимыми и в решении других задач.

Задача 3. С вершины наклонной плоскости высотой h и длиной l толкают тело, сообщая ему скорость v_0. Найти скорость тела в конце наклонной плоскости, считая трение пренебрежимо малым.

v — ?
v_0
h
l

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 37. Если решать задачу энергетически, то надо выбрать два состояния, в которых целесообразно сравнивать энергию. В качестве таковых выберем положения тела на вершине наклонной плоскости и у ее подножия.

За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии примем основание наклонной плоскости.

Так как на тело действует только потенциальная сила (трение отсутствует), то применим закон сохранения механической энергии, т. е. $E_1 = E_2$. Найдя значение кинетической и потенциальной энергии в каждом состоянии и подставив эти величины в закон сохранения, получим:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Сравнивая ход рассуждения при решении задач 2 и 3, мы обнаруживаем общность выполняемых операций и на основе этого конструируем следующий *алгоритм решения задач на закон сохранения механической энергии:*

1. Выбрать систему отсчета.

2. Выбрать два или более таких состояний тел системы, чтобы в число их параметров входили как известные, так и искомые величины.

3. Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии.

4. Определить, какие силы действуют на тела системы — потенциальные или непотенциальные.

5. Если на тела системы действуют только потенциальные си-

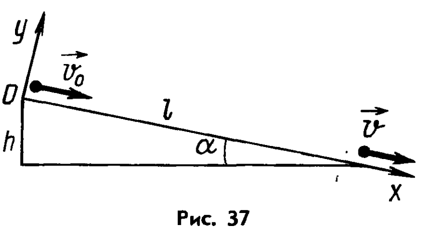


Рис. 37

лы, написать закон сохранения механической энергии в виде: $E_1 = E_2$.

6. Раскрыть значения энергии в каждом состоянии и, подставив их в уравнение закона сохранения энергии, решить уравнение относительно искомой величины.

Чтобы показать преимущества энергетического метода, полезно далее решить эту задачу динамическим способом.

Найти конечную скорость можно, пользуясь уравнением

$$v^2 = v_0^2 - 2al.$$

Ускорение можно найти по второму закону Ньютона, который для данного случая будет иметь вид

$$\vec{F}_т + \vec{N} = m\vec{a},$$

откуда в проекциях на ось Ox получим:

$$mg \sin \alpha = ma \text{ и } a = g \sin \alpha.$$

Учитывая, что $\sin \alpha = \frac{h}{l}$, найдем конечную скорость тела:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g\frac{h}{l}l} = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Очевидно, что решение задачи энергетическим методом является более простым и ему следует отдать предпочтение.

Так как закон сохранения механической энергии справедлив и в случае действия сил упругости, то следует решить хотя бы одну задачу, в которой приходилось бы рассчитывать потенциальную энергию, обусловленную действием силы упругости.

Задача 4. К нерастянутой пружине с жесткостью k подвесили груз массой m. Определить максимальное растяжение пружины, считая, что груз начал двигаться из состояния покоя.

x_{max} — ?
k m

Решение

Выбрав систему отсчета, как указано на рисунке 38, договоримся, что первое состояние — то, при котором пружина не растянута и скорость груза $v_1 = 0$; второе же характеризуется максимальным растяжением пружины x_{max}. Скорость груза в этом состоянии $v_2 = 0$. Нулевым уровнем будем считать тот, который соответствует положению груза в начальный момент. Так как на груз действуют только потенциальные силы (сила тяжести и сила упругости), то применим закон сохранения механической энергии, т. е. $E_1 = E_2$.

Очевидно, что кинетическая энергия в обоих состояниях равна нулю. Потенциальная энергия в первом состоянии тоже равна нулю, а во втором складывается из энергии, обусловленной действием силы упругости $\frac{kx^2_{max}}{2}$, и энергии, обусловленной действием силы тяжести. Последняя равна работе силы тяжести при переходе тела из данного (второго) состояния в нулевое, а это работа

$$A_{20} = mgx_{max} \cos 180° = -mgx_{max}.$$

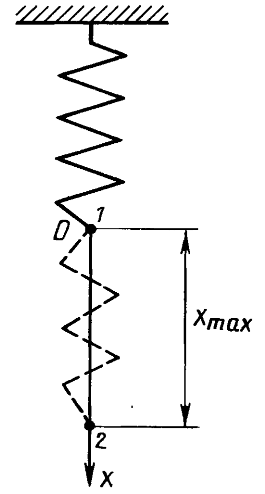


Рис. 38

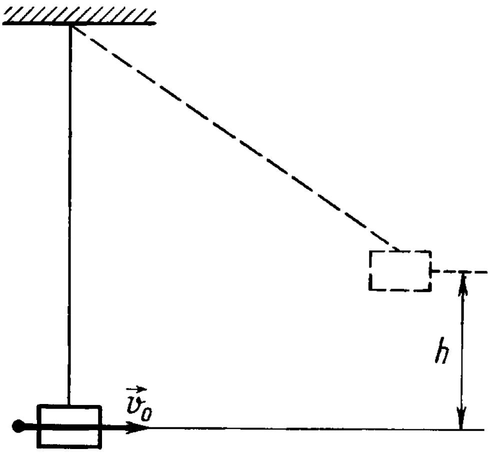


Рис. 39

Итак, имеем: $$\frac{kx^2_{max}}{2} - mgx_{max} = 0.$$

Отсюда $$x_{max} = \frac{2mg}{k}.$$

Далее полезно рассмотреть одну-две задачи, для решения которых потребовалось бы помимо энергетических законов использовать и законы динамики. Такова задача о движении шарика по мертвой петле с такой высоты, что в верхней точке петли шарик еще не отрывается, а также задача на определение силы натяжения нити отвеса при его переходе из горизонтального положения в вертикальное.

Крайне важно, далее, показать, что многие механические задачи могут быть решены на основе использования только законов сохранения энергии и импульса. Одна из них (см. задачу 2 в § 5) решалась ранее на основе использования закона сохранения импульса, законов динамики и кинематики. Приведем решение еще двух задач такого рода.

Задача 5 (баллистический маятник). В ящик с песком, подвешенный на нитях и имеющий массу M, попадает горизонтально летящая пуля массой m и застревает в нем. При этом ящик отклоняется и поднимается на высоту h от начального положения (рис. 39). Найти скорость пули.

v_0 — ?
m M h

Решение

В решении этой задачи требуется использовать предписание двух алгоритмов — на законы сохранения энергии и импульса (в этом смысле она нестандартна для учащихся).

Анализируя происходящие процессы, учащиеся должны прежде всего обратить внимание на то, что здесь налицо ударное взаимодействие двух тел системы — пули и ящика, следовательно, применим закон сохранения импульса.

До взаимодействия: импульс пули mv_0, импульс ящика 0.

После взаимодействия: импульс системы $(m+M)\vec{v}$. По закону сохранения импульса

$$m\vec{v}_0=(m+M)\vec{v},$$

где $\vec{v}$ — скорость ящика с застрявшей в нем пулей.

Если ось системы координат направлена вдоль полета пули, то

$$mv_0=(m+M)v,$$

откуда

$$v_0=\frac{m+M}{m}v.$$

Очевидно, что для нахождения искомой величины надо определить скорость ящика после удара.

Для ее определения используем закон сохранения энергии, выбрав в качестве первого состояния то, в котором находится ящик с застрявшей в нем пулей и имеющий скорость v, а в качестве второго состояния то, в котором находится ящик с пулей, поднявшись на высоту h. Отсчет потенциальной энергии будем вести от начального положения ящика. Так как на этом этапе движения непотенциальные силы не действуют, то применим закон сохранения механической энергии. Следовательно,

$$E_1=E_2 \text{ и } \frac{(m+M)v^2}{2}=(m+M)gh.$$

Отсюда

$$v=\sqrt{2gh}.$$

Подставляя это значение v в ранее полученное выражение, имеем:

$$v_0=\frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}.$$

Обычно учащиеся сразу предлагают использовать закон сохранения энергии, но, как правило, допускают ошибку в выборе той стадии движения, к которой этот закон применим, особенно, если область применения закона сохранения энергии определяется через понятие замкнутой системы, а не через понятие потенциальных сил. Полагая систему замкнутой, учащиеся в качестве первого состояния системы принимают состояние, в котором пуля подлетала к ящику со скоростью v_0, а ящик покоится, а в качестве второго состояния принимают состояние ящика с пулей на высоте h. При этом получается неверный результат:

$$\frac{mv_0^2}{2}=(m+M)gh.$$

Если же исходить из того, что закон сохранения энергии справедлив в случае действия только потенциальных сил, то вероятность такой ошибки куда меньше. Действительно, при движении пули в ящике на нее действует непотенциальная сила — сила сопротивления, следовательно, механическая энергия пули не сохраняется и частично превращается во внутреннюю. Поэтому применять закон сохранения энергии для этой стадии движения нельзя. И это надо четко пояснить ученикам.

Задача 6. На горизонтальной плоскости лежит кубик массой 100 г. Его пробивает летящая вертикально пуля массой 10 г. При этом ее скорость меняется от 100 до 95 м/с. Определить, на какую высоту подпрыгнет кубик (рис. 40).

s — ?
$m_1=10$ г $m_2=100$ г $v_1=100$ м/с $v_2=95$ м/с

Решение

Приведем краткое решение задачи. Так как взаимодействие пули и кубика является ударным, то выполним закон сохранения импульса, поэтому

$$m_1\vec{v}_1=m_1\vec{v}_2+m_2\vec{v},$$

где v — скорость кубика после пробивания его пулей.

Отсюда

$$m_1v_1=m_1v_2+m_2v \text{ и } v=\frac{m_1(v_1-v_2)}{m_2}.$$

После взаимодействия кубик движется, испытывая лишь действие силы тяжести — потенциальной силы, поэтому справедлив закон сохранения механической энергии, согласно которому

$$mgs=\frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$s=\frac{v^2}{2g}.$$

И в целом

$$s=\frac{m_1^2(v_1-v)^2}{2m_2^2g}=0{,}125 \text{ м}=1{,}25 \text{ см},$$

т. е. кубик подпрыгнет на заметную высоту.

Если не в основном курсе физики, то во всяком случае на факультативных занятиях надо ввести закон изменения механической энергии и на основе решения приведенных задач дополнить алгоритм утверждением: *если на тело действуют непотенциальные силы, написать закон изменения механической энергии в виде: $\Delta E=E_2-E_1=A_{непот}$ и, раскрыв значения энергии в каждом из выбранных состояний и значение работы, подставить эти величины в уравнение закона и решить его относительно искомой величины.*

Обосновать это утверждение можно после решения следующей задачи.

Задача 7. Тело массой m бросают вертикально вниз со скоростью v_0 с высоты h. Упав на землю, оно углубляется в грунт на глубину s. Найти среднюю силу сопротивления грунта (сопротивлением воздуха пренебречь).

F_c — ?
m
v_0
h
s

Решение

Выбрав систему отсчета, как указано на рисунке 41, выделим состояния, представляющие интерес в соответствии с условием задачи. Обычно учащиеся предлагают выбрать три состояния, указанные на чертеже. Согласимся с ними. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии можно принять состояние *2* или *3*. Допустим, что он совпадает с состоянием *3*.

Для решения вопроса о применимости закона сохранения энергии выясним, какие силы действуют на тело в процессе его движения. При переходе *1→2* действует только сила тяжести — потенциальная сила, следовательно, применим закон сохранения механической энергии. При переходе *2→3* действует и непотенциальная сила — сила сопротивления, следовательно, для этого этапа движения справедлив закон изменения механической энергии.

Итак, имеем

$$\Delta E_{12}=E_2-E_1=0,$$
$$\Delta E_{23}=E_3-E_2=A_{23}.$$

Отсюда

$$E_3-E_1=A_{23},$$

т. е. состояние *2* оказалось ненужным. Найдем значения энергии E_3 и E_1 и работы:

$$E_3=0,$$
$$E_1=\frac{mv_0^2}{2}+mg(h+s),\ A_c=-F_cs.$$

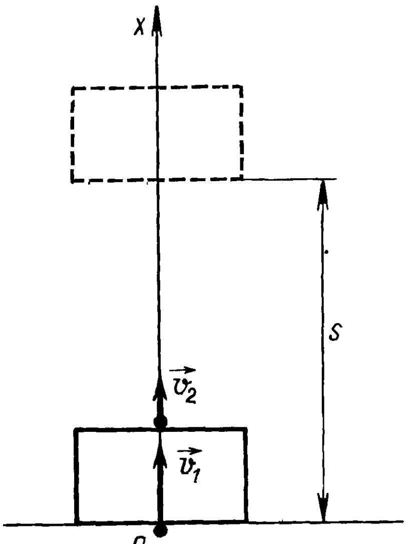


Рис. 40

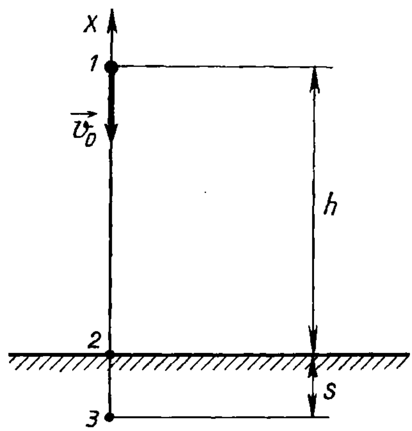


Рис. 41

Тогда, подставив эти величины в уравнение, получим:

$$0-\frac{mv_0^2}{2}-mg(h+s)=-F_c s.$$

Отсюда

$$F_c=\frac{mv_0^2+2mg(h+s)}{2s}.$$

Для того чтобы показать преимущество энергетического метода решения задач, в которых о силах ничего не известно, полезно решить следующую задачу на закон изменения механической энергии.

Задача 8. Камень массой 50 г, брошенный с высоты 5 м над землей со скоростью 18 м/с под углом к горизонту, упал на землю со скоростью 24 м/с. Найти работу силы сопротивления воздуха.

A_c — ?
$v_1=18$ м/с
$v_2=24$ м/с
$m=50$ г
$h=5$ м

Решение

Выберем систему отсчета, как показано на рисунке 42. Очевидно, что найти работу по формуле $A=Fs\cos\alpha$ не представляется возможным. Сила не задана и меняется в процессе движения. Но работа есть мера изменения энергии, а так как в данном случае действует непотенциальная сила — сила сопротивления, то механическая энергия меняется.

Выберем два состояния тела, в которых известны его скорости. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии примем поверхность Земли.

Тогда, применяя закон изменения механической энергии, получим:

$$\frac{mv_2^2}{2}-\left(\frac{mv_1^2}{2}+mgh\right)=A_c \text{ и } A_c=\frac{m}{2}(v_2^2-v_1^2-2gh)=3{,}8 \text{ Дж}.$$

Далее полезно показать, что решение задач на основе использования закона изменения механической энергии также является более простым, нежели решение задач динамическим методом.

Задача 9. Автомобиль движется по шоссе со скоростью 36 км/ч. Шофер увидел на шоссе предмет, препятствующий движению, когда до него оставалось 26 м. Будет ли совершен наезд, если коэффициент трения 0,2 (время реакции шофера не учитывать).

s — ?
$v=36$ км/ч
$\mu=0{,}2$
$s'=26$ м

Решение

Выбрав систему отсчета, как указано на рисунке 43, рассмотрим два состояния автомобиля: состояние, соответствующее началу торможения, и состояние, соответствующее его полной остановке. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии примем поверхность Земли. Выясняя характер действующих на автомобиль сил, устанавливаем, что на автомобиль действует непотенциальная сила — сила трения, следовательно, применим закон изменения механической энергии $\Delta E=A_{тр}$.

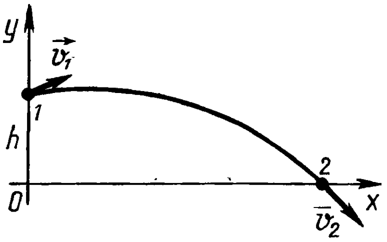


Рис. 42

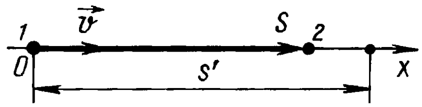


Рис. 43

Найдем значения всех входящих в это уравнение величин и, подставив их в уравнение, получим:

$$0-\frac{mv^2}{2}=-\mu mgs.$$

Отсюда

$$s=\frac{v^2}{2\mu g}=25 \text{ м},$$

т. е. наезд может быть предотвращен.

Решение задачи динамическим способом является более сложным и сводится к следующему.

По второму закону Ньютона

$$\vec{F}_{\text{т}}+\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр}}=m\vec{a}.$$

Отсюда в проекциях на ось Ox получим:

$$-F_{\text{тр}}=-ma \text{ и } a=\mu g.$$

Из уравнения кинематики можно найти модуль перемещения:

$$0-v_x^2=2a_xs_x \text{ и } -v^2=-2as,\ s=\frac{v^2}{2a}=\frac{v^2}{2\mu g}.$$

Поскольку учащимся сообщается, что при действии непотенциальных сил механическая энергия не сохраняется, а превращается во внутреннюю энергию, постольку уже при изучении механики решаются обычно одна-две задачи, в которых ставится вопрос о том, каково значение энергии, пошедшей на тепловые процессы. Такова, например, следующая задача.

Задача 10. Горизонтально летящая пуля массой $m=10$ г пробивает доску толщиной $s=10$ см. При этом ее скорость меняется от $v_1=600$ до $v_2=400$ м/с. Найти силу сопротивления доски. Какова механическая энергия, пошедшая на тепловые процессы?

E, F_c — ?
$m=10$ г $s=10$ см $v_1=600$ м/с $v_2=400$ м/с

Решение

Решение этой задачи часто сопровождается неверными толкованиями.

Иногда говорят о превращении механической энергии в работу. Но работа и энергия — принципиально разные величины, не превращаемые друг в друга. Еще хуже, когда этот процесс истолковывают как превращение механической энергии в количество теплоты и записывают равенство: $E_2 - E_1 = Q$. Количество теплоты, как и работа, в отличие от энергии,— характеристика не состояния, а процесса, и оно не может поэтому ни увеличиваться, ни уменьшаться, а значит, и превращаться ни во что не может. К тому же количество теплоты есть характеристика изменения внутренней энергии путем теплообмена, а здесь его нет, это — адиабатный процесс, для которого $Q=0$.

Какие же энергетические процессы происходят в ситуации, описанной в тексте задачи?

Кинетическая энергия пули убывает, превращаясь во внутреннюю энергию. Можно ли считать, что изменение механической энергии пули в точности равно увеличению внутренней энергии? Строго говоря, так считать нельзя, так как в процессе взаимодействия пули и доски механическая энергия и импульс пули передаются частично доске, при этом доска может прийти в движение, и лишь часть механической энергии пули идет на тепловые процессы.

Обозначим скорость, приобретенную доской при ее взаимодействии с пулей, v, а массу доски — M. Тогда изменение механической энергии системы «пуля — доска» будет:

$$\Delta E = E_2 - E_1,$$

где

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}, \text{ а } E_1 = \frac{mv_1^2}{2}.$$

Отсюда

$$\Delta E = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{Mv^2}{2}.$$

Скорость доски после взаимодействия можно найти по закону сохранения импульса:

$$mv_1 = mv_2 + Mv,$$

откуда

$$v = \frac{m}{M}(v_1 - v_2).$$

Если $M \gg m$, т. е. $M \to \infty$, то $v \to 0$, и тогда $\frac{Mv^2}{2} \to 0$. И в этом (и только в этом) случае можно приблизительно считать, что изменение механической энергии системы будет:

$$\Delta E = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

и таким же будет тогда и увеличение внутренней энергии системы. Мерой превращения механической энергии во внутреннюю является работа, т. е.

$$\Delta E = A \text{ и } \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -F_c s,$$

откуда

$$F_c = \frac{m}{2s}(v_1^2 - v_2^2) = 2000 \text{ Н}.$$

Естественно, что нагревшаяся доска и пуля затем будут охлаждаться и переходить в состояние теплового равновесия с окружающей средой, которая на этой стадии процесса будет получать количество теплоты $Q=\Delta E$; до этого же никакого теплообмена не было.

Вычислим теперь строго, какую механическую энергию приобрела доска. Так как скорость, приобретенная доской,

$$v=\frac{m}{M}(v_1-v_2),$$

то ее кинетическая энергия будет:

$$\frac{Mv^2}{2}=\frac{m^2}{2M}(v_1-v_2)^2=0{,}2 \text{ Дж}.$$

Изменение же механической энергии пули

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\frac{m}{2}(v_2^2-v_1^2)=1000 \text{ Дж}.$$

Следовательно, на тепловые процессы пойдет, строго говоря, не 1000 Дж, а 999,8 Дж, т. е. часть механической энергии пули.

Для упражнений в применении алгоритма можно решить из сборника А. П. Рымкевича и П. А. Рымкевича задачи №№ 383, 386, 392, 395.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, при изучении механики учащиеся овладевают пятью алгоритмами, соответствующими пяти разделам курса. Они убеждаются в их пользе и овладевают методами решения задач по механике. Однако при изучении определенной темы учащиеся знают, какой тип задач решается в этой теме и каким алгоритмом при этом надо пользоваться. При повторении курса обычно решаются задачи разных типов, в том числе и нестандартные. И здесь перед учащимся встает вопрос о распознавании класса задач, о выборе нужного алгоритма, а также о гибком использовании предписаний разных алгоритмов, если задача нестандартная.

Как решать, какой алгоритм может оказаться уместным и полезным в таких случаях? Самые общие рекомендации здесь могут быть такими.

Кинематические задачи отличаются прежде всего тем, что в их условиях отсутствуют динамические величины (масса, сила, коэффициент трения и т. д.) и задаются только кинематические характеристики движения. Если в условии задачи говорится о теле, находящемся в состоянии покоя, и заданы какие-либо динамические величины, можно с уверенностью применять условия равновесия. Наличие динамических величин в условии дает основание воспользоваться для решения законами динамики или законами сохранения. Обнаружив, что описанное в условии задачи взаимодействие носит ударный характер, можно попытаться решить задачу на основе законов сохранения или изменения импульса. Вообще, начиная решать новую механическую задачу, полезно обдумать возможность использования законов сохранения, так как применение последних обычно приводит к более простому и компактному решению.

Какие-либо более строгие рецепты для распознавания класса задач вряд ли возможны, а может быть, и не очень полезны. Тем более, что в нетиповых, нестандартных задачах требуется использовать разные законы механики, и в таких случаях один какой-либо алгоритм не позволит решить задачу. Но учащийся, приученный при решении типовых механических задач к использованию алгоритмов, овладел методами решения, и ему легче найти путь решения нестандартной задачи, осуществляя перенос знаний на новую ситуацию, для анализа которой надо применить и отработанные до автоматизма некоторые алгоритмические предписания, и элементы творческого мышления. Это и естественно — реальная мыслительная деятельность всегда требует самостоятельного поиска, проявления интуиции, догадки, но она невозможна и без своего рода «дисциплины ума», четкости и методичности, развитию которых как раз и способствует использование алгоритмического подхода к решению задач.

В заключение хотелось бы сказать о перспективах использования алгоритмического подхода при изучении последующих разделов курса физики и о соотношении алгоритмического и эвристического методов решения задач.

Вряд ли бы стоило так настойчиво внедрять алгоритмический подход, как это мы рекомендовали при изучении механики, если в последующие годы он больше никогда бы не использовался. Алгоритмы решения задач по механике, прививая ученикам «вкус» к этому методу, позволят им легче и с большей охотой использовать алгоритмы, которые стоит ввести, например, при решении задач на превращение механической энергии во внутреннюю, при решении задач на калориметрию. Но диапазон типов задач в других разделах физики (например, в задачах на тепловые явления) очень широк, и учебные алгоритмы могут быть составлены отнюдь не для всех классов задач.

Для задач по калориметрии алгоритм достаточно очевиден:

1. Установить, какие тела участвуют в тепловых процессах, описанных в задаче, и какие тела отдают количество теплоты, а какие получают.

2. Выяснить, в ходе каких процессов происходит выделение количества теплоты, и написать уравнения для нахождения количества теплоты в каждом из процессов.

3. Выяснить, в ходе каких процессов происходит поглощение количества теплоты, и записать уравнения для нахождения количеств теплоты, получаемых в каждом из процессов.

4. Написать уравнение теплового баланса, раскрыть значение каждой из входящих в него величин и решить уравнение относительно искомой величины.

Этот алгоритм успешно применяется для решения всех школьных задач этого типа. Но предложим учащимся, например, такую задачу:

«В калориметре находится вода массой 2 кг при температуре 278 К. В нее опускают лед массой 5 кг при температуре 233 К. Определить, что́ после установления теплового равновесия будет находиться в калориметре (лед, вода) и какой будет конечная температура содержимого в калориметре?»

Обычно, решая ее, учащиеся полагают, что лед расплавится и в калориметре будет вода при температуре выше 0°С. Действуя по алгоритму, они составляют уравнение теплового баланса и, решая его, получают абсурдный результат: содержимое калориметра будет иметь температуру более низкую, чем имел лед. Дело в том, что ученики избрали наиболее легко приходящий на ум процесс, а число процессов, которые здесь можно предположить, весьма велико, и надо определить, какой из них действительно возможен. А для этого надо подсчитать (пользуясь алгоритмом!), какое количество теплоты выделится при охлаждении воды до 0°С и какое необходимо для нагревания льда до 0°С. Расчет показывает, что выделившееся при охлаждении воды количество теплоты недостаточно для нагревания льда до точки плавления, а потому вода должна не только охладиться до 0°С, но и частично превратиться в лед.

Не вдаваясь в подробности решения этой задачи, которое с интересом для себя и учащихся может выполнить учитель, хотелось бы сказать, что анализ этой задачи еще раз показывает, что алгоритм обеспечивает правильное выполнение абсолютно необходимых для решения задачи стандартных операций.

Однако такие задачи учат и тому, что механическое, слепое следование только предписаниям алгоритма (как и любым предписаниям вообще) не приведет к успеху, так как мир богаче любых предписаний и может преподнести такую нестандартную задачу, решение которой невозможно без использования четко установленных правил, но невозможно и без творческого подхода на их основе. Всегда нужно анализировать суть происходящих процессов, предполагать возможность разных вариантов, критически оценивать возможность предположенного варианта и своих действий, проявляя гибкость ума, которая является важным качеством научного мышления, столь необходимого ныне каждому человеку.

Выработать у учащихся эти черты мышления помогает гибкое использование учителем разных методов обучения, включающих в себя и алгоритмические приемы, и эвристические, так как и те и другие необходимы для формирования творческой личности.

СОДЕРЖАНИЕ