РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
МЕХАНИКИ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE FOR PROBLEMS
OF MECHANICS

D.M. Klimov A.G. Petrov
D.V. Georgievskii

VISCOPLASTIC FLOWS

Dynamic Chaos, Stability, Mixing

MOSCOW NAUKA 2005

Д.М. Климов А.Г. Петров
Д.В. Георгиевский

Вязкопластические течения

Динамический хаос, устойчивость, перемешивание

МОСКВА НАУКА 2005

УДК 532
ББК 22.253
К49

Ответственный редактор
академик *И.Г. Горячева*

Рецензенты:
член-корреспондент РАН *А.Г Куликовский*,
доктор физико-математических наук *Д.Л. Быков*

Климов Д.М.

Вязкопластические течения динам. хаос, устойчивость, перемешивание / Д.М. Климов, А.Г. Петров, Д.В. Георгиевский ; [отв. ред. И.Г. Горячева] ; Ин-т проблем механики. – М. : Наука, 2005. – 394 с. – ISBN 5-02-032945-2.

Излагается современная теория вязкопластических течений, сформировавшаяся в течение XX в. в самостоятельный раздел гидромеханики и механики деформируемого твердого тела. Наряду с классическими постановками начально-красных задач и точными стационарными решениями подробно рассмотрены новые направления в исследовании вязкопластических течений. Эти новые направления – нестационарные и переходные режимы, динамический хаос, гидродинамическая устойчивость, перемешивание – быстро развиваются благодаря прогрессу в компьютерном моделировании.

Для специалистов по механике сплошной среды, научных сотрудников, аспирантов, студентов, изучающих гидромеханику и механику деформируемого твердого тела.

Темплан 2004-II-72

ISBN 5-02-032945-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть вторая

Вязкопластические течения: устойчивость

(Климов Д.М., Георгиевский Д.В.)

Глава 11

Глава 12

ПРЕДИСЛОВИЕ

Модель вязкопластической среды, построенная А.Ж.К. Сен-Венаном, Ф.Н. Шведовым, Э.К. Бингамом и Х. Генки, в настоящее время является классической двухпараметрической моделью. Когда один из двух параметров равен нулю, она превращается либо в вязкую жидкость, либо в модель идеальной пластичности. В природе и технике существует достаточно много материалов, в которых необходимо учитывать свойства вязкости и пластичности совместно: различные виды грунтов, глинистые почвы, торфоматериалы, коллоидные растворы, порошкообразные смеси, смазочные материалы, цементные растворы, металлы при обработке давлением, пищевые полуфабрикаты, биожидкости и многие другие материалы. Обычно эта модель лишь кратко излагается в некоторых монографиях по вязкой жидкости: Лойцянский Л.Г. [46]; пластичности: Качанов Л.М. [37], Колмогоров В.Л. [38], Соколовский В.В. [85], Хилл Р. [93], Ишлинский А. Ю. [34], Ишлинский А. Ю. Ивлев Д.Д. [35] и др.; в общих курсах по механике сплошной среды: Мейз Дж. [49], Жермен П. [26], задачнике [50] и др.; или же в монографиях по реологии, например, Рейнер М. [78].

Во избежание путаницы необходимо оговорить, что в механике сплошной среды термин «вязкопластичность» традиционно употребляется как в деформационной теории, так и в теориях течения, причем в последнем случае синонимом термина «вязкопластическая среда» является термин «бингамовская среда» или «среда Бингама». Ниже в монографии рассматриваются именно бингамовские среды и некоторые их нелинейные обобщения.

Пожалуй, единственной монографией, целиком посвященной теории вязкопластических течений, была монография Огибалова П.М., Мирзаджанзаде А.Х. [58]. Однако в настоящее время эта теория пополнилась многими новыми результатами.

Книга состит из двух частей. Материал первой части: Климов Д.М., Петров А.Г. «Вязкопластические течения: динамический хаос, перемешивание» существенно отличается от существующих монографий тем, что в ней наиболее полно изложены все известные точные решения краевых задач, как стационарных, так и нестационарных, подробные постановки краевых задач в напряжениях и скоростях в функциях напряжений и в функциях тока, вариационные формулировки задач, асимптотические и вариационные методы построения решений. Кроме того, изложены новые постановки задачи перемешивания вязкопластической среды в сосудах, граница которых периодически меняется со временем, и даны оригинальные подходы к исследованию этой проблемы.

Первые две главы - это введение в теорию вязкопластических течений. В них даны основные сведения из тензорного анализа и механики сплошной среды, а также постановки краевых задач для вязкопластических течений. Уравнения выписываются в общем виде в различных криволинейных системах координат. В гл. III дан подробный обзор точных решений задачи стационарного вязкопластического течения.

В остальных главах первой и второй частей изложены новые результаты, полученные авторами в ходе выполнения проектов, поддерживаемых Российским Фондом Фундаментальных исследований. Проекты были направлены на создание теоретических основ нового поколения пищевых технологических машин, работающих на вибрационно-волновых принципах. Работа по разработке и внедрению таких технологий ведется в Институте проблем механики РАН.

Результаты, опубликованные за первые годы выполнения проекта РФФИ 093-13-17722 по разработке асимптотического метода решения задачи в тонком деформируемом слое: [22], [23], [60], по оптимизации процессов управления [59] и развитию вязкопластического течения [65], были ранее собраны в небольшом монографическом отчете [24]. Они вошли и в данную монографию в более расширенном виде с подробным выводом уравнений движения в тонком криволинейном слое и обоснованием на базе вариационного принципа. Основным же содержанием книги являются результаты, полученные и опубликованные авторами в ходе выполнения последующих проектов РФФИ 96-01-01862, 99-01-00250 и 02-01-00567.

В гл. IV изложены многопараметрические серии точных решений задач нестационарного вязкопластического течения в «плоских» [61], [62], [66] и круглых [71] трубах. Решения описывают вязкопластические течения с переменным во времени жестким ядром под действием переменного во времени перепада давлений. Такие течения могут быть реализованы в лабораторном эксперименте. Полученные точные решения полезны для тестирования численных схем.

Гл. V посвящена приближенным методам исследования вязкопластического течения. Основное содержание – это вывод уравнений движения среды в тонком деформирующемся слое, аналогичных уравнениям Рейнольдса. Приведены примеры решений уравнений в задачах вытеснения среды параллельными пластинами и дисками. Развитая здесь асимптическая теория применяется в последующих главах.

В гл. VI и VII излагаются постановки задач о перемешивании вязкопластической среды в сосудах, границы которых периодически меняется со временем. Предлагается оригинальный метод ее исследования. Для плоскопараллельного течения сначала строится функция тока. Затем изучаются уравнения Гамильтона для движения частиц жидкости. Гамильтонианом является построенная функция тока. Перемешивание связывается с динамическим хаосом, который возникает в полученной неавтономной гамильтоновой системе. Идея такого подхода обсуждается в монографиях [31, 102] и др. В силу сложности проблемы обычно ограничиваются рассмотрением простейших модельных задач потенциальных течений идеальной жидкости. В гл. VI и VII изучается процесс перемешивания для краевых задач нестационарного течения вязкой жидкости и вязкопластической среды с помощью оригинальной техники построения параметрических отображений Пуанкаре. следуя работам, опубликованных авторами. В работах [66, 69, 68, 72, 74] метод демонстрируется на решении задач классической механики, а в [64, 67, 70, 73] применяется для моделирования и описания процесса перемешивания в вязкой жидкости и вязкопластической среде.

С восьмой главы начинается вторая часть книги Климов Д.М., Георгиевский Д.В. «Вязкопластические течения: устойчивость». В гл. VIII даются общие сведения о нелинейных тензорных функциях в теории определяющих соотношений и о месте вязкопластической модели в этой теории. Приводятся материальные функции для различных глинистых и нефтесодержащих материалов, а также для крови, рассматриваемой с точки зрения биомеханики как феноменологически однородный объект с эффективными свойствами. Гл. IX посвящена нестационарным режимам движения вязкопластических сред. Наряду с обзором приводятся решения некоторых важных начально-краевых задач.

В гл. X и XI основное внимание будет уделено гидродинамической устойчивости вязкопластических течений относительно начальных малых возмущений. На основе вариационных (интегральных) методов будут даны достаточные оценки параметров устойчивости. Подробно исследуются классические стационарные одномерные сдвиговые течения, о которых идёт речь в первой части.

Гл. XII также посвящена устойчивости, но уже относительно малых возмущений самих материальных функций среды, в частности, малой вариации предела текучести. В качестве основных невозмущенных процессов взяты течения вязкой жидкости в конфузоре и над вращающейся плоскостью.

Книга полезна тем, кто интересуется разделами механики сплошной среды: гидродинамикой, механикой деформируемого твердого тела, реологией. Она доступна специалистам с университетским или техническим образованием.

Понимание всех разделов не требует специальных знаний, так как они изложены в самой книге.

Авторы благодарят рецензентов И.Г. Горячеву, А.Г. Куликовского и Д.Л. Быкова, взявших на себя труд ознакомиться с материалом книги и внести свои замечания, которые авторы по возможности учли. Большую помощь в написании глав 6 и 7 авторам оказал В.Ф. Журавлев, которому авторы выражают особую благодарность.

Авторы благодарны Сорокиной И.А., тщательно проверившей основные формулы и текст первой части книги и внесшей немало поправок.

Д.М. Климов, А.Г. Петров, Д.В. Георгиевский

Часть первая

Вязкопластические течения: динамический хаос, перемешивание

(Климов Д.М., Петров А.Г.)

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В связи с необходимостью записывать физические соотношения в инвариантной, т. е. не зависящей от системы координат форме, в механике сплошной среды (МСС) [26, 33, 49, 82] используются тензоры.

1.1. Тензоры второго ранга

1. Определение тензора. Пусть имеются две декартовы системы координат, которые условно назовем старая и новая. Базисные векторы $\vec{э}'_i$ новой системы координат выражаются через старые базисные векторы $\vec{э}_i$

$$\vec{э}'_i = c_{ij}\vec{э}_i, \quad c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.1.1}$$

где c_{ij} — ортогональная матрица, δ_{ij} — символ Кронекера. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Формула (1.1.1) называется законом преобразования базиса.

Тензор $\underset{\sim}{t}$ определяется как инвариантный объект, не зависящий от выбора системы отсчета. Для тензора второго ранга это означает равенство диад

$$\underset{\sim}{t} = t_{ij}\vec{э}_i\vec{э}_j = t'_{ij}\vec{э}'_i\vec{э}'_j. \tag{1.1.2}$$

В (1.1.2) выражение $\vec{э}_i\vec{э}_j$ есть тензорное (или диадное) произведение векторов, которое часто обозначают $\vec{э}_i \otimes \vec{э}_j$. Скалярное произведение двух векторов $\vec{э}_i$ и $\vec{э}_j$ будем обозначать $\vec{э}_i \cdot \vec{э}_j$, а их векторное произведение обозначим как $\vec{э}_i \times \vec{э}_j$.

2. Закон преобразования. Соотношение (1.1.2) выполняется тогда и только тогда, когда компоненты тензора преобразуются по ковариантному закону

$$t'_{ij} = c_{ii'}c_{jj'}t_{i'j'}. \tag{1.1.3}$$

3. Инварианты. Три скалярные функции компонент тензора

$$J_1 = t_{ii}, \quad J_2 = t_{ij}t_{ij}, \quad J_3 = t_{ij}t_{jk}t_{ki} \tag{1.1.4}$$

не зависят от выбора системы координат. Такие функции называются инвариантами тензора $\underset{\sim}{t}$. Для симметричного тензора других независимых функционально инвариантов нет. Сумма диагональных элементов t_{ii} тензора, называется **следом** тензора или его **первым инвариантом**.

Тензор называется **девиатором**, если его след равен нулю. Тензор $A\delta_{ij}$ называется шаровым. Любой тензор можно единственным образом представить в виде суммы шаровой части и девиатора

$$t_{ij} = (J_1/3)\delta_{ij} + t_{ij}^d, \quad J_1 = t_{ii}. \tag{1.1.5}$$

4. Главные оси. Рассмотрим симметричный тензор $\underset{\sim}{t}$. Привести тензор к главным осям означает найти базис $\vec{э}_i^0$, $i = 1, 2, 3$, в котором матрица тензора $\underset{\sim}{t}$ имеет диагональный вид. Для этого составляется характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получим кубическое уравнение

$$\begin{aligned} &\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \\ &I_1 = J_1, \quad I_2 = (J_1^2 - J_2)/2, \\ &I_3 = (J_1^3 - 3J_1J_2 + 2J_3)/6. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Доказывается, что уравнение (1.1.6) имеет три действительных корня λ_1, λ_2, λ_3, которые называются собственными числами. Они и будут диагональными элементами $t_{11}^0 = \lambda_1$, $t_{22}^0 = \lambda_2$, $t_{33}^0 = \lambda_3$.

Нетривиальное решение x_1, x_2, x_3 вырожденной линейной системы

$$\begin{aligned} &(t_{11} - \lambda_1)x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 = 0 \\ &t_{12}x_1 + (t_{22} - \lambda_1)x_2 + t_{23}x_3 = 0 \\ &t_{13}x_1 + t_{23}x_2 + (t_{33} - \lambda_1)x_3 = 0 \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

определяет единичный вектор $\vec{э}_1^0 = (x_1\vec{э}_1 + x_2\vec{э}_2 + x_3\vec{э}_3)/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Векторы $\vec{э}_2^0$ и $\vec{э}_3^0$ получим аналогично, заменив в уравнениях λ_1 на λ_2 и λ_3 соответственно. Три единичных вектора $\vec{э}_i^0, i = 1, 2, 3$ — взаимно ортогональны и образуют базис декартовой системы координат. Векторы, параллельные $\vec{э}_i^0$, называются собственными. Они определяют три взаимно ортогональные собственные направления или главные оси.

Через собственные числа можно выразить инварианты

$$\begin{aligned} &J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^3, \quad J_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3, \\ &I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

1.2. Пространственное напряженное состояние

1. Вектор напряжений. В качестве $\underset{\sim}{t}$ рассмотрим тензор напряжений[1] $\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_{ij}\vec{э}_i\vec{э}_j$. Будем рассматривать классический случай, когда тензор $\underset{\sim}{\sigma}$ — симметричный ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). На площадке с единичной нормалью $\vec{n}$ вектор напряжений $\vec{P}^{(n)}$ имеет компоненты

$$P_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.2.1}$$

Как видно из (1.2.1), на каждой площадке, проходящей через одну и ту же точку пространства, вектор напряжений свой, поэтому $\vec{P}^{(n)}$ не образует векторное поле в R^3.

Нормальное напряжение $N^{(n)}$ на площадке есть проекция $\vec{P}^{(n)}$ на единичную нормаль $\vec{n}$ и согласно (1.2.1) имеет вид

$$N^{(n)} = P_i^{(n)}n_i = \sigma_{ij}n_jn_i. \tag{1.2.2}$$

Проекция вектора $P_i^{(n)}$ на саму площадку называется касательным напряжением $\tau^{(n)}$ (рис. 1.1)

$$\tau^{(n)} = \sqrt{|P_i^{(n)}|^2 - (N^{(n)})^2} = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ik}n_in_k - (\sigma_{ij}n_in_j)^2}. \tag{1.2.3}$$

2. Эллипсоид напряжений. Коши предложил рассматривать равенство (1.2.1) как линейное преобразование вектора $\vec{n}$ в вектор $\vec{P}(\vec{n})$. Преобразование (1.2.1) переводит сферу $|\vec{n}| = 1$ в эллипсоид, который называется эллипсоидом напряжений (рис. 1.2).

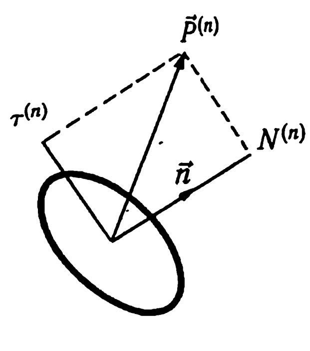


Рис. 1.1. Вектор напряжений

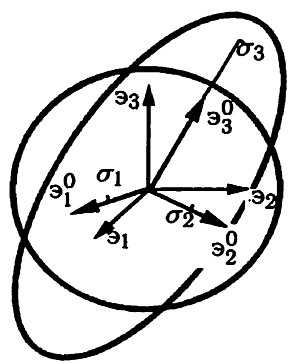


Рис. 1.2. Эллипсоид напряжений

[1]Заметим, что слово «тензор» («tensor») произошло именно от слова «tension» («напряжение», «усилие»).

3. Главные направления и главные значения тензора напряжений. Система уравнений (1.1.7) для тензора $\underset{\sim}{\sigma}$ определяет три собственных направления $\vec{э}_1{}^0$, $\vec{э}_2{}^0$, $\vec{э}_3{}^0$ и три собственные значения $\lambda_1 = \sigma_1$, $\lambda_2 = \sigma_2$, $\lambda_3 = \sigma_3$. Векторы $\vec{э}_i{}^0$, $i = 1, 2, 3$ направлены по главным осям эллипсоида напряжений и называются главными направлениями тензора напряжений. Собственные значения σ_i называются главными значениями. На площадке с нормалью $\vec{э}_i{}^0$ вектор напряжений определяется так $\vec{P}(n) = \sigma_i \vec{э}_i{}^0$ (суммирование по i нет).

Таким образом, главные направления и главные значения тензора напряжений имеют следующие свойства.

1. Кубическое уравнение (1.1.6) всегда имеет три действительные корня. Они и есть главные значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

2. Для каждого главного значения σ_i из системы (1.1.7) находится одно главное направление $\vec{э}_i{}^0$, $i = 1, 2, 3$.

3. Три главные направления $\vec{э}_1{}^0$, $\vec{э}_2{}^0$, $\vec{э}_3{}^0$ взаимно перпендикулярны и направлены по осям эллипсоида напряжений.

4. Длины полуосей эллипсоида напряжений равны главным значениям тензора напряжений σ_1, σ_2, σ_3.

5. На площадке с нормалью главного направления $\vec{э}_i{}^0$ касательное напряжение равно нулю, а вектор напряжений $\vec{P}(\vec{n})$ коллинеарен $\vec{э}_i{}^0$ и равен по величине главному значению σ_i, $i = 1, 2, 3$.

6. В главных осях (декартова система координат с единичными векторами $\vec{э}_1{}^0$, $\vec{э}_2{}^0$, $\vec{э}_3{}^0$) вектор $\vec{P}(n)$ имеет составляющие $\sigma_1 n_1$, $\sigma_2 n_2$, $\sigma_3 n_3$, нормальная составляющая равна

$$N^{(n)} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \tag{1.2.4}$$

4. Экстремальные значения компонент тензора. Нормальное напряжение (1.2.4), как функция компонент нормали к площадке $N^{(n)}$ имеет три экстремальных значения, равные собственным $N_1^{(n)} = \sigma_1, N_2^{(n)} = \sigma_2, N_3^{(n)} = \sigma_3$. Отсюда имеем следующий вывод: *наибольшее нормальное напряжение на площадке равно наибольшему собственному значению.*

В следующем пункте будет показано, что касательные напряжения имеют локальные экстремумы

$$\tau_{12} = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_1|, \quad \tau_{23} = \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_2|, \quad \tau_{13} = \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1| \tag{1.2.5}$$

и носят названия главных касательных напряжений. Максимальное значение равно наибольшему из этих трех значений числу. Таким образом, получим второй вывод: *наибольшее касательное напряжение на площадке равно наибольшей полуразности собственных значений.*

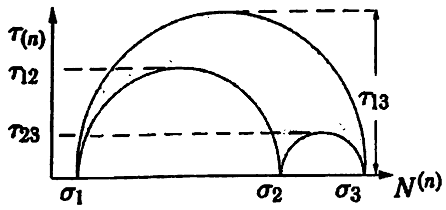


Рис. 1.3. Круги Мора

Этот результат получен независимо Гестом (Gest J. 1900) и Мором (Mohr O. 1900). Для плоского напряженного состояния результат был достигнут еще Сен-Венаном.

5. Круги Мора. Удобное двумерное графическое представление о тензоре дают круги Мора [89]. Из этого представления легко получить геометрическое решение задачи об экстремумах нормальных и касательных напряжений.

Рассмотрим тензор напряжений σ_{ij}. Будем предполагать, что собственные значения $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ различны. Тогда их можно расположить в порядке возрастания $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

Пусть на площадке с нормалью $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ вектор напряжений $\vec{P}^{(n)}$ имеет нормальную $\sigma = N^{(n)}$ и касательную $\tau = \tau^{(n)}$ составляющие. В главных осях формула (1.2.1) для компонент вектора $\vec{P}^{(n)}$ примет вид $P_1^{(n)} = \sigma_1 n_1$, $P_2^{(n)} = \sigma_2 n_2$, $P_3^{(n)} = \sigma_3 n_3$. Запишем формулы для квадрата длины и нормальной компоненты (1.2.2) вектора $\vec{P}^{(n)}$, а также условие для единичной нормали

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 &= \sigma^2 + \tau^2, \\ \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 &= \sigma, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Соотношения (1.2.6) можно рассматривать, как систему уравнений относительно неизвестных n_1^2, n_2^2, n_3^2. Разрешить ее можно так [26]. Введем квадратичную функцию $f(\sigma) = a\sigma^2 + b\sigma + c$ с неопределенными пока коэффициентами. Умножим первое уравнение (1.2.6) на a, второе на b, третье на c и сложим их. В результате получим уравнение

$$n_1^2 f(\sigma_1) + n_2^2 f(\sigma_2) + n_3^2 f(\sigma_3) = f(\sigma) + a\tau^2,$$

в котором квадратичная форма произвольна. Выберем ее в виде $f(\sigma) = (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)$. Тогда $f(\sigma_2) = f(\sigma_3) = 0$, $a = 1$ и из уравнения получим $n_1^2 f(\sigma_1) = f(\sigma) + \tau^2$. Отсюда находим n_1^2

$$n_1^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}.$$

Выбирая квадратичную функцию

$$f(\sigma) = (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3)$$

и

$$f(\sigma) = (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2),$$

найдем

$$n_2^2 = \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1)},$$
$$n_3^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}.$$

Определим геометрическое место точек с координатами $N^{(n)} = \sigma, \tau^{(n)} = \tau$ при всевозможных положениях вектора $\vec{n}$. Для этого нужно записать условие неотрицательности квадратов компонент нормали

$$(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 = (\sigma - \tfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3))^2 + \tau^2 - \tfrac{1}{4}(\sigma_3 - \sigma_2)^2 \geqslant 0,$$
$$(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 = (\sigma - \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3))^2 + \tau^2 - \tfrac{1}{4}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leqslant 0,$$
$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 = (\sigma - \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2))^2 + \tau^2 - \tfrac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_1)^2 \geqslant 0.$$

Полученные неравенства определяют на координатной плоскости $N^{(n)}, \tau^{(n)}$ все допустимые значения касательного и нормального напряжений на площадках. На рис. 1.3 множество допустимых значений изображено в виде затененной области, ограниченной изнутри окружностями с диаметрами $\sigma_2 - \sigma_1$, $\sigma_3 - \sigma_2$ и снаружи окружностью с диаметром $\sigma_3 - \sigma_1$. Экстремальные значения касательного напряжения $\tau^{(n)}$ — это радиусы кругов: τ_{12}, τ_{23} и τ_{13}, совпадающие с выражениями (1.2.5). Наибольшее касательное напряжение равно наибольшему экстремальному значению $\tau_{max} = \tau_{13}$.

6. Девиатор и шаровая часть тензора напряжений. Как и любой тензор второго ранга тензор напряжений σ_{ij} разлагается на девиатор s_{ij} и шаровую часть

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \quad p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \tag{1.2.7}$$

где p называется давлением.

Главные значения девиатора s_1, s_2 и s_3 связаны с главными напряжениями

$$s_\alpha = \sigma_\alpha + p, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

7. Интенсивность напряжений. Первый инвариант девиатора $\underset{\sim}{s}$ равен нулю. Второй квадратичный инвариант связан с интенсивностью напряжений $\sigma_\text{и}$, которая вводится так

$$\sigma_\text{и} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}.$$

С помощью (1.2.7) ее можно выразить через инварианты тензора $\underset{\sim}{\sigma}$

$$\sigma_\text{и}^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} + 2p\sigma_{ii} + 3p^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - 3p^2,$$

а также через главные значения тензора $\underset{\sim}{\sigma}$

$$\sigma_и^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2/3$$

или главные касательные напряжения

$$\sigma_и^2 = \frac{4}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2). \tag{1.2.8}$$

Покажем, что инвариант $T = \sigma_и/\sqrt{2}$ и наибольшее касательное напряжение на площадке $\tau_{max} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$ подчинены неравенствам

$$\tau_{max} \leqslant T = \sqrt{s_{ij}s_{ij}/2} \leqslant (2/\sqrt{3})\tau_{max} \approx 1,15\tau_{max}, \tag{1.2.9}$$

т. е. равенство $T = \tau_{max}$ верно с точностью до 15% [33].

Действительно, из (1.2.8) следует, что

$$\frac{T}{\tau_{max}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{\tau_{13}}\right)^2}$$

Обозначим $\tau_{23}/\tau_{13} = z$, тогда $\tau_{12}/\tau_{13} = 1 - z$ и равенство приведется к виду

$$T/\tau_{max} = \sqrt{2/3}\sqrt{f(z)}, \quad f(z) = 2 - 2z + 2z^2$$

Так как $0 \leqslant z \leqslant 1$, то $\max f(z) = 2$ при $z = 0$ и $z = 1$, $\min f(z) = f(1/2) = 3/2$. Отсюда и получим неравенство (1.2.9).

8. Условие пластического течения. Алгебраическое неравенство

$$T(t, \vec{x}) > \tau_s, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \tag{1.2.10}$$

называется условием пластичности Губера-Мизеса (M.T.Huber, 1904; R.Mizes, 1913). [2] В тех точках тела $\vec{x}$ и в те моменты времени t, где и когда оно справедливо, наступает пластическое течение. Постоянная материала τ_s, имеющая размерность напряжения, называется пределом текучести при сдвиге.

С учетом (1.2.8) квадратичный инвариант T можно выразить через собственные значения s_1, s_2, s_3 девиатора напряжений и записать условие (1.2.10) так:

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_1 - s_3)^2 > 6\tau_s^2$$

или в силу (1.2.7) в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 > 6\tau_s^2.$$

Условие (1.2.10) иногда записывают так $\sigma_и > \sigma_s = \tau_s\sqrt{2}$.

Значительно раньше был сформулирован другой критерий пластичности (H. Treska, 1868). Согласно нему пластическое течение возникает, когда макси-

[2] Согласно С.П. Тимошенко это условие впервые было сформулировано Максвеллом в письме к Томсону (Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов, с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. Гостехиздат, 1957).

мальное касательное напряжение τ_{13} превышает предельное напряжение сдвига τ_*, как и τ_s являющееся постоянной для данного материала:

$$\tau_{max} = \tau_{13} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2 > \tau_*. \tag{1.2.11}$$

Поскольку $\tau_{max} \approx T$, то критерии Мизеса (1.2.10) и Треска (1.2.11) близки друг к другу, а $\tau_s = \tau_*$.

Критерии Мизеса и Треска можно изобразить графически. С помощью равенств $T^2 = \sigma_и^2/2$, $\tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23}$ и (1.2.8) величину T^2 можно выразить через τ_{12} и τ_{23}.

$$T^2 = \frac{2}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + (\tau_{12} + \tau_{23})^2) = \frac{4}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{12}\tau_{23}).$$

Таким образом, поверхность текучести Мизеса $T = \tau_s$ в осях τ_{12} и τ_{23} представляется уравнением

$$\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{12}\tau_{23} = \frac{3}{4}\tau_s^2, \quad \tau_{12} \geqslant 0, \quad \tau_{23} \geqslant 0. \tag{1.2.12}$$

С помощью соотношения $\tau_{max} = \tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23}$ поверхность текучести Треска $\tau_{max} = \tau_*$ представляется линейным уравнением

$$\tau_{12} + \tau_{23} = \tau_* \tag{1.2.13}$$

Кривые (1.2.12) и (1.2.13) изображены на плоскости (τ_{12}, τ_{23}) на рис. 1.4. Область, в которой отсутствует пластическое течение по критерию Мизеса, ограничена дугой эллипса и координатными осями. Отношение осей эллипса равно $\sqrt{3}$, малая ось направлена по биссектрисе координатного угла. Часть плоскости, где отсутствует пластическое течение по критерию Треска, представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого расположены на осях (τ_{12}, τ_{23}) и равны τ_* (рис. 1.4 а). При надлежащем выборе отношения τ_s/τ_* расхождение критериев невелико. В частности, если взять $\tau_s = \tau_*$, то площадь

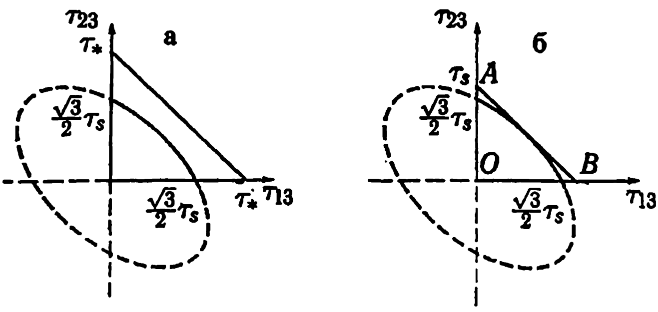


Рис. 1.4. Условия пластичности Мизеса и Треска

заштрихованной части эллипса равна $\pi\sqrt{3}\tau_s/12 = 0,453\tau_*$ и составляет около 90% площади треугольника OAB (рис. 1.4 б). При условии

$$\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{13}/2$$

критерии Мизеса и Треска тождественны. Именно этот случай реализуется при плоской деформации сплошной среды (см. разд. 1.6).

1.3. Кинематика деформируемой среды

1. Поле скорости. Распределение скоростей в малой окрестности сплошной среды. Движение сплошной среды полностью описывается полем скорости $\vec{v} = v_i \vec{э}_i^0$. Компоненты вектора скорости v_i зависят от времени t и координат точки $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$. Рассмотрим точку $\vec{x}$ и ее малую окрестность $\vec{x} + \vec{\delta x}$, $\vec{\delta x}(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$. Распределение скорости в малой окрестности можно описать с помощью тензора дисторсии $v_{i,j} = \partial v_i/\partial x_j$. С точностью до малых второго порядка δx^2 поле скорости будет линейным по координатам δx_i.

$$v_i = v_i^0 + v_{i,j}\delta x_j \tag{1.3.1}$$

Тензор дисторсии можно разложить на симметричную $v_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ и антисимметричную $\omega_{ij} = (v_{i,j} - v_{j,i})/2$ части. Матрица ω_{ij} выражается через компоненты вектора вихря $\mathrm{rot}\vec{v}$

$$\begin{gathered}
\omega_i = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\vec{v})_i, \qquad \omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right), \\
\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right), \qquad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), \\
\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{1.3.2}$$

Если подставить $v_{i,j} = \omega_{ij} + v_{ij}$ в (1.3.1) и воспользоваться выражением (1.3.2), то получим теорему Коши-Гельмгольца

$$\vec{v}(\vec{x} + \vec{\delta x}) = \vec{v}(\vec{x}) + \vec{\omega} \times \vec{\delta x} + \vec{v}^* \qquad v_i^* = v_{ij}\delta x_j. \tag{1.3.3}$$

Первые два слагаемые правой части совпадают с формулой Эйлера для распределения скоростей точек твердого тела; $\vec{v}(\vec{x})$ — поступательная скорость в точке $\vec{x}$, ω — вектор угловой скорости. Последнее — третье слагаемое $\vec{v}^*$ определяет чистую деформацию. В абсолютно твердом теле $\vec{v}^* = 0$.

2. Тензор скоростей деформаций. Деформационное течение определяется тензором

$$v_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}). \tag{1.3.4}$$

Выясним как изменяется элемент сплошной среды $\delta\vec{x}$. Изменение вектора $\delta\vec{x}$ обусловлено тем, что конец и начало его движутся с разными скоростями $\vec{v}(x)$ и $\vec{v}(\vec{x}+\delta\vec{x})$. Отсюда с помощью (1.3.3) имеем

$$\frac{d\delta\vec{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \delta\vec{x} + \vec{v}^* \tag{1.3.5}$$

Умножая обе части равенства (1.3.5) скалярно на вектор δx, получим

$$\delta\vec{x}\frac{d\delta\vec{x}}{dt} = \delta\vec{x}\vec{v}^* = v_{ij}\delta x_i \delta x_j.$$

Учитывая тождество

$$\delta\vec{x}\frac{d\delta\vec{x}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}\delta\vec{x}) = \frac{1}{2}\frac{d|\delta\vec{x}|^2}{dt} = |\delta\vec{x}|\frac{d|\delta\vec{x}|}{dt},$$

найдем относительное удлинение волокна среды, направленного по единичному вектору $\vec{n}$

$$\frac{1}{|\delta\vec{x}|}\frac{d|\delta\vec{x}|}{dt} = v_{ij}n_i n_j, \quad n_i = \frac{\delta x_i}{|\delta\vec{x}|}. \tag{1.3.6}$$

Если единичный вектор $\vec{n}$ направить по оси x_1, он будет иметь компоненты $\vec{n}(1,0,0)$. Тогда из (1.3.6) получим, что относительное удлинение волокна направленного по оси x_1 будет равно v_{11}. Таким образом, *диагональные элементы тензора скоростей деформаций* v_{11}, v_{22}, v_{33} — это относительные удлинения волокон, *направленных по соответствующим координатным осям* x_1, x_2, x_3.

Покажем, что удвоенные значения компонент с неравными индексами $2v_{12}, 2v_{13}, 2v_{23}$ равны изменениям углов $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ между волокнами расположенными в направлении координатных осей соответственно x_1, x_2; x_1, x_3 и x_2, x_3.

Для этого выберем два бесконечно малых вектора $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ вдоль координатных осей x_1 и x_2. Запишем для них уравнения

$$d\mu_i/dt = (\vec{\omega} \times \vec{\mu})_i + v_{ij}\mu_j, \quad i = 1,2,3,$$

$$d\nu_i/dt = (\vec{\omega} \times \vec{\nu})_i + v_{ij}\nu_j, \quad i = 1,2,3.$$

Умножим первую группу уравнений на ν_i, а вторую на μ_i и просуммируем их. Тогда получим

$$\frac{d(\vec{\mu}\vec{\nu})}{dt} = \frac{d\vec{\mu}}{dt}\vec{\nu} + \frac{d\vec{\nu}}{dt}\vec{\mu} = 2v_{ij}\nu_i\mu_j = 2v_{12}|\vec{\nu}||\vec{\mu}|,$$

так как $(\vec{\omega}\times\vec{\mu})_i\nu_i + (\vec{\omega}\times\vec{\nu})_i\mu_i = 0$. Для скалярного произведения имеем равенство $\vec{\mu}\vec{\nu} = |\vec{\mu}||\vec{\nu}|\cos\theta_{12}$. Подставляя его в уравнение и учитывая, что в начальный момент времени $\cos\theta_{12} = 0$, $\sin\theta_{12} = 1$, получим

$$|\vec{\nu}||\vec{\mu}|\frac{d\cos\theta_{12}}{dt} = 2v_{12}|\vec{\nu}||\vec{\mu}|.$$

Отсюда следует

$$2v_{12} = -d\theta_{12}/dt, \quad 2v_{13} = -d\theta_{13}/dt, \quad 2v_{23} = -d\theta_{23}/dt.$$

Удвоенные компоненты с неравными индексами $2v_{12}, 2v_{13}, 2v_{23}$ называются скоростями сдвига и *определяют скорости изменения прямых углов между волокнами, направленных по координатным осям.*

3. Главные направления и главные значения. Для тензора скоростей деформаций справедливы все выводы, которые получены для тензора напряжений в разд. 1.2. Его можно привести к главным осям $\vec{э}_1^{\,0}$, $\vec{э}_2^{\,0}$ $\vec{э}_3^{\,0}$, в которых тензор $\underset{\sim}{v}$ будет иметь диагональный вид

$$\underset{\sim}{v} = u_1\vec{э}_1^{\,0}\vec{э}_1^{\,0} + u_2\vec{э}_2^{\,0}\vec{э}_2^{\,0} + u_3\vec{э}_3^{\,0}\vec{э}_3^{\,0},$$

где u_1, u_2, u_3 — главные значения тензора $\underset{\sim}{v}$.

Из рассмотрения кругов Мора для тензора скоростей деформаций получим, что собственные значения u_1, u_2, u_3 являются экстремальными значениями относительных удлинений. Если расположить их в порядке возрастания $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$, то u_1 будет наименьшим, а u_3 — наибольшим относительным изменением волокон. Наибольшая скорость сдвига равна $u_{max} = u_3 - u_1$.

4. Инварианты. Интенсивность деформаций. Первый инвариант тензора скоростей деформаций $\underset{\sim}{v}$

$$v_{ii} = u_1 + u_2 + u_3 = \mathrm{div}\vec{v}$$

определяет кубическое расширение частицы среды. Для несжимаемой среды он равен нулю, а тензор $\underset{\sim}{v}$ является девиатором. В дальнейшем будем рассматривать только несжимаемые среды. Второй инвариант связан с интенсивностью деформаций $v_и$, которая вводится так

$$v_и = \sqrt{v_{ij}v_{ij}}.$$

Для наибольшей скорости сдвига $u_{max} = u_3 - u_1$ можно получить неравенство

$$u_{max} = u_3 - u_1 \leqslant U = \sqrt{2}v_и \leqslant (2/\sqrt{3})U \approx 1,15U, \tag{1.3.7}$$

аналогичное (1.2.9).

1.4. Уравнения движения сплошной среды

1. Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему. Рассмотрим интеграл

$$\int_V F(t, x_i)dV$$

от функции F, взятой по области V, которая движется вместе с частицами среды. Такую область будем называть материальной. Производная от интеграла, взятого по материальной области будет определяться формулой

$$\frac{d}{dt}\int_V F(t, x_i)dV = \int_V \frac{\partial F}{\partial t}dV + \int_{\partial V} Fv_n dS. \tag{1.4.1}$$

Здесь первый интеграл учитывает изменение функции F от времени, а второй, взятый по границе ∂V, — изменение материальной области. Символом ∂V обозначена граница области V, v_n — проекция скорости на внешнюю нормаль к границе ∂V (Подробный вывод этой формулы приведен, например, в [82]).

Пользуясь теоремой Гаусса-Остроградского, формулу (1.4.1) можно записать так

$$\frac{d}{dt}\int_V FdV = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (Fv_i)}{\partial x_i}\right) dV \tag{1.4.2}$$

Введем понятие полной производной по времени от функции $F(t, x_i)$. Она учитывает закон движения материальных частиц $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt}F(t, x_i(t)) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Заменяя

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i,$$

получим выражение

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i\frac{\partial F}{\partial x_i}, \tag{1.4.3}$$

которое называется полной производной по времени от F. Второе слагаемое (1.4.3) называется конвективной производной. С помощью формулы полной производной (1.4.3) производную интеграла (1.4.2) можно записать так:

$$\frac{d}{dt}\int_V FdV = \int_V \left(\frac{dF}{dt} + F\operatorname{div}\vec{v}\right) dV \tag{1.4.4}$$

2. Закон сохранения массы. Сохранение массы вещества в материальной области V с помощью формулы (1.4.2) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho(t, x_i)dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}\right) dV = 0,$$

где ρ — плотность вещества в момент времени t в точке пространства с координатами x_i. Учитывая, что это равенство имеет место для любого материального объема, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0. \tag{1.4.5}$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности. Его можно записать также в виде

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{1.4.6}$$

Для несжимаемой среды плотность частицы сохранятся, что выражается уравнением $d\rho/dt = 0$. Таким образом, закон сохранения массы в несжимаемой среде записывается в виде двух уравнений

$$d\rho/dt = 0, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{1.4.7}$$

Если среда однородна и несжимаема, то

$$\rho = \text{const}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{1.4.8}$$

Уравнения (1.4.5)–(1.4.8) нетрудно записать в любой криволинейной системе координат. Для этого достаточно выразить дивергенцию вектора $\operatorname{div}\vec{v}$ или $\operatorname{div}(\rho\vec{v})$ в этой системе координат по соответствующей формуле (см. разд. 2.1.3).

Если заменить в (1.4.4) подынтегральную функцию F на ρF, то под интегралом в правой части получим

$$\frac{d(\rho F)}{dt} + \rho F \operatorname{div}\vec{v} = \rho\frac{dF}{dt} + F\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{v}\right)$$

и, пользуясь уравнением неразрывности (1.4.6), упростим

$$\frac{d(\rho F)}{dt} + \rho F \operatorname{div}\vec{v} = \rho\frac{dF}{dt}.$$

Таким образом, формулу (1.4.4) можно записать в следующей компактной форме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho F dV = \int\limits_V \rho\frac{dF}{dt}dV \tag{1.4.9}$$

3. Уравнение количества движения. Закон изменения количества движения для материального объема среды можно записать так

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int\limits_V \rho\vec{g}dV + \int\limits_{\partial V} \vec{P}^{(n)}dS. \tag{1.4.10}$$

Здесь $\vec{Q}$ — количество движения среды, заключенной в материальном объеме V

$$\vec{Q} = \int\limits_V \rho\vec{v}dV$$

Применяя формулу (1.4.9), получим

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int\limits_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dV$$

Правая часть (1.4.10) — это сумма сил, действующих на среду. Первое слагаемое — это суммарная сила тяжести. Второе слагаемое — это сумма поверхностных сил. Преобразуем проекцию суммарной поверхностной силы на ось x_i с помощью формулы (1.2.1) и теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_{\partial V} \vec{P}_i^{(n)}dS = \int\limits_{\partial V} \sigma_{ij}n_j dS = \int\limits_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dV$$

Таким образом, закон (1.4.10) можно записать так

$$\int\limits_V \rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i dV = \int\limits_V \left(\rho g_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)dV$$

и отсюда получим дифференциальные уравнения движения, которые удобно записать в тензорном виде

$$\rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \rho\vec{g} + \operatorname{Div}\underset{\sim}{\sigma}. \tag{1.4.11}$$

Такая форма позволяет легко записывать уравнения в любой криволинейной системе координат. Для этого достаточно спроектировать соответствующие векторы на орты системы координат и воспользоваться соответствующими формулами для компонент дивергенции тензора (см. ниже разд. 2.1.3).

В декартовой системе координат уравнения количества движения имеют вид

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.4.12}$$

4. Закон изменения кинетической энергии. Из уравнения (1.4.11) можно получить закон изменения механической энергии. Для этого нужно умножить обе части уравнения на v_i и просуммировать их по $i = 1, 2, 3$. Затем воспользоваться тождествами

$$\rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i v_i = \rho\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2}, \quad v_i\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(v_i\sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(v_i\sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij}v_{ij}.$$

После подстановки получим уравнение изменения кинетической энергии в дифференциальной форме.

$$\rho\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} = \rho(\vec{g}\vec{v}) + \frac{\partial(v_i\sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij}v_{ij}. \tag{1.4.13}$$

Левая часть уравнения — изменение кинетической энергии среды в единице объема. В правой части первое слагаемое — работа в единице времени (мощность) внешних массовых сил тяжести, второе слагаемое — мощность внешних поверхностных сил и третье слагаемое — мощность внутренних поверхностных напряжений. Чтобы получить закон изменения кинетической энергии в материальном объеме V нужно проинтегрировать обе части уравнения (1.4.13) по объему V и воспользоваться теоремой Гаусса-Остроградского и формулой (1.4.9)

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}E_{\text{кин}} = N_g^{(e)} + N_{\text{пов}}^{(e)} + N_{\text{пов}}^{(i)}, \\ &E_{\text{кин}} = \int_V \rho\tfrac{v^2}{2}dV, \qquad N_g^{(e)} = \int_V \rho(\vec{g}\vec{v})dV, \\ &N_{\text{пов}}^{(e)} = \int_V v_i\sigma_{ij}n_j dS, \qquad N_{\text{пов}}^{(i)} = -\int_V \sigma_{ij}v_{ij}dV \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Здесь $N_g^{(e)}$, $N_{\text{пов}}^{(e)}$, $N_{\text{пов}}^{(i)}$ — мощности в объеме V внешних массовых сил тяжести, внешних поверхностных сил и внутренних поверхностных напряжений.

Мощность внутренних поверхностных напряжений $N_{\text{пов}}^{(i)}$ определяет потери механической энергии. Для классических моделей сплошных сред величина $N_{\text{пов}}^{i} \leqslant 0$. Противоположная ей по знаку величина $D = -N_{\text{пов}}^{(i)}$ называется диссипируемой в объеме V механической энергией. Она определяет ту часть механической энергии, которая переходит в другие виды энергии, например, в тепло. Диссипируемые энергии в единице объема и в объеме V не могут быть отрицательными

$$\sigma_{ij}v_{ij} \geqslant 0, \qquad \int_V \sigma_{ij}v_{ij}dV \geqslant 0.$$

Мощность силы тяжести $N_g^{(e)}$ можно представить как изменение потенциальной энергии силы тяжести $E_{\text{пот}}$

$$N_g^{(e)} = -\frac{dE_{\text{пот}}}{dt}, \quad E_{\text{пот}} = -\int_V \rho g_i x_i dV = \int_V \rho gz dV,$$

где z — координата, направленная вертикально вверх.

Если движение среды происходит в области, на границе которой поверхностные силы работы не совершают, то закон (1.4.14) можно представить как закон изменения полной механической энергии E

$$\frac{dE}{dt} = -D, \quad E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}. \tag{1.4.15}$$

Заметим, что работа внешними поверхностными силами не совершается на твердой стенке и на свободной поверхности. На твердой стенке вследствие условия прилипания $\vec{v} = 0$ мощность равна нулю $v_i \sigma_{ij} n_j = 0$. На свободной поверхности Г обычно задается условие отсутствия касательного напряжения $\tau^{(n)} = 0$, а нормальное напряжение $N^{(n)}$ равно постоянной величине p_0. Тогда

$$v_i \sigma_{ij} n_j = v_n p_0 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} v_n p_0 dS = p_0 \frac{dV}{dt}.$$

Так как объем несжимаемой среды не меняется $dV/dt = 0$, то $N^{(e)}_{\text{пов}} = 0$ и закон (1.4.15) также имеет место.

1.5. Классические модели несжимаемых жидких сред

Для построения моделей жидких сред нужно установить связь между девиаторами скорости деформации и напряжений. Для изотропных сред это соотношение не должно зависеть от выбора направления осей декартовой системы координат. В тензорно линейных моделях такая связь задается соотношениями

$$s_{ij} = 2Kv_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \tag{1.5.1}$$

в котором K может зависеть от второго и третьего инвариантов тензора $\underset{\sim}{v}$ (первый инвариант в несжимаемой среде равен нулю). В классических моделях предполагается зависимость K только от второго инварианта. В качестве вторых инвариантов тензоров $\underset{\sim}{v}$ и $\underset{\sim}{\sigma}$ удобно ввести $U = v_{\text{и}}\sqrt{2}$ и $T = \sigma_{\text{и}}/\sqrt{2}$. Тогда из (1.5.1) вытекает следующее соотношение между инвариантами

$$T = UK, \quad T = \sqrt{s_{ij}s_{ij}/2}, \quad U = \sqrt{2v_{ij}v_{ij}}. \tag{1.5.2}$$

В связи с (1.2.9) и (1.3.7) зависимость (1.5.2) можно приближенно заменить на $\tau_{max} = u_{max}K$ и найти зависимость $K(u_{max})$ из эксперимента.

Если связь (1.5.1) установлена, то, подставляя ее в уравнения движения (1.4.12) и присоединяя уравнения (1.4.7) или (1.4.8), получим замкнутую систему пяти уравнений для определения функций ρ, p, v_1, v_2, v_3.

Несмотря на кажущуюся простоту, соотношения (1.5.1) описывают сложные нелинейные зависимости напряженного состояния среды от скорости деформации. Однако соотношение (1.5.1) не исчерпывает всех возможных моделей для жидкостей. Общий подход к построению моделей с самыми общими нелинейными связями деформаций и напряжений изложен в гл. VIII.

1. Идеальная жидкость. В соотношении (1.5.1) принимаем, что $K = 0$. Тогда тензор $\underset{\sim}{\sigma}$ будет шаровым

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \tag{1.5.3}$$

Касательные напряжения на площадках в идеальной жидкости отсутствуют, т. е. $T = 0$. Эта простейшая модель введена Эйлером. Модель не содержит ни одного феноменологического параметра. Она хорошо описывает инерционные эффекты жидкости и применяется для изучения течений с большими скоростями, кавитационных течений, существенно нестационарных течений, течений со свободными границами, для описания волн на поверхности тяжелой жидкости. Однако эта модель не описывает трение на границе жидкости с движущемся в ней твердым телом. Диссипируемая энергия $\sigma_{ij}v_{ij}$ тождественно равна нулю, потерь механической энергии нет. Эти эффекты учитываются в более сложных моделях.

2. Вязкая ньютоновская жидкость. В соотношении (1.5.1) принимаем, $K = \mu$, где μ — феноменологическая постоянная. Она называется коэффициентом динамической вязкости. Тензор напряжений определяется так

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu v_{ij} \Rightarrow T = \mu U.$$

Для сдвигового течения около твердой стенки $v_x = ky$, $v_y = v_z = 0$ получим закон Ньютона для трения вязкой жидкости о твердую поверхность $y = 0$

$$\tau = \sigma_{xy} = \mu \partial v_x / \partial y.$$

С помощью этой формулы измеряется коэффициент μ. Единицей измерения μ в системе СГС принята $1\text{П} = 1\dfrac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}$, называемая *пуазом*. Коэффициенты вязкости μ для некоторых жидкостей при температуре $20°C$ приведены в табл. I.1.

Таблица 1.1

Вещество	μ, г/(см · с)	Вещество	μ, г/(см · с)
Ацетон	0,00337	Ртуть	0,0159
Спирт метиловый	0,00632	Масло оливковое	0,9
Вода	0,0105	Масло машинное	6,6
Спирт этиловый	0,0122	Масло касторовое	12
Уксусная кислота	0,0127	Глицерин	13,9

Диссипируемая энергия вязких жидкостей в единице объема вычисляется так:

$$\sigma_{ij}v_{ij} = 2\mu v_{ij}v_{ij} = TU = \mu U^2 = T^2/\mu.$$

3. Идеально пластическая среда. Для коэффициента K предполагается следующая зависимость от инварианта U:

$$K = \tau_s/U.$$

Отсюда получим соотношение

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\tau_s v_{ij}/U, \quad T = \tau_s.$$

При течении в идеально пластической среде второй вариант тензора напряжений постоянен. Максимальные напряжения на площадках близки к постоянному значению τ_s. Диссипируемая энергия идеально пластической среды такова

$$s_{ij}v_{ij} = TU = \tau_s U.$$

4. Вязкопластическая среда. Зависимость коэффициента K от инварианта U такова

$$K = \mu + \tau_s/U,$$

а реологические соотношения имеют вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2(\mu + \tau_s/U)v_{ij}, \quad T = \mu U + \tau_s.$$

Эти соотношения для общего трехмерного течения введены Генки (Hencky H.Z., 1925) [98]. Среда определяется двумя параметрами: μ — динамический коэффициент вязкости, τ_s — предельное напряжение сдвига.

При $\tau_s = 0$ получаем вязкую жидкость, при $\mu = 0$ — идеально пластическую среду.

Предельное напряжение сдвига имеет размерность давления. За единицу измерения τ_s в системе СИ принят паскаль 1Па = 1Н/м^2 = 10г/(см с^2). Единицу измерения коэффициента вязкости П можно выразить через паскаль·секунду $1\text{П} = 0.1\text{П}a \cdot c$.

В табл. I.2. приведены данные этих характеристик для смесей глицерина с мелко размолотым порошком мела и глины, а также смазки «фаэтол».

Таблица 1.2

Вещество	τ_s, Па	μ, Па · с	ρ, г/см^3
Мел с глицерином, весовое отношение 3:2	2,9	4,39	1,7
Глина с глицерином, весовое отношение 4:5	6,44	2,55	1,5
Смазка «фаэтол»	11,5	22	1,?

В движущейся вязкопластической среде может быть жесткая зона, в которой скорость деформации равна нулю $U = 0$. В этой области второй инвариант T

неопределен и подчиняется неравенству $T \leqslant \tau_s$. Окончательная формулировка реологического соотношения, учитывающая наличие жестких зон, будет такой

$$\left.\begin{aligned} s_{ij} &= 2\,(\mu + \tau_s/U)\,v_{ij} \\ T &= \tau_s + \mu U \end{aligned}\right\} \quad U > 0, \qquad\qquad (1.5.4)$$
$$T \leqslant \tau_s, \qquad U = 0.$$

Это соотношение можно разрешить относительно компонент тензора деформаций и выразить их через компоненты тензора напряжений. Полученное соотношение будем называть обратным соотношением девиаторов напряжений и деформаций

$$\left.\begin{aligned} v_{ij} &= \frac{T - \tau_s}{2\mu} s_{ij} \\ U &= (T - \tau_s)/\mu \end{aligned}\right\} \quad T > \tau_s, \qquad\qquad (1.5.5)$$
$$U = 0, \qquad T \leqslant \tau_s.$$

Диссипируемая энергия в ядре равна нулю, а в области $U > 0$ определяется так:

$$s_{ij} v_{ij} = TU = \mu U^2 + \tau_s U = (T^2 - \tau_s T)/\mu.$$

1.6. Плоская задача

1. Общий вид тензоров скорости деформаций и напряжений. Важным случаем, часто встречающимся в приложениях, является плоская задача. Течение в этом случае определяется полем скорости, компоненты которого имеют следующий вид

$$v_1 = v_1(t, x_1, x_2), \quad v_2 = v_2(t, x_1, x_2), \quad v_3 = 0. \qquad (1.6.1)$$

Тензор скоростей деформаций для плоской задачи упрощается

$$v_{ij} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{12} & v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для несжимаемой среды тензор $\underset{\sim}{v}$ имеет всего две независимые компоненты

$$v_{11} = -v_{22} = \partial v_1/\partial x_1, \quad v_{12} = (\partial v_1/\partial x_2 + \partial v_2/\partial x_1)/2.$$

Девиатор напряжений для вязкопластической среды имеет также две независимые компоненты, определяемые по (1.5.4)

$$s_{11} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{11}, \quad s_{12} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{12}, \quad U = 2(v_{11}^2 + v_{12}^2)^{1/2}.$$

2. Закон преобразования. Ортогональные преобразования на плоскости сводятся к поворотам системы координат на угол α. Координаты декартовой системы $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ преобразуются при повороте с помощью ортогональной матрицы (рис. 1.5)

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

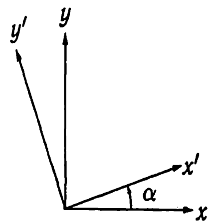


Рис. 1.5. Преобразование поворота

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad z' = z. \tag{1.6.2}$$

Компоненты тензора $\underset{\sim}{v}$ в новой системе координат x', y' находятся по закону преобразования компонент тензора (1.1.3)

$$v'_{11} = c_{1i}c_{1j}v_{ij}, \qquad v'_{12} = c_{1i}c_{2j}v_{ij},$$

$$v'_{11} = (\cos^2\alpha)v_{11} + (\sin\alpha\cos\alpha)v_{12} + (\sin\alpha\cos\alpha)v_{21} + (\sin^2\alpha)v_{22},$$

$$v'_{12} = (-\cos\alpha\sin\alpha)v_{11} + (\cos^2\alpha)v_{12} - (\sin^2\alpha)v_{21} + (\sin\alpha\cos\alpha)v_{22}.$$

Для плоской задачи удобно переобозначить компоненты тензора так: $v_{11} = v_{xx}$, $v_{12} = v_{xy}$. Тогда закон преобразований получим в виде

$$v_{x'x'} = v_{xx}\cos 2\alpha + v_{xy}\sin 2\alpha, \quad v_{x'y'} = -v_{xx}\sin 2\alpha + v_{xy}\cos 2\alpha. \tag{1.6.3}$$

3. Инварианты. Главные значения. Наибольшие скорость сдвига и касательное напряжение. Закон (1.6.3) можно представить в виде

$$v_{x'y'} = \sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2}\cos(2\alpha - 2\alpha_0), \quad v_{x'y'} = -\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2}\sin(2\alpha - 2\alpha_0),$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = v_{xy}/v_{xx}.$$

Следовательно,

1) главные оси x', y' расположены к оси x под углом α_0 и $\alpha_0 + \pi/2$;

2) главные значения тензора $\underset{\sim}{v}$ равны $\pm\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2}$ и являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями компоненты $v_{x'y'}$;

3) в главных осях x', y' тензор $\underset{\sim}{v}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2} \end{pmatrix}$$

4) наибольшая скорость сдвига достигается на площадке $\alpha = \alpha_0 + \pi/4$, расположенной под углом 45° к главной оси тензора напряжений

$$u_{\max} = 2\max|v_{x'y'}| = 2\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2} = U.$$

Этот результат получится также при рассмотрении кругов Мора. Располагая главные значения тензора $\underset{\sim}{v}$ в порядке возрастания ($u_1 = -U/2,\ u_2 = 0,\ u_3 = U/2$), найдем $u_{max} = u_3 - u_1 = U$.

Таким образом, для плоской задачи скорость скольжения u_{max} тождественна второму инварианту $U = 2\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2}$ тензора скоростей деформации.

4. Реологические соотношения для вязкопластической среды. Прямое и обратное реологические соотношения (1.5.4) и (1.5.5) для плоской задачи примут вид

$$\begin{cases} s_{xx} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{xx}, \quad s_{xy} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{xy}, & U > 0, \\ T \leqslant \tau_s, & U = 0; \end{cases} \tag{1.6.4}$$

$$\begin{cases} v_{xx} = \dfrac{T - \tau_s}{2\mu} s_{xx}, \quad v_{xy} = \dfrac{T - \tau_s}{2\mu} s_{xy}, & T > \tau_s, \\ U = 0, & T \leqslant \tau_s. \end{cases} \tag{1.6.5}$$

Для плоской задачи вязкопластического течения скорость скольжения и наибольшее касательное напряжение тождественны инвариантам U и T, для которых имеют место соотношения

$$\begin{gathered} U = 2\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2}, \quad T = \sqrt{s_{xx}^2 + s_{xy}^2} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{xy})^2/4 + \sigma_{xy}^2}, \\ T = \tau_s + \mu U. \end{gathered} \tag{1.6.6}$$

Площадки с наибольшей скоростью сдвига и наибольшим касательным напряжением совпадают. Направление такой площадки называется направлением скольжения. В системе координат x', y' с осью x', лежащей в направлении скольжения, тензоры $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{\sigma}$ имеют вид

$$v_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & U/2 \\ U/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & T \\ T & -p \end{pmatrix}$$

С помощью обратного закона преобразования (1.6.3) можно выразить через U и T компоненты тензоров $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{\sigma}$ в произвольной системе координат x, y

$$\begin{aligned} &v_{xx} = -(U/2)\sin 2\alpha, \quad v_{xy} = (U/2)\cos 2\alpha, \\ &s_{xx} = -T\sin 2\alpha, \quad s_{xy} = T\cos 2\alpha, \\ &\sigma_{xx} = -p - T\sin 2\alpha, \quad \sigma_{xy} = T\cos 2\alpha, \quad \sigma_{yy} = -p + T\sin 2\alpha, \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

где α — угол между направлением скольжения и осью x.

Таким образом, плоскопараллельное вязкопластическое течение имеет следующие свойства:

1) направления площадок с наибольшей скоростью сдвига (скорость скольжения) и наибольшим касательным напряжением совпадают;

2) условия пластичности Треска и Мизеса в плоской задаче тождественны.

5. Система уравнений Сен-Венана. Сен-Венан [83] выбрал в качестве искомых функций две компоненты скорости $v_x = u$, $v_y = w$ и три компоненты тензора напряжений $\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{xy} = \tau$, $\sigma_{yy} = \sigma_y$ и получил для них замкнутую систему уравнений, эквивалентную системе уравнений в случае чисто пластического течения. Он записал уравнение неразрывности (1.4.8) и два уравнения движения (1.4.12). Для двух оставшихся уравнений он сформулировал два условия:

1) на площадке, где касательное напряжение является наибольшим, это последнее равно постоянному максимальному напряжению сдвига τ_0;

2) на площадке, где касательное напряжение является наибольшим, скорость относительного сдвига также наибольшая.

Пользуясь этими условиями он получил

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau} = \frac{v_{yy} - v_{xx}}{2v_{xy}} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1.6.8}$$

$$T^2 = \max \tau^2_{x'y'} = \tau^2 + ((\sigma_y - \sigma_x)/2)^2 = \tau_s^2. \tag{1.6.9}$$

Далее Сен-Венан делает замечание: «если к компонентам напряжения прибавить соответственно члены

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 2\mu\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

то те же уравнения будут пригодны для изучения ламинарного движения жидкостей, в которой существуют касательные напряжения двух родов, одни — зависящие от скоростей, другие — не зависящие от скоростей» [83].

Таким образом, Сен-Венан почти вплотную подошел к созданию модели вязкопластической среды. Последний шаг до конца Сен-Венан не сделал. Поэтому вместо неравенств у Сен-Венана фигурирует равенство (1.6.9) для идеальной пластичности. Необходимый реологический закон (1.6.4) для вязкопластической среды им не приводится.

Глава 2

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В этой главе рассматривается модель несжимаемой однородной вязкопластической среды.

2.1. Уравнения трехмерного движения. Граничные условия

2.1.1. Уравнения в тензорной форме

Система уравнений для трех компонент вектора скорости $\vec{v}$, давления p и шести компонент девиатора напряжений $\underset{\sim}{s}$ состоит из следующих уравнений:
1) уравнения количества движения (1.4.11) (три);
2) уравнение сохранения массы (1.4.7) (одно);
3) уравнения, связывающие девиаторы напряжений и скоростей деформаций, (1.5.4) (шесть). Выпишем эти уравнения в тензорном виде

$$\begin{cases} \rho d\vec{v}/dt = -\mathrm{grad} p + \mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s} + \rho\vec{g}, \\ \mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \\ \left.\begin{array}{l} s_{ij} = 2\left(\mu + \tau_s/U\right) v_{ij},\ i, j = 1, 2, 3 \\ T = \tau_s + \mu U, \end{array}\right\} \quad U > 0, \\ T \leqslant \tau_s \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad U = 0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Напомним, что v_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций, а характеристики деформационного U и напряженного T состояния среды с точностью до постоянных множителей являются вторыми инвариантами девиаторов скорости деформаций и напряжений (формулы (1.5.2)).

Первые два уравнения системы (2.1.1) выполняются во всей области Ω. В области Ω поле скорости — дважды непрерывно дифференцируемо, а поле давления и девиатора напряжений — непрерывно дифференцируемо. Область течения Ω состоит из двух частей: область пластического течения Ω_f и жесткая зона Ω_s. В области Ω_f девиаторы напряжений и скоростей деформаций связаны между собой соотношениями Генки (группа соотношений системы (2.1.1) с $U > 0$) и однозначно вычисляются из уравнений движения. В области Ω_s скорости деформаций равны нулю, а напряженное состояние не определено. Оно подчинено лишь условию $T = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \leqslant \tau_s$.

Тензорная форма уравнений удобна для записи их в любой криволинейной системе координат. Для этого нужно воспользоваться формулами для компонент векторов $d\vec{v}/dt$, grad$p$, Div$\underset{\sim}{s}$, div$\vec{v}$ в соответствующей системе координат и подставить их в уравнения (2.1.1). Вывод этих формул приводится в руководствах по тензорному анализу [12, 39] или в учебниках по механике сплошной среды [82] или гидродинамике [39, 46].

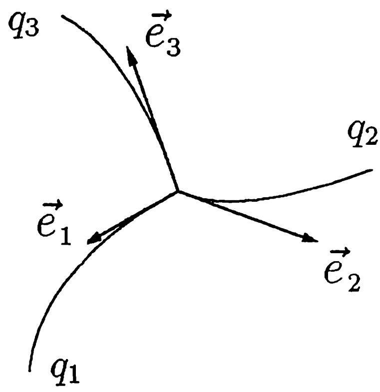


Рис. 2.1. Координатные линии и базисные векторы

2.1.2. Ортогональная криволинейная система координат

1. Базисные векторы, коэффициенты Ляме. В механике сплошной среды часто используется общая криволинейная система координат. Они вводятся с помощью замены $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_2)$, $z = z(q_1, q_2, q_2)$ — рис. 2.1.

При постоянных q_2, q_3 уравнения замены определяют координатную линию q_1. Аналогично при постоянных q_1, q_3 и q_1, q_2 определяются координатные линии q_2 и q_3. Координатные линии взаимно ортогональны, если

$$(\vec{e}_i\vec{e}_j) = 0, \quad i \neq j, \quad \vec{e}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \Big/ \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ — базисные векторы, параллельные координатным линиям. В этом случае элемент радиус-вектора, который в декартовой системе имеет вид $\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$, удобно разложить по базисным векторам $\vec{r} = H_1dq_1\vec{e}_1 + H_2dq_2\vec{e}_2 + H_3dq_3\vec{e}_3$. Тогда для элемента длины получим соотношение

$$dr^2 = H_1^2dq_1^2 + H_2^2dq_2^2 + H_3^2dq_3^2,$$

в которое не войдут перекрестные произведения dq_idq_j, $i \neq j$.

Коэффициенты H_1, H_2, H_3 называются коэффициентами Ляме (Lame, 1834). Через них можно выразить все тензорные величины, входящие в уравнения (2.1.1) движения среды.

2. Компоненты ускорения. в криволинейной системе координат можно вывести методом, который применяется в классической механике при выводе уравнений Лагранжа [28, 40],

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right), \ i = 1, 2, 3; \qquad T = \frac{1}{2}(H_1^2\dot{q}_1^2 + H_2^2\dot{q}_2^2 + H_3^2\dot{q}_3^2).$$

Подставляя после дифференцирования обобщенные скорости $\dot{q}_i = v_i/H_i$, получим

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d(H_i v_i)}{dt} - \frac{v_1^2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_i} - \frac{v_2^2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_i} - \frac{v_3^2}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_i}\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

3. Компоненты градиента давления. $(\mathrm{grad} p)_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial p}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3.$

4. Компоненты дивергенции тензора.

$$(\mathrm{Div}\, \underset{\sim}{s})_1 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 s_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 s_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 s_{13})\right] +$$
$$+ \frac{s_{12}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{s_{13}}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{s_{22}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{s_{33}}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1},$$

$$(\mathrm{Div}\, \underset{\sim}{s})_2 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 s_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 s_{22}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 s_{23})\right] +$$
$$+ \frac{s_{12}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{s_{23}}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{s_{11}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{s_{33}}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2},$$

$$(\mathrm{Div}\, \underset{\sim}{s})_3 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 s_{13}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 s_{23}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 s_{33})\right] +$$
$$+ \frac{s_{13}}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{s_{23}}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{s_{11}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{s_{22}}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}.$$

Подставляя найденные выражения в первое векторное уравнение (2.1.1), получим три уравнения для компонент.

5. Компоненты тензора скоростей деформаций.

$$v_{11} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3},$$

$$v_{22} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_3}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3},$$

$$v_{33} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2},$$

$$v_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}\right) - \frac{1}{2H_1 H_2}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right),$$

$$v_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial v_1}{\partial q_3}\right) - \frac{1}{2H_1H_3}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3} + v_3\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right),$$

$$v_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial v_2}{\partial q_3}\right) - \frac{1}{2H_2H_3}\left(v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_3} + v_3\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right).$$

6. Уравнение неразрывности.

$$\operatorname{div}\vec{v} = v_{11}+v_{22}+v_{22} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(v_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right) = 0.$$

7. Реологические соотношения.

$$s_{ij} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

$$U = \left[2(v_{11}^2 + v_{22}^2 + v_{33}^2) + 4(v_{12}^2 + v_{13}^2 + v_{23}^2)\right]^{1/2}$$

$$T = \left[\tfrac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2\right]^{1/2}$$

Приведенные формулы можно применить для записи физических законов в декартовой, цилиндрической, сферической и многих других системах координат.

2.1.3. Уравнения в различных ортогональных системах координат

1. Декартова система координат. x, y, z. Единичные векторы (орты) направлены по осям $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, а все коэффициенты Ляме равны единице $H_i = 1$, $i = 1,2,3$.

Ускорение:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z},$$
$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z},$$
$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Градиент давления:

$$(\operatorname{grad} p)_x = \partial p/\partial x, \quad (\operatorname{grad} p)_y = \partial p/\partial y, \quad (\operatorname{grad} p)_z = \partial p/\partial z.$$

Дивергенция тензора:

$$(\operatorname{Div} \underset{\sim}{s})_x = \partial s_{xx}/\partial x + \partial s_{xy}/\partial y + \partial s_{xz}/\partial z,$$

$$(\operatorname{Div} \underset{\sim}{s})_y = \partial s_{xy}/\partial x + \partial s_{yy}/\partial y + \partial s_{yz}/\partial z,$$

$$(\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_z = \partial s_{xz}/\partial x + \partial s_{yz}/\partial y + \partial s_{zz}/\partial z.$$

Дивергенция вектора:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}.$$

Компоненты тензора скоростей деформации:

$$v_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \ldots, \quad v_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \ldots .$$

Вторые инварианты:

$$U = \left[2\left(v_{xx}^2 + v_{yy}^2 + v_{zz}^2\right) + 4\left(v_{xy}^2 + v_{xz}^2 + v_{yz}^2\right)\right]^{1/2}$$

$$T = \left[\left(s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2\right)/2 + \left(s_{xy}^2 + s_{xz}^2 + s_{yz}^2\right)\right]^{1/2}$$

Подставляя найденные соотношения в уравнения (2.1.1), получим требуемую систему уравнений. В области пластического течения ее кратко можно записать так

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} + 2\tau_s\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_{ij}}{U}\right) + g_i, \\ &\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \end{aligned} \qquad i,j = 1,2,3, \qquad (2.1.2)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_z$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

2. Цилиндрическая система координат. r, ϕ, z вводится с помощью замены декартовых координат: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$ (рис. 2.2).

Единичные векторы (орты) $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ определяются через связь элемента радиуса-вектора в декартовой и цилиндрической системах координат

$$\vec{dr} = dr\vec{e}_r + rd\phi\vec{e}_\phi + dz\vec{e}_z = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Коэффициенты Ляме: $H_r = 1$, $H_\phi = r$, $H_z = 1$.

Ускорение:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r},$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r},$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_r}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Градиент давления:

$$(\mathrm{grad}p)_r = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (\mathrm{grad}p)_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad (\mathrm{grad}p)_z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

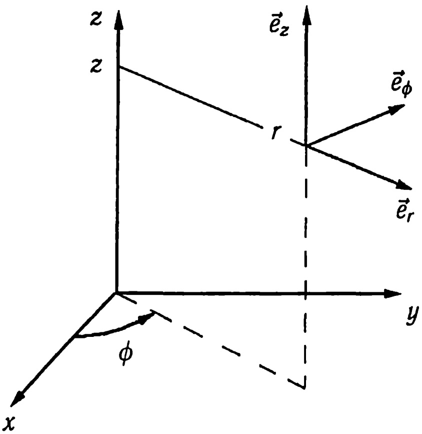


Рис. 2.2. Координатные линии и базисные векторы в цилиндрической системе координат

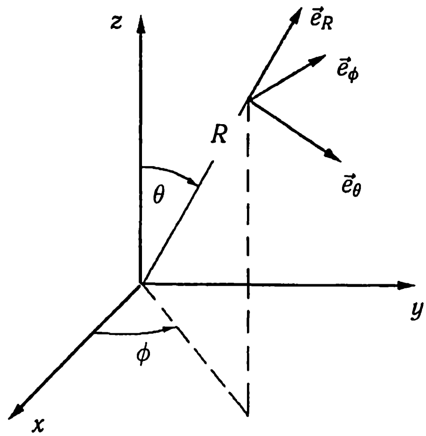


Рис. 2.3. Координатные линии и базисные векторы в сферической системе координат

Дивергенция тензора:

$$(\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_r = \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{zr}}{\partial z} + \frac{s_{rr} - s_{\phi\phi}}{r},$$

$$(\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_\phi = \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{z\phi}}{\partial z} + \frac{s_{r\phi} + s_{\phi r}}{r},$$

$$(\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_z = \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r}.$$

Дивергенция вектора:

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = v_{rr} + v_{\phi\phi} + v_{zz}.$$

Компоненты тензора скоростей деформации:

$$v_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad v_{\phi\phi} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r}\right), \quad v_{r\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right),$$

$$v_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad v_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \quad v_{\phi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)$$

3. Сферическая система координат. R, θ, ϕ

$$x = R\sin\theta\cos\phi, \quad y = R\sin\theta\sin\phi, \quad z = R\cos\theta.$$

Единичные векторы (орты): $\vec{e}_R$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ (рис. 2.3).

Коэффициенты Ляме: $H_R = 1$, $H_\theta = R$, $H_\phi = R\sin\theta$. Соотношения для радиус-вектора в декартовой и сферической системах координат имеют вид

$$d\vec{r} = dR\vec{e}_R + Rd\theta\vec{e}_\theta + R\sin\theta d\phi\vec{e}_\phi = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Ускорение:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R\frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R}\frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{R},$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_R\frac{\partial v_\theta}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_R v_\theta}{R} - \frac{v_\phi^2}{R}\operatorname{ctg}\theta,$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R\frac{\partial v_\phi}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_R v_\phi}{R} + \frac{v_\theta v_\phi}{R}\operatorname{ctg}\theta.$$

Градиент давления:

$$(\operatorname{grad} p)_R = \frac{\partial p}{\partial R}, \quad (\operatorname{grad} p)_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (\operatorname{grad} p)_\phi = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}.$$

Дивергенция тензора:

$$(\operatorname{Div} \underset{\approx}{s})_R = \frac{\partial s_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial s_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial s_{R\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R}(3s_{rr} + s_{R\theta}\operatorname{ctg}\theta),$$

$$(\operatorname{Div} \underset{\approx}{s})_\theta = \frac{\partial s_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial s_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial s_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R}(3s_{R\theta} + (s_{\theta\theta} - s_{\phi\phi})\operatorname{ctg}\theta),$$

$$(\operatorname{Div} \underset{\approx}{s})_\phi = \frac{\partial s_{R\phi}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial s_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R}(3s_{R\phi} + 2s_{\theta\phi}\operatorname{ctg}\theta).$$

Дивергенция скорости:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right) = v_{RR} + v_{\theta\theta} + v_{\phi\phi}.$$

Компоненты тензора скоростей деформации:

$$v_{RR} = \frac{\partial v_R}{\partial R},$$

$$v_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_R}{R}, \quad v_{\phi\phi} = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_\theta}{R}\operatorname{ctg}\theta + \frac{v_R}{R},$$

$$v_{R\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_R}{\partial\phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial R} - \frac{v_\phi}{R}\right), \quad v_{R\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial v_R}{\partial\theta}\right),$$

$$v_{\theta\phi} = \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} - v_\phi\operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{1}{2R\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}.$$

Базисные векторы в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат взаимно ортогональны. Такие криволинейные системы координат называются ортогональными. Характеристики U и T во всех криволинейных ортогональных системах координат выражаются через компоненты тензоров так

$$U = \left[2(v_{11}^2 + v_{22}^2 + v_{33}^2) + 4(v_{12}^2 + v_{13}^2 + v_{23}^2)\right]^{1/2}$$

$$T = \left[(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2)/2 + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2\right]^{1/2}$$

2.1.4. Граничные условия

Уравнения по форме близки к уравнениям Навье-Стокса для вязкой жидкости. Поэтому на границах области течения можно выставлять такие же условия как и для вязкой жидкости. Обычно существуют два вида граничных условий. На твердых движущихся границах ставится условие прилипания

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}}, \quad \vec{x} \in \partial V_v. \tag{2.1.3}$$

Такое условие будем называть условием в скоростях.

Второй вид граничного условия связан с заданием силы $\bar{\vec{f}}$, распределенной на границе

$$-pn_i + s_{ij}n_j = \bar{f}_i, \quad \vec{x} \in \partial V_f. \tag{2.1.4}$$

Такие условия называются условиями в напряжениях.

Могут ставиться смешанные граничные условия: на одной части границы ∂V_v выполняется условие (2.1.3), а на второй части ∂V_f — условие (2.1.4).

Металлы при обработке их давлением имеют отличительную особенность. Если касательное напряжение на поверхности контакта превышает некоторое пороговое значение, то может иметь место скольжение металла по поверхности инструмента [38]. В этом случае граничные условия ставятся так: 1) нормальные скорости среды и граничной поверхности равны; 2) разность v_s касательной скорости среды и касательной скорости инструмента связывается с нормальным σ_n и касательным напряжением σ_τ по закону трения Кулона $\sigma_\tau(v_s) = k\sigma_n$, где k — коэффициент трения, зависимость $\sigma_\tau(v_s)$ задается.

Условия на границе ядра. Для вязкопластической среды могут реализоваться два различных по своему характеру течения. В первом случае решение краевой задачи (2.1.1), (2.1.3) и (2.1.4) таково, что во всех точках области $U > 0$. Такое деформационное всюду течение с гладким полем скорости близко по своему характеру к течению вязкой жидкости. Во втором случае гладкое во всей области решение краевой задачи отсутствует. Тогда при решении следует учесть внутри области течения жесткое ядро, в котором $U = 0$. деформации отсутствуют $U = 0$. Для определения границы этой области на ней нужно выставить шесть условий, вытекающих из равенства нулю компонент тензора деформаций.

$$v_{11} = v_{22} = v_{33} = v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0. \tag{2.1.5}$$

Применяя к области ядра Ω_s закон количества движения, можно получить соотношение, которому должно удовлетворять распределение напряжений на границе $\partial\Omega_s$, движущейся со скоростью D в направлении своей нормали

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_s} \rho\vec{v}dV = \int\limits_{\partial\Omega_s} \vec{P}^{(n)}dS + \int\limits_{\Omega_s} \rho\vec{g}dV + \int\limits_{\partial\Omega_s} \rho\vec{v}(D - v_n)dS. \tag{2.1.6}$$

Поскольку область ядра Ω_s в разные моменты времени состоит из различных частиц среды, то левая часть равенства отличается от $d\vec{Q}/dt$ в законе изменения количества движения (1.4.10). Разница равна потоку количества движения через поверхность ядра, за счет поступления и ухода из него частиц среды. Она учитывается в третьем слагаемом правой части (2.1.6). Вывод и применение этого соотношения для различных частных случаев приводится в гл. IV и V.

Возникает задача с неизвестной границей, аналогичная краевой задаче Навье-Стокса со свободной границей. Следует отметить, что в отличие от условий (2.1.3) и (2.1.4), условия (2.1.5) не ставятся, а выводятся из краевой задачи.

2.2. Двумерные движения

Если в какой-либо криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 компонента скорости v_3 тождественно равна нулю, а остальные компоненты скорости не зависят от q_3, то такое движение называется двумерным. Примерами двумерных движений являются осесимметричные и плоскопараллельные течения. Эти примеры наиболее часто встречаются в теоретических и экспериментальных исследованиях.

2.2.1. Уравнения осесимметричного движения

При осевой симметрии удобно рассматривать уравнения движения в цилиндрической или сферической системах координат. Осевая симметрия означает независимость компонент скорости и тензора напряжений от угловой переменной ϕ. Течения, в которых компонента $v_\phi \neq 0$, называются течениями с закруткой. Мы рассмотрим течения без закрутки $v_\phi = 0$. В этом случае надо найти три функции v_r, v_z, p в зависимости от r, z и времени t. Приведем уравнения движения в цилиндрической системе координат. Их можно получить из общей системы уравнений в цилиндрических координатах, полагая в ней

$$v_\phi = \partial v_r/\partial \phi = \partial v_z/\partial \phi = \partial p/\partial \phi = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial s_{zr}}{\partial z} + \frac{2s_{rr}+s_{zz}}{r},$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{2.2.1}$$

$$s_{rr} = 2\left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right)\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad s_{zz} = 2\left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right)\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$s_{\phi\phi} = 2\left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right)\frac{v_r}{r}, \quad s_{rz} = \left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right),$$

где

$$U = \left[2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{v_r^2}{r^2} + 2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right]^{1/2}$$

2.2.2. Уравнения плоскопараллельного движения

Поле скорости в декартовой системе координат имеет две компоненты v_x v_y и не зависит от координаты z. Уравнения упрощаются и их можно воспроизвести в окончательном виде в любой криволинейной системе координат.

1. Уравнения в декартовой системе координат.

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y},$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial s_{xx}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$U = \sqrt{4(\partial v_x/\partial x)^2 + (\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x)^2},$$

$$s_{xx} = 2\left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad s_{xy} = 2\left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

2. Уравнения в ортогональной криволинейной системе координат. с коэффициентами Ляме H_1, H_2, третий коэффициент $H_3 = 1$. Для плоскопараллельного движения координаты вводятся с помощью замены $x = x(q_1, q_2)$,

$y = y(q_1, q_2)$. Задача сводится к отысканию трех функций v_1, v_2, p, зависящих от двух координат q_1, q_2. Уравнения нетрудно получить из общих формул криволинейных ортогональных координат (см. разд. 2.1.2), полагая в них $H_3 = 1$, $v_3 = 0$ и производные по q_3 от всех функций равными нулю. Тогда получим компоненты ускорения

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d(H_i v_i)}{dt} - \frac{v_1^2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_i} - \frac{v_2^2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_i}\right), \quad i = 1, 2;$$

компоненты градиента давления $(\mathrm{grad} p)_i = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial p}{\partial q_i}$ и компоненты дивергенции тензора

$$(\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_1 = \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 s_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1 s_{12}) + s_{11}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + s_{12}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right],$$

$$(\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_2 = \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 s_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1 s_{22}) + s_{12}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - s_{11}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right]$$

Подставляя найденные выражения в первое векторное уравнение (2.1.1), получим два уравнения для его компонент

$$\frac{\rho}{H_1}\left(\frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial t} + v_1\frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial q_1} + v_2\frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1} - \frac{v_2^2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1} +$$
$$+\frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 s_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1 s_{12}) + s_{11}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + s_{12}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right],$$

$$\frac{\rho}{H_2}\left(\frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial t} + v_1\frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial q_1} + v_2\frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2^2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_2}\right) = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial p}{\partial q_2} +$$
$$+\frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 s_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1 s_{22}) + s_{12}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - s_{11}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right].$$

Компоненты тензора скоростей деформаций

$$v_{11} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2},$$

$$v_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}\right) - \frac{1}{H_1 H_2}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = v_{11} + v_{22} = \frac{1}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial(H_2 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1 v_2)}{\partial q_2}\right)$$

Реологические соотношения

$$U = 2\sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2}, \quad s_{ij} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

3. Уравнения в полярной системе координат. r, ϕ можно получить, подставляя в предыдущие уравнения коэффициенты Ляме $H_1 = 1$, $H_2 = r$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2s_{rr}}{r},$$

$$\frac{\rho}{r}\left[\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial t} + v_r\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial \phi}\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial r} + \frac{2s_{r\phi}}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial s_{rr}}{\partial \phi},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0,$$

$$s_{rr} = 2\left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right)\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad s_{r\phi} = \left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right)\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right),$$

$$U = \left[4\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)^2\right]^{1/2}$$

2.3. Уравнения в безразмерной форме. Критерии подобия

2.3.1. Безразмерные критерии

1. Безразмерные переменные. Приведем безразмерный анализ уравнений вязкопластического течения подобно тому, как это делается в гидродинамике [40, 43, 46, 15]. Вводим безразмерные переменные

$$t = Tt', \; x_i = Lx_i', \; v_i = Vv_i', \; g_i = gg_i',$$

где T, L, V — характерные время, длина и скорость течения среды, g — ускорение силы тяжести. Тогда для скорости деформации и реологического закона получим

$$v_{ij} = \frac{V}{L}v_{ij}', \quad U = \frac{V}{L}U', \quad s_{ij} = 2\left(\frac{\mu V}{L} + \frac{\tau_s}{U'}\right)v_{ij}'. \tag{2.3.1}$$

Давление p входит в уравнения движения под знаком производной. Пусть характерное изменение давления равно δp происходит на длине порядка l, тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\delta p}{l}\frac{\partial p'}{\partial x_i'}.$$

Величина l, вообще говоря, отлична от L. Например, для течения в трубе характерная длина L, на которой меняется скорость равна радиусу трубы, а за l следует принять длину трубы, на которой задается перепад давления.

Уравнения движения (2.1.1) в безразмерном виде будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sh}\frac{\partial v_i'}{\partial t'} + v_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j'} = -\mathrm{Eu}\frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial v_{ij}'}{\partial x_j'} + \frac{2\mathrm{Se}}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j'}\left(\frac{v_{ij}'}{U'}\right) + g_i'\frac{1}{\mathrm{Fr}}, \\ &\frac{\partial v_i'}{\partial x_i'} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

2. Безразмерные критерии. Итак вязкопластическое течение характеризуется пятью безразмерными критериями:

$\mathrm{Se} = \dfrac{L\tau_s}{\mu V}$ — число Сен–Венана,

$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho V L}{\mu}$ — число Рейнольдса,

$\mathrm{Sh} = \dfrac{L}{TV}$ — число Струхаля,

$\mathrm{Fr} = \dfrac{V^2}{gL}$ — число Фруда,

$\mathrm{Eu} = \dfrac{\delta p}{\rho V^2}\dfrac{L}{l}$ — число Эйлера.

Число Сен-Венана называется также параметром пластичности. Это единственный дополнительный критерий подобия, которым модель вязкопластической среды отличается от модели вязкой жидкости.

Для представления порядков слагаемых уравнения (2.3.2) с учетом (2.3.1) удобна запись слагаемых по порядку величин

$$\mathrm{Sh} + 1 = \mathrm{Eu} + \frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{\mathrm{Se}}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{\mathrm{Fr}}. \tag{2.3.3}$$

Число Эйлера является зависимым от других безразмерных величин. Эта зависимость находится из решения задачи. По порядку величины число Eu можно оценить как наибольшее слагаемое уравнения (2.3.3), т. е. $\mathrm{Eu} \sim \max(\mathrm{Sh}, 1, 1/\mathrm{Re}, \mathrm{Se}/\mathrm{Re})$.

Число Фруда проявляется в задачах со свободной границей, которую необходимо определять из соответствующей краевой задачи. Например, граница раздела жидкости и газа, на которой задается нормальное напряжение, а касательное напряжение отсутствует (волны на поверхности тяжелой вязкопластической среды).

3. Модифицированное давление. Зависимости от ускорения силы тяжести. Если движение границы задается, то массовую силу тяжести можно легко учесть, отнеся ее к модифицированному давлению $\tilde{p} = p + \rho g z$, где z — координата, направленная вертикально вверх. Постановка краевой задачи для скорости будет такой же, как если бы сила тяжести отсутствовала. Поэтому когда на границе задается только скорость, то поле скорости не зависит от силы тяжести и число Фруда в число безразмерных критериев не войдет. Не будут зависеть от силы тяжести девиаторы скорости деформаций и напряжений. Распределение модифицированного давления также не зависит от силы тяжести. Отсюда легко найти зависимость физического давления от силы тяжести $p = \bar{p} - \rho g z$. Зависимость от силы тяжести компонент тензора напряжений войдет только в его шаровую часть — давление p.

2.3.2. Уравнения различных приближений

Из сравнения безразмерных чисел по порядку величин можно делать вывод о существенности соответствующих слагаемых и получать те или иные приближенные теории.

Число Струхаля существенно в задачах с высокочастотными вынужденными колебаниями или в задачах развития течения под действием внезапно приложенных сил. Числа Рейнольдса и Сен-Венана являются показателями существенности инерционных, вязких или пластических эффектов.

В расположенной ниже таблице 2.1 отражены приближенные теории движения вязкопластической среды (ВПС) с заданным движением границы области, представляющие наибольший интерес.

Таблица 2.1

Приближение	Уравнения
1. $\mathrm{Sh} \gg 1,\ \max(1/\mathrm{Re}, \mathrm{Se}/\mathrm{Re}) \gg 1$ $\mathrm{Sh} + \cancel{1} = \mathrm{Eu} + 1/\mathrm{Re} + \mathrm{Se}/\mathrm{Re}$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_{ij}}{U}\right)$
а) $\mathrm{Se} \ll 1$ (вязкая жидкость)	$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i$
б) $\mathrm{Se} \gg 1$ (идеальная пластичность)	$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_{ij}}{U}\right)$
2. $\mathrm{Sh} \sim 1,\ \max(1/\mathrm{Re}, \mathrm{Se}/\mathrm{Re}) \gg 1$ $\cancel{\mathrm{Sh}} + \cancel{1} = \mathrm{Eu} + 1/\mathrm{Re} + \mathrm{Se}/\mathrm{Re}$	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_{ij}}{U}\right) = 0$
а) $\mathrm{Se} \ll 1$ (вязкая жидкость)	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i = 0$
б) $\mathrm{Se} \gg 1$ (идеальная пластичность)	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_{ij}}{U}\right) = 0.$

В левой колонке таблицы приводятся условия применимости приближения и соотношение (2.3.3) с перечеркнутыми слагаемыми, которыми следует пренебречь. В правой колонке таблицы приведены уравнения соответствующего приближения.

2.4. Безынерционное приближение

2.4.1. Система уравнений

Наиболее важным приближением является безынерционное приближение. Оно соответствует второму случаю таблицы 2.1.

$$\min\left(\mathrm{Re}, \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Se}}\right) = \min\left(\frac{\rho V L}{\mu}, \frac{\rho V^2}{\tau_s}\right) \ll 1.$$

Здесь можно пренебречь инерционными эффектами и систему уравнений движения (2.1.1) можно заменить системой уравнений равновесия

$$\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{\sigma} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0.$$

В декартовой системе координат они имеют вид

$$\begin{cases} \partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0, \\ \partial v_i/\partial x_i = 0. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

К этим уравнениям нужно присоединить реологические соотношения

$$\begin{cases} s_{ij} = 2\,(\mu + \tau_s/U)\,v_{ij}, & U > 0, \\ T^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \leqslant \tau_s^2, & U = 0, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

$$U = 2 v_{ij} v_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

В уравнениях (2.4.1) массовые силы опущены. Их можно легко учесть, если под давлением понимать модифицированное давление, включающее гидростатическое распределение давления.

В теории вязкой жидкости это приближение ввел Стокс. Поэтому оно называется приближением Стокса. Его также называют ползущим движением, имея ввиду малость скорости движения. Уравнения Стокса для вязкой жидкости получаются подстановкой в (2.4.1) реологических соотношений (2.4.2) при $\tau_s = 0$. Они линейные относительно скорости. Для вязкопластической среды уравнения Стокса — нелинейные.

2.4.2. Функции напряжений

Уравнения равновесия (2.4.1) линейны относительно напряжений. Их можно разрешить и выразить компоненты напряжений через три скалярные функции координат Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3, которые в теории упругости называются функциями напряжений. Эти соотношения получены Максвеллом (Maxwell, 1870) [47]:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x_1\partial x_2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1\partial x_3},$$
$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_2\partial x_3}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_2^2}. \tag{2.4.3}$$

Другой вид функций напряжения предложил Морера (Morera, 1892) [47]

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_2\partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1\partial x_3}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x_1\partial x_2},$$
$$\sigma_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_3}\right) + \tag{2.4.4}$$

Уравнения в напряжениях. Уравнения в напряжениях можно получить, если выразить компоненты деформаций через компоненты тензора напряжений по (1.5.5). Уравнения для напряжений можно не разрешать, а выразить компоненты напряжений через три функции напряжений по формулам (2.4.3) или (2.4.4). В результате получим выражения компонент тензора деформаций через функции напряжений. Для функций напряжений Максвелла (2.4.3) они имеют вид

$$v_{12} = \frac{1-\tau_s/T}{2\mu}\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x_1\partial x_2}, \ldots \quad v_{11} = \frac{1-\tau_s/T}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_3^2}\right), \ldots \quad T > \tau_s,$$

где T выражается через вторые производные функций напряжения.

Теперь нужно потребовать, чтобы по компонентам v_{ij} можно было определить компоненты вектора скорости v_i. Необходимое и достаточное условие этого — шесть условий совместности, которые можно записать в виде шести условий равенства нулю компонент симметричной матрицы R_{ij} [16]

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{23} = R_{13} = R_{12} = 0,$$

$$R_{11} = \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_{33}}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 v_{23}}{\partial x_2\partial x_3}, \ldots \qquad \text{(три уравнения)}$$

$$R_{23} = -\frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial v_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{12}}{\partial x_3}\right), \ldots \qquad \text{(три уравнения)}$$

Между R_{ij} выполняются три тождественных соотношения

$$\partial R_{ij}/\partial x_j = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

На этом основании в монографии [16] делается вывод, что приведенные шесть уравнений совместности не являются независимыми и их можно заменить на три условия в области течения и шесть условий на границе. [1]

$$\begin{aligned} &R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0, \quad \vec{x} \in V, \\ &R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{23} = R_{13} = R_{12} = 0, \quad \vec{x} \in \partial V \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Уравнения в напряжениях полезны, когда граничные условия ставятся для напряжений.

2.4.3. Уравнения в цилиндрической системе координат

Уравнения (2.4.1) нетрудно записать в любой ортогональной криволинейной системе координат, пользуясь формулами, приведенными в разд. 2.1.2. Например, в цилиндрической системе координат уравнения будут такими

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{zr}}{\partial z} + \frac{s_{rr} - s_{\phi\phi}}{r} = 0, \\ &-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{z\phi}}{\partial z} + \frac{2 s_{r\phi}}{r} = 0, \\ &-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r} = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

К этим уравнениям нужно добавить реологические соотношения (2.4.2), записанные в цилиндрической системе координат

$$\begin{pmatrix} s_{rr} & s_{r\phi} & s_{rz} \\ s_{r\phi} & s_{\phi\phi} & s_{\phi z} \\ s_{rz} & s_{\phi z} & s_{zz} \end{pmatrix} = 2\left(\mu + \frac{\tau_s}{U}\right) \begin{pmatrix} v_{rr} & v_{r\phi} & v_{rz} \\ v_{r\phi} & v_{\phi\phi} & v_{\phi z} \\ v_{rz} & v_{\phi z} & v_{zz} \end{pmatrix},$$

$$U = \sqrt{2(v_{rr}^2 + v_{\phi\phi}^2 + v_{zz}^2) + 4(v_{r\phi}^2 + v_{rz}^2 + v_{\phi z}^2)},$$

$$v_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad v_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r}, \quad v_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad v_{z\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right),$$

$$v_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \quad v_{r\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right).$$

---

[1] В работе Георгиевский Д.В., Победря Б.Е. О числе независимых уравнений совместности в механике деформируемого твердого тела// ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. с. 1045–1048 приводится контрпример неэквивалентности уравнений совместности уравнениям (2.4.5)

2.5. Безынерционное плоскопараллельное течение вязкопластической среды

Уравнения движения вязкопластической среды на плоскости представлены в статьях Сен-Венана [83] и Ильюшина [32], которые мы кратко изложим, используя современные понятия тензорного исчисления [82].

2.5.1. Функция напряжений и функция тока

1. Общая система уравнений. Уравнения (2.4.1), (2.4.2) ползущего вязкопластического течения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial s_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial s_{xy}}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial s_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial s_{xx}}{\partial y}=0, \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

$$s_{xx}+s_{yy}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0; \tag{2.5.2}$$

$$\begin{cases} s_{xx}=2(\mu+\tau_s/U)v_{xx}, \quad s_{xy}=2(\mu+\tau_s/U)v_{xy}, & U>0,\\ T\leqslant \tau_s, & U=0. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

$$U=2[v_{xx}^2+v_{xy}^2]^{1/2}, \quad T=[s_{xx}^2+s_{xy}^2]^{1/2}.$$

можно свести к уравнениям для одной скалярной функции. Для этого совершаем следующие операции:

1. Через функцию напряжений Эри разрешаем систему (2.5.1).
2. Через функцию тока разрешаем уравнение неразрывности (2.5.2).
3. Из реологических соотношений получаем систему двух уравнений для функций напряжения и тока.
4. Исключаем из системы уравнений одну из функций и получаем уравнение для другой функции.

В результате получим одно уравнение для функции напряжений Эри или для функции тока. Оба уравнения приведены в работе [32]. Перейдем к выводу этих уравнений.

2. Функция напряжений Эри. Систему (2.5.1) разрешаем с помощью функции напряжения Эри Φ (см. также (2.4.3))

$$\sigma_{xx}=-p+s_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy}=-p-s_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy}=s_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\Rightarrow$$

$$p=-\frac{1}{2}\Delta\Phi, \quad s_{xx}=-\frac{1}{2}D_1\Phi, \quad s_{xy}=-\frac{1}{2}D_2\Phi. \tag{2.5.4}$$

Здесь, Δ — оператор Лапласа, D_1 и D_2 — два линейных дифференциальных оператора

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D_2 = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}. \tag{2.5.5}$$

Отметим, что D_1 и D_2 — это два гиперболических оператора. Они введены Ильюшиным ([32]). При повороте координат x, y на 45°, один оператор преобразуется в другой. Сумма их квадратов является бигармоническим оператором $D_1^2 + D_2^2 = \Delta^2$.

3. Функция тока. Разрешаем уравнение неразрывности (2.5.2) с помощью функции тока Лагранжа Ψ и выражаем через нее компоненты скорости деформаций

$$v_x = \partial\Psi/\partial y, \quad v_y = -\partial\Psi/\partial x \Rightarrow$$

$$v_{xx} = \frac{1}{2}D_2\Psi, \quad v_{xy} = -\frac{1}{2}D_1\Psi. \tag{2.5.6}$$

Максимальные скорость скольжения и напряжение сдвига. можно выразить соответственно через Ψ и Φ, подставляя в последнюю формулу (2.5.3) соотношения (2.5.4) и (2.5.6)

$$U = \sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}, \quad T = \frac{1}{2}\sqrt{(D_1\Phi)^2 + (D_2\Phi)^2}. \tag{2.5.7}$$

2.5.2. Уравнения Ильюшина

1. Система уравнений для двух функций. Подставляем (2.5.4) и (2.5.6) в реологические соотношения Генки (2.5.3). В результате получим два уравнения для двух скалярных функций

$$D_1\Phi = -2\,(\mu + \tau_s/U)\,D_2\Psi, \quad D_2\Phi = 2\,(\mu + \tau_s/U)\,D_1\Psi. \tag{2.5.8}$$

2. Система уравнений для функции напряжений и функции тока. Для определения направления площадок с наибольшей скоростью сдвига удобно исходить из уравнений (1.6.7). Подставляя в них выражения (2.5.4) и (2.5.6) получим

$$\begin{aligned} &D_1\Psi = -U\cos 2\alpha, \quad D_2\Psi = -U\sin 2\alpha, \\ &D_1\Phi = 2T\sin 2\alpha, \quad D_2\Phi = -2T\cos 2\alpha, \\ &T = \mu U + \tau_s. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Здесь α — угол, который составляет площадка наибольшей скорости сдвига с осью x.

Исключая из пяти уравнений U, T и α, получим систему уравнений для Ψ и Φ эквивалентную (2.5.8)

$$(D_1\Phi)(D_1\Psi) + (D_2\Phi)(D_2\Psi) = 0,$$
$$\sqrt{(D_1\Phi)^2 + (D_2\Phi)^2} - 2\mu\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2} = 2\tau_s.$$

3. Уравнение для функции тока. Чтобы получить уравнение для Ψ нужно исключить Φ. Это можно сделать с помощью соотношения $D_1D_2\Phi - D_2D_1\Phi = 0$ и уравнений (2.5.8).

$$D_1\left[\left(\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}}\right)D_1\Psi\right] + \\ +D_2\left[\left(\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}}\right)D_2\Psi\right] = 0. \qquad (2.5.10)$$

Пользуясь тождеством $D_1^2 + D_2^2 = \Delta^2$, уравнение удобно записать в таком виде

$$\mu\Delta^2\Psi + \tau_s G\{\Psi\} = 0,$$

$$G\{\Psi\} = D_1\left(\frac{D_1\Psi}{\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}}\right) + D_2\left(\frac{D_2\Psi}{\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}}\right)$$

4. Уравнение для функции напряжений. Наконец, исключая из системы уравнений Ψ, Ильюшин получил уравнение для функции напряжений

$$D_1\left[\left(1 - \frac{2\tau_s}{\sqrt{(D_1\Phi)^2 + (D_2\Phi)^2}}\right)D_1\Phi\right] + \\ +D_2\left[\left(1 - \frac{2\tau_s}{\sqrt{(D_1\Phi)^2 + (D_2\Phi)^2}}\right)D_2\Phi\right] = 0. \qquad (2.5.11)$$

Его можно преобразовать так $\Delta^2\Phi = 2\tau_s G\{\Phi\}$, где $G\{\Phi\}$ — тот же нелинейный дифференциальный оператор, что и в предыдуще формуле.

5. Уравнения Ильюшина в полярной системе координат. Из уравнений равновесия (2.4.6) для плоскопараллельного движения получим

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{s_{rr} - s_{\phi\phi}}{r} = 0,$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{2s_{r\phi}}{r} = 0, \qquad (2.5.12)$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0.$$

Первые два уравнения (2.5.12) разрешаем с помощью функции напряжения Эри Φ

$$\sigma_{rr} = -p + s_{rr} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi(r,\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(r,\phi)}{\partial r},$$

$$\sigma_{r\phi} = s_{r\phi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi(r,\phi)}{\partial r\partial\phi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi(r,\phi)}{\partial\phi},$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -p + s_{\phi\phi} = \frac{\partial^2\Phi(r,\phi)}{\partial r^2}.$$

Отсюда, учитывая равенство $s_{rr} + s_{\phi\phi} = 0$, найдем

$$p = -\frac{1}{2}\Delta\Phi, \quad s_{rr} = -s_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}D_1\Phi, \quad s_{r\phi} = -\frac{1}{2}D_2\Phi \tag{2.5.13}$$

Здесь Δ — выражение оператора Лапласа в полярной системе координат, а операторы D_1 и D_2 имеют вид

$$D_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad D_2 = 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{2.5.14}$$

Далее разрешаем уравнение неразрывности в системе (2.5.12) с помощью функции тока Ψ и выражаем через нее компоненты скорости деформаций

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}, \quad v_\phi = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} \Rightarrow$$

$$v_{rr} = \frac{1}{2}D_2\Psi, \quad v_{r\phi} = -\frac{1}{2}D_1\Psi. \tag{2.5.15}$$

Мы видим, что полученные уравнения (2.5.13) и (2.5.15) в полярной системе координат совпадают с уравнениями (2.5.4) и (2.5.6) декартовой системы. Следовательно все последующие уравнения декартовой системы будут справедливы и для полярной системы. Необходимо лишь заменить операторы (2.5.5) на (2.5.14).

2.5.3. Краевые условия

1. Условия для функции тока. Выразим условия на границе для скорости (2.1.3) через функцию тока

$$\partial\Psi/\partial y = \tilde{v}_x, \quad \partial\Psi/\partial x = -\tilde{v}_y, \quad \vec{x} \in \partial S_v,$$

где знак тильда ставится над функциями, заданными на границе.

Если заданы нормальная $\tilde{v}_n$ и касательная $\tilde{v}_s$ компоненты скорости, то можно спроектировать вектор $\tilde{\vec{v}}$ на направление векторов нормали (n_x, n_y) и касательной (s_x, s_y). Нормаль выбираем внешнюю к контуру ∂S, а вектор касательной должен соответствовать обходу контура против часовой стрелки. Тогда имеем соотношения $n_x = s_y, \quad n_y = -s_x$. С их помощью найдем проекции скорости на нормаль и касательную

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}n_x - \frac{\partial\Psi}{\partial x}n_y = \frac{\partial\Psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y}s_x - \frac{\partial\Psi}{\partial x}s_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial n}$$

и получим требуемые условия

$$\partial\Psi/\partial s = \tilde{v}_n, \quad \partial\Psi/\partial n = -\tilde{v}_s. \tag{2.5.16}$$

2. Условия для функции напряжений. Выразим условия на границе для напряжений (2.1.4) через функцию напряжений Φ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}n_x - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}n_y = \tilde{f}_x, \\ -\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}n_x - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}n_y = \tilde{f}_y, \end{cases} \quad \vec{x} \in \partial S_f$$

Пусть на границе заданы нормальная $\tilde{f}_n$ и касательная $\tilde{f}_s$ компоненты силы. Тогда, аналогично предыдущему случаю для этих компонент условие на границе запишется так

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}n_x^2 - 2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}n_x n_y + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}n_y^2 = \tilde{f}_n, \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}n_x s_x - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(s_x n_y + s_y nx) + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}n_y s_y = \tilde{f}_s. \end{cases} \quad \vec{x} \in \partial S_f$$

Введем угол ϑ наклона касательной к оси x: $s_x = -n_y = \cos\vartheta$, $s_y = n_x = \sin\vartheta$. Тогда получим граничные условия в следующем окончательном виде

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}D_1\Phi\sin 2\vartheta + \frac{1}{2}D_2\Phi\cos 2\vartheta = \tilde{f}_\tau, \\ \frac{1}{2}\Delta\Phi + \frac{1}{2}D_1\Phi\cos 2\vartheta + \frac{1}{2}D_2\Phi\sin 2\vartheta = \tilde{f}_n \end{cases} \quad \vec{x} \in \partial S_f. \tag{2.5.17}$$

Если заданы смешанные граничные условия, т. е. на части границы ∂S_v условие (2.5.6), а на второй части границы ∂S_f условие (2.5.4), то необходимо решать систему уравнений для Ψ и Φ. Если же имеется только условие для скорости (2.5.6) или только для напряжения (2.5.4), то получим краевую задачу для одной функции Ψ или Φ соответственно.

2.6. Вариационные принципы

Система уравнений (2.4.1) (2.4.2) с различными видами граничных условий допускает вариационные формулировки. Они играют большую роль для теоретического изучения соответствующей сложной нелинейной краевой задачи [8, 16, 51, 52]. Из нее доказывается теорема существования и единственности.

На основе вариационных принципов разработаны аналитические методы приближенного решения краевых задач, начатых в работах Бубнова и Галеркина. Иногда могут быть получены полезные оценки для различных физических характеристик [8, 51, 52]. Кроме того, вариационные методы применяются для разработки численных схем метода конечных элементов [16].

2.6.1. Принцип виртуальной мощности

Пусть δv_i, $i = 1, 2, 3$ произвольные в области V функции, равные нулю на границе ∂V_v, на которой выполняется условие (2.1.3)

$$\delta v_i = 0, \ \vec{x} \in \partial V_v. \tag{2.6.1}$$

Такие функции называются вариациями кинематически допустимых полей скорости. Их также называют виртуальными скоростями или вариациями скорости, совместимыми со связями. Под связями понимается условие (2.1.3). Если $\vec{v}'$ и $\vec{v}''$ подчинены этим связям, то их разность (вариация) подчинена условию (2.6.1).

Через введенные вариации скорости уравнения движения (2.4.1) и граничное условие (2.1.4)

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0, \ \vec{x} \in V; \quad \sigma_{ij}n_j = \bar{f}_i, \ \vec{x} \in \partial V_v. \tag{2.6.2}$$

можно записать в виде вариационного соотношения

$$\int\limits_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta v_i dV - \int\limits_{\partial V}(\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_i)\delta v_i dS, \ \vec{x} \in \partial V_v.$$

Принимая во внимания тождества

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta v_i = -\sigma_{ij}\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\delta v_i) = -\sigma_{ij}\delta v_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\delta v_i)$$

и теорему Гаусса-Остроградского, вариационное соотношение можно привести к виду

$$-\int\limits_V \sigma_{ij}\delta v_{ij} dV + \int\limits_{\partial V}\bar{f}_i\delta v_i dS = 0. \tag{2.6.3}$$

Это вариационное тождество называется принципом виртуальной мощности и представляет собой фундаментальный принцип в механике сплошной среды [26]. Левая часть равенства (2.6.3) называется **в и р т у а л ь н о й м о щ н о с т ь ю**. Она содержит два слагаемых: первое $P'_{(i)}$ называется виртуальной мощностью внутренних сил, второе $P'_{(e)}$ — виртуальной мощностью внешних поверхностных сил. Для действительного движения мощности внутренних $P_{(i)}$ и внешних поверхностных сил $P_{(e)}$ получаются из формул для $P'_{(i)}$ и $P'_{(e)}$ заменой δv_{ij} и δv_i на действительные деформации v_{ij} и скорости v_i.

Принцип виртуальной мощности (2.6.3) можно сформулировать так. *При действительном движении, виртуальная мощность равна нулю для всех вариаций скорости совместимых со связями (2.6.1). Обратно, если виртуальная мощность тождественна нулю для любых вариаций скорости совместимых со связями (2.6.1), то будут выполнены уравнения и граничные условия (2.6.2).*

Принцип виртуальной мощности не касается реологического соотношения и относится к медленному движению любой сплошной среды. Ниже будут рассмотрены принципы в виде экстремума некоторых функционалов. Экстремалями функционалов будут решения краевых задач течения сплошной среды с заданными реологическими законами.

2.6.2. Функционалы и их вариации

1. Диссипативные потенциалы. Диссипативные потенциалы определяют связь компонент тензора напряжений и тензора скоростей деформаций в сплошной среде. Рассматриваются два типа потенциалов: потенциал напряжений $W(v_{ij})$ и потенциал деформаций $\tilde{W}(s_{ij})$. Они вводятся дифференциальными соотношениями

$$dW(v_{ij}) = s_{ij}dv_{ij}, \quad d\tilde{W}(s_{ij}) = v_{ij}ds_{ij} \;\Rightarrow\; W + \tilde{W} = s_{ij}v_{ij} \tag{2.6.4}$$

Последняя формула $W + \tilde{W} = s_{ij}v_{ij}$ позволяет легко выразить друг через друга. Преобразование $W(v_{ij}) \to \tilde{W}(s_{ij})$ называется преобразованием Лежандра. Если же потенциал $W(v_{ij})$ не дифференцируем, то вводится его обобщение — преобразование Юнга [51, 52]. Потенциалы определяют прямое и обращенное реологические соотношения в среде

$$s_{ij} = \partial W(v_{ij})/\partial v_{ij}, \quad v_{ij} = \partial\tilde{W}(s_{ij})/\partial s_{ij} \tag{2.6.5}$$

Потенциалы легко вычислить, подставляя в (2.6.4) конкретные реологические соотношения $s_{ij}(v_{ij})$ или $v_{ij}(s_{ij})$ и интегрируя их.

Для вязкопластической среды с помощью реологического соотношения (2.5.3) получим

$$\begin{aligned} &W(v_{ij}) = \mu U^2/2 + \tau_s U, \qquad U = \sqrt{2v_{ij}v_{ij}}, \\ &\tilde{W}(s_{ij}) = (T - \tau_s)^2/(2\mu), \quad T = \sqrt{s_{ij}s_{ij}/2}. \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

2. Вариации функционалов. Введем функционал, зависящий от поля скорости в области V

$$\Im_0(\vec{v}) = \int\limits_V W(v_{ij})dV, \quad v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.6.7}$$

и два функционала, зависящие еще от поля давления p

$$\Im(\vec{v},p) = \Im_0(\vec{v}) - \int\limits_V p\,\mathrm{div}\,\vec{v}dV, \quad \Im_1(\vec{v},p) = \Im(\vec{v},p) - \int\limits_{\partial V} \bar{f}_i v_i dS \tag{2.6.8}$$

и рассмотрим их вариации. Вариация первого функционала при произвольном изменении аргументов $\vec{v}, p$ вычисляется так

$$\delta\Im(\vec{v},p) = \int\limits_V \left(\frac{\partial W}{\partial v_{ij}}\delta v_{ij} - \delta p\,\mathrm{div}\,\vec{v} - p\,\mathrm{div}\,\delta\vec{v}\right) dV$$

Преобразуем этот интеграл, используя первое равенство (2.6.5), соотношение для напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}$ и теорему Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_V \left(s_{ij}\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} - \delta p\,\mathrm{div}\,\vec{v} - \mathrm{div}\,(p\,\delta\vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i}\delta v_i\right) dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(s_{ij}\delta v_i) - \mathrm{div}\,(p\,\delta\vec{v}) - \delta p\,\mathrm{div}\,\vec{v} - \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta v_i\right) dV \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}
\Im(\vec{v},p) = \int\limits_V \left(W(v_{ij}) - p\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) dV, \\
\delta\Im(\vec{v},p) = \int\limits_{\partial V} \sigma_{ij}\delta v_i n_j dS - \int\limits_V \left(\delta p\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta v_i\right) dV \\
\hline
\Im_1(\vec{v},p) = \Im(\vec{v},p) - \int\limits_{\partial V} \bar{f}_i v_i dS \\
\delta\Im_1(\vec{v},p) = \int\limits_{\partial V} \left(\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_i\right)\delta v_i dS - \int\limits_V \left(\delta p\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta v_i\right) dV \\
\hline
\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \partial W(v_{ij})/\partial v_{ij}, \quad v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i\right)
\end{array}} \tag{2.6.9}$$

Здесь в обеих формулах вариации $\delta\vec{v}, \delta p$ — произвольные дифференцируемые функции в области $\vec{x} \in V$ и на границе $\vec{x} \in \partial V$

Если выразить потенциал $W(v_{ij})$ через $\tilde{W}(s_{ij})$ и подставить его в функционал $\Im(\vec{v})$, то получим двойственный функционал

$$\tilde{\Im}_0(s_{ij},\vec{v}) = \int\limits_V (s_{ij}v_{ij} - \tilde{W}(s_{ij}))dV$$

Варьируя этот функционал по $s_{ij}, \vec{v}$, получим

$$\delta\tilde{\Im}_0(s_{ij},\vec{v}) = \int\limits_V \left(v_{ij} - \frac{\partial\tilde{W}(s_{ij})}{\partial s_{ij}}\right)\delta s_{ij}dV + \int\limits_V s_{ij}\delta v_{ij}dV$$

Далее пользуясь тождеством

$$s_{ij}\delta v_{ij} = s_{ij}\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(s_{ij}\delta v_i) - \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}\delta v_i$$

и теоремой Гаусса-Остроградского, вариация приведется к виду

$$\delta\tilde{\Im}_0(s_{ij},\vec{v}) = \int\limits_V \left[\left(v_{ij} - \frac{\partial\tilde{W}(s_{ij})}{\partial s_{ij}}\right)\delta s_{ij} - \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}\delta v_i\right]dV + \int\limits_{\partial V} s_{ij}n_j\delta v_i dS.$$

Отсюда нетрудно найти вариацию для двойственного к $\Im_1(\vec{v},p)$ функционала

$$\boxed{\begin{aligned}
&\tilde{\Im}_1(s_{ij},\vec{v},p) = \int\limits_V (s_{ij}v_{ij} - \tilde{W}(s_{ij}))dV - \int\limits_V p\,\mathrm{div}\,\vec{v}dV - \int\limits_{\partial V}\bar{f}_i v_i dS\\
&\delta\tilde{\Im}_1(s_{ij},\vec{v},p) = \int\limits_V \left[\left(v_{ij} - \frac{\partial\tilde{W}(s_{ij})}{\partial s_{ij}}\right)\delta s_{ij} - \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta v_i - \delta p\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right]dV +\\
&\qquad + \int\limits_{\partial V}(\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_i)\delta v_i dS\\
&\qquad v_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i\right)
\end{aligned}} \tag{2.6.10}$$

Здесь вариации $\delta v_i, \delta s_{ij}$, $i,j = 1,2,3$ и δp — произвольные дифференцируемые в области V и на границе ∂V функции.

2.6.3. Вариационные принципы для трехмерных течений

Запишем полную систему уравнений безынерционного вязкопластического течения (2.4.1) и (2.4.2)

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0, \tag{A}$$

$$\partial v_i/\partial x_i = 0 \iff \mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \tag{B}$$

$$\begin{cases} s_{ij} = 2\left(\mu + \dfrac{\tau_s}{U}\right)v_{ij}, & U > 0,\\ T^2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \leqslant \tau_s^2, & U = 0,\end{cases} \tag{C}$$

$$U = 2v_{ij}v_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Решение уравнений (А)–(С) можно свести к решению задач экстремума некоторых функционалов. Соответствующие вариационные принципы можно получить с помощью обведенных в рамочки равенств для вариаций (2.6.9) и (2.6.10).

1. Принципы для граничных условий в скоростях. Решением краевой задачи в скоростях будем называть решение системы уравнений (А)–(С), удовлетворяющее условию для скорости (2.1.3) на границе области

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}}, \quad \vec{x} \in \partial V_v. \tag{*}$$

Принцип 1. *Среди всех возможных полей скорости удовлетворяющих уравнению (В) и граничным условиям* $(*)$, *точное решение краевой задачи в скоростях доставляет минимум функционалу*

$$\Im_0(\vec{v}) = \int\limits_V W(v_{ij})dV$$

Доказательство. Задача экстремума функционала $\Im_0(\vec{v})$ при двух условиях с помощью множителя Лагранжа p сводится к экстремуму функционала $\Im(\vec{v}, p)$ с единственным ограничением на поле скорости $(*)$ на границе ∂V

Из формулы (2.6.9) видно, что его вариация на точном решении равна нулю: первый интеграл равен нулю, так как $\delta\vec{v} = 0$ в силу граничного условия $(*)$ и второй интеграл равен нулю в силу уравнений (А). Обратно, в силу граничного условия $(*)$ и уравнений (А) вариация $\Im(\vec{v}, p)$ равна нулю при любых вариациях $\delta\vec{v}$, δp, $\vec{x} \in V$. Отсюда получим уравнения (А) для экстремали.

Диссипативный потенциал $W(v_{ij})$ строго выпуклый по аргументу v_{ij} и ограничен снизу как неотрицательная функция. Поэтому экстремум выпуклого и ограниченного снизу функционала будет минимумом. Таким образом, сформулированный вариационный принцип доказан.

Из полученного вариационного принципа вытекает важное следствие.

Следствие. *Решение краевой задачи в скоростях существует и единственно.*

Для вязкой жидкости эти результаты получены Гельмгольцем (Helmholtz H. 1868).

Можно упростить формулировку принципа 1, используя вместо функционала $\Im_0(\vec{v})$ функционал $\Im(\vec{v}, p)$. Тогда условие соленоидальности поля скорости (В) накладывать не нужно.

Принцип 2. *Среди всех возможных полей скорости и давления в области V при фиксированном значении скорости на границе* $(*)$ *наименьшее значение функционала $\Im(\vec{v}, p)$ достигается на точном решении краевой задачи в скоростях.*

2. Принципы для граничных условий в напряжениях. Решением краевой задачи в напряжениях будем называть решение системы уравнений (A), (B) и (C), удовлетворяющее условию для напряжения (2.1.4) на границе области:

$$-pn_i + s_{ij}n_j = \bar{f}_i, \quad \vec{x} \in \partial V_f. \tag{**}$$

П р и н ц и п 3. *Среди всех возможных полей скорости и давления в области V, включая границу области, наименьшее значение функционала $\Im_1(\vec{v}, p)$ достигается на точном решении краевой задачи в напряжениях.*

Принцип 3 вытекает из равенства (2.6.9). Достоинство его состоит в том, что на допустимые поля скорости и давления не накладываются никакие ограничения. Задается только связь девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций (C).

В следующем вариационном принципе тензор напряжений считается произвольным. Из условия экстремума получаются не только уравнения (A), (B), граничное условие (**), но и реологическое соотношение (C).

П р и н ц и п 4. *Среди всех возможных полей скорости и напряжения в области V, включая границу области, наименьшее значение функционала $\tilde{\Im}_1(s_{ij}, \vec{v}, p)$ достигается на точном решении краевой задачи в напряжениях.*

Доказательство проводится на основе равенства (2.6.10).

3. Принципы для смешанных граничных условий. Часто встречаются задачи, когда задаются условие для скорости (*) на одной части границы ∂V_1 и условие для напряжения (**) — на другой ее части ∂V_2. В этих случаях можно исходить из принципов 3 и 4, наложив на скорости ограничение (*) на ∂V_1. Так из принципа 3 можно получить для смешанной задачи следующий вариационный принцип.

П р и н ц и п 5. *Среди всех возможных полей скорости в области V, удовлетворяющих условию (*) на ∂V_1 и всех полей давления в области V, включая границу области, наименьшее значение функционала $\Im_1(\vec{v}, p)$ достигается на точном решении смешанной краевой задачи.*

Принцип 4 с условием для скорости на границе сформулирован Рейснером (Reisner E. 1950) [103].

В работе П.П. Мосолова и В.П. Мясникова на основе принципов экстремума функционала $\Im_1$ и двойственного к нему функционала $\tilde{\Im}_1$ был развит метод двухсторонних оценок [52], позволяющий находить оценки сверху и снизу нижней грани функционала $\Im_1$, дать оценку снизу для коэффициента предельной нагрузки. В этой же монографии обсуждаются тонкие моменты, связанные с недифференцируемостью функционалов для вязкопластических сред. Дано полное обоснование вариационных принципов в этом случае.

2.6.4. Вариационные принципы для двумерных течений

Для плоской задачи можно ввести функцию тока Ψ для поля скорости (2.5.6) и функцию Эри для напряжений (2 5 4). При этом уравнения (B) и (A) удовлетворятся.

Диссипативный потенциал W (2.6.6) и функционал (2.6.7) можно выразить через Ψ с помощью выражения (2.5.7)

$$W(\Psi) = \frac{1}{2}\mu U^2 + \tau_s U = \frac{1}{2}\mu((D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2) + \tau_s\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2},$$

$$\Im_0(\Psi) = \int\limits_S W(\Psi)dS.$$

Принцип 1 можно переформулировать так.

Принцип 6. *Среди всех возможных функций тока Ψ в области S, удовлетворяющих условиям (2.5.6) на границе ∂S точное решение краевой задачи в скоростях доставляет минимум функционалу* $\Im_0(\Psi)$. В таком виде вариационный принцип сформулирован Ильюшиным [32].

Вариационный принцип, приспособленный для решения смешанных краевых задач, можно получить с помощью вариационного тождества (2.6.9) для функционала $\Im_1(\vec{v}, p)$. В качестве варьируемого аргумента выберем функцию тока Ψ. Учитывая равенство $\bar{f}_i v_i = \bar{f}_n v_n + \bar{f}_s v_s = f_n \partial\Psi/\partial s - f_s \partial\Psi/\partial n$, (2.6.9) получим

$$\Im_1(\Psi) = \Im_0(\Phi) - \int\limits_{\partial S} \left(f_n \frac{\partial\Psi}{\partial s} - f_s \frac{\partial\Psi}{\partial n}\right) ds.$$

Таким образом в функционале принципа 3 вместо аргументов $\vec{v}, p$ остался единственный аргумент Ψ. Формулировка нового принципа будет такая.

Принцип 7. *Среди всех возможных функций тока Ψ в области S, удовлетворяющих условию (2.5.6). на границе ∂S точное решение смешанной задачи для уравнения* (2.5.10) *доставляет минимум функционалу* $\Im_1(\Psi)$.

Аналогично можно сконструировать двойственный функционал $\tilde{\Im}_1(\Phi)$ и сформулировать соответствующий вариационный принцип.

Глава 3

ТОЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

3.1. О методах получения точных решений

Общий подход получения точных решений заключается в специальном выборе геометрии течения. Для этого подбирается система координат x_1, x_2, x_3, вообще говоря, криволинейная, так, чтобы в ней были отличны от нуля только одна компонента скорости $v_1 \neq 0$ и одна компонента тензора деформации $v_{12} = v_{21} \neq 0$. Следовательно, $U = 2v_{12}$ и девиатор напряжения будет иметь только одну, не равную нулю, компоненту — s_{12}. Тогда связь девиаторов напряжений и скоростей деформаций (1.5.4) будет линейной

$$s_{12} = 2\mu v_{12} \pm \tau_s \quad \text{при } |s_{12}| > \tau_s,$$

где знак перед τ_s совпадает со знаком v_{12}. В результате уравнения движения (2.1.1) будут линейными.

Этот закон для одномерного течения называется законом Шведова-Бингама.

3.2. Течения между двумя параллельными пластинами

3.2.1. Формулировка краевой задачи

1. Однонаправленные плоскопараллельные движения. Будем предполагать, что вектор скорости во всех точках пространства имеет одно направление. Такое движение называется однонаправленным. Выберем ось x по направлению скорости. Тогда поле скорости будет иметь одну компоненту $\vec{v}(v, 0, 0)$. Компонента скорости для плоскопараллельного движения не зависит от одной из декартовых координат y. Из уравнения неразрывности $\operatorname{div}\vec{v} = \partial v/\partial x = 0$ заключаем, что $v(z)$ — функция зависящая только от z. Тензор скоростей деформаций имеет только одну компоненту $v_{xz} = \frac{1}{2}\partial v/\partial z \neq 0$. Как выше отмечалось в этом случае девиатор напряжения имеет тоже одну компоненту $s_{xz} = \tau$, которая связана с v_{xz} линейным соотношением Шведова-Бингама.

2. Постановка задачи. Однонаправленные плоскопараллельные движения можно применить для решения краевой задачи о течении в области $0 \leqslant z \leqslant 2h$ между двумя параллельными пластинами $z = 0$ и $z = 2h$ (рис. 3.1). Пластина

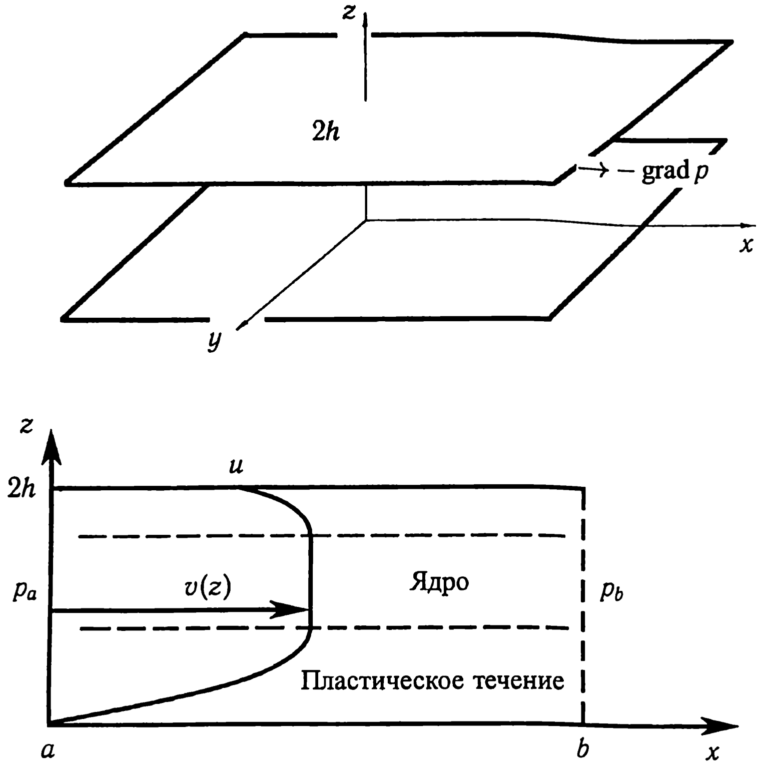


Рис. 3.1. Схема течения между двумя пластинами

$z = 0$ — неподвижна, а пластина $z = 2h$ движется с постоянной скоростью u, направленной по оси x. В сечениях $x = a$ и $x = b$ давление постоянно и равно соответственно p_a и p_b. Под действием перепада давления и движения одной из пластин создается течение среды, расположенной между пластинами, поле скорости которой и нужно определить.

3. Краевая задача. Из первого векторного уравнения (2.1.1) получаем следующие уравнения для определения однонаправленного плоскопараллельного пластического течения среды

$$0 = -\partial p/\partial x + \partial \tau/\partial z, \quad 0 = -\partial p/\partial y, \quad 0 = -\partial p/\partial z;$$

$$s_{xz} = \tau(z) = \mu v'(z) + \tau_s \operatorname{sign} v'(z), \quad s_{xx} = s_{zz} = 0; \quad v'(z) = dv/dz \neq 0.$$

Отсюда заключаем, что градиент давления является постоянной величиной. Обозначим его так $-\partial p/\partial x = (p_a - p_b)/(b - a) = i$. Пусть $0 \leqslant z_1 \leqslant z \leqslant z_2 \leqslant 2h$ — область ядра, в которой $v'(z) = 0$, а оставшаяся область — область пластичес-

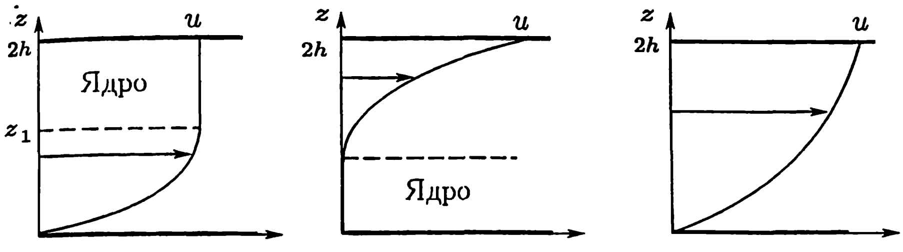


Рис. 3.2. Варианты вязкопластического течения между двумя пластинами

кого течения, в ней $v'(z) \neq 0$. Для расположения ядра возможны три различные ситуации:

1) ядро расположено в области течения $0 < z_1 < z_2 < 2h$, (см. рис. 3.1);
2) ядро примыкает к одной из пластин $z_1 = 0$ или $z_2 = 2h$, рис. 3.2 а) и б);
3) ядра нет, рис. 3.2 в).

Для первой ситуации из системы (2.1.1) получаем следующую краевую задачу:

$$0 \leqslant z < z_1 \cup z_2 < z \leqslant 2h \quad \begin{cases} d\tau/dz = -i, \\ s_{xz} = \tau(z) = \mu v'(z) + \tau_s \operatorname{sign} v'(z), \\ s_{xx} = s_{zz} = 0, \quad v'(z) = dv/dz \neq 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$
$$v(0) = 0, \quad v'(z_1) = v'(z_2) = 0, \quad v(z_1) = v(z_2), \quad v(2h) = u,$$
$$2\tau_s = i(z_2 - z_1).$$

Здесь условия в точках $z = z_1$ и $z = z_2$ вытекают из непрерывности полей скорости и напряжений, последнее условие — это уравнение баланса поверхностных сил, действующих на ядро: силы трения $2\tau_s(b - a)$ и сил давления $(p_a - p_b)(z_2 - z_1)$, рис. 3.3.

Когда ядро примыкает к одной из пластин, то последнему условию не ставится. Достаточно равенства скоростей на поверхности ядра, примыкающей к границе течения: $v(z_2) = v(2h) = u$ или $v(z_1) = v(0) = 0$. Если же ядро отсутствует, то достаточно условий $v(0) = 0$, $v(2h) = u$. В этом случае задачи для поля скорости вязкопластического и вязкого течений тождественны.

Прежде чем дать решение задачи (3.2.1) покажем, что при заданном градиенте давления i и скорости движения пластины u всегда существует единственное поле скорости вязкопластического течения $v(z)$. Это следует из вариационной формулировки задачи.

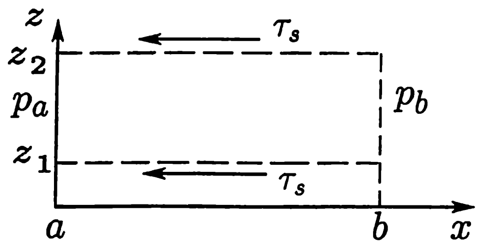


Рис. 3.3. Баланс поверхностных сил, действующих на ядро

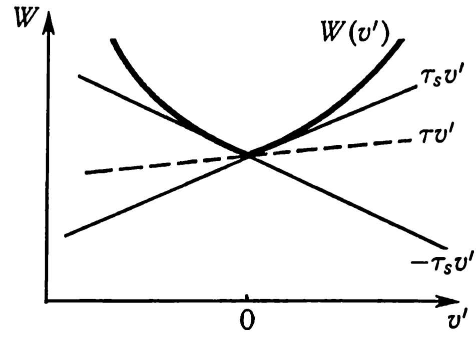


Рис. 3.4. Напряжение сдвига в ядре

4. Вариационная формулировка задачи вязкопластического течения между двумя пластинами. В аргумент функционала $\Im_1$ вариационного принципа 5 в разд. 2.6.3 подставим $v(z)$, а вместо нормального напряжения на границах $x = a$ и $x = b$ давления p_a и p_b, тогда получим следующий функционал:

$$I(v(z)) = \int\limits_0^{2h} \left[W(v'(z)) - iv(z)\right] dz, \quad W(v'(z)) = \frac{1}{2}\mu(v'(z))^2 + \tau_s|v'(z)|.$$

Множество M варьируемых функций $v(z)$ на отрезке $z \in [0, 2h]$ определим так.

Для функции $v(z) \in M$ выполнены условия:

1) непрерывность на всем отрезке $z \in [0, 2h]$;
2) существование второй производной $v''(z)$ в области $v'(z) \neq 0$;
3) $v(0) = 0, \quad v(2h) = u.$

Тогда имеет место следующий вариационный принцип.

Принцип 5а. *Среди всех возможных полей скорости $v(z) \in M$ существует единственная функция, минимизирующая функционал $I(v(z))$. Наименьшее значение функционала достигается на скорости $v(z)$ вязкопластического течения между двумя параллельными пластинами, одна из которых $z = 0$ неподвижна, а вторая $z = 2h$ движется со скоростью u, при заданном градиенте давления $i = (p_a - p_b)/(b - a)$. Напряжение трения τ определяется формулой*

$$\tau(z) = dW(v')/dv'$$

Здесь диссипативный потенциал $W(v')$ — недифференцируем в точке $v' = 0$. Поэтому $\tau(z)$ определено однозначно только в области пластического течения $v' \neq 0$. В области ядра $v' = 0$ производная не определена и может меняться в пределах $|\tau| \leqslant \tau_s$. Это неравенство можно установить, если приближать функцию $W(v')$ в окрестности $v' = 0$ последовательностью гладких функций в пределе совпадающей с ней. Угол наклона касательной dW/dv' сглаженного в нуле диссипативного потенциала меняется между двумя предельными значениями $-\tau_s$ и τ_s (рис. 3.4).

Доказательство. Сначала докажем, что у функционала $I(v)$ существует единственный минимизирующий его элемент $v(z) \in M$. Будем исходить из теоремы существования и единственности минимума выпуклого и ограниченного снизу функционала. Заметим, что для функционалов не дифференцируемых в некоторых точках эта теорема требует особого доказательства, которое приводится в монографиях [51, 52][1].

Докажем выпуклость функционала. Для этого с помощью интегрирования по частям приведем его к виду

$$I(v(z)) = \int\limits_0^{2h} \left[W(v'(z)) - i(2h-z)v'(z)\right] dz.$$

Подынтегральная функция $F(v') = W(v') - i(2h-z)v'$ — выпуклая по v', т. е. для нее выполнено неравенство $F(\frac{1}{2}(v_1' + v_2')) < \frac{1}{2}(F(v_1') + F(v_2'))$. Отсюда следует такое же неравенство и для самого функционала, т. е. его выпуклость.

Ограниченность снизу подынтегральной функции вытекает из неравенства $F(v') = \frac{1}{2}\mu(v' - i(2h-z)/\mu)^2 - i^2(2h-z)^2/(2\mu) + \tau_s|v'| \leqslant -2i^2h^2/\mu$. Следовательно и сам функционал ограничен снизу. Таким образом, по теореме [51, 52] минимизирующий элемент существует и единственен.

В уравнении экстремали $\delta I = 0$ непосредственно определить вариацию δI нельзя, так как подынтегральная функция недифференцируема в точке $v'(z) = 0$. Чтобы обойти эту сложность, нужно разбить отрезок интегрирования $[0, 2h]$ на интервалы, в которых $v'(z) = 0$, и интервалы, в которых $v'(z) \neq 0$. Ограничимся рассмотрением первой ситуации, когда область $v'(z) = 0$ представляет отрезок $[z_1, z_2]$, лежащий строго внутри отрезка $[0, 2h]$. Тогда разобьем отрезок интегрирования $[0, 2h]$ на три интервала: $[0, z_1)$, $[z_1, z_2]$, $(z_2, 2h]$. В области ядра $[z_1, z_2]$ имеем равенства $v'(z) = 0$, $v(z) = v_s$, $W(v') = 0$. Таким образом, функционал представляется суммой интегралов

$$I(v(z)) = \int\limits_0^{z_1} \left[W(v'(z)) - iv(z)\right] dz - iv_s(z_2 - z_1) + \int\limits_{z_2}^{2h} \left[W(v'(z)) - iv(z)\right] dz.$$

Все подынтегральные функции теперь дифференцируемы. Вариация первого

[1]Для определения производной от негладкой функции можно также использовать понятие субдифференцируемости, которое обобщает обычное дифференцирование [96].

интеграла находится так

$$\delta \int\limits_0^{z_1} \left[W(v'(z)) - iv(z)\right] dz = \int\limits_0^{z_1} \left[\tau(z)\delta v' - i\delta v\right] dz + \delta z_1 \left[W(v'(z_1)) - iv(z_1)\right] =$$

(Продолжаем преобразование, учитывая равенства $v(z_1) = v_s$, $\delta v(z_1) = \delta v_s$, $\delta v(0) = 0$ и интегрируя по частям)

$$= \tau(z)\delta v\Big|_0^{z_1} - \int\limits_0^{z_1} \left[\frac{d\tau}{dz} + i\right] \delta v dz + \delta z_1 \left[W(v'(z_1)) - iv_s\right] =$$

$$= \tau(z_1 - 0)\delta v_s - \int\limits_0^{z_1} \left[\frac{d\tau}{dz} + i\right] \delta v dz + \delta z_1 \left[W(v'(z_1)) - iv_s\right],$$

где под $\tau(z_1 - 0)$ понимается предельное значение функции $\tau(z) = dW/dz$, $z \in [0, z_1)$ при стремлении $z \to z_1$.

Аналогично преобразуется вариация интеграла по отрезку $(z_2, 2h]$. С помощью равенств $\delta v(0) = \delta v(2h) = 0$, $\delta v(z_1) = \delta v(z_2) = \delta v_s$ находим вариацию функционала $I(v(z))$

$$\delta I(v(z)) = -\int\limits_0^{z_1} \left[\tfrac{d\tau}{dz} + i\right] \delta v dz - \int\limits_{z_2}^{2h} \left[\tfrac{d\tau}{dz} + i\right] \delta v dz +$$
$$+ W(v'(z_1))\delta z_1 - W(v'(z_2))\delta z_2 + \left[\tau(z_1 - 0) - \tau(z_2 + 0) - i(z_2 - z_1)\right] \delta v_s,$$

$$\tau(z) = dW/dv' = \mu v'(z) + \tau_s \operatorname{sign} v'(z).$$

В силу произвольности функций $\delta v(z)$ при $z \in [0, z_1) \cap (z_2, 2h]$ и чисел δz_1, δz_2, δv_s получаем все уравнения и условия краевой задачи (3.2.1).

Таким образом, минимизирующим элементом функционала $I(v)$ является решение краевой задачи (3.2.1) и доказательство полностью завершено.

3.2.2. Решение краевых задач

1. Сдвиговое безградиентное течение. При отсутствии градиента давления $i = 0$ решение задачи (3.2.1) строится наиболее просто. Напряжение трения в этом случае постоянно $\tau = \tau_s + \mu v/(2h)$, а скорость линейна по координате $v = zu/(2h)$. Ядро отсутствует, а профиль скорости ничем не отличается от сдвигового течения вязкой жидкости (рис. 3.5). Такое течение в гидродинамике часто называется течением Куэтта.

2. Построение общего решения. Приведем построение решения задачи, когда ядро расположено внутри области течения. Решая уравнение (3.2.1) для напряжения с условиями $\tau(z_1) = \tau_s$, $\tau(z_2) = -\tau_s$, получаем

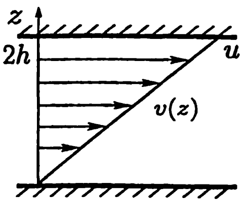


Рис. 3.5. Течение Куэтта

$$\tau = \begin{cases} \tau_s + (z_1 - z)i, & 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ -\tau_s + (z_2 - z)i, & z_2 \leqslant z \leqslant 2h. \end{cases}$$

Отсюда из соотношения Шведова-Бингама получим уравнение для скорости

$$\mu v'(z) = \begin{cases} (z_1 - z)i, & 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ (z_2 - z)i, & z_2 \leqslant z \leqslant 2h. \end{cases}$$

Интегрируем это уравнение с учетом условий $v(0) = 0$, $v(2h) = u$

$$2\mu\, v(z) = \begin{cases} -i\left[(z_1 - z)^2 - z_1^2\right], & 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ -i\left[(z_2 - z)^2 - (2h - z_2)^2\right] + u, & z_2 \leqslant z \leqslant 2h. \end{cases}$$

Неизвестные z_1, z_2 и v_s находятся из системы уравнений $v(z_1) = v(z_2) = v_s$, $i(z_2 - z_1) = 2\tau_s$. Разрешая систему относительно z_1 и z_2, найдем

$$z_1/h = 1 - A + B/(1 - A),$$
$$z_2/h = 1 + A + B/(1 - A),$$
$$A = \tau_s/(hi), \quad B = \mu u/(2h^2 i).$$

Эти формулы можно применять, если выполнены условия $|B| < (1 - A)^2$, $0 < A < 1$, вытекающие из неравенств $0 < z_1/h < z_2/h < 2$.

3. Течение между двумя неподвижными пластинами. Решение этой задачи представлено М.П. Волоровичем и А.М. Гуткиным в работе [17]. В случае неподвижных пластин $B = 0$ и поле скорости симметрично относительно срединной плоскости $z = h$ (рис. 3.6, а). Решение примет вид

$$v(z) = \frac{i}{2\mu}\begin{cases} z(2z_1 - z), & 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ z_1^2, & z_1 \leqslant z \leqslant h, \end{cases}$$

$$z_1 = h(1 - A), \quad A = \tau_s/(hi), \quad i = (p_a - p_b)/(b - a).$$

В интервале $h \leqslant z \leqslant 2h$ поле скорости достраивается по симметрии $v(z) = v(2h - z)$. Формулы имеют место при $A < 1$, а противоположное неравенство $A \geqslant 1$ — условие запирания течения.

Для расхода получим

$$Q = 2\int_0^h v(z)dz = \frac{i}{\mu} z_1^2 (h - z_1/3) = \frac{2ih^3}{3\mu}(1 - A)^2(1 + A/2).$$

При $A = 0$ получим известный из гидродинамики [15, 40] параболический

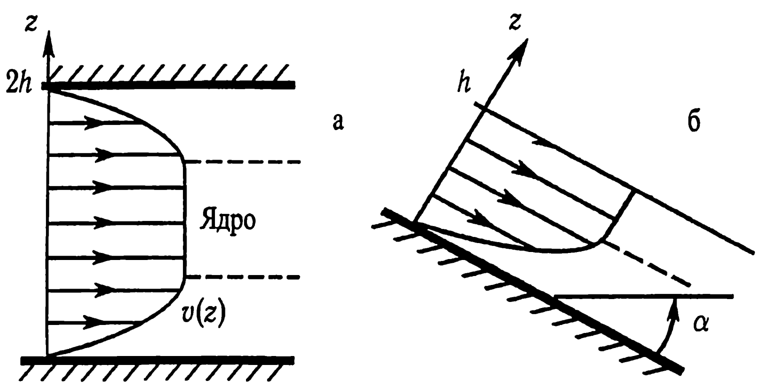


Рис. 3.6. Вязкопластическое течение: а — между двумя неподвижными пластинами, б — стекание с наклонной плоскости

профиль скорости для вязкого течение Пуазейля в плоском слое. При $A \neq 0$ течение называют вязкопластическим течением Пуазейля в плоском слое. Оно отличается от классического вязкого течения тем, что внутри слоя содержится жесткая зона $z_1 \leqslant z \leqslant 2h - z_1$ (ядро). В ней все точки среды движутся с одинаковой скоростью $v_s = iz_1^2/(2\mu)$. Ширина ядра равна $2hA$. С увеличением A размер жесткой зоны увеличивается. При $A = 1$ ядро охватывает всю область течения, скорость среды равна нулю и, как говорят, наступает стопор.

4. Движение тяжелого слоя вдоль наклонной плоскости. Полученные формулы можно интерпретировать как стекание тяжелого вязкопластического слоя толщины h с плоскости, наклоненной к горизонту под углом α (рис. 3.6, б). В этом случае следует положить $i = \rho g \sin\alpha$. На свободной границе слоя касательное напряжение равно нулю. Уравнение $z_1 = h(1 - A)$ можно переписать так $\rho(h - z_1)g\sin\alpha = \tau_s$. Оно выражает баланс сил тяжести и трения действующих на границе ядра. Из условия запирания можно найти критический угол наклона $\sin\alpha_* = \tau_s/(\rho h g)$. Среда стекает с наклонной плоскости при $\alpha > \alpha_*$, иначе она покоится. Расход в слое толщиной h будет равен половине расхода между двумя пластинами, находящимися на расстоянии $2h$, т. е.

$$Q = = \frac{\rho h^3 g \sin\alpha}{3\mu}(1 - A)^2(1 + A/2).$$

Рассмотренная задача моделирует поведение геофизических структур, находящихся в гравитационном поле на наклонном ложе. Примерами таких структур могут служить снежнопылевые лавины из мягкого снега [95], податливые участки верхних слоёв земной коры [77, 101], соляные породы в предельном состоянии [92], последождевые оползни почвы [79], ледниковые образования [80], [21]. Для последних особенно характерно наличие массивной недеформируемой корки, занимающей до 95 % толщины ледника, и тонкой сдвиговой зоны вблизи основания. На вязкопластическую природу льда обращено внимание в монографии [81], с. 166: «Поскольку у льда не обнаружено предела длительной прочности, введём понятие "практически предельного состояния", при котором лёд настолько незначительно деформируется во времени, что дальнейшую деформацию можно считать отсутствующей ... можно определить длительное сопротивление, что имеет большое значение при характеристике несущей способности ледяного тела во времени». Это длительное сопротивление фактически является пределом текучести при сдвиге. Экспериментально найденные значения материальных функций для широкого класса льдов и снежных потоков лавинного типа приведены в обзоре [55]. Нетрудно показать, что при условии отсутствия стопора $0 \leqslant A < 1$ справедливо неравенство $Q/Q_0 = (1-A)^2(1+A/2) < 1$, где Q и Q_0 — расходы для вязкопластического и вязкого течений соответственно Это говорит об уменьшении расхода Q при появлении предела текучести по сравнению с соответствующей величиной Q_0 для вязкого течения.

5. Течение между неподвижными пластинами при заданном расходе. В дальнейшем понадобится решение задачи вычисления скорости и перепада давления при заданном расходе. Это решение приводится в работе [60]. Следуя [60], вводим безразмерные расход a и координату границы ядра Z_1

$$a = \frac{\mu|Q|}{\tau_s h^2}, \quad Z_1 = \frac{z_1}{h} = 1 - A. \tag{3.2.2}$$

Тогда с помощью решения, приведенного в п. 3, безразмерный градиент давления выразится через Z_1 как

$$\frac{1}{A} = \frac{hi}{\tau_s} = \frac{1}{1 - Z_1}, \tag{3.2.3}$$

а безразмерный расход как

$$a = \frac{Z_1^2(1 - Z_1/3)}{1 - Z_1}. \tag{3.2.4}$$

Скорость выражается через безразмерное распределение скорости $U(Z, a)$ с единичным расходом

$$\begin{gathered} U(Z,a) = \frac{1}{2a(1 - Z_1(a))} \begin{cases} Z(2Z_1 - Z), & 0 \leqslant Z \leqslant Z_1, \\ Z_1^2, & Z_1 \leqslant Z \leqslant 1, \end{cases} \\ Z = \frac{z}{h}, \quad v = (Q/h)U(Z,a), \quad 2\int\limits_0^1 U(Z,a)dZ = 1. \end{gathered} \tag{3.2.5}$$

Зависимость $Z_1(a)$ находится из разрешения кубического уравнения (3.2.4). Его корень можно вычислить по известной формуле Тарталья-Кардано. Однако, полученные формулы громоздки и неудобны. Более эффективно представить корень уравнения рядом Лагранжа (метод Лагранжа описан ниже)

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = 1 - 3\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}},\\
&\frac{1}{1-Z_1} = \frac{3}{2}(a+1) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(a+1)^{3m+2}},
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

$$
b_0 = \frac{2}{9},\ b_1 = \frac{2^4}{3^5}, \ldots, b_m = \frac{2^{2m+1}(3m+1)!}{3^{3m+2}(2m+1)!(m+1)!}.
$$

Ряды (3.2.6) сходятся при всех $a \geqslant 0$. Для вычислений функций Z_1 и $1-Z_1$ при $0 \leqslant a \leqslant a_0$ удобнее пользоваться разложениями

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = a^{1/2} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2 + \\
&\frac{1}{1-Z_1} = 1 + a^{1/2} + \frac{2}{3}a + \frac{5}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2 +
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

С погрешностью менее 0, 0015 корень можно вычислять так

$$
Z_1(a) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{3(a+1)} - \dfrac{8}{81(a+1)^4} - \dfrac{32}{3^6(a+1)^7}, & a > 0.33;\\[2mm] a^{1/2} - \dfrac{1}{3}a - \dfrac{1}{18}a^{3/2} + \dfrac{1}{27}a^2, & a \leqslant 0.33. \end{cases}
$$

Градиент давления вычисляется с помощью подстановки рядов (3.2.6) и (3.2.7) в (3.2.3).

6. О корнях уравнения (3.2.4). Функция $a(Z_1)$, заданная формулой (3.2.4), монотонно возрастает на интервале $[0, 1)$ и принимает любое неотрицательное значение ровно один раз. Для нее существует обратная функция $Z_1(a) \in [0, 1)$ и определяет единственный корень уравнения (3.2.4) из интервала $[0, 1)$ при любом $a \geqslant 0$.

Для вывода рядов (3.2.6), соответствующих корню уравнения (3.2.4) из интервала $Z_1(a) \in [0, 1)$ преобразуем уравнение (3.2.4) к виду

$$
3(a+1) = \frac{(1-Z_1)^3 + 2}{1-Z_1}
\tag{3.2.8}
$$

и воспользуемся теоремой Лагранжа [90] об обращении рядов.

Теорема Лагранжа. *Пусть имеется уравнение относительно y вида*

$$
y = A + x\Phi(y),
\tag{3.2.9}
$$

где x — переменная, A — постоянная величина, $\Phi(y)$ — функция аналитическая в точке $y = A$. Тогда существует окрестность $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, в которой корень *уравнения (3.2.9) представляется рядом*

$$y = A + x\Phi(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dA^{n-1}} [\Phi^n(A)]. \tag{3.2.10}$$

Чтобы получить ряды (3.2.6) достаточно преобразовать уравнение (3.2.8) к виду (3.2.9), а затем вычислить коэффициенты, входящие в ряд Лагранжа (3.2.10). С помощью замен

$$x = \frac{1}{3(a+1)}, \quad y = 1 - Z_1, \quad \Phi(y) = y^3 + 2, \quad A = 0 \tag{3.2.11}$$

уравнение (3.2.8) приводится к виду (3.2.9).

Производные от $\Phi^n(A)$ в (3.2.9) в точке $A = 0$ выражаются через биномиальные коэффициенты C_{3m+1}^m и, подставляя эти выражения в ряд Лагранжа (3.2.10), получим первый ряд (3.2.6).

Вторая замена переменных уравнения (3.2.8)

$$x = \frac{-4}{27(a+1)^3}, \quad y = \frac{2}{3(a+1)(1-Z_1)}, \quad \Phi(y) = y^{-2}, \quad A = 1$$

также приводит его к виду (3.2.9). Подставляя эти выражения в ряд Лагранжа (3.2.9) и вычисляя производные функции $\Phi^n(A) = A^{-2n}$ в точке $A = 1$, получим второй ряд (3.2.6).

Покажем, как строить наилучшие приближения с помощью частичных сумм рядов (3.2.6) и разложений (3.2.7) на примере четырехчленных разложений

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 - \frac{2}{3(a+1)} - \frac{8}{81(a+1)^4} - \frac{32}{3^6(a+1)^7}, && a > a_0; \\ Z_1 &= a^{1/2} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2, && a < a_0. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Задача заключается в определении граничной точки a_0, при которой формулы (3.2.12) определяют функцию $Z_1(a)$ с наименьшей погрешностью. Погрешность приближения (3.2.12) при $a > a_0$ и при $a < a_0$ оцениваются величинами соответственно r_+ и r_-

$$r_+ \approx \frac{-2^9}{3^9(a+1)^{10}}, \quad r_- \approx \frac{5}{216} a^{5/2}$$

Наилучшее приближение и наибольшая погрешность находятся из уравнения $|r_+(a)| = |r_-(a)|$. Откуда получим $a_0 = 0{,}33$; наибольшая ошибка $|r_+| = |r_-| = 0{,}0015$.

Аналогично можно построить наилучшее трехчленное приближение. Для него получим наибольшую ошибку $|r_+| = |r_-| = 0{,}005$ при $a_0 = 0{,}366$.

Точно так же находим наилучшие двух-, трех- и четырехчленные приближения для функции $1/(1 - Z_1)$. Результаты приведены ниже

Таблица 3.1

	Z_1		$(1-Z_1)^{-1}$	
n	a_0	$\lvert r_+\rvert = \lvert r_-\rvert$	a_0	$\lvert r_+\rvert = \lvert r_-\rvert$
2	0,50	0,0200	0,070	0,0460
3	0,37	0,0050	0,130	0,0130
4	0,33	0,0015	0,237	0,0021

В верхней строке указан вид функции. В первой колонке указано число слагаемых в частичных суммах рядов (3.2.6) и разложений (3.2.7). В последующих колонках указаны значения a_0 и наибольшей ошибки $r_\pm$. Учет каждого последующего члена уменьшает погрешность примерно в четыре раза.

3.3. Течения с осевой симметрией

Рассмотрим однонаправленные течения с осевой симметрией. Такие течения возникают в круглой трубе или в кольцевом зазоре между двумя соосными трубами. Для вывода уравнений и краевых условий следует повторить все рассуждения, приведенные для течения между пластинами. Выберем ось z по направлению скорости. Тогда поле скорости однонаправленного осесимметричного движения будет иметь одну компоненту $\vec{v}(v,0,0)$. Компонента скорости v зависит от r и z и не зависит от угла ϕ. Из уравнения неразрывности $\operatorname{div}\vec{v} = \partial v/\partial z = 0$ заключаем, что $v(r)$ зависит только от цилиндрической координаты r.

У тензора скоростей деформаций отличны от нуля только компоненты $v_{rz} = v_{zr}$ и реологическое соотношение определяется линейной связью

$$s_{rz} = \mu dv/dr + \tau_s \operatorname{sign}(dv/dr), \quad |s_{rz}| > \tau_s, \quad s_{rr} = s_{zz} = 0. \tag{3.3.1}$$

Система уравнений осесимметричного движения (2.2.1) в этом случае имеет вид

$$0 = \partial p/\partial r, \quad 0 = -\partial p/\partial z + \partial s_{rz}/\partial r + s_{rz}/r,$$
$$s_{rz} = \mu dv/dr + \tau_s \operatorname{sign}(dv/dr), \quad s_{rr} = s_{zz} = 0,$$

который показывает, что градиент давления также постоянная величина. Обозначим его как и для пластин $i = -(\partial p/\partial z)$. Тогда уравнение движения будет иметь вид

$$d(r\tau(r))/dr = -ir, \tag{3.3.2}$$

где $\tau(r) = s_{rz}$ находится из закона Шведова-Бингама (3.3.1).

Интеграл уравнения (3.3.2)

$$2\pi r\tau(r) - 2\pi r'\tau(r') = i\pi(r^2 - (r')^2) \tag{3.3.3}$$

представляет собой уравнение баланса поверхностных сил, действующих на кольцевой слой между цилиндрами радиуса r и r'

3.3.1. Течение в кольцевом зазоре

1. Постановка задачи. Рассматриваем течение в кольцевом зазоре между двумя круглыми трубами радиуса $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Внутренняя труба покоится, а внешняя движется со скоростью u. В сечениях $x = a$ и $x = b$ давление постоянно и равно соответственно p_a и p_b. Под действием перепада давления внутри трубы и движения внешней трубы относительно внутренней создается течение среды, поле скорости которой и нужно определить. По постановке и методу решения эта задача аналогична рассмотренной выше задаче о течении вязкопластической среды между двумя пластинами.

2. Краевая задача. Также как и для течения между двумя пластинами для расположения ядра возможны три ситуации:

1) ядро расположено внутри области течения;

2) ядро примыкает к одной из труб;

3) ядра нет.

Для первой ситуации с помощью уравнений (3.3.1) и (3.3.2) получаем следующую краевую задачу

$$
\begin{aligned}
&r \in [R_1, r_1) \cup (r_2, R_2] \quad \begin{cases} d(r\tau)/dr = -ir, \\ \tau(r) = \mu v'(r) + \tau_s \operatorname{sign} v'(r), \quad v'(r) \neq 0, \end{cases} \\
&v(R_1) = 0, \quad v(R_2) = u, \\
&v'(r_1) = v'(r_2) = 0, \quad v(r_1) = v(r_2), \quad \tau(r_1) = \tau_s, \quad \tau(r_2) = -\tau_s.
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

Здесь принимается условие прилипания на границах трубы $r = R_1$ и $r = R_2$. На границах ядра $r = r_1$ и $r = r_2$ условия вытекают из непрерывности скорости и напряжения.

Аналогично можно поставить краевые задачи для двух других случаев расположения ядра. Во всех случаях будет существовать единственное решение задачи.

3. Вариационная формулировка задачи вязкопластического течения в кольцевом зазоре. Аналогично задаче течения среды между пластинами решение краевой задачи (3.3.4) минимизирует функционал

$$
I(v(z)) = \int_{R_1}^{R_2} \left[W(v'(r)) - iv(r)\right] r dr, \quad W(v'(r)) = \frac{1}{2}\mu(v'(r))^2 + \tau_s|v'(r)|.
$$

Множество M варьируемых функций $v(r)$ на отрезке $r \in [0, R]$ определяется аналогично.

Для функции $v(r) \in M$ выполнены условия:

1) непрерывность на всем отрезке $r \in [R_1, R_2]$;
2) существование второй производной $v''(r)$ в области $v'(r) \neq 0$;
3) $v(R_1) = 0$, $v(R_2) = u$.

Функционал выпуклый и ограничен снизу. Поэтому у него существует единственный минимизирующий элемент.

Покажем, как получить решение краевых задач в двух наиболее важных случаях: в круглой трубе и в кольцевом зазоре между соосно расположенными трубами.

3.3.2. Течение в круглой трубе

1. Постановка задачи. Рассматриваем течение в круглой трубе радиуса R. В сечениях $x = a$ и $x = b$ давление постоянно и равно соответственно p_a и p_b. Под действием перепада давления создается течение среды, поле скорости которой и нужно определить. Аналогичная задача для вязкой жидкости носит название задача Пуазейля. Для вязкопластической среды ее называют задачей Пуазейля вязкопластического течения.

2. Краевая задача. Для течения внутри трубы всегда будет существовать ядро $0 \leqslant r < r_0 < R$ внутри области течения. Баланс сил трения на цилиндрической поверхности радиуса r и сил давлений в сечениях $z = a$ и $z = b$ выражается уравнением $2\pi r\tau(r) = i\pi r^2$. Его можно также получить, положив $r' = 0$ в уравнение (3.3.3).

Краевая задача формулируется так

$$r_0 < r \leqslant R \quad \begin{cases} \tau(r) = -\frac{1}{2} i r, \\ \tau(r) = \mu v'(r) + \tau_s \operatorname{sign} v'(r), \quad v'(r) \neq 0, \end{cases} \tag{3.3.5}$$

$$v(R) = 0, \quad v'(r_0) = 0, \quad \tau(r_0) = -\tau_s.$$

Здесь принимается условие прилипания на границе трубы $r = R$. Условия при $r = r_0$ вытекают из непрерывности $v(r), v'(r)$ и $\tau(r)$.

3. Построение решения. Решение задачи о вязкопластическом течении в трубе круглого сечения получено Букингемом (Bukingham 1921). Приведем построение решения задачи. Из последнего условия на границе ядра находим границу ядра $r_0 = (2/i)\tau_s$.

Из соотношения Шведова-Бингама получим уравнение для скорости

$$\mu v'(r) = \tau(r) - \tau(r_0) = i(r_0 - r)/2.$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия $v(R) = 0$, получим

$$v(r) = \frac{i}{2}\begin{cases}(R-r_0)^2 - (r-r_0)^2, & r_0 < r \leqslant R,\\ (R-r_0)^2, & 0 \leqslant r \leqslant r_0,\end{cases}$$

$r_0 = 2\tau_s/i.$

Расход вычисляется с помощью интегрирования по сечению трубы. Вычисление интеграла можно упростить [46]

$$Q = \int\limits_0^R v(r)d(\pi r^2) = (\pi r^2 v(r))\Big|_0^R - \int\limits_0^R \pi r^2 \frac{dv}{dr}dr.$$

В ядре $dv/dr = 0$, на границе $v(R) = 0$, поэтому

$$Q = -\int\limits_{r_0}^R \pi v'(r) r^2 dr.$$

Перейдем от независимой переменной r к переменной τ с помощью замен $v'(r) = (\tau_s + \tau)/\mu$ и $r^2 dr = -(2/i)^3\tau^2 d\tau$. Тогда

$$Q = \frac{\pi}{\mu}\left(\frac{2}{i}\right)^3 \int\limits_{\tau(r_0)}^{\tau(R)} (\tau - \tau(r_0))\tau^2 d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{\mu}\left(\frac{2}{i}\right)^3 \left(\frac{\tau(R)^4 - \tau(r_0)^4}{4} - \tau(r_0)\frac{\tau(R)^3 - \tau(r_0)^3}{3}\right)$$

Подставляем $\tau(R) = -iR/2$, $\quad \tau(r_0) = -ir_0/2$, получим

$$Q = \frac{\pi i}{2\mu}\left[\frac{r_0^4}{12} - \frac{r_0 R^3}{3} + \frac{R^4}{4}\right]$$

Окончательное выражение расхода удобно записать так:

$$Q = \frac{\pi i R^4}{8\mu}\left[1 - \frac{4}{3}\frac{r_0}{R} + \frac{1}{3}\left(\frac{r_0}{R}\right)^4\right], \quad r_0 = \frac{2\tau_s}{i}.$$

Течение запирается при условии $r_0 = 2\tau_s/i \geqslant R$.

3.3.3. Сдвиговое безградиентное течение

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение в кольцевом зазоре между двумя круглыми трубами радиуса $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Внутренняя труба покоится, а внешняя движется со скоростью u. Давление в сечениях $x = a$ и $x = b$ одинаково и градиент давления равен нулю $i = 0$. Под действием движения внешней трубы относительно внутренней создается течение среды, поле скорости которой и нужно определить. Эта задача аналогична задаче о вязкопластическом течении

Куэтта между двумя пластинами. Однако здесь возможно существование ядра, примыкающего к внешнему цилиндру.

2. Напряжение и поле скорости. При $i = 0$ уравнение (3.3.2) для τ легко интегрируется $\tau = C/r$. Пусть для определенности $C > 0$. Тогда условием того, что жесткой зоны нет, является неравенство $C/R_2 \geqslant \tau_s$. Скорость находится интегрированием закона Шведова-Бингама (3.3.1) с условием $v(R_1) = 0$ и учетом того, что $\operatorname{sign} v'(r) = 1$

$$v = \frac{C}{\mu}\ln\frac{r}{R_1} - \frac{\tau_s}{\mu}(r - R_1).$$

Постоянная C определяется из условия $v(R_2) = u$, откуда

$$C = \frac{\tau_s(R_2 - R_1) + \mu u}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Жесткого ядра не будет, если $C > R_2\tau_s$. В безразмерной форме неравенство можно записать так

$$\frac{\mu u}{R_1\tau_s} \geqslant \frac{R_2}{R_1}\left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - 1\right) + 1.$$

В противном случае будет существовать жесткая зона в области, примыкающей к внешнему цилиндру $r_1 \leqslant r \leqslant R_2$. Из уравнений $\tau(r_1) = \tau_s$ и $v(r_1) = u$ находим постоянную $C = r_1\tau_s$ и получаем трансцендентное уравнение для r_1/R_1

$$\left(\frac{r_1}{R_1}\right)\left(\ln\frac{r_1}{R_1} - 1\right) + 1 = \xi = \frac{\mu u}{R_1\tau_s}.$$

Отсюда можно определить зависимость $r_1/R_1 = f_0(\xi)$. График функции $f_0(\xi)$ изображен на рис. 3.7 штриховой линией. Его легко построить в осях ξ, f_0 с помощью зависимости $\xi = f_0(\ln f_0 - 1) + 1$. Через функцию f_0 можно выразить постоянную $C = R_1\tau_s f(\xi)$ и найти распределение скорости.

Результаты можно записать в следующем окончательном виде.

1. При ограниченной скорости относительного движения цилиндров

$$\frac{\mu u}{R_1\tau_s} < \left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\ln\frac{R_2}{R_1} - 1\right) + 1 \quad \text{или} \quad f_0\left(\frac{\mu u}{R_1\tau_s}\right) \leqslant \frac{R_2}{R_1}$$

существует ядро, граница которого r_1 определяется уравнением

$$\frac{r_1}{R_1} = f_0\left(\frac{\mu u}{R_1\tau_s}\right)$$

В области пластического течения $R_1 \leqslant r < r_1$

$$\frac{v}{u} = \frac{R_1\tau_s}{\mu u}\left[f_0\left(\frac{\mu u}{R_1\tau_s}\right)\ln\frac{r}{R_1} - \frac{r}{R_1} + 1\right], \quad \tau = \tau_s\frac{R_1}{r}f\left(\frac{\mu u}{R_1\tau_s}\right)$$

В области ядра $r_1 \leqslant r \leqslant R_1$

$$v/u = 1, \quad |\tau| \leqslant \tau_s.$$

2. При выполнении противоположного неравенства

$$\frac{\mu u}{R_1 \tau_s} > \left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\ln\frac{R_2}{R_1} - 1\right) + 1 \quad \text{или} \quad f_0\left(\frac{\mu u}{R_1 \tau_s}\right) > \frac{R_2}{R_1}$$

ядра нет. Поле скорости, также как и напряжение, в области $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ выражаются едиными аналитическими выражениями,

$$v = \frac{\tau_s R_1}{\mu}\left[\frac{R_2 - R_1}{\ln(R_2/R_1)} + R_1 - r\right] + \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad \tau = \frac{\tau_s(R_2 - R_1) + \mu u}{r \ln(R_2/R_1)}.$$

3. Движение цилиндра вдоль своей оси в безграничной вязкопластической среде. В пределе при $R_2 \to \infty$ с помощью приведенных формул можно решить следующую задачу. В безграничной вязкопластической среде, покоящейся на бесконечности, движется бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса R со скоростью $-u$. Найти поле скорости и силу сопротивления, действующую на цилиндр. Если цилиндрическую систему координат связать с цилиндром, то возникающее в среде поле скорости можно определить по приведенной выше формуле в области $R_1 = R \leqslant r < r_1$, где граница жесткой зоны определяется по формуле $r_1 = Rf(\xi)$. Сила сопротивления, приходящаяся на единицу длины цилиндра, определяется так $F = \tau(R)2\pi R = 2\pi R\tau_s f_0(\frac{\mu u}{R\tau_s})$.

3.3.4. Течение Куэтта-Тейлора

Вязкопластическими течениями Куэтта-Тейлора будем называть течения между двумя соосными круговыми цилиндрами, вращающимися с разными угловыми скоростями. Массовых сил нет. Решение этой задачи построено Рейнером и Ривлиным (Reiner M., Riwlin 1927) [78].

1. Течения с круговыми линиями тока. Течениями с круговыми линиями тока будем называть плоскопараллельные течения, у которых поле скорости в полярных координатах r,ϕ имеет одну компоненту $v_\phi = v(r,\phi)$, а вторая равна нулю $v_r = 0$. Частицы среды в таком течении движутся по концентрическим окружностям. Из уравнения неразрывности (см. разд. (2.2.2)) для таких движений следует $\partial v/\partial \phi = 0$. Таким образом, поле скорости определяется функцией $v(r)$ одной переменной.

У тензора скоростей деформаций отличны от нуля только компонента $v_{r\phi}$. Ее удобно выразить через угловую скорость $\omega(r) = v/r$

$$v_{r\phi} = \frac{1}{2} r\omega'(r), \quad \omega'(r) = d\omega/dr.$$

Реологическое соотношение Шведова-Бингама определяется линейной связью

$$s_{r\phi} = \mu r\omega'(r) + \tau_s \operatorname{sign}\omega'(r), \quad |\omega'(r)| \neq 0,$$

$$|s_{r\phi}| \leqslant \tau_s \qquad |\omega'(r)| = 0.$$

Выделим мысленно цилиндрическую поверхность радиуса r и высоты h. На элемент этой поверхности с углом $d\phi$ действует сила трения $s_{r\phi}hrd\phi$ и момент этой силы $dM = rs_{r\phi}hrd\phi$. Интегрируя dM по углу, вычислим суммарный момент силы, приложенный к жидкой цилиндрической поверхности радиуса r

$$M = 2\pi hm, \quad m(r) = r^2 s_{r\phi}.$$

Запишем систему уравнений плоскопараллельного движения в полярной системе координат (см.разд. (2.2.2)). Ее удобно выразить через функции $\omega(r)$ и $m(r)$

$$\begin{gathered} m(r) = \mu r^3\omega'(r) + r^2\tau_s \operatorname{sign}\omega'(r), \\ -\rho\omega^2 r = -dp/dr, \quad dm/dr = 0, \quad \omega'(r) \neq 0. \end{gathered} \tag{3.3.6}$$

Отсюда видно, что m и момент M не зависят от r. Это же следует из уравнения изменения момента количества движения цилиндрического слоя $(r, r+dr)$. Действительно, момент количества движения не меняется со временем и значит $M(r+dr) - M(r) = M'(r)dr = 0$.

2. Постановка задачи. Течениями с круговыми линиями тока можно описать следующую задачу. Пусть вязкопластическая среда помещена в кольцевой зазор между двумя соосными круговыми цилиндрами радиусов R_1 и R_2. Внутренний цилиндр радиуса R_1 вращается с угловой скоростью ω_1, а внешний — с угловой скоростью ω_2. В области между цилиндрами $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ устанавливается течение среды. Нужно найти поле скорости $v(r)$, давление и моменты сил, действующие на цилиндры. По постановке и методу решения эта задача аналогична рассмотренной выше задаче о продольном течении вязкопластической среды в кольцевом зазоре между цилиндрами.

3. Краевая задача. Также как и для продольного течения Куэтта, между двумя цилиндрами возможны две ситуации.

1. Образуется ядро $r_1 < r \leqslant R_2$, примыкающее к внешнему цилиндру. Из системы уравнений (3.3.6) в этом случае получим следующую краевую задачу для определения функции $\omega(r)$, и числовых значений r_1 и m

$$\begin{gathered} m = r_1^2\tau_s \operatorname{sign}(\omega_2 - \omega_1), \quad \omega'(r) = \left(\frac{r_1^2\tau_s}{\mu r^3} - \frac{\tau_s}{\mu r}\right) \operatorname{sign}(\omega_2 - \omega_1), \\ R_1 \leqslant r < r_1, \; \omega(R_1) = \omega_1, \quad \omega(r_1) = \omega_2. \end{gathered} \tag{3.3.7}$$

2. Ядра нет. Краевая задача такова

$$\begin{aligned} &\omega'(r) = \left(\frac{|m|}{\mu r^3} - \frac{\tau_s}{\mu r}\right) \operatorname{sign}(\omega_2 - \omega_1), \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \\ &\omega(R_1) = \omega_1, \quad \omega(R_2) = \omega_2. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

В обоих случаях принимаются условия прилипания на твердых границах $r = R_1$ и $r = R_2$. Этот случай реализуется, если найденное значение r_1 не будет превосходить R_2. В противном случае пластическое течение охватывает всю область между цилиндрами. В краевой задаче нужно два последних условия заменить на одно $\omega(R_2) = \omega_2$.

4. Решение. 1. Приведем решение первой краевой задачи (3.3.7), когда ядро примыкает к внешнему цилиндру. Находим решение уравнения, удовлетворяющее первому условию $\omega(R_1) = \omega_1$,

$$\omega(r) = \frac{\tau_s}{2\mu}\left(\frac{r_1^2}{R_1^2} - \frac{r_1^2}{r^2} - \ln\frac{r_1^2}{R_1^2}\right) \operatorname{sign}(\omega_2 - \omega_1) + \omega_1.$$

Из второго условия $\omega(r_1) = \omega_2$ получаем уравнение для границы ядра r_1 и находим m

$$\frac{2|\omega_2 - \omega_1|\mu}{\tau_s} = \xi = \frac{r_1^2}{R_1^2} - 1 - \ln\frac{r_1^2}{R_1^2},$$

$$m = r_1^2 \tau_s \operatorname{sign}(\omega_2 - \omega_1).$$

Полученная функциональная зависимость $\xi = \xi(r_1^2/R_1^2)$ монотонная и имеет обратную функцию $r_1^2/R_1^2 = |m|/(\tau_s R_1^2) = f(\xi)$. График ее в осях ξ, f легко построить с помощью зависимости $\xi = f - 1 - \ln f$ (на рис. 3.7 сплошная линия).

Функция $f(\xi)$ определяет безразмерную границу ядра как функцию безразмерной разности угловых скоростей ξ. Приведенное решение с ядром примыка-

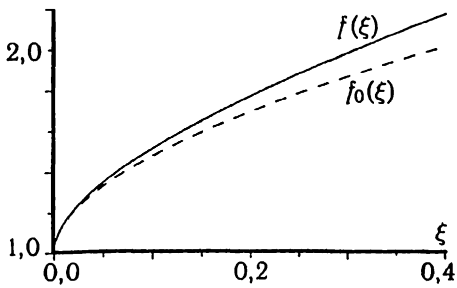


Рис. 3.7. Графики функций $f(\xi)$ и $f_0(\xi)$

ющим к внешнему цилиндру реализуется при достаточно малой относительной угловой скорости $\xi < \xi_* = R_2^2/R_1^2 - 1 - \ln(R_2^2/R_1^2)$.

2. В противном случае $\xi \geqslant \xi_*$ пластическое течение охватывает всю область течения. Распределение угловой скорости и m находится из решения краевой задачи (3.3.8)

$$\omega(r) = \frac{m}{2\mu}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{\tau_s}{2\mu}\ln\frac{r^2}{R_1^2}\operatorname{sign}(\omega_2 - \omega_1) + \omega_1,$$

$$\frac{m}{\mu}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) = \left(2|\omega_2 - \omega_1| + \frac{\tau_s}{\mu}\ln\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\operatorname{sign}(\omega_2 - \omega_1).$$

Через m выражается и момент силы $M = 2\pi h m$.

В завершение приведем зависимость безразмерного момента силы $\tilde{M} = |M|/(2\pi h \tau_s R_1^2)$ от безразмерной угловой скорости $\xi = 2|\omega_2 - \omega_1|\mu/\tau_s$

$$\tilde{M} = \begin{cases} f(\xi), & \xi \leqslant \xi_*, \\ \dfrac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\xi + \ln\left(\dfrac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right), & \xi \geqslant \xi_*. \end{cases}$$

Эту зависимость проще воспроизводить в виде обратной функции $\xi(\tilde{M})$

$$\xi = \begin{cases} \tilde{M} - 1 - \ln\tilde{M}, & \tilde{M} < R_2^2/R_1^2, \\ (1 - R_1^2/R_2^2)\tilde{M} - \ln(R_2^2/R_1^2), & \tilde{M} \geqslant R_2^2/R_1^2. \end{cases}$$

На рис. 3.8 приведена зависимость $\tilde{M}(\xi)$ при $R_2^2/R_1^2 = 2$. При изменении ξ от нуля до бесконечности момент силы возрастает от порогового значения $\tilde{M} = 1$ до бесконечности. При $\tilde{M} \geqslant R_2^2/R_1^2$ момент силы линейно зависит от ξ.

5. Ротационный вискозиметр. На полученной формуле для момента силы основан способ измерения коэффициентов μ и τ_s. Ротационный вискозиметр Волоровича устроен следующим образом [7]. Корпус вискозиметра выполнен в виде осесимметричного стакана с расположенным внутри него соосно осесимметричным ротором. Между стаканом и ротором имеется зазор. Ротор имеет возможность вращения вокруг оси симметрии. Радиус цилиндрической части ротора R_1, а цилиндрической части полости стакана R_2. Высота погружаемой в среду рабочей цилиндрической части ротора h. При вращении ротора с достаточно большой угловой скоростью ω

$$2|\omega|\mu/\tau_s > R_2^2/R_1^2 - 1 - \ln(R_2^2/R_1^2)$$

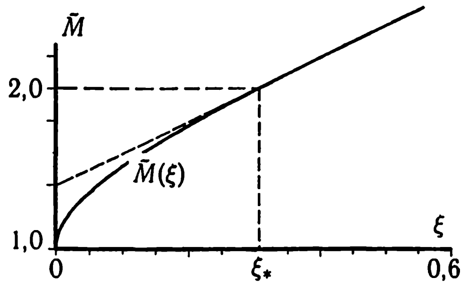


Рис. 3.8. Безразмерный момент силы в зависимости от безразмерной угловой скорости

пластическое течение охватывает все пространство между цилиндрами. Тогда на внутренний цилиндр действует момент силы, линейно зависящий от угловой скорости ω

$$M = A\omega + B,$$

$$A = 4\pi\mu h \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

$$B = 2\pi\tau_s h \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

По результатам эксперимента строится график зависимости $M(\omega)$ и аппроксимируется прямой. Тогда тангенс угла наклона будет определять A, а отсеченный отрезок на оси ординат — B. Вычислив A, находим по приведенной для него формуле коэффициент μ, а вычислив B, находим τ_s.

Глава 4

ТОЧНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

4.1. О методах получения точных решений

Также как и в стационарном случае (см. разд. 3.1)) подбирается система координат x_1, x_2, x_3, в которой реологическое соотношение имеет вид одномерного закона Шведова-Бингама. В результате уравнения движения (2.1.1) будут линейными. Однако условия на границе ядра останутся нелинейными, что является основным препятствием получения точного решения в нестационарном случае. Краевые условия должны выводиться из уравнений движения и требования непрерывности скорости и напряжений на границе ядра.

Для плоскопараллельного течения между двумя параллельными пластинами одно точное автомодельное решение приведено в монографии [58]. Градиент давления подбирается в виде $C/\sqrt{t}$, толщина ядра примыкающего к одной из пластин, меняется пропорционально $\sqrt{t}$. Скорости движения пластин подбираются равными значениям скорости потока на них.

В [61, 62, 100] получены более общие серии многопараметрических точных решений, в которых скорости движения пластин задаются и, в частности, могут быть неподвижными. Эти решения излагаются в следующем разделе.

4.2. Течения между двумя параллельными пластинами

4.2.1. Формулировка краевой задачи

1. Однонаправленные плоскопараллельные движения. Будем предполагать, что вектор скорости во всех точках пространства имеет одно направление. Такое движение называется однонаправленным. Выберем ось x по направлению скорости. Тогда поле скорости будет иметь одну компоненту $\vec{v}(v, 0, 0)$. Компонента скорости для плоскопараллельного движения не зависит от одной из декартовых координат y. Из уравнения неразрывности $\operatorname{div}\vec{v} = \partial v/\partial x = 0$ заключаем, что $v(t, z)$ — функция только двух аргументов. Тензор скоростей деформаций имеет только одну компоненту $v_{xz} = \frac{1}{2}\partial v/\partial z \neq 0$. Как выше отмечалось в этом случае девиатор напряжения имеет тоже одну компоненту $s_{xz} = \tau$, которая связана с v_{xz} линейным соотношением Шведова-Бингама.

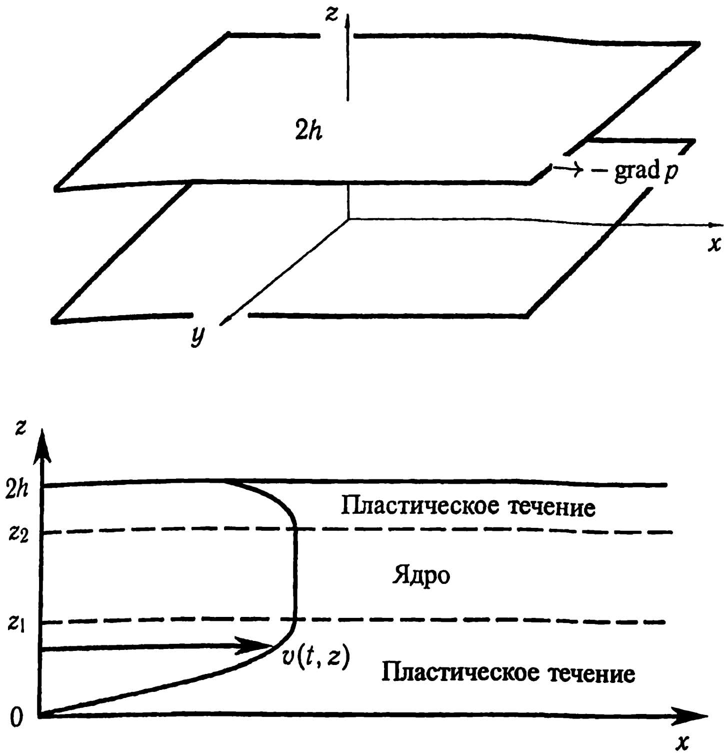


Рис. 4.1. Схема течения между двумя пластинами

2. Ускорение ядра. Однонаправленные плоскопараллельные движения можно применить для решения краевой задачи о нестационарном течении в области $0 \leqslant z \leqslant 2h$ между двумя параллельными пластинами $z = 0$ и $z = 2h$ (рис. 4.1). Будем искать решения, в которых область ядра $0 < z_1 \leqslant z \leqslant z_2 < 2h$ расположена внутри течения. Границы ядра $z_1(t)$ и $z_2(t)$ зависят от времени и подлежат определению.

Найдем ускорение ядра. Для этого надо применить закон количества движения к области $z_1(t) \leqslant z \leqslant z_2(t)$, на границах которой сверху и снизу действует касательное напряжение τ_s, слева и справа приложены давления p_1, p_2 (рис. 4.2). Ускорение dv/dt можно получить двумя способами.

Способ 1. Применяем закон изменения импульса к материальному прямоугольнику $ABCD$, состоящему из одних и тех же частиц, движущихся со скоростью $v(t)$ (см. рис. 4.2, а). В начальный момент z_1 и z_2 — границы ядра. В следующий момент времени каждая частица сдвинется по оси x на расстоя-

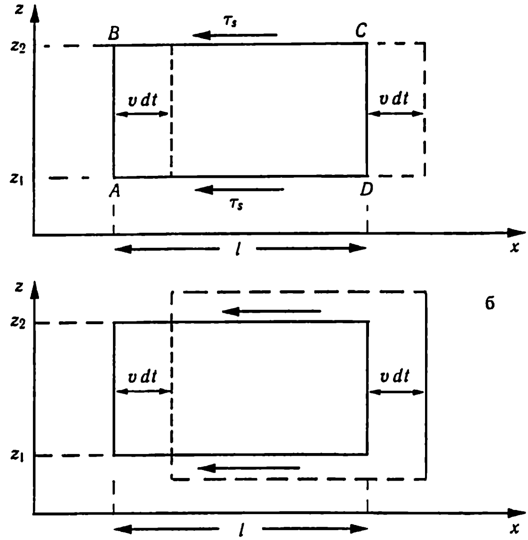


Рис. 4.2. Законы изменения импульса для материального объема (а) и для ядра (б)

ние vdt и соответственно сдвинется материальный прямоугольник. Изменение количества движения его равно поверхностной силе

$$\rho l(z_2 - z_1)\frac{dv}{dt} = (p_1 - p_2)(z_2 - z_1) - 2\tau_s l.$$

Способ 2. Применяя закон изменения импульса к ядру $ABCD$, нужно учесть добавочное слагаемое $\rho l(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)v$ — поток импульса через его границу, обусловленный вовлечением в него новых материальных частиц среды (см. рис. 4.2, б). Изменение количества движения запишется так (см. (2.1.6))

$$\rho l\frac{d}{dt}\left[(z_2 - z_1)\, v\right] = (p_1 - p_2)(z_2 - z_1) - 2\tau_s l + \rho l(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)v.$$

Нетрудно видеть, что оба способа эквивалентны. Они приводят к следующему соотношению для ускорения:

$$z_1(T) \leqslant z \leqslant z_2(T) \qquad \partial v/\partial z = 0, \quad |\tau| \leqslant \tau_s,$$

$$\rho dv/dt = -\partial p/\partial x - 2\tau_s/(z_2 - z_1). \tag{4.2.1}$$

3. Уравнения в области деформационного течения. Вне ядра скорость деформации отлична от нуля, напряжение сдвига $\tau = s_{xz}$ находится из закона Шведова-Бингама, и уравнение движения (2.4.1) принимают следующий вид

$$0 \leqslant z \leqslant z_1, \quad z_2 \leqslant z \leqslant 2h \qquad |\tau| \geqslant \tau_s$$

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \pm \tau_s \frac{\partial v}{\partial z} \tag{4.2.2}$$

$$\begin{gathered} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial z}. \end{gathered} \tag{4.2.3}$$

Из уравнений (4.2.1) и (4.2.3) следует, что $-\partial p/\partial x = i$ зависит только от времени. Таким образом, получаем уравнения

$$\begin{gathered} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\tau_s}{(z_2 - z_1)} + i(t), \quad z_1 < z < z_2, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + i(t), \quad 0 \leqslant z \leqslant z_1,\ z_2 \leqslant z \leqslant 2h. \end{gathered} \tag{4.2.4}$$

4. Начальные и краевые условия. В начальный момент $t = 0$ следует задать значения границ ядра и начальное распределение скорости

$$v(0, z) = v_0(z), \quad z_1(0) = z_{10}, \quad z_2(0) = z_{20}.$$

На пластинах скорость среды совпадает со скоростью движения пластин $u_1(t)$, $u_2(t)$

$$v(t, 0) = u_1 0(t), \quad v(t, 2h) = u_2(t).$$

Условие непрерывности τ на границах ядра с помощью (4.2.2) запишется в виде

$$v'_z(t, z_1) = v'_z(t, z_2) = 0. \tag{4.2.5}$$

Из уравнений (4.2.4) и непрерывности ускорения $\partial v/\partial t$ получаем условия на границах ядра

$$v''_{zz}(t, z_1) = v''_{zz}(t, z_2) = -\frac{2\tau_s}{\mu(z_2 - z_1)}. \tag{4.2.6}$$

Краевая задача (4.2.4)–(4.2.6) является аналогом задачи Стефана для уравнения теплопроводности. На свободных границах $z_1(t)$, $z_2(t)$ условия (4.2.5) и (4.2.6) отличаются от условий в задаче Стефана.

В [58] приводится точное решение, в котором ядро примыкает к нижней пластине, а давление меняется по специальному закону

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 2a_2\sqrt{\nu t}, \quad i(t) = \rho\alpha\sqrt{\nu/t},$$

$$v(t, z) = \sqrt{\nu t}\left[-\frac{4\tau_s}{\alpha\mu}\exp(\alpha^2)\left(\xi(\mathrm{Erf}(\xi) - \mathrm{Erf}(\alpha)) + \frac{1}{2}\exp(-\xi^2)\right) + 2\beta\right],$$

$$\xi = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}},$$

где α и β — две произвольные постоянные. Пластины в этом решении движутся специальным образом, так что их скорости соответствуют значениям $v(t, 0)$, $\dot{v}(t, 2h)$.

Ниже излагается общий метод построения многопараметрических точных решений, в которых скорости пластин, либо градиент давления могут задаваться произвольно. Особое внимание будет уделено точным решениям для нестационарных течений между неподвижными пластинами.

4.2.2. Серия точных решений, описывающая торможение среды

1. Трехпараметрическое семейство решений. Для границ ядра принимаем следующие законы

$$z_1 = b + 2a_1\sqrt{\nu t}, \quad z_2 = b + 2a_2\sqrt{\nu t}. \tag{4.2.7}$$

Поле скорости ищем в виде

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + \\ +c\sqrt{\nu t}\begin{cases} f_1(\xi, a_1), & 0 \leqslant z \leqslant z_1 \\ 1/2, & z_1 \leqslant z \leqslant z_2 \\ f_1(\xi, a_2), & z_2 \leqslant z \leqslant 2h \end{cases} \qquad \xi = \frac{z-b}{2\sqrt{\nu t}}. \tag{4.2.8}$$

Функцию $f_1(\xi, a)$ и постоянную c нужно выбрать так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

а) уравнение движения в области пластического течения (4.2.4);

б) непрерывность скорости;

в) условие на границах ядра (4.2.5) (непрерывность касательного напряжения);

г) условие на границах ядра (4.2.6) (непрерывность ускорения);

д) условия прилипания на пластинах $v(t, 0) = u_1$ и $v(t, 2h) = u_2$.

Тогда поле скорости (4.2.7), (4.2.8) будет точным решением задачи вязкопластического течения.

Условие а). Находим производные скорости (4.2.8) в областях $0 \leqslant z \leqslant z_1$ и $z_2 \leqslant z \leqslant 2h$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = i(t) + c\frac{\sqrt{\nu t}}{2t}\left(f_1(\xi, a_i) - \xi f_1'(\xi, a_i)\right), \tag{4.2.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{c}{2}f_1'(\xi, a_i), \quad \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{c\nu}{4\sqrt{\nu t}}f_1''(\xi, a_i). \tag{4.2.10}$$

Подставляя их в уравнение (4.2.4), получим

$$f_1''(\xi, a_i) + 2\xi f_1'(\xi, a_i) - 2f_1(\xi, a_i) = 0. \tag{4.2.11}$$

Подчиним функцию $f_1(\xi, a_i)$ двум условиям

$$f_1'(a_i, a_i) = 0, \quad f_1''(a_i, a_i) = 1. \tag{4.2.12}$$

Тогда функция f_1 определится из уравнения единственным образом

$$\begin{gathered} f_1(\xi, a_i) = \exp(a_i^2)\left(\xi(\mathrm{Erf}(\xi) - \mathrm{Erf}(a_i)) + \tfrac{1}{2}\exp(-\xi^2)\right), \\ \mathrm{Erf}(\xi) = \int\limits_0^\xi e^{-x^2}dx, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{4.2.13}$$

Функция $f_1(\xi, a)$ имеет следующие производные первого и второго порядков

$$f_1'(\xi, a) = \exp(a^2)\,(\mathrm{Erf}(\xi) - \mathrm{Erf}(a)), \quad f_1''(\xi, a) = \exp(a^2 - \xi^2). \tag{4.2.14}$$

Условие б). Формулы (4.2.8) определяют функцию $v(t, z)$ — непрерывную на границах ядра $z = z_1$ и $z = z_2$. Действительно, при $z = z_i$ имеем $\xi = a_i$ и $f_1(\xi, a_i) = f_1(a_i, a_i)$. Из уравнения (4.2.11) и условий (4.2.12) следует $f_1(a_i, a_i) = 1/2$, $i = 1, 2$, т. е. непрерывность функции $v(t, z)$.

Условие в). Условие (4.2.5) выполнено в силу первого равенства (4.2.12).

Условие г). Из (4.2.10) и (4.2.14) находим

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_{z=z_i} = \frac{c}{4\sqrt{\nu t}} f_1''(\xi, a_i) = \frac{c}{4\sqrt{\nu t}}, \quad i = 1, 2.$$

Подстановка в условия (4.2.6)

$$\frac{c}{4\sqrt{\nu t}} = -\frac{\tau_s}{\mu(a_2 - a_1)}\frac{1}{\sqrt{\nu t}}.$$

показывает, что они удовлетворятся при

$$c = -\frac{4\tau_s}{\mu(a_2 - a_1)}, \tag{4.2.15}$$

Итак, постоянная c и поле скорости определены.

Условие д). Условия прилипания на пластинах будут тоже удовлетворены, если скорости пластин таковы

$$\begin{gathered} u_1(t) = v(t, 0) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + c\sqrt{\nu t}\, f_1\left(-\frac{b}{2\sqrt{\nu t}}, a_1\right), \\ u_2(t) = v(t, 2h) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + c\sqrt{\nu t}\, f_1\left(\frac{2h - b}{2\sqrt{\nu t}}, a_2\right). \end{gathered} \tag{4.2.16}$$

Приведенное трехпараметрическое точное решение верно при произвольном градиенте давления и описывает движение вязкопластической среды между двумя плоскостями, которые могут двигаться с различными скоростями. В частности, можно подобрать функцию $i(t)$ так, чтобы пластины были неподвижны.

Из закона Шведова-Бингама нетрудно найти касательные напряжения на площадках параллельных пластинам

$$\tau(t,z) = \begin{cases} \tau_s + \dfrac{c\mu}{2}\dfrac{\partial f_1(\xi,a_1)}{\partial \xi}, & 0 \leqslant z \leqslant z_1; \\ |\tau/\tau_s| \leqslant 1, \quad z_1 \leqslant z \leqslant z_2; & \\ -\tau_s + \dfrac{c\mu}{2}\dfrac{\partial f_1(\xi,a_2)}{\partial \xi}, & z_2 \leqslant z \leqslant 2h; \end{cases} \tag{4.2.17}$$

Очевидно функция $\tau(t,z)$ — непрерывна.

2. Течение между двумя неподвижными пластинами. Условию прилипания на пластинах можно удовлетворить, если положить в серии (4.2.7), (4.2.8) $a_2 = -a_1 = a, \quad b = h$ и подобрать функцию $i(t)$. Для этого запишем уравнение (4.2.4) при $z = 2h$ с учетом условия прилипания $v(t,2h) = 0$

$$\mu \left.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_{z=2h} + i(t) = 0$$

и с помощью уравнения (4.2.9) найдем

$$i(t) = -\frac{c\mu}{4\sqrt{\nu t}} f_1''(\xi, a),$$

$$\xi = \frac{h}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Подставляя сюда значение постоянной (4.2.15) и вторую производную (4.2.14), найдем значение градиента, при котором выполнено условие прилипания на верхней пластине $z = 2h$

$$i(t) = \frac{\tau_s}{2a\sqrt{\nu t}} \exp\left(a^2 - \frac{h^2}{4\nu t}\right)$$

На отрезке времени $t \in (0, t_0)$, $t_0 = h^2/(4a^2\nu)$ функция $i(t)$ меняется от значения $i(0) = 0$ до порогового значения градиента давления

$$i(t_0) = i_0 = \tau_s/h.$$

При $|i| \leqslant i_0$ среда покоится, а при $|i| > i_0$ среда трогается с места. Функцию $i(t)$ удобно представить в безразмерной форме

$$\frac{i(t)}{i_0} = \sqrt{\frac{t_0}{t}} \exp\left(a^2\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)\right), \qquad \frac{t}{t_0} = 4a^2\frac{\nu t}{h^2}. \tag{4.2.18}$$

При этом значении градиента из серии (4.2.8) при $z_2 \leqslant z \leqslant 2h$ найдем $\frac{\mu}{\tau_s h} v(t,z) =$

$$= \sqrt{\frac{t}{t_0}} \begin{cases} f_1\left(a\sqrt{\frac{t_0}{t}}, a\right) - f_1\left(\frac{z-h}{2\sqrt{\nu t}}, a\right), & 1+\sqrt{\frac{t}{t_0}} \leqslant \frac{z}{h} \leqslant 2, \\ f_1\left(a\sqrt{\frac{t_0}{t}}, a\right) - \frac{1}{2}, & 1-\sqrt{\frac{t}{t_0}} \leqslant \frac{z}{h} \leqslant 1+\sqrt{\frac{t}{t_0}}. \end{cases} \tag{4.2.19}$$

В области $0 \leqslant z/h \leqslant 1$ решение доопределяется по симметрии $v(t,z) = v(t, 2h - z)$.

Решение (4.2.19) определяет течение среды между двумя неподвижными пластинами под действием градиента давления (4.2.18) на отрезке времени $t \in (0, t_0)$, $\quad t_0 = h^2/(4a^2\nu)$.

При $t = h^2/(2\nu)$ $(t/t_0 = 2a^2)$ функция $i(t)$ имеет абсолютный максимум, равный $i_{max} = i_0 \exp(a^2)/(a\sqrt{2e})$. Если $a \geqslant \sqrt{2}/2$, то функция $i(t)$ монотонно возрастает на отрезке $t \in (0, t_0)$. При $a < \sqrt{2}/2$ функция $i(t)$ не монотонна.

На рис. 4.3, а представлены функции $i(t)/i_0$ в зависимости от t/t_0 при значениях параметра $a = 0,2$; $a = 0,707$; $a = 1$; $a = 3$. На рис. 4.3, б–д представлены профили безразмерной скорости $V = (\mu/(\tau_s h))v$ в моменты времени $t/t_0 = 0$; $1/16$; $1/4$; $9/16$; 1 при четырех различных значениях параметра $a = 0,2$; $0,7$; 1; 3. Значение параметра a указано на соответствующем рисунке. В начальный момент t=0 профиль скорости имеет вид треугольника

$$0 \leqslant z \leqslant h \qquad V(0, z/h) = k(z/h),$$

$$h \leqslant z \leqslant 2h \qquad V(0, z/h) = k(2 - z/h),$$

$$k = \frac{\exp(a^2)}{a}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mathrm{Erf}(a)\right].$$

С течением времени область твердого ядра увеличивается, а движение среды замедляется. Таким образом, представленное решение описывает процесс торможения среды от треугольного профиля скорости при $t = 0$ до полной остановки при $t = t_0$.

При $a > 0,7$ среда томозится, так как градиент давления меньше порогового значения. При $a < 0,7$ градиент давления меньше порогового значения в начале торможения. В остальное время процесс торможения продолжается по инерции при градиенте давления не меньшем порогового значения.

Касательное напряжение в области деформационного течения находится из закона Шведова-Бингама и равенства (4.2.10)

$$\tau(t,z) = \pm\tau_s + \mu\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \mu\frac{\partial v}{\partial z} = \tau_s\frac{\exp(a^2)}{a}\left(\mathrm{Erf}(\xi) - \mathrm{Erf}(a)\right). \tag{4.2.20}$$

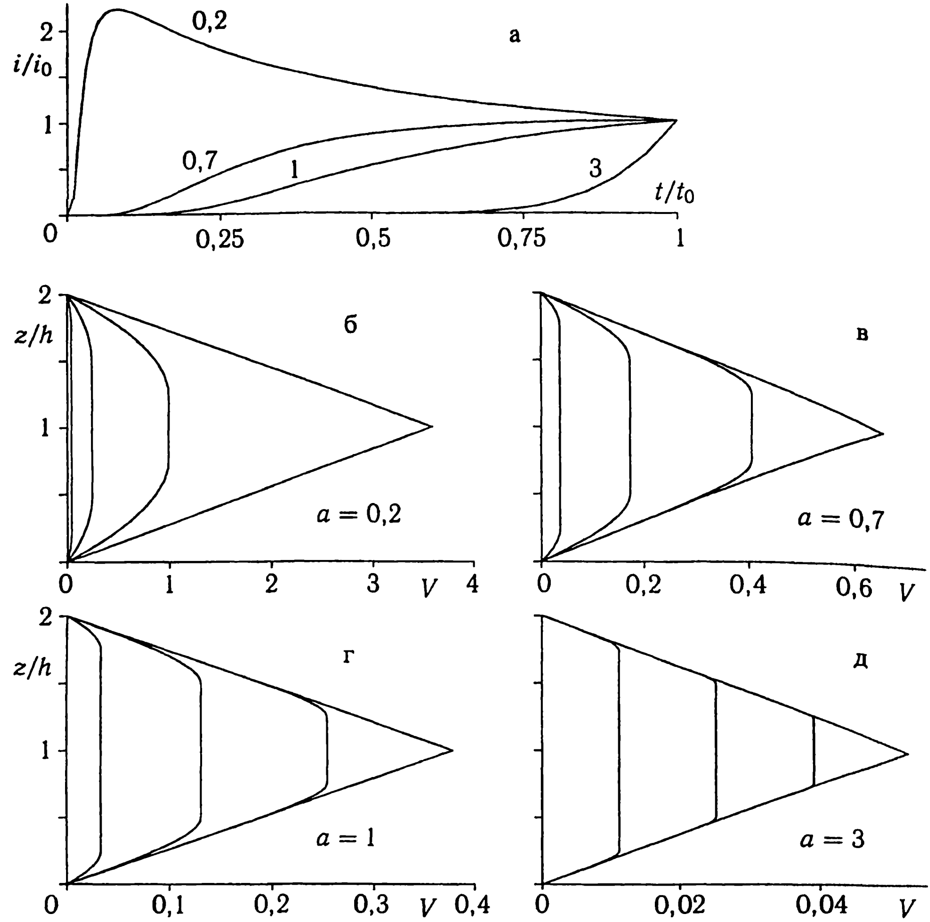


Рис. 4.3. Градиент давления i/i_0 в зависимости от безразмерного времени t/t_0 и профили безразмерной скорости V в моменты времени $t/t_0 = 0$; 1/16; 1/4; 9/16; 1

Обозначение специальной функции Erf взято из [6]. Используя асимптотику

$$\mathrm{Erf}(\xi) = -\frac{1}{2\xi}\exp(-\xi^2) \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{при } \xi \to \infty$$

найдем

$$\mu\frac{\partial v}{\partial z} \approx \tau_s\left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2a\xi}\exp(a^2 - \xi^2)\right), \quad a^2 \gg 1.$$

Отсюда видно, что при $a^2 \gg 1$ профиль скорости линейный с угловым коэффициентом $\partial v/\partial z = \tau_s/(2\mu a^2)$ всюду, кроме тонкого пограничного слоя вблизи границы ядра $\xi = a$. Толщина пограничного слоя δz соответствует изменению величины ξ^2 порядка единицы: $\delta(\xi^2) = 2a\delta\xi = a\delta z/\sqrt{\nu t} \sim 1$. Отсюда находим $\delta z \sim \sqrt{\nu t}/a = h\sqrt{t/t_0}/(2a^2)$. На толщине пограничного слоя δz происходит гладкий переход от линейного профиля $v = \tau_s z/(2\mu a^2)$ к профилю с нулевым наклоном $\partial v/\partial z = 0$.

Таким образом, при достаточно большом значении параметра a профиль скорости в каждый момент времени имеет вид трапеции. Верхнее основание с постоянным замедлением приближается к нижнему, а наклон боковых сторон остается неизменным. В окрестности середины между пластинами происходит нарастающее с течением времени «отвердение» среды. Вблизи пластин деформационное течение остается неизменным (см. рис. 4.3, д при $a = 3$).

4.2.3. Двойственная серия точных решений при отсутствии ядра в конечный момент времени

1. Трехпараметрическая серия. Аналогично (4.2.7–(4.2.17) при $t \leqslant 0$ можно построить двойственные серии точных решений

$$z_1 = B + 2A_1\sqrt{-\nu t}, \quad z_2 = B + 2A_2\sqrt{-\nu t}, \quad \eta = \frac{z - B}{2\sqrt{-\nu t}}; \tag{4.2.21}$$

$$v(t,z) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + C\sqrt{-\nu t}\begin{cases} F_1(\eta, A_1), & 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ 1/2, & z_1 \leqslant z \leqslant z_2, \\ F_1(\eta, A_2) & z_2 \leqslant z \leqslant 2h; \end{cases} \tag{4.2.22}$$

$$\tau(t,z) = \begin{cases} \tau_s + \dfrac{C\mu}{2}\dfrac{\partial F_1(\eta, A_1)}{\partial\eta}, & 0 \leqslant z \leqslant z_1, \\ |\tau/\tau_s| \leqslant 1, & z_1 \leqslant z \leqslant z_2, \\ -\tau_s + \dfrac{C\mu}{2}\dfrac{\partial F_1(\eta, a_2)}{\partial\eta}, & z_2 \leqslant z \leqslant 2h. \end{cases} \tag{4.2.23}$$

Формально предлагаемая серия решений отличается от (4.2.7)–(4.2.17) тем, что в ней переменная t заменена на $-t$, функция f_1 заменена на F_1 и постоянные c, a_1, a_2, b заменены соответственно на C, A_1, A_2, B. Для функции $F_1(\eta)$ получим уравнение, похожее на (4.2.11)

$$F_1'' - 2\eta F_1' + 2F_1 = 0. \tag{4.2.24}$$

Условия на границе оставляем такие же, как и (4.2.12).

$$F_1'(A_m) = 0, \quad F_1''(A_m) = 1, \quad m = 1, 2 \tag{4.2.25}$$

Решение получается из решения (4.2.13) заменами $\xi = i\eta$, $a = iA$

$$
\begin{aligned}
&F_1(\eta, A) = \exp(-A^2)\left(\eta(\mathrm{Erfi}(\eta) - \mathrm{Erfi}(A)) - \tfrac{1}{2}\exp(\eta^2)\right),\\
&F_1'(\eta, A) = \exp(-A^2)\left(\mathrm{Erfi}(\eta) - \mathrm{Erfi}(A)\right),\\
&F_1''(\eta, A) = \exp(-A^2 + \eta^2), \quad \mathrm{Erfi}(\eta) = \int\limits_0^\eta e^{x^2} dx,
\end{aligned}
\tag{4.2.26}
$$

Аналогично определяется постоянная C

$$
C = -\frac{4\tau_s}{\mu(A_2 - A_1)}, \tag{4.2.27}
$$

Эта трехпараметрическая серия описывает иной физический процесс. Ширина ядра будет убывать с течением времени и в конечный момент времени $t = 0$ обратится в ноль.

2. Течение между двумя неподвижными пластинами. В частном случае, который определяет течение между двумя неподвижными пластинами, аналогично рассмотренному выше, полагаем $A_2 = -A_1 = A$, $B = h$ и определяем функцию $i(t)$ из условия прилипания

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial v}{\partial t} = i(t) + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = i(t) + \frac{C\mu}{4\sqrt{-\nu t}}F_1''(\eta, a) \Rightarrow\\
&i(t) = \frac{\tau_s}{2a\sqrt{-\nu t}}F_1''\left(\frac{h}{2\sqrt{-\nu t}}, A\right),\\
&\frac{i(t)}{i_0} = \sqrt{\frac{t_0}{-t}}\exp\left(-A^2\left(1 + \frac{t_0}{t}\right)\right), \quad \frac{t}{t_0} = 4a^2\frac{\nu t}{h^2}.
\end{aligned}
\tag{4.2.28}
$$

Полное решение удобно записать в безразмерном виде

$$
\frac{\mu}{\tau_s h}v(t,z) =
$$

$$
= \sqrt{\frac{-t}{t_0}}\begin{cases} F_1\left(A\sqrt{\frac{t_0}{-t}}, A\right) - F_1(\eta, A), & 1 - \sqrt{\frac{-t}{t_0}} < \frac{z}{h} \leqslant 2,\\[2ex] F_1\left(A\sqrt{\frac{t_0}{-t}}, A\right) - \frac{1}{2}, & 1 - \sqrt{\frac{-t}{t_0}} \leqslant \frac{z}{h} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{-t}{t_0}}. \end{cases} \tag{4.2.29}
$$

В области $0 \leqslant z/h \leqslant 1$ решение доопределяется по симметрии $v(t, z) = v(t, 2h - z)$.

Решение (4.2.29) описывает течение среды между двумя неподвижными пластинами под действием градиента давления (4.2.28) на отрезке времени $t \in (-t_0, 0)$, $t_0 = h^2/(4A^2\nu)$. Функция $i(t)$ меняется от порогового значения $i(0) = i_0 = \tau_s/(\rho h)$ до бесконечности при $t \to -0$. Течение начинается из состояния покоя в момент времени $t = -t_0$, когда градиент давления $i(t)$ превышает

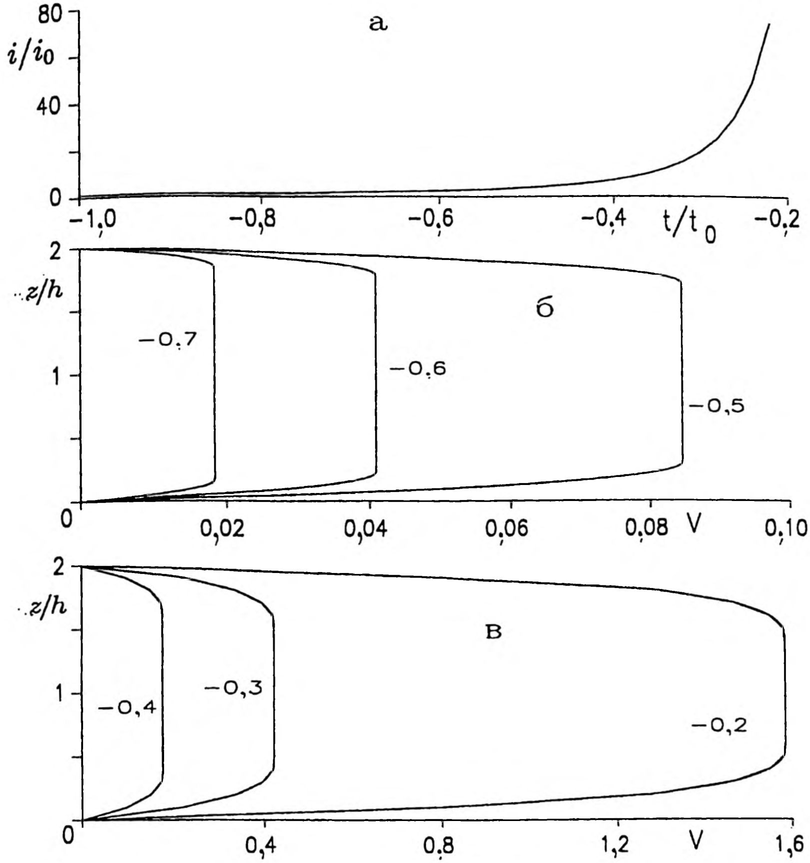


Рис. 4.4. Градиент давления i/i_0 в зависимости от безразмерного времени t/t_0 и профили безразмерной скорости V от безразмерной координаты z/h в моменты времени $t/t_0 = -0,4\,; -0,3\,; -0,2$

пороговое значение i_0. Происходит разгон течения под действием увеличивающегося во времени градиента давления на интервале $t \in (-t_0, 0)$. При этом $i(t)$ и скорость $v(t, z)$ возрастают неограниченно.

Ядро заполняет область $1 - 2A\sqrt{-t} = z_1 \leqslant z \leqslant z_2 = 1 + 2A\sqrt{-t}$, ширина которого уменьшается по закону $4A\sqrt{-t}$. На рис. 4.4, а представлена зависимость градиента давления от времени t/t_0. Профили скорости при значении параметра $A = 1$ в моменты времени $t/t_0 = -0,7\,; -0,6\,; -0,5$ изображены на рис. 4.4, б и в моменты времени $t/t_0 = -0,4\,; -0,3\,; -0,2$ на рис. 4.4, в.

4.2.4. Серии точных решений с постоянной шириной ядра

1. Трехпараметрические серии. Примем следующий закон движения границ ядра:

$$z_j = b_j + 2a\sqrt{\nu t}, \quad j = 1, 2. \tag{4.2.30}$$

Ширина ядра постоянна $\Delta z = z_2 - z_1 = b_2 - b_1$ и не зависит от времени, а область ядра сдвигается пропорционально $\sqrt{t}$.

Автомодельные переменные в первой $0 \leqslant z \leqslant z_1$ и второй $z_2 \leqslant z \leqslant 2$ деформационных областях обозначим соответственно через ξ_1 и ξ_2

$$\xi_j = \frac{z - b_j}{2\sqrt{\nu t}}, \quad j = 1, 2. \tag{4.2.31}$$

Поле скорости будет выражаться через функцию f_2

$$v(t,z) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + ct \begin{cases} f_2(\xi_1, a), & 0 \leqslant z \leqslant z_1 \\ 1/4, & z_1 \leqslant z \leqslant z_2 \\ f_2(\xi_2, a), & z_2 \leqslant z \leqslant 2h \end{cases} \tag{4.2.32}$$

Производные в области $0 \leqslant z \leqslant z_1$, $z_2 \leqslant z \leqslant 2h$ таковы

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho}i(t) + c\left(f_2(\xi, a) - \frac{\xi}{2}f_2'(\xi, a)\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{ct}{2\sqrt{\nu t}}f_2'(\xi, a), \quad \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{c}{4}f_2''(\xi, a).$$

Подставляя в уравнение (4.2.4), получим уравнение для функции f_2

$$f_2''(\xi, a) + 2\xi f_2'(\xi, a) - 4f_2(\xi, a) = 0.$$

Также как и в предыдущих сериях подчиним функцию f_2 условиям

$$f_2'(a, a) = 0, \quad f_2''(a, a) = 1.$$

Решение уравнения, удовлетворяющее этим двум условиям, имеет вид

$$f_2(\xi, a) = \tfrac{1}{8}\exp(a^2)\left(q_1(a)h_2(\xi) - h_1(a)q_2(\xi)\right), \quad q_1(\xi) = 2\xi\mathrm{Erf}(\xi) + \exp(-\xi^2),$$
$$q_2(\xi) = (4\xi^2 + 2)\mathrm{Erf}(\xi) + 2\xi\exp(-\xi^2), \quad h_1(\xi) = 2\xi, \quad h_2(\xi) = 4\xi^2 + 2.$$

Производные этой функции таковы

$$f_2'(\xi, a) = \tfrac{1}{2}\exp(a^2)\left(q_1(a)h_1(\xi) - q_1(\xi)h_1(a)\right),$$
$$f_2''(\xi, a) = 2a\exp(a^2)\left(\mathrm{Erf}(a) - \mathrm{Erf}(\xi)\right) + 1.$$

Из граничного условия (4.2.6) находим постоянную c

$$c = -\frac{8\tau_s}{\mu(b_2 - b_1)}. \tag{4.2.33}$$

Аналогично строится двойственная серия с заменой в (4.2.30)–(4.2.32) t на $-t$. Границы ядра представляются в виде

$$z_i = B_i + 2A\sqrt{-\nu t}, \quad i = 1, 2 \tag{4.2.34}$$

и вводятся автомодельные переменные в первой и второй областях деформационного течения

$$\eta_1 = \frac{z - B_1}{2\sqrt{-\nu t}}, \quad \eta_2 = \frac{z - B_2}{2\sqrt{-\nu t}}. \tag{4.2.35}$$

Тогда решение представляется в виде

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + Ct\begin{cases} F_2(\eta_1, A), & 0 \leqslant z \leqslant z_1; \\ -1/4, & z_1 \leqslant z \leqslant z_2; \\ F_2(\eta_2, A), & z_2 \leqslant z \leqslant 2h. \end{cases} \tag{4.2.36}$$

Аналогично находим решение уравнения и граничные условия для функции F_2

$$F_2''(\eta, A) - 2\eta F_2'(\eta, A) + 4F_2(\eta, A) = 0,$$

$$F_2'(A, A) = 0, \quad F_2''(A, A) = 1.$$

Определяем его решение

$$F_2(\eta, A) = -\frac{1}{8}\exp(-A^2)\left(Q_1(A)H_2(\eta) - H_1(A)Q_2(\eta)\right),$$

$$Q_1(\eta) = 2\eta\,\mathrm{Erfi}(\eta) - \exp(\eta^2),$$

$$Q_2(\eta) = (4\eta^2 - 2)\mathrm{Erfi}(\eta) - 2\eta\exp(\eta^2),$$

$$H_1(\eta) = 2\eta, \quad H_2(\eta) = 4\eta^2 - 2$$

и производные

$$F_2'(\eta, A) = -\frac{1}{2}\exp(-A^2)\left(Q_1(A)H_1(\eta) - Q_1(\eta)H_1(A)\right),$$

$$F_2''(\eta, A) = 2A\exp(-A^2)\left(\mathrm{Erfi}(\eta) - \mathrm{Erfi}(A)\right) + 1.$$

Из граничного условия (4.2.6) находим постоянную C

$$C = \frac{8\tau_s}{\mu(B_2 - B_1)}. \tag{4.2.37}$$

2. Течения около неподвижной пластины при постоянном градиенте давления. Рассмотрим подробнее частный случай, когда пластина $z = 0$ неподвижна, а градиент давления постоянный и не зависит от времени. Расположим вторую пластину на уровне $z = 2h$. Будем полагать, что ядро примыкает ко второй пластине, так, что $z_1 \leqslant 2h \leqslant z_2$. Скорость пластины будем считать равной скорости ядра.

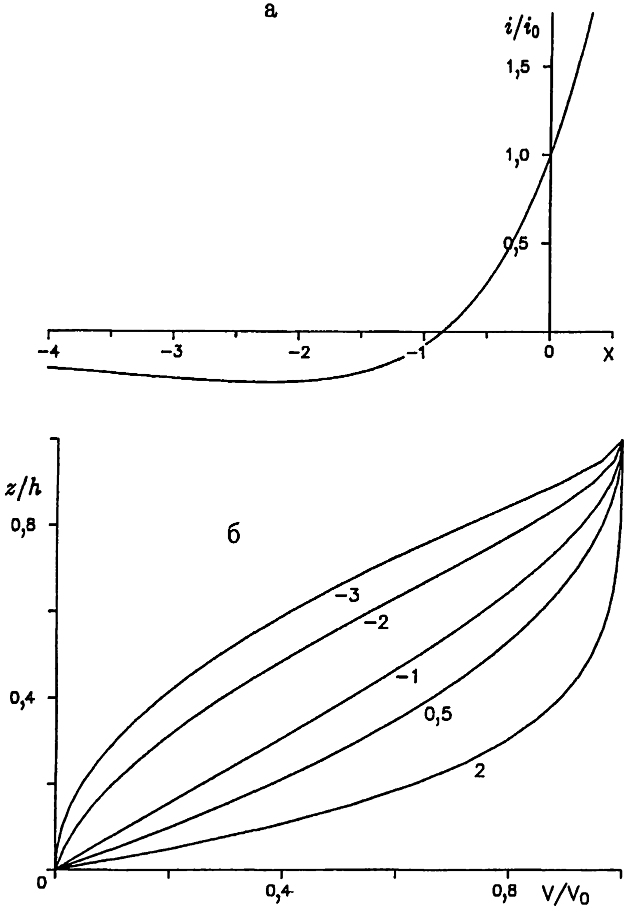


Рис. 4.5. Градиент давления и профили скорости

Параметры течения в серии (4.2.32) задаются так: $b_1 = 0$, $b_2 = \Delta z \geqslant 2h$. Из условия прилипания на неподвижной пластине найдем

$$i/i_0 = 4f_2(0,a) = f_2''(0,a) = 1 + 2a\exp(a^2)\mathrm{Erf}(a), \quad i_0 = 2\tau_s/\Delta z.$$

В безразмерном виде из (4.2.32) получим решение при $0 \leqslant t \leqslant t_0 = h^2/(a^2\nu)$

$$\frac{\mu}{h\tau_s}v(t,z) = \frac{t}{t_0}\frac{2h}{\Delta z}\frac{1}{a^2}\left(\frac{i}{i_0} - 4f_2\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}, a\right)\right), \quad 0 \leqslant z \leqslant 2a\sqrt{\nu t}. \qquad (4.2.38)$$

В ядре, примыкающем к пластине $z = 2h$, скорость изменяется линейно со временем по закону

$$\frac{\mu}{h\tau_s}v(t,z) = \frac{t}{t_0}\frac{2h}{\Delta z}\frac{1}{a^2}\left(\frac{i}{i_0}-1\right), \quad 2a\sqrt{\nu t} \leqslant z \leqslant 2h.$$

Пластина $z = 2h$ движется со скоростью ядра с постоянным ускорением.

Параметры течения в серии (4.2.36) задаются аналогично: $B_1 = 0$, $B_2 = \Delta z \geqslant 2h$. Аналогично найдем градиент давления

$$(i/i_0)F_2''(0,A) = 1 - 2A\exp(A^2)\mathrm{Erfi}(A), \quad i_0 = \frac{2\tau_s}{\Delta z}.$$

В безразмерном виде из (4.2.36) получим решение при $-t_0 \leqslant t \leqslant 0$

$$\begin{gathered}\frac{\mu}{h\tau_s}v(t,z) = \frac{t}{t_0}\frac{2h}{\Delta z}\frac{1}{A^2}\left(\frac{i}{i_0}+4F_2\left(\frac{z}{2\sqrt{-\nu t}},A\right)\right),\\ 0 \leqslant z \leqslant 2A\sqrt{-\nu t},\end{gathered} \tag{4.2.39}$$

В ядре, примыкающем к пластине $z = 2h$, скорость изменяется линейно со временем по закону

$$\frac{\mu}{h\tau_s}v(t,z) = \frac{t}{t_0}\frac{2h}{\Delta z}\frac{1}{A^2}\left(\frac{i}{i_0}-1\right), \quad 2A\sqrt{-\nu t} \leqslant z \leqslant 2h.$$

Пластина $z = 2h$ движется со скоростью ядра с постоянным замедлением.

Таким образом, в решении (4.2.38) течение начинается из состояния покоя и ускоряется. В решении (4.2.39) в начальный момент времени $t = -t_0$ течение имеет некоторый профиль скорости и замедляется до полной остановки при $t = 0$.

Градиент давления i/i_0 можно представить на одном графике (рис. 4.5, а). По оси X откладывается параметр $X = a^2$ при $X > 0$ либо $X = -A^2$ при $X < 0$, а по вертикальной оси откладывается значение i/i_0. Из рис. 4.5,а видно, что функция i/i_0 принимает наименьшее значение $-0,284$ при $X = -2,26$, $A = \sqrt{2,26} = 1,5$. Каждому значению параметра X соответствует одно значение $i/i_0 \geqslant -0.284$ и решение, определяющее либо разгон течения при $i/i_0 > 1$ ($X > 0$), либо торможение при $-0,284 \leqslant i/i_0 < 1$ ($X < 0$). Для каждого отрицательного значения $0 > i/i_0 > -0,284$ существует два решения, соответствующие двум параметрам X: одно $X < -2,26$, второе — $-2,26 < X < 0$. Все профили скорости деформационной области в различные моменты времени афинно подобны и определяются функциями $f_2(a,\eta)$ или $F_2(A,\eta)$ и соответствующим значением градиента давления i/i_0. На рис. 4.5,б показано несколько профилей этого семейства при $a = 2$, $0,5$ и $A = 1$; 2; 3. Соответствующие им значения градиента давления $i/i_0 = 193$; $1,59$; $-0,069$; $-0,2$; $-0,0761$ можно найти по графику на рис. 4.5,а. На каждом профиле указано значение параметра a при ускорении течения, либо параметра $-A$ при замедлении. По вертикальной

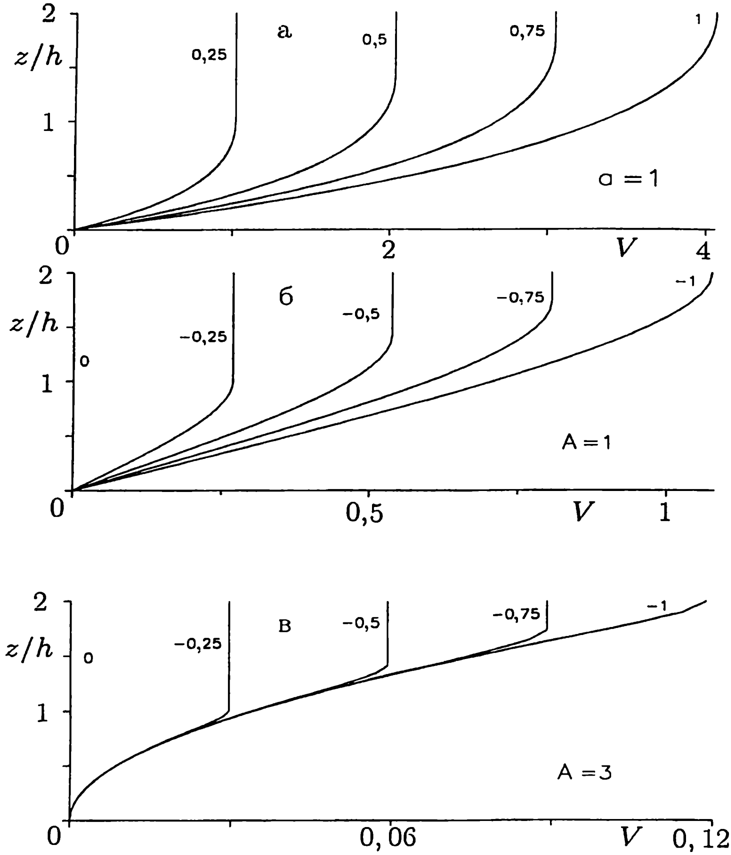


Рис. 4.6. Развитие течения и процесс торможения

оси откладывается z/h, а по горизонтальной $v(t,z)/v_0$,, $v_0 = v(t,z_1)$. Профили при $X > -1,2$; $A < 1,1$; $a \geqslant 0$ – выпуклые, при $X < -1,2$ профили имеют точку перегиба. В пределе $X \to \infty$ профиль скорости имеет форму параболы.

На рис. 4.6,а представлено развитие течения из состояния покоя при значении параметра $a = 1$, $i/i_0 = 5,06$. Безразмерные профили скорости $V(t,z/h) = \frac{\mu}{h\tau_s} v(t,z)$ представлены в моменты времени $t/t_0 = 0$; $0,25$; $0,5$; $0,75$; 1.

На рис. 4.6,б и в представлены процессы торможения течения при значении параметра $A = 3$, $i/i_0 = 0,076$ в моменты времени $t/t_0 = -1$; $-0,75$; $-0,5$; $-0,25$; 0. В последний момент времени $t = 0$ среда останавливается.

При достаточно большом значении параметра A процесс торможения происходит при отсутствии градиента давления ($i \approx 0$). Происходит постепенное «отвердение», среды. «Отвердение», распространяется от верхней движущейся пластины по направлению к нижней. Область деформационного течения примыкает к нижней пластине. Профили скорости имеют форму одной и той же параболы с осью, совпадающей с нижней пластиной.

Таким образом, в области деформационного течения никаких изменений не происходит. Уменьшается лишь ширина этой области. Аналогичный эффект при течении между двумя неподвижными пластинами был описан ранее (см. рис. 4.3,д $a = 3$).

4.2.5. Приложение к разд. 4.2

1. Общий метод. Можно достичь существенного обобщения всех рассмотренных выше решений, если поле скорости в области $0 \leqslant z \leqslant z_1$ или $z_2 \leqslant z \leqslant 2h$ при $t \geqslant 0$ представить рядом

$$\begin{gathered} v(t,z) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\sqrt{\nu t})^k f_k(\xi_j, a_j), \\ \xi_j = \frac{z - b_j}{2\sqrt{\nu t}}, \quad z_j = b_j + 2a_j\sqrt{\nu t}, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{4.2.40}$$

Автомодельная переменная ξ_j и законы движения границ ядра $z_j(t)$ подобраны так, что на границе $z = Z_j(t)$ автомодельная переменная постоянна $\xi_j = a_j$.

Подставляя ряд (4.2.40) в уравнение (4.2.4), получим обыкновенные дифференциальные по переменной ξ уравнения для функций $f_k(\xi, a)$

$$f_k'' + 2\xi f_k' - 2kf_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.2.41}$$

Также как и выше, подчиним функцию f_k условиям

$$f_k'(a, a) = 0, \quad f_k''(a, a) = 1.$$

Тогда поле скорости (4.2.40) будет удовлетворять условиям (4.2.5). Из условия (4.2.6) получим соотношение

$$v_z''(t, z_i) = \frac{1}{4\nu}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\sqrt{\nu t})^{k-2} = \frac{-2\tau_s}{\mu}\frac{1}{b_2 - b_1 + (a_2 - a_1)\sqrt{\nu t}}. \tag{4.2.42}$$

Правую часть можно представить в виде ряда по степеням $\sqrt{\nu t}$ и найти c_k. Четырехпараметрическая серия будет построена. При $b_2 = b_1$ получим вырожденный случай, в котором ряд содержит только одно слагаемое. Он рассмотрен в разд.4.2.2. Другой вырожденный случай $a_2 = a_1$ изучен в 4.2.4. Двойственная серия при $t < 0$ представляется рядом

$$v(t,z) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(\sqrt{-\nu t})^k F_k(\eta_j, a_j),$$
$$\eta_j = \frac{z-B_j}{2\sqrt{-\nu t}}, \quad z_j = B_j + 2A_j\sqrt{-\nu t},\ j = 1,2. \tag{4.2.43}$$

Подставляя ряд (4.2.43) в уравнение (4.2.4), получим обыкновенные дифференциальные по переменной η уравнения для функций $F_k(\eta, A)$

$$F_k'' - 2\eta F_k' + 2kF_k = 0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{4.2.44}$$

Также как и выше, подчиним функцию F_k условиям

$$F_k'(A,A) = 0, \quad F_k''(A,A) = 1.$$

Тогда поле скорости (4.2.43) будет удовлетворять условиям (4.2.5). Из условия (4.2.6) получим соотношение

$$v_z''(t,z_i) = -\frac{1}{4\nu}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(\sqrt{-\nu t}\,)^{k-2} =$$
$$= \frac{-2\tau_s}{\mu}\frac{1}{B_2-B_1+(A_2-A_1)\sqrt{-\nu t}}. \tag{4.2.45}$$

Правую часть можно представить в виде ряда по степеням $\sqrt{-\nu t}$ и найти C_k. Двойственная четырех параметрическая серия будет также построена. Таким путем можно определить четыре четырехпараметрические серии. Здесь также имеются два вырожденные случая: $B_2 = B_1$, рассмотренный в разд. 4.2.3 и $A_2 = A_1$, изученный в разд. 4.2.4.

2. Автомодельные функции. Приведем сводку формул по которым можно легко вычислять автомодельные функции, определяющие перечисленные выше решения Функции $f_k(\xi, a)$ находятся из решения краевых задач

$$f_k'' + 2\xi f_k' - 2kf_k = 0, \quad f_k'(a) = 0, \quad f_k''(a) = 1$$

При $k = 0,1,2,\ldots$ решение имеет вид

$$f_k(\xi,a) = (-1)^k\alpha_k \exp(a^2)\left(q_{k-1}(a)h_k(\xi) - h_{k-1}(a)q_k(\xi)\right)$$

$$\alpha_k = 1/(k!2^k)$$

$$h_k(\xi) = \exp(-\xi^2)\frac{d^k}{d\xi^k}\exp(\xi^2),$$

$$q_k(\xi) = \exp(-\xi^2)\frac{d^k}{d\xi^k}(\exp(\xi^2)\mathrm{Erf}(\xi)),$$

$$\mathrm{Erf}(\xi) = \int_0^{\xi} \exp(-x^2)dx$$

Функции $h_k(\xi), q_k(\xi)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 2\xi, \quad h_2 = 4\xi^2 + 2;$$
$$h_{k+1} = 2\xi h_k + 2kh_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$q_0 = \mathrm{Erf}(\xi), \quad q_1 = 2\xi \mathrm{Erf}(\xi) + \exp(-\xi^2),$$

$$q_2 = (4\xi^2 + 2)\mathrm{Erf}(\xi) + 2\xi \exp(-\xi^2),$$

$$q_{k+1} = 2\xi q_k + 2kq_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для производных справедливы формулы

$$h_k' = 2kh_{k-1}, \quad q_k' = 2kq_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Функции $F_k(\eta, A)$ находятся из решение двойственной краевой задачи

$$F_k'' - 2\eta F_k' + 2kF_k = 0, \quad F_k'(A) = 0, \quad F_k''(A) = 1.$$

Решение представляется по аналогичным формулам

$$F_k(\eta, A) = -\alpha_k \exp(-A^2)\left(Q_{k-1}(A)H_k(\eta) - H_{k-1}(A)Q_k(\eta)\right);$$

$$H_k(\eta) = (-1)^k \exp(\eta^2)\frac{d^k}{d\eta^k}\exp(-\eta^2),$$

$$Q_k(\eta) = (-1)^k \exp(\eta^2)\frac{d^k}{d\eta^k}(\exp(-\eta^2)\mathrm{Erfi}(\eta)),$$

$$\mathrm{Erfi}(\eta) = \int_0^{\eta} \exp(x^2)dx$$

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2\eta, \quad H_2 = 4\eta^2 - 2,$$
$$H_{k+1} = 2\eta H_k - 2kH_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$Q_0 = \mathrm{Erfi}(\eta),$$

$$Q_1 = 2\eta \mathrm{Erfi}(\eta) - \exp(\eta^2); \quad Q_2 = (4\eta^2 - 2)\mathrm{Erfi}(\xi) - 2\eta \exp(\eta^2),$$

$$Q_{k+1} = 2\eta Q_k - 2kQ_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для производных справедливы формулы

$$H'_k = 2kH_{k-1}, \quad Q'_k = 2kQ_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Функции $H_k(\eta)$ являются известными полиномами Эрмита, $h_k(\eta)$ — полиномами Эрмита мнимого аргумента.

Для вычисления функций $\mathrm{Erf}(\xi)$ и $\mathrm{Erfi}(\eta)$ полезны разложения для малых и больших значений аргументов соответственно [6]

$$\mathrm{Erf}(\xi) = \exp(-\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(3/2)_n},$$

$$\mathrm{Erfi}(\eta) = \exp(\eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\eta^{2n+1}}{(3/2)_n},$$

$$\mathrm{Erf}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \exp(-\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)_n}{\xi^{2n+1}},$$

$$\mathrm{Erfi}(\eta) = \frac{1}{2} \exp(\eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{\eta^{2n+1}}$$

Последние два ряда имеют смысл асимптотических рядов.

4.3. Точные решения задачи нестационарного течения в круглой трубе

В работе [71] получены две однопараметрические серии точных решений задачи вязкопластического нестационарного течения в круглой трубе. Полученные серии аналогичны однопараметрическим сериям точных решений (4.2.19) и (4.2.29) задачи нестационарного течения между двумя неподвижными параллельными пластинами. Для круглой трубы граничное условие на ядре остается нелинейным, но, кроме того, уравнение движения сложнее, что существенно затрудняет построение точных решений.

4.3.1. Формулировка краевой задачи

1. Уравнения. Рассматривается нестационарное течение вязкопластической среды в круглой трубе $r \leqslant R$ под действием переменного, зависящего от времени t, градиента давления $\partial p/\partial z$, где r, z — цилиндрические координаты, R — радиус трубы.

Течение в круглой трубе относится также к классу однонаправленных движений рассмотренных в разд. 4.2.1, и для вывода уравнений и краевых условий следует повторить все рассуждения, приведенные в этом разделе. Поле скорости среды в круглой трубе имеет одну компоненту $v(t,r)$, направленную вдоль оси z и зависящую от времени t и полярной координаты r (рис. 4.7)). От координаты z скорость v зависеть не будет в силу уравнения неразрывности $\partial v/\partial z = 0$. У тензора скоростей деформаций отличны от нуля только компоненты $v_{rz} = v_{zr}$ и реологическое соотношение определяется линейной связью (см. разд. 4.1 и (4.2.2))

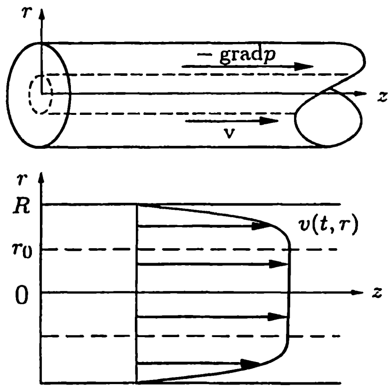


Рис. 4.7. Схема течения в трубе

$$s_{rz} = \mu \partial v/\partial r - \tau_s, \quad |s_{rz}| > \tau_s \tag{4.3.1}$$

Ускорение в ядре $r \leqslant r_0$ находится также как и для плоскопараллельного течения и формула для него аналогична (4.2.1)

$$\rho dv/dt = -\partial p/\partial z - 2\tau_s/r_0, |s_{rz}| \leqslant \tau_s. \tag{4.3.2}$$

Система уравнений осесимметричного движения (2.3.2) в области $r > r_0$ для поля скорости существенно упрощается

$$0 = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{s_{rz}}{r}.$$

Из полученных уравнений видно что градиент давления зависит только от времени. Вводя обозначение $i(t) = -\partial p/\partial z$, и подставляя s_{rz} из реологического соотношения (4.3.1), получим уравнения, аналогичные (4.2.4)

$$\begin{aligned} &\rho\frac{\partial v}{\partial t} = i(t) - 2\frac{\tau_s}{r_0}, \quad r \leqslant r_0, \\ &\rho\frac{\partial v}{\partial t} = i(t) + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\tau_s}{r}, \quad r > r_0. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

2. Начальные и краевые условия. Начальные и краевые условия формулируются аналогично задаче течения между пластинами. В начальный момент $t = 0$ следует задать значения границ ядра и начальное распределение скорости

$$v(0,r) = v_0(r), \quad r_0(0) = r_{00}.$$

На границе трубы принимаем условие прилипания

$$v(t,R) = 0.$$

Условие непрерывности s_{rz} на границе ядра с помощью (4.3.1) запишется в виде

$$v'_r(t,r_0) = 0. \tag{4.3.4}$$

Из уравнений (4.3.3) и непрерывности $\partial v/\partial t$ и $i(t)$ получаем условия на границах ядра

$$v''_{rr}(t,r_0) = -\tau_s/(\mu r_0). \tag{4.3.5}$$

Краевая задача (4.2.4)–(4.2.6) является аналогом задачи Стефана для осесимметричного уравнения теплопроводности.

Перейдем к построению двух однопараметрических серий точных решений.

4.3.2. Серии точных решений

1. Сведение задачи к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для границы ядра принимаем закон

$$r_0 = 2A\sqrt{-\beta\nu t}. \tag{4.3.6}$$

Здесь $0 < A < \infty$ — параметр, $\beta = \pm 1$ — параметр индекс серии.

Выражение для скорости принимаем аналогичным (4.2.8)

$$v(t,z) = \frac{1}{\rho}\int i(t)dt + C\sqrt{-\beta\nu t}F_\beta(\xi,A) + \frac{\tau_s}{\mu}r, \quad \xi = \frac{r}{2\sqrt{-\beta\nu t}}. \tag{4.3.7}$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho}i(t) + C\frac{\sqrt{-\beta\nu t}}{2t}\left(F_\beta(\xi,A) - \xi F'_\beta(\xi,A)\right), \tag{4.3.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{C}{2}F'_\beta(\xi,A) + \frac{\tau_s}{\mu}, \quad \nu\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{C\nu}{4\sqrt{-\beta\nu t}}F''_\beta(\xi,A),\\ \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\sqrt{-\beta\nu t}}{t}\left(-\frac{F''}{4\beta} - \frac{F'}{4\xi\beta}\right) + \frac{\tau_s}{\mu r}\end{gathered} \tag{4.3.9}$$

и подставляя их в уравнение (4.3.3), получим

$$\xi F''_\beta(\xi,A) + (1 - 2\beta\xi^2)F'_\beta(\xi,A) + 2\beta\xi F_\beta(\xi,A) = 0. \tag{4.3.10}$$

Подчиним функцию $F(\xi, A)$ двум условиям при $\xi = A$

$$F'_\beta(A, A) = A, \quad F''_\beta(A, A) = 1. \tag{4.3.11}$$

Тогда условия (4.3.4) и (4.3.5) примут вид найдем C

$$\frac{C}{2} + \frac{\tau_s}{\mu} = 0, \quad \frac{C}{4\sqrt{-\beta\nu t}} = -\frac{\tau_s}{2\mu A\sqrt{-\beta\nu t}}.$$

Они будут выполнены при

$$C = -\frac{2\tau_s}{\mu A}. \tag{4.3.12}$$

На границе трубы $r = R$

$$\xi = \xi_R = \frac{R}{2\sqrt{-\beta\nu t}}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Отсюда из (4.3.8) и (4.3.12) найдем градиент давления

$$i(t) = \frac{2\tau_s}{R}\frac{\beta}{A}\xi_R\left(\xi_R F'_\beta(\xi_R, A) - F_\beta(\xi_R, A)\right), \tag{4.3.13}$$

а из (4.3.7) получим распределение скорости

$$v(t, z) = C\sqrt{-\beta\nu t}\left(F_\beta(\xi, A) - F_\beta(\xi_R, A)\right) + \frac{\tau_s}{\mu}(r - R). \tag{4.3.14}$$

Для окончательного определения скорости и градиента давления необходимо найти $F_\beta(\xi, A)$ из решения уравнения (4.3.10) с граничным условием (4.3.11).

2. Автомодельная функция. Как следствие (4.3.10) и (4.3.11), на границе (при $\xi = A$) квазитвёрдого ядра. имеем

$$F_\beta(\xi, A)\big|_{\xi=A} = A^2 - \beta$$

Окончательно получим следующую задачу Коши для функции $F(\xi) = F_\beta(\xi, A)$

$$\begin{gathered} \xi F'' + (1 - 2\beta\xi^2)F' + 2\beta\xi F = 0 \\ F(A) = A^2 - \beta, \qquad F'(A) = A \end{gathered} \tag{4.3.15}$$

Замена $x = \beta\xi^2$ приводит задачу (4.3.15) к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции. Однако, в данном случае можно значительно упростить решение, выразив его через модифицированные функции Бесселя и экспоненту. Подстановкой $x = \xi^2/2$, $F_\beta(\xi, A) = e^{\beta x} y(x)$, $a = A^2/2$ задача (4.3.15) приводится к виду

$$xy'' + y' - (x - 2\beta)y = 0, \tag{4.3.16}$$

$$y(a) = (2a - \beta)e^{-\beta a}, \qquad y'(a) = 2(1 - \beta a)e^{-\beta a}. \tag{4.3.17}$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения (4.3.16) имеет вид

$$y(x) = (1 - 2\beta x)Z_0(x) + 2x\frac{dZ_0}{dx}, \tag{A}$$

где $Z_0(x)$ — решение уравнения Бесселя нулевого порядка

$$xZ_0'' + Z_0' - xZ_0 = 0. \tag{B}$$

Убедиться в этом можно непосредственной подстановкой (A) в уравнение (4.3.16).

Упрощение возникающих в этой проверке выкладок можно осуществить операторным методом. Для этого, обозначив $D = d/dx$, введем два дифференциальных оператора

$$L = xD^2 + D - (x - 2\beta), \quad M = 2xD + (1 - 2\beta x).$$

Тогда уравнение (4.3.16) можно записать в виде $Ly = 0$, а замену (A) так $y = Mz_0$. Подстановка (A) в уравнение (4.3.16) приведет к уравнению $LM\,Z_0 = 0$.

Установим тождество для трижды дифференцируемых функций $w(x)$

$$\begin{gathered} LMw = NBw, \\ B = xD^2 + D - x, \quad N = 2xD + (3 - 2\beta x), \end{gathered} \tag{4.3.18}$$

где B — дифференциальный оператор уравнения Бесселя (B), а N — дифференциальный оператор первого порядка.

Из тождества (4.3.18) видно, что, если w удовлетворяет уравнению Бесселя (B) $Bw = 0 \Rightarrow w = Z_0$, то выражение (A), равное $y = Mz_0$, будет общим решением уравнения (4.3.16).

Доказательство тождества (4.3.18) проводится так. Подставляем в операторы L и M их выражения, раскрываем скобки

$$\begin{aligned} LM &= (xD^2 + D - x + 2\beta)(2xD + 1 - 2\beta x) = \\ &= 2xD^2xD + xD^2 - 2\beta xD^2x + 2DxD + D - 2\beta Dx - \\ &-2x^2D - x + 2\beta x^2 + 4\beta xD + 2\beta - 4x. \end{aligned}$$

и с помощью тождеств

$$\begin{aligned} &D^2xD = xD^3 + 2D^2, \quad D^2x = xD^2 + 2D, \\ &DxD = xD^2 + d, \qquad Dx = xD + 1 \end{aligned}$$

упрощаем

$$LM = 2x^2 2D^3 + (7x - 2\beta x^2)D^2 + (3 - 2\beta x - 2x^2)D - 5x + 2\beta x^2.$$

Раскрывая и упрощая аналогично оператор NB, получим для выражение тождественное LM. Тем самым тождество (4.3.18) доказано.

Теперь найдем решение задачи Коши (4.3.16) и (4.3.17). Из общего решения (А) выделяем два независимых частных решения

$$y_1(x) = (1 - 2\beta x)\, I_0(x) + 2x\, I_1(x),$$

$$y_2(x) = (1 - 2\beta x)\, K_0(x) - 2x\, K_1(x),$$

где $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ — модифицированные функции Бесселя порядка $\nu = 0, 1$. Решение ищем в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Тогда постоянные C_1 и C_2 находятся из условий (4.3.17)

$$C_1 = -\beta a\, K_1(a) e^{-\beta a}, \qquad C_2 = -\beta a\, I_1(a) e^{-\beta a}.$$

Отсюда находим решение для автомодельной функции

$$F_\beta(\xi, A) = -\beta a \exp(\beta(x - a)) \{2x\, [K_1(a) I_1(x) - I_1(a) K_1(x)] +$$

$$+ (1 - 2\beta x)\, [K_1(a) I_0(x) + I_1(a) K_0]\}$$

3. Безразмерная форма решения. Из (4.3.6) следует, что на интервале времени $-\beta t \in (0, t_0)$, $t_0 = R^2/(4A^2\nu)$ ядро r_0 меняется от нуля до радиуса трубы R. Удобно ввести нормированное время t' так, чтобы оно менялось в интервале $t' \in [-1, +1]$. Это можно сделать с помощью замены

$$t' = \beta + t/t_0, \quad \beta = \operatorname{sign} t'$$

Тогда граница ядра будет меняться по универсальному параболическому закону

$$r_0/R = \sqrt{1 - |t'|}$$

и не зависит от параметров β и A.

Автомодельные переменные выражаются через t' так:

$$\xi_R = A/\sqrt{1 - |t'|}, \quad \xi = (r/R)\xi_R.$$

Градиент давления отнесем к пороговому значению $i_0 = 2\tau_s/(\rho R)$ и введем безразмерные градиент давления Π_β и скорость V_β

$$\Pi_\beta = 2\frac{i}{i_0}, \quad V_\beta = \frac{\mu v(t, z)}{R\tau_s}.$$

Тогда из (4.3.12)–(4.3.14) получим

$$\Pi_\beta(t', A) = exp\left(\frac{at'}{1 - |t'|}\right) \frac{2a}{\sqrt{1 - |t'|}} \times$$

$$\left[K_1(a)\, I_0\left(\frac{a}{1 - |t'|}\right) + I_1(a)\, K_0\left(\frac{a}{1 - |t'|}\right)\right], \quad a = \frac{A^2}{2}.$$

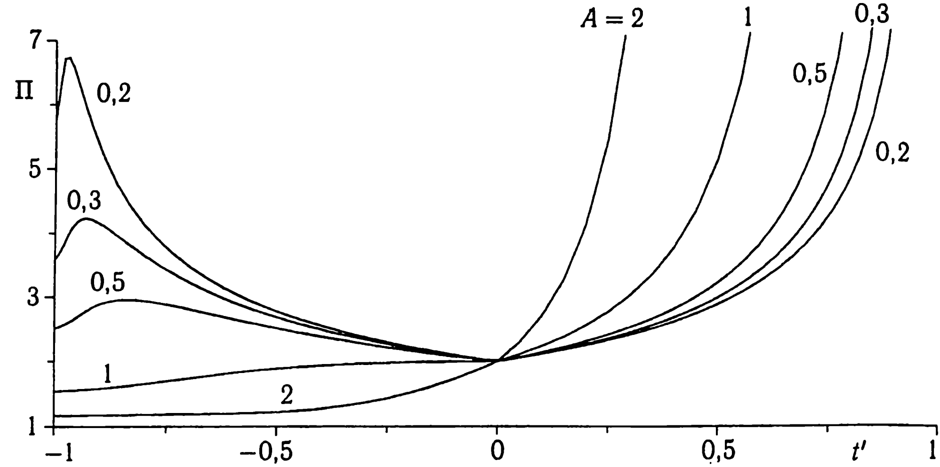


Рис. 4.8. Градиент давления $\Pi(t', A)$ в зависимости от нормированного времени t' при значениях параметра $A = 0,2,\ 1/3,\ 0,5,\ 1$ и 2

$$V_\beta(t', r/R) = \begin{cases} \dfrac{F_\beta(\xi_R, A) - F_\beta(\xi, A)}{A\xi_R} + \dfrac{r}{R} - 1, & r_0 < r \leqslant R; \\ \dfrac{F_\beta(\xi_R, A) + \beta}{A\xi_R} - 1, & 0 \leqslant r \leqslant r_0. \end{cases}$$

Интервал нормированного времени $t' \in [-1, 0)$ соответствует торможению ($\beta = -1$); интервал нормированного времени $t' \in (0, +1]$ соответствует разгону ($\beta = +1$), Состояние покоя вязкопластической среды (конец торможения или начало разгона) наступает для $t' = 0$.

4. Градиент давления. Градиенты давления для обеих серий $\beta = -1$ и $\beta = 1$ в зависимости от нормированного времени t' изображены на рис. 4.8. Отрицательному полуинтервалу времени t' соответствует серия $\beta = -1$, описывающая процесс торможения. Положительному полуинтервалу времени t' соответствует серия $\beta = 1$, описывающая процесс разгона. Зависимости градиента давления $\Pi_\beta(t', A)$ от нормированного времени t' при различных значениях параметра A представлены на рис. 4.8. При $1 \leqslant A < +\infty$ на всем интервале $t' \in [-1, +1]$ функция $\Pi_\beta(t', A)$ монотонно возрастает от значения $\Pi_\beta(-1, A)$ из интервала $1 < \Pi_\beta(-1, A) < 1,54$, до значения $\Pi_\beta(1, A) = +\infty$. При $0 < A \leqslant 1$ на всем интервале $t' \in [-1, +1]$ функция $\Pi_\beta(t', A)$ имеет три локальных экстремума (рис. 4.8). А именно, в точке $t' = -1$ — локальный минимум, в точке $t' = 0$ — локальный минимум или точка перегиба, а в точке $t' = t'_* \in [-1, 0]$ — локальный максимум. Для $A \approx 2/3$ два локальных минимума градиента давления совпадают. При всех A в точке $t' = \pm 0$ имеется одинаковый скачок производной $\Pi_\beta(+0, A) - \Pi_\beta(-0, A) = 2$.

Рассмотрим указанные временные точки подробнее. Градиент давления в начальный момент торможения определяется из (4.2.8) предельным переходом при $t' \to -1$

$$\Pi_\beta(-1, A) = \sqrt{2a/\pi}\exp(a)K_1(a), \quad \beta = -1, \quad a = A^2/2,$$

$$\Pi_\beta(-1, A) = \begin{cases} \dfrac{2 + A^2 + \ldots}{A\sqrt{\pi}}, & A \ll 1, \\ 1 + \dfrac{3}{(2A)^2} - \dfrac{15/2}{(2A)^4} + \ldots, & A \gg 1. \end{cases}$$

Как функция параметра A он монотонно убывает от $+\infty$ при $A = 0$ до 1 при $A = +\infty$.

При фиксированных значениях параметров $A \leqslant 1$, $\beta = -1$ градиент $\Pi_\beta(t', A)$ как функция нормированного времени t' имеет локальный максимум p^* в точке $t' = t_* \in [-1, 0]$. Эти значения $t_*(A)$, зависящие от выбора A, найдены как решение следующего уравнения

$$\frac{K_l(a)I_l(ab) - I_l(a)K_l(ab)}{K_l(a)I_0(ab) + I_l(a)K_0(ab)} + \beta + \frac{1}{2ab} = 0, \quad a = \frac{A^2}{2}, \quad b = \frac{1}{1 - |t_*|}.$$

Из решения этого уравнения определится функция $t_*(A) \in (-1, 0)$. В частности, со значением градиента давления $p^* = 2$ точка $t_* = 0$, $A = 1$, $\beta = -1$ является решением (3.5). На интервале $0 < A \leqslant 1$, $\beta = -1$ аппроксимация указанной функции такова

$$t_*(A) = \frac{1}{4}A^2(5 - 10A + 9A^2) - 1.$$

При $\beta = +1$ действительные решения уравнения отсутствуют, так как в этом случае функция $\Pi_\beta(t', A)$ — монотонна.

5. Торможение (замедление) среды ($\beta = -1$). При отрицательном β на отрезке $t' \in [-1, 0]$ происходит торможение среды. Профили скорости V_β в различные моменты времени $t' = -1$, $-15/16$, $-3/4$, $-5/16$, -0 при значениях параметра $A = 0,2$, $0,5$, 1 и 2. показаны на рис. 4.9. В начальный момент времени $t' = -1$ профиль скорости имеет форму конуса. Образующая конуса связана с величиной градиента давления $\Pi_\beta(-1, A) > 1$

$$V_\beta(t', r/R, A)\Big|_{t' = -1} = \left[\Pi_\beta(-1, A) - 1\right]\,(1 - r/R).$$

Торможение заканчивается состоянием покоя при $t' = 0$ с пороговым значением $\Pi_\beta(0, A) = 2$.

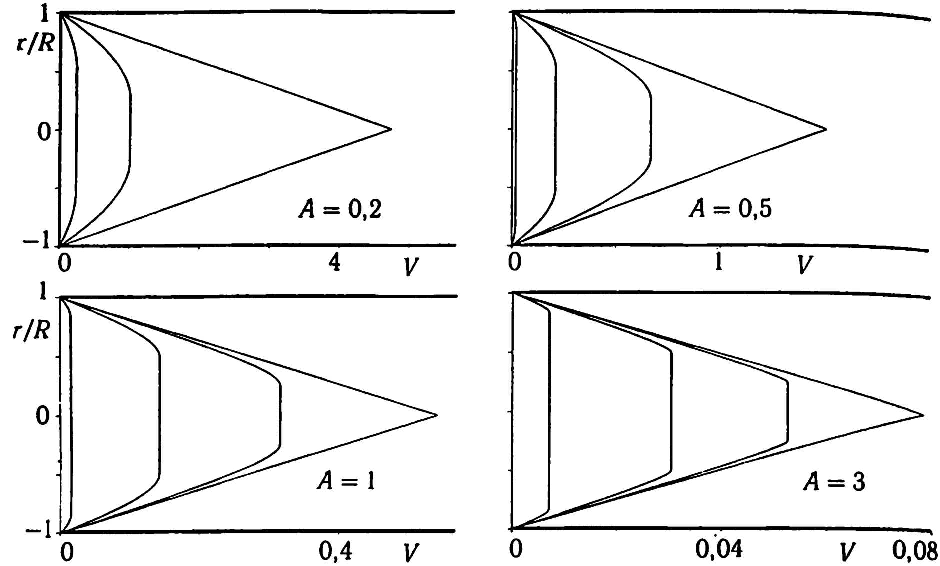


Рис. 4.9. Профили скорости V_β в моменты времени $t' = -1, \quad -15/16, \quad -3/4, \quad -5/16, \quad -0$ при значениях параметра $A = 0,2, \quad 0,5, \quad 1, \quad 2$

6. Разгон (ускорение) среды ($\beta = +1$). Движение вязкопластической среды в круглой трубе начинается с величины градиента давления $\Pi_\beta(+0, A) = 2$. Далее, на отрезке времени $t' \in [0, 1]$ происходит монотонное неограниченное увеличение как градиента давления (см. рис. 4.8), так и скорости ядра $V_\beta(t', r_0/R, A) \geqslant 0$ для всех A. На рис. 4.10 представлены профили скорости при $A = 1$ в различные моменты времени.

7. Особенности осесимметричного точного решения. Описанные временные эволюции профиля скорости и градиента давления в задаче нестационарного течения вязкопластической среды в круглой трубе во многом аналогичны течениям между двумя параллельными пластинами. Однако, имеются и определенные различия.

На участке торможения потока в круглой трубе градиент давления в начальный момент времени $\Pi_\beta(-1, A)$ строго больше единицы, тогда как в течении между двумя параллельными пластинами градиент давления равен нулю. Разность $\Pi_\beta(-1, A) - 1 > 0$ определяет наклон образующей начального конического профиля скорости.

При $A \to +\infty$ профиль скорости течения между двумя параллельными пластинами имеет форму трапеции. В случае осесимметричного нестационарного течения в поперечном сечении круглой трубы форма профиля скорости в дефор-

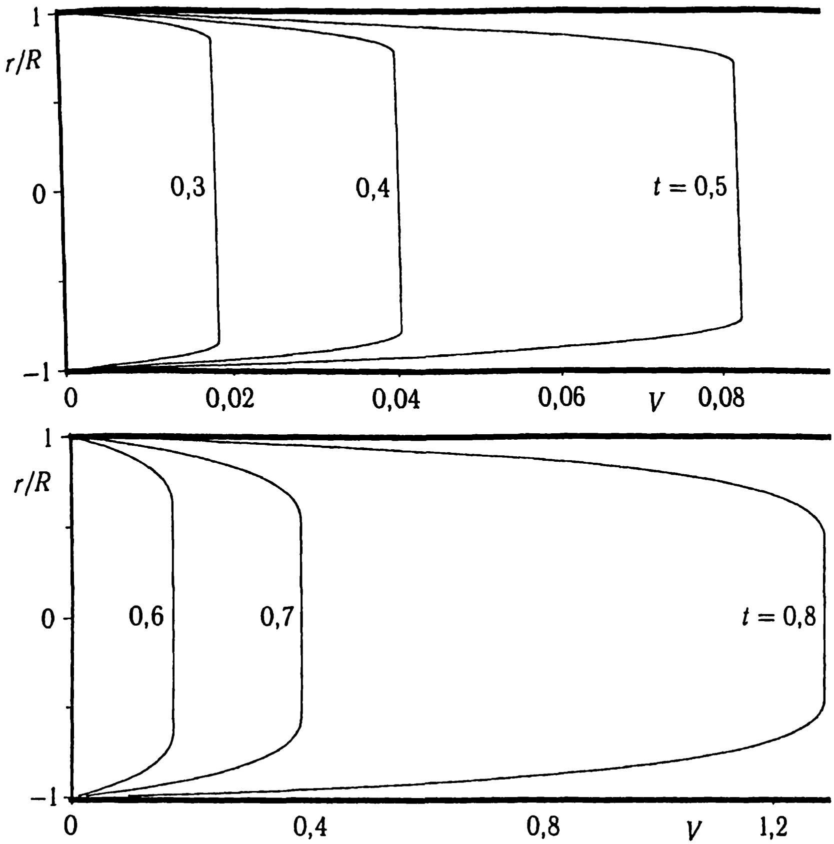


Рис. 4.10. Профили скорости V_β в моменты времени $t' = 0,3,\ \ 0,4,\ \ 0,5,\ \ 0,6,\ \ 0,7$ и $0,8$ при значении параметра $A = 1$

мационной области — криволинейна при любом как угодно большом значении A (сравните профили скорости при $A = 3$ на рис. 4.3 и 4.9).

8. Функции Бесселя. При решении используются функции Бесселя от мнимого аргумента первого рода $I_0(x)$ и $I_1(x)$ и второго рода $K_0(x)$ и $K_1(x)$. При $|x| < 4$ они вычисляются с помощью следующих рядов

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \qquad I_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)(k+1)!},$$

$$K_0(x) = -I_0(x)\ln(x/2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1)}{(k!)^2}\,(x/2)^{2k},$$

$$K_1(x) = I_1(x)\ln(x/2) - \frac{x}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi(k+1)+\psi(k+2)}{(k!)(k+1)!}(x/2)^{2k} + \frac{1}{x},$$

$$\psi(n) = -C + \sum_{k=1}^{n-1} 1/k, \quad n = 2, 3, \ldots, \quad \psi(1) = -C = -0.577216.$$

Для достижения относительной точности 10^{-6} при $|x| = 4$ в рядах нужно учесть 10 членов. При $x > 4$ эти функции вычисляются с помощью асимптотических рядов

$$z = 1/(8x), \quad a_n = (2n-1)^2/n, \quad b_n = ((2n-1)^2 - 4)/n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}(1 + za_1 + z^2 a_1 a_2 + z^3 a_1 a_2 a_3 + \ldots),$$

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}(1 - zb_1 - z^2 b_1 b_2 - z^3 b_1 b_2 b_3 - \ldots),$$

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}(1 - za_1 + z^2 a_1 a_2 - z^3 a_1 a_2 a_3 + \ldots),$$

$$K_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}(1 + zb_1 - z^2 b_1 b_2 + z^3 b_1 b_2 b_3 - \ldots).$$

Для достижения относительной точности 10^{-6} при $|x| = 4$ в рядах нужно учесть 7 членов.

Формулы для производных таковы

$$dI_0(x)/dx = I_1(x), \quad dI_1(x)/dx = I_0 - I_1/x,$$

$$dK_0(x)/dx = -K_1(x), \quad dK_1(x)/dx = -K_0 - K_1/x.$$

Правильность построения численных алгоритмов может быть проверена с помощью тождества

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = 1/x.$$

Глава 5

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

5.1. Течение в тонком деформирующемся слое

5.1.1. Криволинейные координаты в тонком слое

1. Базисные векторы и коэффициенты Лямэ. Рассмотрим плоскопараллельное течение вблизи твердой границы L. Кривая L задана параметрически $\vec{r}_0 = a(q_1)\vec{i} + b(q_1)\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ — орты декартовой системы координат, $\vec{r}_0$ — радиус-вектор, q_1 — координата точки на кривой L равная текущему расстоянию по кривой от фиксированной точки O_1 рис. 5.1.

В окрестности кривой L каждой точке с радиус вектором $\vec{r}$ можно поставить в соответствие пару чисел q_1, q_2, определяемых из уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + q_2\vec{e}_2$, где $\vec{e}_2$ — единичная нормаль к кривой L; q_2 — расстояние до L ([50] Т.1, с. 34).

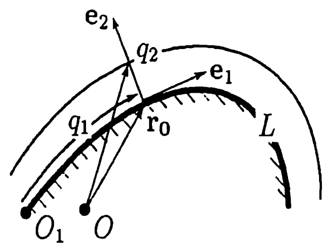


Рис. 5.1. Схема течения в тонком слое

Единичные базисные векторы системы координат q_1, q_2 введем следующим образом

$$\vec{e}_1 = \frac{da}{dq_1}\vec{i} + \frac{db}{dq_1}\vec{j}, \quad \vec{e}_2 = -\frac{db}{dq_1}\vec{i} + \frac{da}{dq_1}\vec{j}.$$

С помощью формул для дифференциалов

$$d\vec{r}_0 = \vec{e}_1 dq_1, \quad d\vec{e}_2 = \frac{1}{R}\vec{e}_1 dq_1,$$

$$\vec{d}r = (1 + q_2/R)\vec{e}_1 dq_1 + \vec{e}_2 dq_2$$

найдем коэффициенты Лямэ $H_1 = 1 + q_2/R$ и $H_2 = 1$.

2. Общие соотношения в окрестности кривой L. Выпишем уравнения вязкопластического течения в этой системе координат, пользуясь уравнениями в разд. 2.2.2. При подстановке проведем упрощения с помощью следующих приближенных формул

$$dH_1/dt \approx v_2/R, \quad \partial H_1/\partial q_1 \approx 0,$$

$$\partial H_1/\partial q_2 \approx 1/R, \quad H_1 \approx 1.$$

После подстановки получим

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{v_1 v_2}{R}.$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{R}.$$

$$v_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{R}, \quad v_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - 2\frac{v_1}{R}\right)$$

$$U = 2\sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2}, \quad s_{11} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{11}, \quad s_{12} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{12}.$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_2}{R} = 0.$$

$$(\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_1 = \frac{\partial s_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial q_2} + \frac{2s_{12}}{R}, \quad (\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_2 = \frac{\partial s_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial s_{11}}{\partial q_2} - \frac{s_{11}}{R}.$$

5.1.2. Вывод уравнений в приближении тонкого слоя

1. Постановка задачи. Рассматриваются вязкопластические течения установившиеся или близкие к установившимся, так что в ускорении частиц среды можно пренебречь слагаемыми $\partial v_i/\partial t$, $i = 1, 2$.

Течение среды со скоростью $v(t, q_1, q_2)$ происходит в слое, в котором поперечная координата q_2 меняется в пределах $0 \leqslant q_2 \leqslant h(t, q_1)$. Геометрическими характеристиками слоя являются: толщина слоя h, характерные масштабы изменения скорости в поперечном направлении $\delta < h$ и в продольном направлении l, а также радиус кривизны границы слоя R.

2. Малые параметры. Понятие тонкого слоя предполагает наличие следующих малых параметров

$$h/l \ll 1, \quad h/R \ll 1, \quad \partial h/\partial q_1 \ll 1, \quad \partial R/\partial q_1 \ll 1. \tag{5.1.1}$$

3. Оценки. Слагаемые, входящие в уравнение неразрывности, оцениваются по порядку величины так: v_1/l, v_2/δ, v_2/R. Отсюда определяем порядки величин компонент вектора скорости и тензора скоростей деформаций

$$v_1 \sim v, \quad v_2 \sim (\delta/l)v, \quad v_{12} = v/\delta, \quad v_{11} \sim v/l \sim v_{12}\delta/l \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad U = 2|v_{12}|(1 + O(\delta^2/l^2)),$$

и с точностью до малых порядка δ^2/l^2 находим компоненты девиатора напряжений

$$s_{12} = \mu\partial v_1/\partial q_2 \pm \tau_s, \quad s_{11} \sim s_{12}\delta/l.$$

Первое уравнение движения упростится так:

$$\rho\left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial q_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial q_1}+\frac{\partial s_{12}}{\partial q_2}.$$

В правой части слагаемые имеют одинаковый порядок. Поэтому изменение давления по переменной q_1 и его характерная величина оцениваются как

$$\partial p/\partial q_1 \sim s_{12}/\delta \Rightarrow p \sim s_{12}l/\delta.$$

Оценку изменения давления по переменной q_2 можно получить из второго уравнения движения

$$\partial p/\partial q_2 \sim (\mathrm{Div}\,\underset{\sim}{s})_2 \sim s_{12}/l \Rightarrow \Delta p \sim s_{12}\delta/l.$$

Таким образом, изменение давления в поперечном направлении слоя на два порядка меньше, чем характерна величина давления и можно считать, что $\partial p/\partial q_2 = 0$. Присоединяя к уравнениям движения уравнение неразрывности, получим систему уравнений вязкопластического течения в тонком слое

$$\begin{gathered}\rho\left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial q_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial q_1}+\frac{\partial s_{12}}{\partial q_2},\quad \frac{\partial p}{\partial q_2}=0,\\ \frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{\partial v_2}{\partial q_2}=0,\\ \begin{cases} s_{12}=\mu\dfrac{\partial v_1}{\partial q_2}\pm\tau_s, & \left|\dfrac{\partial v_1}{\partial q_2}\right|>0,\\ |s_{12}|\leqslant\tau_s, & \left|\dfrac{\partial v_1}{\partial q_2}\right|=0.\end{cases}\end{gathered}\tag{5.1.2}$$

В области $|\partial v_1/\partial q_2| \neq 0$ уравнения по форме совпадают с уравнениями пограничного слоя Прандтля. Эти уравнения можно еще больше упростить, если пренебречь ускорением частиц жидкости. Перейдем к выводу условий такого приближения.

4. Уравнения Рейнольдса. Обычная оценка безынерционного приближения $\mathrm{Re} = \rho VL/\mu \ll 1$, приведенная в разд. 2.3.2, здесь не пригодна, так как без анализа не ясно, что понимать под характерными длиной L и скоростью V. Кроме того, нужно учесть, что в слое постоянной толщины с однородными условиями на границе слоя частицы среды движутся равномерно без ускорения независимо от значения числа Рейнольдса. Поэтому в тонком слое нужно вывести свой критерий безынерционного приближения.

Определим число Рейнольдса Re_* как характерную величину отношения инерционной силы $\rho(dv/dt)_1$ к силе вязкого сопротивления $\partial s_{12}/\partial q_2$. Из приведенных оценок получим

$$\rho(dv/dt)_1 \sim \rho v \partial v/\partial q_1, \quad \partial s_{12}/\partial q_2 \sim \mu v/\delta^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{Re}_* = \frac{\delta^2}{\nu}\left|\frac{\partial v}{\partial q_1}\right|.$$

Это число определяет критерий безынерционного приближения $\mathrm{Re}_* \ll 1$. Уравнения (5.1.2) упрощаются. Они называются уравнениями Рейнольдса для вязкопластического течения в тонком слое

$$\partial p/\partial q_1 = \partial s_{12}/\partial q_2, \quad \partial p/\partial q_2 = 0,$$

$$\begin{cases} s_{12} = \mu \dfrac{\partial v_1}{\partial q_2} \pm \tau_s, & \partial v_1/\partial q_2 \neq 0, \\ |s_{12}| \leqslant \tau_s, & \partial v_1/\partial q_2 = 0, \end{cases} \tag{5.1.3}$$

$$\partial v_1/\partial q_1 + \partial v_2/\partial q_2 = 0.$$

Уравнения этого приближения для вязкой жидкости были впервые опубликованы Рейнольдсом (Reynolds O. On the Theory of Lubrication. Phil. Trans., CLXXVII, 157 (1886)). Они являются основой гидродинамической теории смазки [25]. Уравнения Рейнольдса для вязкопластического течения справедливы, когда выполняются условия (5.1.1) и, кроме того, условие малости числа Рейнольдса. Выпишем все эти условия, при которых уравнения (5.1.3) справедливы

$$\begin{gathered} h/l \ll 1, \quad h/R \ll 1, \quad \partial h/\partial q_1 \ll 1, \\ \partial R/\partial q_1 \ll 1, \quad \mathrm{Re}_* = \frac{\delta^2}{\nu}\left|\frac{\partial v}{\partial q_1}\right| \ll 1. \end{gathered} \tag{5.1.4}$$

В число Рейнольдса входит толщина зоны пластического течения δ. В следующем пункте будет показано как оценить эту величину.

5. Толщина зоны пластического течения и число Рейнольдса. Первые два уравнения (5.1.3) вместе с законом Шведова-Бингама определяют продольную скорость $v_1(q_2)$ в сечении с координатой q_1. Эти уравнения совпадают с уравнениями вязкопластического течения между двумя пластинами, рассмотренными в разд. 3.2.1. При одинаковых условиях на границе слоя и одинаковом расходе распределение скорости $v_1(q_2)$ совпадет с распределением скорости между двумя параллельными пластинами. При нулевой скорости на пластинах решение определяется по (3.2.2)–(3.2.5). С помощью (3.2.6) и (3.2.7) находится порядок толщины пластической зоны $\delta^2 = \min(h^2 a, h^2)$, где $a = \mu|Q|/(\tau_s h^2)$ и число Рейнольдса в тонком слое, на границах которого продольная скорость v_1 равна нулю

$$\mathrm{Re}_* = \left|\frac{\partial v}{\partial q_1}\right| \min\left(\frac{\rho|Q|}{\tau_s}, \frac{h^2}{\nu}\right). \tag{5.1.5}$$

Покажем как вычисляется число Re_* и определяется условие применимости приближения Рейнольдса на двух примерах.

Пример 1. Выдавливание вязкопластической среды двумя параллельными пластинами. Пусть в плоскости $z = 0$ расположена неподвижная пластина. Вторая пластина, расположенная в плоскости $z = 2h(t)$, сближается с неподвижной пластиной со скоростью $-2\dot{h}$ и выдавливает находящуюся между ними вязкопластическую среду. Расстояние h между пластинами предполагается малым по сравнению с длиной пластин l.

Координаты q_1 и q_2 выбираем равными декартовым координатам, направленным параллельно пластине $q_1 = x$ и перпендикулярно $q_2 = z$. Начало координат поместим на ось симметрии течения. Тогда объемный расход выдавливаемой среды в сечении x равен изменению объема между пластинами $Q = -2\dot{h}x$; характерная скорость в слое $v = |\dot{h}|x/h$. Применяя формулу (5.1.5), найдем число Рейнольдса и условие применимости приближения Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_* = \frac{|\dot{h}|}{h}\min\left(\frac{\rho\dot{h}l}{\tau_s}, \frac{h^2}{\nu}\right) \ll 1. \tag{5.1.6}$$

Пример 2. Течение среды между эксцентрично вращающимися круговыми цилиндрами. Пусть внешний круговой цилиндр радиуса R_2 неподвижен, а внутренний радиуса R_1 вращается с угловой скоростью ω около своего центра O_1, несовпадающего с центром O_2 внешнего цилиндра (рис. 6.1). При $(R_2 - R_1)/R_1 \ll 1$ толщина слоя h в зависимости от полярного угла ϕ меняется так

$$h = (R_2 - R_1)(1 - e\cos\phi), \quad e = O_1O_2/(R_2 - R_1).$$

В качестве координат тонкого слоя между цилиндрами выбираем $q_1 = R_1\phi$, r. Из уравнения сохранения расхода получим $\partial(hv)/\partial\phi = h\partial v/\partial\phi + v\partial h/\partial\phi = 0$. Отсюда получаем оценку $\partial v/\partial\phi \sim (v/h)\partial h/\partial\phi \sim ve$. Подставляя характерное значение скорости $v \sim \omega R_1$, получим $\partial v/\partial q_1 \sim \omega e$ и из формулы (5.1.5) найдем условие применимости приближения Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_* = \omega e \min\left(\frac{\rho\omega R_1(R_2 - R_1)}{\tau_s}, \frac{(R_2 - R_1)^2}{\nu}\right) \ll 1.$$

5.1.3. Анализ уравнений вязкопластического течения в тонком слое

1. Квазиядро в тонком слое. Профиль скорости v_1 тонкого слоя совпадает с точным решением соответствующей задачи вязкопластического течения между двумя пластинами. Поэтому может существовать зона, в которой $v_{12} = \partial v_1/\partial q_2 = 0$. Эту зону назовем квазиядром. Она соответствует области жесткой зоны точного решения.

С физической точки зрения квазиядро в тонком слое и ядро в точном решении отличаются. В квазиядре тонкого слоя скорости деформаций v_{11} и v_{22} отличны от нуля. Поэтому квазиядро жесткой зоной не является. Можно лишь констатировать, что в квазиядре величины v_{11} и v_{12} являются малыми порядка δ/l по отношению к этим величинам в пластической зоне. Уравнения Рейнольдса позволяют с точностью до малых δ/l вычислить поле скорости. Определить же границы области физического ядра в этом приближении нельзя. Нельзя ответить также на вопрос, существует или не существует жесткая зона в точной постановке рассматриваемой задачи.

2. Теоремы существования и единственности. Система уравнений (5.1.3) расщепляется на две независимые задачи. Первая задача определения компоненты $v_1(q_1, q_2)$ сводится к решению всех уравнений системы, исключая последнее. Если на границах тонкого слоя $q_2 = 0$ и $q_2 = h$ условия для скорости v_1 будут совпадать с условиями задачи течения между двумя пластинами (см. разд. 3.2.1), то обе задачи в точности совпадут. Доказанная теорема существования и единственности задачи течения между двумя параллельными пластинами распространяется и на задачу для компоненты v_1 в тонком слое. Соответственно и найденные решения задачи течения между двумя параллельными пластинами можно отнести к задаче течения в тонком слое. После того, как будет вычислена компонента v_1, вторая компонента скорости v_2 в тонком слое определяется из последнего уравнения системы (5.1.3) (уравнение неразрывности). Покажем, как получить полное решение задачи течения в тонком слое при нулевых условиях компоненты скорости.

3. Метод построения решения в тонком слое. Рассмотрим вязкопластическое течение в тонком слое $a \leqslant q_1 \leqslant b$, $0 \leqslant q_2 \leqslant 2h(t)$, толщина которого изменяется со временем по заданному закону $h(t, q_1)$. На границах слоя для поперечной компоненты v_2 выполняются условия непротекания среды через границу, а для продольной компоненты $v_1(t, q_1, q_2)$ задаются условия

$$v_1(t, q_1, 0) = u_1, \quad v_1(t, q_1, h) = u_2.$$

На одной из границ $q_1 = a$ или $q_1 = b$ обычно задается расход или давление. Требуется найти компоненты скорости частиц среды в этом слое $v_1(t, q_1, q_2)$ и $v_2(t, q_1, q_2)$.

Решение уравнений Рейнольдса с выписанными условиями на границе можно построить следующим образом [64]. Из уравнения неразрывности

$$2\partial h/\partial t + \partial Q/\partial q_2 = 0$$

и условия при $q_1 = a$ или $q_1 = b$ найдем расход $Q(t, q_1)$ среды через сечение q_1. Таким образом, решение задачи о вязкопластическом течении в тонком слое свелось к решению задачи течения между двумя пластинами, находящимися на расстоянии $2h$, с заданным расходом Q, уже построенному (см. (3.2.5)).

4. Решение уравнений Рейнольдса при нулевой продольной скорости на границе слоя. Скорость течения вязкопластической среды между двумя пластинами, находящимися на расстоянии $2h$ с заданным расходом Q и нулевыми значениями скорости на границе, описывается формулой (3.2.5). Она и определяет компоненту $v_1(t, q_1, q_2)$

$$v_1(t, q_1, q_2) = (Q(t, q_1)/h(t, q_1))U(q_2/h, a),$$
$$U(Z, a) = \frac{1}{2a(1 - Z_1(a))} \begin{cases} Z(2Z_1 - Z), & 0 \leqslant Z \leqslant Z_1, \\ Z_1^2, & Z_1 \leqslant Z \leqslant 1, \end{cases} \tag{5.1.7}$$

где функция $Z_1(a)$ представляется рядами (3.2.6) и (3.2.7). Вторая компонента скорости v_2 находится из уравнения неразрывности.

Удобнее пользоваться функцией тока Ψ (см. разд. 2.5.1)

$$\Psi(t, q_1, q_2) = \int_0^{q_2} v_1 dq_2 = Q \int_0^{Z} U(Z, a) dZ, \quad a = \frac{\mu|Q|}{\tau_s h^2},$$
$$\Psi = \frac{Q}{2a(1 - Z_1(a))} \begin{cases} Z^2 Z_1(a) - Z^3/3, & 0 \leqslant Z \leqslant Z_1, \\ Z Z_1(a)^2 - Z_1(a)^3/3, & Z_1 \leqslant Z \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.1.8}$$

Через нее находятся компоненты скорости $v_1 = \partial\Psi/\partial q_2$, $v_2 = -\partial\Psi/\partial q_1$. Наконец, с помощью формулы (3.2.3) для градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial q_1} = -\frac{\tau_s}{h} \frac{1}{1 - Z_1(a)} \operatorname{sign} Q. \tag{5.1.9}$$

можно вычислить давление в вязкопластической среде. Этот способ построения решения можно применить к средам с более сложной реологией. Ниже приведены примеры, в которых изложенный подход применяется для проведения конкретных расчетов.

5.1.4. Вытеснение среды двумя параллельными пластинами

Рассмотрим, следуя работе [60], задачу вытеснения вязкопластической среды двумя параллельными пластинами в приближении тонкого слоя (при малом отношении расстояния между пластинами к длине пластин). Основное внимание уделим вычислению силы F, действующей на единицу ширины пластины. Приведем известные решения этой задачи в следующих частных случаях.

Случай 1) Сила, действующая на пластины, при вытеснении вязкой жидкости равна $F = F_0 = -2\,(l/h)^3\,\mu\dot{h}$. Аналогичный результат для осесимметричной задачи получен Рейнольдсем (O. Reynolds, 1886) (см. разд. 5.1.5)

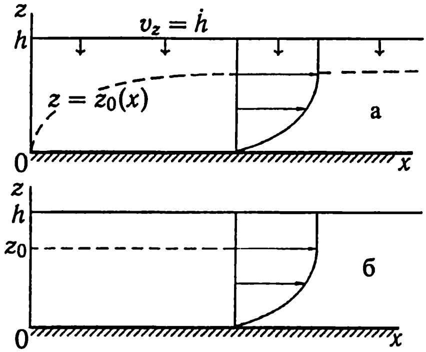


Рис. 5.2. Профили скорости: а — между двумя неподвижными параллельными пластинами; б — между двумя сближающимися пластинами

Случай 2). Сила, действующая на пластины, при вытеснении пластической среды $F = F_\infty = -(\tau_s l^2/h)\,\mathrm{sign}\,\dot{h}$. Точные выражения для напряжений в задаче о вытеснении чисто пластической среды получены Прандтлем (L. Prandtl, 1923) [89]).

3) Сила, действующая на пластины, при вытеснении вязкопластической среды при малом коэффициенте вязкости равна $F = F_\infty \left(1 + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2l\mu|\dot{h}|}{\tau_s h^2}}\right)$ и была определена В.П. Мясниковым 1963 [53]. (Здесь $2h$ — расстояние между пластинами $2\dot{h}$ скорость изменения расстояния между пластинами, $2l$ — длина пластин).

Решение Мясникова отличается от решения Прандтля наличием тонкого пристеночного пограничного слоя, в котором деформации отличны от нуля. Ниже дается решение, построенное в работе [60], задачи вытеснения вязкопластической среды при любых соотношениях между коэффициентами μ и τ_s.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о течении несжимаемой вязкопластической среды между двумя параллельными пластинами, которые сближаются (расходятся) в направлении, перпендикулярном плоскости пластин (рис. 5.2, а). Будем считать выполненными условия

$$h/l \ll 1, \quad \mathrm{Re}_* = \frac{|\dot{h}|}{h}\min\left(\frac{\rho \dot{h} l}{\tau_s}, \frac{h^2}{\nu}\right) \ll 1,$$

при которых справедливо приближение Рейнольдса тонкого слоя (5.1.3).

Примем условия прилипания на границах пластин. Тогда получим краевую задачу для уравнений Рейнольдса с нулевыми условиями на границе.

2. Решение краевой задачи. Координаты слоя введем так $q_1 = x,\ q_2 = z$. Тогда функция тока и поле скорости поставленной выше задачи имеют решение (5.1.8) и (5.1.9). В них нужно подставить выражения для расхода и параметра a

$$Q = -2\dot{h}x,$$
$$a = \left|\frac{Q\mu}{\tau_s h^2}\right|, \qquad (5.1.10)$$

где расход Q равен скорости изменения объема между пластинами.

Таким образом, получено решение задачи о течении вязкопластической среды между двумя пластинами при их сближении или удалении. Течение в произвольном сечении полностью определяется единственным безразмерным параметром a, который по своему смыслу является местным обратным числом Сен-Венана. При сближении пластин течение в сечении с параметром подобия a будет подобно течению между двумя неподвижными параллельными пластинами с расходом, соответствующим тому же значению a. На рис. 5.2,а показан профиль компоненты скорости v_x вязкопластического течения между между сближающимися пластинами в сечении, в котором местное число Сен-Венана равно a. Профиль скорости в точности совпадает с профилем скорости вязкопластического течения между двумя неподвижными параллельными пластинами со значением расхода, который согласно (5.1.10) равен $Q = a\tau_s h^2/\mu$ (рис. 5.2 б). Пунктиром изображена граница квазиядра. На рис. 5.2, б она не меняется, а на рис. 5.2, а зависит от координаты x.

Точное выражение Прандтля для распределения напряжений в задаче о вытеснении чисто пластической среды таково $p = p_0 - \tau_s(x/h + 2\sqrt{1-(z-h)^2/h^2})$, $s_{xz} = \tau_s(z-h)/h$.

Полагая в решении (5.1.9) $Z_1 = 0$, найдем давление $p = p_0 - \tau_s x/h$. Оно отличается от точного на малую величину порядка $h/x \ll 1$. Сдвиговое напряжение s_{xz} в приближении Рейнольдса совпадает с точным.

Представленное решение для напряжений и для скоростей справедливо в тонком слое при $h/x \ll 1$ во всем диапазоне чисел Сен-Венана.

3. Сила. Силу, действующую на единицу ширины пластины, можно вычислить, интегрируя давление по его поверхности и преобразуя соответствующий интеграл по частям

$$F = 2\int_0^l (p - p_l)dx = -2\int_0^l x\frac{\partial p}{\partial x}dx.$$

Градиент давления определяем по (5.1.9)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tau_s}{h}\frac{1}{1 - Z_1(a)}\operatorname{sign}\dot{h}. \tag{5.1.11}$$

Согласно (5.1.10) $dx = |\tau_s h^2/(2\mu\dot{h})|da$, откуда имеем

$$F = -\operatorname{sign}\dot{h}\frac{\tau_s l^2}{h}\frac{2f(a_l)}{a_l^2} = F_0\frac{2f(a_l)}{a_l^3} = F_\infty\frac{2f(a_l)}{a_l^2},$$

$$F_0 = -2\left(\frac{l}{h}\right)^3\mu\dot{h}, \quad F_\infty = -\frac{\tau_s l^2}{h}\operatorname{sign}\dot{h}, \tag{5.1.12}$$

$$f(a) = \int_0^a \frac{a\,da}{1 - Z_1(a)}, \quad a_l = \frac{2\mu|\dot{h}|}{\tau_s h^2}l = \frac{F_0}{F_\infty}, \tag{5.1.13}$$

где p_l — давление на границе пластины при $x = l$, a_l — обратное число Сен-Венана; F_0 и F_∞ соответственно силы для случаев чисто вязкой ($\tau_s = 0,\ a_l = \infty$) и чисто пластической ($\mu = 0,\ a_l = 0$) сред.

Подставляя второй ряд (3.2.6) или второе разложение (3.2.7) в интеграл (5.1.13), найдем

$$f(a) = \frac{1}{2}a^3 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{9}\ln(a+1) + \alpha +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{3m(a+1)^{3m}} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}}, \tag{5.1.14}$$

$$\alpha = \frac{2}{9} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{3m(3m+1)} = 0,21546\,,$$

$$f(a) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{5}a^{5/2} + \frac{2}{9}a^3 + \frac{5}{63}a^{7/2} + \frac{1}{4\cdot 27}a^4 + \qquad a < 1. \tag{5.1.15}$$

Ряд (5.1.14) сходится для всех $a \geqslant 0$. Для $a < 1$ удобнее пользоваться разложением (5.1.15).

Из полученного результата следует, что сила определяется единственным параметром подобия a_l. При больших числах Сен-Венана ($a_l \ll 1$) из (5.1.12), (5.1.13) и (5.1.15) получим асимптотическое разложение, найденное ранее [53]

$$F = F_\infty\left(1 + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2l\mu|\dot{h}|}{\tau_s h^2}}\right)$$

4. Движение пластин под действием постоянной силы. При заданной постоянной силе F выражения (5.1.12), (5.1.13) превращаются в дифференци-

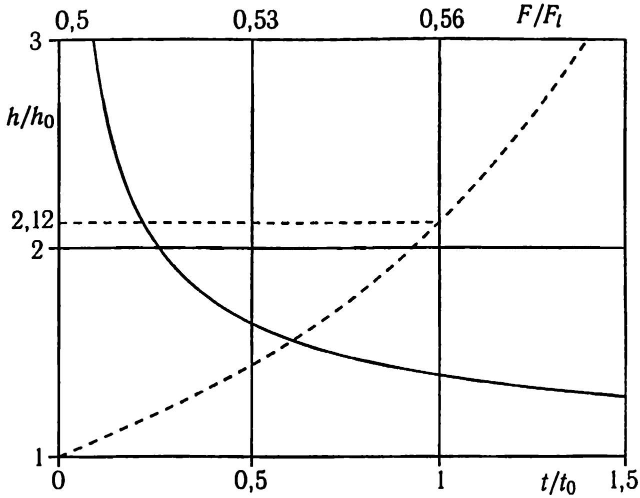


Рис. 5.3. Движение пластин под действием постоянной силы

альное уравнение относительно $h(t)$. Действительно, выражение (5.1.12) можно привести к виду

$$\frac{h}{h_0} = \frac{2f(a_l)}{a_l^2}, \quad h_0 = \frac{\tau_s l^2}{|F|} \tag{5.1.16}$$

В силу неравенства $2f(a_l)/a_l^2 > 1$ заключаем, что $h > h_0$, т. е. h_0 — наименьшее расстояние, на которое могут сблизиться пластины под действием силы F. Переменную a_l, исходя из ее определения (5.1.13), можно представить через производную по времени следующим образом:

$$a_l = \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{h_0 t_0}{h}\right)\right|, \quad h_0 t_0 = \frac{\mu l}{\tau_s}, \quad t_0 = \frac{\mu|F|}{\tau_s^2 l}, \quad h_0 = \frac{\tau_s l^2}{F}. \tag{5.1.17}$$

Тогда, подставляя (5.1.17) в соотношение (5.1.16), получим дифференциальное уравнение для безразмерной функции h_0/h от безразмерного времени t/t_0. Можно убедиться проверкой, что решение этого уравнения представимо в следующем параметрическом виде:

$$\frac{h_0}{h} = \Phi(a_l), \quad \frac{t}{t_0} = \operatorname{sign}\dot{h}\int_{a_l}^{\infty}\frac{\Phi'(a)da}{a} \quad \left(\Phi(a) = \frac{a^2}{2f(a)}\right) \tag{5.1.18}$$

Можно получить асимптотические разложения при достаточно малых a :

$$\begin{aligned}
&\Phi(a)=1-\frac{4}{5}a^{1/2}+\frac{44}{225}a+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n a^{1+n/2},\\
&\frac{t}{t_0}=\frac{4}{5}a^{-1/2}+\frac{44}{225}\ln a+b+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}+1\right)\Phi_n a^{n/2},
\end{aligned}\qquad(5.1.19)$$

$$b=-\frac{91}{225}-\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n a^{-1+n/2}\right)da-\int_1^{\infty}\frac{\Phi(a)}{a^2}da=-0,7328\,.$$

Укажем значения первых семи коэффициентов Φ_n, входящих в разложения (5.1.19): 0, 0404; −0, 0107; −0, 0112; −0, 0013; 0, 0027; 0, 0014; −0, 0003.

При $a<1,4$ с погрешностью менее 1% функцию $t(a)$ можно вычислять по формуле (5.1.19). При $a\geqslant 2$ вычисления с той же погрешностью можно проводить по асимптотической формуле $t/t_0=a/(2f(a))+4/\ln(1+3/(2a))-2/(3a)$.

Таким образом, установлено, что движение пластин при любых значениях силы, коэффициента вязкости, предельного напряжения сдвига и геометрических характеристик определяется одной универсальной зависимостью h/h_0 от t/t_0. Вид этой зависимости изображен на рис. 5.3 сплошной линией.

5. Условие безотрывного разведения пластин. Разведение пластин под действием постоянной силы происходит по той же траектории $h(t)$, что испли-жение, но в обратном направлении. Однако на некоторых участках траектории в силу понижения давления до нуля на поверхности пластин может образоваться каверна (отрыв течения). С помощью (5.1.11) и (5.1.10) условие безотрывного движения можно записать так:

$$\begin{aligned}
&p(0)=p_l-\int_0^l\frac{\tau_s}{h}\frac{dx}{1-Z_1}=p_l-\frac{\tau_s l}{ha_l}P(a_l)>0,\\
&P(a_l)=\int_0^{a_l}\frac{da}{1-Z_1(a)}
\end{aligned}\qquad(5.1.20)$$

(использована замена $dx=l\,da/a_l$).

Подставляя в приведенное неравенство вместо h закон движения (5.1.16), получим условие безотрывного разведения пластин

$$G(a_l)=\frac{a_l}{f(a_l)}P(a_l)\leqslant\frac{F_l}{F},\quad F_l=2lp_l.\qquad(5.1.21)$$

Подставляя в интеграл (5.1.20) второй ряд (3.2.6) или второе разложение (3.2.7), получим

$$P(a)=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a-\beta+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}}\,,\qquad(5.1.22)$$

$$\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{3m+1} = 0,2496\,,$$

$$P(a) = a + \frac{2}{3}a^{3/2} + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a^{5/2} + \frac{1}{81}a^3 + \qquad (a < 1)\,. \tag{5.1.23}$$

Полученные разложения (5.1.22) и (5.1.23) для $P(a)$ и разложения (5.1.14) и (5.1.15) для $f(a)$ дают исчерпывающую информацию относительно функции $G(a)$. При изменении аргумента $0 \leqslant a < \infty$ функция $G(a)$ монотонно убывает от значения $G(0) = 2$ до значения $G(\infty) = 3/2$.

Отсюда следует, что при $F \leqslant F_l/2$ разведение пластин будет всегда безотрывным. При $F \geqslant 2F_l/3$, наоборот, произвести разведение безотрывно невозможно. В промежуточном случае $F_l/2 \leqslant F \leqslant 2F_l/3$ разведение пластин будет безотрывным при $h \geqslant h_*$. Критическое значение h_* определяется из совместного решения уравнения (5.1.16) и уравнения, вытекающего из (5.1.20), т. е.

$$h_*/h_0 = 2f(a_l)/a_l^2, \quad G(a_l) = F/F_l.$$

На рис. 5.3 штриховой линией изображена зависимость h_*/h_0 от F/F_l. Переменная F/F_l отложена на верхней горизонтали, а переменная h_*/h_0 — на вертикальной оси слева. С помощью графика 5.3 при заданном отношении F/F_l в диапазоне $F/F_l \in (1/2, 2/3)$ можно вычислить значения h, при которых разведение пластин будет безотрывным. Например, при $F/F_l = 0,56$ разведение пластин будет безотрывным при расстоянии $h > h_* = 2,12h_0$.

Предельный случай вязкой жидкости. Из уравнений Рейнольдса для вязкой жидкости находим давление $p = 6(x^2 - l^2)\mu\dot{h}/h^3 + p_l$ и вычисляем силу, действующую со стороны жидкости на пластину $F = 8l^3\mu\dot{h}/h^3$. Давление внутри жидкости положительно при $p(0) = p_l - 6l^2\mu\dot{h}/h^3 > 0$. Отсюда найдем условие $F/F_l < 2/3$ безотрывного разведения пластин. При $F/F_l > 2/3$ раведение пластин сопровождается отрывом.

Сопоставление вязкого и вязкопластического течений показывает, что для вязкого течения отсутствует переходная область $F/F_l \in (1/2, 2/3)$. Однако для вязкопластического течения $h_0 \to 0$ и $h_* \to 0$ при $\tau_s \to 0$, поэтому в пределе $\tau_s \to 0$ в переходной области условие безотрывного разведения пластин $h > h_*$ выполняется при любом зазоре, что в точности соответствует вязкому течению.

5.1.5. Вытеснение среды двумя параллельными дисками

Задача о течении вязкопластической среды, между двумя круглыми параллельными пластинами при их соосном поступательном движении относительно друг друга решается аналогично рассмотренной выше.

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричное движение вязкопластической среды в тонком слое между параллельными круглыми дисками $r \leqslant R$,

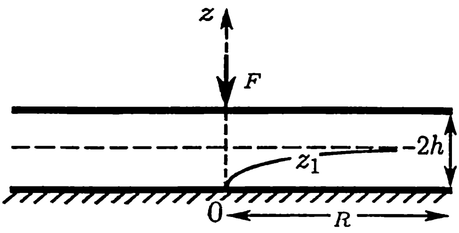


Рис. 5.4. Схема течения между двумя дисками

$0 \leqslant z \leqslant 2h(t)$, где R — радиус дисков, $2h$ — расстояние между дисками (рис. 5.4). Диск $z = 0$ неподвижен, а другой $z = 2h$ приближается к нему со скоростью $2dh/dt = 2\dot{h}$. На дисках принимаются условия непротекания и прилипания. Нужно определить компоненты скорости v_r, v_z и давление.

2. Решение краевой задачи. При условии (5.1.6) $\mathrm{Re}_* \ll 1$ можно пользоваться уравнениями Рейнольдса (5.1.3) с той лишь разницей, что уравнение неразрывности плоскопараллельного течения нужно заменить на уравнение осесимметричного поля скорости

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} = 0.$$

Функция тока осесимметричного движения вводится так

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{5.1.24}$$

Компонента скорости v_r совпадает с найденной компонентой v_1 (5.1.7) для тонкого слоя с соответствующим значением функции расхода $Q(t, r)$, которую легко найти из уравнения сохранения массы $2\pi r Q = -\pi r^2 2\dot{h}$. Таким образом, применяя формулы для функции тока (5.1.8) и давления (5.1.9), получим

$$\Psi = -\frac{r^2\dot{h}}{2a(1 - Z_1(a))}\begin{cases} Z^2 Z_1(a) - Z^3/3, & 0 \leqslant Z \leqslant Z_1, \\ Z Z_1(a)^2 - Z_1(a)^3/3, & Z_1 \leqslant Z \leqslant 1, \end{cases}$$
$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\tau_s}{h}\frac{1}{1 - Z_1(a)}\operatorname{sign}\dot{h}, \quad a = \frac{\mu|\dot{h}|}{\tau_s h^2}r, \quad Z = \frac{z}{h}, \tag{5.1.25}$$

где функция $Z_1(a)$ вычисляется с помощью рядов (3.2.6) и (3.2.7).

Формулы (5.1.24) и (5.1.25) позволяют вычислить все кинематические и динамические характеристики вязкопластического течения.

3. Давление и касательное напряжение. Давление и касательное напряжение с помощью (5.1.25) можно выразить через параметр a и безразмерную координату $Z = z/h$.

$$\frac{p - p_0}{\tau_s \operatorname{sign} \dot h} = P(a) = \int_0^a \frac{da}{1 - Z_1(a)} = \frac{Z_1^2(1 - 2/3Z_1)}{(1 - Z_1)^2}, \tag{5.1.26}$$

$$\frac{\tau_{rz}}{\tau_s} = -\operatorname{sign} \dot h \frac{1 - Z}{1 - Z_1(a)}.$$

где p_0 — давление при $r = 0$. Ряды для функция $P(a)$ были приведены ранее в (5.1.22) и (5.1.23).

4. Сила. Рассмотрим две задачи динамики. Первая состоит в определении силы F, под действием которой пластины движутся по заданному закону $h(t)$ (см. рис. 5.4). Вторая обратная задача состоит в нахождении закона движения пластин под действием заданной силы F. Перейдем к решению первой задачи.

Интегрируя давление по внутренней поверхности за вычетом постоянного внешнего давления p_R на внешней поверхности диска и преобразуя соответствующий интеграл по частям, получим

$$F = 2\pi \int_0^R (p - p_R) r dr = -2\pi \int_0^R \frac{r^2}{2} \frac{\partial p}{\partial r} dr,$$

$$F = -\operatorname{sign} \dot h \pi \frac{\tau_s}{h} \int_0^R \frac{r^2 dr}{1 - Z_1(a)}, \quad \dot h \neq 0. \tag{5.1.27}$$

Обозначим через F_0 и F_∞ соответственно силы для случаев чисто вязкой ($\tau_s = 0$) и чисто пластической ($\mu = 0$) сред

$$F_0 = -\frac{3\pi R^4 \mu \dot h}{8h^3}, \quad F_\infty = -\operatorname{sign} \dot h \frac{\pi \tau_s R^3}{3h}. \tag{5.1.28}$$

Перейдем в интеграле от переменной r к переменной a с помощью линейного соотношения $r = (R/a_R)a$. Тогда из (5.1.27) и (5.1.28) следует

$$\frac{F}{F_0} = \frac{8}{3} \frac{f(a_R)}{a_R^4}, \quad \frac{F}{F_\infty} = \frac{3f(a_R)}{a_R^3}, \tag{5.1.29}$$

$$a_R = \frac{\mu R |\dot h|}{\tau_s h^2}, \quad f_1(a_R) = \int_0^{a_R} \frac{a^2 da}{1 - Z_1(a)}. \tag{5.1.30}$$

Подынтегральную функцию можно представить сходящимся по обратным степеням $1/(1 + a)$ рядом. Для этого подставим $a^2 = (a + 1)^2 - 2(a + 1) + 1$ и ряд (3.2.6) функции $1/(1 - Z_1(a))$. Тогда под интегралом получим степенной ряд

$$\frac{a^2}{1 - Z_1(a)} = \frac{3}{2}(a + 1)^3 - 3(a + 1)^2 + \frac{3}{2}(a + 1) -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left[\frac{1}{(a + 1)^{3m}} - \frac{2}{(a + 1)^{3m+1}} + \frac{1}{(a + 1)^{3m+2}} \right].$$

Интегрируя его в пределах от 0 до a, получим ряд для функции $f_1(a)$. Первые члены разложений этой функции приведены в [22]

$$f_1(a_R) =$$
$$= \begin{cases} (1/3)a_R^3 + (2/7)a_R^{(7/2)} + (1/6)a_R^4 + (5/81)a_R^{(9/2)} + \ldots, a_R \ll 1, \\ (3/8)a_R^4 + (1/2)a_R^3 + \qquad\qquad a_R \gg 1. \end{cases} \tag{5.1.31}$$

Верхняя и нижняя асимптотики (5.1.31) приближают функцию $f(a_R)$ с погрешностью, не превышающей 1% в областях $a_R \leqslant 2$ и $a_R \geqslant 2$ соответственно. Формулы (5.1.27)–(5.1.31) дают полное решение первой задачи об определении силы, действующей на диск при заданном законе его движения.

Ввиду неравенства $z_0 > 0$ из (5.1.27) следует, что $|F| > |F_\infty|$. Таким образом, среду между дисками можно привести в движение при условии $|F| > |F_\infty|$. При меньшем абсолютном значении силы F диски и среда между ними будут находится в состоянии покоя.

Из неравенства $|F| > |F_\infty|$ и (5.1.28) можно сделать второй важный вывод. Существует минимальное расстояние h_{min} сближения дисков под действием постоянной силы F

$$h_{min} = \pi\tau_s R^3/(3F)\,. \tag{5.1.32}$$

Предельный случай $a_R \ll 1$, когда основную роль играет область пластического течения, для силы из (5.1.28) — (5.1.31) получим

$$F = -\frac{\operatorname{sign}\dot{h}}{h}\left(\frac{\pi\tau_s R^3}{3} + \frac{2\pi}{7h}\sqrt{\mu\tau_s R^7|\dot{h}|} + \qquad\right) \tag{5.1.33}$$

Параметр подобия a_R можно представить аналогично (5.1.17)

$$a_R = \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{t_0 h_{min}}{h}\right)\right|, \quad h_{min}t_0 = \frac{\mu R}{\tau_s}, \quad t_0 = \frac{3}{\pi}\frac{\mu|F|}{\tau_s^2 R^2} \tag{5.1.34}$$

5. Движение дисков под действием постоянной силы. Закон движения получается из решения уравнения, которое вытекает из (5.1.28), (5.1.29) и (5.1.34). Решение уравнения можно представить в параметрическом виде

$$\frac{h_{min}}{h} = \Phi_1(a_R), \quad \frac{t}{t_0} = -\int_{a_R}^{\infty} \frac{\Phi_1'(a)da}{a}, \quad \Phi_1(a) = \frac{a^3}{3f_1(a)}. \tag{5.1.35}$$

При помощи (5.1.31) можно получить следующие асимптотические разложения зависимостей (5,1.35)

$$a \gg 1 \quad \begin{cases} h/h_{min} = (3/2)(1 + (3/4)a) + \\ \bar{t} = -\dfrac{1}{2}\left(\ln\left(1 - \dfrac{1}{1+(3/4)a}\right) + \dfrac{1}{1+(3/4)a}\right) + \end{cases} \tag{5.1.36}$$

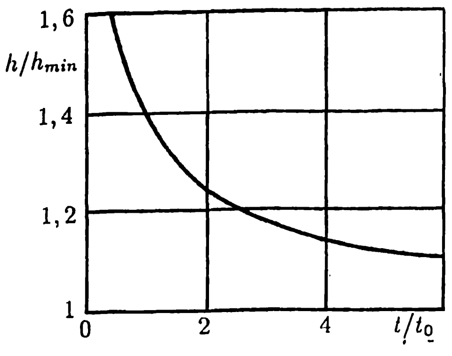


Рис. 5.5. Закон движения дисков под действием постоянной силы

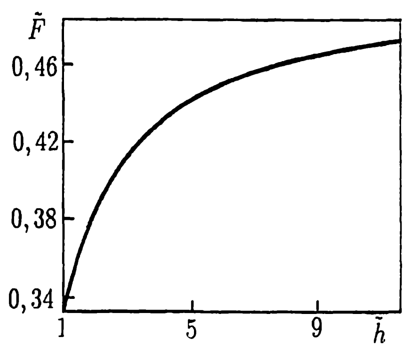


Рис. 5.6. Зависимость $\tilde{F}$ от $\tilde{h}$

$$a \ll 1 \quad \begin{cases} h/h_{min} = 1 + (6/7)\sqrt{a} + (1/2)a + \\ \tilde{t} = (6/7)\sqrt{a} + (23/98)\ln a - 0,78\,. \end{cases} \tag{5.1.37}$$

После исключения параметра a из (5.1.36) и (5.1.37) получим асимптотический закон изменения h/h_{min} от безразмерного времени $\tilde{t}$. На рис. 5.5 представлена зависимость безразмерного расстояния h/h_{min} от безразмерного времени t/t_0. При малом времени величина $h/h_{min} - 1$ изменяется обратно пропорционально квадратному корню из времени, а при большом — обратно пропорционально времени.

6. Условие безотрывного удаления дисков. Удаление дисков под действием силы растяжения происходит по той же кривой $h(t)$, что и сжатие, но в обратном направлении.

При $\dot{h} \gg 0$ давление достигает в центре своего минимального значения, которое можно вычислить с помощью (5.1.26).

При $p_0 = p_R - \tau_s(R/h)P(a_R)/a_R < 0$ в окрестности центра диска образуется каверна. Рассуждая точно также как и в случае дисков, придем к следующему условию безотрывного разведения дисков:

$$G_1(a_R) = \frac{a_R^2 P(a_R)}{I_1(a_R)} \leqslant \frac{F_R}{F}, \quad F_R = \pi R^2 p_R. \tag{5.1.38}$$

Проведенный анализ полученного соотношения (5.1.38) показывает следующее. Если $F \leqslant F_R/3$, то удаление дисков под действием силы F будет безотрывным во время всего процесса. При $F > F_R/2$, процесс безотрывного удаления дисков невозможен.

В промежутке $F_R/3 \leqslant F \leqslant F_R/2$ удаление будет безотрывным при $h > h_*$, где критическое расстояние h_* определяется из условия (5.1.38). На рис. 5.6

представлена зависимость $\tilde{F} = F/F_R$ от $\tilde{h} = h_*/h_{min}$, в параметрическом виде

$$\tilde{F} = \frac{f(a_R)}{a_R^2 P(a_R)}, \quad \tilde{h} = \frac{3f(a_R)}{a_R^3}$$

Предельный случай вязкой жидкости. Для дисков решение находится по аналогии с решением для пластин. В результате получим, что при условии $F/F_R < 1/2$ разведение пластин будет безотрывным, а при $F/F_R > 1/2$ разведение пластин сопровождается отрывом. Таким образом, для раздвижения дисков в вязкой жидкости также как и для пластин отсутствует переходная область $F/F_R \in (1/3, 1/2)$. К этому условию можно придти, если в полученном для вязкопластического течения решении перейти к пределу $\tau_s \to 0$ аналогично случаю пластин.

5.2. Развитие течения вязкопластической среды между двумя параллельными пластинами

В разд. 4.2 приведены многопараметрические серии точных нестационарных вязкопластических течений между двумя параллельными пластинами. Однако они не охватывают решения всех краевых задач, которые здесь возникают. В частности, задача развития течения из состояния покоя под действием постоянного перепада давления не может быть точно решена предлагаемыми методами. Ниже проведено приближенное исследование этой задачи, которое состоит в следующем.

а) При большом числе P приведено точное решение о разгоне течения ньютоновской жидкости. Методом разделения переменных решение представлено в виде ряда, быстро сходящегося на стадии установления течения. Для $Q(t, P)$ получена новая преобразованная форма ряда, быстро сходящегося на начальной стадии течения. Даны оценки остаточных членов обоих рядов.

б) На начальной стадии развития решение представлено в виде разложения по степеням корня квадратного из времени. Коэффициенты разложения зависят от автомодельной переменной и находятся из решения полученных обыкновенных дифференциальных уравнений. На стадии установления решение строится методом возмущений. Построено составное разложение решения для любого момента времени.

в) При произвольном конечном числе P представлено упрощенное приближенное решение. На основе идеи метода Слезкина-Тарга получено обыкновенное дифференциальное уравнение для расхода и найдено его решение. Проанализирована погрешность решения. Максимальная погрешность найденной функции расхода $Q(t, P)$ при больших P не превышает 13,5% от точного значения.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается течение вязкопластической среды (в области $0 \leqslant z \leqslant 2h$) между двумя неподвижными параллельными пластинами $z = 0$, $z = 2h$. В начальный момент времени $t = 0$ среда покоится. К ней приложен постоянный градиент давления $i = -\partial p/\partial x$, под действием которого среда приходит в движение. Требуется определить поле скорости среды. В разд. 4.2.1 было показано, что такое движение является однонаправленным с единственной компонентой скорости $v(t, z)$. Для функции $v(t, z)$ и границы ядра $z_1(t)$ краевая задача ставится так

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + i, \quad 0 \leqslant z < z_1(t),$$

$$v(t, 0) = 0, \quad v'_z(t, z_1) = 0, \quad v''_{zz}(t, z_1) = -\frac{\tau_s}{\mu(h - z_1(t))}$$

с начальными условиями $v(0, z) = 0, \quad z_1(0) = 0$.

Введем безразмерные величины: параметр P, переменные Z, t и функции $V(t, Z), \tau(t, Z)$ и $Z_0(t)$

$$v = i(h^2/\mu)V, \quad i = (\tau_s/h)P, \quad z = Zh, \quad z_0 = Z_0 h, \quad T = (\rho h^2/\mu)t\,. \tag{5.2.1}$$

Тогда для безразмерных скорости $V(t, Z)$ и функции $Z_0(t)$ получим краевую задачу

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + 1, \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant Z \leqslant Z_0(t)\,, \tag{5.2.2}$$

$$V(t, 0) = 0, \quad V'_Z(t, Z_0) = 0, \qquad V''_{ZZ}(t, Z_0) = -\frac{1}{P(1 - Z_0)}\,, \tag{5.2.3}$$

$$V(0, Z) = 0, \quad Z_0(0) = 0\,, \tag{5.2.4}$$

где V'_Z — производная функции $V(t, Z)$ по Z.

2. Решение задачи для вязкой жидкости. Приближение вязкой жидкости соответствует пределу $P \to \infty$. Из (5.2.2)–(5.2.4) получим линейную краевую задачу для классического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + 1, \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant Z \leqslant 1\,,$$

$$V(t, 0) = 0, \quad V'_Z(t, 1) = 0, \quad V(0, Z) = 0\,. \tag{5.2.5}$$

Методом разделения переменных [48, 36] можно получить для поля скорости решение в виде ряда Фурье

$$V(t,Z) = Z - \frac{1}{2}Z^2 - \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi(n-1/2)Z}{(n-1/2)^3}\exp(-\pi^2(n-1/2)^2t)\,. \tag{5.2.6}$$

Отсюда следует выражение для расхода Q

$$Q = 2\int_0^1 V\,dZ = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1/2)^{-4}\exp(-\pi^2(n-1/2)^2t)\,. \tag{5.2.7}$$

Ряд (5.2.7) сходится при всех значениях t. Однако для малых значений t эффективнее пользоваться тождественным рядом (вывод его дан ниже в п. 7.)

$$Q = 2t - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2} + r(t), \quad r(t) < \frac{16}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}e^{-1/t}\,, \tag{5.2.8}$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad a_n = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^t dt'\int_0^{t'} e^{-n^2/x}\frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{16}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}e^{-n^2/t}$$

Ряд (5.2.8) сходится существенно быстрее, чем (5.2.7), если t достаточно мало. Порядок малости остаточного члена r в (5.2.8) выше любой, как угодно большой степени t. Функция $r(t)$ неаналитична в окрестности $t = 0$ и представляется сходящимся знакопеременным рядом, остаточный член в котором меньше первого отброшенного члена. Первый линейный по t член разложения в (5.2.8) нетрудно получить из асимптотического решения (5.2.5). Однако второй член разложения $t^{3/2}$ и, тем более, последующие неаналитические члены получить обычными приемами, по-видимому, невозможно.

Продемонстрируем эффективность полученных рядов (5.2.7) и (5.2.8) для вычисления расхода $Q(t)$. Ограничимся двумя членами в частичных суммах $Q_+(t)$ ряда (5.2.7) и $Q_-(t)$ ряда (5.2.8)

$$Q_+(t) = 2/3 - 0,657\exp(-2,47t)\,, \tag{5.2.9}$$

$$Q_-(t) = 2t - 1,504t^{3/2}\,, \tag{5.2.10}$$

которые определяют соответственно верхнюю и нижнюю оценки для $Q(t)$.

Тогда расход можно определять при $t \geqslant t_0$ по формуле $Q(t) = Q_+(t) - r_+(t)$, при $t \leqslant t_0$ по формуле $Q(t) = Q_-(t) + r_-(t)$, где $r_+(t) \approx 0,00811e^{-22,2t} \leqslant 0,00811e^{-22,2t_0}$, $r_-(t) \approx 3,01t^{3/2}e^{-1/t} \leqslant 3,01t_0^{3/2}e^{-1/t_0}$.

На рис. 5.7 изображены функции $r_+(t)$, и $r_-(t)$, определяющие погрешности двучленных частичных сумм (5.2.9) и (5.2.10). Наибольшая погрешность достигается в точке $t_0 \approx 0,153$ и равна $r_+(t) = r_-(t) \approx 2,7\ 10^{-4}$, а относительная погрешность менее 0,13 %. Если определить зависимость $Q(t)$ по формуле

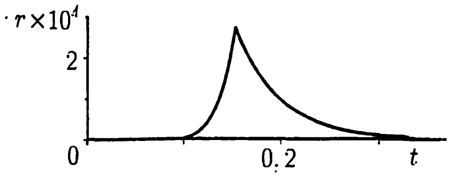


Рис. 5.7. Погрешность асимптотических разложений

$$\begin{aligned} &Q(t) = Q_+(t), \quad t \geqslant t_0, \\ &Q(t) = Q_-(t), \quad t \leqslant t_0 \approx 0,153\,, \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

то наибольшая относительная погрешность не будет превышать 0, 13%, т. е., учитывая всего два члена в рядах (5.2.7) и (5.2.8), получаем приближение (5.2.11) для расхода с тремя верными знаками.

3. Решение методом осреднения ускорения. Метод Слезкина-Тарга был предложен в работах [87, 84] для расчета течений вязкой жидкости. Этот метод использовался также для решения задачи об ударе вязкопластической среды [5, 34]. Ниже, следуя [60], излагается модификация метода Слезкина-Тарга, которая отличается от традиционного тем, что будет получено общее обыкновенное дифференциальное уравнение для расхода. Зависимость расхода от времени можно будет определять, минуя детальный расчет поля скорости, и для решения ряда практических задач этого может оказаться достаточно.

Сначала проиллюстрируем метод и его эффективность на решении задачи (5.2.5) для чисто вязкой жидкости. Ускорение в (5.2.5) заменяется на среднее по сечению, т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{dQ}{dt} \tag{5.2.12}$$

Тогда для скорости получим

$$V(Z) = (1 - (dQ/dt)/2)\left(Z - Z^2/2\right) \tag{5.2.13}$$

Интегрируя $V(t, Z)$, получим искомое уравнение для расхода Q

$$Q(t) = \int_0^2 V(Z)\,dZ = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{dQ}{dt}\right)\cdot\frac{2}{3} \tag{5.2.14}$$

Уравнение (5.2.14), удовлетворяющее условию $Q(0) = 0$, имеет решение

$$Q(t) = (2/3)(1 - e^{-3t}) \tag{5.2.15}$$

Решение (5.2.15) имеет ту же асимптотику $2t$ при $t \ll 1$, что и точное решение, а при $t \gg 1$ эта асимптотика имеет некоторое отличие от (5.2.9). Наибольшая разница равна 0,044 при $t = t_0$, что составляет 13,5% от точного значения.

Перейдем к решению краевой задачи (5.2.2)–(5.2.4) методом Слезкина-Тарга для вязкопластической среды. Заменяем ускорение на среднее (5.2.12). Тогда решение уравнения (5.2.2), удовлетворяющее первым двум условиям (5.2.3), примет вид

$$V = (1 - (dQ/dt)/2)\,(Z_0 Z - Z^2/2)\,. \qquad (5.2.16)$$

Отсюда, используя третье граничное условие (5.2.3), получим

$$1 - \frac{1}{2}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{P(1-Z_0)} \;\Rightarrow\; V = \frac{Z_0 Z - Z^2/2}{P(1-Z_0)} \qquad (5.2.17)$$

Интегрируя скорость по Z, получим выражение для расхода

$$Q = 2\int_0^{Z_0} V\,dZ + 2(1-Z_0)V(Z_0) = \frac{Z_0^2 - Z_0^3/3}{P(1-Z_0)}.$$

Его удобно выразить через безразмерную функцию давления $\Pi(Z_0) = 1/(1-Z_0)$

$$Q = \left(\frac{2}{3}\Pi + \frac{1}{3\Pi^2} - 1\right)\frac{1}{P}$$

и продифференцировать по t

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2}{3P}\left(1 - \frac{1}{\Pi^3}\right)\frac{d\Pi}{dt}.$$

Подставляя это выражение в первое равенство (5.2.17), получим уравнение для Π

$$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\Pi^3}\right)\frac{d\Pi}{dt} + \Pi = P, \quad \Pi(0) = 1\,. \qquad (5.2.18)$$

Решение уравнения (5.2.18) с начальным условием $\Pi(0) = 1$ имеет вид

$$3t = \left(1 - \frac{1}{P^3}\right)\ln\frac{P-1}{P-\Pi} - \frac{1}{P^3}\ln\Pi + \frac{1-\Pi^2}{2P\Pi^2} + \frac{1-\Pi}{P^2\Pi} \qquad (5.2.19)$$

Перейдем к получению асимптотического разложения решения краевой задачи (5.2.2)–(5.2.4) при $t \ll 1$ и сравним его с найденным приближенным решением.

4. Асимптотическое решение на малых временах. Решение задачи (5.2.2)–(5.2.4) ищем в виде разложения по степеням $\sqrt{t}$

$$V = tF(\xi) + t^{3/2}F_1(\xi) + \ldots, \quad \xi_0 = A + B\sqrt{t} + \ldots,$$
$$\xi = Z/(2\sqrt{t}), \quad \xi_0(t) = Z_0(t)/(2\sqrt{t}). \tag{5.2.20}$$

Из краевой задачи (5.2.2)–(5.2.4) для определения функций $F(\xi)$, $F_1(\xi)$ и постоянных A, B получим два уравнения второго порядка и шесть условий

$$\begin{aligned}
&F''(\xi) + 2\xi F'(\xi) - 4F(\xi) + 4 = 0,\\
&F(0) = 0, \quad F'(A) = 0, \quad F''(A) = -4/P,\\
&F_1''(\xi) + 2\xi F_1'(\xi) - 6F_1(\xi) = 0, \quad F_1(0) = 0, \quad F_1'(A) + B\,F''(A) = 0,\\
&F_1''(A) + B\,F'''(A) = -8A/P
\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Решение уравнений таково

$$F(\xi) = -2\xi^2 + 2\frac{A}{P}\exp(A^2)\left((2\xi^2+1)\int\limits_0^{\xi} e^{-x^2}\,dx + \xi e^{-\xi^2}\right),$$
$$F_1(\xi) = -\frac{4(3+2\xi^2)\xi}{3P(3+2A^2)}, \quad B = -\frac{1+2A^2}{3+2A^2} \tag{5.2.22}$$

Постоянная A найдется из уравнения

$$P = 1 + 2Ae^{A^2}\int\limits_0^A e^{-x^2}\,dx. \tag{5.2.23}$$

Правую часть можно представить рядом с бесконечным радиусом сходимости или асимптотическим рядом

$$P = \begin{cases} 1 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A^4 + \alpha_3 A^6 + \cdots + \alpha_n A^{2n} + \ldots \\ \sqrt{\pi}Ae^{A^2} + (\alpha_1 A^2)^{-1} - (\alpha_2 A^4)^{-1} + (\alpha_3 A^6)^{-1} - \cdots - \\ \qquad -(-1)^n(\alpha_n A^{2n})^{-1} + \ldots, \end{cases} \tag{5.2.24}$$

где $\alpha_n = 2^n/(2n-1)!!$, $\quad (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4/3, \alpha_3 = 8/15, \ldots)$.

5. Асимптотическое решение на больших временах. Решение краевой задачи (5.2.2)–(5.2.4) ищем в виде

$$V = V_\infty(Z) - \epsilon(Z)\exp(-\alpha^2 t), \quad Z_0 = Z_\infty - \beta\exp(-\alpha^2 t),$$
$$V_\infty(Z) = Z_\infty Z - Z^2/2, \quad Z_\infty = 1 - 1/P, \tag{5.2.25}$$

где $V_\infty(Z)$, Z_∞ — соответственно скорость и граница твердого ядра установившегося при $t \to \infty$ течения.

Подставляем (5.2.25) в (5.2.2)–(5.2.4) и учитываем только линейные по ϵ и β слагаемые. Тогда для определения функции $\epsilon(t)$ и постоянной β получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\epsilon''(Z) + \alpha^2 \epsilon(Z) = 0, \\ &\epsilon(0) = 0, \quad \epsilon'(Z_\infty) = \beta, \quad \epsilon''(Z_\infty) = -\beta P \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

Решение краевой задачи (5.2.26) представляется в виде линейной комбинации собственных функций $\epsilon_n \sin(\alpha_n Z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Наименьшему собственному значению α_0 соответствует решение

$$\epsilon(Z) = \epsilon_0 \sin \alpha_0 Z, \quad \beta = \epsilon'(Z_\infty) = \epsilon_0 \alpha_0 \cos X_0, \tag{5.2.27}$$

где α_0 — корень уравнения

$$\alpha_0 \operatorname{tg}\left(\frac{P-1}{P}\alpha_0\right) = P.$$

Его можно вычислить с помощью разложений

$$\alpha_0 = \begin{cases} P(P-1)^{-1/2}(1 - {}^1\!/_6(P-1) + {}^{11}\!/_{360}(P-1)^2), & P \leqslant 2; \\ \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2P}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3P}\right)\left(\dfrac{\pi}{2P}\right)^5 & P > 2 \end{cases} \tag{5.2.28}$$

с относительная погрешностью менее 1%.

6. Составное разложение. Неопределенный пока коэффициент ε_0 определим с помощью условия гладкой сшивки расхода $Q(t)$.

Определяем расход $Q(t)$

$$Q = 2(1 - Z_0)V(t, Z_0) + 2\int_0^{Z_0} V\, dZ$$

из разложения на малых

$$Q_- = 2t(1 - 1/P) - \frac{8}{3P} t\sqrt{t} A \exp(A^2) + \tag{5.2.29}$$

и больших временах

$$\begin{aligned} &Q_+ = Q_\infty(P) - \lambda(P)\exp(-\alpha_0^2 t), \\ &Q_\infty(P) = \frac{(2P+1)(P-1)^2}{3P^4}, \quad \lambda = 4\frac{\varepsilon_0}{P}\sin\left(\frac{\alpha_0(P-1)}{P}\right) \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

Потребуем, чтобы в некоторой промежуточной точке t_0 выполнялись условия непрерывности расхода и его производной (условие гладкой сшивки)

$$Q_+(t_0) = Q_-(t_0), \quad Q'_+(t_0) = Q'_-(t_0). \tag{5.2.31}$$

Таким образом, найдем

$$t_0 = \frac{P-1}{6,5P-1,2}, \quad \lambda = \exp(\alpha_0^2 t_0)(Q_\infty - Q_-(t_0)). \tag{5.2.32}$$

Величина t_0 — определяет границу действия двух асимптотик $Q_+(t)$ и $Q_-(t)$. Погрешность в ее определении мало влияет на значение величины λ. Поэтому для функции $t_0(P)$ приведена простая интерполяция. Составное разложение для поля скорости $V(t,Z)$, расхода $Q(t)$ и границы ядра $Z_0(t)$ определяется по разложениям на малых временах при $t \leqslant t_0$ и больших временах при $t \geqslant t_0$. Перейдем к анализу полученных решений.

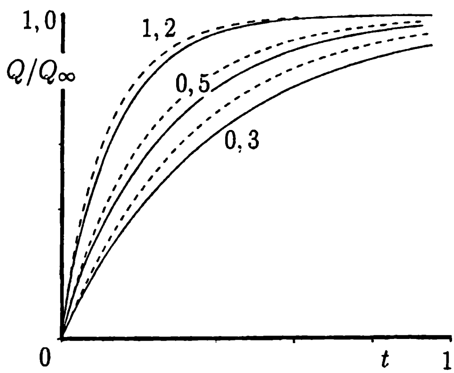


Рис. 5.8. Сравнение асимптотического и приближенного решений

На рис. 5.8 представлены зависимости $Q(t)/Q_\infty$ при трех различных значениях параметра A, значения которого указаны ($A = 0,3$; $P(A) = 1,19$; $A = 0,5$; $P(A) = 1,59$; $A = 1,2$, $P(A) = 9,17$). Сплошной линией обозначен расчет по асимптотическим формулам (5.2.29), (5.2.30), штриховой линией — расчет по приближенному решению (5.2.19), полученному методом Слезкина-Тарга.

Зависимость $Q(t)/Q_\infty$ при $A = 1,2$ мало отличается от точной зависимости для вязкой жидкости (5.2.9)–(5.2.11). Наибольшее отличие приближенного решения (5.2.19) от точного достигает значения 0,066 при $t = 0,39$, что составляет 9,5% от точного значения. Наибольшая относительная ошибка решения (5.2.19) равна 13,5% при $t_0 \approx 0,153$. При уменьшении параметра P относительная ошибка уменьшается. Таким образом, относительная погрешность для расхода, вычисленного методом Слезкина-Тарга, не превышает 13,5%.

Зависимости от параметра P времени установления t_Q для расхода и t_z для границы твердого ядра определяются из условия того, что соответствующая величина отличается от своего предельного значения ровно на 1%. С помощью асимптотических зависимостей на больших временах с постоянными (5.2.32) найдем

$$t_Q = \frac{1}{\alpha_0^2} \ln \frac{100\lambda}{Q_\infty}, \quad t_z = \frac{1}{\alpha_0^2} \ln \frac{25\lambda\alpha_0}{P-1}.$$

При $P-1 \ll 1$ найдем $t_Q \approx 4,54(P-1)$, $t_z \approx 3,15(P-1)$. При $P \gg 1$ найдем $t_Q \approx 1,86$, $t_z \approx 1,5 - 0,405 \ln P$.

На рис. 5.9 представлены зависимости $t_Q(P)$ и $t_z(P)$. Функция $t_Q(P)$ монотонно возрастает. Функция $t_z(P)$ возрастает на участке $0 \leqslant P < 2,4$, при $P \approx 2,4$ она достигает наибольшего значения $t_z \approx 0,93$, и при $P > 2,4$ медленно убывает. При $P \approx 28$ величина $t_z \approx t_0$. При $P > 28$ время установления границы твердого ядра меньше t_0 и его следует находить из внутренней асимптотики $Z_-(t)$, откуда

$$t_z \approx \frac{1}{4A^2} \approx \frac{1}{4 \ln P}$$

Таким образом, при большом значении P граница твердого ядра $Z_0 = 1-1/P$ устанавливается очень быстро и затем происходит более длительный процесс установления скорости и расхода.

7. Приложение. Вывод (5.2.8) можно осуществить с помощью формулы Пуассона [6], с.167

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x - 2n\pi a x} = x^{-1/2} e^{\pi a^2 x} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi/x} \cos n\pi 2a\right) \tag{5.2.33}$$

следующим образом. Продифференцируем дважды по t ряд (5.2.7)

$$Q''(t) = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2(n-1/2)^2 t} = -2e^{-\pi^2 t/4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t + n\pi^2 t}$$

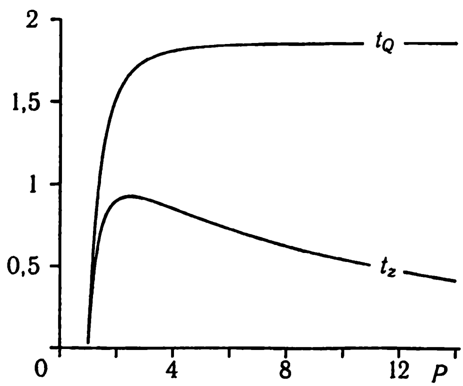


Рис. 5.9. Время установления расхода и границы ядра

Полагая $\pi t = x$ и $Q''(t) = -2e^{-\pi x/4} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-n^2\pi x + n\pi x)$, преобразуем сумму по формуле Пуассона (5.2.33) при $a = -1/2$

$$Q''(t) = -\frac{2}{\sqrt{x}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2\pi/x}\right)$$

Возвращаясь к исходному аргументу $t = x/\pi$, получим

$$Q''(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi t}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2/t}\right) \tag{5.2.34}$$

Полагаем $t = 0$ в ряде (5.2.7) для $Q(t)$ и в его производной $Q'(t) = 0$. Пользуясь известными значениями для числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n - 1/2)^{-4} = \frac{\pi^4}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n - 1/2)^{-2} = \frac{\pi^2}{2},$$

получим $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 2$. Отсюда, интегрируя дважды ряд (5.2.34) получим ряд (5.2.8).

Глава 6

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

В этой и следующей главе описывается один из механизмов перемешивания в средах, движущихся по периодическому во времени закону. Он связан с особым характером движения частиц среды. Для описания соответствующих эффектов потребуется изложить основные сведения теории динамических систем и гамильтоновой механики. Более полное освещение этих вопросов имеется в монографиях [1, 31, 44, 91, 94].

6.1. Сведение задачи о движении частиц к гамильтоновой системе

1. Динамические системы. Пусть несжимаемая среда заполняет некоторый объем, границы которого движутся по заданному закону, периодическому во времени. Компоненты скорости v_j частиц среды являются дифференцируемыми функциями координат x_i и времени. Тогда закон движения частиц среды будет находится из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = v_i(t, x_j), \quad x_i(t_0) = x_{0i}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Эта задача называется *динамической системой.*

Трехмерное пространство переменных x_i, $i = 1, 2, 3$ называется *фазовым пространством.*

Система называется *автономной*, если функции $v_i(x_j)$ явно не зависят от времени. В противном случае система называется неавтономной. Наибольшее внимание мы будем уделять изучению неавтономных систем, в которых компоненты скорости имеют период по времени $v_j(t + T, x_i) = v_j(t, x_i)$ равный T. Такие неавтономные системы особенно важны для моделирования различных технологических процессов.

2. Гамильтоновы системы. Выделим класс неавтономных периодических систем, описывающих плоскопараллельные движения несжимаемой среды. Поле скорости имеет две компоненты v_x и v_y, зависящие от времени t и двух пространственных координат x и y. Уравнение неразрывности $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$

разрешается с помощью функции тока $H(t, x, y)$

$$v_x = \partial H/\partial y, \quad v_y = -\partial H/\partial x.$$

Тогда уравнения движения частиц жидкости будут иметь вид уравнений Гамильтона. Динамическая система превращается в гамильтонову систему или, более определенно, в задачу Коши для уравнений Гамильтона системы с одной степенью свободы. Теория таких систем называется гамильтоновой механикой и излагается в курсах теоретической механики [28]. Здесь и далее привычное в гидродинамике обозначение для функции тока Ψ (см. 2.5.6) заменено на еще более употребительное обозначение для функции Гамильтона H.

Обозначим координаты индивидуальной частицы среды через X и Y Тогда ее траекторию движения можно вычислить, решая следующую задачу Коши

$$\begin{aligned} &\dot{X} = H_Y, \quad \dot{Y} = -H_X, \quad X(t_0) = X_0, \quad Y(t_0) = Y_0 \\ &H_X = \partial H/\partial X, \; H_Y = \partial H/\partial Y \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Таким образом, *траектории движения частиц несжимаемой среды определяются из решения гамильтоновой системы.*

3. Теорема Лиувилля. Верно и обратное утверждение. Оно в гамильтоновой механике называется теоремой Лиувилля.

Рассмотрим отображение $(X_0, Y_0) \to (X(t), Y(t))$, где $X(t), Y(t)$ – решение задачи (6.1.1). Такое отображение называется отображением на фазовом потоке системы (6.1.1). При этом отображении область D_0 переменных X_0, Y_0 переходит в область D переменных X, Y Площади же этих областей равны. Этот результат составляет содержание теоремы Лиувилля. Формулировка ее такова.

Теорема Лиувилля. *При отображении $(X_0, Y_0) \to (X, Y)$ на фазовом потоке гамильтоновой системы площадь области сохраняется*

$$\int\limits_D dXdY = \int\limits_{D_0} dX_0 dY_0 \Leftrightarrow \frac{\partial(X, Y)}{\partial(X_0, Y_0)} = 1.$$

Для двумерных отображений характерны свойства:

1) несжимаемость: $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$, $(v_x = \dot{X},\ v_y = \dot{Y})$;

2) сохранение фазового объема: $\partial(X, Y)/\partial(X_0, Y_0) = 1$;

3) существование функции тока для поля скорости $v_x = H_Y,\ v_y = -H_X$ (гамильтоновость).

Перечисленные свойства 1), 2) и 3) эквивалентны друг другу. Этот результат будем называть теоремой Лиувилля для двумерных отображений.

Также как и динамические системы, гамильтоновы системы могут быть автономными и неавтономными. Главное внимание уделим неавтономным гамильтоновым системам с периодическим по времени гамильтонианом

$H(t, X, Y) = H(t + T, X, Y)$. Перейдем к описанию методов исследования гамильтоновых систем.

6.2. Первый интеграл гамильтоновой системы

1. Понятие первого интеграла. Пусть функция Гамильтона определена в некоторой области D фазовой плоскости. Тогда скалярная функция $G(t, X, Y)$, не являющаяся тождественно константой, определенная в той же области D, что и рассматриваемая гамильтонова система, называется первым интегралом этой системы, если она остается постоянной вдоль любого решения этой системы [28]. Кривые, задаваемые уравнением $G(t, X, Y) = \text{const}$ называются интегральными кривыми. Если функция $G(t, X, Y)$ дифференцируема, то необходимым и достаточным условием существования первого интеграла является следующее тождество:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \{H, G\} = 0, \quad \{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial Y}\frac{\partial G}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial X}\frac{\partial G}{\partial Y}.$$

Выражение $\{H, G\}$ называется *скобкой Пуассона* двух функций $H(X, Y)$ и $G(X, Y)$. Этот факт следует из правила дифференцирования сложной функции $G(t, X(t), Y(t))$ по времени и уравнений Гамильтона (6.1.1). Первый интеграл позволяет расслоить фазовую плоскость на интегральные кривые. Они непрерывно заполняют все фазовое пространство.

Системы, у которых существует первый интеграл, называются интегрируемыми системами. Решения интегрируемых гамильтоновых систем можно получить в виде квадратур. Однако, обратное утверждение не верно. Системы могут иметь решение в виде квадратур, и даже выражаться через элементарные функции, но могут не иметь при этом первого интеграла. Простым примером неинтегрируемой системы является линейный осциллятор с трением $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ [28], хотя решение этой системы в элементарных функциях выписывается без труда. Приведенный пример относится к негамильтоновой динамической системе. Ниже мы увидим, такие примеры и для гамильтоновых систем.

Вообще, решение динамической системы существует всегда для достаточно гладких правых частей. Это диктуется только теоремой существования решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Часто это решение представляется рядами, квадратурами или же элементарными функциями. Но первый интеграл существует в исключительных случаях. Некоторые случаи интегрируемости гамильтоновых систем перечислены ниже.

2. Автономные гамильтоновы системы. Если функция Гамильтона явно не зависит от времени, то необходимое и достаточное условие существования первого интеграла $dH/dt = \{H, H\} = 0$ тождественно выполняется и, следова-

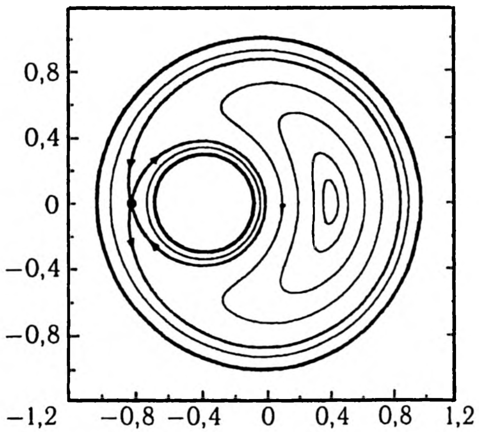


Рис. 6.1. Линии тока между двумя эксцентрично вращающимися цилиндрами

тельно, всегда имеется первый интеграл

$$H(X, Y) = \text{const}.$$

В теоретической механике этот интеграл называется интегралом энергии. Фазовые траектории являются изолиниями функции Гамильтона. В гидродинамике этот факт также хорошо известен: для установившегося течения на линии тока функция тока $H(X, Y)$ постоянна. Таким образом, гамильтоновы системы имеют простую гидродинамическую интерпретацию. Фазовый поток гамильтоновой системы — это течение несжимаемой среды. Имея функцию тока (гамильтониан), легко построить картину течения. Для этого надо изобразить изолинии функции тока.

На рис. 6.1 показаны линии тока установившегося течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами [99]. Внешний цилиндр имеет радиус $R_2 = 1$ и вращается с угловой скоростью $\Omega_1 = 1$, а внутренний — $R_1 = 0.3$ и вращается с угловой скоростью $\Omega_1 = -4$ в противоположном направлении. Эксцентриситет (отношение расстояния между центрами к разности радиусов) равен $O_1O_2/(R_1 - R_2) = 0,5$. Общее решение такой задачи дано Жуковским и Чаплыгиным (1904). Течение (см. рис. 6.1) имеет две критические точки, в которых $\dot{X} = H_Y = 0, \quad \dot{Y} = -H_X = 0$. Одна точка — it эллиптического типа. В ее малой окрестности линии тока — эллипсы. Вторая точка — *гиперболического типа*. В ее малой окрестности линии тока — гиперболы. Точка эллиптического типа соответствует устойчивому положению равновесия. Гамильтониан в этой точке имеет строгий максимум или минимум. При любом достаточно малом отклонении от положения равновесия частица жидкости вечно движется в малой окрестности этой точки.

Гиперболическая неподвижная точка соответствует неустойчивому положению равновесию. При любом, как угодно малом, отклонении от положения равновесия частица жидкости за достаточно большое время отклоняется от положения равновесия на конечное расстояние. В точке равновесия функция Гамильтона не имеет ни локального минимума ни максимума.

Частицы, находящиеся на одной линии тока, будут находится на ней вечно. Если окрасить эти частицы, то краска по другим линиям тока не распространится. Окрашенной останется только одна линия. Таким образом, если первый интеграл существует (а это будет для любого установившегося течения), то перемешивания пассивной примеси не произойдет.

Ниже будет показано, что неавтономные системы первым интегралом, как правило, не обладают, и в этом случае перемешивание пассивной примеси возможно.

3. Неавтономные гамильтоновы системы. Первый интеграл неавтономных гамильтоновых систем существует лишь в исключительных случаях. Примером такой интегрируемой системы является система с гамильтонианом

$$H = \varepsilon \left[\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + Xb\sin t\right] \tag{6.2.1}$$

Скорость частицы жидкости является суммой двух слагаемых

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon Y \\ -\varepsilon X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon b\sin t \end{pmatrix}$$

Первое слагаемое соответствует вращению частицы с угловой скоростью ε относительно начала координат, второе слагаемое — поступательному колебательному движению параллельно оси Y Траектория движения находится из решения линейной системы дифференциальных уравнений. Эту же систему можно записать в виде уравнения второго порядка для $X(t)$

$$\ddot{X} + \varepsilon^2 X = -\varepsilon^2 b\sin t,$$

которое описывает вынужденные колебания линейного осциллятора единичной массы под действием внешней силы $-\varepsilon^2 b\sin t$.

Решение, удовлетворяющее начальным условиям $X(t_0) = X_0$, $Y(t_0) = Y_0$, можно представить в виде

$$X - X_c = (X_0 - X_c)\cos(\varepsilon(t - t_0)) + (Y_0 - Y_c)\sin(\varepsilon(t - t_0)) + A(t),$$

$$Y - Y_c = -(X_0 - X_c)\sin(\varepsilon(t - t_0)) + (Y_0 - Y_c)\cos(\varepsilon(t - t_0)) + B(t),$$

$$X_c = \frac{b\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\sin t_0,$$

$$Y_c = \frac{b\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\cos t_0,$$

$$A(t) = \frac{b\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}(\sin t - \sin t_0), \quad B(t) = \frac{b\varepsilon}{1-\varepsilon^2}(\cos t - \cos t_0).$$

Первый интеграл имеет следующий вид:

$$G(t, X, Y) = R^2,$$

$$G(t, X, Y) = [X - X_c - A(t)]^2 + [Y - Y_c - B(t)]^2$$

$$R^2 = (X_0 - X_c)^2 + (Y_0 - Y_c).$$

В фазовом пространстве t, X, Y интегральные поверхности $G = R^2$ можно представить себе так. Сечением этой поверхности $t = \text{const}$ является окружность радиуса R с центром $X_c + A(t)$, $Y_c + B(t)$. Радиус окружности не зависит от t, а координаты центра меняются по гармоническому закону. Таким образом, интегральная поверхность является криволинейной трубкой. Ось трубки в пространстве t, X, Y представляет собой винтовую линию с шагом $t = 2\pi$. Интегральные поверхности заполняют все трехмерное фазовое пространство. Если рассматривать t как угловую координату в цилиндрической системе координат, то в ней интегральные поверхности будут торами.

Список интегрируемых гамильтоновых систем включает в себя все автономные системы аналогичные (6.2.1) с гамильтонианом, у которого квадратичная часть не зависит от времени. Все остальные гамильтоновы системы за редким исключением не имеют первого интеграла.

6.3. Канонические преобразования

6.3.1. Определение и общие свойства

1. Определение канонического преобразования. Каноническое преобразование на плоскости можно определить так. *Преобразование переменных $q(t, Q, P)$, $p(t, Q, P)$ называется каноническим, если его якобиан равен единице*

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = 1.$$

Иначе говоря, каноническое преобразование $(q, p) \to (Q, P)$ сохраняет площадь.

Следствие. Если преобразование $(q, p) \to (Q, P)$ — каноническое, то обратное преобразование $(Q, P) \to (q, p)$ — тоже каноническое.

2. Преобразование уравнений Гамильтона при канонической замене переменных. Гамильтонова система $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$ при каноническом преобразовании $(q, p) \to (Q, P)$ переходит опять в гамильтонову систему с новым, вообще говоря, гамильтонианом $\widetilde{H}(t, Q, P)$.

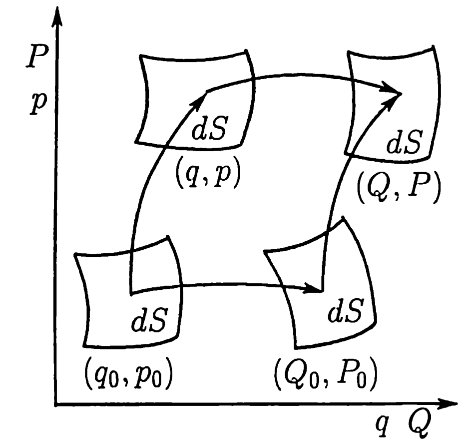


Рис. 6.2. Преобразование уравнений Гамильтона при канонической замене переменных

Доказательство. Отображение $(q_0,p_0) \to (q,p)$ сохраняет площадь. Канонические отображения $(q_0,p_0) \to (Q_0,P_0)$ и $(q,p) \to (Q,P)$ тоже сохраняют площадь. Значит и $(Q_0,P_0) \to (Q,P)$ сохраняет площадь и по теореме Лиувилля система $(Q_0,P_0) \to (Q(t),P(t))$ — гамильтонова, что и требовалось доказать. Пояснение к доказательству дано на рис. 6.2. Площадь окрестности точки (q_0,p_0) равная dS сохраняется при всех отображениях.

3. О валентных канонических преобразованиях. В некоторых книгах [4, 19] вводят расширенный класс канонических преобразований в виде суперпозиции канонического преобразования $(q,p) \to (Q,P)$ и преобразования $Q = \tilde{Q}/c,\ P = \tilde{P}$. Этот класс характеризуется дополнительным параметром c, который называется валентностью. С учетом валентности преобразования тоже сохраняют гамильтонову форму уравнений. Верно и обратное утверждение: преобразование $(q,p) \to (Q,P)$, сохраняющее гамильтонову форму уравнений, является каноническим валентности c.

Мы будем следовать монографиям [1, 28, 42, 88], в которых под каноническим преобразованием понимают унивалентное преобразование, т. е. имеющее валентность $c = 1$. Данное выше определение является унивалентным каноническим преобразованием.

Свойство сохранения гамильтоновой формы уравнений при канонических преобразованиях играет важную роль в теории гамильтоновых систем. Его также часто берут за определение канонического преобразования [28, 42, 88]. Хотя здесь, не учитывая валентность, часто допускается неточность в рассуждениях (см. замечания в книге [1] о таких неточностях, допущенных в книге [42]).

4. Критерии каноничности для независящих от времени преобразований. Для преобразований $q(Q,P), p(Q,P)$ имеют место следующие два критерия каноничности:

1) Выражение $PdQ - pdq$ является полным дифференциалом;

2) Для любого гамильтониана $H(t,q,p)$ замена $q(Q,P), p(Q,P)$ переводит уравнения Гамильтона в переменных q, p в уравнения Гамильтона в переменных Q, P с новым гамильтонианом, равным $\tilde{H}(t,Q,P) = H(t,q(Q,P),p(Q,P))$.

Доказательство критерия 1) вытекает из теоремы Грина для произвольного интеграла по замкнутому контуру ∂d, охватывающего область d и такой же теоремы для преобразованных контура ∂D и области D

$$\oint\limits_{\partial d} pdq = \int\limits_{d} dqdp, \quad \oint\limits_{\partial D} PdQ = \int\limits_{D} dQdP. \tag{6.3.1}$$

Правые части равенств — это площади области d и преобразованной D. Они равны в силу каноничности преобразования. Значит интеграл по любому замкнутому контуру от разности $PdQ - pdq$ равен нулю, т. е. выражение $PdQ - pdq$ есть полный дифференциал, что и требовалось доказать. Отсюда следует, что величина интеграла по контуру $\oint pdq$ остается неизменной при любом каноническом преобразовании. Эта величина называется *относительным интегральным инвариантом Пуанкаре.*

Доказательство критерия 2) можно провести с помощью следующей леммы

Лемма. *Уравнения Гамильтона $\dot q = H_p$, $\dot p = -H_q$ с функцией Гамильтона $H(t,q,p)$ при автономной замене переменных $q(Q,P), p(Q,P)$ с неравным нулю якобианом $\Delta \neq 0$ преобразуются в уравнения*

$$\dot Q = \frac{1}{\Delta}\widetilde H_P, \quad \dot P = -\frac{1}{\Delta}\widetilde H_Q,$$
$$\Delta = \frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q},$$
$$\widetilde H(t,Q,P) = H(t,q(Q,P),p(Q,P)).$$

Отсюда немедленно следует критерий 2).

Докаазательство. Дифференцируя по времени автономные замены, получим

$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial q}{\partial Q}\dot Q + \frac{\partial q}{\partial P}\dot P, \\ \dot p = \frac{\partial p}{\partial Q}\dot Q + \frac{\partial p}{\partial P}\dot P \end{cases}$$

Разрешаем линейную систему по правилу Крамера

$$\dot Q = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dot q & \partial q/\partial P \\ \dot p & \partial p/\partial P \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial p}{\partial P}\dot q - \frac{\partial q}{\partial P}\dot p\right),$$

$$\dot P = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \partial q/\partial Q & \dot q \\ \partial p/\partial Q & \dot p \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\partial p}{\partial Q}\dot q + \frac{\partial q}{\partial Q}\dot p\right).$$

Далее подставляем в правые части $\dot q = H_p$, $\dot p = -H_q$ и, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получим

$$\dot Q = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial H}{\partial q}\right) = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \widetilde H}{\partial P},$$

$$\dot{P} = -\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial H}{\partial q}\right) = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q},$$

что и требовалось доказать.

5. Теорема о каноничности отображения на фазовом потоке. Пусть $q(t), p(t)$ решение задачи Коши для уравнений Гамильтона. Тогда отображением на фазовом потоке называется взаимно однозначное соответствие точки q_0, p_0 в момент времени t_0 точке q, p в момент времени t. На гидродинамическом языке отображение на фазовом потоке представляет собой перенос частиц несжимаемой жидкости по своим траекториям. Площадь, занимаемая частицами, сохраняется и, следовательно, *отображение на фазовом потоке — каноническое.* Такой способ замены переменных весьма эффективен при асимптотическом построении решения гамильтоновой системы.

6.3.2. Теорема об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана

1. Формулировка теоремы. *Пусть при канонической замене $q(t, Q, P), p(t, Q, P)$ гамильтониан $H(t, q, p)$ преобразуется в гамильтониан $\widetilde{H}(t, Q, P)$, а замкнутый контур c в пространстве (q, p, t) преобразуется в замкнутый контур C в пространстве (Q, P, t). Тогда циркуляция вектора $(p, 0, -H)$ по контуру c равна циркуляции вектора $(P, 0, -\widetilde{H})$ по контуру C:*

$$\oint_c (p dq - H dt) = \oint_C (P dQ - \widetilde{H} dt)$$

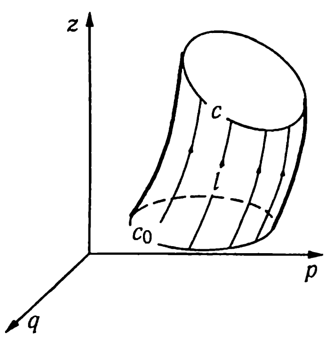


Рис. 6.3. Трубка тока

Циркуляция по контуру c

$$\oint_c (p dq - H dt) \qquad \text{(c)}$$

называется *интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана.*

Теорему об интегральном инварианте можно переформулировать более кратко.

Циркуляция, определяемая формулой (c), при каноническом преобразовании сохраняется, т. е. является инвариантом.

2. Определения. Определение 1. Векторное поле $\vec{v} = (\dot{q}, \dot{p}, \dot{z})$ для системы дифференциальных уравнений $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$, $\dot{z} = 1$ в пространстве q, p, t назовем *полем скорости гамильтоновой системы* $H(t, q, p)$.

Определение 2. *Линией тока* l гамильтоновой системы $H(t,q,p)$ называется линия, у которой касательная в каждой точке направлена по скорости $\vec{v} = (\dot{q}, \dot{p}, \dot{z})$.

Определение 3. *Трубкой тока* называется цилиндрическая поверхность, состоящая из линий тока l (см. рис. 6.3).

Пусть c — замкнутый контур в пространстве q, p, z. Проведем через каждую точку контура c линию тока l. Цилиндрическую поверхность, состоящую из этих линий тока назовем *трубкой тока, натянутой на контур* c. Контур c называется *контуром, образующим трубку тока*. Для данной трубки тока образующий контур c можно получить как пересечение его с произвольной поверхностью $z = z(q,p)$. На рис. 6.3 изображены два контура c и c_0, образующих одну и ту же трубку тока. Эта трубка тока натянута на контуры c и c_0.

3. Лемма Стокса. *Для данной трубки тока циркуляция вектора* $\vec{F} = (p, 0, -H)$ *по любому ее образующему контуру с постоянна.*

$$\oint\limits_c \vec{F}\vec{d}r = \oint\limits_c (pdq - Hdt) = \text{const}$$

Доказательство. Возьмем два контура c_0 и c, образующих данную поверхность тока (см. рис. 6.3). Тогда по теореме Стокса циркуляция по контуру вектора скорости равна потоку вектора вихря через поверхность, натянутую на контур. Отсюда получим

$$\oint\limits_c \vec{F}\vec{d}r - \oint\limits_{c_0} \vec{F}\vec{d}r = \int\limits_s \mathrm{rot}\vec{F}\,nds,$$

где s — поверхность тока, натянутая на контуры c и c_0, $\vec{n}$ — нормаль к поверхности тока, вектор $\mathrm{rot}\vec{F}$ определится так

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial q & \partial/\partial p & \partial/\partial z \\ p & 0 & -H(t,q,p) \end{vmatrix} = -H_p\vec{i} + H_q\vec{j} - \vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ — единичные базисные векторы в пространстве (q, p, z).

Отсюда $\mathrm{rot}\vec{F} = -\vec{v}$ в силу определения 1. Поле скорости $\vec{v}$ ортогонально нормали $\vec{n}$ на трубке тока, поэтому на поверхности трубки $\mathrm{rot}\vec{F}\,\vec{n} = -\vec{v}\,\vec{n} = 0$. Таким образом,

$$\oint\limits_c \vec{F}\vec{d}r = \oint\limits_{c_0} \vec{F}\vec{d}r \;\Rightarrow\; \oint\limits_c (pdq - Hdt) = \oint\limits_{c_0} (pdq - Hdt),$$

что и требовалось доказать.

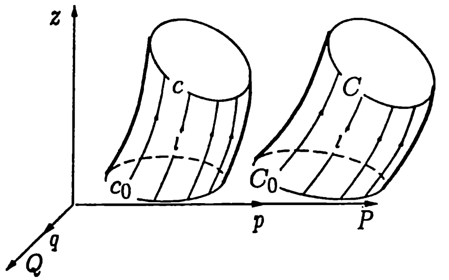


Рис. 6.4. Трубки тока для исходной и преобразованной систем

4. Доказательство теоремы об инварианте Пуанкаре-Картана. Возьмем произвольный замкнутый контур c и натянем на него трубку тока s гамильтоновой системы $H(t, q, p)$ (рис. 6.4). При сечении трубки тока плоскостью $z = z_0$ образуется контур c_0.

При канонической замене контуры c, трубка тока s и контур c_0 преобразуются соответственно в C, S и C_0, изображенные также на рис. 6.4.

Циркуляции по контурам c_0 и C_0 равны

$$\oint\limits_{c_0}(p dq - H dt) = \oint\limits_{C_0}(P dQ - \widetilde{H} dt).$$

Действительно, в силу $dt = dz = 0$, циркуляции равны относительному интегральному инварианту Пуанкаре. Он, согласно равенству (6.3.1), не меняется при каноническом преобразовании, не зависящим от времени.

По лемме Стокса циркуляция по контуру c_0 равна циркуляции по контуру c. Так же точно циркуляция по контуру C_0 равна циркуляции по контуру C. Отсюда следует

$$\oint\limits_{c}(p dq - H dt) = \oint\limits_{c_0}(p dq - H dt) = \oint\limits_{C_0}(P dQ - \widetilde{H} dt) = \oint\limits_{C}(P dQ - \widetilde{H} dt)$$

и доказательство завершено.

6.3.3. Общий критерий каноничности преобразований

1. Вывод и формулировка критерия. Из векторного анализа известно, что дифференциальная форма dF будет полным дифференциалом тогда и только тогда, когда интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю. Отсюда из теоремы об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана следует, что выражение

$$P dQ - p dq - [\widetilde{H}(t, Q, P) - H(t, q, p)] dt = dF, \tag{6.3.2}$$

является полным дифференциалом.

Здесь q, p, H — исходная гамильтонова система, а $Q, P, \widetilde{H}$ — преобразованная с помощью канонической замены $q, p, H \to Q, P, \widetilde{H}$. Полученное соотношение (6.3.2) является критерием каноничности общей замены переменных

$q(t,Q,P), p(t,Q,P)$. В нем F — произвольная функция трех независимых переменных, например, t, q и p, а dF ее полный дифференциал

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial p}dp.$$

Общий критерий включает в себя и ранее полученный критерий для независящей от времени замены переменных $q(Q,P), p(Q,P)$. Он справедлив для гамильтоновых систем произвольного порядка [1, 28].

2. Примеры канонических преобразований. Пример 1. *Канонические полярные координаты* или *переменные действие-угол* задаются формулами

$$P = (q^2 + p^2)/2, \quad Q = \operatorname{arctg}(q/p).$$

Имеем

$$dQ = \frac{1}{1 + q^2/p^2}\frac{pdq - qdp}{p^2} = \frac{pdq - qdp}{q^2 + p^2},$$

$$PdQ - pdq = (pdq - qdp)/2 - pdq = d(-qp/2).$$

Согласно критерию каноничности 1) преобразование каноническое.

Это преобразование очень полезно при исследовании систем с гамильтонианом аналогичным осциллятору Дуффинга $H = \left[q^2 + p^2 + q^4/2\right]/2$. В новых переменных гамильтониан упростится $P + P^2\sin^4 Q$.

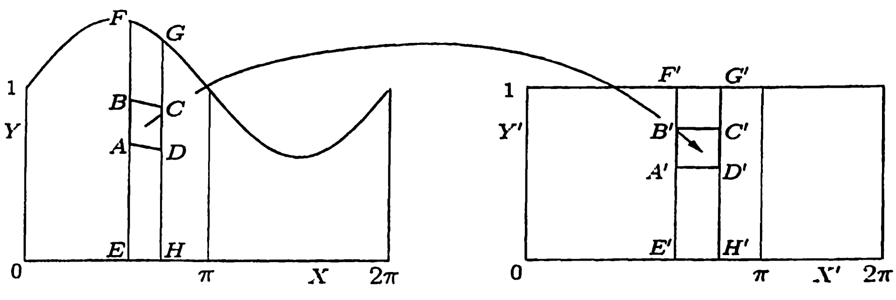


Рис. 6.5. Отображение криволинейной области на прямоугольник

Пример 2. Каноническое преобразование криволинейной области в прямоугольник.

Область $0 \leqslant X \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant Y \leqslant 1 + h(t, X)$ с криволинейной границей, площади 2π можно отобразить каноническим преобразованием в прямоугольник $0 \leqslant X' \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant Y' \leqslant 1$ следующим образом (рис. 6.5):

$$X' = X + \int_0^X h(t,X)dX, \quad Y' = Y/(1+h(t,X)).$$

Малая трапеция $ABCD$ отображается на прямоугольник $A'B'C'D'$ той же площади. Отображение на фиксированный прямоугольник удобно при исследовании движения частиц несжимаемой среды в области с меняющейся во времени границей [64, 70, 67]. Гамильтонова система сохраняет свой вид. Выражение преобразованного гамильтониана приводится ниже в разд. 6.3.5 п.3, пример 3.

6.3.4. Отображение малой области

канонического преобразования $Q(q,p), P(q,p)$ определяется линеаризованным преобразованием с помощью матрицы Якоби A

$$\begin{aligned} \delta Q &= A_{11}\delta q + A_{12}\delta p \\ \delta P &= A_{21}\delta q + A_{22}\delta p, \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} \partial Q/\partial q & \partial Q/\partial p \\ \partial P/\partial q & \partial P/\partial p \end{pmatrix}$$

с определителем единица: $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$. При поворотах системы координат элементы матрицы преобразуются по тензорному закону (см. главу 1).

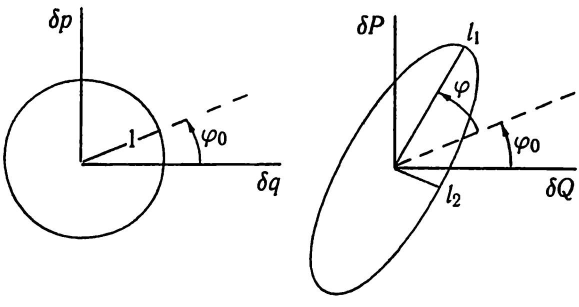


Рис. 6.6. Отображение малой области

Выражения

$$i_1 = (A_{11} + A_{22})/2, \; i_2 = (A_{12} - A_{21})/2$$

являются независимыми инвариантами и при поворотах не меняются. Они определяют внутреннюю, независящую от выбора системы координат структуру отображения.

По известной в аналитической геометрии теореме о полярном разложении матрица A всегда представляется в виде матрицы поворота и симметрической матрицы. В свою очередь поворотом системы координат симметрическая матрица может быть приведена к главным осям. Таким образом, получим

$$A = C(\varphi)C(\varphi_0)\begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}C(-\varphi_0), \quad C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad (6.3.3)$$
$$l_1 l_2 = 1.$$

Отсюда следует, что отображение с матрицей A преобразует единичный круг в эллипс той же площади с осями l_1, l_2. Угол φ_0 определяет направление волокна в круге $(\delta q)^2 + (\delta p)^2 = 1$, который при отображении максимально удлиняется. Угол φ определяет поворот этого волокна (рис. 6.6). С помощью соотношений (6.3.3) вычисляются: наибольшее l_1 и наименьшее l_2 удлинения волокон, а также углы φ_0 и φ

$$l_1 = R + \sqrt{R^2 - 1}, \quad l_2 = R - \sqrt{R^2 - 1},$$
$$R^2 = i_1^2 + i_2^2, \qquad \operatorname{tg}\varphi = -i_2/i_1, \qquad (6.3.4)$$
$$\operatorname{tg}(\varphi + 2\varphi_0) = (A_{12} + A_{21})/(A_{11} - A_{22}).$$

Характеристики l_1, l_2, φ являются внутренними инвариантами отображения, а φ_0 зависит от выбора системы координат.

6.3.5. Производящие функции

Производящие функции позволяют конструктивно строить канонические преобразования.

1. Производящие функции Якоби. Обратимся к общему критерию каноничности (6.3.2). В полном дифференциале dF можно выделить дифференциал функции зависящей от t, q, P

$$PdQ - pdq - (\widetilde{H} - H)dt = d(PQ) - QdP - pdq - (\widetilde{H} - H)dt = d(PQ) - dS.$$

Правая часть есть полный дифференциал, следовательно дифференциальная форма

$$QdP + pdq + (\widetilde{H} - H)dt = dS(t, q, P) \qquad (6.3.5)$$

тоже полный дифференциал функции S трех независимых переменных t, q, P. Эта функция называется *производящей функцией* и позволяет конструктивно строить канонические преобразования. Делается это так. Берется произвольная дифференцируемая функция смешанных переменных $S(t, q, P)$ и составляются соотношения для ее частных производных, вытекающих из (6.3.5)

$$Q = S_P(t, q, P), \quad p = S_q(t, q, P).$$

Разрешая первое уравнение относительно q, получим зависимость $q(t, Q, P)$. Подставляя ее во второе уравнение, получим вторую зависимость $p = S_q(t, q(t, Q, P), P)$. Система с гамильтонианом $H(t, q, p)$ переходит в систему с новым гамильтонианом

$$\widetilde{H}(t,Q,P) = S_t(t,q(t,Q,P),P) + H(t,q(t,Q,P),p(t,Q,P)). \qquad (6.3.6)$$

Таким образом, формула полного дифференциала (6.3.5) позволяет не только строить каноническое преобразование, но и находить по данному гамильтониану исходной системы преобразованный гамильтониан.

В полном дифференциале dF можно выделить дифференциал функции, зависящей от t, Q, p

$$PdQ - pdq - (\widetilde{H} - H)dt = -d(pq) + PdQ + qdp - (\widetilde{H} - H)dt$$

Отсюда получаем полный дифференциал второй производящей функции $R(t,Q,p)$ и формулы канонического преобразования

$$\begin{aligned} &dR = -PdQ - qdp + (\widetilde{H} - H)dt \Rightarrow \\ &P = -R_Q(t,Q,p), \quad q = -R_p(t,Q,p), \\ &\widetilde{H}(t,Q,P) = R_t(t,Q,p) + H(t,q,p). \end{aligned} \qquad (6.3.7)$$

Аналогично можно найти еще две производящие функции. Одна зависит от t, q, Q, другая от t, p, P [28].

2. Условие существования. Для существования канонических отображений, выраженных через производящую функцию S нужно, чтобы уравнение $Q = S_P(t,q,P)$ имело обратную функцию $q(t,Q,P)$. Это возможно при условии монотонной зависимости S_P от q, т. е. производная S_{qP} не должна менять знака. Следовательно, *каноническое преобразование выражается через производящую функцию $S(t,q,P)$ в области, в которой выполняется неравенство $S_{qP} \neq 0$.*

Точно также показывается, что каноническое преобразование с производящей функцией $R(t,Q,p)$ существует в области, в которой $R_{Qp} \neq 0$.

3. Примеры. Пример 1. Найти отображение с производящей функцией $S = qP^2$.

Решение. Дифференциал $dS = P^2dq + 2qPdP$ приравниваем к дифференциалу (6.3.5) $QdP + pdq$. Из равенства коэффициентов при dq и dP следует отображение $q = Q/(2P)$, $p = P^2$. Нетрудно проверить, что его якобиан равен единице. Отображение существует в области $S_{qP} = 2P \neq 0$.

Пример 2. Найти производящие функции $S(q,P)$ и $R(Q,p)$ для тождественного преобразования $q = Q$, $p = P$.

Решение. По (6.3.5) и (6.3.7) находим формулы для полных дифференциалов функций S и R

$$\begin{aligned} &dS = QdP + pdq = qdP + Pdq = d(Pq) \quad \Rightarrow S = qP, \\ &dR = -PdQ - qdp = -pdQ - Qdp \Rightarrow R = -Qp. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти производящую функцию и закон преобразования для гамильтониана при каноническом преобразовании криволинейной области в прямоугольник (см. рис. 6.5).

Решение. Это преобразование рассмотрено в примере 2 разд.6.3.3, 2. Оно имеет производящую функцию

$$S = X\tilde{Y} + \tilde{Y}\int_0^X h(t,X)dX.$$

Преобразованный гамильтониан $\widetilde{H}(t,X,Y)$ в новых переменных будет таким

$$\widetilde{H}(t,\tilde{X},\tilde{Y}) = H + S_t = H(t, X(t,\tilde{X},\tilde{Y}), Y(t,\tilde{X},\tilde{Y})) - A\tilde{Y},$$

$$A = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^X h(t,X)dX.$$

Здесь через A обозначен вытесненный через сечение X расход жидкости, равный уменьшению объема. Условие существования отображения $S_{X\tilde{Y}} = 1 + h(t,X) > 0$ означает, что верхняя граница не должна смыкаться с нижней (см. рис. 6.5).

Пример 4. Найти производящую функцию $S(q,P)$ для поворота на угол α

$$Q = q\cos\alpha + p\sin\alpha, \quad P = -q\sin\alpha + p\cos\alpha.$$

Решение. В формуле (6.3.5) $dS(q,P) = QdP + pdq$ переменные q и P — независимые. Выражаем через них Q и p

$$p = q\,\mathrm{tg}\,\alpha + P/\cos\alpha, \quad Q = q/\cos\alpha + P\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

и подставляем их в выражение для dS

$$dS = \left(\frac{q}{\cos\alpha} + P\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)dP + \left(q\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{P}{\cos\alpha}\right)dq \Rightarrow$$

$$S = \frac{qP}{\cos\alpha} + \frac{1}{2}(P^2 + q^2)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Отсюда видно, что при $\alpha = \pm\pi/2$ производящая функция не существует, т. е. каноническое преобразование $Q = p$, $P = -q$ нельзя представить через производящую функцию.

Пример 5. Привести гамильтониан $H = \frac{1}{2}p^2 - \varepsilon\cos t\sin q$ к стандартному виду (гамильтониан стандартного вида имеет множитель ε, см. (6.4.10).

Решение. Выберем производящую функцию с таким расчетом, чтобы первое слагаемое при его преобразовании уничтожилось. Это достигается следующим выбором производящей функции $R(t,Q,p) = -\frac{1}{2}p^2t - Qp$. Из выражения

(6.3.7) для ее полного дифференциала

$$dR = -PdQ - qdp + (\widetilde{H} - H)dt = -pdQ - (pt + Q)dp - (p^2/2)dt$$

находим

$$p = P, \quad q = Pt + Q, \quad \widetilde{H} = H - p^2/2 = -\varepsilon \cos t \sin(Pt + Q).$$

4. Отображение на фазовом потоке. Пусть дано $X(t)$, $Y(t)$ решение уравнений системы с гамильтонианом $H(t, X, Y)$ при начальных условиях $X(t_0) = Y_0$, $Y(t_0) = Y_0$. Отображение $(X_0, Y_0) \to (X(t), Y(t))$ называется *отображением на фазовом потоке системы с гамильтонианом* $H(t, X, Y)$.

Поставим задачу: по данному гамильтониану $H(t, X, Y)$ найти производящую функцию $S(t, X_0, Y)$ для отображения на фазовом потоке $(X_0, Y_0) \to (X, Y)$.

Решение можно получить, если дать поставленной задаче следующую эквивалентную формулировку. Даны два гамильтониана: исходный $H = 0$ с решением $X_0 = \text{const}$, $Y_0 = \text{const}$ и преобразованный $H(t, X, Y)$. Найти производящую функцию функцию $S(t, X_0, Y)$ для отображения на фазовом потоке $(X_0, Y_0) \to (X, Y)$.

Исходя из выражения (6.3.5) для полного дифференциала производящей функции и полагая в нем $q = X_0$, $p = Y_0$, $H = 0$ и $Q = X$, $P = Y$, $H = H(t, X, Y)$, получим

$$dS(t, X_0, Y) = XdY + Y_0 dX_0 + H(t, X, Y)dt \Rightarrow$$

$$X = S_Y(t, X_0, Y), \; Y_0 = S_{X_0}(t, X_0, Y),$$

$$S_t(t, X_0, Y) = H(t, S_Y, Y).$$

Последнее соотношение называется уравнением Гамильтона-Якоби. В момент времени $t = t_0$ преобразование должно быть тождественным. Отсюда найдем начальное условие для производящей функции $S(t_0, X_0, Y) = X_0 Y$. Полученная задача Коши для функции S эквивалентна нахождению всех фазовых траекторий системы с гамильтонианом $H(t, X, Y)$.

5. Производящая функция Пуанкаре. Для автономной канонической замены переменных $(q, p) \to (Q, P)$ Пуанкаре в своей книге 1889г. «Новые методы небесной механики» ([76] с. 191), показал, что дифференциальная форма

$$d\Phi = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} Q - q & P - p \\ dQ + dq & dP + dp \end{vmatrix}$$

является полным дифференциалом (см. также [1]). Полный дифференциал определяет однозначную функцию полусумм $\frac{1}{2}(q + Q), \frac{1}{2}(p + P)$, если якобиевая матрица $A = \partial(Q, P)/\partial(q, p)$ не имеет собственных значений равных -1. Пуанкаре применял эту функцию для исследования характера устойчивости неподвижных точек отображения $(q, p) \to (Q, P)$. Он показал, что для устойчивости неподвижной точки необходимо и достаточно, чтобы у функции Φ в неподвижной точке был локальный максимум или минимум. Кроме того, существование функции Пуанкаре не зависит от выбора координат q, p. Производящая функция Якоби S таким свойством не обладает, и ее существование зависит от выбора системы координат. Для одного и того же канонического преобразования производящая функция S в одной системе координат может существовать, а в другой нет. «Удручающая неинвариантность производящих функций» отмечается в монографии [1].

Однако, замечательные свойства функции Пуанкаре трудно использовать для проведения анализа гамильтоновой системы, так как в ней не выделены явно независимые аргументы. В работах [63], [64] эти недостатки снимаются с помощью параметризации канонического преобразования. Функция Пуанкаре обобщается для произвольных неавтономных канонических преобразований и выражается через независимые параметры.

Обобщение на неавтономные канонические преобразования можно получить, следуя работе [72]. В ней показано, что комбинация производящих функций (6.3.5) и (6.3.7)

$$\Phi = [S(t, q, P) - qP + R(t, Q, p) + Qp]/2.$$

имеет следующий полный дифференциал

$$d\Phi = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} Q - q & P - p \\ dQ + dq & dP + dp \end{vmatrix} + (\widetilde{H} - H)dt. \tag{6.3.8}$$

При $dt = 0$ дифференциал $d\Phi$ совпадает с полным дифференциалом Пуанкаре.

6.3.6. Теория последования Пуанкаре для неавтономных гамильтоновых систем

1. Точки последования Пуанкаре. На траектории $\vec{R}\{X(t, t_0, X_0, Y_0), Y(t, t_0, X_0, Y_0)\}$, определяемой из решения системы (6.1.1), рассмотрим положения точек через интервалы времени, кратные периоду $\vec{R}_n\{X(t_n, t_0, X_0, Y_0), Y(t_n, t_0, X_0, Y_0)\}$, $t_n = t_0 + Tn$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Такие точки называют точками последования Пуанкаре (ТПП). Множество ТПП — это след частицы при киносъемке с частотой кадров, соответствующей периоду T ТПП образует счетное множество точек на плоскости, которое зависит, вообще говоря, от t_0, X_0, Y_0.

2. Отображения Пуанкаре. При периодической зависимости гамильтониана от времени множество ТПП может быть вычислено по рекуррентным формулам $\vec{R}_n = P_{t_0}^T(\vec{R}_{n-1})$, где $P_{t_0}^{\Delta t}$ ($\Delta t = t - t_0$) — отображение на фазовом потоке системы (6.1.1), или попросту решение задачи (6.1.1). Отображение за период $P_{t_0}^T$ называется отображением Пуанкаре. Поскольку в гамильтоновой системе фазовый объем сохраняется, то и отображение Пуанкаре должно быть подчинено условию сохранения фазового объема. Математически это означает, что якобиан отображения Пуанкаре равен единице $\det(\partial\vec{R}_n/\partial\vec{R}_{n-1}) = 1$.

3. Инвариантная кривая. Если множество ТПП принадлежит одномерной линии, то такая линия называется инвариантной кривой. Следует отличать понятие инвариантной кривой от интегральной кривой. Интегральная кривая существует тогда, когда в системе есть первый интеграл. Тогда через каждую точку плоскости проходит интегральная кривая. Она же будет и инвариантной кривой, т. е. при наличии первого интеграла инвариантные кривые и интегральные кривые отождествляются. Ниже будут приведены примеры систем, в которых нет первого интеграла. В этом случае интегральных кривых нет, а инвариантные кривые могут быть. Они проходят не через каждую точку плоскости, могут заполнять плоскость или часть плоскости достаточно плотно, а часть плоскости совсем не заполнять.

4. Отображение Чирикова. Приведем пример рекуррентных соотношений, определяющих последовательность точек X_n, Y_n

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + K\sin Y_n \\ Y_{n+1} = Y_n + X_n + K\sin Y_n \end{cases}$$

Якобиан отображения $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix}$ вычисляется так

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n}\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} - \frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n}\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} = 1 + K\cos Y_n - K\cos Y_n = 1.$$

Таким образом, представленное отображение с якобианом единица моделирует отображение Пуанкаре на фазовом потоке некоторой воображаемой гамильтоновой системы с периодическим во времени гамильтонианом. Это отображение введено Чириковым и называется стандартным отображением.

При $K = 0$ ТПП лежат на интегральных кривых $X_n = \text{const}$. При $K > 0$ первого интеграла для ТПП не существует, а есть только инвариантные кривые. При достаточно малых K они плотно заполняют фазовую плоскость. Показывается, что наибольший размер щели между инвариантными кривыми не превосходит трансцендентально малую величину порядка $e^{-C/\sqrt{K}}$, т. е. меньшую любой степени K [20].

На рис. 6.7 показаны ТПП для этого отображения при различных значениях параметра K. Начальные точки обозначены звездочкой. При $K = 1/2$ щели между инвариантными кривыми настолько малы, что на рисунке не заметны. Поэтому через любую начальную точку проходит инвариантная кривая, на которой располагаются все ТПП. Инвариантные кривые плотно покрывают фазовую плоскость также как и для интегрируемой системы. На периоде $Y \in [0, 2\pi)$

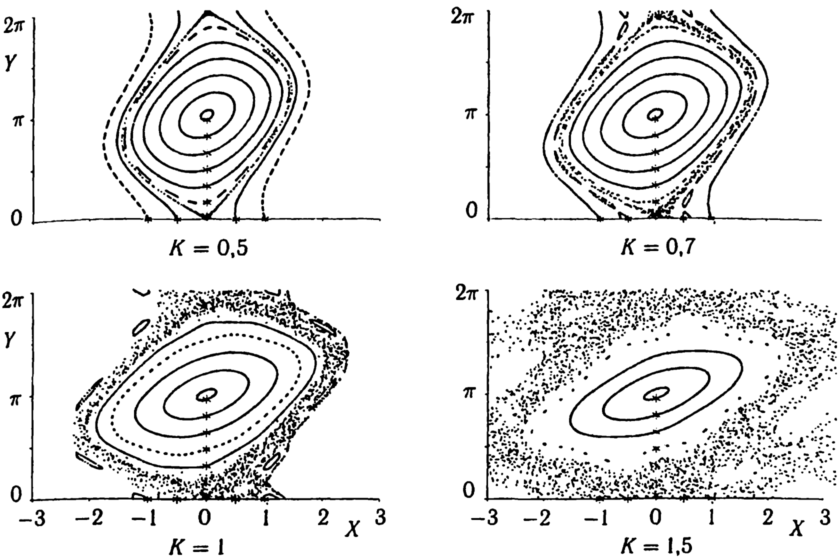


Рис. 6.7. Фазовые портреты отображения Чирикова

имеются две неподвижные точки: эллиптическая $X = 0$, $Y = \pi$ и гиперболическая $X = 0$, $Y = 0$. При $K = 0,7$ наблюдается хаотизация в окрестности гиперболической неподвижной точки. С ростом K хаотизация нарастает. Это типичная картина поведения ТПП на фазовой плоскости для любой гамильтоновой системы с периодическим во времени гамильтонианом.

6.4. Параметризация канонических преобразований

6.4.1. Определение и общие свойства параметризуемых канонических преобразований

1. Теорема о параметризации. Общий результат параметризации канонической замены переменных в гамильтоновых системах сформулируем в виде теоремы [72].

Теорема 1. *Пусть преобразование переменных $(q, p) \to (Q, P)$ записано в параметрической форме*

$$\begin{cases} q = x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ p = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases} \qquad \begin{cases} Q = x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ P = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases} \tag{6.4.1}$$

где $\Psi(t,x,y)$ — дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки t_0, x_0, y_0.

Тогда 1) якобианы двух преобразований $q = q(t,x,y), p = p(t,x,y)$ и $Q = Q(t,x,y), P = P(t,x,y)$ тождественно равны

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(x,y)} = J(t,x,y); \tag{6.4.2}$$

2) При $J(t_0,x_0,y_0) \neq 0$ существует окрестность точки t_0, x_0, y_0, в которой преобразование (6.4.1) *переменных $q,p \to Q,P$ переводит гамильтонову систему $H = H(t,q,p)$ в гамильтонову систему $\widetilde{H} = \widetilde{H}(t,Q,P)$ по следующему закону*

$$\Psi_t(t,x,y) + H(t,q,p) = \widetilde{H}(t,Q,P), \tag{6.4.3}$$

где аргументы q,p и Q,P в гамильтонианах H и $\widetilde{H}$ выражены через параметры x,y по (6.4.1).

Доказательство.

1) Вычисляем

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\Psi_{xy}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\Psi_{xy}\right) + \frac{1}{4}\Psi_{xx}\Psi_{yy} =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2\right)$$

Аналогично вычисляется второй якобиан и он оказывается равный первому.

2) Доказательство второго пункта теоремы проведем с помощью критерия каноничности, согласно которому дифференциальная форма $\delta F = P\delta Q - p\delta q - (\widetilde{H} - H)\delta t$ является полным дифференциалом некоторой функции $\delta F(t,x,y) = F_t\delta t + F_x\delta x + F_y\delta y$ (см. разд. 6.3.3).

Подставляем в дифференциальную форму δF вместо q,p и Q,P их выражения (6.4.1) через параметры x,y и заменяем $\widetilde{H} - H$ на Ψ_t согласно (6.4.3). После очевидных преобразований получим

$$\delta F = (y - \tfrac{1}{2}\Psi_x)(\delta x + \tfrac{1}{2}\Psi_{yt}\delta t + \tfrac{1}{2}\Psi_{yx}\delta x + \tfrac{1}{2}\Psi_{yy}\delta y) -$$

$$-(y + \tfrac{1}{2}\Psi_x)(\delta x - \tfrac{1}{2}\Psi_{yt}\delta t - \tfrac{1}{2}\Psi_{yx}\delta x - \tfrac{1}{2}\Psi_{yy}\delta y) - \Psi_t\delta t =$$

$$= y(\Psi_{yt}\delta t + \Psi_{yx}\delta x + \Psi_{yy}\delta y) - \Psi_x\delta x - \Psi_t\delta t = \delta(y\Psi_y - \Psi),$$

что и требовалось доказать. В работах [67, 72] эта теорема доказана для гамильтоновых систем произвольного порядка.

Зададимся целью исследовать, для каких канонических преобразований существует параметризация.

2. Параметрическое представление производящей функции Пуанкаре. Введенная функция $\Psi(t,x,y)$ есть параметрическое представление функции Пуанкаре (6.3.8). Действительно, в силу равенств

$$\begin{aligned}&\Psi_y = Q - q, \quad \Psi_x = -(P-p), \quad \Psi_t = \widetilde{H} - H,\\ &x = (Q+q)/2, \quad y = (P+p)/2\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

полные дифференциалы функции Ψ и (6.3.8) совпадают $d\Psi = d\Phi$. Таким образом, функция Пуанкаре параметризована и теперь она зависит от двух независимых аргументов x, y и времени t: $\Phi = \Psi(t,x,y)$.

3. Отображение малой области. Выше в разд. 6.3.4 было рассмотрено отображение малой области канонического преобразования $Q(q,p), P(q,p)$, определяемое якобиевой матрицей A. Согласно представлению (6.4.1) матрица A равна произведению обратной матрицы A_-^{-1} отображения $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и матрицы A_+ отображения $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$

$$A = A_-^{-1}A_+, \quad A_\pm = E \pm \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пользуясь тождеством $A_-^{-1} = A_+/J$ матрицу A можно представить в виде

$$\begin{aligned}&A = \frac{1}{J}(A_+)^2 = \frac{1}{J}\left[(2-J)E + \begin{pmatrix} \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{pmatrix}\right],\\ &J = 1 + \frac{1}{4}\left(\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2\right)\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

Отсюда выражаем компоненты матрицы локального отображения через вторые производные функции Ψ и для сравнения через вторые производные производящей функции $S(t,q,P)$ (6.3.5)

$$\begin{aligned}&A_{11} = \frac{2-J}{J} + \frac{\Psi_{xy}}{J} = \frac{(S_{qP})^2 - S_{qq}S_{PP}}{S_{qP}}\\ &A_{12} = \frac{\Psi_{yy}}{J} = \frac{S_{PP}}{S_{qP}}, \quad A_{21} = -\frac{\Psi_{xx}}{J} = -\frac{S_{qq}}{S_{qP}}\\ &A_{22} = \frac{2-J}{J} - \frac{\Psi_{xy}}{J} = \frac{1}{S_{qP}}\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

Последнюю группу равенств можно получить, исходя из соотношений $Q = S_P$, $p = S_q$. Дифференциалы этих соотношений можно представить так

$$\begin{cases} dQ = A_{11}dq + A_{12}dp = A_{11}dq + A_{12}(S_{qq}dq + S_{qP}dP) = S_{qP}dq + S_{PP}dP,\\ dP = A_{21}dq + A_{22}dp = A_{21}dq + A_{22}(S_{qq}dq + S_{qP}dP)\end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при dq, dP, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12}S_{qq} = S_{qP}, & A_{12}S_{qP} = S_{PP}, \\ A_{21} + A_{22}S_{qq} = 0, & A_{22}S_{qP} = 1. \end{cases}$$

Отсюда и получим требуемые равенства.

4. Локальное условие параметризуемости. Отображение малой окрестности $(\delta q, \delta p) \to (\delta Q, \delta P)$ с матрицей A имеет относительно поворотов системы координат два независимых инварианта

$$i_1 = (A_{11} + A_{22})/2, \quad i_2 = (A_{12} - A_{21})/2.$$

Для параметрического отображения J и $\Delta\Psi = \Psi_{xx} + \Psi_{yy}$ — также инварианты, так как они выражаются через инварианты i_1 и i_2:

$$J = 2/(i_1 + 1), \quad \Delta\Psi = 4i_2/(i_1 + 1).$$

Если в какой либо точке $J(t, x, y) \neq 0$, то в окрестности этой точки параметрическое представление (6.4.1) определяет каноническое преобразование. И наоборот, если в окрестности некоторой точки преобразование $(q, p) \to (Q, P)$ — каноническое и $i_1 \neq -1$, то в этой окрестности $J \neq 0$ и это преобразование представляется в виде (6.4.1). Условие существования параметрического представления канонического преобразования в окрестности некоторой точки назовем локальным условием его параметризуемости.

Пуанкаре из требования однозначной зависимости Φ от полусумм $\frac{1}{2}(q + Q)$ и $\frac{1}{2}(p + P)$ получил следующее условие. Корни характеристического уравнения $m^2 - 2i_1 m + 1 = 0$ не равны -1. Оно эквивалентно полученному выше неравенству $i_1 \neq -1$.

5. Инвариантность параметризуемости. Условие параметризуемости выражается через инвариант матрицы i_1 и не зависит от выбора системы координат. В противоположность этому условие существования отображения с производящей функцией Якоби $S_{qP} > 0$ не инвариантно. Действительно, вследствие последнего соотношения (6.4.6) это условие можно представить в виде $A_{22} > 0$. Выполнение его зависит от выбора системы координат. В системе координат dq', dp', повернутой на угол θ относительно осей dq, dp, это условие таково: $(A_{11} + A_{22}) - (A_{11} - A_{22})\cos 2\theta + (A_{12} + A_{21})\sin 2\theta > 0$.

6.4.2. Примеры параметризации

Если каноническое отображение $(q, p) \to (Q, P)$ задано аналитически, то для него можно найти функцию $\Psi(x, y)$ и представить его в параметрическом виде (6.4.1). Переход к такому представлению назовем параметризацией. Приведем два примера параметризации отображений, заданных аналитически.

1. Преобразование поворота. *Найти параметризацию для поворота на угол* α: $q = Q\cos\alpha - P\sin\alpha, \quad p = Q\sin\alpha + P\cos\alpha$.

Решение. Параметризация существует при $1 + i_1 = 1 + \cos\alpha \neq 0$. Отсюда следует, что на окружности $[0, 2\pi)$ исключается только одна точка $\alpha = \pi$. При $\alpha \neq \pi$ параметризация определяется так. Из (6.4.4) находим

$$
\begin{aligned}
x &= [Q(1+\cos\alpha) - P\sin\alpha]/2 = 2\cos(\alpha/2)\,(Q\cos(\alpha/2) - P\sin(\alpha/2)),\\
y &= [Q\sin\alpha + P(1+\cos\alpha)]/2 = 2\cos(\alpha/2)\,(Q\sin(\alpha/2) + P\cos(\alpha/2)),\\
\Psi_x &= Q\sin\alpha - P(1-\cos\alpha) = 2\sin(\alpha/2)\,(Q\cos(\alpha/2) - P\sin(\alpha/2)),\\
\Psi_y &= Q(1-\cos\alpha) + P\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\,(Q\sin(\alpha/2) + P\cos(\alpha/2)).
\end{aligned}
$$

Отсюда $\Psi_x = 2x\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$, $\Psi_y = 2y\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$ и находим функцию

$$\Psi(x, y) = (x^2 + y^2)\,\mathrm{tg}(\alpha/2), \quad \alpha \neq \pi.$$

Выше было показано, что производящие функции не существуют в двух точках на окружности $\pi/2, 3\pi/2$.

2. Отображение Чирикова. *Найти параметрическое представление для однопараметрического семейства канонических преобразований Чирикова*

$$
\begin{cases}
X_{n+1} = X_n + K\sin Y_n,\\
Y_{n+1} = Y_n + X_n + K\sin Y_n.
\end{cases}
$$

Решение. Из критерия параметризуемости $i_1 + 1 = (\partial X_{n+1}/\partial X_n + \partial Y_{n+1}/\partial Y_n)/2 + 1 = 2 + (K/2)\cos Y_n > 0$ получим, что параметризация существует на всей бесконечной плоскости переменных X_n, Y_n при $|K| < 4$. Функция Ψ определяется из уравнения

$$d\Psi = \frac{1}{2}(X_{n+1} - X_n)d\,(Y_n + Y_{n+1}) - \frac{1}{2}(Y_{n+1} - Y_n)d\,(X_n + X_{n+1}).$$

Выражая X_{n+1}, Y_{n+1} через независимые переменные X_n, Y_n, получим

$$
\begin{aligned}
d\Psi &= \tfrac{1}{2}K\sin Y_n d\,(X_n + K\sin Y_n + 2Y_n) - \tfrac{1}{2}\,(X_n + K\sin Y_n)\,d(2X_n + K\sin Y_n) =\\
&-\tfrac{1}{2}K\sin Y_n dX_n + K\sin Y_n dY_n - X_n dX_n - \tfrac{1}{2}X_n d(K\sin Y_n) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\Psi = -\frac{1}{2}X_n^2 - \frac{1}{2}KX_n\sin Y_n - K\cos Y_n,$$

$$x = X_n + \frac{1}{2}K\sin Y_n, \quad y = \frac{1}{2}X_n + Y_n + \frac{1}{2}K\sin Y_n.$$

Ее можно можно представить как функцию x, y сходящимся при $|K| < 4$ рядом

$$
\begin{aligned}
\Psi(x, y, K) &= -\tfrac{1}{2}x^2 - K\cos\left(y - \tfrac{1}{2}x\right) - \tfrac{1}{8}K^2\sin^2\left(y - \tfrac{1}{2}x\right) +\\
&+\tfrac{1}{32}K^3\cos\left(y - \tfrac{1}{2}x\right)\sin^2\left(y - \tfrac{1}{2}x\right)\ldots
\end{aligned}
\tag{6.4.7}
$$

Из (6.4.1) находим требуемое параметрическое представление отображения

Чирикова

$$\begin{cases} X_n = x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_n = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases} \qquad \begin{cases} X_{n+1} = x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_{n+1} = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}$$

Диапазоны параметра K, при котором существуют производящие функции $S(X_n, Y_{n+1})$ и $R(X_{n+1}, Y_n)$ зависят от системы координат, в которой она вычисляется. Так функция $S(X_n, Y_{n+1})$ существует при $\partial Y_{n+1}/\partial Y_n = 1 + K\cos Y_n > 0$, т. е. при $|K| < 1$. Если же повернуть систему координат на 90°, диапазон параметра K определится из неравенства $\partial X_{n+1}/\partial X_n = 1 > 0$, т. е. производящая функция другой пары переменных $R(X_{n+1}, Y_n)$ будет существовать при всех значениях параметра K. Находится она с помощью (6.3.7) $dR = -Y_{n+1}dX_{n+1} - X_n dY_n$. Подставляем сюда $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$ и $X_n = X_{n+1} - K\sin Y_n$

$$\begin{aligned} &dR = -(Y_n + X_{n+1})dX_{n+1} - (X_{n+1} - K\sin Y_n)dY_n \Rightarrow \\ &R = -Y_n X_{n+1} - \tfrac{1}{2}X_{n+1}^2 - K\cos Y_n. \end{aligned}$$

Таким образом, существование производящей функции зависит от удачного выбора системы координат. Параметризация же существует во всех системах координат.

Ниже будет показано еще одно замечательное свойство функции $\Psi(x, y)$. Она приближает инвариантные кривые для последовательности точек отображения Пуанкаре.

6.4.3. Параметризация отображений на фазовом потоке гамильтоновой системы

1. Постановка задачи построения отображения. Поставим задачу: найти отображение $X(t_0), Y(t_0) \to X(t), Y(t)$ на фазовом потоке системы с заданным гамильтонианом $H(t, X, Y)$. Выше был рассмотрен метод ее решения с помощью производящей функции. Ее также можно решать методом генератора Ли [28].

Можно предложить третий весьма эффективный параметрический метод [63,64,67–70,72]. Поставленная задача эквивалентна определению канонического преобразования переводящего гамильтониан $H = 0$ в данный гамильтониан $H(t, X, Y)$. Применяя формулы (6.4.1), (6.4.3) теоремы 1 о параметризации канонического преобразования, получим искомое отображение

$$\begin{cases} X_0 = x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_0 = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases} \tag{6.4.8}$$

в котором функция Ψ должна определяться из решения задачи Коши

$$\Psi_t(t,x,y) = H\left(t, x+\frac{1}{2}\Psi_y, y-\frac{1}{2}\Psi_x\right), \quad \Psi(t_0,x,y)=0. \tag{6.4.9}$$

2. Алгоритм построения отображения Пуанкаре для гамильтоновой системы стандартного вида. Гамильтонова система называется *системой стандартного вида*, если ее гамильтониан представим в виде сходящегося на интервале $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ряда [1]

$$H(t,X,Y,\varepsilon) = \varepsilon H_1(t,X,Y) + \varepsilon^2 H_2(t,X,Y) + \varepsilon^3 H_3(t,X,Y) + \tag{6.4.10}$$

Для таких систем решение задачи (6.4.9) для Ψ можно представить в виде ряда по ε. Отсюда вытекает следующий алгоритм построения отображения Пуанкаре.

Алгоритм 1. *Пусть гамильтониан с периодом по времени T системы (6.1.1) имеет стандартный вид (6.4.10), где все коэффициенты $H_1, H_2, H_3, ..$ — дважды непрерывно дифференцируемы в открытой области. Тогда решение системы на периоде $t \in (t_0, t_0+T)$ определяется в параметрическом виде (6.4.8), в котором функция Ψ имеет разложение*

$$\begin{gathered}\Psi(t,x,y,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 + \varepsilon^3\Psi_3 + O(\varepsilon^4),\\ \Psi_1(t,x,y) = \int_{t_0}^{t} H_1 dt, \quad \Psi_2(t,x,y) = \int_{t_0}^{t}\left[H_2 - \tfrac{1}{2}\{H_1,\Psi_1\}\right]dt,\\ \Psi_3(t,x,y) = \int_{t_0}^{t}\left[H_3 - \tfrac{1}{2}(\{H_2,\Psi_1\} + \{H_1,\Psi_2\}) + \right.\\ \left. + \tfrac{1}{8}(H_{1xx}\Psi_{1y}\Psi_{1y} - 2H_{1xy}\Psi_{1x}\Psi_{1y} + H_{1yy}\Psi_{1x}\Psi_{1x})\right]dt, \dots,\end{gathered} \tag{6.4.11}$$

ТПП вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} X_{n-1} = x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_{n-1} = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases} \qquad \begin{cases} X_n = x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_n = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases} \tag{6.4.12}$$

где функции Ψ имеет аргументы $\Psi(t_0+T,x,y)$.

Фигурными скобками обозначены скобки Пуассона $\{g,h\} = g_y h_x - g_x h_y$.

Для того, чтобы найти коэффициенты Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, достаточно разложить уравнение (6.4.9) по степеням ε в виде $\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots = 0$ и записать равенства $f_1 = 0,\ f_2 = 0, \dots$.

3. Алгоритм построения отображения для автономной гамильтоновой системы. Построение параметрического отображения на фазовом потоке автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(X,Y)$ сводится к решению

[1] К стандартному виду приводятся также гамильтонианы $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots$, если H_0 не зависит от X или Y (см. пример 5 в разд. 6.3.5, п. 3).

задачи Коши

$$\Psi_t(t,x,y) = H(x+\frac{1}{2}\Psi_y,\, y-\frac{1}{2}\Psi_x), \quad \Psi(0,x,y)=0, \tag{6.4.13}$$

которая отличается от (6.4.9) тем, что функция $\bar{H}$ явно не зависит от времени. В этом случае решение обладает симметрией и формулы (6.4.11) для коэффициентов ряда существенно упростятся. Этот результат сформулируем в виде теоремы [63, 66, 67, 72].

Теорема 2. *Пусть гамильтониан $H(X,Y)$ явно не зависит от времени. Тогда, если существует решение задачи (6.4.13) $\Psi(t,x,y)$ на полуинтервале $0 \leqslant t < t_0$, то существует и решение на всем интервале $|t| \leqslant t_0$ нечетное по аргументу t, т. е. $\Psi(t,x,y) = -\Psi(-t,x,y)$.*

Доказательство. Для автономной гамильтоновой системы имеет место интеграл $H(X,Y) = H(X_0,Y_0)$. Пусть $\Psi(t,x,y)$ — решение (6.4.9). Тогда, определяя решение ОДУГ в параметрическом виде (6.4.8) и подставляя его в интеграл, получим

$$H\left(x+\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y},\, y-\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = H\left(x-\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y},\, y+\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$$

при $0 \leqslant t < t_0$. С учетом этого равенства после замены $t=-\tilde{t}$, $\Psi=-\tilde{\Psi}$ задача Коши (6.4.13) не изменится

$$\tilde{\Psi}_{\tilde{t}}(\tilde{t},x,y) = H\left(\tilde{t},x+\frac{1}{2}\tilde{\Psi}_y,\, y-\frac{1}{2}\tilde{\Psi}_x,\varepsilon\right), \quad \tilde{\Psi}(0,x,y)=0.$$

Следовательно существует решение $\tilde{\Psi}(\tilde{t},x,y) = -\Psi(-t,x,y)$ на отрицательном полуинтервале и функция $\Psi(t,x,y)$ — нечетная, что и требовалось доказать.

Следствие. *Решение задачи Коши (6.4.13) представляется рядом по нечетным степеням t. С точностью до t^5 функция Ψ имеет вид*

$$\Psi = tH(x,y) + (t^3/24)\left[H_{xx}H_y^2 - 2H_{xy}H_xH_y + H_{yy}H_x^2\right] + O(t)^5 \tag{6.4.14}$$

Отсюда вытекает алгоритм асимптотического построения ТПП для решения (6.1.1) по данному автономному гамильтониану.

Алгоритм 2. *Пусть гамильтониан $\overline{H}(X,Y,\varepsilon)$ явно не зависит от времени и имеет стандартный вид (6.4.10), где все коэффициенты $\overline{H}_1,\overline{H}_2,\overline{H}_3,\ldots$ — дважды непрерывно дифференцируемы в открытой области. Тогда ТПП в моменты времени $t_n = t_0 + nT$, $n=0,1,2,\ldots$ вычисляются по рекуррентным формулам (6.4.12), где функция $\overline{\Psi}$ имеет разложение*

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}(x,y,\varepsilon) &= \varepsilon T\overline{H}_1(x,y) + \varepsilon^2 T\overline{H}_2(x,y) + \varepsilon^3 T\overline{H}_3(x,y) + \\ &+\varepsilon^3(T^3/24)\left[\overline{H}_{1xx}\overline{H}_{1y}^2 - 2\overline{H}_{1xy}\overline{H}_{1x}\overline{H}_{1y} + \overline{H}_{1yy}\overline{H}_{1x}^2\right] + O(\varepsilon^4).\end{aligned} \tag{6.4.15}$$

Для вывода разложения (6.4.15) используем метод «замораживания» параметра. Запишем разложение гамильтониана (6.4.10) в виде $\overline{H} = \varepsilon\widetilde{H}(X, Y, \varepsilon_1)$, $\widetilde{H} = \overline{H}_1 + \varepsilon_1\overline{H}_2 + \varepsilon_1^2\overline{H}_3 + \ldots$ и подставим его в уравнение (6.4.13). С помощью замены $\tau = \varepsilon(t - t_0)$ задача Коши (6.4.13) приведется к виду

$$\Psi_\tau(\tau, x, y) = \widetilde{H}(x + \frac{1}{2}\Psi_y, y - \frac{1}{2}\Psi_x), \quad \Psi(0, x, y) = 0,$$

который отличается от (6.4.13) только заменой t и H на $\tau = \varepsilon(t - t_0)$ и $\widetilde{H}$. Следовательно, и решение ее можно получить из разложения (6.4.14) этими же заменами

$$\overline{\Psi} = \varepsilon T\widetilde{H}(x, y, \varepsilon_1) + \frac{1}{24}(\varepsilon T)^3[\widetilde{H}_{xx}\widetilde{H}_y^2 - 2\widetilde{H}_{xy}\widetilde{H}_x\widetilde{H}_y + \widetilde{H}_{yy}\widetilde{H}_x^2] + O(\varepsilon T)^5$$

Отсюда, «размораживая» параметр $\varepsilon_1 = \varepsilon$, получим разложение (6.4.15), что и требовалось.

Алгоритм решения обратной задачи построения автономного гамильтониана по данному отображению

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix}$$

будет описан в разд. 6.5.2 п. 2.

6.5. Асимптотические методы исследования гамильтоновых систем

6.5.1. Краткие сведения об асимптотических методах

1. Общая задача метода возмущений. гамильтоновых систем состоит в следующем. Пусть имеется интегрируемая система с гамильтонианом $H_0(t, q, p)$. Рассматривается возмущенная гамильтонова система $H(t, q, p) = H_0(t, q, p) + \varepsilon H_1(t, q, p) + \ldots$ при достаточно малом значении параметра ε, решение которой на достаточно большом отрезке времени требуется изучить. Для изучения таких задач развиты методы, которые объединяют под общим названием «теория возмущений». Ниже излагаются краткие сведения классической теории возмущений. Более подробно с этой теорией можно ознакомится по монографиям [1,3,26–28]. Излагается также аппарат асимптотической теории с помощью параметризации канонических преобразований, недавно разработанный в статьях [64,66,67–70,72–74].

2. Задача метода усреднения. Пусть дан гамильтониан стандартного вида T — периодический по времени. Нужно найти каноническую замену $q, p \to Q, P$ так, чтобы в разложении нового гамильтониана до k-го члена разложения не содержалось времени. Тогда в новых переменных система с точностью до $K + 1$-го порядка будет автономной и, следовательно, интегрируемой. Ниже изложен классический метод решения этой задачи с помощью производящей функции. Он назван *алгоритмом последовательного исключения времени.* Для сравнения приведен также параметрический метод усреднения.

3. Алгоритм последовательного исключения времени. Опишем алгоритм на примере следующего гамильтониана $H = \varepsilon(\frac{1}{2}p^2 - \cos t \sin q)$. Система с этим гамильтонианом описывает движение твердой сферической частицы в жидкости под действием стоячей акустической волны [57]. Координата частицы q определяется из уравнения $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t \cos q$.

Производящая функция $S(t, q, P, \varepsilon)$, определяющая каноническую замену $(q, p) \to (Q, P)$, связана с преобразованным гамильтонианом $\bar{H}$ уравнением (6.3.6)

$$S_t + H(t, q, S_q) = \bar{H}(S_P, P).$$

Будем искать производящую функцию и преобразованный гамильтониан в виде рядов

$$S(t, q, P, \varepsilon) = qP + \varepsilon S_1(t, q, P) + \varepsilon^2 S_2(t, q, P) + \varepsilon^3 S_3(t, q, P) +$$
$$\bar{H}(q, P, \varepsilon) = \varepsilon \bar{H}_1(q, P) + \varepsilon^2 \bar{H}_2(q, P) + \varepsilon^3 \bar{H}_3(q, P).$$

Коэффициенты $S_1, S_2, \ldots$ будем искать в виде сумм тригонометрических гармоник периода, кратного $T = 2\pi$. Раскладывая уравнение в ряд по ε и собирая члены при одинаковой степени по ε, получим уравнения первого, второго и третьего приближений

$$\varepsilon^1 \qquad S_{1t} + \tfrac{1}{2}P^2 - \cos t \sin q = \bar{H}_1(q, P) \Rightarrow$$
$$\bar{H}_1 = \tfrac{1}{2}P^2, \quad S_{1t} = \cos t \sin q \Rightarrow S_1 = \sin t \sin q.$$

$$\varepsilon^2 \qquad S_{2t} + H_{1P} S_{1q} = \bar{H}_2(q, P) \Rightarrow$$
$$S_{2t} + P \sin t \cos q = \bar{H}_2(q, P) \Rightarrow$$
$$S_2 = P \cos t \cos q, \quad \bar{H}_2 = 0.$$

$$\varepsilon^3 \qquad S_{3t} + H_{1P} S_{2q} + H_{2P} S_{1q} + \tfrac{1}{2} H_{1PP} S_{1q}^2 = \bar{H}_3(q, P) \Rightarrow$$
$$S_{3t} - P^2 \cos t \sin q + \tfrac{1}{2} \sin^2 t \cos^2 q = \bar{H}_3(q, P) \Rightarrow$$
$$\bar{H}_3 = \tfrac{1}{4} \cos^2 q, \quad S_{3t} = P^2 \sin q \cos t + \tfrac{1}{4} \cos^2 q \cos 2t \Rightarrow$$
$$S_3 = P^2 \sin q \sin t + \tfrac{1}{8} \cos^2 q \sin 2t.$$

Собирая все члены разложения, получаем преобразованный автономный гамильтониан и уравнения для замены переменных с точностью до ε^4

$$\bar{H} = \varepsilon \tfrac{1}{2} P^2 + \varepsilon^3 \tfrac{1}{4} \cos^2 Q + \ldots,$$
$$S = qP + \varepsilon \sin t \sin q + \varepsilon^2 P \cos t \cos q + \varepsilon^3 (P^2 \sin q \sin t + \tfrac{1}{8} \cos^2 q \sin 2t) + \ldots$$

Уравнения замены переменных:

$$Q = S_P = q + \varepsilon^2 \cos t \cos q + 2\varepsilon^3 P \sin q \sin t,$$

$$p = S_q = P + \varepsilon \sin t \cos q - \varepsilon^2 P \cos t \sin q +$$
$$+\varepsilon^3 (P^2 \cos q \sin t - \tfrac{1}{8} \sin 2q \sin 2t) +$$

Для ТПП в моменты времени $t = 2\pi n$ имеем

$$Q_n = q_n + \varepsilon^2 \cos q_n,$$
$$p_n = P_n - \varepsilon^2 P_n \sin q_n.$$

Точки Q_n, P_n с точностью до ε^4 приближаются интегральными кривыми

$$\varepsilon \frac{1}{2} P_n^2 + \varepsilon^3 \frac{1}{4} \cos^2 Q_n = C.$$

В исходных переменных точки q_n, p_n приближаются кривыми

$$\varepsilon \frac{P_n^2}{2(1 - \varepsilon^2 \sin q_n)^2} + \varepsilon^3 \frac{1}{4} \cos^2 (q_n + \varepsilon^2 \cos q_n) = C.$$

4. Параметрический метод усреднения. Усредненный гамильтониан $\overline{H}(q, p)$ можно найти из равенства $\Psi(t_0 + T, x, y) = \overline{\Psi}(x, y)$, в котором функции Ψ и $\overline{\Psi}$ представляются разложениями (6.4.11) и (6.4.15). В этом случае ТПП в моменты времени $t_n = t_0 + Tn,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ для гамильтоновых систем H и $\bar{H}$ совпадают. Для неинтегрируемых систем добиться точного равенства нельзя. Для систем стандартного вида (6.4.10) можно удовлетворить равенству с любой асимптотической точностью по малому параметру и найти с соответствующей точностью усредненный гамильтониан. Во втором приближении из равенства разложений (6.4.11) и (6.4.15) найдем

$$\overline{H}(x, y) = \tfrac{1}{T} \Psi(t_0 + T, x, y) + O(\varepsilon^3) =$$
$$= \tfrac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \left[\varepsilon H_1 + \varepsilon^2 \left(H_2 - \tfrac{1}{2} \left\{ H_1, \int\limits_{t_0}^{t} H_1 dt \right\} \right) \right] dt + O(\varepsilon^3). \tag{6.5.1}$$

Последнее равенство совпадает с известной общей формулой для усредненного гамильтониана [11]. Кратко ее можно записать так

$$\overline{H}(x, y) = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \left(H - \frac{1}{2} \left\{ H, \int\limits_{t_0}^{t} H dt \right\} \right) dt + O(\varepsilon^3).$$

Покажем на рассмотренном примере $H = \varepsilon(\frac{1}{2} p^2 - \cos t \sin q)$ как вычислить с помощью (6.5.1) усредненный гамильтониан с точностью до ε^3.

Потребуем, чтобы для гамильтоновых систем H и $\bar{H}$ совпадали ТПП в моменты времени $t_n = 2\pi n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\overline{H}(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(H - \frac{1}{2}\left\{H, \int\limits_{t_0}^{t} H dt\right\}\right) dt + O(\varepsilon^3) = \frac{1}{2}\varepsilon p^2 + O(\varepsilon^3).$$

Усредненный гамильтониан с более высокой точностью ε^4 вычисляется так. Вычисляем коэффициенты разложения (6.4.11)

$$H_1(t,x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos t \sin x, \quad H_2 = H_3 = 0,$$

$$\Psi_1(t,x,y) = \int_0^t H_1(t,x,y)dt = \frac{1}{2}y^2 t - \sin t \sin x,$$

$$-\frac{1}{2}\{H_1, \Psi_1\} = \frac{1}{2}y \sin t \cos x - \frac{1}{2}(\cos t \cos x)\, yt,$$

$$\Psi_2(t,x,y) = -\frac{1}{2}\int_0^t \{H_1, \Psi_1\}\, dt = \left(-\cos t - \frac{1}{2}t \sin t + 1\right) y \cos x,$$

Вычисляем коэффициенты Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3 в момент времени 2π

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{H_1, \Psi_2\}\, dt = \frac{3}{2}\pi y^2 \sin x + \frac{3}{8}\pi \cos^2 x,$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 H_1(t,x,y)}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \Psi_1(t,x,y)}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 H_1(t,x,y)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \Psi_1(t,x,y)}{\partial y}\right)^2\right) dt =$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(\cos^2 x\right) + \frac{\pi}{2}y^2 \sin x$$

Коэффициент Ψ_3 равен сумме последних двух интегралов. Отсюда находим три первых коэффициента разложения

$$\Psi_1(2\pi,x,y) = \pi y^2, \quad \Psi_2(2\pi,x,y) = 0,$$
$$\Psi_3(2\pi,x,y) = (\pi/2)\cos^2 x + 2\pi y^2 \sin x\,.$$

С учетом $\overline{H}_1(x,y) = y^2/2$ и $\overline{H}_{1xx}\overline{H}^2_{1y} - 2\overline{H}_{1xy}\overline{H}_{1x}\overline{H}_{1y} + \overline{H}_{1yy}\overline{H}^2_{1x} = 0$ разложение (6.4.15) примет вид

$$\overline{\Psi}(x,y,\varepsilon) = 2\pi\overline{H}(x,y,\varepsilon).$$

Из равенства его $\Psi(2\pi,x,y,\varepsilon) = \varepsilon\pi y^2 + \varepsilon^3\pi\left(\left(\cos^2 x\right)/2 + 2y^2 \sin x\right)$ найдем усредненный гамильтониан с точностью до ε^4

$$\overline{H} = \varepsilon p^2/2 + \varepsilon^3\left(p^2 \sin q + (\cos^2 q)/4\right)$$

Уравнение инвариантных кривых для ТПП сразу находим в исходных переменных

$$\overline{H}(q_n, p_n) = c,$$

которое очевидно с точностью до ε^4 совпадает с найденным в п. 4. данного раздела.

5. Метод Пуанкаре-Цейпеля. Предположим, что гамильтониан приведен к виду $H = H_0(p) + \varepsilon H_1(t, q, p) + \ldots$, в котором невозмущенный гамильтониан зависит только от одной переменной. Тогда можно поставить задачу: найти каноническую замену $(q, p) \to (Q, P)$ приводящую гамильтониан к виду, в котором все слагаемые до k-го приближения включительно зависят от одной переменной P. Алгоритм этого метода описан, например, в [28]. Ниже будут приведены более эффективные методы построения решения для таких систем. Один из них — это приведение гамильтониана к стандартному виду и применение метода усреднения. Второй метод инвариантной нормализации.

6. Метод нормальной формы Биркгофа. Идея приведения гамильтоновых систем к нормальным формам восходит к Линдштедту и Пуанкаре. В гамильтоновой системе нормальная форма гамильтониана называется нормальной формой Биркгофа [10]. Наиболее компактное определение этой формы можно найти в [13]. Во всех случаях порождаемый гамильтониан выбирается в виде простейшей квадратичной формы для линейной колебательной системы, а определение нормальной формы привязывается к выбору порождаемого гамильтониана и имеет неинвариантный характер [1–3, 10,13].

Определения зависят от вида гамильтониана и вводится по разному для резонансного и не резонансного, автономного и неавтономного случаев.

Например, в монографии [1] вводится такое определение нормальной формы для системы с одной степенью свободы в простейшем нерезонансном случае.

Нормальной формой Биркгофа степени s для гамильтониана называется многочлен степени s от канонических координат Q, P, являющийся в действительности многочленом от переменной $\rho = (Q^2 + P^2)/2$

$$H_{2m} = a_1\rho + a_2\rho^2 + \cdots + a_m\rho^m, \quad \rho = (Q^2 + P^2)/2.$$

В литературе наиболее распространены два способа построения канонических замен, приводящих систему к нормальной форме. Один способ основан на использовании производящих функций. Так поступал Биркгоф [10]. При другом способе вместо производящих функций применяются генераторы Ли. Этот способ удобнее, поскольку не требует обращения степенных рядов, что является необходимым в случае производящих функций. Среди аналитических методов метод нормальной формы является наиболее надежным и точным. Он применяется для весьма тонких исследований, когда другими методами добиться желаемого результата нельзя. Однако, приведение гамильтониана к нормальной форме — это сложная задача и требует проведения больших выкладок. Описание соответствующих алгоритмов приведено в цитируемой выше литературе.

Ниже излагается недавно разработанный В.Ф. Журавлевым метод инвариантной нормализации гамильтонианов, который значительно сокращает выкладки. Он основан на универсальном характере определения нормальной формы, единым для всех случаев.

7. Метод инвариантной нормализации гамильтониана по Журавлеву. В [28, 29] предложен общий критерий нормальной формы Биркгофа для возмущенного гамильтониана $\bar{H}(t,q,p,\varepsilon) = H_0(t,q,p) + \bar{F}(t,q,p,\varepsilon)$, $\bar{F}(t,q,p,\varepsilon) = \varepsilon\bar{F}_1(t,q,p) + \varepsilon^2\bar{F}_2(t,q,p) +$

Определение. *Возмущенный гамильтониан имеет нормальную форму тогда и только тогда, когда возмущение является первым интегралом невозмущенной части* $\frac{\partial F}{\partial t} + \{H_0, F\} = 0$, где $\{f,g\} = f_p g_q - f_q g_p$ — скобки Пуассона.

Преимущество такого определения перед известными [1, 10, 13, 2, 3] обусловлено тремя причинами.

Причина 1. Решение полной системы дифференциальных уравнений Гамильтона с гамильтонианом в нормальной форме получается суперпозицией решений невозмущенной системы и решения системы с автономным гамильтонианом, равным $F(0,q,p,\varepsilon)$. Этот результат сформулирован в [29] в виде теоремы

Теорема Журавлева. *Если система с гамильтонианом $\bar{H}$ удовлетворяет условию нормальной формы, то для построения общего решения соответствующих уравнений Гамильтона, достаточно:*

А. найти общее решение порождающей системы с гамильтонианом $H_0(t,p,q)$;

Б. найти общее решение системы, определяемой только возмущением $F(0,p,q,\varepsilon)$, при условии, что в этой системе явно входящее в гамильтониан время положено равным нулю.

Тогда общее решение исходной неавтономной системы представляется композицией в произвольном порядке полученных решений (вместо произвольных постоянных в решении второй системы подставляются решения первой или наоборот).

Причина 2. Инвариантный характер критерия позволяет осуществлять нормализацию без предварительного упрощения невозмущенной части и без разделения на случаи автономный — неавтономный, резонансный — нерезонансный.

Причина 3. Асимптотики нормальной формы и замены переменных, приводящей гамильтониан к нормальной форме, находятся последовательными квадратурами от известных на каждом шаге функций (см. алгоритм инвариантной нормализации в разд. 6.5.4).

8. Теория последования Пуанкаре. Выше было даны понятия точек последования Пуанкаре ТПП. Вычисление ТПП можно проводить через отображение Пуанкаре за период. Их вычисление значительно проще, чем вычисление всей траектории движения. Вместе с тем ТПП определяют все основные свойства гамильтоновой системы. Нахождение периодической траектории сводится к определению неподвижной точки отображения Пуанкаре. Устойчивость периодического движения соответствует устойчивости неподвижной точки.

6.5.2. Исследование систем стандартного вида с помощью параметризации отображения Пуанкаре

1. Построение инвариантных кривых по параметризованной функции Пуанкаре. Если отображение параметризовано, т. е. представлено в виде (6.4.12) и функция Ψ содержит малый множитель ε, то, по крайней мере, до четвертого порядка ε^4 инвариантная кривая ТПП приближается уравнением $\Psi(X_n, Y_n) = \mathrm{const}$. Покажем это, следуя работе [72].

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка, когда $-a \leqslant x \leqslant a$. Тогда*

$$f(a) - f(-a) = 2\left(af'(0) + R_3\right), \quad R_3 = (a^3/6)f'''(\theta a), \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{6.5.2}$$

Доказательство проведем с помощью двух тождеств Коши

$$\frac{d}{dt}\left(f(ta) + a(1-t)f'(ta) + \frac{a^2(1-t)^2}{2}f''(ta)\right) = \frac{a^3(1-t)^2}{2}f'''(ta).$$

$$\frac{d}{dt}\left(f(ta) - a(1+t)f'(ta) + \frac{a^2(1+t)^2}{2}f''(ta)\right) = \frac{a^3(1+t)^2}{2}f'''(ta).$$

Интегрируя первое тождество в пределах от 0 до 1, а второе — от (-1) до 0

$$f(a) - f(0) - af'(0) - \frac{a^2}{2}f''(0) = \frac{a^3}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f'''(ta)dt$$

$$f(0) - f(-a) - af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) = \frac{a^3}{2}\int_{-1}^0 (1-t)^2 f'''(ta)dt$$

и складывая их, получим

$$f(a) - f(-a) - 2af'(0) = R_3, \quad R_3 = \frac{a^3}{4}\int_{-1}^1 (1-|t|)^2 f'''(ta)dt.$$

Отсюда по теореме о среднем получим

$$R_3 = \frac{a^3}{4}f'''(\theta a)\int_{-1}^1 (1-|t|)^2 dt = \frac{a^3}{6}f'''(\theta a),$$

что и требовалось доказать.

Теперь легко установить теорему.

Теорема 3. *Пусть векторы* $\begin{pmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ *определяются параметрическими соотношениями*

$$\begin{cases} X_{n-1} = x - \frac{a}{2}\Phi_y \\ Y_{n-1} = y + \frac{a}{2}\Phi_x \end{cases} \qquad \begin{cases} X_n = x + \frac{a}{2}\Phi_y \\ Y_n = y - \frac{a}{2}\Phi_x \end{cases} \tag{6.5.3}$$

где $\Phi(x, y)$ *— трижды непрерывно дифференцируема в области* Ω. *Тогда в этой области*

$$\begin{gathered} \Phi(X_n, Y_n, K) - \Phi(X_{n-1}, Y_{n-1}, K) = \frac{a^3}{3} f'''(\theta a), \\ f(a) = \Phi\left(x + \frac{a}{2}\Phi_y, y - \frac{a}{2}\Phi_x\right) \end{gathered} \tag{6.5.4}$$

Теорема 3 непосредственно вытекает из леммы, так как левая часть равенства равна $f(a) - f(-a)$ и $f'(0) = 0$. Оценка теоремы 3 неулучшаема, что видно из следующего примера.

Пример. *Построить инвариантные кривые последовательности точек Чирикова при* $q_n < \sqrt{K}$ *с точностью до малых порядка* K^2

$$q_n = q_{n-1} + K\sin p_{n-1}, \quad p_n = q_{n-1} + K\sin p_{n-1} + p_{n-1}. \tag{6.5.5}$$

Решение. Сделаем замены: $q_n = \sqrt{K}X_n$, $p_n = Y_n$. Тогда рекуррентные соотношения Чирикова преобразуются в соотношения (6.5.3) теоремы 3, где параметр $a = \sqrt{K}$, а функция Φ выражается через функции (6.4.7) $\Phi(x, y, K) = \Psi(\sqrt{K}x, y, K)/K$. Ее разложение по малому параметру K таково

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, K) = -(\tfrac{1}{2}x^2 + \cos y) - \tfrac{1}{2}(x\sin y)\sqrt{K} + \\ + \tfrac{1}{8}\left(x^2\cos y - \sin^2 y\right)K + O(K^{3/2}). \end{aligned}$$

Находим функцию $f(a)$ и ее третью производную

$$\begin{aligned} & f(a) = -\tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{2}a\sin y\right)^2 - \cos\left(y + \tfrac{1}{2}ax\right) + \\ & \tfrac{d^3 f}{da^3} = -\left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 \sin\left(y + \tfrac{1}{2}ax\right) + \end{aligned}$$

По теореме 3 получим оценку

$$|\Phi(X_n, Y_n, K) - \Phi(X_{n-1}, Y_{n-1}, K)| \leqslant \frac{K^{3/2}X_n^3}{24} + O(K^2).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим уравнение инвариантной кривой $\Psi(q_n, p_n) = \mathrm{const}$ с асимптотической по малому K оценкой

$$|\Psi(q_n, p_n, K) - \Psi(q_{n-1}, p_{n-1}, K)| \sim (K/24)q_n^3, \tag{6.5.6}$$

где функция Ψ определяется формулой (6.4.7). Из оценки следует, что при небольших значениях K и q_n точки последования Чирикова лежат на кривых близ-

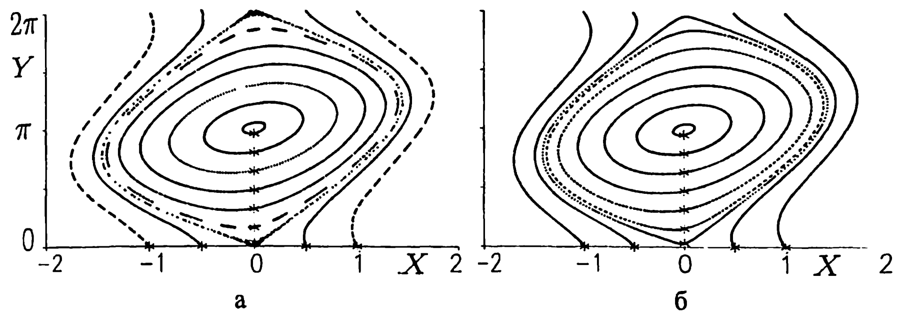


Рис. 6.8. Инвариантные кривые последовательности Чирикова при $K = 1/2$. а — точный расчет, б — асимптотическое выражение (6.4.7)

ких к $\Psi(q_n, p_n) = \text{const}$. Это видно также из приведенного рис. 6.8. На рис. 6.8,а приведены точки q_n, p_n при $n = 0, 1, \ldots, 500$, рассчитанные по точным рекуррентным формулам. Начальные положения точек q_0, p_0 отмечены крестиками. На рис. 6.8,б приведены соответствующие им аналитические кривые $\Psi(q_n, p_n) = \text{const}$.

Оценку (6.5.6), полученную из теоремы 3, можно проверить непосредственно, подставив в левую часть выражение функции Ψ (6.4.7)

$$\Psi(q_n, p_n, K) - \Psi(q_{n-1}, p_{n-1}, K) =$$

$$= \Psi\left(x + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, y - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}, K\right) - \Psi\left(x - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, y + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}, K\right) =$$

$$= \sin(y - \frac{x}{2})\left(2\sin\frac{x}{2} - x\right)K + \frac{1}{8}\sin(2y - x)(x - \sin x)K^2$$

Отсюда, с помощью неравенств $|x - 2\sin(x/2)| < x^3/24$ и $|x - \sin x| < x^3/6$, где $x = (q_n + q_{n-1})/2$, получаем оценку

$$|\Psi(q_n, p_n, K) - \Psi(q_{n-1}, p_{n-1}, K)| < (2|K| + K^2)(\max|q|)^3/48,$$

которая для малых K согласуется с (6.5.6).

Перейдем к изложению алгоритма построения автономного гамильтониана по данному отображению. Это обратная задача к задаче, решение которой дается следующим алгоритмом.

2. Алгоритм построения автономного гамильтониана по параметризованному отображению Пуанкаре. *Пусть* $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — *последовательность точек, определяемых с помощью рекуррентных соотношений*

(6.5.3). Тогда асимптотическое разложение

$$F(X,Y,a) = \Phi(X,Y) - \frac{a^2}{24}\left[\Phi_{xx}\Phi_y^2 - 2\Phi_{xy}\Phi_x\Phi_y + \Phi_{yy}\Phi_x^2\right] + O(a^3) \qquad (6.5.7)$$

определяет инвариантную поверхность для этой последовательности точек, так что $F(X_n, Y_n, a) - F(X_{n-1}, Y_{n-1}, a) = O(a^4)$.

Доказательство. Задача, решаемая предложенным алгоритмом обратная к задаче построения отображения Пуанкаре по автономному гамильтониану. Также как и при решении прямой задачи будем исходить из уравнения (6.4.14). Полагая в нем $\tau = a$, $\bar{\Psi} = a\Phi$ и разрешая это уравнение относительно $\bar{H}$ с точностью до $O(a^3)$, получим для $F(X,Y,a) = \bar{H}/a$ требуемое разложение (6.5.7). Инвариантные кривые будут асимптотически приближены интегралом автономной гамильтоновой системы $\bar{F}(X_n, Y_n, a) = \mathrm{const}$. Первый член этого ряда — функция $\Phi(x,y)$, для которой приведена оценка порядка a^3 (6.5.4) теоремы 3. С учетом следующего члена ряда эта оценка будет иметь порядок a^4 и так далее.

Пример. *Найти инвариантную кривую для последовательности точек Чирикова (6.5.5) в более высоком приближении по сравнению с найденным в примере п. 1 данного раздела.*

Решение. Представим решение сразу в исходных переменных, не выделяя малого параметра. Из (6.5.7) получим следующее разложение для автономного гамильтониана, соответствующему отображению Чирикова

$$H(x,y,K) = H^{(1)} + H^{(3)} + \qquad H^{(1)} = \Psi(x,y,K),$$

$$H^{(3)} = -\tfrac{1}{24}x^2\cos\left(y - \tfrac{1}{2}x\right)K +$$
$$+\tfrac{1}{24}\left(\tfrac{1}{4}x^2\cos(2y - x) + \sin^2\left(y - \tfrac{1}{2}x\right)\right)K^2 -$$
$$-\tfrac{1}{8\times 24}\left(\cos\left(y - \tfrac{1}{2}x\right) - \cos\left(3y - \tfrac{3}{2}x\right)\right)K^3$$

Здесь $\Psi(x,y,K)$ определена формулой (6.4.7). Уравнение $H(q_n, p_n) = const$ приближает инвариантные кривые в более точном приближении по сравнению с уравнением $\Psi(q_n, p_n) = const$.

3. Исследование устойчивости неподвижных точек по отображению Пуанкаре. Выше было установлено, что параметризованная функция Пуанкаре $\Psi(x,y)$ содержащая малый множитель ε, по крайней мере, до ε^4 совпадает с гамильтонианом автономной системы. Таким образом ТПП с этой точностью можно определять из решения системы уравнений Гамильтона с гамильтонианом $\Psi(X,Y)$. Для автономной системы известны условия существования положения равновесия и устойчивости (см., например [28]). В окрестности точки равновесия $\Psi_X = \Psi_Y = 0$ гамильтониан определяется квадратичной формой $\Psi_{xx}\xi^2 + 2\Psi_{xy}\xi\eta + \Psi_{yy}\eta^2$. Если функция Ψ в точке равновесия имеет локальный максимум или минимум, то равновесие устойчиво. Это условие записывается так

$$\Psi_{xx}\Psi_{yy} - (\Psi_{xy})^2 > 0.$$

В окрестности такой точки интегральные кривые $H = const$ — эллипсы. Поэтому эти точки называются эллиптическими точками. В противоположном случае

$$\Psi_{xx}\Psi_{yy} - (\Psi_{xy})^2 < 0$$

интегральные кривые в окрестности равновесия — гиперболы. Точка равновесия неустойчива.

Иногда полезно провести анализ устойчивости неподвижной точки с помощью линеаризованного отображения Пуанкаре. Оно определяется матрицей A и выражается через матрицу гессиана Ψ по (6.4.6). В окрестности неподвижной точки ТПП $\vec{z}_n = \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix}$ определяются из линейного соотношения $\vec{z}_{n+1} = A\vec{z}_n$. Его решение имеет вид

$$\vec{z}_n = (m_1)^n\vec{a}_1 + (m_2)^n\vec{a}_2,$$

где m_1 и m_2 — собственные значения, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ — собственные векторы матрицы A. Они находятся из уравнения $A\vec{z} = m\vec{z}$.

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} A_{11} - m & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - m \end{vmatrix} = m^2 - 2i_1m + 1 = 0, \quad 2i_1 = A_{11} + A_{22}.$$

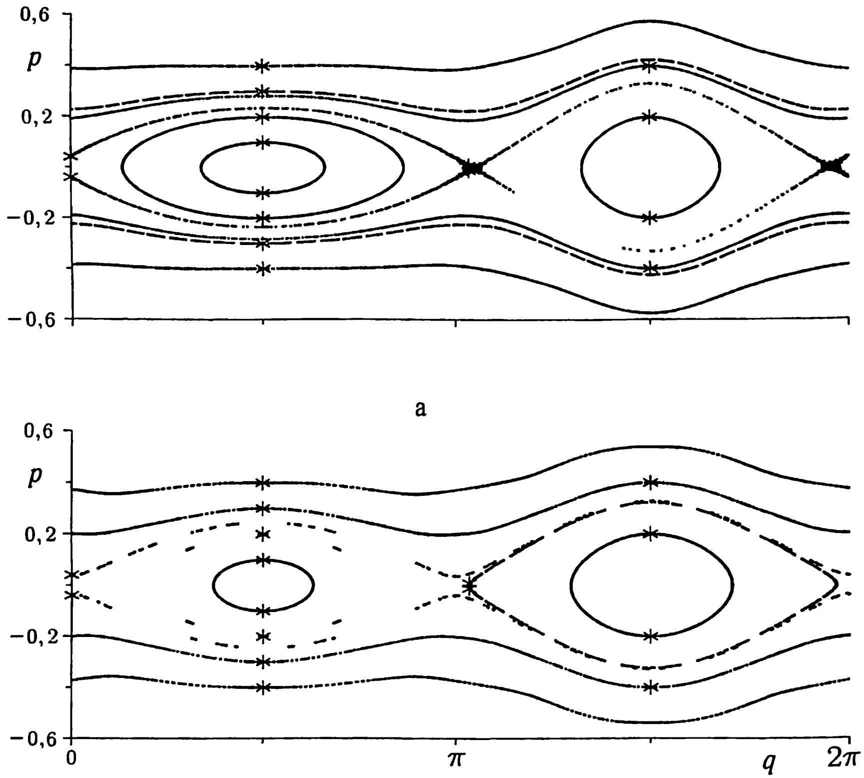
Корни действительные при $|i_1| > 1$. Так как $m_1m_2 = 1$, то один из корней будет больше 1 и, следовательно, $|\vec{z}_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Неподвижная точка — неустойчива. Используя связь (6.4.6) матриц A и Ψ легко показать, что это условие эквивалентно неравенству $\Psi_{xx}\Psi_{yy} - (\Psi_{xy})^2 < 0$, которое было получено выше.

В противоположном случае $|i_1| < 1$ корни m_1 и m_2 — комплексно сопряженные числа по модулю равные единице. В этом случае неподвижная точка устойчива. Собственные значения m_1 и m_2 называются характеристическими множителями. Если $|m_1| > 1$, то $|m_1| = \lim |z_{n+1}/z_n|$ при $n \to \infty$. Таким образом, характеристический множитель $|m| > 1$ определяет относительное увеличение вектора z_n.

Пример. *Найти, с точностью до ε^6, ТПП в моменты времени $t_n = 2\pi n$ для неавтономного нелинейного уравнения второго порядка $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t \cos q$.*

Решение. Построение решения с точностью до ε^4 было приведено в 6.5.1 методами усреднения. Решение этой же задачи с точностью до ε^6 удобнее получить, исходя из иной функции Гамильтона $H = \frac{1}{2}p^2 - \delta \cos t \sin q$. Уравнения Гамильтона имеют вид $\dot{q} = p$, $\dot{p} = \delta \cos t \cos q \Rightarrow \ddot{q} = \delta \cos t \cos q$. При $\delta = \varepsilon^2$

получаем исходное уравнение. Для достижения заданной точности достаточно найти два приближения по параметру δ.



б

Рис. 6.9. Точки ТПП. а — численный расчет, б — аналитическое решение

Канонической заменой $q = u + v(t - \pi)$, $p = v$ приводим гамильтониан к стандартной форме $H = -\delta \cos t \sin(u + vt - v\pi)$. С помощью (6.4.11) и (6.4.12) получим решение для Ψ в моменты времени кратные периоду $t = 2\pi n$

$$\Psi = \varepsilon^2 \Psi_1(x, y) + \varepsilon^4 \Psi_2(x, y) + O(\varepsilon^6),$$

$$\Psi_1(x, y) = \frac{2y}{1 - y^2} \sin x \sin \pi y, \quad \Psi_2(x, y) = \frac{\pi(1 + y^2)}{4(1 - y^2)^2} + \frac{y(1 + y^2) \sin 2y\pi}{2(1 - y^2)^3} +$$

$$+ \frac{\pi y^2 (\cos 2y\pi - \cos 2x)}{2(1 - y^2)^2} + \frac{1 - 3y^2 - 2y^4}{8y(1 - y^2)^3} \sin(2y\pi) \cos 2x$$

и рекуррентные соотношения для ТПП

$$\begin{cases} q_{n-1} = -\pi p_{n-1} + x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ p_{n-1} = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases} \qquad \begin{cases} q_n = \pi p_n + x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ p_n = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}$$

Асимптотические решения позволяют легко провести качественный анализ ТПП: найти неподвижные точки, исследовать характер их устойчивости, найти сепаратрисы. На рис. 6.9,а приведены ТПП при $\varepsilon = 0,4$, найденные численным расчетом исходных дифференциальных уравнений, и на рис. 6.9,б — построенные по аналитическим формулам. Крестиками обозначены положения точки в момент времени $t = 0$, точками — в моменты времени $t = 2\pi n,\ n = 1, 2, \ldots 500$. При небольшом увеличении ε наблюдается хаотизация. Картины хаотического расположения ТПП, найденные численно и аналитически, близки друг к другу.

6.5.3. Сравнение параметрического метода и метода производящих функций

1. Построение отображения Пуанкаре методом производящих функций. Метод производящих функций используется для канонических преобразований [1, 28]. Этот же аппарат можно применить для построения отображения Пуанкаре. Рассмотрим задачу Коши (6.1.1) для системы с одной степенью свободы. Отображение $X_0, Y_0 \to X, Y$, сохраняющее фазовый объем, представляется через производящую дифференцируемую функцию смешанных переменных вида $S(t, X_0, Y) = X_0 Y + \tilde{S}(t, X_0, Y)$ в виде соотношения

$$X = X_0 + \partial\tilde{S}/\partial Y, \quad Y_0 = Y + \partial\tilde{S}/\partial X_0 \tag{6.5.8}$$

При выполнении условия

$$1 + \partial^2\tilde{S}/\partial X_0 \partial Y > 0 \tag{6.5.9}$$

систему можно разрешить относительно X, Y, что дает в результате представление отображения с якобианом, равном единице. Если производящую функцию $\tilde{S}$ определить из уравнения Гамильтона-Якоби

$$\tilde{S}_t(t, X_0, Y) = H(t, X_0 + \tilde{S}_Y(t, X_0, Y), Y), \quad \tilde{S}(0, X_0, Y) = 0, \tag{6.5.10}$$

то отображение (6.5.8) будет решением гамильтоновой системы (6.1.1).

Для системы стандартного вида (6.4.10) функция $\tilde{S}$ представляется рядом по степеням ε. Любое конечное число членов разложения будет определять отображение, у которого фазовый объем будет точно сохраняться. В этом состоит удобство применения метода производящих функций. Однако, в этом методе есть существенные недостатки. Отметим два из них (см. ниже пример гармонического осциллятора).

1. Отображения вида (6.5.8) не являются универсальными. (Например, по-

ворот на 90° в виде (6.5.8) не представим. Для такого отображения нужно в производящей функции выбрать другую пару переменных, но тогда в этих переменных нельзя представить тождественное преобразование [1, 28].)

2. Условие разрешимости существенно ограничивает диапазон измененения параметра ε. Кроме того, это условие (6.5.9) не инвариантно по отношению к преобразованию поворота декартовых координат на фазовой плоскости [1].

Предлагаемая новая схема параметрического представления отображения, свободна от этих недостатков.

2. Преимущества параметрического отображения. В параметрическом методе функция $\Psi(t, x, y)$ играет роль производящей функции. Так же как и в методе производящих функций, $\Psi(t, x, y)$ определяется из уравнения типа Гамильтона-Якоби. Любая конечная сумма первых членов ряда по ε для Ψ будет давать отображение, сохраняющее фазовый объем точно при условии $J > 1$.

Однако у параметрического метода выше был отмечен ряд преимуществ перед методом производящих функций. Они состоят в следующем.

1° Через производящую функцию нельзя выразить отображения очень простого вида. Например, через $S(X_0, Y)$ нельзя выразить поворот на 90° (отображение $X = Y_0, Y = -X_0$). Это отображение можно выразить через производящую функцию с другой парой переменных, но тогда через нее нельзя представить тождественное отображение. Параметрическое представление в этом смысле более универсально.

2° Условие разрешимости (6.5.9), вообще говоря, зависит от выбора декартовой системы координат X, Y, тогда как в параметрическом методе условие $J > 0$ инвариантно по отношению к поворотам координат X, Y

3° В приближениях одинаковой по малому параметру ε точности диапазон изменения параметра ε, удовлетворяющего условию $J > 0$, существенно шире по сравнению с диапазоном изменения параметра ε, удовлетворяющего условию $1 + \partial^2\tilde{S}/\partial X_0 \partial Y > 0$.

4° Коэффициенты Ψ_n ряда $\Psi = \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 +$ существенно меньше коэффициетов ряда S_n для производящей функции.

5° Для автономной системы функция Ψ представляется рядом по нечетным степеням ε.

6° С точностью до ε^3 отображение за время t и усредненный гамильтониан связаны простым соотношением $\Psi = t\bar{H}(x, y)$.

Покажем преимущества параметрического метода на примере, в котором отображение находится точно.

3. Вынужденные колебания линейного осциллятора. Гамильтониан имеет следующий вид

$$H = \varepsilon\left[\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + Xb\sin(t_0 + t)\right]$$

Система уравнений точно интегрируется (см. разд. 6.2, п. 3) и координаты X_n, Y_n точек последования через период в моменты времени $t_n = 2\pi n$ таковы:

$$X_n - X_c = (X_{n-1} - X_c)\cos(2\pi\varepsilon) + (Y_{n-1} - Y_c)\sin(2\pi\varepsilon)\,,$$

$$Y_n - Y_c = -(X_{n-1} - X_c)\sin(2\pi\varepsilon) + (Y_{n-1} - Y_c)\cos(2\pi\varepsilon)\,,$$

$$X_c = \frac{b\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\sin t_0, \quad Y_c = \frac{b\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\cos t_0\,.$$

Точки последования лежат на окружности с центром X_c, Y_c с угловым расстоянием друг от друга $2\pi\varepsilon$.

Параметрический метод дает

$$\Psi(x, y) = \operatorname{tg}\pi\varepsilon\left[(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2\right], \quad J = 1/\cos^2(\pi\varepsilon) > 0\,.$$

Согласно методу производящих функций имеем

$$S(X_{n-1}, Y_n) = \frac{1-\cos 2\pi\varepsilon}{\cos 2\pi\varepsilon}(X_{n-1} - X_c)(Y_n - Y_c) +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\pi\varepsilon\left[(X_{n-1} - X_c)^2 + (Y_n - Y_c)^2\right],$$

$$1 + S_{XY} = \frac{1}{\cos 2\pi\varepsilon} > 0\,.$$

На рассмотренном примере легко убедиться во всех вышеперечисленных преимуществах 1° – 6° параметрического метода перед методом производящих функций. Дополнительно к этому можно заметить, что

а) формула для Ψ короче, чем для S;

б) радиусы сходимости рядов по степеням ε для Ψ в два раза больше радиусов сходимости рядов для S (в параметрическом методе допускаются повороты до 180°, а в методе производящих функций только до 90°);

в) коэффициенты ряда Ψ_n примерно в 2^n раз меньше коэффициента S_n; соответственно для остаточных членов этих рядов r_n и R_n имеем $r_n = 2^{-n}R_n$.

6.5.4. Алгоритм инвариантной нормализации гамильтониана с помощью параметризации

Выше в разд. 6.5.1, п. 7 уже было сформулировано определение В.Ф. Журавлева инвариантной нормальной формы. Автор определения предложил эффективный алгоритм вычисления нормальной формы, в котором замена переменных находится методом генератора Ли с помощью формул Кэмбела-Хаусдорфа. В этом методе нужно построить автономный гамильтониан некоторой вспомогательной системы, фазовый поток которой и определяет необходимую замену. Метод можно применять для автономных гамильтоновых систем. Если же система неавтономна, то ее нужно привести к автономному виду в расширенном фазовом пространстве.

Здесь излагается модификация метода инвариантной нормализации, предложенная в работах [69, 74]. В них используется замена переменных в параметрической форме. Алгоритм применяется непосредственно к неавтономной системе. Показывается, что для автономных систем в модифицированном алгоритме параметрическая функция Пуанкаре и производящий гамильтониан в алгоритме Журавлева совпадают в первых двух приближениях.

1. Вывод гомологической цепочки. Покажем, как уравнение (6.4.1) теоремы о параметризации свести к гомологической цепочке уравнений, аналогичных цепочке уравнений Журавлева [28, 30].

Пусть дан гамильтониан $H(t,q,p) = H_0(t,q,p) + F(t,q,p,\varepsilon)$, $F(t,q,p,\varepsilon) = \varepsilon F_1(t,q,p) + \varepsilon^2 F_2(t,q,p) + \ldots$, который требуется привести к нормальной форме. Пусть $\bar{H}^{(k)}(t,Q,P,\varepsilon) = H_0(t,Q,P) + \bar{F}^{(k)}(t,Q,P,\varepsilon)$ — асимптотика k-го порядка нормальной формы $\bar{F}^{(k)}(t,q,p,\varepsilon) = \varepsilon\bar{F}_1(t,Q,P) + \cdots + \varepsilon^k\bar{F}_k(t,Q,P)$ с канонической заменой (6.4.1) и

$$\Psi^{(k)}(t,x,y,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_1(t,x,y) + \cdots + \varepsilon^k\Psi_k(t,x,y)$$

асимптотика k-го порядка функции $\Psi(t,x,y,\varepsilon)$ в (6.4.1). Тогда асимптотика $\Psi^{(k)}$ будет удовлетворять уравнению (6.4.3), которое можно записать так:

$$\begin{aligned}&\partial\Psi^{(k)}/\partial t + H_0(t, x - \tfrac{1}{2}\Psi_y^{(k)}, y + \tfrac{1}{2}\Psi_x^{(k)}) - H_0(t, x + \tfrac{1}{2}\Psi_y^{(k)}, y - \tfrac{1}{2}\Psi_x^{(k)}) + \\ &\quad + F^{(k)}(t, x - \tfrac{1}{2}\Psi_y^{(k)}, y + \tfrac{1}{2}\Psi_x^{(k)}) = \bar{F}^{(k)}(t, x + \tfrac{1}{2}\Psi_y, y - \tfrac{1}{2}\Psi_x).\end{aligned}$$

Если H_0 — полином не выше второй степени по q и p. Тогда это уравнение приведется к виду

$$\begin{aligned}&\partial\Psi^{(k)}/\partial t + \{H_0, \Psi^{(k)}\} + R^{(k)} = \bar{F}^{(k)}, \\ &R^{(k)} = \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \cdots + \varepsilon^k R_k = \\ &\quad = F(t, x - \tfrac{1}{2}\Psi_y,\ y + \tfrac{1}{2}\Psi_x) - \bar{F}^{(k)}(t, x + \tfrac{1}{2}\Psi_y,\ y - \tfrac{1}{2}\Psi_x) + \bar{F}^{(k)}(t,x,y).\end{aligned}$$

Отсюда следует цепочка уравнений для определения коэффициентов разложений канонических замен Ψ_i и нормализованных гамильтонианов $\bar{F}_i$

$$\begin{aligned}&\partial\Psi_i/\partial t + \{H_0, \Psi_i\} + R_i = \bar{F}_i, \\ &\partial\bar{F}_i/\partial t + \{H_0, \bar{F}_i\} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots\end{aligned} \tag{6.5.11}$$

Здесь функции R_i вычисляются последовательно по формулам

$$R_1 = F_1, \quad R_2 = F_2 + \frac{1}{2}\{F_1 + \bar{F}_1, \Psi_1\}, \ldots. \tag{6.5.12}$$

Аналогичная цепочка уравнений (6.5.11) получена в [28, 30]; уравнения названы гомологическими. Их можно записать в следующей форме

$$R_i = \bar{F}_i - d\Psi_i/dt, \quad d\bar{F}_i/dt = 0, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{6.5.13}$$

Здесь полные производные d/dt вычисляются по правилу дифференцирования сложных функций $\Psi_i(t, x, y)$, $F_i(t, x, y)$, в которых $x(t)$ и $y(t)$, как функции времени определяются из решения задачи для невозмущенной системы с гамильтонианом $H_0(t, x, y)$

$$\dot{x} = H_{0y}, \quad \dot{y} = -H_{0x}, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{6.5.14}$$

2. Решение гомологически уравнений. Если в (6.5.13) вместо x и y подставить решение системы (6.5.14), то из второго уравнения (6.5.13) следует, что функция $\bar{F}_i$ не зависит от времени t. Тогда интеграл по времени первого уравнения будет иметь вид

$$\int_{t_0}^{t} R_i(t)dt = (t - t_0)\bar{F}_i(t_0, x_0, y_0) + \Psi_i(t_0, x_0, y_0) - \Psi_i(t, x, y). \tag{6.5.15}$$

Он и дает ключ к полному решению проблемы: квадратура (6.5.15) определяет нормальную форму и функции Ψ_i в замене переменных (6.4.1).

К сожалению, представить интеграл от функции R_i в виде (6.5.15) единственным образом не всегда возможно. Единственность будет, если функция R_i после подстановки в нее решения (6.5.14) окажется квазипериодической (суммой периодических по t функций). В этом случае интеграл от R_i равен линейной функции и квазипериодической $f(t)$. Из $f(t)$ можно вычесть не зависящую от времени среднюю часть $\bar{f}(t)$ и отнести ее ко второму слагаемому правой части (6.5.15). Представление (6.5.15) тогда будет единственным образом определять $\bar{F}_i(t_0, x_0, y_0)$ и функцию $\Psi_i(t_0, x_0, y_0)$ с нулевым средневременным значением $\overline{\Psi(t, x(t), y(t))} = 0$. Условие квазипериодичности R_i накладывает на параметры ограничения , при которых существует нормальная форма. Сформулируем полученный результат.

Асимптотики k-го приближения нормальной формы и замены переменных, приводящей к ней, существуют и единственны, если после подстановки решения (6.5.14) в функции R_i, $i = 1, 2, \ldots k$, они окажутся квазипериодическими по времени функциями. Тогда в правой части интеграла (6.5.15) $\bar{F}_i(t_0, x_0, y_0)$ — коэффициент линейного по t слагаемого, $\bar{\Psi}_i(t_0, x_0, y_0)$ — не зависящее от времени слагаемое.

3. Сравнение алгоритма Журавлева и модифицированного алгоритма. Отличие приведенного здесь алгоритма от [28, 30] показано в таблице 6.1

Таблица 6.1

Настоящий алгоритм	Алгоритм [28, 30]
Исходная система $H(t,q,p)$ — не автономна	Система $H(q,p)$ — автономна Исходная система сводится к автономной с повышением порядка
Функция $\Psi(t,\varepsilon,x,y)$	Производящий гамильтониан $G(\varepsilon,Q,P)$
Каноническая замена ищется в параметрической форме (6.4.1)	Каноническая замена ищется на фазовом потоке гамильтоновой системы

Связь производящего гамильтониана G и функции Ψ устанавливается так. В методе Журавлева замена $q,p \to Q,P$ ищется на фазовом потоке гамильтоновой системы

$$dX/d\tau = G_Y, \quad dY/d\tau = -G_X. \tag{6.5.16}$$

При $\tau = 0$ $X(0) = q$, $Y(0) = p$; а при $\tau = \varepsilon$ $X(\varepsilon) = Q$, $Y(\varepsilon) = P$, где τ вспомогательный параметр $0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon$ — аналог времени t.

Эта же замена в настоящем алгоритме осуществляется с помощью параметризации. Функция Ψ, определяющая отображение на фазовом потоке гамильтоновой системы (6.5.16), будет определяться из уравнения

$$\Psi_\tau(\tau,x,y) = G(x + \frac{1}{2}\Psi_y, y - \frac{1}{2}\Psi_x), \quad \Psi(0,x,y) = 0.$$

С точностью до $\tau^3 = \varepsilon^3$ получим $\Psi = \varepsilon G$. Поэтому асимптотики $\Psi_1 = G_0$, $\Psi_2 = G_1$ первых двух приближений в обоих методах совпадают, а следовательно R_1, R_2 в обоих методах также тождественны. Остальные приближения для R_3, $R_4, \ldots$ будут отличаться. Хотя сама нормальная форма от выбора метода не зависит.

4. Алгоритм инвариантной нормализации для асимптотического определения последовательности точек Пуанкаре. Предложенный выше алгоритм позволяет найти асимптотику общего решения k-го порядка. Алгоритм допускает еще большее упрощение для периодических во времени гамильтонианов. В этом случае полезно получить не траектории движения $q(t)$, $p(t)$, а выделить на ней последовательность точек $q_m = q(Tm)$, $p_m = p(Tm)$ в кратные периоду T моменты времени $t = t_m = Tm$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Эту последовательность точек на траектории будем называть точками последования Пуанкаре или сокращенно ТПП.

Асимптотическое решение для ТПП строится так. Из квадратур (6.5.15) при $i = 1, \ldots k$ находим функции $\bar{F}_i(0,Q,P)$ и $\Psi_i(0,x,y)$. Причем последнюю квадратуру можно упростить, полагая в (6.5.15) $t_0 = 0$. Таким образом, находим асимптотики k-го приближения

$$\bar{F}^{(k)}(0,Q,P,\varepsilon)=\varepsilon\bar{F}_1(0,Q,P)+\dots+\varepsilon^k F_k(0,Q,P),$$
$$\bar{\Psi}^{(k)}(0,x,y,\varepsilon)=\varepsilon\bar{\Psi}_1(0,x,y)+\dots+\varepsilon^k\Psi_k(0,x,y)$$

После этого применяется теорема Журавлева.

Пусть $Q(Tm,a,b)$, $P(Tm,a,b)$ — ТПП невозмущенной системы. Пусть $X(Tm,Q_0,P_0)$, $Y(Tm,Q_0,P_0)$ — ТПП, найденные из решения системы уравнений

$$\dot{X}=\frac{\partial}{\partial Y}\bar{F}^{(k)}(0,X,Y,\varepsilon),\ \dot{Y}=-\frac{\partial}{\partial X}\bar{F}^{(k)}(0,X,Y,\varepsilon),\quad X(0)=Q_0,\ Y(0)=P_0.$$

Тогда ТПП Q_m,P_m полной гамильтоновой системы в новых переменных Q,P получаются подстановкой $a=X(Tm,Q_0,P_0)$, $b=Y(Tm,Q_0,P_0)$ в функции $Q(Tm,a,b)$, $P(Tm,a,b)$, $m=0,1,..$

В исходных переменных ТПП находится с помощью параметрической замены с функцией $\bar{\Psi}^{(k)}(0,x,y,\varepsilon)$. В этой замене параметры x,y можно исключить, выразив их через q,p

$$x(q,p)=q+\tfrac{1}{2}\Psi_p(q,p)+\tfrac{1}{4}\{\Psi,\Psi_p\}+$$
$$y(q,p)=p-\tfrac{1}{2}\Psi_q(q,p)-\tfrac{1}{4}\{\Psi,\Psi_q\}+$$

Новые переменные выражаются через старые так $Q=2x(q,p)-q$, $P=2y(q,p)-p$.

В результате получим связь новых переменных со старыми

$$\begin{aligned}Q(q,p)&=q+\Psi_p(q,p)+\tfrac{1}{2}\{\Psi,\Psi_p\}+\\ P(q,p)&=p-\Psi_q(q,p)-\tfrac{1}{2}\{\Psi,\Psi_q\}+\end{aligned}\tag{6.5.17}$$

Чтобы выразить старые переменные через новые, достаточно в формулах (6.5.17) их заменить друг на друга и затем изменить знак у Ψ на противоположный

$$\begin{aligned}q(Q,P)&=Q-\Psi_P(Q,P)+\tfrac{1}{2}\{\Psi,\Psi_P\}+\\ p(Q,P)&=P+\Psi_Q(Q,P)-\tfrac{1}{2}\{\Psi,\Psi_Q\}+\end{aligned}\tag{6.5.18}$$

Заметим, что в методе инвариантной нормализации [28, 29] для этой цели применяются формулы Кемпбелла-Хаусдорфа, которые до второго приближения совпадают с (6.5.17) и (6.5.18) с точностью до замены Ψ на производящий гамильтониан G. Они в [28, 29] записаны в следующей симметричной форме

$$Q(q,p)=q+\{\Psi,q\}+\tfrac{1}{2}\{\Psi,\{\Psi,q\}\}+$$
$$P(q,p)=p+\{\Psi,p\}+\tfrac{1}{2}\{\Psi,\{\Psi,p\}\}+$$

$$q(Q,P)=Q-\{\Psi,Q\}+\tfrac{1}{2}\{\Psi,\{\Psi,Q\}\}+\dots,$$
$$p(Q,P)=P-\{\Psi,P\}+\tfrac{1}{2}\{\Psi,\{\Psi,P\}\}+$$

которые, очевидно эквивалентны (6.5.17) и (6.5.18).

5. Примеры асимптотических решений. Весьма поучительные примеры в [28, 30] демонстрируют существенные упрощения перед всеми известными ранее. Данный метод по простоте эквивалентен методу [28, 30], но отличается тем, что цепочка уравнений для асимптотик записывается в исходной гамильтоновой системе независимо от того, автономна система или неавтономна. В методе [28, 29] неавтономную систему надо свести к автономной с повышением порядка системы и потом для нее писать цепочку уравнений для асимптотик.

Продемонстрируем предлагаемый метод на двух примерах решения задач о вынужденных колебаниях в резонансе. Для решения этих задач классическим методом приходится вводить другое определение нормальной формы [13]. Данным методом этого делать не надо. Нормальная форма вычисляется непосредственно из квадратуры и затем находится решение. Покажем это.

Пример 1. *Найти общее решение задачи о вынужденных колебаниях линейного осциллятора при резонансе* $\ddot{q} + q = \varepsilon \sin t$.

Пример 2. *В задаче о вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора Дуффинга* $\ddot{q} + q = \varepsilon(\sin t - q^3 + 2\lambda q)$ *найти* λ, *при котором решение будет периодично по времени с периодом* 2π. *Исследовать устойчивость этого решения.*

В обоих примерах уравнения гамильтоновы, имеют один и тот же невозмущенный гамильтониан $H_0 = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ и решение соответствующей ему невозмущенной системы уравнений

$$q = q_0 \cos(t-t_0)+p_0 \sin(t-t_0), \quad p = -q_0 \sin(t-t_0)+p_0 \cos(t-t_0)\,. \tag{6.5.19}$$

Оно является базовым для построения нормальной формы в обоих примерах.

Найдем первое приближение в примере 1. Уравнения имеют гаильтонову форму с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) - \varepsilon q \sin t$. Подставляя в выражение $R_1 = F_1 = -q \sin t$ решение (6.5.19), получим периодическую по времени функцию $R_1(t)$, интеграл которой имеет вид

$$\int_{t_0}^{t} R_1(t)dt = \bar{F}_1(t_0, q_0, p_0)(t - t_0) + \bar{\Psi}_1(t_0, q_0, p_0) + f(t) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(q_0 \sin t_0 + p_0 \cos t_0)\,(t - t_0) - \tfrac{1}{4}\,(q_0 \cos t_0 + p_0 \sin t_0) + f(t)\,.$$

Отсюда найдем первые коэффициенты $\bar{F}_1$ и $\bar{\Psi}_1$ и разложения нормальной формы $\bar{H} = H_0 + \varepsilon \bar{F}_1$ и функции $\bar{\Psi} = \varepsilon \Psi_1$

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) + \bar{F}(t, Q, P, \varepsilon), \quad \bar{F}(t, Q, P, \varepsilon) = -\frac{1}{2}\,(Q \sin t + P \cos t)\,,$$

$$\Psi(t, Q, P, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{4}\,(Q \cos t + P \sin t)$$

Решение первого приближения получаем, используя теорему В.Ф. Журавлева

[29]. Возмущенной части гамильтониана $\bar{F}(0, Q, P) = -\varepsilon P/2$ соответствует система $\dot{Q} = -\varepsilon/2$, $\dot{P} = 0$ и решение $Q = Q_0 - \varepsilon t/2$, $P = P_0$.

Подставим Q и P вместо q_0 и p_0 в (6.5.19) и положим в нем $t_0 = 0$. Получим решение системы уравнений в переменных Q, P

$$Q = (Q_0 - \varepsilon t/2)\cos t + P_0 \sin t, \quad P = -(Q_0 - \varepsilon t/2)\sin t + P_0 \cos t.$$

Решение системы уравнений в исходных переменных q, p получается так. Подставляя функцию $\Psi(t, Q, P, \varepsilon)$ в формулы (6.5.18), найдем замену

$$q = Q + (\varepsilon/4)\sin t, \quad p = P - (\varepsilon/4)\cos t$$

и, пользуясь ей, найдем решение в исходных переменных

$$q = (Q_0 - \varepsilon t/2)\cos t + (P_0 + \varepsilon/4)\sin t = (q_0 - \varepsilon t/2)\cos t + (p_0 + \varepsilon/2)\sin t.$$

В линейной задаче все последующие члены ряда по ε равны нулю поэтому первое приближение является точным решением.

Решение примера 2 методом усреднения приведено в [28] и [11]. Для сравнения приведем решение методом нормальной формы. Исходный гамильтониан системы имеет вид $H = H_0 + \varepsilon F_1$, где $F_1 = -q\sin t - \lambda p^2 + q^4/4$. Опять пользуемся квадратурой (6.5.15). Подставляя решение (6.5.19) в выражение $R_1 = F_1$, получим подынтегральную функцию $R_1(t)$. Из квадратуры (6.5.15) найдем коэффициент разложения нормальной формы $\bar{F}_1(t, Q, P)$ и, полагая в нем $t = 0$, получим

$$\bar{F}_1(0, Q, P) = -\frac{1}{2}P - \frac{\lambda}{2}(Q^2 + P^2) + \frac{3}{32}(Q^2 + P^2)^2$$

Периодическому решению будет соответствовать неподвижная точка. Ее координаты Q, P находятся из решения системы уравнений

$$\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial Q} = Q\left(-\lambda + \frac{3}{8}A^2\right) = 0, \quad \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial P} = -\frac{1}{2} + P\left(-\lambda + \frac{3}{8}A^2\right) = 0.$$

Отсюда находим $Q = 0$, $P = \pm A$ при $\lambda = \frac{3}{8}A^2 \pm \frac{1}{2A}$, где $A = \sqrt{Q^2 + P^2}$ — амплитуда. Зависимость $\omega = 1 - \varepsilon\lambda$ от A называется амплитудно-частотной характеристикой.

Неподвижная точка будет устойчивой, если функция F_1 в ней достигает строгого минимума или максимума. Отсюда получим условие устойчивости периодического решения

$$\left(\lambda - \frac{3}{8}A^2\right)\left(\lambda - \frac{9}{8}A^2\right) > 0,$$

что согласуется с аналогичным условием, полученным методом усреднения. Приводим третий пример (рассмотренный ранее в разд. 6.5.1). Он показывает как с помощью параметризации более эффективно находить высокие приближения.

Пример 3. *Найти ТПП в моменты времени* $t_n = 2\pi n$ *для нелинейного уравнения* $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t' \cos q$ *с точностью до* ε^6.

Это уравнение уже встречалось в разделах 6.5.1 и 6.5.2. Оно описывает разные задачи механики и физики. Одна из них — вибрационное движение сферической частицы в жидкости, в которой создается плоская стоячая акустическая волна [18, 57]. Пусть имеется вертикальная труба с жесткой горизонтальной крышкой. В трубе возбуждается стоячая волна, в которой скорость жидкости изменяется по следующему закону $v = A\omega \sin \omega t \cos kz$, где ω — частота волны, t — время, k — волновое число, z — ось, направленная вертикально вверх, A — амплитуда перемещения частиц жидкости, которая считается малой. Частота и волновое число связаны со скоростью звука в жидкости $\omega = kc$. Если для частицы радиуса a выполняется условие $\mu/(\rho kca^2) \ll 1$, то сила трения Стокса и наследственная сила Бассэ пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции. Тогда уравнение движения частицы имеет вид

$$\begin{aligned}
&(\rho + 2\rho_0)\ddot{z}_0 = 3\rho w - 2(\rho_0 - \rho)g,\\
&w = \partial v/\partial t + v\partial v/\partial z \approx \partial v/\partial t = A\omega^2 \cos \omega t \cos kz.
\end{aligned}$$

Здесь ρ и ρ_0 — плотности жидкости и твердой частицы, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Для частицы нейтральной плавучести $\rho = \rho_0$ уравнение приводится к уравнению примера 3, в котором $q = kz_0$, $t' = \omega t$, $\varepsilon = Ak$.

В [18, 57] для решения этого уравнения применяется классический метод усреднения [11]. Разложение ведется по параметру ε. Для исследования задачи требуется три приближения. Решение получается в виде $q = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + O(\varepsilon^4)$.

Покажем, как получить решение предлагаемым методом. Разложение будет вестись по параметру $\delta = \varepsilon^2$. Поэтому для достижения существенно большей точности порядка ε^6 требуется всего 2 приближения с гораздо меньшими выкладками.

Решение. К уравнению примера сводится система уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона $H = \frac{1}{2}p^2 + \delta F_1(t, q, p)$, $F_1 = -\cos t \sin q$.

Находим решение невозмущенной системы $q = q_0 + p_0(t - t_0)$, $p = p_0$ и подставляем его в $R_1 = F_1$. Получим периодическую функцию $R_1(t)$ и из интеграла $\int_{t_0}^{t} R_1 dt = -\frac{\cos(t_0+q_0)}{2+2p_0} + \frac{\cos(-t_0+q_0)}{2-2p_0} + f_1(t)$ находим на первой итерации

$$\bar{F}_1 = 0, \quad \bar{\Psi}_1(t, q, p) = -\frac{\cos(t+q)}{2+2p} + \frac{\cos(-t+q)}{2-2p}. \tag{6.5.20}$$

На второй итерации

$$R_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial q}\frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial p} = \frac{1}{4}\cos t \cos q \left(\frac{\cos(t+q)}{(1+p)^2} + \frac{\cos(t-q)}{(1-p)^2}\right)$$

Из интеграла (6.5.15) находим линейную F_2 и независящую от времени Ψ_2 части. Окончательный вид нормальной формы и функции, определяющей параметрическую замену, таков

$$\bar{H} = \tfrac{1}{2}P^2 + \tfrac{\delta^2}{16}\left[\tfrac{1}{(1+P)^2} + \tfrac{1}{(1-P)^2}\right] + O(\delta^3),$$

$$\Psi(0,x,y) = \tfrac{\delta y}{1-y^2}\cos x - \tfrac{\delta^2(1-3y^2-2y^4)}{16y(1-y^2)^3}\sin 2x + O(\delta^3).$$

Функция $\Psi(0,x,y)$ имеет знаменатель, обращающийся в нуль при $y = 0, \pm 1$. Это известная проблема малых знаменателей асимптотической теории для гамильтоновых систем [1]. Покажем, как строить инвариантную нормальную форму, в которой малых знаменателей не будет.

6. Алгоритм уничтожения малых знаменателей. Для устранения малых знаменателей у функций $\bar{F}(t,Q,P)$ и $\Psi(t,x,y)$ во втором приближении можно добавить к невозмущенному гамильтониану $H_0(t,q,p)$ слагаемое $-f(t,q,p)$, а противоположное по знаку слагаемое $f(t,q,p)$ отнести к возмущению. Гамильтониан не изменится, однако, асимптотические разложения для нормальной формы и замены переменных изменятся так, что в них особенности будут исключены.

Покажем как уничтожить малый знаменатель y в функции $\Psi_2(x,y)$ примера 3. Невозмущенный гамильтониан H_0 и возмущение F представим в виде

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\delta^2}{8}\cos 2q, \quad F = -\delta\cos t\sin q - \frac{\delta^2}{8}\cos 2q.$$

Очевидно, что гамильтониан системы $H = H_0 + F$ при этом не изменится. Получим асимптотическое решение для ТПП с точностью до малых порядка $\delta^3 = \varepsilon^6$ методом инвариантной нормальной формы. Решение невозмущенной системы представляем в виде разложения по параметру δ

$$q = a + bt + \delta^2\left(\tfrac{t}{4b}\cos 2a - \tfrac{1}{4b^2}(\sin(a+bt) - \sin a)\right) + O(\delta^3),$$

$$p = b + \tfrac{\delta^2}{4b}\left(\cos a - \cos(a+bt)\right) + O(\delta^3),$$

где через a и b обозначены начальные значения $q(0), p(0)$.

Из квадратуры первого приближения получаем то же, что и в предыдущем решении (6.5.20). Выражение для R_2 изменится на величину $F_2 = -\frac{1}{8}\cos 2q = -\frac{1}{8}\cos(2a+2bt)$. Соответственно изменится и квадратура от R_2. Вычисляя ее, получим нормальную форму и замену переменных с исключенной особенностью при $y \to 0$. Нормальную форму

$$\bar{H} = \frac{1}{2}P^2 + \delta^2 \left(\frac{1}{16\,(1+P)^2} + \frac{1}{16\,(-1+P)^2} + \frac{1}{8}\cos 2Q \right)$$

можно преобразовать, добавляя к ней несущественное постоянное число,

$$\bar{H} = \frac{1}{2}P^2 + \delta^2 \left(P^2 \frac{3-P^2}{8\left(1-P^2\right)^2} - \frac{1}{4}\sin^2 Q \right) + O(\delta^3). \tag{6.5.21}$$

Функция, определяющая параметрическую замену, имеет вид

$$\begin{gathered} \Psi_1(0,x,y) = \frac{y}{\left(1-y^2\right)}\cos x, \quad \Psi_2(0,x,y) = \frac{y^3\left(5-y^2\right)}{16\left(1-y^2\right)^3}\sin 2x, \\ \Psi(0,x,y) = \delta\Psi_1(0,x,y) + \delta^2\Psi_2(0,x,y) + O(\delta^3). \end{gathered} \tag{6.5.22}$$

Как видно функция Ψ не содержит малого знаменателя y.

Нормальная форма позволяет найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость. Из уравнения неподвижных точек $\partial\bar{H}/\partial Q = 0$, $\partial\bar{H}/\partial P = 0$ находим $P = 0$, $\sin Q \cos Q = 0$ и определяем на периоде $Q \in [0, 2\pi)$ координаты четырех неподвижных точек: $M_i(Q_i, P_i) = ((i-1)\pi/2, 0)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Точки M_2 и M_4 соответствуют минимуму функции $\bar{H}$ и по теореме Лагранжа устойчивы. По теореме Ляпунова они соответствуют устойчивому периодическому решению. Точки M_1 и M_3 являются точками гиперболического типа. Функция $\bar{H}$ не имеет в них ни минимума, ни максимума и, следовательно, эти точки неустойчивы. Они соответствуют двум неустойчивым периодическим решениям.

Инвариантные кривые, на которых лежат ТПП, являются интегралом нормальной формы $\bar{H}(Q_m, P_m) = \delta^2 C/4$. Отсюда с точностью до малых порядка δ^3 получим однопараметрическое семейство инвариантных кривых для Q_m, P_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_m^2 \left(1 + \delta^2 \frac{3-P_m^2}{4(1-P_m^2)^2} \right) = \frac{1}{2}\delta^2 (C + \sin^2 Q_m)^2$$

С помощью замены переменных $p = P(1 - \delta \sin Q + \frac{1}{2}\delta^2 + O(\delta^3))$, $Q = q + \delta\cos q - \frac{1}{4}\delta^2 \sin 2q + O(\delta^3)$, вытекающей из (6.5.18) и (6.5.22), найдем инвариантные кривые в исходных переменных. С точностью до малых порядка δ^3 они имеют вид $p_m = \pm\delta\,(1 - \delta\sin q_m)\sqrt{\left(C + \sin^2(q_m + \delta\cos q_m)\right)/2}$.

В интервале $-1 \leqslant C < 0$ ТПП лежат на замкнутых инвариантных кривых. Они соответствую финитному движению вокруг неподвижной точки M_2 либо M_4. Если учесть как угодно малую силу трения, то эти инвариантные кривые превратятся в спирали, по которым ТПП будут при $t \to \infty$ стремится либо к M_2, либо к M_4. При $C > 0$ инвариантные кривые соответствуют инфинитному

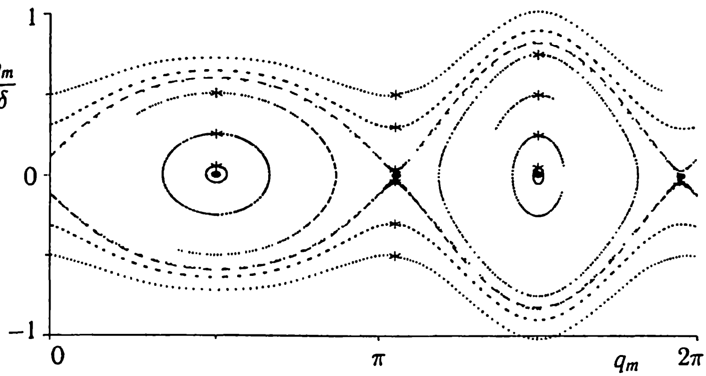


Рис. 6.10. ТПП для системы с гамильтонианом $H = p^2/2 - \delta \cos t \sin q$

движению. При $C = 0$ получаем сепаратрису с уравнением

$$p_m = \pm(\delta/\sqrt{2})\,(1 - \delta \sin q_m)\,|\sin(q_m + \delta \cos q_m)|, \tag{6.5.23}$$

разделяющую финитное движение от инфинитного. На рис. 6.10 изображены ТПП, полученные численно из исходных уравнений при $\delta = 0,16$. Начальные значения ТПП обозначены звездочками. ТПП лежат на инвариантных кривых, которые не отличимы от кривых, определяемых уравнением (6.5.23). Жирными точками отмечены положения неподвижных точек M_i, $i = 1, 2, 3, 4$. В переменных q, p их координаты таковы $M_1(2\pi - \delta, 0)$, $M_2(\pi/2, 0)$, $M_3(\pi + \delta, 0)$, $M_4(3\pi/2, 0)$.

Глава 7

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В ВЯЗКИХ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

7.1. Динамический хаос

7.1.1. Упорядоченное и хаотическое движения

До настоящего времени пока нет общепринятого определения хаотических движений. Для систем с одной степенью свободы можно дать геометрическое простое определение хаоса, хотя и не вполне строгое математически. Рассмотрим гамильтонову систему с T-периодическим гамильтонианом. Она определяет движение лагранжевых частиц несжимаемой среды на плоскости. Рассмотрим положения, которые занимает лагранжева частица через интервалы времени, кратные периоду $t_n = t_0 + Tn, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такие точки мы назвали точками последования Пуанкаре (ТПП), образующими счетное множество точек на плоскости, которое зависит, вообще говоря, от t_0, X_0, Y_0. Они вычисляются по рекуррентным формулам с помощью отображения Пуанкаре.

Упорядоченным движением мы назовем такое движение, при котором множество ТПП лежит на одномерной линии (инвариантной кривой). При упорядоченном движении все множества ТПП образуют семейство инвариантных кривых. Во всех интегрируемых системах движение ТПП упорядоченное.

В интегрируемой системе частицы, находящиеся на одной линии тока, будут находится на ней вечно. Если окрасить эти частицы, то краска по другим линиям тока не распространится. Окрашенной останется только одна линия. Таким образом, если первый интеграл существует (а это будет для любого установившегося течения), то перемешивания пассивной примеси не произойдет.

Альтернативой упорядоченных движений являются хаотические движения, которые могут быть только в неинтегрируемых системах, т. е. в системах, у которых нет первого интеграла. При этом само решение может быть выписано в простом аналитическом виде. При хаотическом движении ТПП при некоторых начальных значениях t_0, X_0, Y_0 заполняют область конечной площади. В неинтегрируемых системах инвариантные кривые могут достаточно плотно заполнять некоторую область движения и хаотизация не будет заметна. Такое движение тоже будем называть упорядоченным. Топологическая структура ТПП при упорядоченном движении на фазовой плоскости практически не отличима от структуры интегрируемых гамильтоновых систем. В этом случае линии тока непрерывно заполняют всю рассматриваемую область, как это имеет место для автономной системы изображенной на рис. 6.1.

Упорядоченные и хаотические движения можно наблюдать на фазовом портрете последовательности точек, определяемых по отображению Чирикова. На рис. 6.7 представлены фазовые портреты ТПП при различных значениях параметра K. При $K = 0,5$ хаос не наблюдается, хотя система не имеет первого интеграла. При $K = 0,7$ видна хаотизация в окрестности сепаратрисы. Площадь хаотизации увеличивается с ростом K, что видно из следующих рисунков при $K = 1$ и $K = 1,5$.

При хаотическом движении пассивная примесь помещенная в как угодно малой окрестности точки t_0, X_0, Y_0 распространится за достаточно большой промежуток времени на область конечной площади. Площадь отнесенную к площади движения можно принять за меру хаоса.

Примеры расчетов хаотических движений представлены в следующих разделах. Динамический хаос связывается с процессом перемешивания пассивной примеси в движущейся среде.

Заметим, что введенное определение хаотизации не зависит от t_0. Действительно, при изменении t_0 на $t_0 + \Delta t$, $0 < \Delta t < T$ множество ТПП преобразуется с помощью непрерывного отображения $P_{t_0}^{\Delta t}$. При этом одномерная линия или двумерная область переходят соответственно в одномерную линию или двумерную область. Если $\Delta t = kT$ т. е. кратно периоду, то отображение $P_{t_0}^{\Delta t} = P_{t_0}^{kT}$ переводит ТПП в себя. При произвольном значении Δt можно представить в виде $\Delta t = kT + \Delta t'$, $0 < \Delta t' < T$ Отображение $P_{t_0}^{\Delta t}$ тождественно отображению $P_{t_0}^{\Delta t'}$ и не меняет топологической структуры ТПП.

В дальнейшем для определенности выбирается $t_0 = 0$, а при обозначении отображения Пуанкаре верхний и нижний индексы будем убирать: $P = P_0^T$.

7.1.2. Качественный анализ гамильтоновой системы стандартной формы

Исследование хаотичности движения с помощью отображений Пуанкаре называют также методом сечений Пуанкаре. Этой теме посвящены монографии [31, 44, 91, 94, 102]. Однако само построение отображения Пуанкаре — сложная вычислительная задача. Поэтому обычно ТПП находятся численно, а аналитические методы для вычисления ТПП в гидродинамических системах не применяются (за исключением очень простых искусственных примеров [41]).

Для качественного исследования систем с одной степенью свободы с гамильтонианом стандартной формы

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \qquad (7.1.1)$$

где ε — малый параметр, полезны следующие теоретические результаты. Известно, что автономная гамильтонова система (гамильтониан явно не зависит от времени) является интегрируемой. Лагранжевы частицы лежат на одномерных линиях тока $H(X_n, Y_n) = \mathrm{const}$, и движение упорядоченное. Для неавтономной системы стандартного вида асимптотическая процедура метода усреднения [11, 29] позволяет построить для любого целого $k > 0$ близкую к тождественной каноническую замену переменных $X, Y \to X, Y$, так что с точностью до малых порядка ε^{k+1} уравнения для новых переменных будут иметь вид автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $\bar{H}(X, Y)$.

Последовательностью канонических замен гамильтониан системы можно привести к почти автономному виду $\bar{H}(X, Y) + \rho(t, X, Y)$. Теорема А.И. Нейштадта [56] устанавливает для неинтегрируемых систем с аналитическим гамильтонианом существование неулучшаемой оценки $|\rho| < C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. При $\rho = 0$ система имеет интеграл, и в случае одной степени свободы, хаоса не будет. Хаос вызывает именно экспоненциально малая величина $\rho(t, X, Y)$, которую методами усреднения определить невозможно. Поэтому применение метода усреднения для конструктивного описания перехода к хаотическим движениям в системах с одной степенью свободы оказывается бесполезным. Однако качественно можно констатировать следующую типичную картину нарастания хаоса при увеличении параметра ε. При достаточно малом ε множества ТПП лежат на инвариантных кривых $\bar{H}(X_n, Y_n) = const$, определяемых методами усреднения с точностью до $\rho = C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. В этом случае в силу малости ρ хаос практически не заметен. При достаточном увеличении ε экспоненциальная добавка начинает проявляться, хаос становится заметным и площадь хаотизации достаточно быстро увеличивается с ростом ε.

Системы типа $H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots$, с интегрируемой невозмущенной частью H_0 ведут себя похожим образом. При малом ε хаотизация не наблюдается. Начиная с некоторого значения ε появляется хаотичность и она нарастает с увеличением ε.

7.1.3. Методы исследования хаотических движений

Обычно начало хаоса связывают с существованием неустойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре [3–7]. Неподвижной точке $P(\vec{R}) = \vec{R}$ (точке $P^k(\vec{R}) = \vec{R}$) соответствует периодическое решение с периодом T (с периодом kT). Задача устойчивости по Ляпунову периодического решения сводится к решению задачи устойчивости неподвижной точки отображения. Для ее решения применяется метод показателей Ляпунова [91]. Поскольку аналитический вид отображения P неизвестен, то показатели Ляпунова определяют численно. Ниже будет показано, как найти отображение P и показатели Ляпунова аналитически в виде разложений по ε, а в конкретной гидродинамической системе с точностью до ε^5.

Доказательство хаотичности на основании какого-либо строгого определения хаоса, даже для системы с одной степенью свободы — черезвычайно трудная задача. Доказательства хаотичности для некоторых простых отображений были приведены в [41]. Для доказательства хаотичности в гамильтоновых системах используется теорема Мельникова [91], связанная с вычислением достаточно сложного интеграла. Аналитически методом Мельникова можно доказать хаотичность движений математического маятника с вибрирующей точкой подвеса. В такой системе с гамильтонианом, периодически зависящим от времени, имеется сепаратриса, представимая в простом аналитическом виде. Это и обеспечивает возможность применения данной теоремы чтобы установить расщепление сепаратрис [1, 20]. Обычно проверка хаотичности по теореме Мельникова или другим способом определяется лишь численными достаточно громоздкими методами.

Обстоятельный анализ различных механизмов перемешивания в гидродинамических системах приведен в монографии [102]. Представлены многочисленные иллюстрации поведения частиц жидкости для различных течений, а также описываются методы исследования перехода системы к динамическому хаосу.

Вместе с тем в литературе практически отсутствуют исследования движения вязкой жидкости в области, граница которой меняется со временем. Одно из таких исследований [64] было посвящено анализу движения частиц несжимаемых сред с различной реологией в тонком деформирующемся слое; на границах слоя принимались условия отсутствия касательной скорости. Численные расчеты показали, что в такой системе при малых числах Рейнольдса хаос практически отсутствует.

Ниже предлагается конструктивный параметрический метод построения отображений на фазовом потоке гамильтоновой системы. Установлены в общем случае и показаны на примерах преимущества параметрического метода перед известным методом производящих функций. Развитая асимптотическая теория описания перехода к хаотическому движению применяется к анализу более общего движения жидкости с большой вязкостью в тонком деформирующемся слое с учетом касательной скорости на границе. На основании найденного отображения Пуанкаре дается объяснение численных экспериментов по отсутствию хаоса при нулевой касательной скорости на границах. При наличии касательной скорости на границе хаос возможен при достаточно малых амплитудах деформации волны.

7.2. Перемешивание вязкой и вязкопластической сред в тонком деформирующемся слое

7.2.1. Функция тока как гамильтониан для движения частиц вязкой и вязкопластической сред

1. Постановка задачи. Рассматривается движение несжимаемой среды в расположенной на плоскости области ограниченной двумя вертикальными прямыми $0 \leqslant x \leqslant L$, снизу горизонтальной прямой и сверху криволинейной границей, изменяющейся со временем по некоторому периодическому закону $0 \leqslant y \leqslant b(1+\varepsilon h)$. В безразмерных координатах $X = kx$, $Y = y/b$, $t = \omega T$, где $k = 2\pi/L$ — волновой вектор, ω — частота колебаний границы, такую область Ω_t можно представить в виде: $0 \leqslant X \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant Y \leqslant 1 + \varepsilon h(t, X)$, где $h(t, X)$, ограниченная по абсолютной величине функция, с периодом по времени 2π, ε — амплитуда периодической во времени деформации границы. Области в начальный момент времени Ω_0 и через период $\Omega_{2\pi}$ совпадают (рис. 7.1).

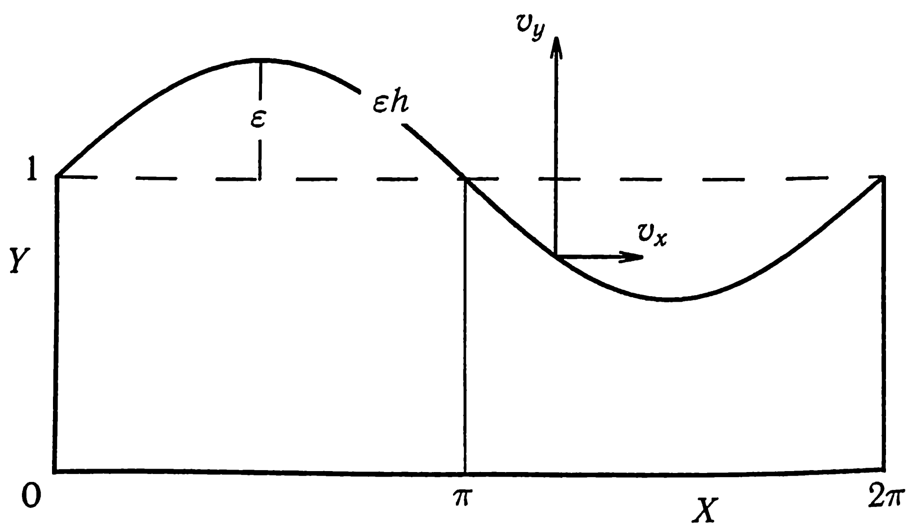


Рис. 7.1. Схема течения в тонком слое

На нижней границе $Y = 0$ принято условие прилипания, а на верхней границе $v_y = -\varepsilon\cos(X - t)$, $v_x = 3\varepsilon^2\alpha(1 - \cos X)$ – условие непроницаемости и условие, налагаемое на касательную составляющую (рис. 7.1). На боковых стенках расход равен нулю. При $\alpha = 0$ задача движения частиц вязкопластической среды изучена в работе [64]. При произвольном параметре α задача движения частиц вязкой жидкости исследована в [67, 68].

2. Функция тока при отсутствии касательной скорости на границах. Рассмотрим случай $\alpha = 0$. В 5.1.3 описан метод построения функции тока для для течения произвольной несжимаемой среды в приближении тонкого слоя $b/L \ll 1$. Согласно этому методу нужно найти расход в сечении с координатой X. Обозначим его через $\varepsilon q(t, X)$. Он определится из уравнения сохранения массы

$$\partial h/\partial t + \partial q/\partial X = 0, \quad q(t,0) = 0. \tag{7.2.1}$$

Тогда распределение продольной скорости в сечении X будет совпадать с распределением ее между двумя параллельными пластинами с таким же расходом $\varepsilon q(t, X)$ Если ввести безразмерную координату $\eta = Y/(1 + \varepsilon h)$, то из равенства распределений скорости получим уравнение для функции тока

$$H_\eta = q(t,X)U(\eta, a_i), \quad H(t,X,0) = 0, \tag{7.2.2}$$

где U — безразмерный профиль скорости берется из решения задачи о течении Пуазейля рассматриваемой среды между двумя параллельными пластинами с условием нормировки $\int\limits_0^1 U d\eta = 1$.

Пример 1. Движение частиц несжимаемой вязкой жидкости в тонком деформирующемся слое. Для определенности предполагается отсутствие продольной скорости на границе области $Y = 1 + \varepsilon h(t, X)$. Для вязкой жидкости в приближении тонкого слоя профиль скорости U находится из решения известной задачи о течении Пуазейля

$$U = 6\eta - 6\eta^2, \quad H = q(3\eta^2 - 2\eta^3). \tag{7.2.3}$$

Для ламинарного течения вязкой жидкости профиль скорости — параболический и не зависит от каких-либо дополнительных параметров.

Пример 2. Движение частиц несжимаемой вязкопластической среды в тонком деформирующемся слое. Для вязкопластической среды профиль скорости U будет состоять из примыкающих к границам параболических частей и прямолинейной части в квазитвердом ядре. Функция тока находится интегрированием уравнения (7.2.2) по переменной η

$$H = qf(a,\eta), \quad a = \frac{\varepsilon\mu\omega}{\tau_0 kb}|q|,$$

$$f = \frac{3}{\eta_0^2(3-2\eta_0)}\begin{cases}\eta^2(\eta_0-\eta/3), & 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0,\\ \eta_0^2(\eta-\eta_0/3), & \eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1/2,\end{cases} \tag{7.2.4}$$

$$\eta_0^2(1-(2/3)\eta_0)/(1-2\eta_0) = a, \tag{7.2.5}$$

где a — местное число Сен-Венана, пропорциональное расходу $q(t, X)$.

В область $1/2 \leqslant \eta \leqslant 1$ функция (7.2.4) продолжается из соображений четности производной $\partial f/\partial\eta$ по аргументу $\eta - 1/2$.

Для случая $a \gg 1$ из уравнений (7.2.4) (7.2.5) с точностью до малой $1/(4a+1)^4$ получим

$$f = 3\eta^2 - 2\eta^3 + \frac{\eta^2-2\eta^3}{4a+1}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3(4a+1)} \tag{7.2.6}$$

Функция деформации $h(t, X)$ и безразмерный расход $q(t, X)$ связаны уравнением сохранения массы несжимаемой среды (7.2.1). При деформировании по закону бегущей волны функции h и q представляются в виде

$$h = h(X-t), \quad q = h(X-t) - h(-t) \tag{7.2.7}$$

3. Функция тока течения вязкой жидкости при наличии касательной скорости на деформируемой границе. Гамильтониан системы (функция тока) в приближении тонкого слоя

$$H(t, X, Y) = \varepsilon q(3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) - 3\varepsilon^2\alpha(\tilde{Y}^2 - \tilde{Y}^3)(1-\cos X), \tag{7.2.8}$$

$$\tilde{Y} = Y/(1+\varepsilon h(t, X))$$

Здесь X, Y — безразмерные координаты, координата $X/(2\pi)$ отнесена к длине слоя, Y — к его толщине. Безразмерная функция расхода $\varepsilon q(t, X)$ через сечение $X = const$ выражается через функцию деформации слоя εh с помощью уравнения сохранения массы (7.2.1).

7.2.2. Движение частиц вязкой и вязкопластической сред при отсутствии касательной скорости на границе

1. Метод исследования. Исследование задачи движения частиц среды проведем параметрическим методом построения отображения Пуанкаре. В этой задаче гамильтониан имеет стандартный вид с малым параметром ε равным амплитуде деформации верхней границы. Покажем как строится отображение на примере решения задачи Стокса о переносе массы прогрессивной волной длины 2π на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины d. Гамильтониан представляет собой известную функцию тока, разложение которой по амплитуде волны имеет вид [86]

$$H = \varepsilon\,\mathrm{sh}(Y+d)\sin(X+t)/\,\mathrm{sh}(d) + O(\varepsilon^2), \quad d = 2\pi b/L. \tag{7.2.9}$$

Безразмерная функция тока H представляется разложением по амплитуде волны ε, где второй и все последующие члены разложения выражаются линейно через гармоники $\sin k(x+t)$, $\cos k(x+t)$. Применяем формулу (6.5.1) для усредненного гамильтониана. Первый член разложения равен нулю. Вычисляя второй член разложения, с точностью до ε^3 находим усредненный гамильтониан и скорость переноса частиц жидкости (Стокс, 1847):

$$\bar{H} = -\frac{\varepsilon^2\,\mathrm{sh}[2(Y+d)]}{4\,\mathrm{sh}^2 d}, \; v_x = \frac{\partial\varepsilon\bar{H}}{\partial Y} = -\frac{\varepsilon^2\,\mathrm{ch}[2(Y+d)}{2\,\mathrm{sh}^2 d}, \; v_y = 0.$$

Заметим, что вывод этого результата обычным способом требует значительно больших выкладок [86].

2. Движение частиц в вязкой жидкости. Функция тока H для течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя определяется по (7.2.3) Продольная скорость H_η как функция поперечной координаты η изменяется по параболе, обращаясь в ноль на границах $\eta = 0$ и $\eta = 1$. Определяем по (6.5.1) усредненный гамильтониан

$$\bar{H} = 6\varepsilon^2 <qh> \eta^2(1-\eta)^2(2\eta-1). \tag{7.2.10}$$

При деформировании по закону бегущей синусоидальной волны: $h = \sin(X-t)$ находим $q = \sin(X-t) + \sin t$, $<qh>= 1/2(1-\cos X)$.

Функция $\bar{H}(X,Y)$ принимает наибольшее H_{max} и наименьшее H_{min} значения при $X = \pi$, $\eta = 1/2 \pm \sqrt{5}/10$. Фазовые траектории при $0 \leqslant \bar{H} \leqslant H_{max}$ непрерывно заполняют верхнюю половину области Ω_0, при $H_{min} \leqslant \bar{H} \leqslant 0$ — ее нижнюю половину. На рис. 7.2 изображены ТПП за время, равное 200π: для усредненного гамильтониана $\bar{H}$ (рис. 7.2,а) и для исходного гамильтониана (7.2.3) (рис. 7.2,б), найденные численным интегрированием уравнений Гамильтона. В начальный момент времени точки имели координаты $X_0 = \pi$; $Y_0 = 0,09$; $0,16$; $0,25$; $0,75$; $0,83$; $0,91$. Как видно из рис. 7.2, ТПП располагаются на замкнутых интегральных кривых для усредненного гамильтониана. Вычисления показывают, что в этой задаче при любой конечной амплитуде $0 < \varepsilon < 1$ существует усредненный гамильтониан и ТПП лежат на замкнутых кривых. Топологическая структура траекторий ТПП не зависит от ε.

Нарушение устойчивого характера усредненного движения можно ожидать, если будет нарушено резонансное условие теоремы Арнольда. Для вязкой жидкости в силу $<q>= 0$ при любом периодическом деформировании усредненный гамильтониан $\varepsilon\bar{H}$ пропорционален ε^2. Поэтому частота собственных колебаний ω_0 около критической точки усредненной системы пропорциональна ε^2. Численный расчет показывает, что даже при $\varepsilon = 0,8$ собственная частота $\omega_0 \approx 1/6$,

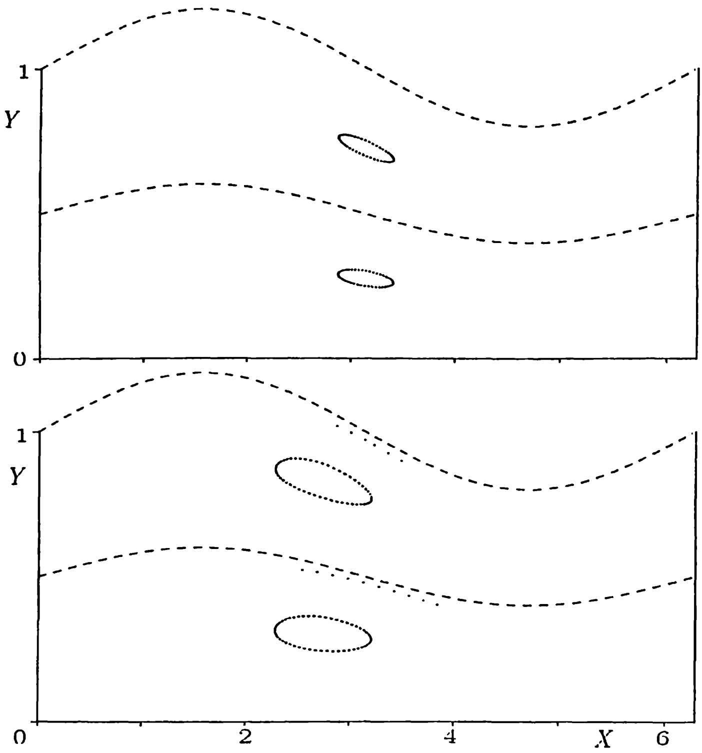


Рис. 7.2. ТПП вязкой жидкости в тонком слое при деформации границы по закону синусоидальной волны с амплитудой $\varepsilon = 0,2$. а — параметрический метод, б — точный расчет

что существенно меньше первой критической резонансной частоты 1/4. Как и следовало ожидать, в этом случае ТПП в течение длительного времени будут располагаться на замкнутых интегральных кривых усредненной системы.

3. Движение частиц в вязкопластической среде. Функция тока εH для вязкопластического течения в приближении тонкого слоя определяется по (7.2.4), (7.2.5) или при $s = \mu\omega\varepsilon/(\tau_s kb) \gg 1$ по приближенной формуле (7.2.6). Покажем, что при $s \gg 1$ перемещения частиц за период, вообще говоря, имеют первый порядок по ε. Применяя формулу осреднения (6.5.1) и асимптотическую формулу (7.2.6), получим

$$\begin{gathered}\varepsilon\bar{H} = \eta^2(1-2\eta)\frac{\varepsilon}{4s}I(X),\\ I(X) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{4sq(t,X)dt}{4s|q(t,X)|+1} \approx \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{sign}q\,dT\end{gathered} \tag{7.2.11}$$

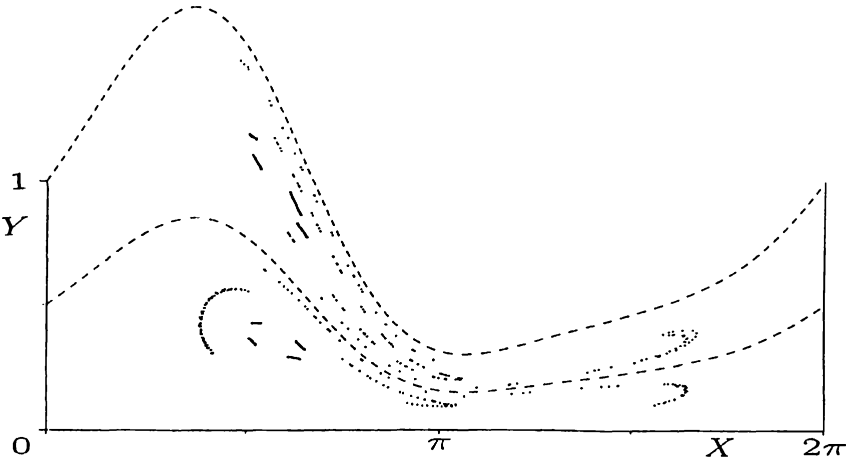


Рис. 7.3. ТПП вязкопластического течения при несимметричной деформации границы

Если функция $q(T)$ имеет постоянный знак на половине периода, то интеграл в (7.2.11) $I = 0$. Такой вариант соответствует симметричному во времени деформировании поверхности. В этом случае для перемещения за период будет также вырождение первого порядка.

Пусть $T_+ < 2\pi$ — длина отрезка, на котором $q(T) > 0$, тогда интегралы в (7.2.11) пропорциональны величине $\Delta T = |T_+ - \pi|/2\pi$. При $s \ll 1$ следует пользоваться другой асимптотикой решения (7.2.4). Эта асимптотика соответствует течению близкому к пластическому. Можно показать, что первый член усредненного гамильтониана $\varepsilon\bar{H}$ стремится к нулю при $s \to 0$. Таким образом, собственная частота ω_0 осредненного движения около критической точки должна иметь максимальное по параметру s значение. Эти выводы справедливы и для конечных значений амплитуды деформации ε.

Была рассмотрена несимметричная деформация вида $h = \sin(X - t + \varepsilon_1(1 - \cos(X - t)))$. При амплитуде $\varepsilon = 0,7$ и коэффициенте асимметрии $\varepsilon_1 = 0,69$ был обнаружен резонанс четвертого порядка. Собственная частота $\omega_0 = 1/4$ практически не зависела от числа s в диапазоне $0,2 < s < 1$. При меньших и больших значениях параметра s частота уменьшалась. Тем не менее и в условиях резонанса ТПП в течение длительного времени ложатся на интегральные замкнутые кривые. На рис. 7.3 представлены ТПП за 200 периодов при $s = 1$, $\varepsilon = 0,7$; $\varepsilon_1 = 0,69$. Начальные точки выбирались из сечения $X = 2$.

Таким образом, при периодическом деформировании границы тонкого слоя частицы однородной несжимаемой среды в течение, по крайней мере, экспоненциально большого времени порядка $\exp(C/\varepsilon)$ двигаются по замкнутым интегральным кривым и перемешивания не происходит. Для перемешивания однородной среды необходимо применять непериодическое во времени деформирование. Перемешивание может также происходить вследствие изначально неоднородной среды.

7.2.3. Движение частиц вязкой жидкости при наличии касательной скорости на границе

Движение частиц жидкости определяется из решения системы уравнений Гамильтона с гамильтонианом (7.2.8). Учет малой порядка ε^2 скорости v_x на границе приводит к качественным изменениям движения частиц жидкости.

Для исследования системы удобно использовать каноническую замену, отображающую область течения в прямоугольник (см. пример 3 в разд. 6.3.5)

$$X, Y, H(t,X,Y) \to \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{H}(t,\tilde{X},\tilde{Y})$$

с производящей функцией $S(t,X,\tilde{Y}) = X\tilde{Y} + \varepsilon\tilde{Y}\int_0^X h(t,X)dX$. Переменные и гамильтониан преобразуются так

$$\tilde{X} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{Y}} = X + \varepsilon\int_0^X h(t,X)dX, \quad Y = \frac{\partial S}{\partial X} = Y(1+\varepsilon h(t,X)),$$

$$\tilde{H}(t,\tilde{X},\tilde{Y}) = H + \partial S/\partial t = H - \varepsilon q\tilde{Y}$$

Удобство замены состоит в том, что в переменных $\tilde{X}, \tilde{Y}$ система имеет гамильтонову форму, а область переменных — фиксированный прямоугольник $\tilde{X} \in (0, 2\pi)$, $\tilde{Y} \in (0, 1)$ (рис. 6.5).

Исследование системы можно провести аналитически, при общем законе деформирования. Отображающую функцию с точностью до ε^3 можно вычислить по формуле (6.4.11)

$$\Psi(x,y) = 6\pi\varepsilon^2\left[2 <qh> (2y-1)(1-y)^2y^2 - \alpha(1-y)y^2(1-\cos x)\right] \quad (7.2.12)$$

где q находится из уравнения сохранения массы и граничных условий на боковых стенках

$$\partial h/\partial t + \partial q/\partial X = 0, \quad q(0) = q(2\pi) = 0$$

При выводе формулы (7.2.12) используются равенства

$$\int_0^T \left(h_t \int_0^{\tilde{X}} h dX\right) dt = -\int_0^T \left(h \int_0^{\tilde{X}} h_t dX\right) dt = \int_0^T hq dt.$$

Ограничимся исследованием частного случая деформирования по закону бегущей волны $h = \sin(X - t)$. Из уравнения сохранения массы вычисляем

$$q = \sin(X - t) + \sin t, \qquad < qh >= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} qhdt = \frac{1}{2}(1 - \cos X)$$

и, подставляя в выражение (7.2.12), получаем

$$\begin{aligned}
&\Psi(x, y) = 6\pi\varepsilon^2 F(y, \alpha)(1 - \cos X)\,,\\
&F(y, \alpha) = (2y - 1)(1 - y)^2 y^2 - \alpha(1 - y)y^2\,,\\
&J = 1 + 9\pi^2\varepsilon^4[F(y, \alpha)F''(y, \alpha)\cos x(1 - \cos x) -\\
&\qquad -(F'(y, \alpha)\sin x)^2] > 0\,.
\end{aligned} \tag{7.2.13}$$

Переменные x, y занимают область такого же прямоугольника $x \in (0, 2\pi)$, $y \in (0, 1)$. Таким образом, для исходной системы получено двухпараметрическое семейство отображений.

Если $\alpha < 0,236$, то якобиан J достигает наименьшего значения при $\cos X = -1$, а если $\alpha > 0,236$, то при $\cos X = 0$. Таким образом, область применимости отображения (7.2.13) такова:

$\min J = 1 - 9\pi^2\varepsilon^4 \max(2F(y, \alpha)F''(y, \alpha)) > 0$ при $\alpha < 0,236$;

$\min J = 1 - 9\pi^2\varepsilon^4 \max(F'(y, \alpha))^2 = 1 - 9\pi^2\varepsilon^4\alpha^2 > 0$ при $\alpha > 0,236$.

Исследование функции $F'(y, \alpha)$ на максимум показывает, что при $\alpha \in (-\infty, -0.5)\bigcup(1/8, \infty)$ функция $|F'(y, \alpha)|$ достигает наибольшего значения, равного α, на границе $y = 1$. При остальных α функция $|F'(y, \alpha)|$ достигает наибольшего значения в промежутке $y \in (0, 1)$.

Область $\min J > 0$ на плоскости параметров (α, ε), изображена на рис. 7.4. Граница определяется уравнением $\min J = \Phi(\varepsilon, \alpha) = 0$ и представляет собой кусочно гладкую линию.

Для сравнения приведем асимптотические формулы отображения, полученные по методу производящих функций, в том же приближении, что и (7.2.13). Отображение будет определяться по (6.5.8) с функцией $S(X_0, Y) = \Psi(X_0, Y)$, где функция Ψ та же, что и в (7.2.13). Условие применимости отображения таково:

$$\min(1 + \Psi_{X_0 Y}) = 1 + 6\pi\varepsilon^2 \min(F'(Y, \alpha)) \sin X_0) = 1-$$

$$-6\pi\varepsilon^2 \max|F'(Y, \alpha)| > 0$$

При $\alpha \in (-\infty, -0.5)\bigcup(1/8, \infty)$ получаем $6\pi\varepsilon^2|\alpha| <1$. Граница области, определяемая по методу производящих функций, приведена на рис. 7.4 штриховой линией. Она также вычисляется аналитически, представляет собой кусочно-гладкую линию и расположена значительно ниже границы области существования параметрического отображения $\min J = 0$.

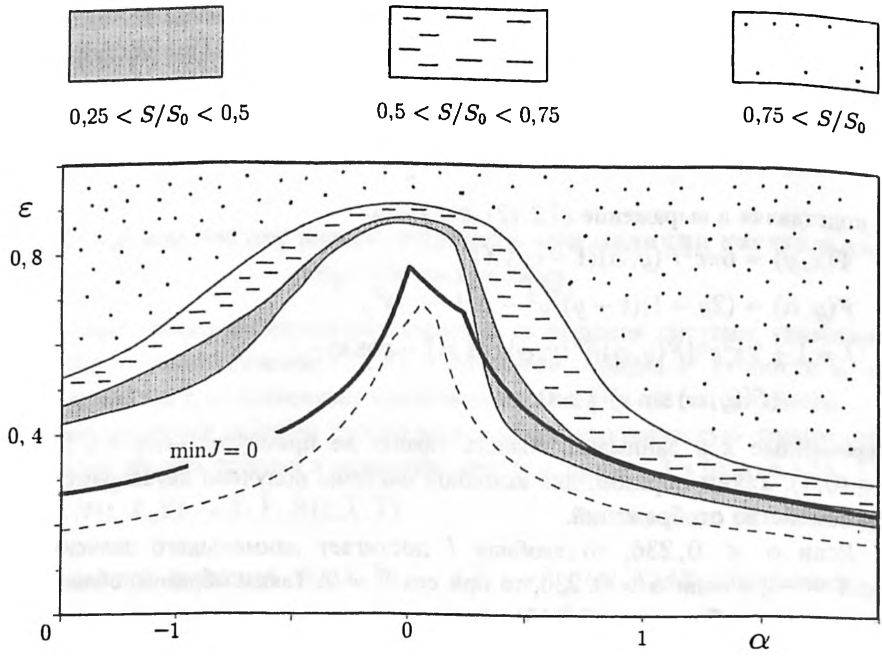


Рис. 7.4. Плоскость параметров α, ε

До хаотического режима ($\varepsilon < \varepsilon_0(\alpha)$, $\varepsilon_0(\alpha)$ — критическое значение параметра ε) фазовые портреты ТПП легко исследуются с помощью усредненного гамильтониана

$$\bar{H} = 3\varepsilon^2 F(Y, \alpha)(1 - \cos X) + O(\varepsilon^3),$$

вычисленному по (6.5.1) и (7.2.13).

ТПП лежат на инвариантных кривых $F(Y, \alpha)(1 - \cos X) = const$. Фазовые портреты точек последования Пуанкаре имеют пять топологически различных структур, изображенных на рис. 7.5.

Структура 1 (см. рис. 7.5) при $\alpha \in (-\infty, -1)$ — движение против часовой стрелки по замкнутым траекториям с одной неподвижной точкой.

Структура 2 при $\alpha \in (-1, 0)$ — две области движений, разделенных сепаратрисой $y = 3/4 - \sqrt{1 - 8\alpha}/4$, обозначенной на рис. 7.5 штриховой линией. В верхней области — движение против часовой стрелки по траекториям с одной неподвижной точкой. В нижней области — движение по часовой стрелке по траекториям с одной неподвижной точкой.

Структура 3 при $\alpha \in (0, 1/8)$ — три области движений, разделенных двумя сепаратрисами $y = 3/4 \pm \sqrt{1 - 8\alpha}/4$, обозначенных на рис. 7.5 штриховыми

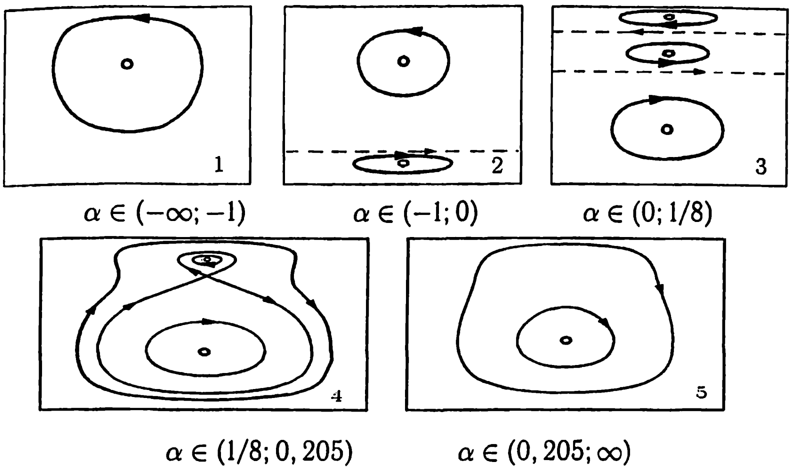


Рис. 7.5. Топологические структуры фазовых портретов

линиями. В верхней и нижней областях — движение по часовой стрелке по траекториям с одной неподвижной точкой в каждой области. В средней области — движение против часовой стрелки по траекториям с одной неподвижной точкой.

Структура 4 при $\alpha \in (1/8; 0,205)$ — движение в трех областях, разделенных сепаратрисами. Это единственный случай, в котором есть неподвижная точка гиперболического типа, соответствующая неустойчивой периодической траектории. Все остальные неподвижные точки в этом и других случаях соответствуют устойчивым периодическим траекториям.

Структура 5 при $\alpha \in (0,205; \infty)$ — движение по часовой стрелке по замкнутым траекториям с одной неподвижной точкой.

При $\varepsilon < \varepsilon_0(\alpha)$ ТПП, найденные путем непосредственного решения уравнений Гамильтона с гамильтонианом (7.2.8), движутся по траекториям, топология которых соответствует одной из пяти перечисленных выше структур. Тип структуры определяется интервалом, в каком находится параметр α.

При превышении критического значения параметра ε ТПП с одним и тем же начальным положением может заполнить некоторую область площади S_i. Совокупность этих областей будем называть областью хаотического движения. Область хаотического движения имеет площадь $S = \sum S_i$. Мерой хаоса условимся считать отношение $\sigma = S/S_0$, где S_0 — площадь всей области движения.

На рис. 7.4 в области двух параметров ε, α изображены области хаотического движения с различными мерами хаоса. Область 1 с мерой хаоса в интервале $(1/4, 1/2)$, область 2 с мерой хаоса в интервале $(1/2, 3/4)$, область 3 с мерой

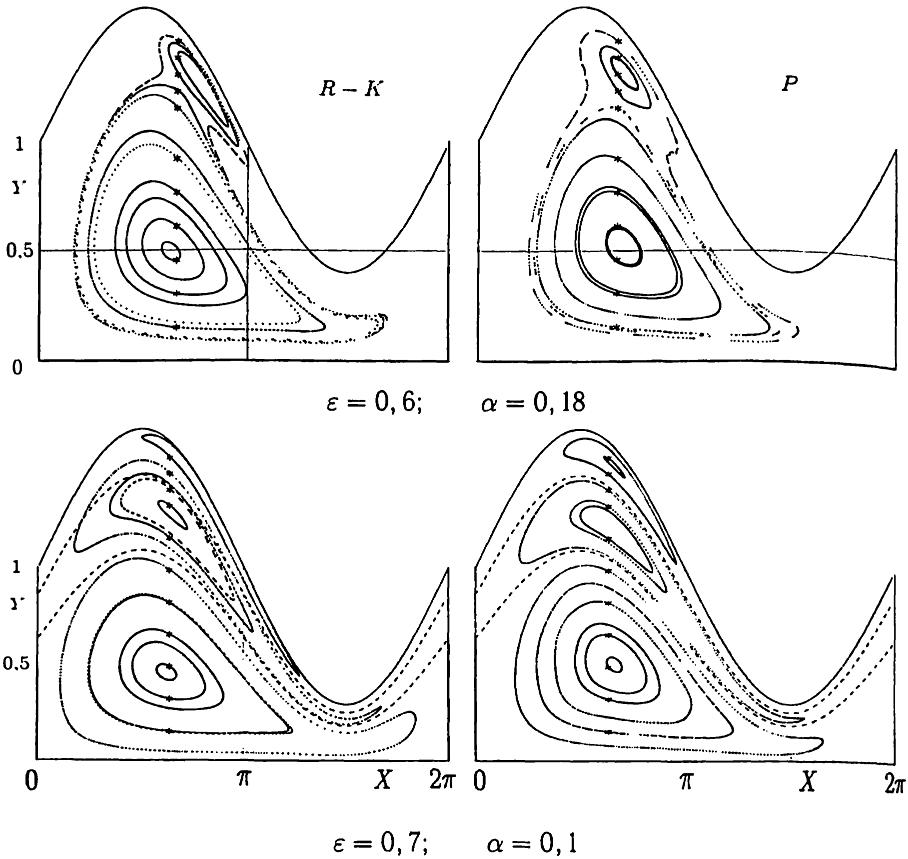


Рис. 7.6. ТПП. R-K — численный расчет, P — параметрический метод

хаоса более 3/4 и наконец чистый фон 4 соответствует области с мерой хаоса менее 1/4.

Расчеты ТПП методом отображений (P) с функцией (7.2.13) в области существования отображения $J > 0$ неотличимы от расчета уравнений Гамильтона методом Рунге-Кутта (R-K). Примеры расчетов показаны на рис. 7.6–7.8 при разных значениях ε, α. Начальные положения точек обозначены крестиками. Точками показаны их положения в течение 500 периодов.

На рис. 7.6 представлены расчеты положения ТПП до перехода к хаосу. Топологическая структура ТПП на верхней части рис. 7.6 соответствует топологической структуре 4 ($\alpha \in (1/8, 0, 205)$) рис. 7.5 и на нижней части рис. 7.6 — структуре 3 ($\alpha \in (0, 1/8)$) рис. 7.5. В нижней части рис. 7.6 штриховыми линиями обозначены сепаратрисы $\tilde{Y} = 3/4 \pm \sqrt{1 - 8\alpha}/4$. Пример расчетов при

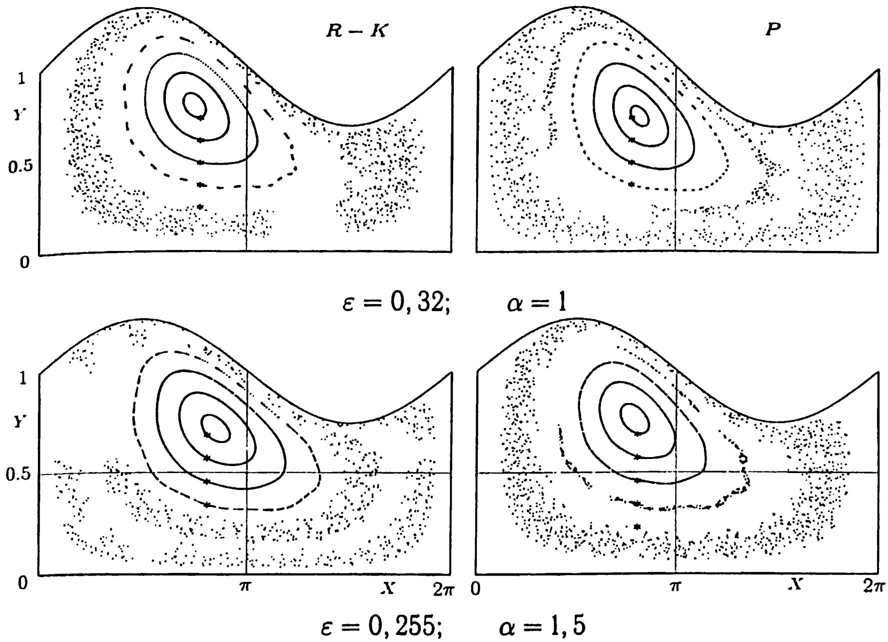


Рис. 7.7. ТПП. R-K — численный расчет, P — параметрический метод

переходе к хаосу показан на рис. 7.7. Все обозначения такие же, как на рис. 7.6. Топологическая структура точек Пуанкаре соответствует случаю $\alpha > 0,205$.

Обе фигуры демонстрируют хорошее согласие расчета по параметрическому методу и непосредственного численного расчета исходных дифференциальных уравнений, тогда как асимптотические формулы по методу производящих функций при этих значениях параметров α и ε выходят за пределы области применимости. На рис. 7.8 представлены численные расчеты ТПП, когда мера хаоса превышает 3/4. Эта область параметров лежит вне области применимости отображения с функцией (7.2.13). При этих значениях параметров следует пользоваться параметрическим отображением в следующем приближении. Тогда как методом производящих функций получить отображение в этой области параметров невозможно ни в каком приближении, так как в окрестности неподвижной точки в этом случае ТПП совершают полный оборот менее чем за четыре раза.

Рассмотренный пример показывает возможность аналитического описания перехода к хаосу в достаточно сложных гидродинамических системах. Параметрический метод построения отображения Пуанкаре оказывается особенно полезным в задачах со многими параметрами. Вычисленные таким способом

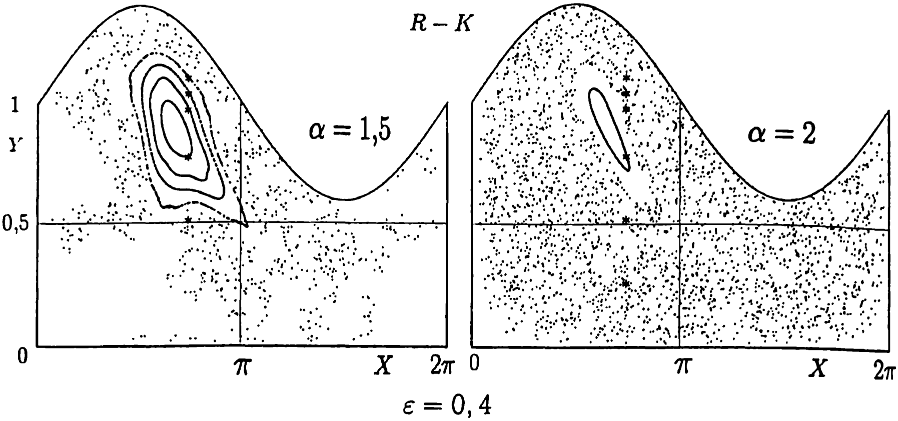


Рис. 7.8. ТПП. Хаотические режимы. Численный расчет

отображения имеют допустимую точность даже в том диапазоне параметров, когда классическим методом отображение Пуанкаре получить принципиально невозможно.

7.3. Перемешивание вязкой жидкости между двумя эксцентрично вращающимися круговыми цилиндрами

7.3.1. Краткий обзор результатов

Задача о течении вязкой жидкости между двумя вращающимися круговыми цилиндрами имеет важные приложения. Сюда относится описание движения жидких смазочных масел в зазоре между вращающимся валом и подушкой подшипника. Эта проблема широко освещена в учебной [40, 46, 15] и специальной литературе [25, 84, 87]. Другое направление связано с вопросами теории гидродинамической устойчивости, начало которой положено исследованиями Дж. Тейлора (Taylor G.I. 1923) (см. [9, 40, 43, 45]).

1. Течение Куэтта-Тейлора. Простейшее решение получается в случае осесимметричного вращения цилиндров с постоянными угловыми скоростями. Для вязкой жидкости решение изучено Н.П. Петровым в 1883 г. [75] с приложением к теории трения в подшипниках. Исследование Н.П. Петрова было опубликовано на 3 года раньше работы О. Рейнольдса (Reinolds O., 1886) [104], на которую обычно ссылаются как на пионерскую работу по теории гидродинамической смазки.

Для вязкопластической среды решение получено Рейнером и Ривлиным в 1927г. [78] и приведено в разд. 3.3.4.

2. Эксцентричное установившееся течение. Когда внутренний круговой цилиндр равномерно вращается около своего центра O_1, смещенного относительно центра O_2 внешнего цилиндра, в среде, помещенной между двумя цилиндрами, возникает стационарное течение. В этом случае частицы среды движутся по линиям тока $H(X, Y) = const$, где H — функция тока. Линии тока не зависят от времени. Пример картины линий тока см. на рис. 6.1.

3. Решение задачи стационарного эксцентричного вращения для вязкой жидкости. Н.Е. Жуковский впервые рассмотрел задачу течения вязкой жидкости между двумя эксцентрично расположенными круговыми цилиндрами и вращающимися около своих неподвижных осей ([27], с. 121–132; впервые опубликовано в Сообщениях математического общества при Харьковском университете, 1887). При малых числах Рейнольдса им получено бигармоническое уравнение и найдено его точное решение. Зоммерфельд (Sommerfeld A., 1904) дал упрощенное решение задачи течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя между двумя цилиндрами. Ввиду своей простоты и высокой точности приближение, найденное Зоммерфельдом, часто используется в гидродинамической теории смазки. Его решение приведено также во многих монографиях (см., например, [40]). Почти сразу после выхода публикации Зоммерфельда в статье 1906 г. Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин провели сопоставление приближенного решения Зоммерфельда со своим точным решением, записанным в биполярных координатах ([27], с. 133–151). Значительно позднее Баллай и Ривлин (Ballal B.Y., Rivlin R.S. Arch. rat. Mech. Anal. 1976, 237–294) без ссылок привели точное выражение Жуковского и Чаплыгина для функции тока. На эту работу обычно ссылаются в зарубежной литературе без упоминания пионерских работ Н.П. Петрова, Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина.

4. Перемешивание при эксцентричном вращении. При вращении цилиндров с постоянными угловыми скоростями (в условиях задачи Жуковского и Чаплыгина) перемешивания не будет. Задача о движении частиц среды в этом случае представляет собой интегрируемую автономную гамильтонову систему. Если же круговые цилиндры вращаются с переменными, зависящими от времени скоростями, то система становится неинтегрируемой. В работе [99] рассматривается медленное изменение угловой скорости типа $\omega(t) = \omega_0 + \omega_1 \cos(\varepsilon\omega_0 t)$, $\varepsilon \ll 1$. Изучаются точки последования Пуанкаре через период $2\pi/(\varepsilon\omega_0)$ в адиабатическом приближении. Характерное время хаотизации много больше этого периода. Поскольку цилиндры вращаются около своих осей, то область течения со временем не меняется.

5. Центр вращения не совпадает с центрами ни одного из цилиндров. Пусть центр вращения не совпадает ни с центром внутреннего цилиндра O_1, ни с центром внешнего цилиндра O_2. Тогда область между цилиндрами будет меняться со временем. Задача о движении частиц среды помещенной между цилиндрами будет нестационарной даже при постоянной угловой скорости цилиндров. Этим данная постановка существенно отличается от предыдущих. Задача движения частиц вязкой жидкости, расположенной между цилиндрами, при таком вращении изучалась в работах [70, 73]. Хаотизация продемонстрирована на непосредственных численных решениях уравнений Гамильтона. Замечено, что площадь хаотизации достигает наибольшего значения при безразмерном значении эксцентриситета, равного 0,5.

Также построено отображение Пуанкаре параметрическим методом с точностью до куба эксцентриситета. Показана высокая точность полученного аналитически отображения. Оно дает фазовые портреты ТПП, практически не отличающиеся от численных вплоть до максимальной хаотизации движения частиц. Функция тока (гамильтониан H) имеет временной период, равный периоду обращения внутреннего цилиндра $2\pi/\omega$, т. е. в ε раз меньше, чем период гамильтониана в работе [99]. Соответственно и время хаотизации будет меньше.

Перейдем к изложению результатов этих работ.

7.3.2. Вращение внутреннего цилиндра около центра, не совпадающего с центрами цилиндров

1. Кинематика движения круговых цилиндров. Рассматривается движение кругового цилиндра, расположенного внутри другого кругового неподвижного кругового цилиндра. Оси обоих цилиндров направлены по вертикали. На рис. 7.9 изображено поперечное сечение цилиндров, представляющее собой область между двумя окружностями. Внешний круг и его центр O_2 неподвижны. Внутренний круг вращается с угловой скоростью 2ω так, что центр внутренней окружности O_1 описывает окружность с неподвижным центром O и радиусом $\varepsilon/2$.

Угол O_1OO_2 меняется со временем по закону $\angle O_1OO_2 = 2\omega t$. Из прямоугольного треугольника O_2O_1P следует, что расстояние между центрами меняется по гармоническому закону $O_1O_2 = \varepsilon \sin\omega t$ (см. рис. 7.9 в правом верхнем углу).

Линия центров (ось x) перпендикулярна катету O_1P и вращается с угловой скоростью ω. Если рассматривать движение цилиндров в системе координат с неподвижной линией центров (см. рис. 7.9 в левом верхнем углу), то внутренний цилиндр будет вращаться с угловой скоростью ω, а центр его колеблется по закону $x = O_1O_2 = \varepsilon \sin\omega t$. Внешний цилиндр в этой системе координат будет вращаться в противоположную внутреннему цилиндру сторону со скоростью $-\omega$.

Пусть радиус внутреннего круга равен R, а радиус внешнего — $R+1$. Вычислим расстояние AB между двумя окружностями, при большом значении R.

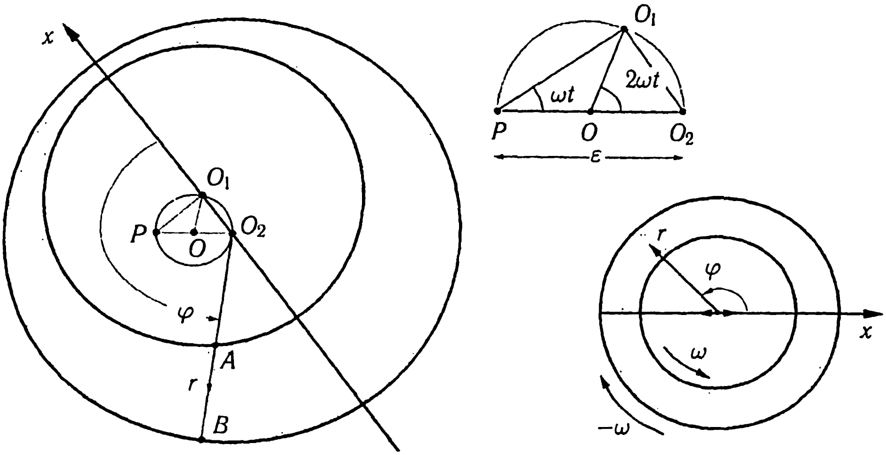


Рис. 7.9. Схема вращения цилиндров

Для этого применим теорему косинусов к треугольнику O_1O_2A

$$(O_1O_2)^2 + (O_2A)^2 - 2O_1O_2 \cdot O_2A \cdot \cos\varphi = (O_1A)^2$$

Подставляя $O_1O_2 = \varepsilon \sin\omega t$, $O_1A = R$, $O_2A = R + 1 - AB$, получим уравнение относительно AB

$$\varepsilon^2 \sin^2 \omega t + (R + 1 - AB)^2 - 2\varepsilon \sin\omega t(R + 1 - AB)\cos\varphi = R^2 \Rightarrow$$

$$2R(1 - AB - \varepsilon \sin\omega t \cos\varphi) + O(1) = 0$$

откуда найдем

$$AB = 1 - \varepsilon \sin\omega t \cos\varphi + O(1/R). \tag{7.3.1}$$

2. Функция тока. Перейдем к решению задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в слое между двумя цилиндрами. В нашем случае задача существенно нестационарна за счет изменения области течения со временем. Частота изменения области течения совпадает с частотой вращения цилиндров. Функция тока (гамильтониан H) имеет временной период равный периоду обращения внутреннего цилиндра $2\pi/\omega$, т. е. в ε раз меньше, чем период гамильтониана в работе [99]. Соответственно и время хаотизации будет меньше.

Будем использовать асимптотическое приближение $R \gg 1$ теории смазочного слоя. Такой подход описан в монографиях [[40], с. 534–542 и [46], с. 413–417].

Функцию тока ищем в виде зависимости $RH(t, \varphi, Y)$, $Y = R + 1 - r$, а компоненты скорости

$$v_\varphi = R\dot{\varphi} = R\partial H/\partial Y, \quad v_Y = \dot{Y} = -\partial H/\partial\varphi, \tag{7.3.2}$$

где r, φ — полярные координаты с центром в точке O_2. В переменных φ, Y область течения такова: $\varphi \in (0, 2\pi)$ $Y \in (0, Y_{max})$, где верхняя граница определяется уравнением (7.3.1):

$$Y_{max} = AB = 1 - \varepsilon \sin \omega t \cos \varphi.$$

Уравнения движения жидкости при $R \gg 1$ имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial p}{R \partial \varphi} = \mu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial Y^2}.$$

Отсюда следует, что давление p зависит только от угла φ. Подставляя вместо v_φ ее выражение через функцию тока, получим для нее уравнение

$$\frac{dp(\varphi)}{R d\varphi} = \mu R \frac{\partial^3 H}{\partial Y^3}. \tag{7.3.3}$$

На границах цилиндров выполняются условия прилипания

$$Y = 0 \qquad H = 0, \quad \partial H / \partial Y = -\omega, \tag{7.3.4}$$

$$Y = Y_{max} \qquad -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial Y_{max}}{\partial t} + \omega \frac{\partial Y_{max}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = \omega. \tag{7.3.5}$$

Кроме того, нужно потребовать однозначность функции давления $p(0) = p(2\pi)$. В силу (7.3.3) это условие запишется так:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 H}{\partial Y^3} d\varphi = 0. \tag{7.3.6}$$

Краевая задача (7.3.3)–(7.3.6) решается так. Вводим функцию расхода $Q(t, \varphi) = H(t, \varphi, Y_{max})$. Тогда решение представляется в виде

$$H = Q(t, \varphi)(3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) + \omega Y_{max} \left[-\tilde{Y}(1 - \tilde{Y})^2 + \tilde{Y}^2(-1 + \tilde{Y}) \right],$$
$$\tilde{Y} = Y / Y_{max}.$$

В этом представлении функция тока удовлетворяет уравнению (7.3.3), краевым условиям (7.3.4) и второму условию (7.3.5). Подставляя в первое условие (7.3.5), получим уравнение сохранения массы в слое $\partial Q / \partial \varphi + \partial Y_{max} / \partial t = 0$. Интегрируя это уравнение, получим $Q = \varepsilon \omega \cos \omega t \sin \varphi + c(t)$. Из условия однозначности давления найдем, что $c(t) = 0$. Таким образом, гамильтониан системы в приближении тонкого слоя имеет вид

$$H(t, \varphi, Y) = \omega \varepsilon \cos \omega t \sin \varphi (3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) + \omega(\tilde{Y} - \tilde{Y}^2) Y_{max}. \tag{7.3.7}$$

7.3.3. Движение частиц вязкой жидкости в слое между эксцентрично вращающимися цилиндрами

1. Точки последования Пуанкаре. Численный расчет. Положения точек последования Пуанкаре φ_n, Y_n в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega$ находятся из решения задачи Коши для уравнений Гамильтона (7.3.2)

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = \partial H/\partial Y, \quad \dot{Y} = -\partial H/\partial \varphi, \\ &\varphi(0) = \varphi_0, \quad\ Y(0) = Y_0. \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

В эти моменты времени оси O_1 и O_2 внутреннего и внешнего цилиндров совпадают, а в переменных φ, Y область течения — прямоугольник $\varphi \in [0, 2\pi)$, $Y \in (0, 1)$.

На рис. 7.10 изображены точки последования Пуанкаре (ТПП) при различных значениях параметра ε, найденные численным решением уравнений (7.3.8) методом Рунге-Кутта. Точки выводятся в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega$, $n = 0, 1, \ldots, 500$, при которых центры окружностей O_1 и O_2 совпадают. Начальные точки обозначены жирными точками. Неподвижные точки обозначены кружочками. При $\varepsilon = 0$ течение жидкости представляет собой простое сдвиговое течение Куэтта, точки движутся по прямым $Y = const$ (в полярных координатах это концентрические окружности). Уже при малых значениях ε фазовая картина осложняется и виден переход к хаосу, который генерируется в точке $\varphi = \pi$, $Y = 1/2$. Интересно, что наибольшая площадь хаотизации достигается при $\varepsilon = 0,5$. При $\varepsilon > 0,5$ с ростом ε в середине области течения растут две подобласти с инвариантными кривыми точек последования. Попадая в эти подобласти, точки последования из нее никогда не выйдут. Таким образом, наилучшее перемешивание достигается при $\varepsilon = 0,5$.

2. Приведение гамильтониана к стандартному виду. Для приведения гамильтониана (7.3.7) к стандартной форме сделаем две канонические замены. Используем аппарат производящих функций (см. 6.3.5).

Первая замена $\varphi, Y \to \tilde{q}, \tilde{p}$ отображает область течения с криволинейными границами $\varphi \in [0, 2\pi)$, $Y \in (0, Y_{max})$ на прямоугольник $\tilde{q} \in [0, 2\pi)$, $\tilde{p} \in (-1/2, 1/2)$. Она имеет производящую функцию

$$S_1(\varphi, \tilde{p}) = \left(\frac{1}{2} + \tilde{p}\right) \int_0^{\varphi} Y_{max} d\varphi = \left(\frac{1}{2} + \tilde{p}\right) (\varphi - \varepsilon \sin \omega t \sin \varphi)\,.$$

По формуле (6.3.5) определяем аналитический вид замены

$$\tilde{q} = \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = \varphi - \varepsilon \sin \omega t \sin \varphi, \quad Y = \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = \left(\frac{1}{2} + \tilde{p}\right) Y_{max} \tag{7.3.9}$$

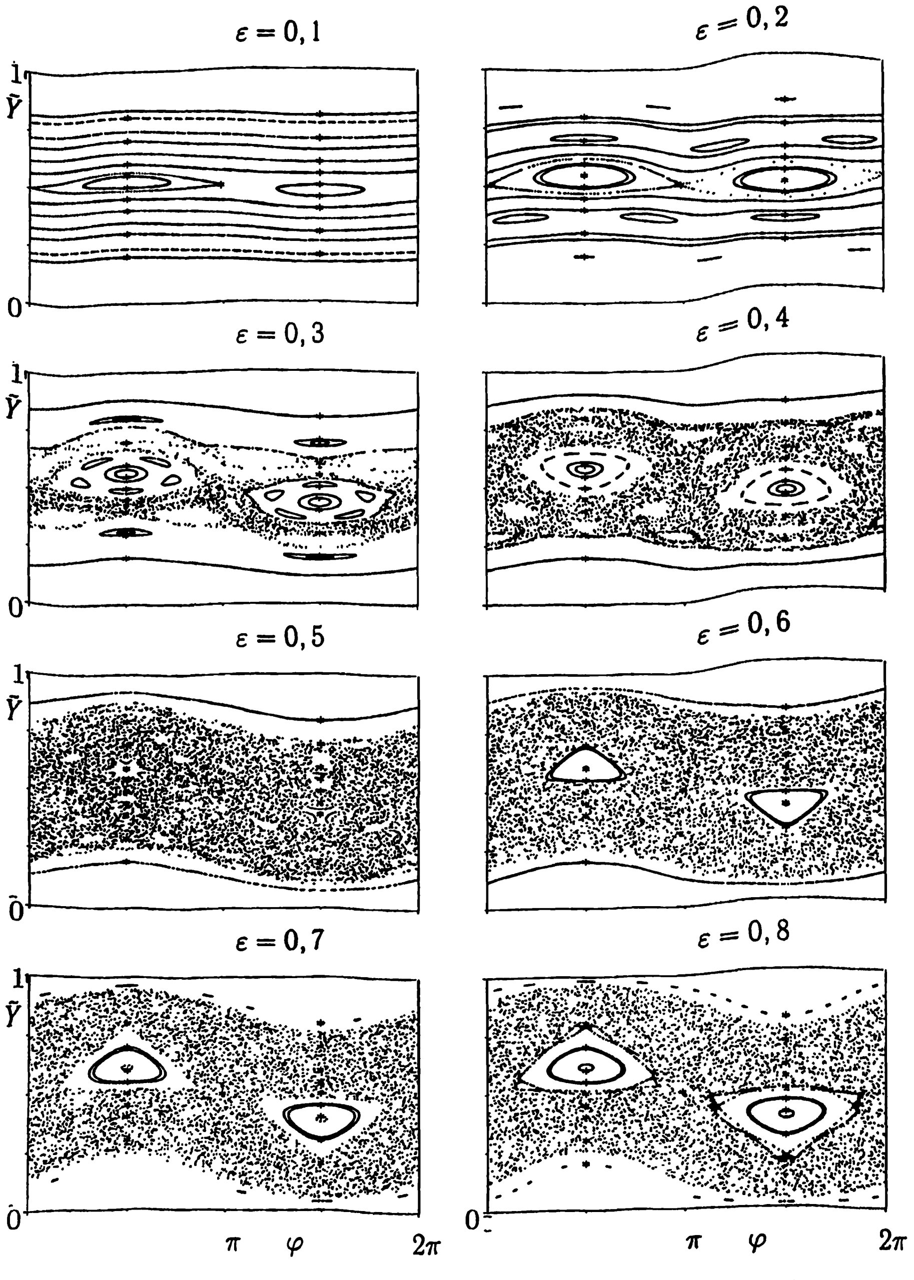


Рис. 7.10. ТПП между двумя вращающимися цилиндрами. Численный расчет

и гамильтониан в новых переменных

$$\tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p}) = \frac{\partial S_1}{\partial t} + H = -\omega\tilde{p}^2 + \varepsilon\omega\left(\tilde{p}^2 - \frac{1}{4}\right)[\sin\omega t\cos\varphi - 2\tilde{p}\cos\omega t\sin\varphi],$$

где зависимость $\varphi(t,\tilde{q})$ определяется первым уравнением (7.3.9).

Вторая каноническая замена, приводящая систему к стандартному виду $\tilde{q},\tilde{p} \to q,p$ имеет производящую функцию $S_2(t,q,\tilde{p}) = \omega t\tilde{p}^2 - q\tilde{p}$ (см. пример 5. в разд. 6.3.5). Аналитический вид замены и преобразованный гамильтониан таковы

$$\tilde{q} = -\partial S_2/\partial\tilde{p} = q - 2p\omega t, \quad p = -\partial S_2/\partial q = \tilde{p}, \tag{7.3.10}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\tilde{H}}(t,q,p) = \varepsilon\omega F(t,\varphi,p), \\ &F = \left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right)(\sin\omega t\cos\varphi - 2p\cos\omega t\sin\varphi). \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

Здесь φ как функция t,q,p определяется неявно из уравнения

$$\varphi - \varepsilon\sin\omega t\sin\varphi = q - 2p\omega t. \tag{7.3.12}$$

Уравнения движения частицы в переменных q,p

$$\dot{q} = \frac{\partial\tilde{\tilde{H}}}{\partial p} = \varepsilon\omega\left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{2\omega t}{Y_{max}}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right), \quad \dot{p} = -\frac{\varepsilon\omega}{Y_{max}}\frac{\partial F}{\partial\varphi}. \tag{7.3.13}$$

Из (7.3.12) можно найти частные производные

$$\begin{aligned} &\partial\varphi/\partial t = (-2p\omega + \varepsilon\omega\cos\omega t\sin\varphi)/Y_{max}, \\ &\partial\varphi/\partial q = 1/Y_{max}, \quad \partial\varphi/\partial p = -2\omega t/Y_{max} \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

и полную производную

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial\varphi}{\partial p}.$$

Пользуясь полученными формулами для производных, можно записать уравнения движения частицы (7.3.13) в исходных переменных φ, Y

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{d\omega t} = -2p - 6\frac{\varepsilon}{Y_{max}}\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)\cos\omega t\sin\varphi, \\ &\frac{dp}{d\omega t} = \frac{\varepsilon}{Y_{max}}\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)(\sin\omega t\sin\varphi + 2p\cos\omega t\cos\varphi), \\ &Y = \left(\frac{1}{2} + p\right)Y_{max}. \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

Полученная система уравнений эквивалентна исходной (7.3.8). Отсюда можно численно найти ТПП и результат будет тождественен полученному выше.

3. Отображение Пуанкаре. Отображение Пуанкаре позволяет вычислять ТПП из рекуррентных соотношений. Запишем разложение гамильтониана (7.3.11) по степеням ε

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{H}}(\tau, q, p) = \varepsilon\omega H_1 + \varepsilon^2\omega H_2 + O(\varepsilon^3),\\
&H_1 = \left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right)(\sin\tau\cos(q - 2p\tau) - 2p\cos\tau\sin(q - 2p\tau)),\\
&H_2 = -\left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right)\left[\sin^2\tau\sin^2(2(q - 2p\tau)) + \tfrac{1}{2}\sin 2\tau\sin(2(q - 2p\tau))\right],\\
&\tau = \omega t
\end{aligned} \tag{7.3.16}$$

и применяя формулу (6.4.11), можно получить параметрическую функцию $\Psi(x, y)$ для отображения Пуанкаре с точностью до ε^3. Возвращаясь к исходным переменным φ, Y с помощью преобразований (7.3.9,7.3.10) получим отображение для ТПП $(\varphi_0, Y_0) \to (\varphi_1, Y_1)$ в виде суперпозиции трех отображений

$$\begin{cases}
Y_0 = p_0 + 1/2, \quad \varphi_0 = Q_0 + 2\pi p_0,\\
(Q_0, p_0) \to (Q_1, p_1),\\
p_1 = Y_1 - 1/2, \quad Q_1 = \varphi_1 + 2\pi p_1
\end{cases} \tag{7.3.17}$$

Промежуточное отображение $(Q_0, p_0) \to (Q_1, p_1)$ находится в параметрическом виде с помощью (6.4.12)

$$\begin{cases}
Q_0 = x' - \tfrac{1}{2}\Psi_y\\
p_0 = y + \tfrac{1}{2}\Psi_{x'}
\end{cases} \qquad
\begin{cases}
Q_1 = x' + \tfrac{1}{2}\Psi_y\\
p_1 = y - \tfrac{1}{2}\Psi_{x'}
\end{cases} \tag{7.3.18}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi(x', y) = \varepsilon\Psi_1(x', y) + \varepsilon^2\Psi_2(x', y) + O(\varepsilon^3),\\
&\Psi_1(x', y) = -2f(y)\sin x', \quad \Psi_2(x', y) = u(y) + v(y)\cos(2x'),\\
&f(y) = \left(y^2 - \tfrac{1}{4}\right)\sin 2\pi y,\\
&u(y) = \pi\left(y^2 - \tfrac{1}{4}\right)^2\left(\tfrac{5}{2} - \cos 4\pi y\right) - p\left(y^2 - \tfrac{1}{4}\right)\sin 4\pi y,\\
&v(y) = \pi\left(y^2 - \tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(y^2 - \tfrac{1}{4}\right)\left(y^2 - \tfrac{5}{8}\right)\frac{\sin 4\pi y}{4y}.
\end{aligned} \tag{7.3.19}$$

Приведем вывод формул (7.3.18) и (7.3.19) более подробно. Для упрощения выкладок введем функцию

$$g(\tau, q, p) = \cos q - \cos\tau\cos(q - 2p\tau). \tag{7.3.20}$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} H_1 d\tau = \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) g(\tau, q, p).$$

Для первого приближения найдем

$$\begin{aligned} &\Psi_1(q,p) = \left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right) g(2\pi, q, p) = -2f(p)\sin(Q), \\ &f(p) = \left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right)\sin 2\pi p, \quad Q = q - 2\pi p. \end{aligned} \tag{7.3.21}$$

Для второго приближения

$$\begin{aligned} &\Psi_2(q,p) = \Psi_{21}(q,p) + \Psi_{22}(q,p), \\ &\Psi_{21}(q,p) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{H_1, \int_0^{\tau} H_1 d\tau'\right\} d\tau, \quad \Psi_{22}(q,p) = \int_0^{2\pi} H_2 d\tau. \end{aligned} \tag{7.3.22}$$

С помощью тождеств

$$-\{H_1, \int_0^{\tau} H_1 d\tau'\} = \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2 (g_{\tau q}g_p - g_{\tau p}g_q) + 2p\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)(g_{\tau q}g - g_{\tau}g_q).$$

$$g_{\tau q}g_p - g_{\tau p}g_q = -2\sin q\frac{d}{d\tau}[\tau(\cos\tau\sin(Q)] + 2(\cos\tau\sin(Q))^2$$

$$\int_0^{2\pi}(g_{\tau q}g_p - g_{\tau p}g_q) = \pi(1 - 2\cos 4\pi p) + \left(2\pi - \frac{\sin(4\pi p)}{4p}\frac{8p^2-1}{4p^2-1}\right)\cos(2Q),$$

$$\int_0^{2\pi}(g_{\tau q}g - g_{\tau}g_q) = 2\pi p - \sin 4\pi p$$

находим интегралы в (7.3.22) и функцию Ψ для отображения Пуанкаре

$$\Psi(q,p) = \varepsilon\Psi_1(Q,p) + \varepsilon^2\Psi_2(Q,p) + O(\varepsilon^3),$$

$$\Psi_2(Q,p) = u(p) + v(p)\cos(2Q),$$

$$u(p) = \pi\left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right)^2\left(\tfrac{5}{2} - \cos 4\pi p\right) - p\left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right)\sin 4\pi p,$$

$$v(p) = \pi\left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(p^2 - \tfrac{1}{4}\right)\left(p^2 - \tfrac{5}{8}\right)\tfrac{\sin 4\pi p}{4p},$$

которые позволяют вычислять координаты следующей точки последования Пуанкаре q_1, p_1 по координатам предыдущей точки q_0, p_0. Исходные координаты ТПП находятся по формулам $\varphi_0 = q_0$, $\varphi_1 = q_1 - 4\pi p_1$. Это отображение можно еще упростить, перейдя к новым переменным $Q_0 = q_0 - 2\pi p_0$, $Q_1 = q_1 - 2\pi p_1$, $x' = x - 2\pi y$. В результате получим требуемое отображение Пуанкаре $(\varphi_0, Y_0) \to (\varphi_1, Y_1)$ (7.3.17), (7.3.18), (7.3.19).

4. Отображение Пуанкаре за полупериод. Найденное отображение (7.3.17)–(7.3.19) можно существенно уточнить, если представить отображение за период в виде двух отображений за полупериод. В моменты времени, кратные полупериоду, центры цилиндров также совпадают. Область φ, Y в эти моменты времени является также прямоугольником. Отображения строятся аналогично. Отображение $(\varphi_0, Y_0) \to (\varphi_{1/2}, Y_{1/2})$ за первый полупериод имеет вид

$$\begin{cases} Q_0 = \varphi_0 - \pi p_0, & p_0 = Y_0 - 1/2, \\ \begin{cases} Q_0 = x' - \frac{1}{2}\Phi_y \\ p_0 = y + \frac{1}{2}\Phi_{x'} \end{cases} & \begin{cases} Q_{1/2} = x' + \frac{1}{2}\Phi_y \\ p_{1/2} = y - \frac{1}{2}\Phi_{x'} \end{cases} \\ \varphi_{1/2} = Q_{1/2} - \pi p_{1/2}, & Y_{1/2} = p_{1/2} + 1/2, \end{cases} \tag{7.3.23}$$

а за второй полупериод отображение $(\varphi_{1/2}, Y_{1/2}) \to (\varphi_1, Y_1)$ отличается только параметрической функцией

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{1/2} = \varphi_{1/2} - \pi p_{1/2}, & p_{1/2} = Y_0 - 1/2, \\ \begin{cases} \tilde{Q}_{1/2} = x - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_y \\ p_{1/2} = y + \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_x \end{cases} & \begin{cases} Q_1 = x + \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_y \\ p_1 = y - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_x \end{cases} \\ \varphi_1 = Q_1 - \pi p_1, & Y_1 = p_1 + 1/2. \end{cases} \tag{7.3.24}$$

Функции Φ и $\tilde{\Phi}$ вычисляются так:

$$\begin{aligned} &\Phi(x, y) = \varepsilon\Phi_1(x, y) + \varepsilon^2\Phi_2(x, y) + O(\varepsilon^3), \\ &\tilde{\Phi}(x, y) = -\varepsilon\Phi_1(x, y) + \varepsilon^2\Phi_2(x, y) + O(\varepsilon^3), \\ &\Phi_1(x, y) = 2(y^2 - \tfrac{1}{4})\cos x \cos(\pi y), \\ &\Phi_2(x, y) = u(y) + v(y)\cos(2x), \\ &u(y) = \tfrac{5\pi}{4}(y^2 - \tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{\pi}{2}(y^2 - \tfrac{1}{4})^2\cos 2\pi y + y(y^2 - \tfrac{1}{4})\sin 2\pi y, \\ &v(y) = -\tfrac{\pi}{2}(y^2 - \tfrac{1}{4})^2 - (y^2 - \tfrac{1}{4})(8y^2 - 5)\tfrac{\sin 2\pi y}{32y}. \end{aligned} \tag{7.3.25}$$

Остаточный член найденных отображений имеет порядок $(T\varepsilon)^3$, где T — временной интервал. Поэтому отображение за два полупериода имеет в четыре раза меньшую погрешность по сравнению с отображением за период. Отображение за период применимо на интервале $0 < \varepsilon < 0,45$, а отображение за два полупериода применимо в большем диапазоне $0 < \varepsilon < 0,59$.

На рис. 7.11 приведены фазовые портреты ТПП при $\varepsilon = 0,2$ и $\varepsilon = 0,4$, найденные с помощью аналитического отображения Пуанкаре: слева за один период из решения алгебраических уравнений (7.3.17)–(7.3.19) и для сравнения справа — за два полупериода из решения уравнений (7.3.17)–(7.3.19). Последний фазовый портрет при $\varepsilon = 0,5$ определен по (7.3.23)–(7.3.25), а отображение (7.3.17)–(7.3.19) в этом случае не существует. Фазовые портреты справа лучше согласуются с точными расчетами на рис. 7.10.

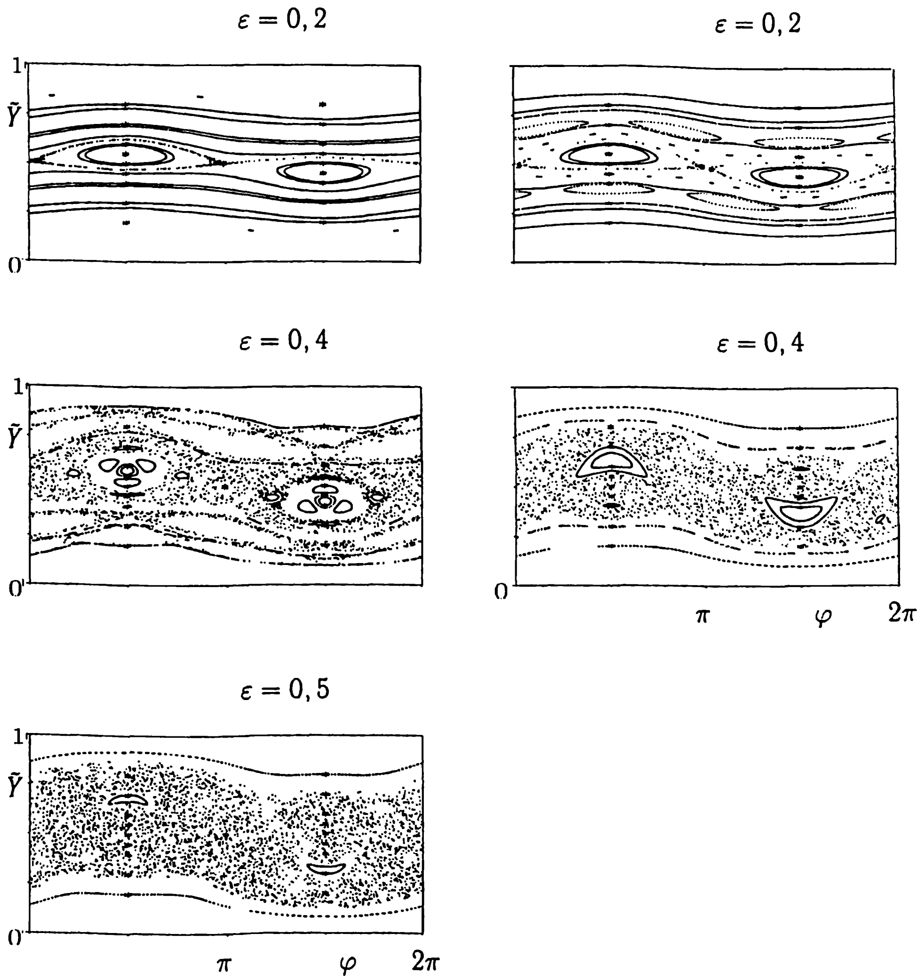


Рис. 7.11. ТПП между двумя вращающимися цилиндрами. Аналитическое отображение Пуанкаре

5. Сравнение фазовых портретов. Сравнение рис. 7.11 с соответствующими фазовыми портретами на рис. 7.10 показывает не только их качественное совпадение, но и количественное. Так, положения неподвижных точек, обозначенных кружочками, практически совпадают. Эллиптические и гиперболические точки соответствуют друг другу. Области хаотизации точек и их упорядоченного движения на соответствующих рисунках мало отличаются друг от друга. Таким образом, при $\varepsilon < 0,5$ точность функций (7.3.19), (7.3.25) и полученных с помощью них параметрических отображений достаточны, чтобы определять фазовые траектории ТПП и описывать переход к хаосу.

6. Неподвижные точки отображения Пуанкаре. Фазовый портрет ТПП можно качественно описать, если найти неподвижные точки отображения и исследовать их устойчивость. Устойчивые неподвижные точки называют точками эллиптического типа. В ее окрестности ТПП лежат на замкнутых инвариантных кривых, близких к эллипсам. Это движение упорядоченное. Неустойчивые неподвижные точки называют точками гиперболического типа. В ее окрестности расположение ТПП может быть хаотичным.

Основные неподвижные точки определяются из системы уравнений

$$Y_0 = Y_1, \quad \varphi_0 = \varphi_1$$

Их можно найти аналитически с помощью отображения (7.3.17)–(7.3.19)

$$p_0 = p_1 = y, \quad Y_0 = Y_1 = 1/2 + y, \quad \varphi_0 = \varphi_1 = x', \tag{7.3.26}$$

$$\begin{aligned} &\Psi_{x'} = -2\varepsilon \cos x'(f(y) + 2\varepsilon v(y)\sin x') = 0, \\ &\Psi_y - 4\pi y = \varepsilon^2(u'(y) + v'(y)\cos 2x') - 2\varepsilon f'(y)\sin x' - 4\pi y = 0. \end{aligned} \tag{7.3.27}$$

Система (7.3.27) эквивалентна двум системам уравнений

$$\begin{cases} \cos x' = 0\,, \\ \varepsilon^2(u'(y) - v'(y)) - 2\varepsilon f'(y)\sin x' - 4\pi y = 0\,, \end{cases} \tag{7.3.28}$$

$$\begin{cases} f(y) + 2\varepsilon v(y)\sin x' = 0\,, \\ \varepsilon^2(u'(y) + v'(y)\cos 2x') - 2\varepsilon f'(y)\sin x' - 4\pi y = 0\,. \end{cases} \tag{7.3.29}$$

Первая система (7.3.28) имеет два корня, которые можно получить с помощью асимптотических разложений по степеням y. Точки, соответствующие этим корням, обозначим через M_1 и M_2

$$M_1 \begin{cases} x' = \pi/2\,, \\ \varepsilon = 4y + 104y^3\,, \\ y \in (0,\ 0,1)\,, \end{cases} \quad M_2 \begin{cases} x' = 3\pi/2\,, \\ \varepsilon = -4y - 104y^3\,, \\ y \in (-0,1,\ 0)\,. \end{cases} \tag{7.3.30}$$

Отсюда с помощью (7.3.26) находим координаты φ, Y точек M_1 и M_2. Вторая система (7.3.29) при любом ε имеет два следующих решения

$$M_3 \begin{cases} x' = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad M_4 \begin{cases} x' = \pi \\ y = 0 \end{cases} \tag{7.3.31}$$

и, кроме того, при $\varepsilon > 0,587$ решения определяемые асимптотическими разложениями $\varepsilon = 0,587 + 17,7y^2 +$ $\sin x' = -4,54y - 32,2y^3 +$ Однако при $\varepsilon > 0,5$ найденное отображение неприменимо и поэтому последнее решение рассматриваться не будет. Таким образом, решение (7.3.31) определяет еще две неподвижные точки M_3 и M_4. Их координаты φ, Y, как следует из (7.3.26) и (7.3.31), таковы:

$$M_3(\varphi = 0,\ Y = 1/2), \quad M_4(\varphi = \pi,\ Y = 1/2)$$

и не зависят от ε. Найденные неподвижные точки соответствуют периодическим решениям уравнений Гамильтона с периодом $\omega t = 2\pi$. Существуют также серии неподвижных точек, соответствующих периоду $2\pi n$. Эти точки определяются из уравнений $\phi_n = \pi_0 + 2\pi k, p_n = p_0$, и их также можно находить аналитически. Ограничимся рассмотрением устойчивости найденных неподвижных точек (7.3.30) и (7.3.31).

7. Устойчивость неподвижных точек. Зная отображения $(Q_0, p_0) \to (Q_1, p_1) \to (\varphi_1, p_1)$ и $(\varphi_0, p_0) \to (Q_0, p_0)$ мы можем построить отображение $(\varphi_0, p_0) \to (\varphi_1, p_1)$ и вычислить его якобиеву матрицу. В окрестности неподвижной точки имеем

$$\begin{cases} dQ_1 = A_{11}dQ_0 + A_{12}dp_0\,, \\ dp_1 = A_{21}dQ_0 + A_{22}dp_0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} dQ_0 = d\varphi_0 - 2\pi dp_0\,, \\ d\varphi_1 = dQ_1 - 2\pi dp_1\,, \end{cases}$$

где коэффициенты A_{ij} выражаются через вторые производные параметрической функции $\Psi(x, y)$, определяемой по формуле (7.3.19). Из последней группы линейных соотношений найдем

$$\begin{gathered} \begin{cases} d\varphi_1 = \tilde{A}_{11}d\varphi_0 + \tilde{A}_{12}dp_0\,, \\ dp_1 = \tilde{A}_{21}d\varphi_0 + \tilde{A}_{22}dp_0\,, \end{cases} \\ \tilde{A}_{11} = A_{11} - 2\pi A_{21}, \quad \tilde{A}_{12} = A_{12} - 2\pi(A_{11} + A_{22}) + 4\pi^2 A_{21}, \\ \tilde{A}_{21} = A_{21}, \quad \tilde{A}_{22} = A_{22} - 2\pi A_{21}. \end{gathered} \tag{7.3.32}$$

Первый инвариант отображения (7.3.32) таков:

$$I = \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} = A_{11} + A_{22} - 4\pi A_{21}.$$

Коэффициенты матрицы выражаем через функцию Ψ

$$I = 2\frac{2-J}{J} + 4\pi\frac{\Psi_{xx}}{J}, \quad J = 1 + \frac{\varepsilon^2}{4}(\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2). \tag{7.3.33}$$

Характеристическое уравнение $m^2 - Im + 1 = 0$ при $|I| \leqslant 2$ имеет комплексные корни, модуль которых равен единице. В этом случае неподвижные точки будут устойчивы (точки эллиптического типа). С учетом (7.3.33) условие устойчивости будет иметь вид

$$\begin{aligned} &-1 \leqslant \pi\Psi_{x'x'} = 2\pi\varepsilon f(y)\sin x' - 4\pi\varepsilon^2 v(y)\cos 2x' \leqslant J - 1, \\ &J - 1 = \tfrac{1}{4}(\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2)\,. \end{aligned} \tag{7.3.34}$$

Исследуем устойчивость неподвижных точек M_1 и M_2 (7.3.30). С помощью разложений $v(y) = -(3/32)\pi + ((3/8)\pi + (5/12)\pi^3)y^2 +$ $f(y) = -(\pi/2)y + (2\pi + \pi^3/3)y^3 +$ условие (7.3.34) примет вид $-1 \leqslant -10(\pi y)^2$. Отсюда находим, что при

$$0 \leqslant y \leqslant y_0 \approx 1/(\pi\sqrt{10}) \approx 0,1, \ \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \approx 0,505$$

точка $M_1(\varphi = \pi/2,\ Y = 1/2 + \varepsilon/4 + O(\varepsilon^3))$ устойчива. Вторая, симметрично расположенная, неподвижная точка $M_2(\varphi = 3\pi/2,\ Y = 1/2 - \varepsilon/4 + O(\varepsilon^3))$ устойчива при тех же значениях параметра ε. Эти неподвижные точки на численных экспериментах (рис. 7.10) обозначены кружочками. При $\varepsilon = 0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4$ точки имеют эллиптический тип. В их окрестности ТПП расположены на замкнутых инвариантных кривых. При $\varepsilon = 0,5$ неподвижные точки M_1 и M_2 теряют устойчивость, ТПП хаотично заполняют почти всю область течения.

Устойчивость неподвижных точек M_3 и M_4 (7.3.31) исследуется аналогично. Вычисляем вторые производные Ψ в этих точках

$$\begin{aligned} &\Psi_{xx} = -4\varepsilon^2 v(0) = (3/8)\pi\varepsilon^2, \\ &\Psi_{yy} = \varepsilon^2(u''(0) + v''(0)) = \varepsilon^2(\tfrac{5}{4}\pi + \tfrac{11}{6}\pi^3) = 60,8\varepsilon^2, \\ &\Psi_{xy} = 2\varepsilon f'(0) = -\varepsilon\pi, \\ &J - 1 = -2,467\varepsilon^2 + 17,9\varepsilon^4. \end{aligned}$$

Подстановка в условие устойчивости дает $-1 \leqslant 3.7\varepsilon^2 < -2.47\varepsilon^2 + 17.9\varepsilon^4$. Отсюда следует, что неподвижные точки $M_3(\varphi = 0,\ Y = 1/2)$ и $M_4(\varphi = \pi,\ Y = 1/2)$ неустойчивы всегда при $\varepsilon < 0.587$, т. е. являются точками гиперболического типа. Устойчивы точки при $\varepsilon > 0.587$, однако это заключение принимать во внимание не надо, так как отображение (7.3.17)–(7.3.19) при $\varepsilon > 0,5$ неприменимо.

8. Процесс перемешивания частиц жидкости. Для описания процесса перемешивания приведем решение следующей задачи. Рассмотрим малый прямоугольник фазовой плоскости $\varphi_0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \varphi_0 + a$, $Y_0 \leqslant Y \leqslant Y_0 + b$, где a и b — стороны прямоугольника. Построим в этом прямоугольнике сетку, разбив каждую сторону на n равных отрезков. В узлы сетки $n \times n$ поместим начальные точки ТПП. Будем фотографировать эти точки через 1, 2, 3,.. K периодов. При отсутствии хаоса эти точки будут располагаться в окрестности инвариантной кривой, проходящей через выбранный прямоугольник. Пример такого расчета при $\varepsilon = 0,1$ представлен на рис. 7.12. Левый верхний угол начального прямоугольника выбран в точке с координатами $\varphi_0 = 0,2 \times 2\pi$, $Y_0 = 0,7$. Стороны прямоугольника в 50 раз меньше сторон прямоугольной области течения жидкости, т. е. $a = 2\pi/50$ и $b = 1/50$. В малом прямоугольнике в узлах сетки 50×50 помещены $51 \times 51 = 2601$ точка. На первом рисунке (в верхнем левом углу) приведен прямоугольник, заполненный начальными точками и точками, в которых частицы жидкости окажутся через период. Как видно, прямоугольник с точками через период преобразовался в вытянутый параллелограмм. Иначе говоря, отображением Пуанкаре через период прямоугольника является параллелограмм. Через два периода точки переходят в еще более вытянутый параллелограмм, который является повторным отображением Пуанкаре параллелограмма на первом периоде. Этот параллелограмм показан на втором рисунке справа. На следующих рисунках показаны отображения начальных точек через 3, 4, 5, 10, 20 и 200 периодов. Эти значения приведены на рисунках. Как видно, точки равномерно перемешались в узкой криволинейной полосе, толщина которой сравнима с размером начального прямоугольника. За пределы этой узкой полосы частицы жидкости никогда не проникнут. Этот режим не является хаотическим.

Следующий расчет при $\varepsilon = 0,5$ представлен на рис. рис. 7.13 и демонстрирует хорошее перемешивание частиц жидкости. Точки из расположенного в том же месте прямоугольника через 10 периодов равномерно распределяются по достаточно широкой области, сравнимой по площади со всей областью течения жидкости. Область перемешивания соответствует фазовому портрету ТПП при $\varepsilon = 0,5$ (см. рис. 7.10).

Расчеты показанные на рис. 7.12 и рис. 7.13 выполнены с помощью параметрического отображения, что примерно в 100 раз сокращает время расчетов без существенной потери точности.

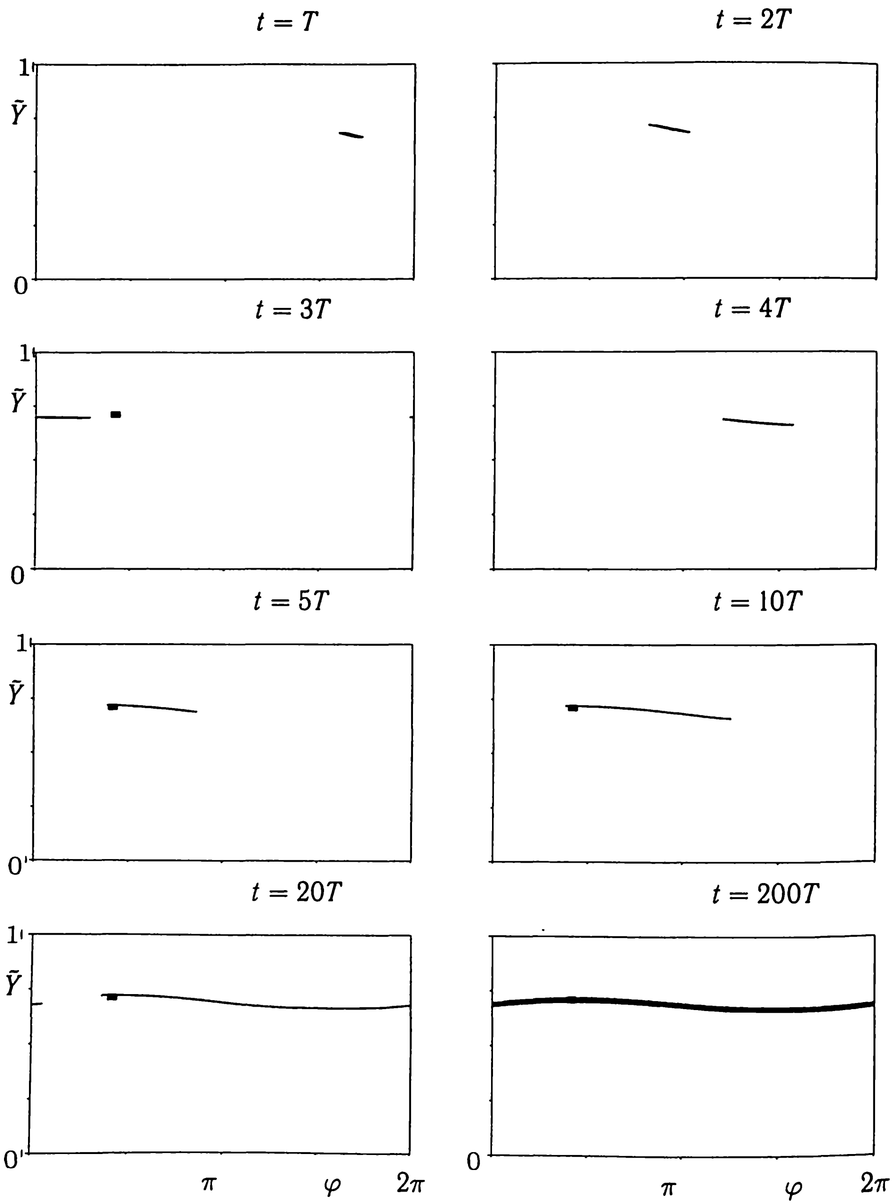


Рис. 7.12. Перемешивание частиц жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при $\varepsilon = 0,1$

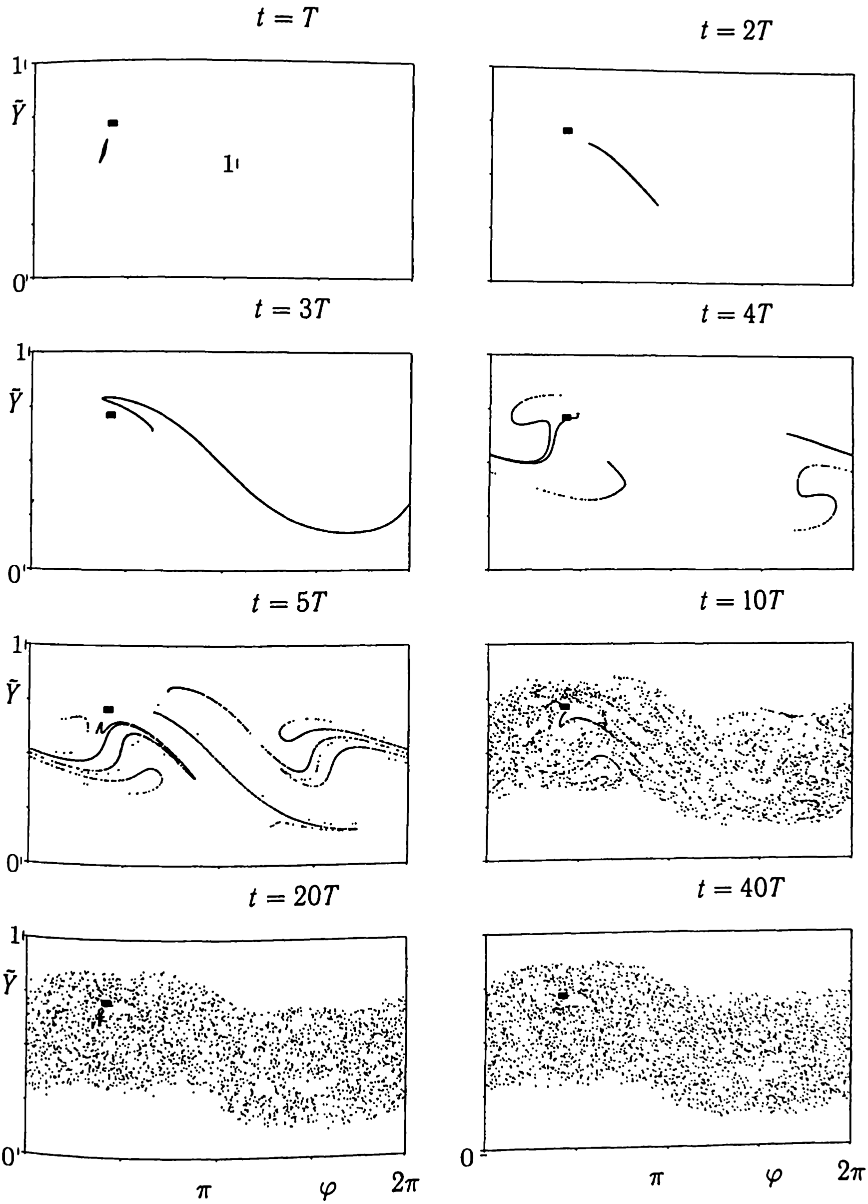


Рис. 7.13. Перемешивание частиц жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при $\varepsilon = 0,5$

9. Выводы. Численный эксперимент находится в согласии с полученными теоретическими выводами. Неподвижные точки M_3 и M_4, обозначенные на рис. 7.10 кружочками, являются точками гиперболического типа. При малых ε хаос появляется в малых окрестностях этих точек. Области хаотизации возрастают с увеличением ε. При $\varepsilon \approx 0,5$ площадь хаотизации максимальна. В этом случае все неподвижные точки M_1, M_2, M_3, M_4 — неустойчивы.

ТПП расположены на инвариантных кривых (см. рис. 7.10) и хаоса нет. Отображение Пуанкаре за период имеет четыре неподвижные точки (см. рис. 7.10): две эллиптические $M_1(\varphi = \pi/2,\ Y = 1/2 + \varepsilon/4)$, $M_2(\varphi = 3\pi/2,\ Y = 1/2 - \varepsilon/4)$ при $\varepsilon < 0.5$ и две гиперболические $M_3(\varphi = 0,\ Y = 1/2)$, $M_4(\varphi = \pi,\ Y = 1/2)$ при любых ε. В окрестности гиперболических точек начинает наблюдаться динамический хаос при $\varepsilon > 0,2$. Площадь области хаотизации ТПП увеличивается с ростом ε до значения $\varepsilon \approx 0,5$. При $\varepsilon = \varepsilon_0 \approx 0,5$ точки M_1 и M_2 становятся гиперболическими на коротком интервале $\Delta\varepsilon$. В этот момент площадь хаотизации максимальна. При $\varepsilon > \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ точки M_1 и M_2 становятся опять эллиптическими. В их окрестности движение упорядоченное, а площадь хаотизации соответственно уменьшается.

Аппарат параметрических отображений Пуанкаре позволяет эффективно вычислять неподвижные точки, исследовать их устойчивость и описывать переход к хаосу. Фазовые портреты ТПП, полученные с помощью аналитического отображения Пуанкаре, хорошо согласуются с численными экспериментами (см. рис. 7.11).

Рассмотренный пример представляет собой математическую модель миксера для перемешивания сред с большой вязкостью. Наилучшее перемешивание достигается при $\varepsilon \approx 0,5$.

Развитая теория параметрических отображений Пуанкаре представляет собой конструктивный математический аппарат для описания перехода к динамическому хаосу в гидродинамических системах подобного типа, что и показывает приведенный пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: «Эдиториал УРСС», 2000. 408 с.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 3. М.: 1985. 304 с.
4. *Айзерман М.А.* Классическая механика. М.; Наука, 1980. 367 с.
5. *Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю.* Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду// ПММ, 1962. Т.26. Вып. 3. С. 497-502.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1974. 295 с.
7. *Белкин И.V., Виноградов Г.В., Леонов А.И.* Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико–химических характеристик материалов. М.: Машиностроение, 1967. 272 с.
8. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М., Наука, 1983. 448 с.
9. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамаической устойчивости. М.: Мир, 1971.
10. *Биркгоф Д. Д.* Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
12. *Борисенко А.И. Тарапов И. Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высш. шк., 1966. 25 с.
13. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 29 с.
14. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Часть 1, М.: Наука, 1967. 467 с; часть 2, 1967. 332 с.
15. *Бэтчелор Дж.К.* Введение в динамику жидкости. М.: Изд-во Мир, 1973. 758с.
16. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
17. *Воларович М.П., Гуткин А.М.* Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и кольцевом пространстве между коаксиальными трубками // ЖТФ 1946. Т.16. Вып.3. С. 321-328.

18. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Динамика частиц при воздействии вибраций. Киев: Наук. думка, 1975. 168 с.
19. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.; Наука, 1966. 300 с.
20. *Гельфрейх В.Г., Лазуткин В.Ф.* Расщепление сепаратрис: теория возмущений, експоненциальная малость// УМН, 2001. Т. 56. Вып. 3. С. 79-142.
21. *Георгиевский Д.В., Кириллов А.С.* Разгон и торможение тяжёлого вязкопластического слоя (ледника) вдоль наклонной плоскости // Изв. РАН. МТТ., N 3.
22. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Течение вязкопластичной среды между круглыми параллельными пластинами при их сближении и удалении // Изв. РАН. МЖГ. 1996, N 1. С. 9-17.
23. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Плоское течение вязкопластичных сред в узких каналах с деформируемыми стенками. // Изв. РАН. МЖГ. 1996, N 2. С. 23-31.
24. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Исследование течений вязкопластичных сред в каналах и полостях с изменяемыми формами их стенок. М. ВИВАТ, 1995. 128 с.
25. Гидродинамическая теория смазки. Л.: Гостехиздат, 1934. 574 с.
26. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
27. *Жуковский Н.Е.* Полное собрание сочинений. Т. 3. Гидравика. Прикладная механика. М.-Л.: Государственное изд–во технико–теоретической литературы. 700 с.
28. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997, 320 с.
29. *Журавлев В. Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 325 с.
30. *Журавлев В. Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем// ПММ., 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356-365.
31. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1983. 430 с.
32. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластичного тела// Уч. зап. МГУ. Механика. Вып. XXXIX, 1940. С. 3-81.
33. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М., Изд–во МГУ, 1971.
34. *Ишлинский А. Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука: 1986. 360 с.
35. *Ишлинский А. Ю. Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Наука, 2001. 704 с.
36. *Карслоу Х., Егер Д.* Операционные методы в прикладной математике. Изд–во иностр. лит. 1948.
37. *Качанов Л.М. Основы теории пластичности.* М.: ГИТЛ, 1956.
38. *Колмогоров В.Л.* Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1986. 688с.

39. *Кочин Н.Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
40. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. Часть 1. М.: Физматгиз. 1963. 583с; часть 2, 1963. 727 с.
41. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: 2000. 350 с.
42. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965. 203 с.
43. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
44. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. Меркурий пресс. 1983. 528 с.
45. *Линь Ц.Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.:,ИЛ, 1958.
46. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
47. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
48. *Лурье А. .И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. ГИТЛ, 1950.
49. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с.
50. Механика сплошных сред в задачах. Под ред. М.Э. Эглит Т. 1. Теория и задачи. М.: «Московский Лицей», 1996, 396с; Т. 2. Ответы и решения. 1996, 394 с.
51. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязко-пластических сред. Изд-во МГУ, 1971. 114 с.
52. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
53. *Мясников В. П.* О сдавливании вязко-пластического слоя жесткими плитами // Изв. АН СССР. Механика и Машиностроение. 1963, N4. С. 92-96.
54. *Мясников В. П.* Течение вязкопластичной среды при сложном сдвиге// ПМТФ. 1961, Т.5. С. 76-87.
55. *Назаров А.Н.* Основы математического моделирования процессов трения и вовлечения при движении потоков лавинного типа // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1995, N 4. С. 79-85.
56. *Нейштадт А.И.* О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984, Т. 48. Вып. 3. С. 197-204.
57. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1.М.: Наука, 1987, 464 с. Т. 2., 359 с.
58. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с.
59. *Петров А.Г.* Об оптимизации процессов управления вязко-пластичного течения в тонком слое с изменяемыми формами границ// Изв. АН. МТТ. 1997, N 2, С. 127-132.
60. *Петров А.Г.* Плоская задача о выдавливании вязкопластичной среды параллельными пластинами// ПММ. 1998, Т. 62, вып. 4. С. 608-617.

61. *Петров А.Г.* Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязкопластичной среды между двумя пластинами// ДАН, 1998. Т. 362, N 3. Механика. С. 343-347.
62. *Петров А.Г.* Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязкопластичной среды между двумя пластинами// Изв. РАН МЖГ. 1999, N 2. С. 3-13.
63. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом// ДАН. Механика, 1999. Т. 368, N 4. С. 483-488.
64. *Петров А.Г.* О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей// Изв. РАН МЖГ. 2000, N 4. С. 12-17.
65. *Петров А.Г.* Развитие течения вязкой и вязкопластичной сред между двумя параллельными пластинами// ПММ, 2000. Т.64. Вып. 1. С. 127-136.
66. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем// МТТ, 2001, N 3. С. 19-32.
67. *Петров А.Г.* Параметрический метод отображений Пуанкаре в гидродинамических системах// ПММ, 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 356-365.
68. *Петров А.Г.* Асимптотический метод построения отображения Пуанкаре при описании перехода к динамическому хаосу в гамильтоновых системах// ДАН, 2002. Т. 382, N 1. С. 15-19.
69. *Петров А.Г.* Модификация метода инвариантной нормализации гамильтонианов с помощью параметризации канонических преобразований// ДАН, 2002. Т. 386, N 4. Механика. С. 343-347.
70. *Петров А.Г.* Метод отображений Пуанкаре в гидродинамических системах. Динамический хаос в жидком слое между эксцентрично вращающимися цилиндрами// ПМТФ. 2002, N 6. С. 3-21.
71. *Петров А.Г., Черепанов Л.В.* Точные решения задачи нестационарного течения вязкопластичной среды в круглой трубе// Изв. РАН МЖГ. 2003, N 2. С. 13-24.
72. *Петров А.Г.* Асимптотические методы решения уравнений уравнений Гамильтона с помощью параметризации канонических преобразований// Дифф. уравнения. 2004, Т. 40, N 5. С. 1-13.
73. *Петров А.Г.* Динамический хаос в жидком слое между эксцентрично вращающимися цилиндрами// ПММ, 2004. Т. 68. Вып. 3.
74. *Петров А.Г.* Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем// ПММ, 2004. Т. 68. Вып. 6.
75. *Петров Н.П.* Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости Инж. журн., 1883.
76. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. Т. II М.: Наука, 1972. 999 с.
77. *Рамберг Х.* Сила тяжести и деформации в земной коре. М.: Недра, 1985. 399 с.
78. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.

79. *Сагомонян А.Я.* Дождевая эрозия почвы на склоне возвышенности// Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2000. N 4. С. 28-34.
80. *Савельев Б.А., Латалин Д.А.* Искусственные ледяные платформы // Итоги науки и техники. Сер. Океанология. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 7. С. 3-193.
81. *Савельев Б.А.* Гляциология. М.: Изд-во МГУ, 1991. 288 с.
82. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. В двух томах Изд. 5-е. М.: Наука, 1995. 1108 с.
83. *Сен-Венан А.* Об установлении уравнений внутренних дижений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости// Теория пластичности/ Под редакцией Ю.Н. Работного. М. 1948. С. 11-19.
84. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. тех.-теор. издат., 1955. С. 221—224.
85. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк. 1969.
86. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
87. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.
88. *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. Изд-во МГУ, 1984. 295 с.
89. Теория пластичности// Под редакцией Ю.Н. Работнова М.: Гос. изд–во иностр. лит-ры, 1948. 452 с.
90. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2, М.: Физматгиз, 1962. С. 507-511.
91. Хаотические системы// Тр. инст. инженеров по электронике и радиоэлектронике. 1987. Т. 75, N 8. 170 с.
92. *Черников А.К.* Вариационные методы решения задач о вязкопластическом течении соляных пород // Изв. вузов. Горный журн. 1985. N 10. С. 29-33.
93. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат. 1956.
94. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: 1988. 240 с.
95. *Эглит М.Э.* Динамика снежных лавин// Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 186. С. 162-167.
96. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
97. *Bingham E. C.* Fluidity and Plastisity. New York, 1922.
98. *Hencky H. Z.* Landsame stationare Strommungen in plastischen Massen. // Z. angew. Math und Mech, 1925. B.5, H.2. P. 115-124.
99. *Kaper T.J.; Wiggins, S.* An analytical study of transport in Stokes flows exhibiting large-scale chaos in the eccentric journal bearing// J. Fluid Mech. 1993, N 253. P. 211–243.
100. *Klimov D.M., Petrov A.G.* Analytical solutions of the boundary- value problem of non stationary flow of viscoplastic medium between two plates// Archive of Applied Mechanics. 2000, Vol. 70. P. 3-16.

101. Nowacki W.K. On the dynamics description of the rock failure process // Arch. mech. stosow. 1986. Vol. 38. N 1-2. P. 25-37.

102. *Ottino J.M.* The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport. Cambridge University Press. 1989. 359p.

103. *Reissner E.* On variational theorem in elasticity// J. of Mathematics and Physics, 1950, V.29, N 2. P. 90-95.

104. *Reinolds O.* On the Theory of Lubrication ... // Phil. Trans., CLXXVII, 157 (1886) (Paper, II, 228).

105. *Schwedoff T.* Recherches experimentals sur la cohesion des liquides.// J. de Phys, 1890. V. 34. P. 9.

Часть вторая

Вязкопластические течения: устойчивость

(Климов Д.М., Георгиевский Д.В.)

Глава 8

МОДЕЛИ ИЗОТРОПНЫХ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Для решения задачи МСС, описывающей некоторый физический процесс, обычно необходимо выполнить три этапа:

а) как и в любой феноменологической теории выписать постулаты, являющиеся законами изменения или сохранения основных динамических величин;

б) выбрать те или иные определяющие соотношения среды, тем самым замкнув систему уравнений в области тела, а также сформулировать граничные и начальные условия;

в) аналитико-численно решить следующую из п. п. а) и б) математическую начально-краевую задачу.

Пункты а) и б) этой условной схемы, цель которых поставить адекватную физическому явлению математическую проблему, призван реализовать механик. Наиболее ответственный здесь этап — правильный выбор модели среды или определяющих соотношений, не слишком усложняющий математическую задачу (иначе её невозможно будет решить), но и не упрощающий её до такой степени, что суть явления окажется выхолощенной.

В самом общем смысле определяющие соотношения данной среды описывают связь «процесса» и «реакции» или «отклика на процесс» [89, 93] в этой среде. Можно также сказать, что они связывают основные термодинамические величины с производными, причём последние являются потоками основных [166, 171].

В английском переводе сочетание «определяющие соотношения» звучит дословно — «constitutive relations» либо, если речь идёт о термодинамических величинах, «constitutive laws». По-видимому, более точным обратным переводом было бы «устанавливающие соотношения» или даже «конституционные соотношения». Последнее сочетание можно встретить в работах 50-60-х годов. Однако термин «определяющие соотношения» за последние полвека прочно устоялся. Теория определяющих соотношений, начавшаяся формироваться в связи с развитием теории пластичности и общей теории процессов [90-92, 200, 297-299, 317], в настоящее время с учётом связанности электро-, магнито-, термо- и механических полей [67, 100, 106, 147, 314], наличия внутренних параметров, микроструктуры и повреждаемости материала [31, 68, 167, 286], физико-химического взаимодействия и взаимодиффузии компонентов (если тело — композит) [166, 169, 170, 172], фрактальности геометрических границ [168, 205, 233], а также использования дробного интегро-дифференциального исчисления [185, 309, 326] представляет собой далеко не законченную и интенсивно развивающуюся часть МСС [52, 260].

8.1. Изотропные тензорные функции

Характерными объектами изучения в МСС являются тензоры чётного ранга, обладающие симметрией относительно тех или иных преобразований пространства. К их числу принадлежат, например, уже упоминавшиеся тензоры второго ранга: тензор напряжений Коши $\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_{ij}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j$, тензор деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j$, тензор скоростей деформаций $\underset{\sim}{v} = v_{ij}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j$, такие что

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad v_{ij} = v_{ji}, \tag{8.1.1}$$

и тензоры четвёртого ранга, являющиеся материальными функциями либо константами определяющих соотношений: тензор модулей упругости $\underset{\approx}{C} = C_{ijkl}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j\boldsymbol{k}_k\boldsymbol{k}_l$, тензор вязких модулей $\underset{\approx}{B} = B_{ijkl}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j\boldsymbol{k}_k\boldsymbol{k}_l$ такие, что

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}, \quad B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{klij} \tag{8.1.2}$$

Каждый вид симметрии (8.1.1), (8.1.2) — следствие определённого физического закона. Из (8.1.2) следует, что $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ и $B_{ijkl} = B_{ijlk}$.

8.1.1. Тензорный вид определяющих соотношений

Чаще всего определяющие соотношения записываются в виде

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{b}), \tag{8.1.3}$$

где $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ — симметричные тензоры второго ранга, описывающие некоторые процессы в деформируемой сплошной среде, а $\underset{\sim}{F}$ — тензор-функция.

Определение 8.1. Тензор-функция $\underset{\sim}{F}$ называется изотропной, если она инвариантна относительно полной ортогональной группы в $\mathbb{R}^3$, т. е.

$$\underset{\sim}{Q}^{-1}\ \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{b}) \cdot \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Q}^{-1} \cdot \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{Q}) \tag{8.1.4}$$

для любого ортогонального тензора $\underset{\sim}{Q}$ [165].

Каждой изотропной тензор-функции $\underset{\sim}{F}$ можно сопоставить некоторую скалярную функцию $F(x)$ такую, что значения F на спектре $\underset{\sim}{b}$ определяют $\underset{\sim}{a}$ [189, 196]. Разным аспектам теории изотропных тензор-функций, их представлениям в $\mathbb{R}^n$ для различного вида материальной симметрии, а также представлению их инвариантов с использованием обобщённых символов Кронекера $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ посвящены работы последних десяти лет [270, 280, 307, 318, 323, 345, 346].

Наиболее общий вид в $\mathbb{R}^3$ нелинейной изотропной функции (8.1.3) следующий [165, 317]

$$\underset{\sim}{a} = A_0 \underset{\sim}{I} + A_1 \underset{\sim}{b} + A_2 \underset{\sim}{b}^2, \tag{8.1.5}$$

где $\underset{\sim}{I}$ — как и ранее, единичный тензор второго ранга, а A_0, A_1, A_2 — скалярные функции трёх инвариантов I_{b1}, I_{b2}, I_{b3}:

$$I_{b1} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{b}, \quad I_{b2} = \sqrt{\operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^2} \geqslant 0, \quad I_{b3} = \sqrt[3]{\operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^3} \tag{8.1.6}$$

Выберем I_{b2} в качестве нормы $\|\underset{\sim}{b}\|$ тензора $\underset{\sim}{b}$. Поскольку инварианты этого тензора являются симметричными комбинациями его собственных значений λ_1, λ_2, λ_3, то можно также считать, что A_0, A_1, A_2 — функции трёх любых независимых симметричных комбинаций из элементов $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ [287].

8.1.2. Инварианты тензорных функций

Соответствующие (8.1.6) инварианты

$$I_{a1} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{a}, \quad I_{a2} = \sqrt{\operatorname{tr} \underset{\sim}{a}^2} \geqslant 0, \quad I_{a3} = \sqrt[3]{\operatorname{tr} \underset{\sim}{a}^3} \tag{8.1.7}$$

согласно (8.1.5) выражаются через I_{b1}, I_{b2}, I_{b3}:

$$I_{a1} = 3A_0 + I_{b1}A_1 + I_{b2}^2 A_2 \tag{8.1.8}$$

$$I_{a2}^2 = 3A_0^2 + 2I_{b1}A_0A_1 + I_{b2}^2(A_1^2 + 2A_0A_2) + 2I_{b3}^3 A_1A_2 + \operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^4 A_2^2 \tag{8.1.9}$$

$$\begin{aligned} I_{a3}^3 = 3A_0^3 + 3I_{b1}A_0^2A_1 + 3I_{b2}^2 A_0(A_1^2 + A_0A_2) + \\ + I_{b3}^3 A_1(A_1^2 + 6A_0A_2) + \\ + 3 \operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^4 A_2(A_1^2 + A_0A_2) + 3 \operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^5 A_1A_2^2 + \operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^6 A_2^3 \end{aligned} \tag{8.1.10}$$

Исходя из формулы Гамильтона—Келли

$$\underset{\sim}{b}^3 = I_{b1}\underset{\sim}{b}^2 - J_b \underset{\sim}{b} + \Delta_b \underset{\sim}{I}, \tag{8.1.11}$$

где

$$J_b = \frac{1}{2}(I_{b1}^2 - I_{b2}^2), \quad \Delta_b \equiv \det \underset{\sim}{b} = \frac{1}{6}(I_{b1}^3 - 3I_{b1}I_{b2}^2 + 2I_{b3}^3),$$

инварианты $\operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^n$ $(n = 4, 5, 6)$, входящие в (8.1.9), (8.1.10), выразим через I_{b1}, I_{b2}, I_{b3} [63]:

$$\begin{cases} 6 \operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^4 = I_{b1}^4 - 6I_{b1}^2 I_{b2}^2 + 8I_{b1}I_{b3}^3 + 3I_{b2}^4 \\ 6 \operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^5 = I_{b1}^5 - 5I_{b1}^3 I_{b2}^2 + 5I_{b1}^2 I_{b3}^3 + 5I_{b2}^2 I_{b3}^3 \\ 12 \operatorname{tr} \underset{\sim}{b}^6 = I_{b1}^6 - 3I_{b1}^4 I_{b2}^2 + 4I_{b1}^3 I_{b3}^3 - 9I_{b1}^2 I_{b2}^4 + \\ \quad + 12I_{b1}I_{b2}^2 I_{b3}^3 + 3I_{b2}^6 + 4I_{b3}^6 \end{cases} \tag{8.1.12}$$

С учётом (8.1.12) соотношения (8.1.8) - (8.1.10) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно I_{b1}, I_{b2}, I_{b3}. Решая её, найдём

$$I_{b1} = I_{b1}(I_{a1}, I_{a2}, I_{a3})\,,\ I_{b2} = I_{b2}(I_{a1}, I_{a2}, I_{a3})\,,\ I_{b3} = I_{b3}(I_{a1}, I_{a2}, I_{a3}) \tag{8.1.13}$$

Таким образом, обратная к (8.1.5) тензор-функция имеет вид

$$\underset{\sim}{b} = B_0\underset{\sim}{I} + B_1\underset{\sim}{a} + B_2\underset{\sim}{a}^2\,, \tag{8.1.14}$$

где скалярные функции B_0, B_1, B_2 инвариантов I_{a1}, I_{a2}, I_{a3} (8.1.7) находятся после подстановки (8.1.5) в (8.1.14):

$$\begin{cases} B_0 = \dfrac{1}{K_b}[A_0A_1^2 + A_0^2A_2 + 2I_{b1}A_0A_1A_2 + \\ \qquad + (I_{b1}^2 - J_b)A_0A_2^2 - 2\Delta_bA_1A_2^2 - I_{b1}\Delta_bA_2^3] \\ B_1 = -\dfrac{1}{K_b}[2A_0A_2 + A_1^2 + 2I_{b1}A_1A_2 + (I_{b1}^2 - J_b)A_2^2] \\ B_2 = \dfrac{A_2}{K_b}\,, \end{cases} \tag{8.1.15}$$

причём

$$K_b = -A_1^3 - 2I_{b1}A_1^2A_2 - (I_{b1}^2 + J_b)A_1A_2^2 + (\Delta_b - I_{b1}J_b)A_2^3$$

В соотношениях (8.1.15) следует принять во внимание известную связь (8.1.13).

8.1.3. Потенциальные тензорные функции

Наличие скалярного потенциала $W(I_{b1}, I_{b2}, I_{b3})$ такого, что $\underset{\sim}{a} = \partial W/\partial\underset{\sim}{b}$, накладывает три ограничения на функции A_0, A_1, A_2

$$\frac{\partial A_0}{\partial I_{b2}} = I_{b2}\frac{\partial A_1}{\partial I_{b1}}\,, \quad \frac{\partial A_0}{\partial I_{b3}} = I_{b3}^2\frac{\partial A_2}{\partial I_{b1}}\,, \quad I_{b2}\frac{\partial A_1}{\partial I_{b3}} = I_{b3}^2\frac{\partial A_2}{\partial I_{b2}} \tag{8.1.16}$$

Пусть теперь тензоры $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ являются девиаторами, т. е. $I_{a1} = 0$ и $I_{b1} = 0$. Тогда с учётом (8.1.8) $A_0 = -I_{b2}^2A_2/3$ и общий вид нелинейной изотропной тензор-функции, связывающей два симметричных девиатора, таков [153, 155, 209]

$$\underset{\sim}{a} = A_1(0, I_{b2}, I_{b3})\underset{\sim}{b} + A_2(0, I_{b2}, I_{b3})\left(\underset{\sim}{b}^2 - \frac{1}{3}I_{b2}^2\underset{\sim}{I}\right) \tag{8.1.17}$$

Вместо (8.1.9), (8.1.10) имеем

$$I_{a2}^2 = I_{b2}^2A_1^2 + 2I_{b3}^3A_1A_2 + \frac{1}{6}I_{b2}^4A_2^2 \tag{8.1.18}$$

$$I_{a3}^3 = I_{b3}^3A_1^3 + \frac{1}{2}I_{b2}^4A_1^2A_2 + \frac{1}{2}I_{b2}^2I_{b3}^3A_1A_2^2 - \frac{1}{36}I_{b2}^6A_2^3 + \frac{1}{3}I_{b3}^6A_2^3 \tag{8.1.19}$$

Соотношения (8.1.18), (8.1.19) являются системой двух алгебраических уравнений относительно I_{b2}, I_{b3}. Зная функции A_1, A_2 и решая эту систему, найдём аналогично (8.1.13)

$$I_{b2} = I_{b2}(I_{a2}, I_{a3}), \quad I_{b3} = I_{b3}(I_{a2}, I_{a3}) \tag{8.1.20}$$

Обратная к (8.1.17) тензор-функция записывается в форме

$$\underset{\sim}{b} = B_1(0, I_{a2}, I_{a3})\underset{\sim}{a} + B_2(0, I_{a2}, I_{a3})\left(\underset{\sim}{a}^2 - \frac{1}{3}I_{a2}^2\underset{\sim}{I}\right) \tag{8.1.21}$$

причём функции B_1 и B_2 определяются из (8.1.15) ($B_0 = -I_{a2}^2 B_2/3$):

$$B_1 = \frac{-6A_1^2 + I_{b2}^2 A_2^2}{-6A_1^3 + 3I_{b2}^2 A_1 A_2^2 + 2I_{b3}^3 A_2^3}, \; B_2 = \frac{6A_2}{-6A_1^3 + 3I_{b2}^2 A_1 A_2^2 + 2I_{b3}^3 A_2^3} \tag{8.1.22}$$

Первые два условия потенциальности $\underset{\sim}{a}$ (8.1.16) преобразуются к виду

$$3\frac{\partial A_1}{\partial I_{b1}} + I_{b2}\frac{\partial A_2}{\partial I_{b2}} + 2A_2 = 0, \quad 3I_{b3}^3\frac{\partial A_2}{\partial I_{b1}} + I_{b2}^3\frac{\partial A_2}{\partial I_{b3}} = 0, \tag{8.1.23}$$

а третье остаётся без изменений. В соотношения (8.1.23) входят частные производные по I_{b1}, которые взяты при $I_{b1} = 0$. Эти частные производные не обязаны быть равными нулю.

8.2. Нелинейные упруго-вязкопластические модели

В теории определяющих соотношений нет чёткого деления сред на «твёрдые тела», «жидкости» и «газы», как это делается, например, в физике на основании аморфного состояния вещества. Если используется лагранжев подход и кинематика деформирования описывается вектором перемещения и тензором деформаций, то говорят о твёрдом теле. Если же используется эйлеров подход и кинематика характеризуется вектором скорости и тензором скоростей деформаций, то речь идёт о жидкости или газе. Последние же различаются между собой только тем, что в жидкости сжимаемостью можно пренебречь [166].

8.2.1. Материальные функции определяющих соотношений

Тензорные (векторные) определяющие соотношения в МСС имеют вид подобный (8.1.5), (8.1.14), а для несжимаемых жидкостей — (8.1.17), (8.1.21). В последнем случае $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ имеют смысл девиатора напряжений $\underset{\sim}{s}$ и тензора скоростей деформаций $\underset{\sim}{v}$, совпадающего со своим девиатором в силу несжимаемости.

Определение 8.2. Инварианты I_{a2} и I_{b2} называются *интенсивностями напряжений* $\sigma_и = \|\underset{\sim}{s}\|$ *и скоростей деформаций* $v_и = \|\underset{\sim}{v}\|$, а $I_{a3} = I_{s3}$ и $I_{b3} = I_{v3}$ — *кубическими инвариантами напряжений и скоростей деформаций.*

Определение 8.3. Функции $A_1(0, v_{\text{и}}, I_{v3})$, $A_2(0, v_{\text{и}}, I_{v3})$ и связанные с ними соотношениями (8.1.22) $B_1(0, \sigma_{\text{и}}, I_{s3})$, $B_2(0, \sigma_{\text{и}}, I_{s3})$ носят название *материальных функций определяющих соотношений* (8.1.17), (8.1.21).

Определение 8.4. Связи (8.1.18) и (8.1.19) инвариантов тензоров $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$, записываемые в виде

$$\sigma_{\text{и}}^2 = v_{\text{и}}^2 A_1^2 + 2I_{v3}^3 A_1 A_2 + \frac{1}{6} v_{\text{и}}^4 A_2^2 \tag{8.2.1}$$

$$I_{s3}^3 = I_{v3}^3 A_1^3 + \frac{1}{2} v_{\text{и}}^4 A_1^2 A_2 + \frac{1}{2} v_{\text{и}}^2 I_{v3}^3 A_1 A_2^2 - \frac{1}{36} v_{\text{и}}^6 A_2^3 + \frac{1}{3} I_{v3}^6 A_2^3, \tag{8.2.2}$$

носят название *скалярных определяющих соотношений* среды.

8.2.2. Представление материальных функций в виде кратных степенных рядов

Наложим следующее физически естественное требование на материальные функции A_1, A_2: они должны быть такими, чтобы из (8.2.1) следовало

$$\|\underset{\sim}{v}\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \|\underset{\sim}{s}\| < \infty \tag{8.2.3}$$

С учётом (8.2.3) A_1 можно представить в виде ряда

$$A_1(0, v_{\text{и}}, I_{v3}) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(I_{v3}) v_{\text{и}}^n, \tag{8.2.4}$$

Тогда третье условие потенциальности (8.1.16) даёт выражение для A_2:

$$A_2(0, v_{\text{и}}, I_{v3}) = \frac{1}{I_{v3}^2} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a_n'(I_{v3})}{n+2} v_{\text{и}}^{n+2} + f(I_{v3}), \tag{8.2.5}$$

где $f(I_{v3})$ — произвольная функция, которую без ограничения общности положим равной нулю. Общее представление материальных функций в форме кратных степенных рядов по инвариантам содержится в монографии [179]. В [283] также идёт речь об потенциале изотропной тензор-функции как полиноме от инвариантов аргумента этой функции.

Подставляя ряды (8.2.4), (8.2.5) в (8.2.1), получим

$$\begin{gathered} \sigma_{\text{и}}^2 = \left(\sum_{n=-1}^{\infty} a_n v_{\text{и}}^{n+1} \right)^2 + 2I_{v3} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} a_n v_{\text{и}}^{n+1} \right) \left(\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a_n'}{n+2} v_{\text{и}}^{n+1} \right) + \\ + \frac{v_{\text{и}}^6}{6 I_{v3}^4} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a_n'}{n+2} v_{\text{и}}^{n+1} \right)^2 \end{gathered} \tag{8.2.6}$$

Выясним характер зависимости коэффициентов a_n $(n \geqslant -1)$ от I_{v3}. Рассмотрим кинематический процесс двумерного растяжения–сжатия пространства $\mathbb{R}^3$, для которого скорости деформации в главных осях имеют вид $v_{\alpha\alpha} = -v_{\beta\beta} = c \neq 0$, $v_{\gamma\gamma} = 0$, а инвариатны $v_и$ и I_{v3} равны $\sqrt{2}|c|$ и нулю соответственно. Так как $0 < v_и < \infty$, то согласно требованию (8.2.3) $\sigma_и < \infty$ и, следовательно, в выражении (8.2.6) все слагаемые должны быть конечны. Но третье слагаемое будет конечным, если

$$\lim_{I_{v3}\to 0} \left| \frac{a_n'(I_{v3})}{I_{v3}^2} \right| < \infty, \quad n \geqslant -1, \tag{8.2.7}$$

т. е. либо a_n вообще не зависит от I_{v3}, либо $a_n(I_{v3}) = O(I_{v3}^{3+\varepsilon})$ $(\varepsilon \geqslant 0)$ по базе $I_{v3} \to 0$.

Устремим теперь в скалярном определяющем соотношении (8.2.6) $v_и$, а тем самым и I_{v3} к нулю. Нетрудно показать [47], что $v_и \geqslant \sqrt[6]{6}\,|I_{v3}|$ или $v_и^3 \geqslant 3\sqrt{6}|\Delta_v|$, причём равенство реализуется в случае $v_{\alpha\alpha} = -2v_{\beta\beta} = -2v_{\gamma\gamma}$. Поэтому два последних слагаемых в (8.2.6) стремятся к нулю при $v_и \to 0$, предел же первого слагаемого зависит от коэффициента $a_{-1}(I_{v3})$.

8.2.3. Классификация несжимаемых сплошных сред (жидкостей)

Определение 8.5 (терминология). Общепринята следующая классификация несжимаемых сплошных сред (жидкостей):

а) если a_{-1} постоянно и равно σ_s, то $\lim \sigma_и = \sigma_s$ и среда называется вязкопластической с пределом текучести σ_s;

б) если $a_{-1} \equiv 0$ или $a_{-1} = O(I_{v3}^{3+\varepsilon})$, то $\lim \sigma_и = 0$ и среда называется вязкой;

в) если ни один из коэффициентов a_n не зависит от I_{v3}, то среда называется тензорно линейной или квазилинейной, для неё $A_2 = 0$ и $\underset{\sim}{s} = A_1(v_и)\underset{\sim}{v}$; при этом, если $a_{-1} \equiv \sigma_s$, $a_0 \equiv 2\mu$, $a_n \equiv 0$ $(n \geqslant 1)$, то имеем среду Бингама–Ильюшина с динамической вязкостью μ и пределом текучести σ_s; если же $a_0 \equiv 2\mu$, $a_n \equiv 0$ $(n = -1, 1, 2, 3, \ldots)$, то имеем ньютоновскую жидкость с вязкостью μ;

г) если хотя бы один из коэффициентов a_n зависит от I_{v3}, то среда называется тензорно нелинейной.

Из всех перечисленных видов сред физически линейной (или линейной и в тензорном и в скалярном смыслах) является лишь ньютоновская жидкость, для которой $\underset{\sim}{s} = 2\mu\underset{\sim}{v}$. Обратные определяющие соотношения, связывающие тензоры $\underset{\sim}{v}$ и $\underset{\sim}{s}$, следуют из (8.1.21), (8.1.22), куда надо подставить выражения материальных функций в виде рядов (8.2.4), (8.2.5).

8.2.4. Тензорно нелинейные упругие среды

Обратимся вновь к тензор-функции (8.1.5) и обратной к ней функции (8.1.14) и рассмотрим в качестве $\underset{\sim}{a}$ тензор напряжений Коши $\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_{ij}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j$, а в качестве $\underset{\sim}{b}$ тензор малых деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j$. Тогда соотношения

$$\underset{\sim}{\sigma} = C_0\underset{\sim}{I} + C_1\underset{\sim}{\varepsilon} + C_2\underset{\sim}{\varepsilon}^2 \tag{8.2.8}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = D_0\underset{\sim}{I} + D_1\underset{\sim}{\sigma} + D_2\underset{\sim}{\sigma}^2 \tag{8.2.9}$$

являются определяющими соотношениями изотропной тензорно нелинейной упругой среды [63, 132, 248, 252]. Кристаллическая структура твёрдых, в частности, упругих тел такова, что в отличие от жидкостей эффектом сжимаемости пренебречь нельзя. Поэтому (8.2.8), (8.2.9) связывают между собой не девиаторы, а сами тензоры $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{\varepsilon}$.

Материальные функции C_0, C_1 и C_2 определяющих соотношений (8.2.8) зависят от инвариантов тензора $\underset{\sim}{\varepsilon}$, в качестве которых обычно выбираются дилатация $\theta = I_{\varepsilon 1}$, интенсивность деформаций $\varepsilon_{\text{и}} = \sqrt{I_{\varepsilon 2}^2 - I_{\varepsilon 1}^2/3} \equiv I_{e2} = \|\underset{\sim}{e}\|$, где $\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{\varepsilon} - \theta\underset{\sim}{I}/3$ — девиатор тензора деформаций, и кубический инвариант $I_{\varepsilon 3}$. Материальные функции D_0, D_1 и D_2 определяющих соотношений (8.2.9) зависят от инвариантов тензора $\underset{\sim}{\sigma}$, в качестве которых выберем среднее гидростатическое напряжение $\sigma = I_{\sigma 1}/3$, интенсивность напряжений $\sigma_{\text{и}} = \sqrt{I_{\sigma 2}^2 - I_{\sigma 1}^2/3} \equiv I_{s2} = \|\underset{\sim}{s}\|$, о которой уже шла речь в определении 8.2, и кубический инвариант $I_{\sigma 3}$, вычисляемый согласно (8.1.6).

Тогда условия потенциальности (8.1.16) тензор-функций (8.2.8), (8.2.9) имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial C_0}{\partial \varepsilon_{\text{и}}} = \varepsilon_{\text{и}}\frac{\partial C_1}{\partial \theta} - \frac{\theta}{3}\frac{\partial C_1}{\partial \varepsilon_{\text{и}}}, \quad \frac{\partial C_0}{\partial I_{\varepsilon 3}} = I_{\varepsilon 3}^2\left(\frac{\partial C_2}{\partial \theta} - \frac{\theta}{3\varepsilon_{\text{и}}}\frac{\partial C_2}{\partial \varepsilon_{\text{и}}}\right), \\ \varepsilon_{\text{и}}\frac{\partial C_1}{\partial I_{\varepsilon 3}} = I_{\varepsilon 3}^2\frac{\partial C_2}{\partial \varepsilon_{\text{и}}}\end{gathered} \tag{8.2.10}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial D_0}{\partial \sigma_{\text{и}}} = \frac{\sigma_{\text{и}}}{3}\frac{\partial D_1}{\partial \sigma} - \sigma\frac{\partial D_1}{\partial \sigma_{\text{и}}}, \quad \frac{\partial D_0}{\partial I_{\sigma 3}} = I_{\sigma 3}^2\left(\frac{1}{3}\frac{\partial D_2}{\partial \sigma} - \frac{\sigma}{\sigma_{\text{и}}}\frac{\partial D_2}{\partial \sigma_{\text{и}}}\right), \\ \sigma_{\text{и}}\frac{\partial D_1}{\partial I_{\sigma 3}} = I_{\sigma 3}^2\frac{\partial D_2}{\partial \sigma_{\text{и}}}\end{gathered} \tag{8.2.11}$$

Тензорная линейность или квазилинейность упругой среды имеет место, если $C_2 = 0$ и $D_2 = 0$. Эти требования равносильны в силу третьего равенства системы (8.1.15). Тогда материальные функции C_0 и C_1 не зависят от $I_{\varepsilon 3}$ и связаны первым равенством (8.2.10), а D_0 и D_1 не зависят от $I_{\sigma 3}$ и связаны первым равенством (8.2.11). Случай тензорной линейности носит также название соосности тензоров напряжений и деформаций. В [139, 140] показано, что в этом случае в главных осях напряжения выражаются через деформации и обратно с помощью линейных соотношений, коэффициенты которых суть функции сме-

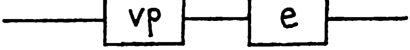


Рис. 8.1. Последовательное соединение упругого и вязкопластического элементов (аналог тела Максвелла)

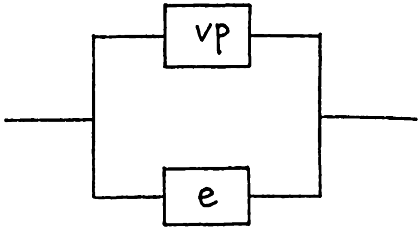


Рис. 8.2. Параллельное соединение упругого и вязкопластического элементов (аналог тела Фойгта)

шанных инвариантов [155], а именно, обобщённых модулей объёмного сжатия и сдвига и фазы подобия девиаторов.

Физическая линейность (как и ранее, это линейность и в тензорном и в скалярном смыслах или операторная линейность) означает, что

$$C_0(\theta, \varepsilon_и) = \lambda\theta, \quad C_1(\theta, \varepsilon_и) \equiv 2\mu, \tag{8.2.12}$$

где λ и μ — постоянные Ламе упругого материала. Аналогично

$$D_0(\sigma, \sigma_и) = -\frac{3\nu\sigma}{E}, \quad D_1(\sigma, \sigma_и) \equiv \frac{1+\nu}{E}, \tag{8.2.13}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Постоянные Ламе λ, μ взаимосвязаны с техническими постоянными E, ν (эту связь можно установить и из общих формул (8.1.15)):

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

В [271, 322] утверждение о том, что изотропный тензор четвёртого ранга со всеми классическими видами симметрии (8.1.2) имеет две независимые константы λ и μ естественно обобщается на случай n-мерного пространства.

8.2.5. Тензорно нелинейные упруго-вязкопластические среды

Будем помечать верхними индексами «*vp*» и «*e*» параметры вязкопластической и упругой сред, о которых шла речь в этом параграфе. Выпишем определяющие соотношения (8.1.17), (8.1.21), (8.2.8), (8.2.9) этих сред в координатах

$$\sigma_{ij}^{vp} = \sigma^{vp}\delta_{ij} + A_1 v_{ij}^{vp} + A_2\left(v_{ik}^{vp}v_{kj}^{vp} - \frac{1}{3}(v_и^{vp})^2\delta_{ij}\right) \tag{8.2.14}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}^{vp}_{ij} &= v^{vp}_{ij} = B_1(\sigma^{vp}_{ij} - \sigma^{vp}\delta_{ij}) + \\
&+ B_2\left((\sigma^{vp}_{ik} - \sigma^{vp}\delta_{ik})(\sigma^{vp}_{kj} - \sigma^{vp}\delta_{kj}) - \tfrac{1}{3}(\sigma^{vp}_{\text{и}})^2\delta_{ij}\right)
\end{aligned} \tag{8.2.15}
$$

$$
\sigma^e_{ij} = C_0\delta_{ij} + C_1\varepsilon^e_{ij} + C_2\varepsilon^e_{ik}\varepsilon^e_{kj} \tag{8.2.16}
$$

$$
\varepsilon^e_{ij} = D_0\delta_{ij} + D_1\sigma^e_{ij} + D_2\sigma^e_{ik}\sigma^e_{kj} \tag{8.2.17}
$$

причём $A_\alpha = A_\alpha(0, v^{vp}_{\text{и}}, I^{vp}_{v3})$, $B_\alpha = B_\alpha(0, \sigma^{vp}_{\text{и}}, I^{vp}_{s3})$, $C_\alpha = C_\alpha(\theta^e, \varepsilon^e_{\text{и}}, I^e_{\varepsilon 3})$, $D_\alpha = D_\alpha(\sigma^e, \sigma^e_{\text{и}}, I^e_{\sigma 3})$.

Разные комбинации вязкопластической (8.2.14) и упругой (8.2.16) моделей позволяют получить целый набор упруго-вязкопластических сред так же, как это делается в теории вязкоупругости на основе упругого и вязкого элементов («пружины» и «поршня») [94]. Последовательное соединение (рис. 8.1), аналог которого в теории вязкоупругости называется телом Максвелла, описывают следующие структурные соотношения

$$
\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{\sigma}^{vp}, \underset{\sim}{\sigma}^e) = \underset{\sim}{v}^{vp}(\underset{\sim}{\sigma}^{vp}) + \underset{\sim}{v}^e(\underset{\sim}{\sigma}^e), \quad \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^{vp} = \underset{\sim}{\sigma}^e \tag{8.2.18}
$$

При таком соединении тело, будучи пластически несжимаемым, может быть упруго сжимаемым, т. е. величина ε^e_{ii} в (8.2.17), а следовательно, и v^e_{ii} могут быть отличны от нуля.

Параллельное соединение (рис. 8.2) или аналог тела Фойгта характеризуется структурными соотношениями

$$
\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{v}^{vp}, \underset{\sim}{v}^e) = \underset{\sim}{\sigma}^{vp}(\underset{\sim}{v}^{vp}) + \underset{\sim}{\sigma}^e(\underset{\sim}{v}^e), \quad \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}^{vp} = \underset{\sim}{v}^e \tag{8.2.19}
$$

Эти соотношения таковы, что $\operatorname{tr}\underset{\sim}{v}^{vp} = \operatorname{tr}\underset{\sim}{v}^e = 0$, т. е. тело как пластически так и упруго несжимаемо. Для физически линейной упругой среды при положительном модуле Юнга E это означает, что $\nu = 1/2$, $\lambda = \infty$ и

$$
C_0 = \lim_{\theta\to 0} \lambda\theta \equiv \widetilde{C}_0, \quad C_1 = \frac{2E}{3}, \quad D_0 = -\frac{3\sigma}{2E}, \quad D_1 = \frac{3}{2E}, \tag{8.2.20}
$$

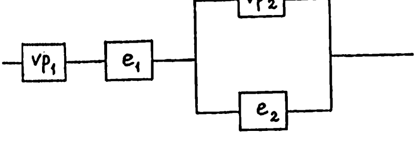


Рис. 8.3. Последовательное соединение аналогов тела Максвелла и тела Фойгта

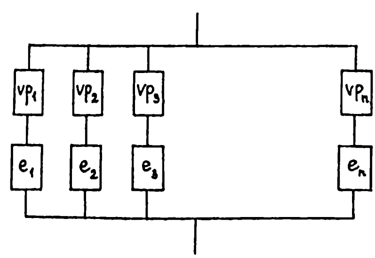


Рис. 8.4. Параллельное соединение n аналогов тела Максвелла

причём $\widetilde{C}_0$ — новая неизвестная функция.

Комбинации тел Максвелла и Фойгта — модели из трёх, четырёх и т. д. элементов (рис. 8.3, 8.4) — приводят к более сложным структурным связям тензоров $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{v}$. Вязкоупругие аналоги таких структур достаточно полно собраны в [183].

Функции $\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{\sigma}^{vp}, \underset{\sim}{\sigma}^{e})$ и $\underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{v}^{vp}, \underset{\sim}{v}^{e})$ в (8.2.18) и (8.2.19) представляют собой тензор-функции двух формально независимых тензорных аргументов. Теория нелинейных анизотропных тензор-функций от нескольких аргументов применительно к теории определяющих соотношений МСС существенно развита в [130, 131]. В [273] дано представление изотропной вектор-функции, зависящей от произвольного числа векторов, а также симметричных и антисимметричных тензоров второго ранга, через инварианты аргументов.

8.3. Совместное растяжение и сдвиг

Выберем для определённости модель (8.2.18), где упругий и вязкопластический элемент соединены последовательно (рис. 8.1). Определяющие соотношения для такой среды можно записать на основании (8.2.15), (8.2.17)

$$v_{ij} = (D_0\delta_{ij} + D_1\sigma_{ij} + D_2\sigma_{ik}\sigma_{kj})^{\cdot} + B_1 s_{ij} + B_2\left(s_{ik}s_{kj} - \frac{1}{3}\sigma_{\text{и}}^2\delta_{ij}\right) \qquad (8.3.1)$$

8.3.1. Трёхосное растяжение—сжатие

Исследуем деформации, возникающие в теле с соотношениями (8.3.1) при некоторых стандартных пространственных напряжённых состояниях. Одним из таких состояний является трёхосное растяжение—сжатие (рис. 8.5)

$$\sigma_{\alpha\alpha} = Q_\alpha(t)\,, \quad s_{\alpha\alpha} = \frac{1}{3}(2Q_\alpha - Q_\beta - Q_\gamma)\,, \quad \sigma_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} = 0\,, \qquad (8.3.2)$$

где $\{\alpha;\beta;\gamma\} = \{(1;2;3),(2;3;1),(3;1;2)\}$. Инварианты поля напряжений (8.3.2) следующие

$$\begin{aligned}
&\sigma = \tfrac{1}{3}(Q_1 + Q_2 + Q_3)\,, \quad I_{\sigma 2}^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2\,, \quad I_{\sigma 3}^3 = Q_1^3 + Q_2^3 + Q_3^3\\
&\sigma_{\text{и}}^2 = \tfrac{2}{3}(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 - Q_1Q_2 - Q_2Q_3 - Q_3Q_1)\\
&I_{s3}^3 = \tfrac{1}{9}[2Q_1^3 + 2Q_2^3 + 2Q_3^3 - 3Q_1Q_2(Q_1+Q_2) - 3Q_2Q_3(Q_2+Q_3) -\\
&\qquad -3Q_3Q_1(Q_3+Q_1) + 12Q_1Q_2Q_3]
\end{aligned} \qquad (8.3.3)$$

Подставляя (8.3.2) в (8.3.1), получим выражения для диагональных компонент скоростей деформаций

$$v_{ii} = [3D_0 + D_1(Q_1 + Q_2 + Q_3) + D_2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)]^{\cdot} \neq 0 \qquad (8.3.4)$$

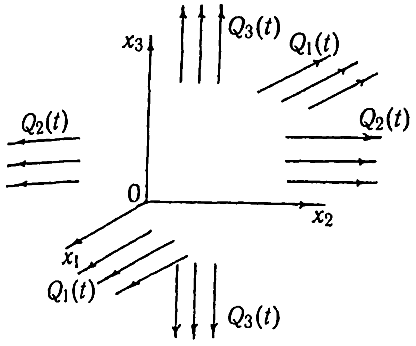


Рис. 8.5. Трёхосное растяжение–сжатие пространства

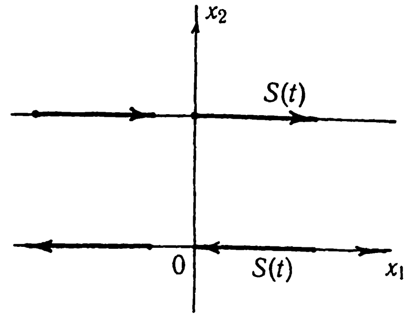


Рис. 8.6. Одномерный плоскопараллельный сдвиг в плоскости (x_1x_2)

$$\begin{aligned} v_{\alpha\alpha} &= (D_0 + D_1Q_\alpha + D_2Q_\alpha^2)^\cdot + \tfrac{B_1}{3}(2Q_\alpha - Q_\beta - Q_\gamma) + \\ &+ \tfrac{B_2}{9}(2Q_\alpha^2 - Q_\beta^2 - Q_\gamma^2 - 2Q_\alpha Q_\beta - 2Q_\alpha Q_\gamma + 4Q_\beta Q_\gamma) \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

Недиагональные же компоненты $v_{\alpha\beta}$ равны нулю.

В частном случае $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q(t)$ имеет место всестороннее растяжение–сжатие (гидростатика). Для такого процесса $\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{0}$, $\sigma_{\text{н}} = I_{s3} = 0$, $\sigma = Q$, $I_{\sigma 2}^2 = 3Q^2$, $I_{\sigma 3}^3 = 3Q^3$ и

$$v_{\alpha\alpha} = (D_0 + D_1Q + D_2Q^2)^\cdot \qquad v_{ii} = 3(D_0 + D_1Q + D_2Q^2)^\cdot \tag{8.3.6}$$

Таким образом, при трёхосном, а, следовательно, и двухосном ($Q_\gamma = 0$) и одноосном ($Q_\beta = Q_\gamma = 0$) растяжении–сжатии (8.3.2) тензоры $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{v}$ ($\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{\varepsilon}$) соосны при любых тензор-функциях (8.2.15), (8.2.17). Качественных эффектов, связанных с тензорной нелинейностью определяющих соотношений, здесь, как видно, нет.

8.3.2. Одномерный плоскопараллельный сдвиг

Рассмотрим теперь одномерный плоскопараллельный сдвиг в плоскости (x_1x_2), при котором единственной отличной от нуля компонентой $\underset{\sim}{\sigma}$ будет σ_{12} (рис. 8.6):

$$\sigma_{12} = s_{12} = S(t) \tag{8.3.7}$$

Представлению произвольного симметричного девиатора как комбинации трёх чистых сдвигов (8.3.7) во взаимно ортогональных направлениях в пространстве посвящены работы последних лет [84, 99, 232].

Инварианты напряжённого состояния (8.3.7) следующие

$$\sigma_{\text{и}}^2 = 2S^2\,, \quad \sigma = I_{s3} = I_{\sigma 3} = 0 \tag{8.3.8}$$

Используя определяющие соотношения (8.3.1), найдём кинематику сдвига. Имеем

$$\begin{aligned} v_{12} &= (D_1 S)^{\cdot} + B_1 S\,, \quad v_{11} = v_{22} = (D_0 + D_2 S^2)^{\cdot} + \tfrac{1}{3} B_2 S^2 \\ v_{33} &= \dot{D}_0 - \tfrac{2}{3} B_2 S^2\,, \quad v_{ii} = 3\dot{D}_0 + 2(D_2 S^2)^{\cdot} \end{aligned} \tag{8.3.9}$$

По полю скоростей деформаций (8.3.9) подсчитаем и сами деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= D_1 S + \int\limits_0^t B_1 S\, d\tau\,, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = D_0 + D_2 S^2 + \tfrac{1}{3}\int\limits_0^t B_2 S^2\, d\tau \\ \varepsilon_{33} &= D_0 - \tfrac{2}{3}\int\limits_0^t B_2 S^2\, d\tau\,, \quad \theta = 3D_0 + 2D_2 S^2 \end{aligned} \tag{8.3.10}$$

Материальные функции D_α, B_α в данном случае зависят лишь от $S(t)$.

Сравнивая (8.3.9) или (8.3.10) с (8.3.7), можно заключить, что тензоры $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{v}$ ($\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{\varepsilon}$) несоосны, если только одновременно не выполняются равенства

$$D_0(0, \sqrt{2}|S|, 0) \equiv 0\,, \quad D_2(0, \sqrt{2}|S|, 0) \equiv 0\,, \quad B_2(0, \sqrt{2}|S|, 0) \equiv 0 \tag{8.3.11}$$

Последние два равенства в (8.3.11) говорят о тензорной линейности упруго-вязкопластической среды, а первое — ещё и о физической линейности (см. (8.2.13)). Если же (8.3.11) не выполняется, то в смысле кинематики чистого сдвига в плоскости $(x_1 x_2)$ не будет, что является качественным проявлением нелинейности тензор-функции (8.3.1).

Рассмотрим подробнее конкретный пример. Пусть у некоторого упруго-вязкопластического слоя (рис. 8.6) с определяющими соотношениями (8.3.1) $D_2 \equiv 0$, D_0 и D_1 имеют вид (8.2.13), а $B_2 \equiv B_2^\circ > 0$ — материальная константа, не зависящая от инвариантов напряжений. Зададим в (8.3.7) периодическую функцию $S(t)$: $S(t) = S_0 \sin\omega t$. Тогда исходя из формул (8.3.10)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{3} B_2^\circ S_0^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right) \tag{8.3.12}$$

и в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega$

$$\varepsilon_{11}(t_n) = \frac{\pi n B_2^\circ S_0^2}{3\omega} \tag{8.3.13}$$

При многоцикловом чисто сдвиговом процессе нагружения слоя (8.3.7) его толщина монотонно и неограниченно изменяется. Для предотвращения такого изменения, очевидно, надо прикладывать дополнительное сжимающее усилие вдоль оси x_1.

8.3.3. Эффекты совместного процесса нагружения

Исследуем поэтому процесс нагружения, являющийся совместным одноосным вдоль оси x_1 растяжением—сжатием и сдвигом в плоскости (x_1x_2) (рис. 8.7). Отличные от нуля компоненты тензора напряжений следующие

$$\sigma_{11} = Q(t)\,, \quad \sigma_{12} = S(t) \tag{8.3.14}$$

Выпишем инварианты напряжённого состояния (8.3.14)

$$\begin{gathered} \sigma = \tfrac{Q}{3}\,, \quad \sigma_{и}^2 = \tfrac{2}{3}Q^2 + 2S^2\,, \quad I_{\sigma 2}^2 = Q^2 + 2S^2 \\ I_{s3}^3 = \tfrac{2}{9}Q^3 + QS^2\,, \quad I_{\sigma 3}^3 = Q^3 + 3QS^2 \end{gathered} \tag{8.3.15}$$

и по формулам (8.3.1) подсчитаем кинематику процесса

$$\begin{aligned} v_{11} &= [D_0 + D_1Q + D_2(Q^2+S^2)]^{\cdot} + \tfrac{2}{3}B_1Q + \tfrac{1}{9}B_2(2Q^2+3S^2) \\ v_{22} &= (D_0 + D_2S^2)^{\cdot} - \tfrac{1}{3}B_1Q - \tfrac{1}{9}B_2(Q^2-3S^2) \\ v_{33} &= \dot{D}_0 - \tfrac{1}{3}B_1Q - \tfrac{1}{9}B_2(Q^2+6S^2) \\ v_{12} &= (D_1S + D_2QS)^{\cdot} + B_1S + \tfrac{1}{3}B_2QS \\ v_{ii} &= [3D_0 + D_1Q + D_2(Q^2+2S^2)]^{\cdot} \end{aligned} \tag{8.3.16}$$

Из (8.3.16) видно, что для того, чтобы при действии касательного напряжения $S(t)$ не возникало деформаций вдоль оси x_1, необходимо приложить осевое напряжение $Q(t)$, определяемое из дифференциального уравнения

$$[D_0 + D_1Q + D_2(Q^2+S^2)]^{\cdot} + \frac{2}{3}B_1Q + \frac{1}{9}B_2(2Q^2+3S^2) = 0 \tag{8.3.17}$$

Определяющие соотношения (8.3.1) выписаны для компонент тензоров в ортогональной декартовой системе координат. В силу их алгебраического характера такие же соотношения справедливы в любой ортогональной системе, в частности, в цилиндрической (r, φ, z). Здесь типичное проявление тензорной нелинейности заключается в том, что при создании крутящего момента вдоль оси z в пространстве, т. е. чистого сдвига в каждой плоскости (r, φ), осевые деформации вдоль оси z будут отличны от нуля [132]. Ещё одним свидетельством отсутствия

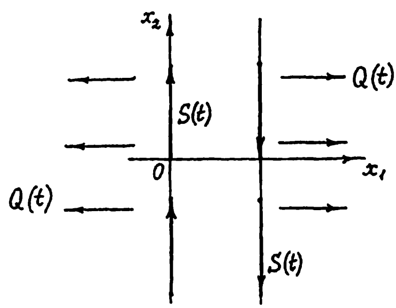


Рис. 8.7. Совместное одноосное вдоль оси x_1 растяжение—сжатие и сдвиг в плоскости x_1x_2

квазилинейности в соотношениях между напряжениями и деформациями является появление меридиональных деформаций в шаре, скручиваемом постоянным моментом. В результате этого шар превращается в эллипсоид вращения с малым эксцентриситетом.

8.3.4. Эффекты второго порядка. Эффекты Пойнтинга и Малышева (рэтчет)

Теоретические качественные эффекты, о которых шла речь ранее, находят многочисленные подтверждения в экспериментальной МСС [23, 24]. Впервые ещё в середине XIX века, проводя опыты с кручением металлических цилиндров, Г.Вертгейм (Вертхайм) обнаружил и измерил удлинение цилиндров. Им было проведено около шестидесяти таких опытов [336, 337], в них осуществлялись малые деформации сплошных и полых, стальных и латунных цилиндров кругового и эллиптического сечения. В начале XX века Дж.Пойнтинг также экспериментально наблюдал изменение длины и объёма скручиваемых стальных образцов, но уже при больших деформациях [311, 312]. Относительное удлинение образца приближённо пропорционально квадрату угла закручивания, а при фиксированном значении угла удлинение пропорционально квадрату радиуса. Пойнтингом же доказано, что удлинение образца и изменение его объёма не связано с изменением упругих постоянных E и ν.

Для явления возникновения деформаций в направлении перпендикулярном направлению чисто сдвиговых усилий К.Трусделл в 1952 году ввёл термин «эффект Пойнтинга». Ещё ранее в [262, 263] это же явление было отнесено к так называемым «эффектам второго порядка». Исследование кручения упругого цилиндра с нелинейными определяющими соотношениями и анализ на основе асимптотических методов эффектов второго порядка выполнены в [241].

В [15] эффект Пойнтинга качественно описан на основе предложенной программы экспериментальной конкретизации общего варианта соотношений, определяющих свойства изотропного упругого материала. Тензорная нелинейность здесь может проявляться также в виде дилатационных эффектов и отклонения свойств от частного постулата изотропии. Вывод о неприменимости в ряде случаев квазилинейной модели для изучения тонкого поведения упругих тел сделан и в [36]. В этой работе проведено сравнение результатов численного и асимптотического (с сохранением квадратичных относительно градиента перемещений слагаемых) решений для различных моделей нелинейной упругости. Обобщённые эффекты второго порядка в предварительно деформированных призматических стержнях обнаружены в [226].

Эффект Пойнтинга имеет место не только для изотропных тел. Так в случае больших деформаций для простого сдвига полулинейного трансверсально изотропного материала Джона он изучен в [220]. В [2] этот эффект описан для сплошного несжимаемого вязкоупругого цилиндра при больших деформациях.

Количественное выражение эффекта Пойнтинга для металлов, металлокерамики и эластомеров невелико: при углах закрутки метрового образца на $15 \div 20°$ осевая деформация составляет менее 1%. Тем не менее это явление именно в силу своей малости нашло применение при изготовлении прецизионной измерительной техники и в машиностроении, например, при монтаже и демонтаже прессовых соединений типа вал — втулка. Кроме того эффект Пойнтинга необходимо учитывать в эксперименте при нахождении материальных функций.

В 1958 году в работах Б.М.Малышева [137, 138] приведены результаты первых экспериментальных исследований по кручению различных образцов под действием крутящих моментов при непрерывном пластическом растяжении. В [138] испытания велись при нагружении, мало отличающемся от простого. В [137] описано поведение медных и латунных трубок при внезапном изменении малого крутящего момента в процессе непрерывного пластического растяжения. При некоторой осевой деформации момент внезапно прикладывался и снимался. Отмечено, что «... при таком явно сложном нагружении имели место различного рода аномалии в поведении образцов, дать объяснение которым пока не представляется возможным».

Данные аномалии свидетельствуют ещё об одном помимо эффекта Пойнтинга явлении, показывающем на тензорную нелинейность определяющих соотношений,— рэтчете (рэтчеттинге), хотя ему логично было бы дать название «эффект Малышева». Он заключается в гораздо более сильном изменении осевых деформаций при совместном растяжении и циклическом кручении (плоскопараллельном сдвиге) с ненулевым средним чем при отдельном растяжении без кручения (сдвига). Учёт тензорной нелинейности определяющих соотношений, как было показано ранее (см. кинематику (8.3.16) для соответствующего процесса), позволяет достаточно эффективно описать данное явление.

Рэтчету посвящено большое количество публикаций в периодических изданиях по механике деформируемого твёрдого тела и инженерных журналах, при этом число их с каждым годом растёт [225, 238, 247, 275, 289, 290, 292, 301]. Внимание уделяется как развитию экспериментальных исследований, описанию новых экспериментальных программ и обнаружению данного эффекта в новых материалах, так и попыткам построения универсальной феноменологической модели. Среди последних в настоящее время наиболее популярна кинематически упрочняющаяся модель, в которой возникновение рэтчета связывается с несимметричным изменением границы поверхности текучести.

8.4. Нелинейные вязкопластические модели

Основная причина использования в механике сплошной среды вязкопластической модели заключается в том, что эта модель совмещает в себе как свойства вязкой жидкости, так и твёрдого тела. Если напряжения, реализуемые в области, которая занята средой, достаточно малы и некоторая их скалярная характеристика не превышает критического значения, то материал ведёт себя как твёрдое тело (абсолютно жёсткое, упругое, вязкоупругое). Если же эти критические значения достигнуты, то поведение материала очень напоминает течение вязкой жидкости. При дальнейшем увеличении напряжений эта разница исчезает практически совсем. Отсюда следует, что модель вязкопластического тела удобна в том диапазоне внешних нагрузок, когда возникающие напряжения сравнимы с критическими или предельными.

8.4.1. Квазилинейные (тензорно линейные) среды

Следуя классификации несжимаемых жидкостей по виду определяющих соотношений, данной в разд. 8.2 (определение 8.5), квазилинейной называется среда, у которой девиатор напряжений $\underset{\sim}{s}$ и тензор скоростей деформаций $\underset{\sim}{v}$ связаны тензорно линейными определяющими соотношениями

$$\underset{\sim}{s} = A_1(v_и)\underset{\sim}{v}\,, \tag{8.4.1}$$

где материальная функция $A_1(v_и)$ зависит лишь от интенсивности скоростей деформации $v_и = \sqrt{\operatorname{tr}\underset{\sim}{v}^2}$ и не зависит от кубического инварианта $I_{v3} = \sqrt[3]{\operatorname{tr}\underset{\sim}{v}^3}$ тензора $\underset{\sim}{v}$. В терминах рядов это означает, что ни один из коэффициентов a_n ряда в правой части (8.2.4) не зависит от I_{v3}.

8.4.2. Вязкопластические среды. Среда Шведова — Бингама

Умножим тензорное равенство (8.4.1) само на себя и произведём полную свёртку. Тогда

$$\sigma_и = A_1(v_и)v_и\,, \tag{8.4.2}$$

что, конечно, следует и из (8.2.1) при $A_2 = 0$, или с учётом (8.2.4)

$$\sigma_и = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_и^{n+1}\,, \tag{8.4.3}$$

Предел при $v_и \to 0$ интенсивности $\sigma_и$ будет равным нулю либо положительным в зависимости от того, равен нулю или положителен коэффициент a_{-1} в разложении (8.2.4). Именно с этим связано отличие вязкопластического материала от несжимаемой вязкой жидкости. Как уже сказано в определении 8.5, в случае

$a_{-1} = \sigma_s > 0$ мы имеем вязкопластическую среду, причём величина σ_s, размерность которой совпадает с размерностью напряжения, называется пределом текучести.

Характерные графики зависимости (8.4.3) изображены на рис. 8.8. Из всего веера кривых выделим лучи а) и б). Луч а), соответствующий случаю

$$\sigma_и \equiv \sigma_s \,, \tag{8.4.4}$$

т. е. равенству нулю всех коэффициентов $a_0, a_1, a_2 \ldots$ определяет идеально пластическую среду с пределом текучести σ_s. В каждой точке такой среды независимо от степени деформирования компоненты девиатора напряжения $\underset{\sim}{s}$ связаны между собой алгебраическим соотношением (8.4.4), которое можно переписать в виде

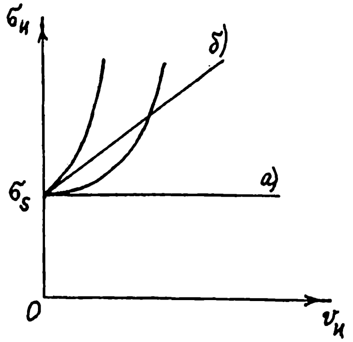


Рис. 8.8. Характерные графики зависимости (8.4.3)

$$s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2 = \sigma_s^2 \tag{8.4.5}$$

Частный случай $\sigma_s = 0$ приводит нас здесь к идеальной жидкости, в которой $s_{ij} \equiv 0$ и $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.

Луч б) на рис. 8.8 соответствует следующему выбору коэффициентов a_n: $a_0 = 2\mu > 0$, $a_1 = a_2 = \cdots = 0$, т. е. согласно (8.4.3)

$$\sigma_и = \sigma_s + 2\mu v_и \tag{8.4.6}$$

Коэффициент μ носит название динамической вязкости. Скалярное определяющее соотношение (8.4.6) называется соотношением Шведова–Бингама, а вязкопластическая среда с таким соотношением — средой Шведова–Бингама.

Часто из тех или иных соображений в качестве квадратичных инвариантов тензоров $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{v}$ выбирают не интенсивности, а другие скаляры, линейно связанные с ними. К их числу относятся максимальное касательное напряжение

$$T = \frac{\sigma_и}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}} \tag{8.4.7}$$

и максимальная скорость скольжения

$$U = \sqrt{2}v_и = \sqrt{2v_{ij}v_{ij}} \tag{8.4.8}$$

Вводя предел текучести при сдвиге τ_s:

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}\,, \tag{8.4.9}$$

соотношение (8.4.6) можно переписать в виде

$$T = \tau_s + \mu U \qquad (8.4.10)$$

Заметим, что случай $\sigma_s = 0$ приводит нас к ньютоновской жидкости с вязкостью μ.

Равенства (8.4.6) и (8.4.10) легко обратить

$$v_и = \frac{\sigma_и - \sigma_s}{2\mu} \quad \text{или} \quad U = \frac{T - \tau_s}{\mu} \qquad (8.4.11)$$

Поскольку инварианты $v_и$ и U неотрицательны и равны нулю только при отсутствии деформаций, а правые части в (8.4.11) могут принимать и отрицательные значения, встаёт вопрос об области применимости соотношений (8.4.6), (8.4.10), (8.4.11).

8.4.3. Жёсткие (упругие, вязкоупругие) зоны

Пусть в каждой точке x некоторой подобласти Ω_r тела Ω в момент времени t выполняется неравенство $\sigma_и(x, t) < \sigma_s$ или $T < \tau_s$. Тогда вместо (8.4.11) можно выбрать разные законы поведения в Ω_r. Перечислим некоторые из них.

а) Положим $v_и \equiv 0$ в Ω_r, тем самым делая срезку (рис. 8.9) и предполагая, что область Ω_r движется как абсолютно жёсткое тело (деформации отсутствуют независимо от напряжений $\sigma_и < \sigma_s$). Данная область в разных приложениях носит названия жёсткой зоны, стопорной зоны или ядра течения. Этот случай соответствует наиболее часто встречающейся в теории так называемой жёстко-вязкопластической модели. Именно её по умолчанию и называют вязкопластической.

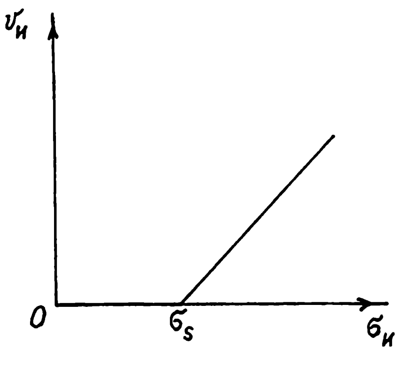


Рис. 8.9. График зависимости $v_и(\sigma_и)$ для среды Шведова—Бингама

б) Пусть, по-прежнему, $v_и \equiv 0$ в Ω_r, но область Ω_r ведёт себя как упругое тело со своими константами, никак не связанными с μ. Другими словами, скорости деформации зависят не только от напряжений, но и от скоростей напряжений. Тогда идёт речь об упруговязкопластической модели.

в) В данном случае, являющемся обобщением б), полагается, что в Ω_r материал ведёт себя вязкоупруго со своими функциями релаксации и ползучести [134].

Отметим сразу, что в начально-краевых задачах область Ω_r заранее не-известна и подлежит такому же определению, как и другие параметры (часто именно она и вызывает главный практический интерес). В этом заключается основное отличие постановок задач о вязкопластическом течении от постановок задач, например, для вязкой жидкости, где жёсткие зоны в принципе отсутствуют. С одной стороны, решение задачи в заранее неизвестной области гораздо сложнее и аналитически и в вычислительном аспекте, с другой, введение вязкопластической модели позволяет учитывать эффекты на границе фаз «твёрдое тело» — «жидкость».

Итак, определить среду Шведова–Бингама означает задать пару материальных констант $\{\sigma_s; \mu\}$ или $\{\tau_s; \mu\}$, а также выбрать закон поведения в подобласти, где $\sigma_{и} < \sigma_s$. Значения констант определяются с помощью установочных экспериментов. В качестве последних удобно взять такие, в которых реализуется одномерное напряжённое состояние, в частности, состояние чистого сдвига. В этом состоянии девиатор напряжений $\underset{\sim}{s}$ и тензор скоростей деформации $\underset{\sim}{v}$ имеют лишь одну отличную от нуля компоненту $s_{\alpha\beta}$ и $v_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$ (например, s_{12}, v_{12} или $s_{r\theta}$, $v_{r\theta}$). Тогда формулы (8.4.6) и (8.4.10) сведутся к связи $s_{\alpha\beta}$ и $v_{\alpha\beta}$:

$$|s_{\alpha\beta}| = \tau_s + 2\mu|v_{\alpha\beta}| \tag{8.4.12}$$

8.4.4. Установочные эксперименты. Ротационные и капиллярные вискозиметры

Установочные эксперименты реализуются на вискозиметрических течениях, т. е. течениях, допускающих восстановление определяющих соотношений среды по экспериментальным данным. Соответствующие приборы называются вискозиметрами. Их условно можно разделить на две группы по виду течений, которые в них осуществляются, — ротационные и капиллярные [22].

Ротационные вискозиметры (рис. 8.10) состоят из двух абсолютно жёстких концентрических цилиндров либо конусов, между которыми заключена исследуемая среда. Цилиндры вращаются с разными угловыми скоростями, так что между ними реализуется течение Куэтта–Тейлора. Если зазор выбирается много меньше радиусов каждого из цилиндров, то данное течение становится близким к плоскому течению Куэтта. Задаётся закон вращения внешнего цилиндра $\omega_{внеш}$ и измеряется вращающий момент $M_{внутр}$, передаваемый через жидкость, на внутренний (либо наоборот). Затем из расчётных формул, представляющих собой точное решение задач Куэтта и Куэтта–Тейлора, по $\omega_{внеш}$ и $M_{внутр}$ вычисляются материальные константы (вязкость, предел текучести и др.).

Основную часть капиллярных вискозиметров (рис. 8.11) составляет цилиндрическая труба, длина которой много больше радиуса сечения, заполненная исследуемой средой. Осуществляя заданный перепад давления Δp на концах

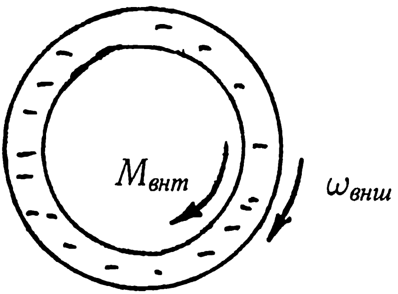


Рис. 8.10. Схема ротационного вискозиметра

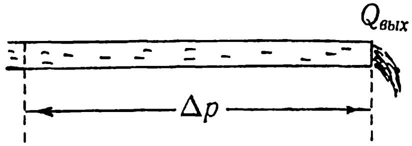


Рис. 8.11. Схема капиллярного вискозиметра

рабочего участка трубы, можно добиться течения близкого к стационарному течению Пуазейля, параметры которого хорошо известны. В выходном сечении трубы нетрудно замерить расход $Q_{\text{вых}}$, например, находя время заполнения сосуда с фиксированным объёмом. По данным Δp и $Q_{\text{вых}}$ из расчётных формул вычисляются константы, входящие в определяющие соотношения.

Часто вместо абсолютных определяют относительные характеристики. В капиллярных вискозиметрах измеряется время истечения из градуированных капилляров одинаковых больших объёмов данного вещества и воды. Отношение расходов пропорционально некоторой степени отношения вязкостей. Так, эмпирическая вязкость крови оказывается в 4,3–5,3 раз больше вязкости воды у мужчин и в 3,9–4,9 раз у женщин [121, 190].

Отметим также динамические эксперименты, проводимые на вискозиметрах, т. е. эксперименты, в которых существенна нестационарность режима течения. Здесь важен сам процесс перехода от одного стационарного режима к другому. По его числовым характеристикам опять же из известных решений восстанавливаются материальные константы. К подобным экспериментам можно отнести, например, следующие:

а) Внутренний цилиндр ротационного вискозиметра неподвижен, а внешний ссвершает колебательные движения с угловой скоростью $\omega_{\text{внеш}}(t) = \omega^0_{\text{внеш}} \sin kt$, периодически зависящей от времени. Тогда момент, передаваемый на внутренний цилиндр, также периодически зависит от t: $M_{\text{внутр}}(t) = M^0_{\text{внутр}} \sin(kt + \varphi)$. Изменение сдвига фаз φ при различных частотах k зависит от свойств среды и позволяет из обратных формул найти эти свойства.

б) Перепад давления в капиллярном вискозиметре периодически зависит от времени: $\Delta p = \Delta p^0 \sin kt$. Тогда расход через выходное сечение трубки также имеет периодический вид: $Q_{\text{вых}}(t) = Q^0_{\text{вых}} \sin(kt + \varphi)$, где сдвиг фаз φ опять же зависит от частоты перепада давления. По этой зависимости устанавливают константы, входящие в реологические соотношения материала. Динамические эксперименты осуществляются главным образом для вязкоупругих жидкостей и других сред с временны́ми эффектами.

в) В среде устанавливается резонансный механический элемент. Число его свободных колебаний, за которое амплитуда уменьшается в N раз (декремент затухания), пропорционально вязкости. Элемент калибруется по стандартным жидкостям (вода, глицерин).

8.5. Реология дисперсных систем и крови

Анализ поведения целого ряда коллоидных дисперсий, растворов, суспензий и взвесей, использующихся в промышленности и встречающихся в задачах гидрогеодинамики и геотектоники, показывает, что течение наступает только после достижения определённой нагрузки, а скорость течения зависит от вязкости среды. Это наводит на мысль использовать для моделирования таких сред реологическое соотношение, которое для сдвиговых процессов сводится к (8.4.12).

8.5.1. Нефтесодержащие смеси. Глинистые растворы

Говоря о типичных нефтесодержащих смесях, с которыми имеют дело в нефтяном промысле, приведём данные опытов, проведённых в капиллярном вискозиметре. Так, для нефтепесочной (с 40% содержанием нефти) и нефтецементной смесей, имеющих плотность $1,6 \div 1,7 \ \ 10^3$ кг/м^3, значения предела текучести и динамической вязкости равны 36 Н/м^2, 12,6 кг/(м · с) и 140 Н/м^2, 8 кг/(м · с) соответственно. Чем меньше содержание нефти, тем менее вязким становится раствор, а также снижается пороговое напряжение. Для чисто цементных растворов средние значения этих констант по более чем ста пробам цемента из различных мест равны 6 Н/м^2 и 0,38 кг/(м · с) [157]. При бурении глубоких нефтяных и газовых скважин на физико-механические свойства большое влияние оказывают внешние факторы — высокая температура и забойное давление. Кроме того многие проблемы бурения таких скважин могут быть успешно решены с использованием искусственных промывочных и синтетических материалов.

Неньютоновость многих нефтецементных и глинистых растворов объяснялась их некоторыми упругими свойствами, в частности, наличием упругого модуля сдвига. Это, по-видимому, относится ко всем так называемым структурированным системам, т. е. системам, где внутренняя структура на мезо- и микроуровне может существенно изменяться под действием приложенных внешних усилий. Структурообразование начинается при достаточно малом содержании дисперсной фазы. Так, например, в классических опытах П.А.Ребиндера [177] с глинистыми растворами, осуществлённых ещё в довоенное время, имели место лиофильно-сетчатые образования за счёт сцепления удлинённых частиц глины в углах и рёбрах, т. е. там, где происходит утончение плёнок дисперсионной среды. Поскольку поведение глинистых растворов имеет важное значение в практике бурения нефтяных и газовых скважин, данный эффект был подробно исследован. Для подобных лиофильных растворов оказалось характерным следующее явление, названное тиксотропией: после сильного механического перемешивания система становится жидкой, а после отстаивания вновь затвердевает.

Для структурированных тиксотропных систем имеются две характерные области внешних нагрузок [177]. При малых напряжениях сдвига данные системы обладают огромной динамической вязкостью, сравнимой с вязкостью земной коры, без заметного разрушения структуры. При напряжениях сдвига гораздо больших предельного имеется обычная ньютоновская вязкость, определяемая в вискозиметрах.

Таким образом, предельное напряжение сдвига — чрезвычайно важная материальная функция для глинистых и нефтесодержащих растворов, характеризующая прочность образовавшейся сетчатой структуры и способность вещества удерживать утяжелитель и выбуренную породу. Это, действительно, функция, а не материальная константа, поскольку зависит от многих внешних факторов: скорости деформации, шероховатости поверхности, действия высокой температуры и давления, процентного содержания воды в растворе. [157].

Измерения предельного напряжения, как и структурной вязкости, проводятся на приборах, основанных либо на капиллярном эффекте (проталкивание глинистого раствора через капиллярную трубку), либо на сдвиговом смещении пластинки в смеси (аппарат Вейлера–Ребиндера), либо на вращении раствора между коаксиальными цилиндрами.

8.5.2. Кровь в состояниях in vivo и in vitro. Плазма и эритроциты. Показатель гематокрита

Ещё одну сложнейшую природную среду, в разных аспектах являющуюся объектом изучения гидродинамики, биомеханики, биохимии и медицины, представляет собой кровь. Особенностью поведения, существенно отличающей её от других многофазных сред, взвесей, суспензий и растворов, можно назвать разницу в механических и биохимических свойствах в состояниях in vivo, т. е. при жизни организма, и in vitro, т. е. после его смерти. Построение определяющих соотношений крови и других биоматериалов, в материальные функции которых в качестве параметров входит «фактор жизни», представляет собой главную задачу биомеханики сплошных сред, которая в настоящий момент далека от своего разрешения.

Известно, что кровь состоит из достаточно однородной плазмы с плотностью около 10^3 кг/м^3 и чуть более тяжёлых форменных элементов с плотностью $1{,}1 \cdot 10^3$ кг/м^3, занимающих у взрослого человека около 46% всего объёма крови. К основным форменным элементам относятся эритроциты, лейкоциты и кровяные пластинки (тромбоциты). Число эритроцитов в 1 мм^3 крови достигает пяти миллионов и существенно превышает число других элементов (например, лейкоцитов в таком же объёме не более десяти тысяч), поэтому реологические свойства определяют концентрация и поведение именно эритроцитов.

Эритроциты представляют собой маленькие упругие мембранки, легко деформируемые и упруго формоизменяемые [18, 178, 213]. В связи с этим кровь проявляет эффекты, свойственные твёрдым телам, такие как, например, небольшая сжимаемость. В процессе движения по сосудам эритроциты могут оседать на стенки, а также сцепляться друг с другом, образуя при этом макроконгломераты или, как их называют, «монетные столбики». После длительного оседания в условиях гравитации или после центрифугирования в специальном приборе — гематокрите — кровь разделяется на две фракции. Относительный объём тяжёлой фракции — эритроцитов — называется показателем гематокрита H $(0 < H < 1)$ и является существенным фактором, определяющим вязкость крови.

8.5.3. Моделирование определяющих соотношений крови

Эксперименты на ротационных вискозиметрах показывают, что зависимость $s_{r\theta}(2v_{r\theta})$ хорошо аппроксимируется реологическим соотношением Шведова—Бингама (8.4.12). Типичный график этой зависимости для цельной крови здорового донора изображён на рис. 8.12 [244]. Расчёт вязкости μ по графику как тангенса угла наклона кривой к оси абсцисс показывает, что при $2v_{r\theta} < 2$ с$^{-1}$ вязкость составляет около $7 \quad 10^{-3}$ кг/(м·с). С ростом $v_{r\theta}$ кривая немного загибается вниз, что означает небольшое уменьшение μ. При довольно высоких скоростях сдвига $2v_{r\theta} \approx 100$ с$^{-1}$ вязкость практически постоянна и равна $4 \div 5 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с). Это значение называют асимптотической вязкостью.

Как уже отмечалось, параметр μ сильно зависит от показателя гематокрита H. Линейный диапазон этой зависимости имеет место лишь при $H < 0{,}01$ (рис. 8.13) [121]. Действительно, при низких H поведение крови хорошо описывается моделью ньютоновской жидкости, для которой справедливо уравнение Эйнштейна

$$\mu = \mu_0(1 + \alpha H), \tag{8.5.1}$$

где $\alpha = 2{,}5$ для суспензии, состоящей из сферических твёрдых частиц, $\alpha = 8$ в

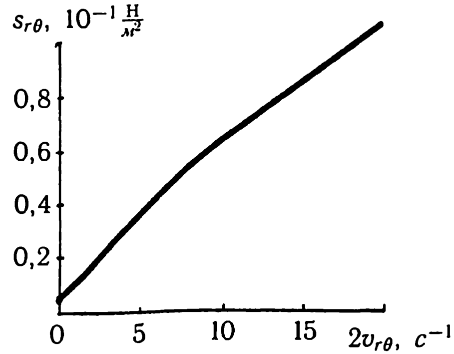


Рис. 8.12. Типичный график зависимости $s_{r\theta}(2v_{r\theta})$ для цельной крови

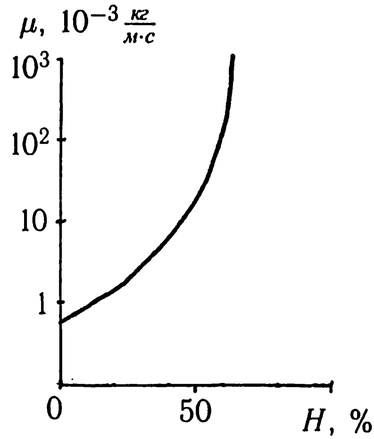


Рис. 8.13. График зависимости вязкости крови μ от показателя гематокрита H

случае, если твёрдые частицы являются сплюснутыми эллипсоидами вращения с отношением полуосей равным 0,1 [119].

С ростом H эритроциты взаимодействуют друг с другом, так что зависимость $\mu(H)$ становится существенно нелинейной. Некоторые эмпирические формулы, соответствующие степенной, дробно-рациональной и экспоненциальной связи μ и H, приведены ниже [240]

$$\begin{aligned}&\mu = \frac{\mu_0}{1-aH^{1/3}}, \quad \mu = \frac{\mu_0}{(1-bH)^{5/2}},\\ &\mu = \mu_0\frac{1+cH}{1-dH}, \quad \mu = \mu_0 e^{\alpha H} \quad (\alpha \approx 2,5)\end{aligned} \tag{8.5.2}$$

Для объединения в одном эмпирическом уравнении зависимости вязкости крови от показателя гематокрита и скорости сдвига коэффициенты a, b, c, d, α, входящие в (8.5.2), нужно считать функциями $v_{r\theta}$.

К числу других факторов, от которых зависит вязкость крови, следует отнести концентрацию белков в плазме, степень деформируемости эритроцитов, масштабно-временны́е эффекты и температуру T [121]. Так, при охлаждении крови с 37°C до 10°C асимптотическая вязкость возрастает в два раза. Данная зависимость описывается эмпирическим уравнением Аррениуса

$$\mu = \mu_0 \exp\frac{E}{RT}, \tag{8.5.3}$$

где R — газовая постоянная, E — энергия активации, которая для крови человека равна $5,15 \cdot 10^3$ Дж/кг при $H = 0,44$. Опыты в ротационном вискозиметре с коаксиальными цилиндрами подтверждают линейность зависимости $\ln(\mu/\mu_0)$ от $1/T$ [244].

8.5.4. Эритроцитные агрегаты и наличие предела текучести у крови

Как видно из рис. 8.12, график $s_{r\theta}(2v_{r\theta})$ начинается не в начале координат, а в некоторой точке с положительной абсциссой. Данный феноменологический факт можно интерпретировать как наличие у крови положительного предельного напряжения сдвига τ_s. Физический смысл этой величины состоит в том, что эритроциты, сцепляясь друг с другом в агрегаты, образуют непрерывную структуру и мешают развиваться течению при малых сдвиговых усилиях (малых перепадах давления в сосудах). В связи с этим следует ожидать чёткой зависимости величины τ_s от показателя гематокрита H. Действительно, ориентация и расположение отдельных агрегатов эритроцитов влияют на вовлечение их в структуру течения, но чем больше показатель H, тем больше количество вовлечённых агрегатов и, следовательно, больше τ_s.

Имеется определённая величина H_0 ($0,013 < H_0 < 0,065$ [121, 240]), ниже которой кровь можно считать не вязкопластическим материалом, а несжимаемой вязкой жидкостью с коэффициентом вязкости, определяемым уравнением (8.5.1). В диапазоне $H_0 < H < 0,5$ связь τ_s и H удовлетворительно отвечает квадратичному закону

$$\tau_s = a(H - H_0)^2, \tag{8.5.4}$$

а при $H > 0,5$ экспоненциальному

$$\tau_s = b\mathrm{e}^{-cH} \tag{8.5.5}$$

где a, b, c — некоторые эмпирические константы [338].

Один из экспериментальных методов измерения предела текучести крови связан с явлением оседания эритроцитных агрегатов в трубке с расширенным нижним концом. На некотором уровне расширения с диаметром d_0 данные агрегаты сами распадаются, после чего по величине d_0 подсчитывается τ_s [121]. Предельное напряжение сдвига невелико и по самым разным оценкам лежит в пределах от $5\cdot10^{-3}$ Н/м^2 до $5\cdot10^{-2}$ Н/м^2, но степень его влияния на кровоток в медицинском аспекте вследствие высокой чувствительности организма довольно значительна.

Концентрация эритроцитных агрегатов вблизи оси сосуда гораздо выше чем у его стенок. При показателе H меньшем 0,5 пристенный слой, где эритроцитов практически нет, а присутствует одна плазма, занимает от 0,5% до 5% диаметра сосуда, причём толщина пристенного слоя δ меняется со временем для режимов

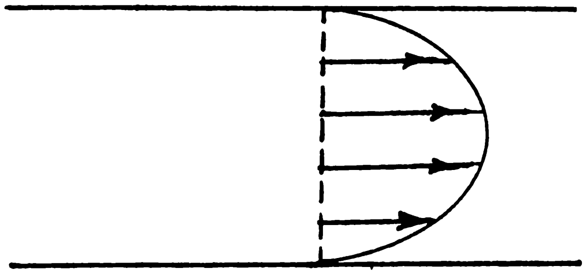


Рис. 8.14. Типичный профиль продольной скорости течения крови по сосуду

разгона, торможения и пульсирующих течений. Известна обратная зависимость δ от H [121]. Так, например, увеличение показателя H с 0,1 до 0,5 влечёт утоньшение пристенного слоя в два раза.

Средняя скорость эритроцитного ядра вокруг оси сосуда выше чем средняя скорость пристенной плазмы. Профиль продольной скорости по радиусу изображается графиком на рис. 8.14 типичном для вязкопластических течений в круглой трубе. В трубках диаметром $D = 6 \div 10 \cdot 10^{-6}$ м отношение этих скоростей приближённо равно 1,3, а при уменьшении диаметра стремится к единице. Данная разница приводит к тому, что время пребывания каждого эритроцита в сосуде меньше времени пребывания плазмы (эффект Фареуса). Поэтому можно говорить о кажущемся показателе гематокрита или динамическом гематокрите $H_{\text{дин}}$, отличающемся от статического $H_{\text{ст}}$:

$$H_{\text{дин}} = H_{\text{ст}} \left(1 - \frac{\delta}{D}\right) \tag{8.5.6}$$

Таким образом, самые общие экспериментальные данные о физико-механических характеристиках крови не противоречат использованию в качестве реологической модели скалярного соотношения Шведова—Бингама. Несмотря на структурную неоднородность кровь можно моделировать однородной жидкостью с экспериментально определяемыми эффективными свойствами, а присутствие упруго деформируемых эритроцитов феноменологически заменять наличием предела текучести.

Глава 9

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Общая формулировка определяющих соотношений вязкопластической среды для одномерных и плоских процессов деформирования связана с именами таких выдающихся учёных XIX века как А.Ж.К.Сен-Венан, Ф.Н.Шведов, Э.К.Бингам (Бингхэм). Точные аналитические решения задач о вязкопластическом течении получены, в основном, для случаев чистого сдвига и чистого растяжения–сжатия, когда интенсивность скоростей деформаций равна по модулю одной из компонент либо линейной комбинации компонент тензора скоростей деформаций. Характеристики всех таких стационарных решений известны довольно давно (в частности, они собраны в обзорном докладе [34] по истории реологии и состоянию дел к началу 50-х годов, а также в более поздних монографиях и обзорных статьях [55, 148, 157, 174, 230, 242, 269], посвящённых тем или иным аспектам теории вязкопластического течения). Так же, как и работа [34], многие отечественные статьи 40-60-х годов по математическому моделированию вязкопластических течений опубликованы в «Коллоидном журнале». Более сложные течения, пусть даже и стационарные, в которых в отличие от линейно вязкого случая автомодельности уже нет, допускают аналитико-численные решения. В силу физической нелинейности модели каждое новое исследование в этой области представляет определённый интерес.

9.1. Неодномерные нестационарные задачи вязкопластичности (обзор)

Остановимся в данном обзоре на некоторых характерных задачах, моделирующих технологические процессы обработки материалов, качение жёсткого тела по слою смазки, поведение пластов земной коры при длительной нагрузке, динамическое взаимодействие элементов вязкопластических конструкций. Особое внимание будем уделять наличию или отсутствию жёстких зон (стопорных зон; ядер течения) и устойчивости процесса.

9.1.1. Вязкопластическое течение в диффузоре и конфузоре

Известно, что поиск стационарного решения в задаче о вязкопластическом течении под действием давления на бесконечности в плоском диффузоре или конфузоре в виде $v(r,\theta) = V(\theta)/r$, как это делается для вязких жидкостей, и в коническом диффузоре или конфузоре в виде $v(r,\theta) = V(\theta)/r^2$ приводит к противоречиям. С трудностями такого рода впервые столкнулись авторы работ [203, 204]. Ещё ранее в [34, 35] проведено кинематическое исследование процесса течения в конусе методом просвечивания рентгеновскими лучами, найдено экспериментальное распределение скоростей в конусах с растворами 10°–25° и установлена формула для зависимости расхода от давления. Отмечено, что сдвиг скорее всего происходит по боковой поверхности цилиндра с диаметром, равным диаметру выходного отверстия (следовательно, этот цилиндр является жёстким ядром (рис. 9.1)). Аналитический же поиск решения в таком виде опять не привёл к результату. Это говорит о том, что линии тока непрямолинейны, и их семейство представляет собой сложную картину на плоскости либо внутри конуса.

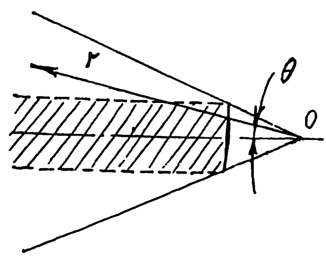


Рис. 9.1. Вязкопластическое течение в коническом конфузоре

В [103] в случае плоского конфузора функция тока $\psi(r,\theta)$ искалась в виде

$$\psi = -\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(\theta) r^{1-i} \tag{9.1.1}$$

Основная функция $\omega_1(\theta)$ в (9.1.1) определяет величину расхода; $\omega_2(\theta)$ и $\omega_3(\theta)$ на расход не влияют, а лишь корректируют форму профиля. Доказано, что ядра потока в данном случае не будет. Аналогичный подход в задаче о вязкопластическом течении между двумя коаксиальными конусами использован в [197]. Факт малого влияния корректирующих функций ω_2, ω_3 подтверждён и экспериментально на примере движения торфа в конической насадке с углами раствора 5°–10°. В торфяную массу помещались свинцовые реперы, и с помощью рентгеновской установки фотографировалось их положение в процессе движения. Снимки показали, что линии тока очень близки к прямым, проведённым из вершины конуса. Экспериментальная кривая говорит о том, что при движении вязкопластической массы имеет место пристенное скольжение.

Медленное вязкопластическое течение в коническом и плоском конфузорах при малом угле раствора исследовано в [69]. В качестве основного взято решение для пуазейлевского течения в цилиндрической трубе либо в плоском слое. Далее допущено, что течение происходит не в цилиндре, а в конусе с малым углом раствора β. Получена следующая формула для расхода Q в первом приближении по β:

$$Q = \frac{9\pi \operatorname{tg}^2\beta}{32\mu\tau_s}\left(p_1 - p_2 - \frac{2\tau_s}{\operatorname{tg}\beta}\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{r_1^3 r_2^3}{\left(r_2^{3/2} - r_1^{3/2}\right)^2} \tag{9.1.2}$$

где μ и τ_s — динамическая вязкость и предел текучести при сдвиге материала, p_1 и p_2 — давления во входном и выходном сечениях, r_1 и r_2 — радиусы этих сечений. Для плоского диффузора формула аналогичная (9.1.2) выглядит следующим образом:

$$Q = \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\mu\tau_s}\left(p_1 - p_2 - \frac{\tau_s}{\operatorname{tg}\beta}\ln\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \frac{a_1^2 a_2^2}{(a_2 - a_1)^2} \tag{9.1.3}$$

где $2a_1$ и $2a_2$ — расстояния между стенками диффузора во входном и выходном сечениях. Такой же метод в случае материала Балкли–Гершеля избран и в [109].

Движение вязкопластической среды в плоском параболическом конфузоре вариационным методом изучено в [120]. Минимум функционала энергии реализуется на действительном поле скоростей. В [211] исследовано сложное вязкопластическое течение внутри клина, а в [210, 212] внутри двугранного угла и соосных конусов. Высокоскоростное вязкопластическое течение, в котором безразмерный предел текучести много меньше безразмерной вязкости, и происходящее в коническом конфузоре, рассмотрено в [237].

В [333] решена задача медленного установившегося течения вязкопластического материала в сходящемся коническом канале применительно к процессам экструзии и литья под давлением. Параметры найденного процесса деформирования близки к соответствующим параметрам ньютоновского течения в конусе под действием давления на бесконечности.

В монографии [55] и последующих работах [5, 104] исследована задача о движении в плоском конфузоре с прямолинейными стенками материала, в котором пластические свойства выражены слабо, т. е. близкого к ньютоновской жидкости. Решение начально-краевой задачи для такой среды сводится к решению соответствующей «вязкой» задачи и линеаризованной по безразмерному пределу текучести задачи первого приближения. Выписаны уравнения асимптотическх границ жёстких зон, появляющихся при возмущении предела текучести. Решение данной задачи позволяет судить об устойчивости основного процесса (исходного вязкого течения) по отношению к возмущению материальных функций (появлению предела текучести).

9.1.2. Качение цилиндра по поверхности со слоем вязкопластической смазки

Впервые уравнения движения для случая качения цилиндра по поверхности, покрытой слоем пластической смазки, проинтегрированы в [113], а вязкопластической — в [112]. Получены выражения для распределения давления в слое смазки, грузоподъёмности смазочной прослойки и мощности, затрачиваемой на преодоление силы трения при качении. Отмечено, что в случае экспоненциальной зависимости предельного напряжения сдвига и вязкости от давления существует предельная минимальная толщина смазочного слоя.

Результаты экспериментов [32] в работе [141] даны в виде зависимости коэффициента сопротивления течению λ от числа Рейнольдса Re, построенного по эффективной вязкости смазочного слоя: $\lambda \approx 64/Re$ в диапазоне $2 \cdot 10^{-4} < Re < 6$.

В [239, 303] приведены эксперименты по определению зависимости момента трения от нагрузки, скорости вращения вала в роликовом подшипнике скольжения, размеров подшипника и реологических свойств вязкопластического (консистентного) материала, из которого изготовлена смазка.

Реодинамическая теория пластической и вязкопластической смазки развита в [202]. Течение в плоском подшипнике рассмотрено в области между бесконечной плоскостью, движущейся с постоянной скоростью, и наклонной к ней неподвижной плоскостью. Вся область разбита на три зоны со своими граничными условиями и со своим распределением скоростей и давлений. Доказано существование у поверхностей обеих пластин жёстких зон в случае $k \approx h_1/h_2 > 2$, где h_1 — ширина входного, а h_2 — ширина выходного отверстий. Найдены ширина h слоя, движущегося с постоянной скоростью

$$h = \frac{k-2}{k+1} h_2 \tag{9.1.4}$$

и условия устойчивости жёстких зон. Вязкопластическая смазка имеет свои преимущества по сравнению с вязкой. Для вязкой смазки происходит разрыв масляной плёнки, что приводит к вытеканию масла из зазора, в вязкопластической же среде, как следует из (9.1.4), при $k \neq 2$ этого не происходит вследствие более равномерного распределения давлений на плоскость вкладыша подшипника. Кроме того существование сплошных твёрдых стопоров обеспечивает полноту течения, причём входной стопор ограждает от попадания в смазочный слой воздуха. На особенности поведения пластичных смазок в зоне трения по сравнению с ньютоновскими средами обращено внимание и в [111].

Плоское течение вязкопластической смазки в малом зазоре между изделием и внутренней поверхностью насадки при волочении рассмотрено в [110]. Приведены пять качественно различных схем течения в зависимости от скорости волочения, расхода и реологии смазочного материала.

Экспериментальное изучение поведения вязкопластических смазок при сложном сдвиге для разных температур приведено в [332]. Методы и результаты лабораторных испытаний вязкопластических масел и смазок при трении, а также принципы подбора последних для снижения трения и изнашивания трибосопряжений изложены в справочнике [142].

С использованием метода конечных элементов в [342] выполнено численное моделирование течения билинейной неньютоновской жидкости (жидкости с кусочно-линейной вязкостью) в смазочном слое опорного подшипника. В качестве предельного случая обсуждён бингамовский предел. Результаты расчётно-экспериментального исследования нелинейно-вязкопластической смазки в гидростатическом упорном подшипнике представлены в [219]. Для снижения потерь на нагнетание смазки следует увеличивать как эффективную вязкость, так и предельное напряжение сдвига.

9.1.3. Движение вязкопластической плёнки над вращающимся диском

К вопросам деформирования слоя смазки тесно примыкают и задачи о движении вязкопластического слоя над вращающимся диском. В [70] найдено распределение $v_r(r, z)$ для такого движения и получено уравнение в частных производных первого порядка, из которого определяется толщина слоя $h(r)$. Аналогичная задача о равновесии и течении вязкопластического материала над вращающимся конусом рассмотрена в [71]. Здесь определена максимальная толщина слоя смазки, который может оставаться в покое на поверхности конуса.

Определению толщины вязкопластической плёнки над вращающимся диском посвящены работы [274, 288]. В [253] даны приближённые аналитические решения для двух типов такого течения. В случае, когда вязкость и предел текучести не зависят от радиуса, толщина плёнки уменьшается с удалением от центра. Для среды с меняющимися параметрами картина может быть обратной.

В [235] рассмотрена задача о нанесении токой плёнки из вязкопластического материала на вращающийся диск. В качестве определяющего соотношения использована модель с кусочно-линейной вязкостью, где предельным слуаем является вязкопластическая модель. На основе конечноразностного моделирования установлено, что вся область состоит из трёх зон (рис. 9.2): жёсткой зоны у оси вращения; области сдвигового течения, примыкающей к диску; жёсткой зоны вблизи свободной поверхности.

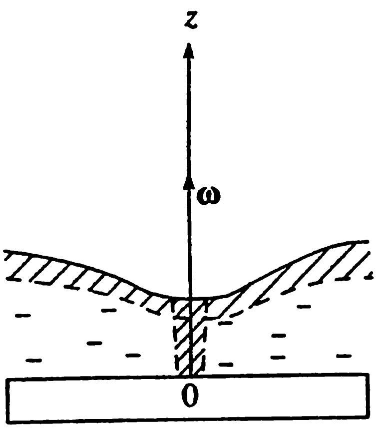


Рис. 9.2. Тонкая плёнка из вязкопластического материала на вращающемся диске

Если в центре вращающегося диска имеется отверстие, то на кинематическое поле осесимметричного вращения накладывается также осесимметричное поле, соответствующее стоку в начале координат. Для такого течения в [76] получены распределения тангенциальной скорости и её циркуляции.

Большой интерес представляло бы численное-аналитическое решение вязкопластического аналога задачи Кармана. Поиск решения в том же виде, как это делается в случае линейной вязкой жидкости, не приводит к результату из-за отсутствия автомодельности. Наиболее интересны здесь три вопроса: каково распределение жёстких зон при стационарном движении? С какой скоростью «подсасывает» вращающийся диск среду из бесконечности ($z \to \infty$) и наблюдается ли этот эффект в данной задаче вообще?; Существует ли предельный переход в решении вязкопластической задачи Кармана к решению соответствующей вязкой задачи при устремлении предела текучести при сдвиге к нулю? Последний вопрос тесно связан с проблемой устойчивости процессов деформирования относительно возмущений материальных функций [43].

9.1.4. Неодномерный и нестационарный сдвиг вязкопластической среды

Задача о вязкопластическом течении в зазоре между двумя круглыми коаксиальными трубами при совместном действии момента, приложенного к внутреннему цилиндру, и градиента давления вдоль оси рассмотрена в [305, 306]. Приведены общие условия осуществимости течения. Решение справедливо, когда напряжение сдвига на стенках цилиндра в результате поступательного течения намного превышает напряжение сдвига, возникающего вследствие вращения цилиндров. Это частный случай течения бурового раствора в кольцевом канале обсадных труб, при котором градиент скорости на стенке трубы, связанный с поступательным движением, намного превышает градиент скорости, возникающий в результате вращения внутренней штанги.

Экспериментальное изучение течения жирового солидола на сдвоенном ротационном вискозиметре с коаксиальными цилиндрами, позволяющем исследовать взаимное влияние осевого и окружного течений с учётом концевых эффектов, приведено в [32]. Показано, что осевое течение повышает сопротивление деформированию при окружном течении. Суперпозиция же двух указанных чистых сдвигов возможна лишь в первом приближении.

Комбинация вязкопластических течений Куэтта и Пуазейля в плоском зазоре изучена в [150]. Для наглядности характер течения поставлен в зависимость от двух безразмерных переменных, определяющих координаты точки на плоскости. Выявлены три области, отвечающие наличию, частичному наличию и отсутствию течения. Аналогичный подход осуществлён и для комбинаций течений Куэтта—Тейлора и Пуазейля между двумя коаксиальными цилиндрами. На изображающей плоскости существуют пять областей с различным характером деформирования.

Вязкопластическое течение между двумя бесконечными пластинами под действием касательного усилия и градиента давления, направленного под произвольным углом к этому усилию, рассмотрено в [28]. Такая модель используется для анализа течения в канале экструдера.

В [134] реология жидкости описана моделью, образованной путём последовательного соединения вязкопластической и произвольной вязкоупругой моделей. Цилиндрическая труба заданного радиуса и длины вращается с постоянной угловой скоростью и равномерно движется вдоль оси внутри неподвижной и коаксиальной с ней цилиндрической трубы с вязкоупругопластической несжимаемой жидкостью. Подробно изучено стационарное течение при сложном сдвиге, а также определены границы вязкоупругого ядра. Аналогичное спиральное течение вязкопластической среды при вращении внутреннего цилиндра и наличии осевого перепада давления численно изучено позднее в [231]. Аналитическое решение получено в приближении плоской щели. Если перепад давления меньше критического, то у внешней трубы существует неподвижный жёсткий участок. Найдена скорость внешней трубы, при которой этот участок исчезает.

Решения многих задач о сложном и нестационарном сдвиге вязкопластических материалов, имеющих отношение к выкачиванию нефти и движению нефтепродуктов по буровым скважинам, приведены в монографии [157]. Нестационарность обуславливает изменение границы жёсткой зоны (обычно цилиндрического ядра в середине трубы) при разгоне либо торможении. Многие рассмотренные задачи можно свести к нелинейной задаче типа Стефана в области с заранее неизвестной границей.

В приближении тонкого слоя в [60, 61] рассмотрена общая задача течения вязкопластической среды, когда материальные точки граничных поверхностей смещаются по нормали по заданному закону. Поставлена также задача об определении закона деформирования материала в узком канале при заданном распределении давления на границах этого канала. Полученные выражения расхода и давления позволяют ставить задачи управления течением в тонком слое и оптимизировать эти процессы.

9.1.5. Сдавливание вязкопластического слоя между сближающимися жёсткими плоскостями

Задача о сжатии вязкопластического слоя прямоугольными жёсткими плитами в предположении малости расстояния между плитами по сравнению с их размерами решена в [149]. Получен следующий результат: вблизи плит всегда существует область течения, в которой преобладающую роль играют вязкие напряжения; оставшуюся среднюю область охватывает близкое к идеально-пластическому течение, параметры которого ищутся как некоторая поправка к классическому решению Прандтля. В [40] рассмотрено сдавливание вязкопластического слоя круглыми пластинами с отверстием в центре. Сделана гипотеза о наличии жёсткой зоны постоянной толщины в средней части зазора.

В [62] решение задачи о сжатии вязкопластической среды между круглыми параллельными пластинами при их соосном поступательном движении дано в безынерционном приближении тонкого слоя. Коэффициент вязкости и предел текучести могут принимать произвольные значения. Учтено также изменение толщины жёсткого ядра в процессе сжатия.

Медленное сжатие вязкопластического слоя (трёхкомпонентная модель) между круглыми параллельными пластинами проанализировано с помощью вариационных методов в [347]. Получены верхние и нижние оценки решения, причём последние, как следует из экспериментальных наблюдений, довольно близки к точному решению. Сходным вопросам посвящена работа [321], где исследовано вытеснение неньютоновской, в частности, вязкопластической, среды двумя параллельными круглыми дисками. Сделаны два предположения: отношение расстояния между дисками к радиусу дисков мало; отношение касательного напряжения на границе к пределу текучести постоянно. Получено значение результирующей силы, действующей на диски.

Сжатие вязкопластической среды между сближающимися параллельными плитами экспериментально исследовано в [284]. Существенное влияние на результаты испытаний и расчётов оказывает тип граничных условий: имеет ли место прилипание либо внешнее трение и по какому закону это трение происходит. Эксперименты проводились на некоторых смолах, пластилине и дисперсиях кремнезёма, причём из независимых экспериментов на сжатие предел текучести определялся как напряжение, при котором начинается медленное деформирование.

Отметим здесь также работу [198], где изучена модель разрыва вязкопластического слоя между двумя поверхностями не при их сближении, а, наоборот, раздвижении. На смену квазиравновесного процесса деформирования в определённый момент (при некотором найденном аналитически значении скорости деформации) наступает разрыв или «диспергирование» слоя.

Задача о плоскопараллельном вязкопластическом течении при сближении либо раздвижении жёстких плит с заданной скоростью решена в [164] в безынерционном приближении тонкого слоя при произвольных параметрах вязкости и предела текучести. Получены аналитические выражения для скорости и давления и найдена граница жёсткой зоны внутри области. При заданном законе движения плит определена сила, действующая на плиту конечного размера. Кроме того найдено условие безотрывного раздвижения плит.

9.1.6. Удар вязкопластического стержня о жёсткую преграду

Одномерная задача об ударе о неподвижную жёсткую преграду вязкопластического стержня конечной длины впервые была поставлена в [97]. Показано, что после удара возникают две зоны: в одной из них, примыкающей к преграде, возникает вязкопластическое течение, и поле скоростей удовлетворяет уравнению теплопроводности с неизвестной границей; в другой материал не деформируется. Для решения задачи используется приближённый метод Кармана—Польгаузена. Зона течения сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться, никогда не достигая свободного конца стержня. В некоторый момент эта область исчезает совсем, после чего деформирование прекращается. Схема численного решения данной задачи была позднее предложена в [37]. Численно задача решалась в напряжениях, что дало возможность не выделять линию раздела вязкопластической и жёсткой зон. Переход в жёсткое состояние при разгрузке после удара учтён в [116], а различие в вязких свойствах при нагрузке и разгрузке в [214].

Удар жёсткого тела по вязкопластическому стержню рассмотрен и в серии работ [327, 329]. Соударение происходит с такой скоростью, что возникают большие пластические деформации. Рассчитаны напряжения для случаев: постоянная скорость удара по полубесконечному и конечному стержню; удар жёсткого тела конечной массы по полубесконечному и конечному стержню. Если связь интенсивностей напряжений и скоростей деформаций произвольна, то задача сведена к решению нелинейного параболического уравнения с подвижной границей.

В [98] действительный стержень конечной длины заменён некоторым схематическим, масса которого сосредоточена в конечном числе сечений. Между массами материал лишён инерции, но подчиняется вязкопластическому закону.

Задача сведена к последовательному решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимся числом искомых функций. Численные результаты оказались близкими с аналитическими выводами работы [97].

Распространение волн в бесконечном цилиндрическом стержне изучено в [227]. Нелинейные определяющие соотношения линеаризованы путём разложения корня из интенсивности напряжений в ряд Тейлора вблизи некоторого значения. Для подобной среды установлено, что при высоких частотах вязкопластический стержень ведёт себя как упругий.

Движение круглой защемлённой плиты, вызванное ударом сосредоточенной массы в центре, рассмотрено в [279]. Задача об ударном сжатии вязкопластического образца с постоянным поперечным сечением и массой много меньшей массы бойка решалась в [143].

Классическая работа [339] посвящена распространению малых возмущений в пластической и вязкопластической средах. Линеаризация уравнений состояния проведена вблизи положения, отвечающего предварительному одноосному нагружению тела, при котором материала вышел в пластическую область. Изучено, в частности, распространение осесимметричной продольной гармонической волны в цилиндрическом стержне, внешняя граница которого свободна от напряжений.

В [154, 199] рассмотрена задача динамического деформирования жёстковязкопластической нити, встречающей жёсткую матрицу, при действии на нить равномерно распределённого постоянного давления. Получены уравнение свободной части нити и условия в окрестности точки контакта.

Различным вопросам удара вязкопластического цилиндрического стержня конечной либо полубесконечной длины и вязкопластической нити о жёсткую преграду посвящены также более поздние теоретические исследования [65, 75, 156, 254, 296].

9.1.7. Устойчивость вязкопластических течений по отношению к малым возмущениям

Краевые задачи устойчивости даже одномерных течений по отношению к малым либо конечным возмущениям являются неодномерными. При анализе устойчивости стационарных плоскопараллельных сдвигов идеальной или вязкой жидкости, как утверждает теорема Сквайра [26], достаточно ограничиваться двумерными в плоскости сдвига возмущениями. Плоская картина малых вариаций позволяет свести задачу к одному уравнению относительно функции тока, а после отделения множителя $e^{\alpha t}$ к спектральной задаче Рэлея либо Орра—Зоммерфельда.

Сложнее обстоит дело с неньютоновскими и вязкопластическими течениями, где утверждение аналогичное теореме Сквайра уже не имеет место [38, 53, 55], т. е. необходимо исследовать трёхмерную картину возмущений. В [53] доказана обобщённая теорема Сквайра, которая формулируется следующим образом.

Обобщённая теорема Сквайра. В случае одномерного стационарного вязкопластического сдвига в плоскости (Ox_1x_3) среди всех нарастающих трёхмерных возмущений, удовлетворяющих условию

$$\delta v_{23} = 0 \tag{9.1.5}$$

всегда можно найти двумерное в той же плоскости (Ox_1x_3), нарастающее с той же скоростью но при меньшем значении числа Рейнольдса Re и большем значении безразмерного предела текучести τ_s.

Условие (9.1.5), отсутствующее в случае вязких течений, существенно ограничивает класс возмущений. Заметим, что это условие достаточно, вопрос о том, насколько оно необходимо остаётся открытым.

Проблемы устойчивости деформирования вязкопластических тел были впервые затронуты в классических работах [87, 95, 96]. Уравнения плоского движения вязкопластического тела представлены в [87] в виде системы двух нелинейных уравнений относительно функции напряжений Φ и функции тока Ψ

$$L(\Phi)L(\Psi) + 4M(\Phi)M(\Psi) = 0 \tag{9.1.6}$$

$$\sqrt{L^2(\Phi) + 4M^2(\Phi)} - \sqrt{L^2(\Psi) + 4M^2(\Psi)} = \kappa \tag{9.1.7}$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad M = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \tag{9.1.8}$$

Параметр κ в (9.1.7) равный отношению предела текучести при сдвиге к динамической вязкости, будучи обезразмеренным, носит название число Ильюшина. Систему (9.1.6), (9.1.7) можно свести к одному уравнению четвёртого порядка относительно каждой из функций Φ или Ψ. Кроме того система (9.1.6), (9.1.7) эквивалентна вариационному принципу минимума мощности внутренних сил.

В [87] дана постановка краевой задачи устойчивости вязкопластического течения относительно малых возмущений (метод Пуанкаре). Линеаризация уравнений движения проведена вблизи основного состояния, причём это состояние считается известным из тех или иных геометрических и физических соображений. Возмущения наложены как на уравнения границы тела, так и на известные кинематические и динамические поля величин внутри области течения. Внешние данные — поверхностные нагрузки и скорости границ — не варьируются. За счёт этого система уравнений, которая получается после подстановки фундаментальных решений линеаризованных уравнений движения в граничные условия, снесённые на невозмущённые поверхности, однородна. Выпишем систему двух линеаризованных уравнений относительно возмущений $\delta\Phi$ и $\delta\Psi$ вблизи основного состояния, помечаемого нулевым индексом

$$L(\Phi_0)L(\delta\Psi) + L(\Psi_0)L(\delta\Phi) + 4M(\Phi_0)M(\delta\Psi) + 4M(\Psi_0)M(\delta\Phi) = 0 \qquad (9.1.9)$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{L^2(\Psi_0) + 4M^2(\Psi_0)}\,[L(\Phi_0)L(\delta\Phi) + 4M(\Phi_0)M(\delta\Phi)] = \\ &\quad = \sqrt{L^2(\Phi_0) + 4M^2(\Phi_0)}\,[L(\Psi_0)L(\delta\Psi) + 4M(\Psi_0)M(\delta\Psi)] \end{aligned} \qquad (9.1.10)$$

Далее в [87] предложен способ нахождения закона движения, т. е. лагранжевых координат каждой частицы тела. В приложениях в качестве основных течений вязкопластической среды выбраны растяжение – сжатие бесконечной полосы и растекание толстостенной полой сферы под действием внутреннего давления. В последнем случае одним из типов возмущений, наложенных на одномерное растекание $v_r^\circ(r,t)$, принимается эксцентриситет внутреннего отверстия трубы. Таким образом, в [87] устойчивость основного движения исследуется относительно малых вариаций начальных данных и геометрии области. Результаты задачи о растяжении — сжатии полосы, полученные в [87], обобщены в [101] с учётом нелинейности скалярного соотношения вязкопластического материала.

Устойчивость вязкопластического течения полосы, круглого прута и круглой пластины изучены в [95, 96] с точки зрения эйлерова подхода. Критерий устойчивости основного движения в этих работах связан с тем, что в любой точке границы тела угол между вектором перемещения в данной точке и вектором возмущения границы должен быть тупым. Если же этот угол острый, то движение по определению считалось неустойчивым. Об устойчивости растяжения полосы и деформирования кольца идёт речь также в работах [73, 192] соответственно.

После выход в свет работ [87, 95, 96] основной интерес отечественных исследователей на время переключился с теории вязкопластического течения на развитие деформационных подходов в теории пластичности. Это объясняется спецификой военного времени и выходом на повестку дня неотложных практических задач, связанных с обороной. А.А.Ильюшин в своём автобиографическом очерке [88] пишет о необходимости «... разобраться в явлениях, происходящих в артиллерийском снаряде при движении по каналу ствола, и обосновать вытекающую из этого возможность коренного изменения, упрощения и удешевления проектирования, расчёта, производства и военной приёмки снарядов...».

Ещё одна классическая задача об устойчивости вращения вязкопластической среды между двумя коаксиальными цилиндрами (течение Куэтта—Тейлора) аналитически исследовалась в [17]. Был сделан вывод о том, что при переходе от ламинарного к турбулентному режиму движение всегда устойчиво, если внутренний цилиндр неподвижен, и всегда неустойчиво, если неподвижен внешний цилиндр. Экспериментально переход к турбулентности в таком течении ранее был обнаружен в [144]. Проблемам центрифугирования и связанной с ними линеаризованной задаче устойчивости относительно малых возмущений вязкопластического течения Куэтта—Тейлора уделено внимание в [48].

Необходимость выбора вязкопластической модели во многих технологических задачах отмечена во многих работах, где исследовано движение в трубах вязких жидкостей степенного типа, т. е. не учитывается недеформированная зона в середине трубы. Переход же к турбулентности в пуазейлевом течении в круглой трубе с учётом предела текучести материала наступает, когда некоторый безразмерный параметр достигает своего критического значения. На этом основании в [125, 265] выведена зависимость критических чисел Рейнольдса и Хёдстрема. Некоторые критерии, определяющие переход бингамовского течения из ламинарного в турбулентный режимы, обсуждены также в [221].

В [173] рассмотрена устойчивость процесса выдавливания металла через щель в одном из пуансонов, сдавливающих вязкопластический слой. Задача сведена к решению двух задач Римана—Гильберта для аналитических функций. Установлено, что при определённых геометрических параметрах происходит отлипание материала от части поверхности одного из пуансонов, расположенной против щели в другом пуансоне.

Потеря устойчивости вязкопластического течения как невозможность существования стационарного распределения скоростей и температуры в потоке рассмотрена в [25]. Допущено, что вязкость и предел текучести обратно пропорциональны температуре. В [325] под потерей устойчивости вязкопластической трубы под действием внутреннего давления, крутящего момента и осевой силы понимается состояние, когда скорость упрочнения недостаточна для компенсации увеличения напряжений из-за уменьшения толщины трубы.

Конвективная неустойчивость плоского вязкопластического слоя, подогреваемого снизу, рассмотрена в [59]. Для плоскопараллельного движения в слое найдено точное решение задачи. Решение существует, если число Рэлея, определённое по вертикальному градиенту температуры и полуширине слоя, больше некоторой константы. С увеличением числа Рэлея в этой области ширина зоны течения растёт, а амплитуда скорости уменьшается. Такое движение неустойчиво относительно малых возмущений. Для возбуждения конвекции из состояния покоя амплитуда возмущения должна превосходить критическое значение, зависящее от безразмерного предела текучести («жёсткое возбуждение неустойчивости»).

В [158, 160] изучена устойчивость течения Пуазейля вязкопластического материала относительно малых и конечных возмущений. В области сдвига вблизи границы ядра потока показано, что течение устойчиво по отношению к возмущениям бесконечно малой амплитуды. Конечное же возмущение представлено в виде суммы стационарного искажения профиля основного течения и нестационарной части. Получены зависимости числа Re от волнового числа, соответствующего кривой нейтральной устойчивости. Эти же кривые, но для более сложной реологической модели тела (модели Кэссона с показателями m и n) построены для различных значений m и n и размеров жёсткой зоны в [193]. Показано, что реология существенно влияет на устойчивость плоского градиентного течения. Гидродинамическая неустойчивость вязкопластического течения Гартмана проанализирована в [159]. Современные численные результаты, относящиеся к устойчивости течения Пуазейля бингамовского материала содержатся в [258].

В [206, 266] даны попытки определения условий перехода из ламинарного режима в турбулентный для вязкопластического тела с трёхконстантным уравнением Балкли–Гершеля. Введён так называемый локальный параметр устойчивости, критическое значение которого определено по потере устойчивости ньютоновской жидкости. Указано, при каких показателях степенного закона малые значения τ_s стабилизируют ламинарное течение, а при каких наблюдается обратное.

Полуэмпирическое описание турбулентного режима вязкопластического течения в круглой трубе дано в 127]. Полученные зависимости для осреднённых скоростей и коэффициента гидродинамического сопротивления являются обобщением известных полуэмпирических соотношений для ньютоновских жидкостей.

Потеря устойчивости развитого течения вязкопластической среды в трубе изучена в [295]. На основе анализа поведения малых возмущений численно найдено критическое число Re, хорошо согласующееся с экспериментальным значением, когда радиус жёсткой зоны превышает 0.6 радиуса трубы. В более поздней работе этих же авторов [294] для описания турбулентного течения вязкопластических тел предложена определённая модель («$k - \varepsilon$ модель»).

Анализ неустойчивости простого сдвига вязкопластического материала, обладающего свойством деформационного разупрочнения, выполнен в [236]. Предложена методика решения линеаризованной начально-краевой задачи и устойчивости невозмущённого процесса деформирования на конечном интервале времени. Основную роль играют два безразмерных коэффициента, один из которых определяет вязкие свойства, а другой кинематику деформации. Установлены соотношения подобия между этими коэффициентами.

Теоретический анализ устойчивости некоторых сдвиговых течений термовязкопластического материала со смешанными граничными условиями, связывающими тепловые и механические параметры, дан в [285]. Такого типа решения используются при моделировании тектонических явлений в литосфере и на границах литосферных плит. Здесь важно обосновать выбор тех или иных граничных условий применительно к разным геофизическим задачам.

В цикле работ [78, 79] предположено, что весомая слоистая вязкопластическая среда голономно диссипативна, и с использованием вариационного принципа [148] в ортогональной криволинейной системе координат выведены основные соотношения теории устойчивости. Изучены задачи об устойчивости осесимметричного течения двухслойной круглой пластины и растекании полого шара под действием внутреннего давления.

Устойчивость некоторых двухслойных сдвигов вязкопластического материала проанализирована в [308, 335]. В [335] речь идёт о двухслойном течении по наклонной плоскости и устойчивости к малым двумерным возмущениям данного течения. В длинноволновом приближении получены значения критических чисел Re и изучено влияние предела текучести τ_s на устойчивость. В [308] исследована линеаризованная устойчивость поверхности раздела между двумя бингамовскими телами в прямолинейном канале под действием градиента давления. Результаты численных расчётов указывают на стабилизирующее влияние на поверхность раздела увеличения предела текучести. При дискретизации задачи использованы разложения по многочленам Чебышёва.

Линеаризованная задача устойчивости плоскопараллельного сдвига вязкопластического слоя $0 < x_3 < 1$ (картина возмущений двумерная в плоскости слоя (Ox_1x_3)) в случае отсутствия жёстких прослоек по толщине может быть сведена к одному уравнению относительно амплитуды ϕ функции тока ψ, т. е. $\psi(x_1, x_3, t) = \phi(x_3)\exp(isx_1 + \alpha t)$, [45, 53]

$$\begin{aligned} &\phi^{IV} - 2s^2\phi'' + s^4\phi - 4\kappa s^2 \left(\frac{\phi'}{|v^{\circ\prime}|}\right)' = \\ &\quad = is\left[\left(v^\circ - \frac{i\alpha}{s}\right)(\phi'' - s^2\phi) - v^{\circ\prime\prime}\phi\right] Re, \qquad \alpha \in C \end{aligned} \tag{9.1.11}$$

и граничным условиям

$$x_3 = 0\,, \quad x_3 = 1 \qquad \phi = \phi' = 0 \tag{9.1.12}$$

Здесь $v^\circ(x_3)$ — профиль скорости невозмущённого течения, κ — число Ильюшина. Последнее слагаемое в левой части (9.1.11) учитывает влияние пластических свойств материала по сравнению с вязкими. Без этого слагаемого соотношение (9.1.11) совпадает с известным уравнением Орра–Зоммерфельда. Система (9.1.11), (9.1.12) названа в [53] обобщённой задачей Орра–Зоммерфельда. В случае же наличия жёстких прослоек и изменения их границ в возмущённом движении с плоских на криволинейные вместо условий (9.1.12) необходимо выписывать условия на границах жёстких зон. Краевая задача при этом существенно усложняется [53].

В [42] на основе методов интегральных соотношений (см., например, [107]) в комплекснозначном гильбертовом пространстве H_2 даны верхние оценки действительной части собственного значения α и соответственно нижние оценки критического числа Рейнольдса в зависимости от κ. Эти достаточные оценки устойчивости свидетельствуют о стабилизирующей роли параметра пластичности в сравнении с вязкими течениями. Аналогичные энергетические (вариационные) оценки устойчивости для вязкопластического течения Куэтта–Тейлора выведены в [41], а для процесса диффузии вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости в случаях тангенциального разрыва скорости либо касательного напряжения — в [54].

В цикле работ [44, 46, 49, 50, 56, 58, 261] методы интегральных соотношений получили дальнейшее развитие применительно к задачам устойчивости вязкопластических тел с учётом: нестационарности основного течения; двумерной и трёхмерной кинематики основного течения; достаточно произвольного скалярного определяющего соотношения среды; слабой неоднородности, т. е. малой вариации плотности и функции упрочнения (в частности, вязкости и предела текучести) при переходе от однородного основного течения к неоднородному возмущённому.

Во всех перечисленных случаях на основное течение наложена трёхмерная картина возмущений, и ограничения типа (9.1.5), предъявляемые обобщённой теоремой Сквайра, можно опустить.

Важным самостоятельным разделом в тематике устойчивости процессов вязкопластического деформирования является бифуркация и потеря устойчивости конструкций и составных тел. В [255, 256, 340] исследовано осесимметричное прощёлкивание цилиндрической оболочки из материала с линейным скалярным соотношением под действием радиальной импульсной нагрузки. В [341] аналогичная задача решена для сферической оболочки, но с учётом неосесимметричных возмущений. В частности, найдено влияние меридионального перемещения на значение критического импульса и на критические моды. В наиболее полной постановке задача о динамической потере устойчивости вязкопластической оболочки (с учётом неосесимметричности, произвольности скалярного соотношения материала, наличия температурного поля) исследована в [234]. В [293] исследовано явление неустойчивого формоизменения металлов и полимеров при больших деформациях, которое заключается в образовании и развитии полос сдвига («shear bands»). Эта стадия переходная от устойчивого деформирования к разрушению. На примере термовязкопластического течения Куэтта (упругие деформации не учитываются) в замкнутой форме получены критические условия локализации сдвига. В случае более общего плоского движения начало локализации полос сдвига рассмотрено в [222]. Установлены критические условия их образования, наиболее вероятные направления развития, а также получены оценки скорости роста зарождающихся полос сдвига. Полосам сдвига как проявлению неустойчивости посвящены работы [331, 334].

В [330] исследовано зарождение и развитие шейки в круглом полимерном образце из вязкопластического материала при одноосном растяжении. Начало образования шейки обусловлено введением начальных геометрических возмущений. С помощью метода конечных элементов найдено распределение напряжений на разных стадиях нагружения и эволюция профиля образца.

Математическим аспектам существования, единственности и устойчивости решений краевых задач вязкопластичности посвящены работы [176, 223, 229, 281, 282]. В [122, 123] уравнения движения вязкопластической и термовязкопластической сред с произвольными скалярными соотношениями проанализированы с точки зрения их групповых свойств (см. также [13]). Получен полный набор инвариантных решений первого ранга. В [123] построены решения некоторых задач о течении и теплообмене в ограниченных областях, в полуплоскости и в бесконечной среде при движении цилиндра. Точно решена автомодельная задача о вращении тонкого стержня с постоянным теплоотводом в теплопроводной вязкопластической среде. В [122] рассмотрена задача о продольно-поперечном движении среды со степенной зависимостью интенсивностей напряжений и скоростей деформаций. Современный обзор инвариантных свойств уравнений термовязкопластичности с различными скалярными определяющими соотношениями дан в [124].

Рассматривая перспективные направления в фундаментальном изучении поведения вязкопластических тел под нагрузкой, выделим две задачи. Первая из них связана с перемешиванием вязкопластических структур под действием периодических нагрузок и поведением жёстких ядер в таком процессе. Несмотря на то, что глобальное перемешивание является тематикой многих конференций и других научных мероприятий в последнее время, остаются вопросы даже на уровне определений: что математически означает, произошло ли к моменту t перемешивание или ещё нет ? Отметим здесь работу [163], привлекающую методы аналитической механики гамильтоновых систем и хаоса к исследованию данных процессов. В ней описан метод построения усреднённого гамильтониана автономной системы, не требующий находить нелинейные замены переменных в канонических уравнениях Гамильтона, что обычно представляет трудоёмкую задачу. Введено понятие стробоскопически усреднённого гамильтониана, который можно вычислять в виде разложений по малому параметру из решения некоторой системы уравнений. Развитие данного метода приведено в [162], а результаты изложены в части I.

Вторая задача связана с подходом к описанию даже однородного вязкопластического материала как к композиту, у которого зона течения и жёсткое ядро формально являются компонентами с различными физико-механическими, тепловыми и химическими свойствами, а граница раздела имеет фрактальную структуру [168]. Этим задачам предстоит уделить внимание в ближайшем будущем.

9.2. Разгон и торможение тяжёлого вязкопластического слоя вдоль наклонной плоскости

Задача о деформировании тяжёлого вязкопластического слоя с большой вязкостью на наклонной плоскости моделирует поведение геофизических структур, находящихся в гравитационном поле на наклонном ложе. Примерами таких структур могут служить снежнопылевые лавины из мягкого снега [218], податливые участки верхних слоёв земной коры [175, 300], соляные породы в предельном состоянии [208], последождевые оползни почвы [184], ледниковые образования [182]. Для последних особенно характерно наличие массивной недеформируемой корки, занимающей до 95 % толщины ледника, и тонкой сдвиговой зоны вблизи основания. На вязкопластическую природу льда обращено внимание в [181, стр. 166]: «Поскольку у льда не обнаружено предела длительной прочности, введём понятие «практически предельного состояния», при котором лёд настолько незначительно деформируется во времени, что дальнейшую деформацию можно считать отсутствующей. можно определить длительное сопротивление, что имеет большое значение при характеристике несущей способности ледяного тела во времени». Это длительное сопротивление фактически является пределом текучести при сдвиге. Экспериментально найденные значения материальных функций для широкого класса льдов и снежных потоков лавинного типа приведены в обзоре [151].

Установившееся плоскопараллельное движение тяжёлого вязкопластического слоя по наклонной плоскости принадлежит к числу классических и давно исследованных задач [34]. При таком движении область вблизи свободной поверхности слоя занята жёсткой зоной, которая присутствует всегда и может охватывать весь слой, если гравитационных усилий недостаточно для страгивания. Устойчивость этого течения относительно двумерной картины возмущений исследована в [55]. Известны многочисленные обобщения данной задачи на случай вязкопластической жидкости с нелинейной вязкостью, упругой сжимаемостью, а также двухслойности и стратифицированности течения [126].

С другой стороны, выполнено много исследований по изучению движения фазовых границ при нестационарном сдвиге материала. Граничные условия здесь надо ставить на заранее неизвестной границе, движение которой определяется в процессе решения (задачи типа Стефана). Достаточно полный обзор по неустановившемуся деформированию с учётом движения жёстких зон дан в монографии [157].

В данном параграфе определяются параметры нестационарного одномерного сдвига вязкопластического слоя на наклонной плоскости в поле силы тяжести, т. е. процесса разгона либо торможения. Находится изменение со временем толщины жёсткой зоны вблизи свободной границы, а также другие характеристики течения. Задача с неизвестной границей сводится к задаче с фиксированной во времени границей. Предлагается метод решения подобных задач, который проиллюстрирован на данном примере. Аналитически исследуются асимптотики при $t \to \infty$ в случае, когда число Рейнольдса много меньше квадрата числа Фруда [57].

9.2.1. Начально-краевая задача и стационарный режим

В поле силы тяжести $\boldsymbol{g}$ ($|\boldsymbol{g}| = g$) имеется несжимаемый вязкопластический слой с плотностью ρ, пределом текучести при сдвиге τ_s и динамической вязкостью μ, который движется вниз по наклонной плоскости под углом β к горизонту. В любой момент времени $t > 0$ физическая область Ω, занимаемая материалом слоя, имеет вид $\Omega = \{-\infty < x_1 < \infty,\ 0 < x_2 < h\}$. Нижняя граница $x_2 = 0$ неподвижна, а верхняя $x_2 = h$ свободна от напряжений.

Тензорные определяющие соотношения вязкопластического материала с нелинейной вязкостью, связывающие девиатор напряжений $\underset{\sim}{s} = s_{ij}\boldsymbol{k}_i \otimes \boldsymbol{k}_j$ и тензор скоростей деформаций $v = v_{ij}\boldsymbol{k}_i \otimes \boldsymbol{k}_j$, записываются в виде

$$s_{ij} = 2T(U)v_{ij}/U \tag{9.2.1}$$

где $T = (\operatorname{tr} s^2/2)^{1/2}$ — максимальное касательное напряжение, $U = (2\operatorname{tr} v^2)^{1/2}$ — максимальная скорость скольжения. Инварианты T и U связаны скалярным определяющим соотношением $T = T(U)$, которое уже подставлено в (9.2.1).

В базис обезразмеривания включим величины ρ, g и h, не меняющиеся в процессе деформирования. Все дальнейшие формулы этого параграфа выписаны в безразмерном виде. Два уравнения движения

$$-p_{,1} + s_{1i,i} = \frac{dv_1}{dt} - \sin\beta, \quad -p_{,2} + s_{2i,i} = \frac{dv_2}{dt} + \cos\beta \tag{9.2.2}$$

вместе с условием несжимаемости

$$v_{i,i} = 0 \tag{9.2.3}$$

и соотношениями (9.2.1), куда надо подставить связь тензора $\underset{\sim}{v}$ и вектора $\boldsymbol{v}$, замыкают систему в области Ω относительно давления p и компонент v_1 и v_2.

Граничные условия при $x_2 = 0$, $x_2 = 1$ и на прямой $x_2 = \xi(t)$, отделяющей зону вязкопластического течения $\Omega_f = \{-\infty < x_1 < \infty,\ 0 < x_2 < \xi(t)\}$ от жёсткой прослойки $\Omega_r = \{-\infty < x_1 < \infty,\ \xi(t) < x_2 < 1\}$ (рис. 9.3) запишем в виде

$$\begin{array}{llll} x_2 = 0 & v_1 = v_2 = 0\,; & x_2 = 1 & p = s_{12} = 0 \\ x_2 = \xi(t) & T = \tau_s & & \end{array} \tag{9.2.4}$$

Будем разыскивать плоскопараллельные течения в Ω, такие что

$$v_1 = v(x_2, t),\ \ v_2 \equiv 0,\ \ U = 2|v_{12}| = |v_{,2}|,\ \ s_{11} = s_{22} = 0,\ \ T = |s_{12}| \tag{9.2.5}$$

Кроме того в начальный момент времени зададим функцию $v(x_2, 0)$

$$v(x_2, 0) = v_0(x_2) \tag{9.2.6}$$

где $v_0(x_2) \in C^1(\Omega)$ — монотонно неубывающая функция равная константе на некотором интервале $\Xi < x_2 < 1$. Число $1 - \Xi$ равно начальной толщине жёсткой зоны ($0 < \Xi < 1$).

Из второго уравнения (9.2.2) определяется профиль давления по толщине (гидростатика)

$$p(x_2) = (1 - x_2)\cos\beta, \tag{9.2.7}$$

а после подстановки (9.2.7) в первое уравнение (9.2.2) выписывается уравнение движения

$$s_{12,2} = v_t - \sin\beta, \qquad v_t \equiv \partial v/\partial t \tag{9.2.8}$$

Проинтегрируем (9.2.8) по x_2 в пределах жёсткой прослойки и воспользуемся граничными условиями (9.2.4) при $x_2 = 1$ и $x_2 = \xi(t)$

$$x_2 = \xi(t) \qquad v_t = \sin\beta - \frac{\tau_s}{1 - \xi(t)} \tag{9.2.9}$$

Равенство (9.2.9) служит для определения неизвестной границы $\xi(t)$. Им можно заменить условие (9.2.4) для s_{12} при $x_2 = 1$ и свести задачу к нахождению решения только в области Ω_f.

Выпишем сначала характеристики стационарного режима движения вязкопластического слоя по наклонной плоскости. Будем помечать параметры такого режима градусом. Решение

$$s_{12}^\circ = (1 - x_2)\sin\beta, \qquad \xi^\circ = 1 - \frac{\tau_s}{\sin\beta} \tag{9.2.10}$$

является классическим [34]. Заметим, что $s_{12}^\circ > 0$ всюду в Ω, следовательно, $v_{12}^\circ > 0$, $v_{,2}^\circ > 0$ в Ω и знаки модулей в (9.2.5) могут быть сняты. Слой $\xi^\circ < x_2 < 1$ занят жёсткой зоной, движущейся поступательно вдоль плоскости вниз, причём эта зона может охватывать всю область Ω в случае, когда $\tau_s > \sin\beta$. Гравитационных сдвиговых усилий при этом недостаточно, чтобы преодолеть пороговый предел, и будет иметь место покой. Распределение скоростей в об-

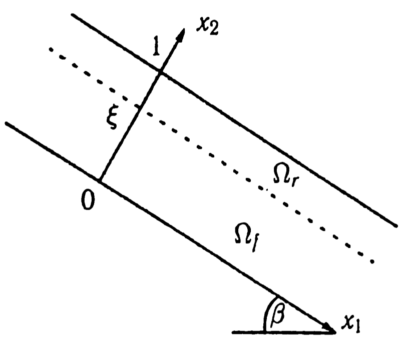


Рис. 9.3. Зона вязкопластического течения Ω_f и жёсткая прослойка Ω_r

ласти Ω следующее

$$v^{\circ}(x_2) = \begin{cases} \int\limits_0^{x_2} T^{-1}\big[(1-\eta)\sin\beta\big]\, d\eta\,, & 0 < x_2 < \xi^{\circ} \\ \int\limits_0^{\xi^{\circ}} T^{-1}\big[(1-\eta)\sin\beta\big]\, d\eta\,, & \xi^{\circ} < x_2 < 1 \end{cases} \tag{9.2.11}$$

Расход же через весь интервал $0 < x_2 < 1$ для кинематики (9.2.11) определяется формулой

$$\begin{aligned} Q = \int\limits_0^{\xi^{\circ}} \int\limits_0^{x_2} T^{-1}\big[(1-\eta)\sin\beta\big]\, d\eta\, dx_2 + \\ + \tfrac{\tau_s}{\sin\beta} \int\limits_0^{\xi^{\circ}} T^{-1}\big[(1-\eta)\sin\beta\big]\, d\eta \end{aligned} \tag{9.2.12}$$

9.2.2. Нелинейное параболическое уравнение в области с переменной границей

Перейдём к основной задаче неустановившегося движения слоя. Функция $v(x_2, t)$ согласно (9.2.8) и (9.2.10) удовлетворяет уравнению

$$\big[T(v_{,2})\big]_{,2} = v_t - \frac{\tau_s}{1-\xi^{\circ}} \tag{9.2.13}$$

Данное уравнение с граничными условиями, заданными при $x_2 = 0$ и $x_2 = \xi(t)$, относится к классу нелинейных параболических задач в области с неизвестной границей, определяемой в процессе решения [62, 115, 157].

Перейдём от пары независимых переменных $(x_2; t)$ к паре $(y; t)$ с помощью замены $y = 1 - x_2/\xi(t)$, так что в каждый момент времени все точки $0 < y < 1$ принадлежат зоне течения Ω_f. В переменных (y, t) начально-краевая задача принимает следующий вид

$$-\left[T\left(-\frac{v_y}{\xi}\right)\right]_y = \xi v_t + \dot{\xi}(1-y)v_y - \frac{\tau_s \xi}{1-\xi^{\circ}} \tag{9.2.14}$$

$$y = 1 \quad v = 0\,; \quad y = 0 \quad v_y = 0\,, \;\; v_t + \frac{\dot{\xi}}{\xi}(1-y)v_y = \frac{\tau_s}{1-\xi^{\circ}} - \frac{\tau_s}{1-\xi} \tag{9.2.15}$$

$$t = 0 \qquad v(y) = v_0\big((1-y)\Xi\big)\,, \quad \Xi = \xi(0) \tag{9.2.16}$$

Напомним, что дополнительное (второе) условие при $y = 0$ в (9.2.15) и в ниже следующих постановках задач служит для нахождения неизвестной функции $\xi(t)$. В этом заключается особенность формулировок задач о вязкопластическом течении в области с неизвестной границей.

Исследуем сначала случай линейного скалярного соотношения

$$T = \tau_s + \mu U \tag{9.2.17}$$

Постановку (9.2.14)–(9.2.16) можно переформулировать следующим образом:

$$\mu v_{yy} = \xi^2 v_t + \xi\dot{\xi}(1-y)v_y - \frac{\tau_s\xi^2}{1-\xi^\circ} \tag{9.2.18}$$

$$y=1 \qquad v=0\,; \quad y=0 \qquad v_y=0\,, \quad \mu v_{yy} = -\frac{\tau_s\xi^2}{1-\xi} \tag{9.2.19}$$

а начальное условие (9.2.16) останется в прежнем виде.

Введём новую неизвестную функцию $u(y,t)$ заменой

$$v = u + \frac{\tau_s\xi^2(1-y^2)}{2\mu(1-\xi)} \tag{9.2.20}$$

тем самым обеспечивая однородность граничных условий (9.2.19)

$$\begin{aligned} &\mu u_{yy} - \xi^2 u_t - \xi\dot{\xi}(1-y)u_y = \\ &\quad = \tfrac{\tau_s\xi^2(\xi-\xi^\circ)}{(1-\xi^\circ)(1-\xi)} + \tfrac{\tau_s\xi^3\dot{\xi}(1-y)(2-\xi+y\xi)}{2\mu(1-\xi)^2} \end{aligned} \tag{9.2.21}$$

$$y=1 \qquad u=0\,; \quad y=0 \qquad u_y=0\,, \quad u_{yy}=0 \tag{9.2.22}$$

$$t=0 \qquad u(y) = v_0\big((1-y)\Xi\big) - \frac{\tau_s\Xi^2(1-y^2)}{2\mu(1-\Xi)} \equiv u_0(y) \tag{9.2.23}$$

Решение начально-краевой задачи (9.2.21)–(9.2.23) в области с постоянными границами $y=0$ и $y=1$ будем разыскивать методом разделения переменных. Удовлетворяя однородным граничным условиям (9.2.22), представим $u(y,t)$ в виде степенного ряда

$$u(y,t) = \tau_s \sum_{n=3}^{\infty} T_n(t)\,(1-y^n) \tag{9.2.24}$$

Подставим ряд (9.2.24) в уравнение (9.2.21) и приравняем зависящие от t коэффициенты при одинаковых степенях y

$$\sum_{n=3}^{\infty} \dot{T}_n = -\frac{\xi-\xi^\circ}{(1-\xi^\circ)(1-\xi)} - \frac{\xi(2-\xi)\dot{\xi}}{2\mu(1-\xi)^2} \tag{9.2.25}$$

$$\begin{aligned} &T_3 = \tfrac{\xi^3\dot{\xi}}{6\mu^2(1-\xi)}, \quad T_4 = \tfrac{\xi^4\dot{\xi}}{24\mu^2(1-\xi)^2} + \tfrac{\xi\dot{\xi}}{4\mu}T_3 \\ &T_{n+2} = \tfrac{\xi^2\dot{T}_n - \xi\dot{\xi}\left(nT_n-(n+1)T_{n+1}\right)}{(n+1)(n+2)\mu} \qquad (n \geqslant 3) \end{aligned} \tag{9.2.26}$$

Все функции T_n $(n \geqslant 3)$ выражаются через $\xi(t)$ с помощью рекуррентной цепочки (9.2.26), после чего подставляются в уравнение (9.2.25). В итоге получится обыкновенное уравнение относительно $\xi(t)$ бесконечного порядка. Аналитическое исследование данной задачи связано с учётом конечного числа членов ряда, стоящего в левой части (9.2.25).

9.2.3. Приближение $Re \ll \sqrt{Fr}$

Заметим, что безразмерная вязкость μ, использовавшаяся до сих пор, выражается в базисе $\{\rho, g, h\}$ через размерную $\tilde{\mu}$ следующим образом

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\rho\sqrt{gh}h} = \frac{\tilde{\mu}}{\rho V h}\frac{V}{\sqrt{gh}} = \frac{\sqrt{Fr}}{Re} \tag{9.2.27}$$

где V — некоторая характерная скорость, Re — число Рейнольдса, Fr — число Фруда. Поэтому приближение $\mu \gg 1$ или $Re \ll \sqrt{Fr}$ соответствует случаю, когда вязкие составляющие проявляют себя гораздо сильнее гравитационных.

Нулевое приближение по параметру $1/\mu$ даёт стационарный режим $\xi \equiv \xi^\circ$, вообще говоря, не согласующийся с начальным условием $\xi(0) = \Xi$. В первом приближении по $1/\mu$ из (9.2.25) будем иметь задачу Коши

$$\dot{\xi} = -\frac{2\mu}{1-\xi^\circ}\frac{(\xi-\xi^\circ)(1-\xi)}{\xi(2-\xi)}, \quad \xi(0) = \Xi \tag{9.2.28}$$

Точное решение (9.2.28) имеет вид

$$\begin{aligned} &\xi(t) \equiv \xi^\circ\,, \text{ если } \Xi = \xi^\circ \\ &2\mu t = \ln\tfrac{1-\xi}{1-\Xi} - \xi^\circ(2-\xi^\circ)\ln\left|\tfrac{\xi-\xi^\circ}{\Xi-\xi^\circ}\right| - \\ &\quad -(1-\xi^\circ)(\xi-\Xi)\,, \quad \text{если } \Xi \neq \xi^\circ \end{aligned} \tag{9.2.29}$$

Учёт первого и первых двух членов ряда в левой части (9.2.25) приводит к двум независимым задачам Коши для уравнений второго порядка относительно $\xi(t)$

$$\dot{T}_3 = -\frac{\xi-\xi^\circ}{(1-\xi^\circ)(1-\xi)} - \frac{\xi(2-\xi)\dot{\xi}}{2\mu(1-\xi)^2} \tag{9.2.30}$$

либо

$$\dot{T}_3 + \dot{T}_4 = -\frac{\xi-\xi^\circ}{(1-\xi^\circ)(1-\xi)} - \frac{\xi(2-\xi)\dot{\xi}}{2\mu(1-\xi)^2} \tag{9.2.31}$$

Начальная граница жёсткой зоны, по-прежнему, равна Ξ, а $\dot{\xi}(0)$ вычисляется из первого по $1/\mu$ приближения (9.2.29) по формуле (9.2.28).

На рис. 9.4 для случая $\xi^\circ = 1/2$ приведены решения трёх задач Коши: кривые (a) соответствуют точному решению (9.2.29) первого приближения при $\Xi = 0.99, 0.7, 0.3$; кривые (b) и (c) — решениям уравнений (9.2.30) и (9.2.31) при тех же начальных значениях Ξ. Поведение всех кривых показывает, что при

$\Xi \neq \xi^\circ$ предельная толщина жёсткой зоны вблизи свободной границы достаточно быстро стремится к своему значению в стационарном движении. При этом переходный процесс торможения слоя ($\Xi > \xi^\circ$) происходит медленнее процесса разгона ($\Xi < \xi^\circ$).

Предположим, что при $t \to \infty$ решение уравнения второго порядка (9.2.31) имеет стационарную асимптоту

$$\xi(t) \to \xi^\circ + \gamma(t)\,, \quad \gamma, \dot\gamma, \ddot\gamma \to 0 \tag{9.2.32}$$

и линеаризуем по γ (9.2.31)

$$\ddot\gamma + 12\mu\frac{(2-\xi^\circ)\dot\gamma}{(4-3\xi^\circ)\xi^{\circ 2}} + 24\mu^2\frac{\gamma}{(4-3\xi^\circ)\xi^{\circ 2}} = 0 \tag{9.2.33}$$

Коэффициенты при γ и $\dot\gamma$ в (9.2.33) положительны, что говорит об отрицательности действительных частей характеристических корней λ_1, λ_2

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\sqrt{3}\mu}{(4-3\xi^\circ)\xi^{\circ 2}}\left[-\sqrt{3}(2-\xi^\circ) \pm \sqrt{9\xi^{\circ 2} - 20\xi^\circ + 12}\right] \tag{9.2.34}$$

Из (9.2.34) видно, что $\lambda_{1,2}$ действительны при любом ξ°, т. е. $\gamma(t)$ экспоненциально убывает к нулю, а в силу (9.2.32) граница жёсткой прослойки $\xi(t)$ экспоненциально стремится к ξ°.

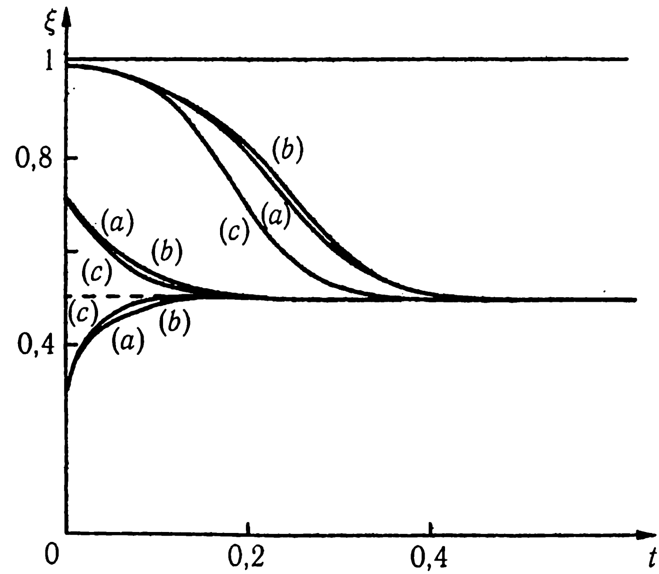


Рис. 9.4. Графики зависимости $\xi(t)$ при различных начальных значениях $\xi(0) = \Xi$

9.2.4. Модели с нелинейным скалярным соотношением

Приведём постановки начально-краевых задач в некоторых случаях нелинейной скалярной связи T и U (вместо (9.2.17)), а именно, логарифмической и тригонометрической.

Стационарный профиль продольной скорости $v^\circ(x_2)$ в случае логарифмического скалярного соотношения

$$T(U) = \tau_s + \mu \ln(1 + U) \tag{9.2.35}$$

имеет вид ($0 < x_2 < \xi^\circ$)

$$v^\circ = \frac{\mu}{\sin\beta}\left(\exp\frac{\sin\beta - \tau_s}{\mu} - \exp\frac{(1 - x_2)\sin\beta - \tau_s}{\mu}\right) - x_2 \tag{9.2.36}$$

а расход Q через сечение слоя вычисляется по формуле (9.2.12). Подставляя (9.2.35) в (9.2.14), придём к нелинейному уравнению

$$\mu v_{yy} = (\xi - v_y)\left(\xi v_t + \dot{\xi}(1 - y)v_y - \frac{\tau_s \xi}{1 - \xi^\circ}\right) \tag{9.2.37}$$

к которому необходимо добавить начальное условие (9.2.16) и граничные условия

$$y = 1 \quad v = 0\,; \quad y = 0 \quad v_y = 0\,, \ \mu v_{yy} = -\frac{\tau_s \xi}{1 - \xi}(\xi - v_y) \tag{9.2.38}$$

Однородность условий (9.2.38) достигается заменой $v = u + w$, где $w(y, t)$ удовлетворяет линейной задаче

$$\mu w_{yy} - \frac{\tau_s \xi}{1 - \xi} w_y + \frac{\tau_s \xi^2}{1 - \xi} = 0 \tag{9.2.39}$$

$$y = 1 \quad w = 0\,; \qquad y = 0 \quad w_y = 0 \tag{9.2.40}$$

Заметим, что в задачу (9.2.39), (9.2.40) время или функция $\xi(t)$ входят лишь как параметры.

Тригонометрическое упрочнение

$$T(U) = \tau_s + (2\mu/\pi)\operatorname{arctg} U \tag{9.2.41}$$

означает, что максимальное касательное напряжение ограничено снизу константой τ_s, а сверху константой $\tau_s + \mu$. Материал при большой скорости скольжения ведёт себя как идеально пластическое тело с пределом текучести при сдвиге $\tau_s + \mu$. Такое тело моделирует движение, при котором соседние слои слабо сцеплены друг с другом (камнепад, мелкозернистый селевой поток и т. д.). Профиль стационарного течения имеет вид ($0 < x_2 < \xi^\circ$)

$$v^\circ = \frac{2\mu}{\pi \sin\beta} \ln \frac{\cos\left[\pi\big((1 - x_2)\sin\beta - \tau_s\big)/(2\mu)\right]}{\cos\left[\pi(\sin\beta - \tau_s)/(2\mu)\right]} \tag{9.2.42}$$

Подставляя (9.2.41) в (9.2.14), получим нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{2\mu}{\pi}\xi v_{yy} = (\xi^2 + v_y^2)\left(\xi v_t + \dot{\xi}(1-y)v_y - \frac{\tau_s \xi}{1-\xi^{\circ}}\right) \tag{9.2.43}$$

к которому необходимо добавить начальное условие (9.2.16) и граничные условия

$$y = 1 \quad v = 0\,; \quad y = 0 \quad v_y = 0\,, \quad \frac{2\mu}{\pi}v_{yy} = -\frac{\tau_s}{1-\xi}(\xi^2 + v_y^2) \tag{9.2.44}$$

Решение двух нелинейных параболических задач (9.2.37), (9.2.38), (9.2.16) и (9.2.43), (9.2.44), (9.2.16) позволяет описать влияние сложной реологии на параметры разгона и торможения тяжёлого слоя на наклонной плоскости.

9.3. Схлопывание сферического пузырька в вязкопластическом пространстве

При схлопывании сферического пузырька в несжимаемой идеальной жидкости скорость поверхности пузырька, направленная к его центру, перед самым схлопыванием неограниченно растёт как $r^{-3/2}$ Большие приращения местных давлений (порядка сотни атмосфер) считаются возможной причиной возникновения кавитации [14, 105].

В вязкой жидкости при наличии поверхностного натяжения существуют два режима схлопывания [80, 310]: при давлении на бесконечности меньшем критического пузырьки схлопываются за неограниченное время; при давлении большем критического в некоторый момент происходит быстрое схлопывание, сопровождающееся неограниченной кумуляцией энергии. Численный анализ этих явлений выполнен в [3, 27]. Влияние релаксационных эффектов в вязкоупругих жидкостях в рамках общей модели Максвелла учтено в обзоре [29], а некоторые результаты физических и численных экспериментов приведены в [228, 257, 320].

Ниже описывается эволюция радиуса пузырька в вязкопластической среде и нелинейно-вязкой жидкости с логарифмическим и тригонометрическим упрочнениями. Проводится сравнение полученных результатов с имеющимися классическими для ньютоновской жидкости [51].

9.3.1. Движение границы пузырька в сферически неоднородной среде. Задача Коши

Рассмотрим эволюцию сферического пузырька радиуса $R(t)$ в несжимаемой вязкопластической среде с произвольным упрочнением, параметры которой могут зависеть от расстояния до центра. Будем предполагать, что движение среды в сферической системе координат, связанной с центром пузырька, радиальное

($v_\theta = v_\varphi = 0$). Тогда из условия несжимаемости следует, что

$$v_r = -\frac{V(t)}{r^2} \tag{9.3.1}$$

Имеем единственное уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{9.3.2}$$

с граничными условиями $\sigma_{rr}(\infty) = -p_\infty$, $\sigma_{rr}(R) = 0$, где p_∞ — заданное давление на бесконечности.

Векторные определяющие соотношения вязкопластической среды, связывающие девиатор напряжений s_{ij} и скорость деформаций v_{ij}, имеют вид $s_{ij} = 2\mathrm{M}(U)\, v_{ij}$. Функцию $\mathrm{M}(U)$ для удобства представим следующим образом

$$\mathrm{M}(U) = \frac{\tau}{U} + 1 - F(U), \quad \tau = \frac{\rho \tau_s R^2(0)}{\mu^2} \tag{9.3.3}$$

где τ — безразмерный параметр задачи, зависящий от радиуса r; μ — динамическая вязкость среды при $U \to 0$; $F(U)$ — функция упрочнения, удовлетворяющая необходимым условиям монотонности и выпуклости [45]. Все дальнейшие соотношения параграфа выписаны в безразмерном виде, причём в базис обезразмеривания включены величины $\{\rho, R(0), \mu\}$.

Используя (9.3.3), найдём, что ненулевые компоненты напряжений связаны с $V(t)$ следующим образом

$$\sigma_{rr} = -p + \tfrac{2\tau}{\sqrt{3}} + \tfrac{4(1-F)V}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p - \tfrac{\tau}{\sqrt{3}} - \tfrac{2(1-F)V}{r^3}, \tag{9.3.4}$$

Проинтегрируем уравнение движения (9.3.2) по r в пределах от $R(t)$ до бесконечности с учётом выписанных ранее граничных условий

$$-p_\infty + \int\limits_R^\infty \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} dr = -\frac{\dot{V}}{R} - \frac{V^2}{2R^4} \tag{9.3.5}$$

и подставим (9.3.4) в (9.3.5). Пользуясь тем, что на границе пузырька $V(t) = -R^2(t)\dot{R}(t)$, после некоторых преобразований запишем

$$\begin{aligned} R\ddot{R} + \tfrac{3}{2}\dot{R}^2 &= -\tfrac{4\dot{R}}{R} + 2\sqrt{3}\int\limits_R^\infty \tfrac{\tau(r)}{r} dr + \\ &+ 12R^2\dot{R}\int\limits_R^\infty F\left(\tfrac{-2\sqrt{3}R^2\dot{R}}{r^3}\right)\tfrac{dr}{r^4} - p_\infty \end{aligned} \tag{9.3.6}$$

$$R(0) = 1, \quad \dot{R}(0) = 0 \tag{9.3.7}$$

Задача Коши (9.3.6), (9.3.7) описывает эволюцию радиуса пузырька при $t > 0$. В случае идеальной жидкости ($\tau \equiv 0$, $F \equiv 1$) она аналитически интегрируется

$$t = \sqrt{\frac{3}{2p_\infty}} \int_R^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}} dx \tag{9.3.8}$$

Положив в (9.3.8) $R = 0$ получим результат Рэлея — безразмерное время полного схлопывания пузырька

$$t = \sqrt{\frac{3}{2p_\infty}} \frac{\Gamma(5/6)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/3)} \approx \frac{0,915}{\sqrt{p_\infty}} \tag{9.3.9}$$

В случае же ньютоновской жидкости ($\tau \equiv 0$, $F \equiv 0$) имеют место результаты работ [3, 27, 80, 310].

В общем виде задача Коши (9.3.6), (9.3.7) эквивалентна интегродифференциальному уравнению относительно $Q(R) = \dot{R}$

$$\begin{aligned} RQQ' + \tfrac{3}{2}Q^2 = -4\tfrac{Q}{R} + 2\sqrt{3}\int_R^\infty \tfrac{\tau(r)}{r}dr + \\ +12R^2Q\int_R^\infty F\left(\tfrac{-2\sqrt{3}R^2Q}{r^3}\right)\tfrac{dr}{r^4} - p_\infty \end{aligned} \tag{9.3.10}$$

с граничным условием $Q(1) = 0$.

9.3.2. Влияние пластической составляющей

Исследуем влияние нелинейности и неоднородности среды на движение границы пузырька. Пусть сначала $F \equiv 0$, а $\tau(r)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, такая, что дробь $\tau(r)/r$ интегрируема на интервале $R < r < \infty$. В частности, если вязкопластическая среда однородна и неограничена, то в правой части (9.3.6) имеется логарифмическая особенность на бесконечности, и при любом конечном p_∞ вся область $1 < r < \infty$ занята жёсткой зоной.

Численный анализ обнаружил наличие двух давлений: страгивающего p^{**} и критического p^*. Радиус пузырька начинает уменьшаться, если $p_\infty > p^{**}$

$$p^{**} = 2\sqrt{3} \min_{0<R<1} \int_R^\infty \frac{\tau(r)}{r} dr \tag{9.3.11}$$

и при $p_\infty < p^*$ плавно стремится к положительной константе $R(\infty)$, определяемой из уравнения

$$2\sqrt{3}\int\limits_{R(\infty)}^{\infty}\frac{\tau(r)}{r}dr = p_\infty \qquad (9.3.12)$$

При $p_\infty > p^*$ в некоторый момент времени происходит быстрое схлопывание пузырька [66]. Давление страгивания p^{**} в вязкой жидкости равно нулю.

На рис. 9.5 приведены кривые $R(t)$ при разных $p_\infty > p^{**}$ для зависимости $\tau(r)$

$$\tau(r) = \begin{cases} \tau = \text{const}, & \text{если } R < r < (R^3 + R_1^3 - 1)^{1/3} \\ 0, & \text{если } r \geqslant (R^3 + R_1^3 - 1)^{1/3} \end{cases} \qquad (9.3.13)$$

Значения R_1 и τ выбраны равными 10 и 1; кривым *1–4* соответствуют давления $p_\infty = 8;\ 10;\ 15$ и 20. Значения страгивающего и критического давлений в данном случае приближённо равны $7,976$ и $16,55$ соответственно. Для зависимости $\tau(r) = 1/r$, $r > R$ кривые $R(t)$ имеют аналогичный вид ($p^{**} \approx 3,464$, $p^* \approx 39,63$).

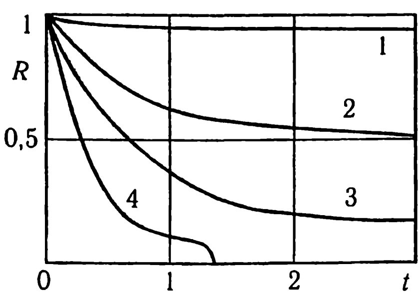


Рис. 9.5. Графики зависимости радиуса пузырька R от времени при различных значениях p_∞

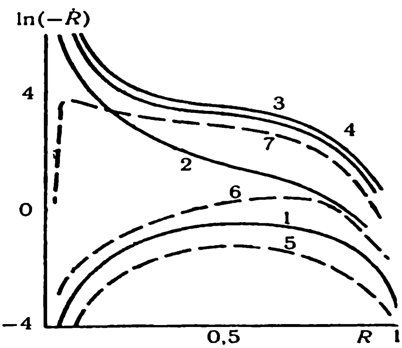


Рис. 9.6. Решения задачи Коши (9.3.6), (9.3.7) для функции упрочнения (9.3.14) при различных значениях p_∞

9.3.3. Влияние упрочнения

Пусть теперь $\tau(r) = 0$ и физическая нелинейность среды связана только с наличием $F(U)$. Исследуем численно поведение пузырька для логарифмического и тригонометрического упрочнений

$$F(U) = 1 - F_1 \frac{\ln(1+U)}{U}, \quad F_1 > 0, \tag{9.3.14}$$

$$F(U) = 1 - \frac{2F_2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg} U}{U}, \quad F_2 > 0 \tag{9.3.15}$$

На рис. 9.6 в фазовой плоскости $(R, \ln(-\dot{R}))$ изображены решения задачи (9.3.6), (9.3.7) с функцией F в виде (16.14) при $F_1 = 1$ для $p_\infty = 1$; 5; 50 и 100 (кривые *1–4* соответственно. Для первых трёх значений p_∞ штриховой линией отмечены кривые (*5–7*) в случае ньютоновской жидкости. Значение критического давления p^*, для ньютоновской жидкости, при котором эти кривые начинают стремиться в $+\infty$ при $R \to 0$ ($t \to \infty$), равно $70,6$ [80]. Этот результат подтверждается и настоящим численным анализом ($p^* \approx 71,4$). Наличие логарифмического упрочнения (9.3.14) очень сильно снижает критическое значение p^* по сравнению с вязким случаем: $p^*_{\ln} \approx 1,75$.

Тригонометрическое упрочнение в виде (9.3.15) означает, что максимальное касательное напряжение ограничено сверху величиной F_2 при сколь угодно большом U, и данная модель близка к идеальнопластической модели Сен-Венана. Решения задачи (9.3.6), (9.3.7) с функцией F в виде (9.3.15) качественно не отличаются от решений, приведённых на рис. 9.6. Значение критического давления p^*_{arctan} в данном случае равно $2,66$, что также во много раз ниже критического значения для вязкой жидкости.

Введение физической нелинейности окружающей пузырёк среды, как видно, существенно влияет на безразмерное критическое давление на бесконечности.

Глава 10

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Исследование устойчивости невозмущённого состояния в физическом теле относительно малых возмущений приводит к линеаризованной краевой проблеме, включающей в себя систему линейных по скоростям уравнений в области, систему граничных условий, снесённых на невозмущённые поверхности тела, и, возможно, начальные условия. В случае стационарного основного движения эта проблема сводится к задаче на собственные значения. Примером здесь служит классическая задача Орра–Зоммерфельда для одномерного сдвига вязкой жидкости [26, 64].

Подобная методика применима и при изучении устойчивости тел с нелинейными определяющими соотношениями. Структура соответствующих уравнений здесь существенно сложнее чем в линейной модели. Для вязкопластических течений задача осложняется наличием жёстких зон, границы которых могут меняться в процессе возмущённого движения.

10.1. Краевая задача устойчивости относительно малых возмущений

Настоящий и следующий параграфы посвящены постановке и анализу линеаризованной краевой задачи устойчивости тела с достаточно общей связью напряжений и скоростей деформаций, допускающей как упрочнение, так и существование предела текучести. Основное течение рассматривается в трёхмерной либо двумерной области, на границе которой заданы условия одного из трёх типов. Обсуждаются случаи, когда трёхмерная картина возмущений может быть сведена к двумерной. На основе метода интегральных соотношений строятся различные независимые оценки устойчивости основного течения. В эти оценки входят физические свойства материала, геометрия области и максимальная скорость скольжения в невозмущённом состоянии. Основные результаты формулируются в виде нескольких теорем и следствий из них [44, 46, 50].

10.1.1. Определяющие соотношения материала

В главе 8 уже подробно шла речь о различных видах определяющих соотношений в МСС, а разд. 8.4 был посвящён вязкопластическим моделям. Однако в силу большой важности и сильной зависимости результатов в задачах устойчивости от определяющих соотношений материала ещё раз остановимся вкратце на этих вопросах.

Пусть тяжёлое изотропное несжимаемое тело с плотностью ρ занимает в момент t физическую область Ω эйлерова пространства с декартовой системой координат $(Ox_1x_2x_3)$. Эта область ограничена кусочно-гладкой поверхностью Σ ($\Sigma = \Sigma_v \cup \Sigma_s$). Выделим также в Ω некоторую совокупность Ω_r подобластей Ω_{ri} с кусочно-гладкими границами Σ_{ri}, причём Σ_{ri} могут иметь общие точки с Σ_v либо с Σ_s.

Определяющие соотношения в теле Ω, связывающие напряжения $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ и скорости деформаций $v_{ij}(\boldsymbol{x},t)$, могут быть представлены в виде объединения векторных (тензорных) и скалярных определяющих соотношений. Векторные соотношения связывают девиатор $s_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ напряжений ($s_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t) + p(\boldsymbol{x},t)\delta_{ij}$) и девиатор скоростей деформаций, который в силу несжимаемости совпадает с самим тензором скоростей деформаций $v_{ij}(\boldsymbol{x},t)$.

Общий вид изотропной потенциальной функции, связывающей два симметричных тензора $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$ с нулевыми следами, таков (см. (8.1.17) и (8.1.21))

$$s_{ij} = 2\mathrm{M}_1 v_{ij} + \mathrm{M}_2\left(v_{ik}v_{kj} - \frac{U^2}{6}\delta_{ij}\right), \tag{10.1.1}$$

где M_1 и M_2 — скалярные функции двух инвариантов тензора $\underset{\sim}{v}$: максимальной скорости скольжения $U = (2v_{ij}v_{ij})^{1/2}$ и кубического инварианта $J \equiv I_{v3}^3 = v_{ij}v_{jk}v_{ki}$. Третье условие потенциальности (8.1.16) означает, что $3U\partial\mathrm{M}_1/\partial J = \partial\mathrm{M}_2/\partial U$.

Если же изотропная тензорная функция (10.1.1) ещё и квазилинейна (см. п. 8.4.1), то $\mathrm{M}_2 \equiv 0$, $\mathrm{M}_1 \equiv \mathrm{M}(U)$, что соответствует нелинейно-вязкой жидкости либо вязкопластическому телу

$$s_{ij} = 2\mathrm{M}(U)\, v_{ij} \tag{10.1.2}$$

Величина M представляет собой отношение максимального касательного напряжения $T = (s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ к максимальной скорости скольжения U. Скалярное определяющее соотношение $T = T(U)$ для квазилинейных (тензорно линейных) тел (10.1.2) характеризует собственно реологию материала. В случаях, когда кривая $T(U)$ выпукла вверх ($T^{\bullet\bullet} < 0$), говорят, что материал обладает мягкой характеристикой, а если вниз ($T^{\bullet\bullet} > 0$), то жёсткой. Жирная точка $\bullet$ в верхнем индексе всюду означает производную от данной величины по скалярному аргументу U. Единственная физически линейная модель, описываемая соотношениями (10.1.2), имеет место при $\mathrm{M} \equiv \mu = \mathrm{const}$ и представляет собой ньютоновскую жидкость с динамической вязкостью μ.

Деформирование вязкопластических тел с пределом текучести τ_s происходит лишь там и тогда, где и когда $T(\boldsymbol{x}, t) > \tau_s$, остальная же область Ω_r занята жёстким ядром течения. Таким образом, граница Σ_r определяется из условия

$$\boldsymbol{x} \in \Sigma_r \qquad T(\boldsymbol{x}, t) = \tau_s \tag{10.1.3}$$

Выберем одной из физических величин, входящих в базис обезразмеривания, плотность ρ. В качестве двух других могут быть выбраны характерные скорость V и линейный размер h области Ω. В таком базисе величины, обратные безразмерной вязкости и безразмерному ускорению силы тяжести g, как известно, называются числом Рейнольдса $Re = \rho V h/\mu$ и числом Фруда $Fr = V^2/(gh)$. Если динамическая вязкость материала μ зависит от U, то число Re также является функцией U. Если же в этом случае μ надо включить в базис обезразмеривания, то будем выбирать значение μ при $U \to 0$. Введём в рассмотрение также число Сен-Венана–Ильюшина $\varkappa = \tau_s h/(\mu V)$, характеризующее влияние пластических свойств по сравнению с вязкими и играющее важную роль в теории вязкопластичности [87].

10.1.2. Постановка начально-краевой задачи устойчивости

Уравнения движения и условие несжимаемости в безразмерных переменных имеют вид

$$-p_{,i} + s_{ij,j} + F_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} \tag{10.1.4}$$

$$v_{i,i} = 0 \tag{10.1.5}$$

Для задания граничных и начальных условий потребуем

$$\boldsymbol{x} \in \Sigma_v \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t) \tag{10.1.6}$$

$$\boldsymbol{x} \in \Sigma_s \qquad \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t) n_j(\boldsymbol{x}, t) = P_i(\boldsymbol{x}, t) \tag{10.1.7}$$

$$t = 0 \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \vec{v}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{10.1.8}$$

Пусть уравнения самих поверхностей Σ_v: $F_v(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0$, Σ_s: $F_s(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0$, Σ_r: $F_r(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0$ допускают представления $x_3 = f_v(x_1, x_2, t)$, $x_3 = f_s(x_1, x_2, t)$, $x_3 = f_r(x_1, x_2, t)$ соответственно. Движение этих поверхностей с течением времени определяется из уравнений

$$\frac{\partial f_{(v;s;r)}}{\partial t} = v_3 - v_1 \frac{\partial f_{(v;s;r)}}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial f_{(v;s;r)}}{\partial x_2}, \quad \boldsymbol{x} \in \Sigma_{(v;s;r)} \tag{10.1.9}$$

Для постановки начально-краевой задачи четыре уравнения (10.1.4), (10.1.5) и шесть соотношений Стокса, из которых в силу (10.1.5) только пять независимы, следует замкнуть в области шестью определяющими соотношениями среды $\underset{\sim}{s} = \check{\mathcal{F}}(\underset{\sim}{v})$ или $\underset{\sim}{v} = \check{\mathcal{G}}(\underset{\sim}{s})$, из которых независимы также только пять, задать граничные условия (10.1.3), (10.1.6), (10.1.7) на поверхностях, движущихся по закону (10.1.9), и начальное условие (10.1.8). В результате решения и определения четырнадцати функций в Ω (три компоненты v_i, функция давления p, и две пятёрки независимых компонент тензоров $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$) из (10.1.3) можно найти закон изменения границ Σ_{ri} жёстких зон.

Для статически определимой исходной начально-краевой задачи по найденному полю напряжений строится величина $T(\boldsymbol{x}, t)$ и в случае, если она принимает значение τ_s на множестве, объёмная мера которого равна нулю, из (10.1.3) однозначно определяются поверхности Σ_{ri}, ограничивающие жёсткие зоны (жёсткие ядра) Ω_{ri}. В случае же статически неопределимой задачи, решаемой в скоростях, единственность решения зависит от класса функций, в котором оно ищется. Если векторное поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ разыскивается в классе непрерывно дифференцируемых вплоть до границы Ω функций, то поверхности жёстких зон Σ_{ri} и само поле скоростей определяются однозначно.

Основное движение, являющееся решением поставленной начально-краевой задачи будем помечать индексом «o». Для исследования устойчивости предположим, что на основное состояние системы наложены малые возмущения

$$\begin{aligned} &v_i = v_i^\circ + \delta v_i, \qquad v_{ij} = v_{ij}^\circ + \delta v_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\circ + \delta\sigma_{ij}, \\ &p = p^\circ + \delta p, \qquad s_{ij} = s_{ij}^\circ + \delta s_{ij} \end{aligned} \tag{10.1.10}$$

Так как в дальнейшем будут встречаться величины, входящие только в правые части равенств (10.1.10), то будем опускать знак δ у возмущений.

Линеаризуем уравнения (10.1.4), (10.1.5) и соотношения Стокса вблизи основного движения, считая квадраты безразмерных возмущений всех величин много меньше самих возмущений. Получим

$$-p_{,i} + s_{ij,j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j^\circ v_{i,j} + v_{i,j}^\circ v_j \tag{10.1.11}$$

$$v_{i,i} = 0 \tag{10.1.12}$$

$$2v_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} \tag{10.1.13}$$

Варьируя определяющие соотношения, взятые в общем виде (10.1.1), после некоторых преобразований найдём, что

$$s_{ij} = W_{ijkl}^\circ v_{ij}, \tag{10.1.14}$$

где

$$
\begin{aligned}
W^{\circ}_{ijkl} &= 2\mathrm{M}_1\Delta_{ijkl} + \mathrm{M}_2\Big(v^{\circ}_{i(k}\delta_{l)j} + v^{\circ}_{j(k}\delta_{l)i} - \tfrac{2}{3}v^{\circ}_{kl}\delta_{ij}\Big) + \\
&+ 2U^{\circ}\tfrac{\partial \mathrm{M}_1}{\partial U^{\circ}}V^{\circ}_{ijkl} + U^{\circ}\tfrac{\partial \mathrm{M}_2}{\partial U^{\circ}}\Big[\Big(V^{\circ}_{immj} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\Big)v^{\circ}_{kl} + V^{\circ}_{knnl}v^{\circ}_{ij}\Big] + \\
&+ \tfrac{3}{4}(U^{\circ})^4\tfrac{\partial \mathrm{M}_2}{\partial J^{\circ}}\Big(V^{\circ}_{immj} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\Big)V^{\circ}_{knnl},
\end{aligned}
\tag{10.1.15}
$$

$$
\Delta_{ijkl} = \delta_{i(k}\delta_{l)j}, \quad V^{\circ}_{ijkl} = \frac{2v^{\circ}_{ij}v^{\circ}_{kl}}{(U^{\circ})^2}, \tag{10.1.16}
$$

Открывающиеся и закрывающиеся скобки в индексах означают операцию альтернирования. Тензоры четвёртого ранга W°_{ijkl} и V°_{ijkl} зависят только от основного состояния системы, поэтому помечены индексом «о», причём V°_{ijkl} зависит лишь от кинематики невозмущённого движения. Этот тензор имеет стандартные типы симметрии $V^{\circ}_{ijkl} = V^{\circ}_{jikl} = V^{\circ}_{klij}$, а кроме того $V^{\circ}_{iikl} = 0$ в силу несжимаемости основного течения и $V^{\circ}_{ijij} = 1$ в силу нормировки.

Если же связь тензоров $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$ квазилинейна, т. е. выбрана в форме (10.1.2), то соотношения (10.1.15) упростятся:

$$
W^{\circ}_{ijkl} = 2\mathrm{M}\Delta_{ijkl} + 2U^{\circ}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial U^{\circ}}V^{\circ}_{ijkl} \tag{10.1.17}
$$

Проблемы устойчивости процессов деформирования таких тел впервые были затронуты в классических работах [87, 95, 96].

Линеаризация граничных условий (10.1.6), (10.1.7), (10.1.3) представляет собой их снесение с возмущённых поверхностей $x_3 = f_{(v;s;r)}(x_1, x_2, t) + \eta_{(v;s;r)}(x_1, x_2, t)$ на невозмущённые $x_3 = f_{(v;s;r)}(x_1, x_2, t)$. Будем иметь

$$
x_3 = f_v(x_1, x_2, t) \qquad v_i = \eta_v\frac{\partial(W^{\circ}_i - v^{\circ}_i)}{\partial x_3} + \delta W_i, \tag{10.1.18}
$$

$$
x_3 = f_s(x_1, x_2, t) \qquad \sigma_{ij}n^{\circ}_j = -\sigma^{\circ}_{ij}n_j + \eta_s\frac{\partial(P^{\circ}_i - \sigma^{\circ}_{ij}n^{\circ}_j)}{\partial x_3} + \delta P_i, \tag{10.1.19}
$$

$$
x_3 = f_r(x_1, x_2, t) \qquad 2v^{\circ}_{ij}v_{ij} + \eta_r U^{\circ}\frac{\partial U^{\circ}}{\partial x_3} = 0, \tag{10.1.20}
$$

где δW_i, δP_i — вариации внешних данных, заданные на соответствующих поверхностях. Если же внешние данные фиксированы в основном и возмущённом движениях, то в (10.1.18), (10.1.19) надо положить $\delta W_i = 0$, $\delta P_i = 0$.

Компоненты нормали n°_i и δn_i, входящие в условия (10.1.19), выражаются через f_s и n_s следующим образом

$$
\begin{aligned}
&n^{\circ}_J = \frac{f_{sJ}}{|n^{\circ}|}, \quad n^{\circ}_3 = \frac{1}{|n^{\circ}|}, \quad J;L = 1;2 \\
&n_J = \frac{\eta_{sJ}}{|n^{\circ}|} - \frac{f_{s.L}f_{sJ}\eta_{s.L}}{|n^{\circ}|^3}, \quad n_3 = \frac{f_{s.L}\eta_{s.L}}{|n^{\circ}|^3},
\end{aligned}
\tag{10.1.21}
$$

Если область Ω занимает две среды (1) и (2) с границей раздела Σ_c: $x_3 = f(x_1, x_2, t)$ в основном движении и $x_3 = (f_c + \eta_c)(x_1, x_2, t)$ в возмущённом, то необходимо ставить контактные условия на Σ_c. Линеаризованные кинематические условия совместности, снесённые на Σ_c, имеют вид

$$v_i^{(1)} - v_i^{(2)} + \eta_c \frac{\partial}{\partial x_3}(v_i^{\circ(1)} - v_i^{\circ(2)}) = 0, \tag{10.1.22}$$

а динамические

$$(\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)})n_j^\circ + (\sigma_{ij}^{\circ(1)} - \sigma_{ij}^{\circ(2)})n_j + \eta_c \frac{\partial}{\partial x_3}[(\sigma_{ij}^{\circ(1)} - \sigma_{ij}^{\circ(2)})n_j^\circ] = 0 \tag{10.1.23}$$

Линеаризуя далее уравнение (10.1.9), получим закон движения возмущённых поверхностей $\Sigma_v, \Sigma_s, \Sigma_r, \Sigma_c$

$$\frac{\partial \eta_{(v;s;r;c)}}{\partial t} = v_3 - v_J^\circ \frac{\partial \eta_{(v;s;r;c)}}{\partial x_J} - v_J \frac{\partial f_{(v;s;r;c)}}{\partial x_J}, \quad \boldsymbol{x} \in \Sigma_{(v;s;r;c)} \tag{10.1.24}$$

Кроме того потребуем, чтобы

$$t = 0 \qquad \delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{10.1.25}$$

Таким образом, трёхмерная краевая задача устойчивости нелинейного течения заключается в решении четырёх уравнений (10.1.11), (10.1.12), куда с помощью (10.1.13), (10.1.14) подставлены выражения $\underset{\sim}{s}$ через $\boldsymbol{v}$, с граничными условиями (10.1.18) – (10.1.20) и, возможно, (10.1.22), (10.1.23), выполненными на поверхностях, определяемых уравнением (10.1.24). Для нестационарного основного течения присоединим и начальное условие (10.1.25).

10.1.3. Общая схема метода интегральных соотношений

Приведём ниже общую схему применения метода интегральных соотношений для анализа линеаризованной краевой задачи устойчивости некоторого невозмущённого процесса деформирования. Этот метод, использованный ранее в задачах устойчивости одномерного плоскопараллельного сдвига в слое идеальной (задача Рэлея), вязкой (задача Орра—Зоммерфельда), идеальной стратифицированной (задача Тейлора—Гольдштейна), а также вязкой стратифицированной (задача Дразина) жидкостей, позволяет получать довольно общие (в основном, достаточные) признаки устойчивости. В широком смысле он включает в себя использование различных интегральных неравенств (типа неравенств Фридрихса, Пуанкаре, Шварца) и априорных оценок в различных функциональных пространствах. В силу сложной структуры уравнений устойчивости в области (несмотря на их линейность) и невозможности выписать их точные фундаментальные решения для дальнейшей подстановки в граничные условия, учитываются лишь общие характеристики невозмущённого процесса такие, как физико-механические параметры, геометрия области, профиль скорости. Начиная с первых классических результатов по устойчивости течений идеальной жидкости (теорема Рэлея о точке перегиба, теоремы Фьортьофта и Ховарда о полукруге) вплоть до современных исследований, учитывающих рейнольдсову и рэлеевскую вязкости тела, электромагнитные свойства и другие эффекты, метод интегральных соотношений нашёл широкое применение (см., например, обзор [107]).

Пусть жёсткие зоны в области течения Ω отсутствуют, а вся поверхность Σ, ограничивающая Ω, состоит из части Σ_v, т. е. на ней заданы только кинематические граничные условия, не меняющиеся при переходе от основного движения к возмущённому:

$$\boldsymbol{x} \in \Sigma \qquad v_i = 0 \tag{10.1.26}$$

Пусть также каждая компонента $\boldsymbol{v}$ — элемент вещественнозначного пространства $\mathbb{F}_2^0(\bar{\Omega})$ со стандартной в нём нормой [180]. Умножим обе части (10.1.11) на v_i, просуммируем по i и проинтегрируем по Ω. Тогда с учётом (10.1.12), (10.1.26) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) = -\int\limits_{\Omega} v^{\circ}_{i,j} v_i v_j d\Omega - \int\limits_{\Omega} s_{ij} v_{i,j} d\Omega, \tag{10.1.27}$$

где

$$I_i^2(t) = \int\limits_{\Omega} v_i^2 d\Omega$$

Из неравенства Шварца, применённого к первому слагаемому в правой части (10.1.27), следует цепочка неравенств

$$-\int\limits_{\Omega} v^{\circ}_{i,j} v_i v_j d\Omega \leqslant q_{ij} \int\limits_{\Omega} |v_i||v_j| d\Omega \leqslant \frac{q_{ij}}{2}(I_i^2 + I_j^2) \leqslant \frac{Q}{2}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2), \tag{10.1.28}$$

где

$$q_{ij}(t) = \sup_{\Omega} |v^{\circ}_{i,j}|, \quad Q(t) = \max_{\alpha=1,2,3}(2q_{\alpha\alpha} + q_{\alpha\beta} + q_{\beta\alpha} + q_{\alpha\gamma} + q_{\gamma\alpha})$$

Оценка снизу второго интеграла в правой части (10.1.27) может производиться двумя путями. Первый из них основан на чисто алгебраических преобразованиях, а именно на минимизации квадратичной формы: $s_{ij}v_{i,j} = s_{ij}v_{ij} = W^{\circ}_{ijkl}v_{kl}v_{ij} \geqslant K v_{ij} v_{ij}$, где компоненты W°_{ijkl} имеют вид (10.1.15). Таким образом, имеем

$$\int\limits_{\Omega} s_{ij} v_{i,j} d\Omega \geqslant K_1 \int\limits_{\Omega} v_{ij} v_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} K_1 I_{ij} I_{ij}, \tag{10.1.29}$$

где

$$K_1(t) = \inf_{\Omega} K(\boldsymbol{x}, t)\,, \quad I_{ij}^2(t) = \int\limits_{\Omega} v_{i,j}^2 d\Omega$$

Второй способ основан на непосредственном применении неравенства Корна [267, 268] в случае стандартных типов симметрии $W^{\circ}_{ijkl} = W^{\circ}_{ijlk} = W^{\circ}_{klij}$:

$$\int\limits_{\Omega} s_{ij} v_{i,j} d\Omega = \int\limits_{\Omega} W^{\circ}_{ijkl} v_{k,l} v_{i,j} d\Omega \geqslant \int\limits_{\Omega} \overline{K} v_{i,j} v_{i,j} d\Omega \geqslant \frac{1}{2} K_2 I_{ij} I_{ij}, \tag{10.1.30}$$

где

$$K_2(t) = 2 \inf_{\Omega} \overline{K}(\boldsymbol{x}, t)$$

Лемма 10.1. *Пусть область Ω можно заключить*

а) в параллелепипед $l_1 \times l_2 \times l_3$ либо

б) в бесконечный цилиндр прямоугольного $l_1 \times l_2$ сечения либо

в) между плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии l_1.

Тогда для любой функции $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ с компонентами из $\mathbb{L}_2^0(\bar{\Omega})$ справедливо неравенство

$$I_{ij} I_{ij} \geqslant \Lambda_{\Omega}^2 I_j I_j, \tag{10.1.31}$$

где а) $\Lambda_{\Omega}^2 = \pi^2(l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})$ либо б) $\Lambda_{\Omega}^2 = \pi^2(l_1^{-2} + l_2^{-2})$ либо в) $\Lambda_{\Omega}^2 = \pi^2/l_1^2$.

Доказательство леммы 10.1 вытекает из неравенств Фридрихса для функций с компактным носителем в Ω [180].

Собирая вместе вспомогательные оценки (10.1.28) – (10.1.31) и подставляя их в (10.1.27), получим

$$\frac{d}{dt} \ln(I_j I_j) \leqslant Q - \Lambda_{\Omega}^2 K_{\alpha}, \quad t > 0 \tag{10.1.32}$$

где $\alpha = 1$ или $\alpha = 2$ в зависимости от выбора цепочки (10.1.29) или (10.1.30). Из (10.1.32) следует утверждение о том, что при $t > 0$ функция $I_j(t) I_j(t) \mathrm{e}^{F(t)}$ не возрастает, т. е. заведомо

$$I_j(t) I_j(t) \leqslant I_j(0) I_j(0) \mathrm{e}^{-F(t)}, \quad t > 0, \tag{10.1.33}$$

где

$$F(t) = \int\limits_0^t \Big(\Lambda_{\Omega}^2 K_{\alpha}(\tau) - Q(\tau)\Big) d\tau \tag{10.1.34}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 10.1. *Достаточным условием устойчивости невозмущённого течения $\boldsymbol{v}^{\circ}(\boldsymbol{x}, t)$ в $\mathbb{R}^3$ относительно трёхмерных возмущений является сово-*

купность требований к $F(t)$:

а) $\inf\limits_{t>0} F(t) > -\infty$; б) $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$

10.1.4. Устойчивость стационарных течений. В случае установившегося течения ($Q = \mathrm{const}$, $K_\alpha = \mathrm{const}$) из (10.1.34) и теоремы 10.1 следует

Теорема 10.2. *Достаточным условием устойчивости невозмущённого стационарного течения $v^\circ(x)$ в $\mathbb{R}^3$ относительно трёхмерных возмущений является неравенство $Q < \Lambda_\Omega^2 K_\alpha$.*

Так как $I_j I_j = \int_\Omega |v|^2 d\Omega$, то в формулировках теорем 10.1 и 10.2 имеется ввиду устойчивость по паре мер (ρ_0, ρ_t) [145, 146, 194, 195], где

$$\rho_t^2 = \int\limits_\Omega |v|^2(x,t)\, d\Omega,\ \rho_0^2 = \int\limits_\Omega |v|^2(x,t_0)\, d\Omega \equiv \rho_t^2(0) \tag{10.1.35}$$

Это соответствует понятию *асимптотической устойчивости по Ляпунову—Мовчану*: невозмущённое течение называется (асимптотически) устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и $t = T > 0$ такие, что при $\rho_0 < \delta$ и $t > T$ имеет место неравенство $\rho < \varepsilon$.

Теорема 10.1 утверждает, что числа ε и δ можно выбрать произвольно, а момент времени T определяется равенством $F(T) = \ln(\delta/\varepsilon)$. При выполнении условий а) и б) теоремы такое время всегда существует.

Неравенство $Q < \Lambda_\Omega^2 K_\alpha$, входящее в формулировку теоремы 10.2, ограничивает в пространстве безразмерных параметров задачи область заведомой устойчивости основного процесса. В силу стационарности последнего границы этой области со временем не меняются. В случае ньютоновской вязкой жидкости это неравенство равносильно тому, что некоторая комбинация чисел *Re*, *Fr* и, возможно, других не превосходит своего критического значения.

10.1.4. Устойчивость процессов на конечном интервале времени

Наряду с (асимптотически) устойчивыми рассматриваются *условно устойчивые* или *устойчивые на конечном интервале времени процессы*: невозмущённое течение называется условно устойчивым, если существует $R > 0$ при котором для любого ε найдутся $\delta > 0$ и $t = T > 0$ такие, что при $\rho_0 < \delta$ и $t > T$ имеет место неравенство $\rho < R + \varepsilon$. Аналогично теореме 10.1 можно дать достаточный признак условной устойчивости.

Теорема 10.3. *Достаточным условием условной устойчивости невозмущённого течения $v^\circ(x,t)$ в $\mathbb{R}^3$ относительно трёхмерных возмущений является объединение следующих требований к функции $F(t)$, определяемой* *соотношением (10.1.34):*

а) $\inf\limits_{t>0} F(t) > -\infty$; б) $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = F_\infty > 0$

Доказательство почти дословно повторяет вывод теоремы 10.1, а из неравенства (10.1.33) видно, что δ можно взять опять же произвольно, в качестве R выбрать число $\delta\exp(-F_\infty)$, а в качестве T такой момент времени, что $F(t) > \ln[\delta/(R+\varepsilon)]$ при $t > T$. При выполнении условий а) и б) теоремы 10.3 такое время T всегда существует.

Из общей схемы применения метода интегральных соотношений, приведённой выше, и получения достаточных интегральных признаков устойчивости видно, что основной проблемой в каждой конкретной задаче будет нахождение оценивающих параметров $K_\alpha(t)$, Λ_Ω и $Q(t)$, входящих в определение (10.34) функции $F(t)$.

10.2. Устойчивость процессов деформирования квазилинейных тел

Общий вид связи тензоров $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$ для квазилинейных материалов представляется соотношениями (10.1.2). Связь же возмущений тензоров $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$ даётся формулами (10.1.14), (10.1.17).

10.2.1. Постановка задачи и её сведение к проблеме на собственные значения

Для формулировки линеаризованной краевой задачи устойчивости в возмущениях подставим (10.1.17) в (10.1.14), а затем (10.1.13) и (10.1.14) в уравнения движения (10.1.11). Получим

$$-p_{,i} + 2\Big(\mathrm{M}_\circ v_{ij}(v) + U^\circ \mathrm{M}^\bullet_\circ V^\circ_{ijkl} v_{kl}(v)\Big)_{,j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v^\circ_j v_{i,j} + v^\circ_{i,j} v_j, \tag{10.2.1}$$

где $\mathrm{M}_\circ \equiv \mathrm{M}(U^\circ)$; $\mathrm{M}^\bullet_\circ \equiv (d\mathrm{M}/dU)(U^\circ)$.

Три уравнения (10.2.1) вместе с условием несжимаемости (10.1.12) образуют замкнутую систему в области Ω относительно четырёх функций v_i, p. Возмущения начальных и граничных условий на поверхностях $\Sigma_v, \Sigma_s, \Sigma_r$ и, возможно, Σ_c производятся таким же образом, как это было сделано в разд. 10.1, поэтому сейчас на этом останавливаться не будем.

В случае стационарного основного движения сведём поставленную задачу в области к задаче на собственные значения. Для этого выпишем отдельные гармоники возмущения по осям (Ox_1), (Ox_2); учёт всех гармоник равносилен применению преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2. Представим неизвестные величины в форме

$$v(x,t) = v^{\vee}(x_3)\exp(is_M x_M + \alpha t) \tag{10.2.2}$$

$$p(x,t) = p^{\vee}(x_3)\exp(is_M x_M + \alpha t), \tag{10.2.3}$$

где s_1, s_2 — вещественные компоненты двумерного волнового вектора s; s_3 формально положено равным нулю; $\alpha = \alpha_* + i\alpha_{**}$ — комплексная частота. Критерием устойчивости основного течения является неравенство $\alpha_* < 0$, выполненное при любых s_1, s_2.

Подставим (10.2.2), (10.2.3) в систему (10.2.1), (10.1.12) и получим для комплексных амплитуд $v^{\vee}$, $p^{\vee}$:

$$\begin{gathered}-is_m p^{\vee} - \delta_{m3}p^{\vee\prime} + 2\mathrm{M}_{\circ,j}v^{\vee}_{jm} + 2(U^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{mjkl})_{,j}v^{\vee}_{kl} + 2is_j\mathrm{M}_{\circ}v^{\vee}_{jm} + \\ +2is_jU^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{mjkl}v^{\vee}_{kl}\mathrm{M}_{\circ}(is_m v^{\vee\prime}_3 + v^{\vee\prime\prime}_m + \delta_{m3}v^{\vee\prime\prime}_3) + \\ +2U^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{m3kl}v^{\vee}_{kl} == \alpha v^{\vee}_m + v^{\circ}_j(is_j v^{\vee}_m + \delta_{j3}v^{\vee\prime}_m) + v^{\circ}_{m,j}v^{\vee}_j\end{gathered} \tag{10.2.4}$$

$$is_k v^{\vee}_k + v^{\vee\prime}_3 = 0, \tag{10.2.5}$$

причём $2v^{\vee}_{jm} = is_j v^{\vee}_m + is_m v^{\vee}_j + \delta_{j3}v^{\vee\prime}_m + \delta_{m3}v^{\vee\prime}_j$. Штрих означает дифференцирование по x_3.

10.2.2. Сведение трёхмерной картины возмущений к двумерной

Ограничим невозмущённое движение классом плоских течений $v^{\circ}_1 = v^{\circ}_1(x_1, x_3)$, $v^{\circ}_2 \equiv 0$, $v^{\circ}_3 = v^{\circ}_3(x_1, x_3)$, возмущения же, по-прежнему, оставим трёхмерными. Умножим уравнение (10.2.4) на s_m и просуммируем по m. Предварительно вводя обозначения $s = \sqrt{s_m s_m}$, $u^{\vee}_1 = s_m v^{\vee}_m/s$, $u^{\vee}_3 = v^{\vee}_3$, $q^{\vee} = sp^{\vee}/s_1$, $\gamma = \alpha s/s_1$, будем иметь

$$\begin{gathered}-isq^{\vee} + \tfrac{s}{s_1}\mathrm{M}_{\circ,j}(is_j u^{\vee}_1 + isv^{\vee}_j + \delta_{j3}u^{\vee\prime}_1) + 2(U^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{mjkl})_{,j}\tfrac{s_m}{s_1}v^{\vee}_{kl} + \\ +\tfrac{s}{s_1}\mathrm{M}_{\circ}(-s^2u^{\vee}_1 + u^{\vee\prime\prime}_1) + 2iU^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{mjkl}\tfrac{s_js_m}{s_1}v^{\vee}_{kl} + \\ +2U^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{m3kl}\tfrac{s_m}{s_1}v^{\vee\prime}_{kl} = \gamma u^{\vee}_1 + v^{\circ}_j\tfrac{s}{s_1}(is_j u^{\vee}_1 + \delta_{j3}u^{\vee\prime}_1) + v^{\circ}_{m,j}v^{\vee}_j\tfrac{s_m}{s_1}\end{gathered} \tag{10.2.6}$$

Третье уравнение (10.2.4) и условие несжимаемости (10.2.5) в новых переменных имеют вид

$$\begin{gathered}-q^{\vee\prime} + \tfrac{s}{s_1}\mathrm{M}_{\circ,j}(is_j u^{\vee}_3 + v^{\vee\prime}_j + \delta_{j3}u^{\vee\prime}_3) + 2(U^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{3jkl})_{,j}\tfrac{s}{s_1}v^{\vee}_{kl} + \\ +\tfrac{s}{s_1}\mathrm{M}_{\circ}(-s^2u^{\vee}_3 + u^{\vee\prime\prime}_3) + 2iU^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{3jkl}\tfrac{s_js}{s_1}v^{\vee}_{kl} + \\ +2U^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{33kl}\tfrac{s}{s_1}v^{\vee\prime}_{kl} = \gamma u^{\vee}_3 + v^{\circ}_j\tfrac{s}{s_1}(is_j u^{\vee}_3 + \delta_{j3}u^{\vee\prime}_3) + v^{\circ}_{3,j}v^{\vee}_j\tfrac{s}{s_1}\end{gathered} \tag{10.2.7}$$

$$isu^{\vee}_1 + u^{\vee\prime}_3 = 0 \tag{10.2.8}$$

Рассмотрим теперь вместо (10.2.2), (10.2.3) двумерную картину возмущений в плоскости (Ox_1x_3):

$$v_1(x_1,x_3,t)=u_1(x_3)\exp(isx_1+\gamma t),\quad v_2\equiv 0,$$
$$v_3(x_1,x_3,t)=u_3(x_3)\exp(isx_1+\gamma t), \tag{10.2.9}$$

$$p(x_1,x_3,t)=q(x_3)\exp(isx_1+\gamma t) \tag{10.2.10}$$

Подставляя (10.2.9), (10.2.10) в (10.2.1), (10.1.12), получим

$$\begin{gathered}-isq+\mathrm{M}_{\circ,j}(isu_1\delta_{j1}+isu_j+\delta_{j3}u_1')+2(U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet V^\circ_{1jkl})_{,j}u_{kl}+\\ +\mathrm{M}_\circ(-s^2u_1+u_1'')+2iU^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet V^\circ_{11kl}su_{kl}+2U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet V^\circ_{13kl}u_{kl}'=\\ =\gamma u_1+v_j^\circ(is\delta_{j1}u_1+\delta_{j3}u_1')+v^\circ_{1,j}u_j\end{gathered} \tag{10.2.11}$$

$$\begin{gathered}-q'+\mathrm{M}_{\circ,j}(isu_3\delta_{j1}+u_j'+\delta_{j3}u'_3)+2(U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet V^\circ_{3jkl})_{,j}u_{kl}+\\ +\mathrm{M}_\circ(-s^2u_3+u_3'')+2iU^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet V^\circ_{13kl}su_{kl}+2U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet V^\circ_{33kl}u_{kl}'=\\ =\gamma u_3+v_j^\circ(is\delta_{j1}u_3+\delta_{j3}u_3')+v^\circ_{3,j}u_j\end{gathered} \tag{10.2.12}$$

$$isu_1+u_3'=0 \tag{10.2.13}$$

10.2.3. Обобщённая теорема Сквайра

Идея преобразования Сквайра, предложенного в 1933 г. в работе [324] для одномерного стационарного сдвига ньютоновской жидкости, заключается в сравнении систем уравнений, полученных для трёхмерной и двумерной в плоскости сдвига картин возмущений. Если эти системы совпадают с точностью до коэффициента s_1/s при числе Re, то в силу неравенства $s_1\leqslant s$ и пропорции $\alpha/s_1=\gamma/s$ устойчивость волны возмущения, распространяющейся под углом к плоскости основного сдвига, повышается. В этом и состоит теорема Сквайра [26].

Формальное обобщение преобразования Сквайра на случай произвольного плоского основного движения и достаточно общего типа сред проведено выше. Оно приводит к сравнению систем (10.2.6) – (10.2.8) и (10.2.11) – (10.2.13). Как видно, уравнения (10.2.6), (10.2.7) существенно отличаются от уравнений (10.2.11), (10.2.13) и не могут быть получены из последних переобозначением коэффициентов. Это говорит о невозможности сведения в столь общем случае трёхмерной картины возмущений к двумерной. На подобный факт в теории устойчивости неньютоновских жидкостей отмечалось и ранее [38].

Выделим здесь три важных независимых случая.

А) Пусть $\mathrm{M}(U)\equiv\mu=1/Re$, т. е. имеется вязкая жидкость. Тогда уравнения (10.2.6), (10.2.7) упростятся и примут вид

$$-isq^\vee+\frac{s}{s_1Re}(-s^2u_1^\vee+u_1^{\vee\prime\prime})=\gamma u_1^\vee+iv_1^\circ su_1^\vee+v_3^\circ\frac{s}{s_1}u_1^{\vee\prime}+v^\circ_{1,j}v_j^\vee \tag{10.2.14}$$

$$-q^{\vee\prime}+\frac{s}{s_1 Re}(-s^2u_3^\vee+u_3^{\vee\prime\prime})=\gamma u_3^\vee+iv_1^\circ su_3^\vee+v_3^\circ\frac{s}{s_1}u_3^{\vee\prime}+v_{3,j}^\circ\frac{s}{s_1}v_j^\vee \quad (10.2.15)$$

Уравнения же (10.2.11), (10.2.12) запишутся в виде

$$-isq+\frac{1}{Re}(-s^2u_1+u_1'')=\gamma u_1+iv_1^\circ su_1+v_3^\circ u_1'+v_{1,j}^\circ u_j \quad (10.2.16)$$

$$-q'+\frac{1}{Re}(-s^2u_3+u_3'')=\gamma u_3+iv_1^\circ su_3+v_3^\circ u_3'+v_{3,j}^\circ u_j \quad (10.2.17)$$

Сравнивая (10.2.14), (10.2.15) с (10.2.16), (10.2.17), видно, что трёхмерные возмущения сводимы у двумерным только, если $v_3^\circ\equiv 0$ и $v_1^\circ=v_1^\circ(x_3)$, т. е. невозмущённое состояние — стационарный одномерный сдвиг в плоскости (Ox_1x_3). Следовательно, даже физической линейности модели недостаточно для обобщения утверждения Сквайра на произвольное плоское основное состояние.

Б) Пусть

$$\begin{aligned}V_{mjkl}^\circ&=\tfrac12(\delta_{m1}\delta_{k1}\delta_{j3}\delta_{l3}+\delta_{j1}\delta_{l1}\delta_{m3}\delta_{k3}+\delta_{j1}\delta_{k1}\delta_{m3}\delta_{l3}+\\&+\delta_{m1}\delta_{l1}\delta_{j3}\delta_{k3})\equiv 2\delta_{m(1}\delta_{k(1}\delta_{3)l}\delta_{3)j},\end{aligned} \quad (10.2.18)$$

т. е. изучается устойчивость одномерного сдвига в плоскости (Ox_1x_3) $(v_1^\circ\equiv v^\circ(x_3),\ v_2^\circ=v_3^\circ\equiv 0,\ U^\circ=|v^{\circ\prime}|)$. Подставим (10.2.18) в уравнения (10.2.6), (10.2.7), (10.2.11), (10.2.12). После некоторых преобразований вместо (10.2.6), (10.2.7) будем иметь

$$\begin{aligned}&-isq^\vee+\tfrac{s}{s_1}\mathrm{M}_\circ'(isu_3^\vee+u_1^{\vee\prime})+\tfrac{s}{s_1}[U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet(isu_3^\vee+u_1^{\vee\prime})]'+\\&+\tfrac{s}{s_1}\mathrm{M}_\circ(-s^2u_1^\vee+u_1^{\vee\prime\prime})-\tfrac{s_2}{s_1}[U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet(is_2v_3^\vee+v_2^{\vee\prime})]'=\\&=\gamma u_1^\vee+isv^\circ u_1^\vee+v^{\circ\prime}u_3^\vee\end{aligned} \quad (10.2.19)$$

$$\begin{aligned}&-q^{\vee\prime}+2\tfrac{s}{s_1}\mathrm{M}_\circ'u_3^{\vee\prime}+i\tfrac{s^2}{s_1}U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet(isu_3^\vee+u_1^{\vee\prime})+\tfrac{s}{s_1}\mathrm{M}_\circ(-s^2u_3^\vee+u_3^{\vee\prime\prime})-\\&-i\tfrac{ss_2}{s_1}U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet(is_2v_3^\vee+v_2^{\vee\prime})=\gamma u_3^\vee+isv^\circ u_3^\vee,\end{aligned} \quad (10.2.20)$$

а вместо (10.2.11), (10.2.12):

$$\begin{aligned}&-isq+\mathrm{M}_\circ'(isu_3+u_1')+[U^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet(isu_3+u_1')]'+\\&+\mathrm{M}_\circ(-s^2u_1+u_1'')=\gamma u_1+isv^\circ u_1+v^{\circ\prime}u_3\end{aligned} \quad (10.2.21)$$

$$\begin{aligned}&-q'+2\mathrm{M}_\circ'u_3'+isU^\circ\mathrm{M}_\circ^\bullet(isu_3+u_1')+\mathrm{M}_\circ(-s^2u_3+u_3'')=\\&=\gamma u_3+isv^\circ u_3\end{aligned} \quad (10.2.22)$$

Видно, что, если $is_2v_3^\vee+v_2^{\vee\prime}=0$ или, другими словами, $v_{23}^\vee=0$, то (10.2.19), (10.2.20) с точностью до коэффициента s/s_1 при функции $\mathrm{M}_\circ$ совпадают с (10.2.21), (10.2.22) соответственно. Таким образом, справедлива обобщённая теорема Сквайра для материалов с произвольным скалярным соотношением:

Теорема 10.4. *В случае одномерного сдвигового течения в плоскости* (Ox_1x_3) *среди всех нарастающих трёхмерных возмущений, удовлетворяющих условию* $v_{23} = 0$, *всегда можно найти двумерное в той же плоскости* (Ox_1x_3), *нарастающее с той же скоростью, но при большем значении функции* $\mathrm{M}_\circ$.

Ограничение $v_{23} = 0$ достаточно в условии теоремы 10.4. Оно допускает учёт довольно широкого класса возмущений, выходящих из плоскости (Ox_1x_3). Роль критического числа Рейнольдса Re^* (точнее, числа обратного к нему) играет критическая кривая $[T(U) - T(0)]/U$.

В) Отметим невозможность обобщения формулировки теоремы 10.4 на течения, являющиеся сдвиговыми в других эйлеровых ортогональных системах координат, например, в цилиндрической (r, θ, z). При анализе устойчивости процессов, происходящих в плоскостях (r, θ) (течения Куэтта–Тейлора), и (r, z) (продольные течения внутри поверхностей вращения) необходимо учитывать возмущения в третьих направлениях либо искусственно ограничивать их. Такие возмущения могут существенно влиять на переход из ламинарного режима в турбулентный и на смену типов устойчивости даже для ньютоновских жидкостей. Соответствующими примерами могут служить образование тейлоровских вихрей и сприальных движений в плоском круговом течении Куэтта [304] и турбулентных «пробок» в пуазейлевом течении в круглой трубе [245]. Вопросы линейной теории устойчивости и начальной стадии перехода к турбулентности здесь тесно смыкаются с собственно переходными (нелинейными) явлениями. К числу таких явлений стоит отнести перемежаемость режимов, постепенное выравнивание профиля скорости, кризис сопротивления тел плохо обтекаемой формы и другие эффекты.

10.2.4. Обобщённая задача Орра–Зоммерфельда (ОЗОЗ)

Вернёмся к декартовой системе координат (Ox_i) и исследуем двумерные возмущения $(v_1; v_3)$, накладываемые на плоское невозмущённое состояние $v_1^\circ = v_1^\circ(x_1, x_3, t)$, $v_2^\circ \equiv 0$, $v_3^\circ = v_3^\circ(x_1, x_3, t)$. Дифференцируя первое уравнение движения в возмущениях (10.2.1) по x_3, третье по x_1 и вычитая одно из другого, тем самым исключая p, сведём систему (10.2.1), (10.1.12) к одному уравнению

$$\begin{aligned}\epsilon_{im}[\mathrm{M}_\circ(\epsilon_{il}\psi_{,jl} + \epsilon_{jl}\psi_{,il}) + U^\circ \mathrm{M}_\circ^\bullet V^\circ_{ijkl}(\epsilon_{kn}\psi_{,ln} + \\ + \epsilon_{ln}\psi_{,kn})]_{,jm} = \frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \epsilon_{jl}(\psi_{,l}\psi^\circ_{,jk} + \psi^\circ_{,l}\psi_{,jk})_{,k}\end{aligned} \qquad (10.2.23)$$

относительно функции тока $\psi(x_1, x_3, t)$: $v_i = \epsilon_{im}\psi_{,m}$. Все индексы в (10.2.23) принимают значения 1 и 3; ϵ_{kn} — двумерный символ Леви–Чивиты $(\epsilon_{kn}\epsilon_{nm} = -\delta_{km})$. К уравнению (10.2.23) надо добавить граничные условия

(10.1.18) – (10.1.21), выраженные через ψ,

$$x_3 = f_v(x_1, t) \qquad \epsilon_{im}\psi_{,m} = \eta_v \frac{\partial(W_i^\circ - \partial v_i^\circ)}{\partial x_3} + \delta W_i, \tag{10.2.24}$$

$$\begin{gathered} x_3 = f_s(x_1, t) \qquad -pn_i^\circ + [\mathrm{M}_\circ(\epsilon_{im}\psi_{,mj} + \epsilon_{jm}\psi_{,mi}) + \\ +U^\circ \mathrm{M}_\circ^\bullet V_{ijkl}^\circ(\epsilon_{km}\psi_{,ml} + \epsilon_{lm}\psi_{,mk})]n_j^\circ = -\sigma_{ij}^\circ n_j + \eta_s \frac{\partial(P_i^\circ - \sigma_{ij}^\circ n_j^\circ)}{\partial x_3} + \delta P_i, \end{gathered} \tag{10.2.25}$$

$$x_3 = f_r(x_1, t) \qquad v_{ij}^\circ(\epsilon_{im}\psi_{,mj} + \epsilon_{jm}\psi_{,mi}) + \eta_r U^\circ \frac{\partial U^\circ}{\partial x_3} = 0, \tag{10.2.26}$$

и закон движения возмущённых поверхностей

$$\frac{\partial \eta_{(v;s;r;c)}}{\partial t} = -\psi_{,1} - v_1^\circ \frac{\partial \eta_{(v;s;r;c)}}{\partial x_1} - \psi_{,3} \frac{\partial f_{(v;s;r;c)}}{\partial x_1}, \qquad x \in \Sigma_{(v;s;r;c)} \tag{10.2.27}$$

Аналогично (10.1.22), (10.1.23), если необходимо, в терминах ψ записываются контактные условия на границе раздела Σ_c.

Таким образом, линеаризованная краевая задача устойчивости сводится к одному уравнению (10.2.23) в Ω и группе граничных условий (10.2.24)–(10.2.26) на соответствующих поверхностях, уравнения которых определяются требованиями (10.2.27).

Среди всех граничных условий, приведённых выше, выделим (10.2.24) при $\eta_v \equiv 0$, $\delta W_i = 0$ и $\Sigma = \Sigma_v$. Это означает, что на Σ задана кинематика, которая не меняется при переходе из невозмущённого состояния в возмущённое:

$$x \in \Sigma: \qquad \operatorname{grad}\psi = 0 \tag{10.2.28}$$

На рис. 10.1 изображена возможная область Ω и возможное задание на её границе условий, удовлетворяющих (10.2.28).

Уравнение (10.2.23) в случае вязкой жидкости и кинематики основного движения (10.2.18) (стационарный одномерный сдвиг) сводится к хорошо изученному уравнению Орра–Зоммерфельда, а вместе с граничным условием (10.2.28) образует задачу Орра–Зоммерфельда [26, 64, 217, 302]. Сформулированную выше задачу естественно назвать обобщённой задачей Орра–Зоммерфельда (ОЗОЗ). Обобщение проводится и на определяющие соотношения (функция M произвольна) и на выбор основного движения (ψ°, V_{ijkl}° произвольны).

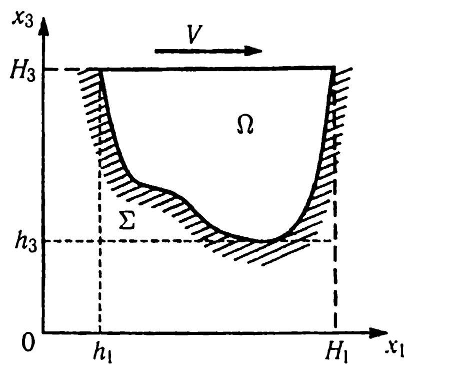


Рис. 10.1. Возможная область Ω и задание на её границе условий (10.2.28)

Обобщение классической задачи Орра–Зоммерфельда ранее было дано и на случай стратифицированных плоскопараллельных течений, т. е. ρ и μ — функции глубины x_3. Впервые такая постановка приведена в [249], там же доказан аналог теоремы Сквайра, согласно которому для любого нарастающего трёхмерного возмущения всегда можно указать двумерное возмущение, нарастающее с той же скоростью, но при меньшем значении Re и большем значении минимального числа Ричардсона $J = -\rho_o'/(\rho_o Fr)$. Уравнение Орра–Зоммерфельда–Дразина с однородными кинематическими условиями на твёрдых стенках было исследовано в [108], где получен ряд независимых оценок устойчивости. Устойчивость ламинарного погранслоя степенной неньютоновской жидкости путём численного интегрирования обобщённой проблемы Орра–Зоммерфельда исследована в [82]. Там же рассчитаны характеристики устойчивости погранслоя на продольно обтекаемой полубесконечной пластине.

В [107] дан обзор работ и по некоторым другим задачам на собственные значения применительно к устойчивости идеальных и вязких стратифицированных течений таких, как планетарные течения, течения с рэлеевской вязкостью, турбулизованные движения.

10.2.5. Достаточные интегральные оценки устойчивости

Для анализа поставленной ОЗОЗ (10.2.23), (10.2.28) воспользуемся методом интегральных соотношений, идея которого была изложена в п. 10.1.3.

Пусть $\psi(x_1, x_3, t)$ — элемент вещественнозначного гильбертова пространства $\mathbb{W}_2^{0(2)}(\Omega)$, являющегося замыканием множества бесконечно дифференцируемых функций с нулевыми значениями на границе области. Замыкание производится по метрике пространства $\mathbb{W}_2^{(2)}(\Omega)$, вводимой скалярным произведением [180]

$$(\psi_1, \psi_2)_{\mathbb{W}_2^{(2)}} = \sum_{|J| \leqslant 2} \int_\Omega D^J \psi_1 D^J \psi_2 d\Omega, \qquad (10.2.29)$$

где J — мультиндекс; $|J| = j_1 + \cdots + j_N$; $D^J\psi \equiv \partial^{|J|}\psi/(\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_N^{j_N})$.

В дополнение к предыдущим потребуем ещё одно ограничение на область Ω, а именно, односвязность её границы. Это даёт возможность построить следующую цепочку

$$\operatorname{grad}\psi|_{x\in\Sigma} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{d\psi}{ds}\right|_{x\in\Sigma} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \psi|_{x\in\Sigma} = C$$

Постоянная C едина для всей поверхности Σ, и её можно положить равной нулю в силу того, что ψ определяется с точностью до константы. Следовательно, в случае односвязности границы Ω условия (10.2.28) примут вид

$$x \in \Sigma \qquad \psi = 0, \quad \operatorname{grad}\psi = 0 \qquad (10.2.30)$$

Умножим обе части (10.2.23) на ψ и проинтегрируем по неподвижной области Ω. Из условия несжимаемости основного течения и (10.2.30) следует, что интеграл от последнего слагаемого в правой части (10.2.23) равен нулю. Действительно,

$$\epsilon_{jl}\int\limits_{\Omega}(\psi^{\circ}_{,l}\psi_{,jk})_{,k}\psi\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}(v^{\circ}_j\psi_{,jk})_{,k}\psi\,d\Omega=-\int\limits_{\Omega}v^{\circ}_j\psi_{,jk}\psi_{,k}d\Omega=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}v^{\circ}_j(\psi_{,k}\psi_{,k})_{,j}d\Omega=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(v^{\circ}_j\psi_{,k}\psi_{,k})_{,j}d\Omega+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}v^{\circ}_{j,j}\psi_{,k}\psi_{,k}d\Omega=0+0=0$$

В результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1^2+I_3^2)=\int\limits_{\Omega}v^{\circ}_{i,j}\psi_{,i}\psi_{,j}d\Omega-\epsilon_{im}\int\limits_{\Omega}[\mathrm{M}_{\circ}(\epsilon_{il}\psi_{,jl}+\epsilon_{jl}\psi_{,il})+$$
$$+U^{\circ}\mathrm{M}^{\bullet}_{\circ}V^{\circ}_{ijkl}(\epsilon_{kn}\psi_{,ln}+\epsilon_{ln}\psi_{,kn})]_{,jm}\,, \tag{10.2.31}$$

где

$$I_{j_1\ldots j_N}(t)\equiv\int\limits_{\Omega}(D^J\psi)^2d\Omega$$

Неравенство Шварца в $\mathbb{W}_2^{0(2)}$, применённое к первому интегралу в правой части (10.2.31), даёт цепочку неравенств

$$\int\limits_{\Omega}v^{\circ}_{i,j}\psi_{,i}\psi_{,j}d\Omega\leqslant\int\limits_{\Omega}|v^{\circ}_{i,j}||\psi_{,i}||\psi_{,j}|d\Omega\leqslant q_{ij}I_iI_j\leqslant$$
$$\leqslant\frac{q_{11}+q_{33}+q_{13}+q_{31}}{2}(I_1^2+I_3^2)=\left(q_{11}+\frac{q_{13}+q_{31}}{2}\right)(I_1^2+I_3^2) \tag{10.2.32}$$

Функции времени q_{ij} определяются кинематикой невозмущённого движения: $q_{ij}(t)\equiv\sup_{\Omega}|v^{\circ}_{i,j}|$.

Следуя далее работе [87], параметризуем компоненты v_{ij}

$$v^{\circ}_{11}=-v^{\circ}_{33}=\frac{U^{\circ}}{2}\cos\beta,\quad v^{\circ}_{13}=\frac{U^{\circ}}{2}\sin\beta \tag{10.2.33}$$

и введём дифференциальные операторы второго порядка

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\quad L_2=2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}$$

Если невозмущённый процесс представляет собой чистое растяжение — сжатие в направлениях $(Ox_1),(Ox_3)$, то $\sin\beta(\boldsymbol{x},t)\equiv0$; если же это чистый сдвиг параллельный (Ox_1), то $\cos\beta(\boldsymbol{x},t)\equiv0$.

После подстановки (10.2.32), (10.2.33) в (10.2.31) и некоторых преобразований получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\left(I_1^2+I_3^2\right) \leqslant q_{11}+\frac{q_{13}+q_{31}}{2}- \\ -\frac{1}{I_1^2+I_3^2}\int\limits_{\Omega}[A(L_1\psi)^2+2B(L_1\psi)(L_2\psi)+C(L_2\psi)^2]d\Omega, \tag{10.2.34}$$

Здесь $A(\boldsymbol{x},t), B(\boldsymbol{x},t), C(\boldsymbol{x},t)$ — функции материала и невозмущённого движения, которые можно записать в любой из двух форм

$$A = \mathrm{M}_\circ + U^\circ \mathrm{M}_\circ^\bullet \sin^2\beta,\quad B = U^\circ \mathrm{M}_\circ^\bullet \sin\beta\cos\beta,\quad C = \mathrm{M}_\circ + U^\circ \mathrm{M}_\circ^\bullet \cos^2\beta$$

либо

$$A = \mathrm{M}_\circ\cos^2\beta + T_\circ^\bullet\sin^2\beta,\quad B = (T_\circ^\bullet - \mathrm{M}_\circ)\cos\beta\sin\beta, \\ C = \mathrm{M}_\circ\sin^2\beta + T_\circ^\bullet\cos^2\beta \tag{10.2.35}$$

Предположим, что существует такая функция $\Lambda(t)$, что при $t > 0$

$$\int\limits_{\Omega}[A(L_1\psi)^2+2B(L_1\psi)(L_2\psi)+C(L_2\psi)^2]d\Omega \geqslant \Lambda^2(I_1^2+I_3^2) \tag{10.2.36}$$

Тогда неравенство (10.2.34) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}\ln\left(I_1^2+I_3^2\right) \leqslant 2q_{11}+q_{13}+q_{31}-2\Lambda^2 \tag{10.2.37}$$

Теорема 10.5. *Пусть* $F(t)$ — *первообразная функции* $(2\Lambda^2-2q_{11}-q_{13}-q_{31})(t)$ *и* $F(0)=0$. *Тогда для устойчивости невозмущённого течения* $\boldsymbol{v}^\circ(\boldsymbol{x},t)$ *в плоской области* Ω *с односвязной границей достаточно одновременное выполнение условий*

$$\text{а) } \inf_{t>0} F(t) > -\infty; \qquad \text{б) } \lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty \tag{10.2.38}$$

Доказательство. Перепишем неравенство (10.2.37), пользуясь введённой функцией $F(t)$

$$\frac{d}{dt}[\ln(I_1^2+I_3^2)+F] \leqslant 0\,,\quad t>0$$

Так как функция, стоящая в квадратных скобках, со временем не возрастает и $F(0)=0$, то

$$I_1^2+I_3^2 \leqslant \mathrm{e}^{-F(t)}[I_1^2(0)+I_3^2(0)] \tag{10.2.39}$$

Видно, что при одновременном выполнении требований (10.2.38) левая часть (10.2.39) с одной стороны остаётся ограниченной в любой момент времени, а с другой, стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Данное утверждение является следствием общей теоремы 10.1 в случае материалов с векторно линейными определяющими соотношениями. Однако способы получения оценивающего параметра $\Lambda(t)$, о которых пойдёт речь далее, здесь свои. Аналогично теореме 10.3 сформулируем и достаточный признак устойчивости течения на конечном интервале времени. Доказательство его почти дословно повторяет предыдущее, а выбор параметров R и T, входящих в определение условной устойчивости процесса, таков же, как и при выводе теоремы 10.3.

Теорема 10.6. *Пусть $F(t)$ — первообразная функции $(2\Lambda^2 - 2q_{11} - q_{13} - q_{31})(t)$ и $F(0) = 0$. Тогда для условной устойчивости невозмущённого течения $\boldsymbol{v}^\circ(\boldsymbol{x}, t)$ в плоской области Ω с односвязной границей достаточно одновременное выполнение условий*

$$\begin{aligned} &\text{а) } \inf_{t>0} F(t) > -\infty; \\ &\text{б) } \lim_{t\to+\infty} F(t) = F_\infty > 0 \end{aligned} \tag{10.2.40}$$

В случае, когда поле скоростей $\boldsymbol{v}$ явно не зависит от времени, коэффициенты уравнения (10.2.23) суть функции только координат. Это позволяет искать решение $\psi(x_1, x_2, t)$ в спектральном виде

$$\psi = \phi(x_1, x_3)e^{\alpha t}, \qquad \alpha = \alpha_* + i\alpha_{**} \in \mathbb{C} \tag{10.2.41}$$

Подставляя (10.2.41) в (10.2.23), (10.2.30), придём к ОЗОЗ, поставленной для нелинейного течения в области с заданной на границе кинематикой. Комплексная амплитуда теперь является элементом комплекснозначного гильбертова пространства $\overline{\mathbb{H}}_2(\Omega)$ со стандартной в нём нормой [180]. Техника получения оценок устойчивости с помощью метода интегральных соотношений здесь принципиально сохраняется. Выпишем лишь общую последовательность действий и приведём конечное утверждение:

а) домножение обеих частей уравнения

$$\begin{aligned} &\epsilon_{im}[\mathrm{M}_\circ(\epsilon_{il}\phi_{,jl} + \epsilon_{jl}\phi_{,il}) + U^\circ \mathrm{M}^\bullet_\circ V^\circ_{ijkl}(\epsilon_{kn}\phi_{,ln} + \epsilon_{ln}\phi_{,kn})]_{,jm} = \\ &\qquad = \alpha\Delta\phi + \epsilon_{jl}(\phi_{,l}\psi^\circ_{,jk} + \psi^\circ_{,l}\phi_{,jk})_{,k} \end{aligned} \tag{10.2.42}$$

на комплексно-сопряжённую функцию $\bar{\phi}$ и интегрирование по Ω с учётом граничных условий

$$\boldsymbol{x} \in \Sigma \qquad \phi = 0, \quad \operatorname{grad}\phi = 0 \tag{10.2.43}$$

б) выделение действительных и мнимых частей в получившемся интегральном равенстве и нахождение α_* и α_{**};

в) оценка сверху частотного параметра α_* с помощью неравенств Фридрихса и Шварца для квадратичных функционалов в $\overline{\mathbb{H}}_2(\Omega)$.

Предположим, что Λ таково, что справедливо неравенство (10.2.36), в котором теперь

$$I^2_{j_1 \ldots j_N} \equiv \int\limits_{\Omega} |D^J \phi|^2 d\Omega$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 10.7. *Для устойчивости стационарного течения $\boldsymbol{v}^{\circ}(\boldsymbol{x})$ в плоской области Ω с односвязной границей достаточно выполнения условия*

$$2q_{11} + q_{13} + q_{31} \leqslant 2\Lambda^2, \quad q_{ij} = \sup_{\Omega} |v^{\circ}_{i,j}| \tag{10.2.44}$$

Доказательство. Функция $F(t)$ в стационарном случае имеет вид $F(t) = (2\Lambda^2 - 2q_{11} - q_{13} - q_{31})t$, и из справедливости неравенства (10.2.44) следует выполнение требований (10.2.38).

10.2.6. Минимизация квадратичных функционалов

Задачу точного определения $\Lambda(t)$ можно свести к задаче на собственные значения

$$L_1(AL_1\psi) + 2L_2(BL_1\psi) + L_2(CL_2\psi) + \lambda^2 \Delta\psi = 0, \tag{10.2.45}$$

где ψ кроме того удовлетворяет граничным условиям (10.2.30). Умножим равенство (10.2.45) на ψ и проинтегрируем по Ω. Получим, что $\Lambda(t)$ совпадает с минимальной ненулевой собственной функцией $\lambda_{min}(t)$ задачи (10.2.45), (10.2.30).

С другой стороны, нахождение $\Lambda(t)$ эквивалентно проблеме минимизации квадратичного функционала, стоящего в левой части (10.2.36). Для неотрицательной определённости соответствующей квадратичной формы необходимо выполнение двух условий: $A + C \geqslant 0$ и $AC \geqslant B^2$ или согласно (10.2.35) $\mathrm{M}_{\circ} + T^{\bullet}_{\circ} \geqslant 0$ и $\mathrm{M}_{\circ} T^{\bullet}_{\circ} \geqslant 0$. Следовательно, в точках с абсциссами $U^{\circ}(\boldsymbol{x}, t)$ функция $T^{\bullet}_{\circ}$ должна быть неотрицательной, т. е. диаграмма материала не должна быть падающей.

Найдём всевозможные пары функций $\{K_1(\boldsymbol{x}, t); K_2(\boldsymbol{x}, t)\}$ такие, что для любой функции $\psi \in \mathbb{W}^{0(2)}_2(\Omega)$

$$A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2 \geqslant K_1(L_1\psi)^2 + K_2(L_2\psi)^2, \tag{10.2.46}$$

т. е. матрица

$$\begin{pmatrix} A - K_1 & B \\ B & C - K_2 \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена. Это в свою очередь равносильно системе нера-

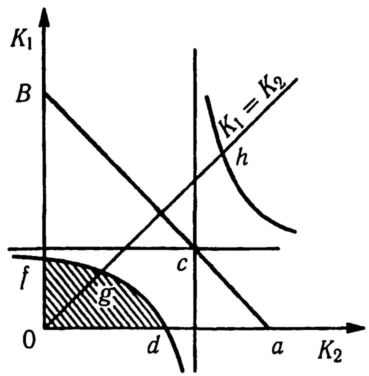


Рис. 10.2. Область на плоскости $(K_1; K_2)$, точки которой удовлетворяют системе (10.2.47) при $T_\circ^\bullet \neq \mathrm{M}_\circ$

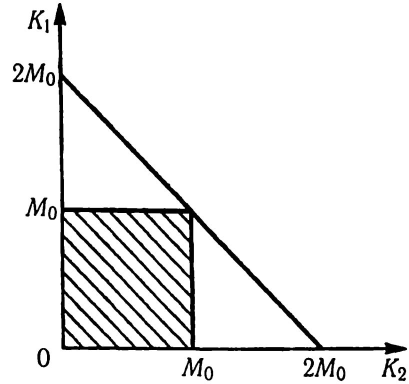


Рис. 10.3. Область на плоскости $(K_1; K_2)$, точки которой удовлетворяют системе (10.2.47) при $T_\circ^\bullet = \mathrm{M}_\circ$

венств

$$K_1 + K_2 \leqslant \mathrm{M}_\circ + T_\circ^\bullet; K_1 K_2 - C K_1 - A K_2 + \mathrm{M}_\circ T_\circ^\bullet \geqslant 0 \qquad (10.2.47)$$

На рис. 10.2 на плоскости $(K_1; K_2)$ заштрихована область, точки которой удовлетворяют системе (10.2.47) при $T_\circ^\bullet \neq \mathrm{M}_\circ$. Координаты отмеченных на рис. 10.2 точек следующие

$$\boldsymbol{a} = (\mathrm{M}_\circ + T_\circ^\bullet; 0), \quad \boldsymbol{b} = (0; \mathrm{M}_\circ + T_\circ^\bullet),$$

$$\boldsymbol{c} = (\mathrm{M}_\circ \sin^2\beta + T_\circ^\bullet \cos^2\beta; \mathrm{M}_\circ \cos^2\beta + T_\circ^\bullet \sin^2\beta),$$

$$\boldsymbol{g} = (\min\{\mathrm{M}_\circ, T_\circ^\bullet\}; \min\{\mathrm{M}_\circ, T_\circ^\bullet\}), \quad \boldsymbol{h} = (\max\{\mathrm{M}_\circ, T_\circ^\bullet\}; \max\{\mathrm{M}_\circ, T_\circ^\bullet\}),$$

$$\boldsymbol{d} = \left(\frac{\mathrm{M}_\circ T_\circ^\bullet}{\mathrm{M}_\circ \sin^2\beta + T_\circ^\bullet \cos^2\beta}; 0\right), \quad \boldsymbol{f} = \left(0; \frac{\mathrm{M}_\circ T_\circ^\bullet}{\mathrm{M}_\circ \cos^2\beta + T_\circ^\bullet \sin^2\beta}\right),$$

При $T_\circ^\bullet = \mathrm{M}_\circ$ (например, для ньютоновской жидкости) заштрихованная на рис. 10.2 область вырождается в квадрат (рис. 10.3).

В силу условий (10.2.30) имеем

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [K_1(L_1\psi)^2 + K_2(L_2\psi)^2] d\Omega \geqslant \\ &\geqslant \inf K_1(\boldsymbol{x}, t) \int_\Omega \left((\psi_{,33} - \psi_{,11})^2 + \tfrac{4K_2}{K_1}\psi_{,13}^2\right) d\Omega = \\ &= \inf K_1(\boldsymbol{x}, t) \left[I_{11}^2 + 2I_{13}^2 + I_{33}^2 + 4\int_\Omega \left(\tfrac{K_2}{K_1} - 1\right)\psi_{,13}^2 d\Omega\right] \end{aligned} \qquad (10.2.48)$$

Здесь и далее нижняя грань берётся по всем $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Выбирая на криволинейном отрезке (*fgd*) (рис. 10.2) произвольную точку с ординатой K_1, найдём для неё угловой коэффициент K_2/K_1 и подставим в (10.2.48). В результате получится вполне определённая оценка снизу левой части (10.2.36). Все такие оценки независимы. В частности, если взять точку g, то будем иметь

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega [A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2]d\Omega \geqslant \\ &\qquad \geqslant \inf\min\{\mathrm{M}_\circ, T_\circ^\bullet\}(I_{11}^2 + 2I_{13}^2 + I_{33}^2) \geqslant \\ &\qquad \geqslant \Lambda_\Omega^2 \inf\min\{\mathrm{M}_\circ, T_\circ^\bullet\}(I_1^2 + I_3^2)\end{aligned} \tag{10.2.49}$$

Последнее неравенство следует из вспомогательного утверждения (аналога леммы 10.1).

Лемма 10.2. *Если область Ω можно заключить в прямоугольник $[h_1, H_1] \times [h_3, H_3]$ (рис. 10.1) либо в полосу $[h_\alpha, H_\alpha]$, то*

$$I_{11}^2 + 2I_{13}^2 + I_{33}^2 \geqslant \Lambda_\Omega^2(I_1^2 + I_3^2), \tag{10.2.50}$$

где

$$\Lambda_\Omega^2 = \frac{\pi^2}{(H_1 - h_1)^2} + \frac{\pi^2}{(H_3 - h_3)^2} \quad \text{либо} \quad \Lambda_\Omega^2 = \frac{\pi^2}{(H_\alpha - h_\alpha)^2}$$

Доказательство леммы вытекает из неравенств Фридрихса для функций с компактным носителем в Ω [180].

Следовательно, в качестве одной из возможных функций $\Lambda^2(t)$, входящей в неравенство (10.2.36), а также в условия теорем 7.2 – 7.4, можно взять

$$\Lambda^2(t) = \Lambda_\Omega^2 \inf\min\{\mathrm{M}_\circ(\boldsymbol{x}, t), T_\circ^\bullet(\boldsymbol{x}, t)\} \tag{10.2.51}$$

Другой независимый от рассмотренного способ оценки $\Lambda(t)$ связан не с (10.2.46), а с цепочкой неравенств

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega [A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2]d\Omega \geqslant \\ &\qquad \geqslant \inf A(\boldsymbol{x}, t)\int\limits_\Omega [(\psi_{,33} - \psi_{,11})^2 + \tfrac{4B}{A}(\psi_{,33} - \psi_{,11})\psi_{,13} + \\ &\qquad + \tfrac{4C}{A}\psi_{,13}^2]d\Omega = \inf A(\boldsymbol{x}, t)\int\limits_\Omega \mathcal{L}_{ij}\xi_i\xi_j d\Omega \geqslant \\ &\qquad \geqslant \inf A(\boldsymbol{x}, t)\int\limits_\Omega (K_3\psi_{,11}^2 + 4K_4\psi_{,13}^2 + K_3\psi_{,33}^2)d\Omega,\end{aligned} \tag{10.2.52}$$

где

$$\underset{\approx}{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -B/A \\ 0 & 1 & B/A \\ -B/A & B/A & C/A - 1/2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \psi_{,11} \\ \psi_{,33} \\ 2\psi_{,13} \end{pmatrix}$$

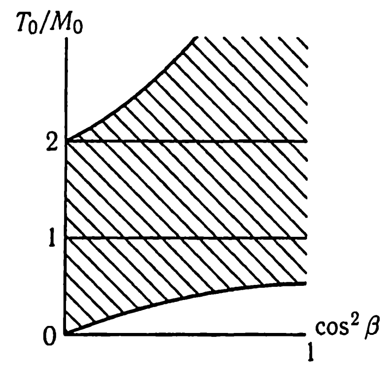


Рис. 10.4. Область на плоскости ($\cos^2\beta$; $T^\bullet_\circ/\mathrm{M}_\circ$), точки которой удовлетворяют системе (10.2.53)

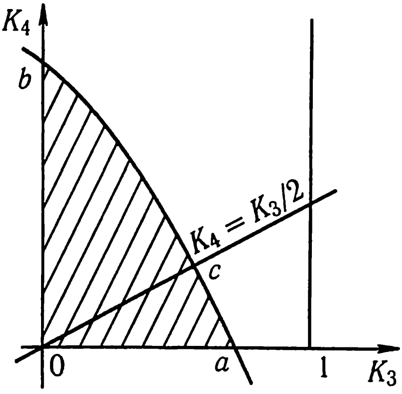


Рис. 10.5. Область на плоскости (K_3; K_4), точки которой удовлетворяют системе (10.2.54)

Матрица $\underset{\approx}{\mathcal{L}}$ квадратичной формы неотрицательно определена, если $2AC - A^2 - 4B^2 \geqslant 0$. Подставляя сюда A, B, C из (10.2.35), получим возможную область изменения отношения $T^\bullet_\circ/\mathrm{M}_\circ$:

$$\frac{\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta} \leqslant \frac{T^\bullet_\circ}{\mathrm{M}_\circ} \leqslant \frac{1+\sin^2\beta}{\sin^2\beta} \tag{10.2.53}$$

Эта область на плоскости ($\cos^2\beta$; $T^\bullet_\circ/\mathrm{M}_\circ$) заштрихована на рис. 10.4. Как видно, неравенству (10.2.53) независимо от β удовлетворяют, например, ньютоновские жидкости и другие материалы, у которых $1/2 \leqslant |T^\bullet_\circ/\mathrm{M}_\circ| \leqslant 2$.

Существование неотрицательных оценивающих функций $K_3(\boldsymbol{x}, t)$ и $K_4(\boldsymbol{x}, t)$, входящих в (10.2.52), равносильно неотрицательной определённости матрицы $\underset{\approx}{\mathcal{L}} - \mathrm{diag}\{K_3; K_3; K_4\}$, т. е. выполнению системы неравенств

$$0 \leqslant K_3 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant K_4 \leqslant \frac{C}{A} - \frac{1}{2} - \frac{2B^2}{A^2(1-K_3)} \tag{10.2.54}$$

На рис. 10.5 на плоскости (K_3; K_4) заштрихована область, точки которой удовлетворяют системе (10.2.54). Координаты отмеченных на рис. 10.5 точек следующие

$$\boldsymbol{a} = \left(\tfrac{2AC-A^2-4B^2}{2AC-A^2}; 0\right), \ \boldsymbol{b} = \left(0; \tfrac{2AC-A^2-4B^2}{2A^2}\right), \ \boldsymbol{c} = \left(c_1; \tfrac{c_1}{2}\right),$$

где

$$c_1 = \begin{cases} \frac{\mathrm{M}_\circ + (\mathrm{M}_\circ - T^\bullet_\circ)\sin^2\beta}{A}, & \text{если } T^\bullet_\circ > \mathrm{M}_\circ; \\ \frac{T^\bullet_\circ + (T^\bullet_\circ - \mathrm{M}_\circ)\cos^2\beta}{A}, & \text{если } T^\bullet_\circ < \mathrm{M}_\circ; \\ 1, \ \text{если } T^\bullet_\circ = \mathrm{M}_\circ. \end{cases}$$

Выбирая на криволинейном отрезке (*bca*) (рис. 10.5) произвольную точку и подставляя её координаты $(K_3; K_4)$ в (10.2.52), получим вполне определённую оценку левой части (10.2.36). В частности, если взять точку c, то будем иметь

$$\begin{aligned}\int_\Omega [A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2]d\Omega \geqslant \\ \geqslant \inf A(\boldsymbol{x}, t)\cdot \inf c_1(\boldsymbol{x}, t)(I_{11}^2 + 2I_{13}^2 + I_{33}^2) \geqslant \\ \geqslant \Lambda_\Omega^2 \inf A(\boldsymbol{x}, t)\cdot \inf c_1(\boldsymbol{x}, t)(I_1^2 + I_3^2),\end{aligned} \tag{10.2.55}$$

где Λ_Ω^2, по-прежнему, определяется из леммы 10.2.

Следовательно, другой, отличной от (10.2.51) возможной функцией $\Lambda(t)$, входящей в неравенство (10.2.36), а также в условия теорем 10.5 – 10.7, является

$$\Lambda^2(t) = \Lambda_\Omega^2 \inf A(\boldsymbol{x}, t)\cdot \inf c_1(\boldsymbol{x}, t) \tag{10.2.56}$$

Полученные интегральные оценки устойчивости (для вязких жидкостей — критические числа Рейнольдса) достаточны, поэтому возможные дальнейшие результаты связаны с выяснением того, насколько они необходимы в случае тех или иных определяющих соотношений материала.

10.3. Обобщенная задача Орра–Зоммерфельда для вязкопластических течений

Как важный частный случай общих определяющих соотношений, результаты которого будут использованы в главе 11, рассмотрим вязкопластические течения.

10.3.1. Оценки устойчивости вязкопластических течений как следствия полученных в разд. 10.2

Функция $\mathrm{M}(U)$, входящая в (10.1.2), и функция $T(U)$ имеют вид

$$\mathrm{M}(U) = \frac{\tau_s}{U} + \frac{1}{Re},\ T(U) = \tau_s + \frac{U}{Re},\ T^\bullet = \frac{1}{Re} = \mathrm{const} \tag{10.3.1}$$

Линеаризованные уравнения устойчивости произвольного несжимаемого вязкопластического течения следуют из (10.2.1) и (10.3.1)

$$-p_{,i} + \frac{\Delta v_i}{Re} + \frac{2\varkappa}{Re}\left(\frac{v_{ij} - V^\circ_{ijkl}v_{kl}}{U^\circ}\right)_{,j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j^\circ v_{i,j} + v_{i,j}^\circ v_j \tag{10.3.2}$$

Уравнение же устойчивости в терминах функции тока является следствием (10.2.23) и (10.3.1)

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{Re}\Delta\Delta\psi + \tfrac{\varkappa}{Re}\epsilon_{im}[v^\circ_{ijkl}(\epsilon_{kn}\psi_{,nl} + \epsilon_{ln}\psi_{,nk})]_{,jm} = \\ = \tfrac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \epsilon_{jl}(\psi_{,l}\psi^\circ_{,jk} + \psi^\circ_{,l}\psi_{,jk})_{,k},\end{aligned} \tag{10.3.3}$$

где $v^{\circ}_{ijkl} = (\Delta_{ijkl} - V^{\circ}_{ijkl})/U^{\circ}$.

Функции A, B, C, определяемые (10.2.35), с учётом (10.3.1) запишутся следующим образом

$$A = \frac{\tau_s}{U}\cos^2\beta + \frac{1}{Re}, \quad B = -\frac{\tau_s}{U}\cos\beta\sin\beta, \quad C = \frac{\tau_s}{U}\sin^2\beta + \frac{1}{Re} \tag{10.3.4}$$

Стоящий в левой части (10.3.36) функционал, оценки снизу которого проводились в п. 10.2.6, теперь представляет собой сумму двух слагаемых — «вязкого» и «пластического»

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}[A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2]\,d\Omega = \tfrac{1}{Re}(I_{11}^2 + 2I_{13}^2 + I_{33}^2) + \\ + \int\limits_{\Omega}\tfrac{\tau_s}{U}[2\psi_{,13}\sin\beta - (\psi_{,33} - \psi_{,11})\cos\beta]^2 d\Omega \geqslant \\ \geqslant \tfrac{1}{Re}(I_{11}^2 + 2I_{13}^2 + I_{33}^2) + \tfrac{\tau_s}{Q}\int\limits_{\Omega}[2\psi_{,13}\sin\beta - (\psi_{,33} - \psi_{,11})\cos\beta]^2 d\Omega,\end{gathered} \tag{10.3.5}$$

где

$$Q(t) = \sup_{\Omega} U^{\circ}(x, t), \qquad Q^2 \leqslant 4q_{11}^2 + (q_{13} + q_{31})^2$$

Видно, что в качестве оценивающей функции $\Lambda^2(t)$, входящей в (10.2.36), можно взять

$$\Lambda^2(t) = \frac{\Lambda_{\Omega}^2}{Re} + \frac{\tau_s\Lambda_{\tau}^2}{Q}, \tag{10.3.6}$$

где Λ_{Ω}^2 определяется геометрией области из леммы 10.2, а $\Lambda_{\tau}^2(t)$ в свою очередь является оценивающим параметром в неравенстве

$$\int\limits_{\Omega}[2\psi_{,13}\sin\beta - (\psi_{,33} - \psi_{,11})\cos\beta]^2 d\Omega \geqslant \Lambda_{\tau}^2(I_1^2 + I_3^2) \tag{10.3.7}$$

для любой функции $\psi \in \mathrm{W}_2^{0(2)}(\Omega)$ с граничными условиями (10.2.30).

Входящая в утверждение общей теоремы 10.5 функция $F(t)$ в случае вязкопластического течения запишется следующим образом

$$F(t) = \frac{2\Lambda_{\Omega}^2}{Re}t + 2\tau_s\int\limits_0^t\frac{\Lambda_{\tau}^2(\xi)}{Q(\xi)}\,d\xi - \int\limits_0^t(2q_{11} + q_{13} + q_{31})(\xi)\,d\xi \tag{10.3.8}$$

Формулировки теорем 10.5, 10.6 с учётом (10.3.8) останутся прежними дословно, а признак устойчивости стационарного течения (следствие теоремы 10.7) сформулируем следующим образом.

Теорема 10.8. *Для устойчивости стационарного вязкопластического течения $v^{\circ}(x)$ в плоской области Ω с односвязной границей достаточно выполне-*

ния условия

$$\frac{2\Lambda_\Omega^2}{Re} + \frac{2\tau_s \Lambda_\tau^2}{Q} \geqslant 2q_{11} + q_{13} + q_{31} \tag{10.3.9}$$

10.3.2. Стабилизирующее влияние предела текучести

Слагаемые с числом Рейнольдса («вязкие» слагаемые) и безразмерным пределом текучести («пластические» слагаемые) входят в (10.3.8), (10.3.9) с одним и тем же знаком, при этом увеличение Re компенсируется ростом τ_s. Это говорит о стабилизирующем влиянии параметра пластичности на течение ньютоновской жидкости, если $\Lambda_\tau^2 > 0$ и о его нейтральном влиянии, если $\Lambda_\tau = 0$. В любом же случае введение в линейно вязкую модель нелинейности в виде пластического слагаемого при указанных выше ограничениях на геометрию области и граничные условия дестабилизировать исходное течение не может. В качестве приведённого числа Рейнольдса Re' следует брать

$$Re' = \frac{QRe}{Q + \tau\lambda^2 Re}, \quad \lambda = \frac{\Lambda_\tau}{\Lambda_\Omega} \tag{10.3.10}$$

На аддитивный характер зависимости между критериями подобия вязкопластических течений было обращено внимание ещё в [201], а также в последующих работах [133, 215]. Он следует из самого скалярного определяющего соотношения (10.3.1). Критические значения обобщённого числа Рейнольдса были получены в [125], где также выведены зависимости критического числа Рейнольдса и критерия Хёдстрема.

При масштабном моделировании существуют два критериальных уравнения $\mathrm{La} = f(\text{И}_1), \text{И}_2 = g(\text{И}_1)$, где La — число Лагранжа, И_1 — число Ильюшина [134], И_2 — число Ильюшина–Олдройда.

Найдём теперь оценивающую функцию $\Lambda_\tau(t)$, используя результаты п. 10.2.6 для тел с произвольным скалярным упрочнением. Согласно, например, оценке (10.2.51) имеем

$$\Lambda^2 = \Lambda_\Omega^2 \inf\min\left\{\frac{1}{Re}; \frac{1}{Re} + \frac{\tau}{U^\circ}\right\} \equiv \frac{\Lambda_\Omega^2}{Re} \tag{10.3.11}$$

Из (10.3.6), (10.3.11) следует $\Lambda_\tau = 0$, и величина Λ совпадает со своим значением для течения ньютоновской жидкости. Оценки устойчивости любого вязкопластического течения, удовлетворяющего условиям (10.2.30), вычисленные на основании (10.2.51), не будут отличаться от оценок устойчивости соответствующего вязкого течения. Нечувствительность к параметру пластичности τ_s в модели (10.3.1) объясняется достаточным характером этих оценок.

10.3.3. ОЗОЗ для одномерного вязкопластического сдвига

Для основного состояния (10.2.18) уравнение (10.3.3) упрощается и имеет вид

$$\frac{1}{Re}\Delta\Delta\psi + \frac{4\varkappa}{Re}\left(\frac{\psi_{,13}}{|v^{\circ\prime}|}\right)_{,13} = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + v^{\circ}(\Delta\psi)_{,1} - v^{\circ\prime\prime}\psi_{,1} \qquad (10.3.12)$$

Представляя $\psi(x_1, x_3, t)$ в виде отдельной гармоники возмущения $\psi = \phi(x_3)\exp(isx_1 + \alpha t)$, преобразуем (10.3.12) к спектральному виду

$$\begin{aligned}&\phi^{IV} - 2s^2\phi'' + s^4\phi - 4\varkappa s^2\left(\tfrac{\phi'}{|v^{\circ\prime}|}\right)' = \\ &\quad = is\left[\left(v^{\circ} - \tfrac{i\alpha}{s}\right)(\phi'' - s^2\phi) - v^{\circ\prime\prime}\phi\right]Re\end{aligned} \qquad (10.3.13)$$

Последнее слагаемое в левой части (10.3.13) учитывает влияние пластических свойств материала по сравнению с вязкими. Без этого слагаемого соотношение (10.3.13) совпадает с классическим уравнением Орра—Зоммерфельда.

Так как основное движение происходит в слое $0 < x_3 < 1$, то кинематические граничные условия при $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$ имеют вид

$$x_3 = 0, \quad x_3 = 1 \qquad \phi = \phi' = 0 \qquad (10.3.14)$$

Выпишем граничные условия (10.2.26) на Σ_r. В самом общем случае одномерного сдвига область Ω_r представляет собой набор N слоёв $(0 \leqslant \xi_1 < x_3 < \xi_2) \cup (\xi_3 < x_3 < \xi_4) \cup \cdots \cup (\xi_{2N-1} < x_3 < \xi_{2N} \leqslant 1)$, где $\xi_1, \ \ .., \xi_{2N}$ определяются из основного течения. Пусть $x_3 \ = \ \xi$ — одна из составляющих границы Σ_r, на которой $U^{\circ} = 0$. Тогда условие (10.2.26) запишется в форме

$$v^{\circ\prime\prime}(\xi)\eta_r + 2v_{13}(\xi) = 0 \qquad (10.3.15)$$

Положим $\eta_r(x_1, t) = \mathrm{H}\exp(isx_1 + \alpha t)$. Так как $2v_{13} = (\phi'' + s^2\phi)\exp(isx_1 + \alpha t)$, то (10.3.15) равносильно соотношению для амплитуд

$$\mathrm{H}v^{\circ\prime\prime}(\xi) + \phi''(\xi) + s^2\phi(\xi) = 0 \qquad (10.3.16)$$

Связь константы H и значения $\phi(\xi)$ следует из закона движения (10.2.27) поверхности Σ_r:

$$[\alpha + isv^{\circ}(\xi)]\mathrm{H} + is\phi(\xi) = 0 \qquad (10.3.17)$$

Таким образом, ОЗОЗ для одномерного плоскопараллельного вязкопластического сдвига заключается в решении уравнения (10.3.13) в слое Ω при выполнении условий (10.3.14) на границах слоя и условий (10.3.16), (10.3.17) на границах жёстких зон, уравнения которых в основном и возмущённом процессах могут различаться.

Грубость оценок типа (10.3.11), найденных для вязкопластических материалов из общих соотношений, заставляет более точно изучить устойчивость таких течений. Особое внимание уделим вопросам устойчивости вязкопластического сдвига. Это объясняется тем, что интегральные оценки устойчивости, полученные ранее для течений в слое $\Omega = \{0 < x_3 < 1\}$ либо в кольце $\Omega = \{R_1 < r < R_2\}$, напрямую неприменимы, поскольку в данных случаях границы Ω неодносвязны.

Глава 11

УСТОЙЧИВОСТЬ СДВИГОВЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Обратимся к уравнению (10.3.13) устойчивости одномерного сдвигового течения в вязкопластическом слое относительно двумерных возмущений. Изучим в настоящей главе три типа граничных условий, соответствующих трём классическим стационарным профилям $v^\circ(x_3)$: течению Куэтта, течению Пуазейля и движению слоя по наклонной плоскости в поле силы тяжести. Задачи устойчивости рассматриваются и для других типов течений с произвольным профилем $v^\circ(x_3)$, не являющимся точным решением уравнений движения. Обоснование такого подхода для ньютоновских жидкостей дано в [107].

11.1. Вязкопластическое течение Куэтта в плоском слое

11.1.1. Нижние оценки критических чисел Рейнольдса

Примем, что основное течение характеризуется произвольной монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией $v^\circ(x_3)$ такой, что $|v^{\circ\prime}| \leqslant q$ и $\int_0^1 dx_3/|v^{\circ\prime}| < \infty$. Жёсткие зоны по толщине слоя отсутствуют (именно такое движение берётся в качестве невозмущённого), и граничные условия для амплитуды $\phi(x_3)$ имеют вид

$$x_3 = 0 \quad \text{и} \quad x_3 = 1 \qquad \phi = \phi' = 0 \tag{11.1.1}$$

Течение Куэтта в узком смысле означает, что $v^\circ(x_3) = x_3$ (рис. 11.1).

Пусть ϕ — элемент комплекснозначного гильбертова пространства $\overline{\mathbb{H}}_2(\Omega)$ с нормой

$$\|\phi\|^2 = \int_0^1 |\phi''|^2 dx_3, \tag{11.1.2}$$

имеющий четыре непрерывные производные. Умножим (10.3.13) на комплексно-сопряжённую функцию $\bar{\phi}$ и проинтегрируем по x_3 от 0 до 1. Принимая во внимание (11.1.1), получим

$$I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 = -[\alpha(I_1^2 + s^2 I_0^2) + isQ]Re, \tag{11.1.3}$$

где

$$I_m^2 = \int\limits_0^1 |\phi^{(m)}|^2 dx_3\,, \quad m = 0,1,2, \quad I_v^2 = \int\limits_0^1 \frac{|\phi'|^2}{|v^{\circ\prime}|^2}\, dx_3,$$

$$Q = Q_* + iQ_{**}, \quad Q_{**} = \int\limits_0^1 v'(\phi'\bar{\phi})_{**} dx_3,$$

$$Q_* = \int\limits_0^1 \left[v^\circ|\phi'|^2 + \left(\tfrac{1}{2}v^{\circ\prime\prime} + s^2 v^\circ\right)|\phi|^2\right] dx_3$$

Выделим в (11.1.3) действительную и мнимую части

$$\alpha_* = \frac{1}{I_1^2 + s^2 I_0^2}\left(sQ_{**} - \frac{I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2}{Re}\right), \tag{11.1.4}$$

$$\alpha_{**} = -\frac{sQ_*}{I_1^2 + s^2 I_0^2} \tag{11.1.5}$$

и воспользуемся неравенством Шварца в пространстве $\overline{\mathbb{H}}_2(\Omega)$ с нормой (11.1.2)

$$|Q_{**}| \leqslant \int\limits_0^1 |v^{\circ\prime}||\phi'||\phi| dx_3 \leqslant qI_0 I_1 \tag{11.1.6}$$

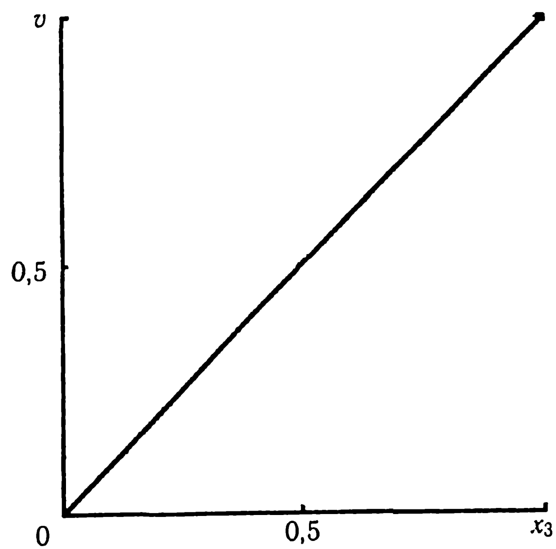


Рис. 11.1. Профиль плоского течения Куэтта в узком смысле

Из (11.1.4), (11.1.6) следует

Теорема 11.1. *Пусть $\alpha(s, Re, \varkappa)$ — произвольное собственное число ОЗОЗ для течения Куэтта. Тогда*

$$\alpha_* \leqslant \frac{qsI_0I_1Re - (I_2^2 + 2s^2I_1^2 + s^4I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2)}{(I_1^2 + s^2I_0^2)Re} \qquad (11.1.7)$$

Достаточным условием устойчивости движения, следовательно, является отрицательность правой части неравенства (11.1.7).

Аналогичное утверждение в теории устойчивости ньютоновских несжимаемых жидкостей было получено ещё в [328].

Следствие 1. *Если*

$$qRe < 2\frac{4\pi^4 + 2\pi^2 s^2(1 + 2\varkappa/q) + s^4}{\pi^2 + s^2}, \qquad (11.1.8)$$

то $\alpha_* < 0$.

Доказательство следует из теоремы 11.1, очевидного соотношения $sI_0I_1 \leqslant (I_1^2 + s^2I_0^2)/2$ и неравенств Фридрихса $I_1^2 \geqslant \pi^2 I_0^2$, $I_2^2 \geqslant 4\pi^2 I_1^2$, $qI_v^2 \geqslant I_1^2$.

Для того, чтобы получить нижнюю оценку критического числа Рейнольдса Re^*, необходимо найти минимальное значение правой части (11.1.8) по s. Проводя соответствующий анализ, придём к следующему результату: если $\varkappa \geqslant q/2$, то $Re^* > 8\pi^2/q$, и самыми медленно затухающими будут длинноволновые

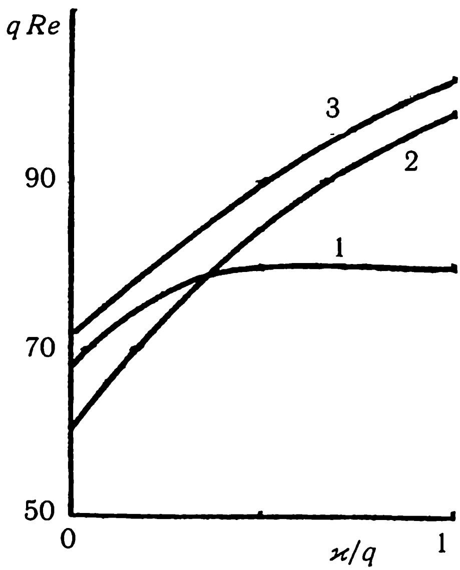


Рис. 11.2. Кривые устойчивости вязкопластического течения Куэтта на плоскости $(\varkappa/q; q\,Re)$

возмущения $s \to 0$; если $0 \leqslant \varkappa < q/2$, то $Re^* > 4\pi^2[2\varkappa/q + (3 - 4\varkappa/q)^{1/2}]/q$, и самыми медленно затухающими будут гармоники $s = \pi[(3 - 4\varkappa/q)^{1/2} - 1]^{1/2}$.

По выведенным достаточным оценкам устойчивости на плоскости $(\varkappa/q; qRe)$ (рис. 11.2) построена кривая **1**. Для вязкого предела ($\varkappa \to 0$) $qRe_0^* > 68.38$.

Следствие 2. *Если*

$$qRe < \frac{2\pi\lambda_1}{s} + 2\pi s\left(1 + \frac{2\varkappa}{q}\right), \tag{11.1.9}$$

где $\lambda_1 \approx 22.373$ *является наименьшим положительным корнем уравнения* $\cos\sqrt{\lambda_1}\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_1} = 1$, *то* $\alpha_* < 0$.

Доказательство аналогично предыдущему, в нём надо использовать ещё одно неравенство Фридрихса: $I_2^2 \geqslant \lambda_1^2 I_0^2$.

Найдём нижнюю оценку критического числа Рейнольдса Re^*, пользуясь следствием 2: $qRe^* > 4\pi[\lambda_1(1+2\varkappa/q)]^{1/2}$. При этом самыми медленно затухающими будут гармоники $s = [\lambda_1/(1+2\varkappa/q)]^{1/2}$. Кривая $qRe = 4\pi[\lambda_1(1+2\varkappa/q)]^{1/2}$ построена на рис. 11.2 (кривая **2**). В вязком пределе будем иметь $qRe_0^* > 59.43$.

Следствие 3. *Если*

$$qRe < \frac{2\pi\lambda_1}{s} + \frac{4\pi\varkappa s}{q} + 2\sqrt{2}s^2, \tag{11.1.10}$$

то $\alpha_* < 0$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.

По данной оценке самым медленно затухающим возмущением будет возмущение с волновым числом $s_\diamond$, являющимся корнем уравнения $s^3 + (\pi/\sqrt{2})\varkappa s^2/q - \pi\lambda_1/(2\sqrt{2}) = 0$. Следовательно, нижняя оценка имеет вид $qRe^* > 2\pi\lambda_1/s_\diamond + 4\pi\varkappa s_\diamond/q + 2\sqrt{2}s^2$. Соответствующая кривая **3** изображена на рис. 11.2, при $\varkappa \to 0$ она стремится к $qRe_0^* = 72.25$ (вязкий предел).

Достаточные интегральные оценки устойчивости (11.1.8) — (11.1.10) независимы, поэтому можно дать общую нижнюю оценку критического числа Рейнольдса. При фиксированном $\varkappa/q$

$$qRe^* > \max\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}\}, \tag{11.1.11}$$

т. е. область параметров под верхней огибающей кривых **1–3** — область абсолютной устойчивости вязкопластического течения Куэтта. Для течения Куэтта в узком смысле везде необходимо положить $q = 1$.

Как видно, все три кривые **1–3** являются неубывающими, что позволяет сделать важное предположение о стабилизирующем влиянии пластичности в данной задаче. Оценки аналогичные (11.1.8) - (11.1.10) в теории вязких жидкостей впервые были получены Д.Джозефом в [276, 277], поэтому носят название оценок Джозефа. Затем они были уточнены в [86, 343].

11.1.2. Фазовая частота колебаний

Обратимся теперь к фазовой частоте колебаний α_{**} (11.1.5). Ни в (11.1.5), ни в выражение для Q_* пластические составляющие не входят, поэтому следующая теорема будет справедлива как для вязких жидкостей, так и для вязкопластических тел. Сформулируем её как и в [276].

Теорема 11.2. *Пусть $\alpha(s, Re, \varkappa)$ — произвольное собственное число ОЗОЗ для течения Куэтта. Тогда*

$$v^{\circ}_{min} < \frac{\alpha_{**}}{s} < v^{\circ}_{max} + \frac{2v^{\circ\prime\prime}_{max}}{\pi^2 + 4s^2}, \quad v^{\circ\prime\prime}_{min} \geqslant 0,$$

$$v^{\circ}_{min} + \frac{2v^{\circ\prime\prime}_{min}}{\pi^2 + 4s^2} < \frac{\alpha_{**}}{s} < v^{\circ}_{max} + \frac{2v^{\circ\prime\prime}_{max}}{\pi^2 + 4s^2}, \quad v^{\circ\prime\prime}_{min} \leqslant 0 \leqslant v^{\circ\prime\prime}_{max},$$

$$v^{\circ}_{min} + \frac{2v^{\circ\prime\prime}_{min}}{\pi^2 + 4s^2} < \frac{\alpha_{**}}{s} < v^{\circ}_{max}, \quad v^{\circ\prime\prime}_{max} \leqslant 0$$

Доказательство полностью переносится из [276].

Заметим, что, как и в вязких течениях [344], фазовая скорость α_{**}/s может выходить за пределы основного потока $[v^{\circ}_{min}; v^{\circ}_{max}]$.

11.2. Вязкопластическое течение Пуазейля в плоском слое

11.2.1. Нижние оценки критических чисел Рейнольдса

Невозмущённое вязкопластическое течение Пуазейля в плоском канале с постоянным перепадом давления Δp имеет вид

$$\begin{aligned} v^{\circ} &= \frac{x_3(2\xi - x_3)}{\xi^2}, && 0 < x_3 < \xi \\ v^{\circ} &= \frac{(1-x_3)[2\xi-(1-x_3)]}{\xi^2}, && 1-\xi < x_3 < 1 \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

Здесь $\xi = 1/2 - \tau_s/\Delta p$, область $\Omega_r = \{\xi < x_3 < 1 - \xi\}$ занята жёсткой зоной, которая присутствует всегда и занимает всю область $\Omega = \{0 < x_3 < 1\}$, если $\Delta p < 2\tau_s$. Характерная скорость V при обезразмеривании в (11.2.1) выбрана так, чтобы $v^{\circ}(\xi) = 1$ (рис. 11.3), т. е. $V = \Delta p \xi^2/(2\mu)$.

В силу симметрии основного течения относительно плоскости $x_3 = 1/2$ достаточно исследовать его устойчивость в области $\Omega_f = \{0 < x_3 < \xi\}$. Как и в разд. 11.1 будем полагать, что вместо (11.2.1) в Ω_f имеется произвольная монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция $v^{\circ}(x_3)$ такая, что $|v^{\circ\prime}| \leqslant q$ и $\int_0^{\infty} \chi\, dx_3/|v^{\circ\prime}| < \infty$ для любой функции $\chi(x_3)$, удовлетворяющей условию $\chi(\xi) = 0$.

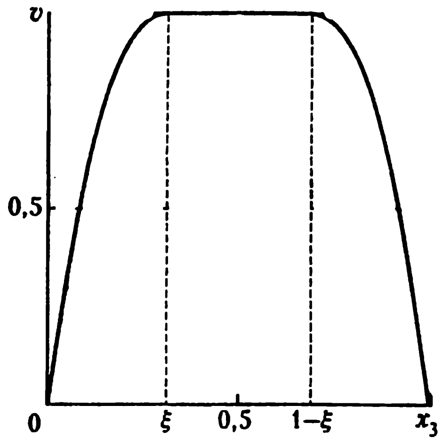


Рис. 11.3. Профиль плоского вязкопластического течения Пуазейля

Граничные условия в краевой задаче возмущённого движения для данного случая следуют из (10.3.16), (10.3.17)

$$\begin{aligned} &x_3 = 0 \qquad \phi = \phi' = 0; \\ &x_3 = \xi \qquad \phi' = 0, \quad \phi'' + s\left(s - \tfrac{iv^{\circ\prime\prime}}{\alpha + isv^{\circ}}\right)\phi = 0 \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

Они выписаны с учётом движения границы жёсткой зоны в возмущённом движении.

Пусть, как и ранее, ϕ — элемент комплекснозначного гильбертова пространства $\overline{\mathbb{H}}_2(\Omega_f)$ с нормой

$$\|\phi\|^2 = \int_0^{\xi} |\phi''|^2 dx_3, \tag{11.2.3}$$

имеющий четыре непрерывные производные. Умножим обе части равенства (11.2.1) на $\bar{\phi}$ и проинтегрируем по x_3 в пределах от 0 до ξ. Учитывая граничные условия (11.2.2), получим

$$\begin{aligned} &I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 + \left(\tfrac{isv^{\circ\prime\prime}}{\alpha + isv^{\circ}}|\phi|^2\right)'(\xi) - \\ &\quad - s^2\left(|\phi|^2\right)'(\xi) = -[\alpha(I_1^2 + s^2 I_0^2) + isQ]Re, \end{aligned} \tag{11.2.4}$$

где

$$I_m^2 = \int_0^{\xi} |\phi^{(m)}|^2 dx_3\,, \quad m = 0, 1, 2, \quad I_v^2 = \int_0^{\xi} \frac{|\phi'|^2}{|v^{\circ\prime}|^2} dx_3$$

Величина Q принимает то же значение, что и в формулах (11.1.3). Заметим, что $I_v^2 < \infty$ в силу того, что $\phi'(\xi) = 0$ и оговорённых выше требований на $v^\circ(x_3)$. Разделим действительную и мнимую части в (11.2.4), получим

$$I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 + \left(\frac{sv^{\circ\prime\prime}(\alpha_{**}+sv^\circ)}{\alpha_*^2+(\alpha_{**}+sv^\circ)^2}|\phi|^2\right)'(\xi) - \\ -s^2\left(|\phi|^2\right)'(\xi) = -[\alpha_*(I_1^2 + s^2 I_0^2) - sQ_{**}]Re \tag{11.2.5}$$

$$\left(\frac{sv^{\circ\prime\prime}\alpha_*}{\alpha_*^2 + (\alpha_{**} + sv^\circ)^2}|\phi|^2\right)'(\xi) = -[\alpha_{**}(I_1^2 + s^2 I_0^2) + sQ_*]Re \tag{11.2.6}$$

Систему (11.2.5), (11.2.6) можно рассматривать как систему двух уравнений для α_* и α_{**}. После её решения подробный анализ должен быть проведён с основным параметром устойчивости α_*.

Ограничимся здесь рассмотрением случая, когда граница жёсткой зоны в возмущённом процессе деформируется незначительно, и можно принять, что её уравнение в любой момент времени имеет вид $x_3 = \xi$. Вместо условий (11.2.2) будем иметь

$$\begin{aligned} &x_3 = 0 \qquad \phi = \phi' = 0; \\ &x_3 = \xi \qquad \phi' = 0, \quad \phi'' + s^2\phi = 0, \end{aligned} \tag{11.2.7}$$

а система (11.2.5), (11.2.6) перепишется в виде

$$\alpha_* = \frac{1}{I_1^2 + s^2 I_0^2}\left(sQ_{**} - \frac{I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 - s^2(|\phi|^2)'(\xi)}{Re}\right), \tag{11.2.8}$$

$$\alpha_{**} = -\frac{sQ_*}{I_1^2 + s^2 I_0^2} \tag{11.2.9}$$

Теорема 11.3. *Пусть $\alpha(s, Re, \varkappa)$ — произвольное собственное число ОЗОЗ для течения Пуазейля. Тогда*

$$\alpha_* \leqslant \frac{qsI_0I_1Re - [I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2 + 4\varkappa s^2 I_v^2 - s^2(|\phi|^2)'(\xi)]}{(I_1^2 + s^2 I_0^2)Re} \tag{11.2.10}$$

Доказательство теоремы 11.3 непосредственно следует из неравенства Шварца в пространстве $\overline{\mathbb{H}}_2(\Omega_f)$ с нормой (11.2.3):

$$|Q_{**}| \leqslant \int\limits_0^\xi |v^{\circ\prime}||\phi'||\phi|dx_3 \leqslant qI_0I_1 \tag{11.2.11}$$

Для вывода следствий теоремы 11.3 воспользуемся неравенствами Фридрихса

$$\xi^2 I_1^2 \geqslant \pi^2 I_0^2; \quad qI_v^2 \geqslant I_1^2; \quad I_2^2 - s^2(|\phi|^2)'(\xi) \geqslant \lambda_2^2(s) I_1^2;$$

$$I_2^2 - s^2(|\phi|^2)'(\xi) \geqslant \lambda_3^2(s)I_0^2; \inf\lambda_2(s) = \frac{\pi}{\xi}; \inf\lambda_3(s) = \pi^2/\xi^2,$$

которые получаются из решения соответствующих изопериметрических задач. Здесь $\lambda_2(s)$ — минимальный положительный корень уравнения $s\lambda^2\xi = (2s^2 - \lambda^2)\mathrm{tg}(\lambda\xi/2)$, а $\lambda_3(s)$ — минимальный положительный корень уравнения $\lambda\sin(\sqrt{\lambda}\xi)\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}\xi) = s^2[1 - \cos(\sqrt{\lambda}\xi)\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}\xi)]$.

Следствие 1. *Если*

$$qRe < 2\frac{\lambda_2^2(s)\pi^2 + 2\pi^2(1 + 2\varkappa/q)s^2 + s^4\xi^2}{\pi^2 + s^2\xi^2}, \tag{11.2.12}$$

то $\alpha_* < 0$.

Следствие 2. *Если*

$$qRe < \frac{\pi^3}{s\xi^3} + 2\pi s\left(\frac{1}{\xi} + \frac{2\varkappa}{q\xi}\right), \tag{11.2.13}$$

то $\alpha_* < 0$.

Следствие 3. *Если*

$$qRe < \frac{\pi^3}{s\xi^3} + 2s^2\sqrt{2} + \frac{4\pi\varkappa s}{q\xi}, \tag{11.2.14}$$

то $\alpha_* < 0$.

Для получения нижних оценок критического числа Рейнольдса Re^* найдём минимальные по s значения правых частей неравенств (11.2.12) - (11.2.14). Из (11.2.12) следует, что $Re^* > 2\pi^2/(q\xi^2)$ и самые медленно затухающие возмущения длинноволновые. Неравенство (11.2.13) даёт $Re^* > 2\pi^2[2(1 + 2\varkappa/q)]^{1/2}/(q\xi^2)$, а неравенство (11.2.14) — $qRe^* > \pi^3/(\xi^3 s_\diamond) + 4\varkappa\pi s_\diamond/(q\xi) + 2\sqrt{2}s_\diamond^2$, где $s_\diamond$ — корень уравнения $4s^3\sqrt{2} + 4\pi\varkappa s^2/(q\xi) - \pi^3/\xi^3 = 0$.

На рис. 11.4 по полученным выше оценкам построены три достаточные границы устойчивости **1** - **3**. В силу независимости следствий 1 - 3 можно дать общую нижнюю оценку критического числа Рейнольдса

$$q\xi^2 Re^* > \max\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}, \tag{11.2.15}$$

Для течения Пуазейля в узком смысле ($v^\circ(x_3)$ выбирается в виде (11.2.1)) необходимо везде положить $q = 2/\xi$. Как и для течения Куэтта, все три кривые на рис. 11.4 неубывающие. При $\varkappa \to 0$ они стремятся к значениям 19.74; 27.91; 26.38 соответственно, однако прямого вязкого предела в данной задаче нет, поскольку граничные условия (11.2.2) или (11.2.7) не сводятся при $\varkappa \to 0$ к классическим условиям вязкого течения Пуазейля в плоском слое.

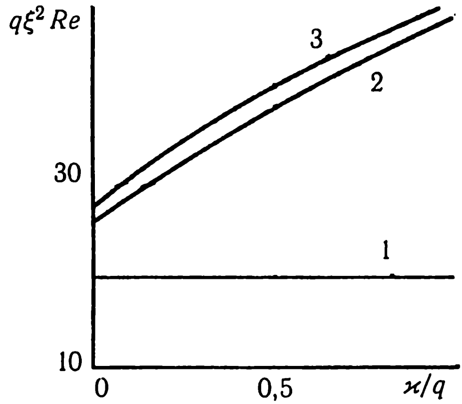


Рис. 11.4. Кривые устойчивости вязкопластического течения Пуазейля на плоскости $(\varkappa/q; q\xi^2 Re)$

11.2.2. Сдвиг тяжёлого слоя вдоль наклонной плоскости

Анализ устойчивости соответствующего движения ньютоновской жидкости выполнен в [74, 85, 216, 217] для однослойной структуры и в [207] для двухслойной. В [12] изучено изотермическое течение вязкого слоя по наклонной плоскости и показано, что оно менее устойчиво чем чисто гидродинамическое. Если вязкой диссипацией можно пренебречь, то конденсация стабилизирует, а испарение дестабилизирует поток.

Классическое решение задачи о стационарном движении вязкопластического слоя по плоскости, наклонённой под углом β к горизонту, в поле силы тяжести g следующее

$$v^\circ = \frac{x_3(2\xi - x_3)}{\xi^2}, \quad 0 < x_3 < \xi, \tag{11.2.16}$$

где $\xi = 1 - \tau_s Fr/\sin\beta$; $Fr = V^2/(gh)$ — число Фруда; h — толщина слоя; V — характерная скорость течения.

В безразмерных координатах (в базис обезразмеривания включены плотность тела ρ, а также величины h и V) жёсткая зона Ω_r занимает слой $\{\xi < x_3 < 1\}$ вблизи свободной границы. Эта зона движется как твёрдое целое со скоростью $v^\circ(\xi) = 1$, при этом $V = \rho g\xi^2 h^2 \sin\beta/(2\mu)$. В случае $\tau_s Fr > \sin\beta$ сдвиговых гравитационных усилий для выведения системы из состояния покоя недостаточно.

Как видно, основное течение (11.2.16) полностью совпадает с течением Пуазейля (11.2.1) в области $\{0 < x_3 < \xi\}$, кроме того граничные условия ОЗОЗ

(11.2.2) либо (11.2.7) на границах этой же области имеют место и здесь. Заметим, что совпадение граничных условий в этих двух течениях имеет место только, если предел текучести материала отличен от нуля, и зону Ω_f от свободной границы слоя отделяет жёсткая прослойка. В случае же ньютоновских жидкостей граничные условия в этих двух задачах принципиально различны из-за появления свободной границы. Следовательно, при наличии предела текучести математические постановки краевых задач возмущённого движения в разд. 11.1 и 11.2 идентичны, и все оценки устойчивости вязкопластического течения Пуазейля могут быть перенесены на движение тяжёлого слоя по наклонной плоскости.

11.3. Вязкопластическое течение Куэтта—Тейлора

Рассмотрим пример анализа обобщённой задачи Орра—Зоммерфельда в криволинейной ортогональной системе координат, а в качестве основного движения выберем несжимаемое вязкопластическое течение между двумя соосно вращающимися цилиндрами.

11.3.1. Невозмущённое движение и условия его существования

Обозначим радиусы внутреннего и внешнего цилиндров a и b, а угловые скорости их вращения ω_a и ω_b соответственно. Характерной скоростью в данной задаче будет $\omega_a a$, поэтому базис обезразмеривания фактически состоит из величин $\{\rho, \omega_a, a\}$. Тогда безразмерные параметры Re и $\varkappa$ равны $Re = \rho\omega_a a^2/\mu$, $\varkappa = \tau_s/(\mu\omega_a)$, а сам предел текучести при сдвиге τ_s следует отнести к величине $\rho\omega_a^2 a^2$. Введём также отношения $R = b/a$, $\omega = (\omega_b - \omega_a)/\omega_a$.

Единственная ненулевая компонента скорости $v_\theta(r) \equiv v^\circ(r)$ в невозмущённом стационарном течении Куэтта—Тейлора имеет вид

$$v^\circ = \frac{R^2}{R^2-1}(\omega \pm \varkappa \ln R)\left(r - \frac{1}{r}\right) \mp \varkappa r \ln r + r \tag{11.3.1}$$

На границах $r = 1$ и $r = R$ приняты условия прилипания, т. е. $v^\circ(1) = 1$, $v^\circ(R) = R(1+\omega)$.

Другие характеристики невозмущённого движения являются следующими функциями радиуса r

$$v^\circ_{r\theta} = \frac{R^2}{(R^2-1)r^2}(\omega \pm \varkappa \ln R) \mp \frac{\varkappa}{2}, \quad U^\circ = 2|v^\circ_{r\theta}| \tag{11.3.2}$$

$$\sigma^\circ_{r\theta} = \frac{2R^2}{(R^2-1)r^2 Re}(\omega \pm \varkappa \ln R), \quad T^\circ = |\sigma^\circ_{r\theta}| \tag{11.3.3}$$

Верхние знаки в формулах (11.3.1) – (11.3.3) следует брать, если $\omega > 0$, и нижние, если $\omega < 0$.

Граница $r = \xi$, разделяющая область вязкопластического течения и жёсткую зону, которая вращается как абсолютно твёрдое целое, определяется из условия $T^\circ(r) = \tau_s$. Область Ω_f состоит из тех точек тела, где $T^\circ(r) > \tau_s$ или $U^\circ(r) > 0$.

В плоскости параметров $(R; 2|\omega|/\varkappa)$ выделим две области **А** и **Б** (рис. 11.5), разделяемые кривой $2|\omega|/\varkappa = R^2 - 1 - 2\ln R$. Из вида $U^\circ(r)$ (11.3.2) следует, что, если исходная система с её геометрией и физико-механическими характеристиками принадлежит области **А**, то вязкопластическое течение имеет место при $1 < r < R$, и жёсткая зона отсутствует. Если же изображающая точка лежит в области **Б**, то появляется жёсткая зона, примыкающая к внешнему цилиндру. В этом случае $U^\circ(\xi) = 0$, т. е.

$$\xi = R\sqrt{\frac{2(|\omega| + \varkappa \ln R)}{\varkappa(R^2 - 1)}} \tag{11.3.4}$$

Заметим, что $\xi \geqslant 1$ при $R > 1$, т. е. жёсткая зона не может занимать весь зазор между цилиндрами (кроме, разумеется, случая $\omega = 0$). Такое было бы возможным, если на одной из границ задавалось бы динамическое условие, например, удерживающий момент. На рис. 11.6 приведена зависимость $\xi(R)$, отражаемая формулой (11.3.4), при различных значениях $2|\omega|/\varkappa$.

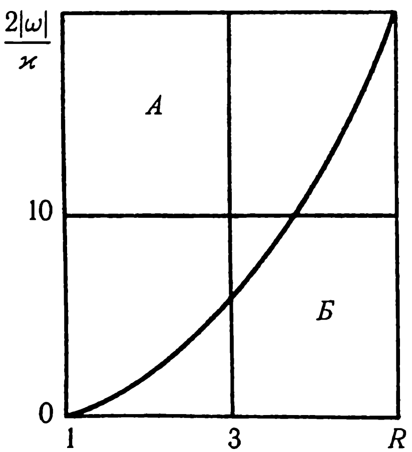


Рис. 11.5. Области **А** и **Б** на плоскости $(R; 2|\omega|/\varkappa)$

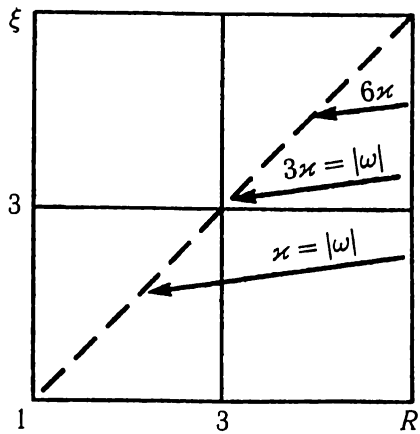


Рис. 11.6. Графики зависимости $\xi(R)$ (11.3.4) при различных значениях $2|\omega|/\varkappa$

11.3.2. Постановка обобщённой задачи Орра—Зоммерфельда

Выбранное в качестве невозмущённого известное течение (11.3.1) – (11.3.3) является одномерным сдвигом. В теории линейных вязких жидкостей, изучая устойчивость установившихся плоскопараллельных сдвигов, достаточно рассматривать только двумерные возмущения в плоскости основного движения. Для вязкопластических материалов при этом надо требовать дополнительное условие (см. обобщённую теорему Сквайра 10.4), которое тем не менее допускает широкий класс возмущений, выходящих из плоскости основного движения. Как указано в п. 10.2.3 (случай B), в криволинейной ортогональной системе трёхмерная картина вариаций вообще не сводится к двумерной. Поэтому анализ устойчивости течения Куэтта—Тейлора справедлив лишь при искусственном ограничении $v_z = 0$.

С учётом выше сказанного исследуем двумерную картину вариаций скоростей $(v_r, v_\theta, 0)$. Линеаризуя определяющие соотношения и подставляя в них соотношения Стокса, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\varkappa}{U^\circ} + 1\right)\frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\varkappa}{U^\circ} + 1\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\varkappa}{U^\circ} + 1\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \end{aligned} \tag{11.3.5}$$

Введём функцию тока $\psi(r, \theta, t)$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{11.3.6}$$

тем самым удовлетворив условию несжимаемости. Подставим далее соотношения (11.3.5) в линеаризованные уравнения движения, исключим давление и стандартным путём, используя (11.3.6), придём к уравнению относительно ψ

$$\Delta\Delta\psi + \frac{4\varkappa}{r^2}\left(\frac{\psi_{,r} - \psi/r}{U^\circ}\right)_{,\theta\theta r} = \left[\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{v^\circ}{r}(\Delta\psi)_{,\theta} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{r}\left(v^{\circ\prime\prime} + \frac{v^{\circ\prime}}{r} - \frac{v^\circ}{r^2}\right)\psi_{,\theta}\right] Re \tag{11.3.7}$$

К (11.3.7) надо добавить граничные условия при $r = 1$ и $r = R$, если исходное движение принадлежит области **А** на рис. 11.5, либо при $r = 1$ и $r = \xi$, если исходное движение принадлежит области **Б**. Рассмотрим сначала подробно первый случай:

$$r = 1, \quad r = R \qquad \psi_{,r} = \psi_{,\theta} = 0 \tag{11.3.8}$$

Разложим функцию тока в ряд Фурье по θ

$$\psi(r,\theta,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(r) \mathrm{e}^{in\theta+\alpha_n t}, \quad \alpha_n = \alpha_{n*} + i\alpha_{n**} \in \mathbb{C} \tag{11.3.9}$$

и исследуем устойчивость отдельной гармоники возмущения с номером n. Критерием устойчивости будет условие $\alpha_{n*} < 0$ для любого n.

Подставляя ряд (11.3.9) в (11.3.7), (11.3.8) и опуская для краткости индекс n, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 \phi - \frac{4\varkappa n^2}{r^2}\left(\frac{\phi'-\phi/r}{U^\circ}\right)' = \\ = \left[\left(\alpha + \frac{inv^\circ}{r}\right)\left(\phi'' + \frac{\phi'}{r} - \frac{n^2\phi}{r^2}\right) + \frac{2in\varkappa}{r^2}\phi\right] Re\end{gathered} \tag{11.3.10}$$

с граничными условиями

$$r = 1, \quad r = R \qquad \phi = \phi' = 0 \tag{11.3.11}$$

Линеаризованная краевая задача (11.3.10), (11.3.11) представляет собой ОЗОЗ для стационарного вязкопластического течения между соосно вращающимися цилиндрами.

11.3.3. Интегральные оценки устойчивости

Пусть комплексная амплитуда $\phi(r)$ — элемент пространства $\overline{\mathbb{H}}_2[1;R]$ с соответствующей нормой

$$\|\phi(t)\|^2 = \int_1^R |\phi''|^2 dx_3, \tag{11.3.12}$$

Умножим обе части (11.3.10) на r, затем на комплексно-сопряжённую функцию $\bar{\phi}$ и проинтегрируем от 1 до R. Используя однородные граничные условия (11.3.11), будем иметь

$$L = -[\alpha(I_1^2 + n^2 I_0^2) + inQ]Re, \tag{11.3.13}$$

где

$$L = J_2^2 + (2n^2+1)J_1^2 + n^2(n^2-4)J_0^2 + 4\varkappa n^2(K_1^2 - K_0^2 + K^2),$$

$$I_m^2 = \int_1^R |\phi^{(m)}|^2 r^{2m-1} dr, \quad J_m^2 = \int_1^R |\phi^{(m)}|^2 r^{2m-3} dr,$$

$$K_m^2 = \int\limits_1^R |\phi^{(m)}|^2 \frac{r^{2m-3}}{U^\circ}\,dr, \quad K^2 = -\int\limits_1^R |\phi|^2 \frac{(U^\circ)'}{r^2(U^\circ)^2}\,dr$$

$$Q + Q_* + Q_{**}, \quad Q_{**} = \int\limits_1^R U^\circ(\phi'\bar{\phi})_{**} dr, \quad m = 0, 1, 2,$$

$$Q_* = \int\limits_1^R \left(v^\circ|\phi'|^2 + \frac{n^2 v^\circ}{r^2}|\phi|^2 + U^\circ(\phi'\bar{\phi})_* - 2\varkappa I_0^2 \right) dr$$

Выделим в уравнении (11.3.13) действительные и мнимые части

$$\alpha_* = \frac{nQ_{**} - L/Re}{I_1^2 + n^2 I_0^2}, \quad \alpha_{**} = -\frac{nQ_*}{I_1^2 + n^2 I_0^2} \tag{11.3.14}$$

В силу неравенства Шварца [180] в $\overline{\mathbb{H}}_2[1; R]$ с нормой (11.3.12) имеем

$$|Q_{**}| \leqslant \int\limits_1^R U^\circ|\phi'||\phi|\,dr \equiv \int\limits_1^R U^\circ \sqrt{r}|\phi'| \frac{|\phi|}{r}\,dr \leqslant qI_1 I_0, \tag{11.3.15}$$

где

$$q = \max_{1 \leqslant r \leqslant R} U^\circ(r)$$

Воспользуемся также очевидным неравенством $nI_0 I_1 \leqslant (I_1^2 + n^2 I_0^2)/2$. Из (11.3.14), (11.3.15) следует довольно общая интегральная оценка устойчивости основного течения. Сформулируем её в виде следующей теоремы.

Теорема 11.4. *Пусть $\alpha(n, Re, \varkappa, \omega, R)$ — произвольное собственное число ОЗОЗ для течения Куэтта—Тейлора. Тогда, если*

$$Re \leqslant \frac{2L}{q(I_1^2 + n^2 I_0^2)}, \tag{11.3.16}$$

то $\alpha_* < 0$, и исходное течение устойчиво относительно двумерных возмущений $(v_r; v_\theta; 0)$.

Оценка (11.3.16) носит достаточный характер. Дальнейший анализ основан на применении неравенств Фридрихса

$$I_1^2 \geqslant \frac{\pi^2 I_0^2}{\ln^2 R}, \quad J_2^2 > \frac{\pi^2 J_1^2}{\ln^2 R}, \quad J_1^2 \geqslant \frac{(\pi^2 + \ln^2 R) J_0^2}{\ln^2 R}, \tag{11.3.17}$$

доказательства которых приводятся ниже.

Доказательство 1. Рассмотрим уравнение $r\phi'' + \phi' + \lambda^2\phi/r = 0$ с граничными условиями $\phi(1) = \phi(0) = 0$. Умножим это уравнение на $\bar{\phi}$ и проинтегрируем от 1 до R, получим $\lambda^2 = I_1^2/I_0^2$. Точное решение

$\phi(r) = A_1 \cos(\lambda \ln r) + A_2 \sin(\lambda \ln r)$ после подстановки в граничные условия даёт $\lambda = l\pi/\ln R$ ($l = 1, 2, \ldots$). Таким образом, $\lambda_{min} = \pi^2/\ln^2 R$ и $I_1^2 \geqslant \pi^2 I_0^2/\ln^2 R$.

Доказательство 2. Рассмотрим уравнение $r\phi^{IV} + 2\phi''' + \lambda^2\phi''/r - \lambda^2\phi'/r^2 = 0$ с граничными условиями (11.3.11). После умножения его на $\bar{\phi}$ и интегрирования от 1 до R с учётом (11.3.11) будем иметь $\lambda^2 = J_2^2/J_1^2$. Подставляя точное решение $\phi(r) = A_1 + A_2 r^2 + A_3 r\cos(\lambda \ln r) + A_4 r \sin(\lambda \ln r)$ в граничные условия и приравнивая к нулю характеристический определитель, получим

$$1 - \cos(\lambda \ln R) = \frac{(R-1)\lambda}{R+1} \sin(\lambda \ln R) \qquad (11.3.18)$$

либо

$$1 + \cos(\lambda \ln R) = -\frac{(R+1)\lambda}{R-1} \sin(\lambda \ln R) \qquad (11.3.19)$$

Нетрудно показать, что минимальный положительный корень уравнений (11.3.18) и (11.3.19) лежит в пределах $\pi/\ln R < \lambda_{min} < 2\pi/\ln R$, поэтому заведомо справедлива оценка $J_2^2 > \pi^2 J_1^2/\ln^2 R$.

Доказательство 3. Рассмотрим уравнение $\phi''/r - \phi'/r^2 + \lambda^2\phi/r^3 = 0$ с граничными условиями $\phi(1) = \phi'(R) = 0$. После выполнения аналогичных предыдущим операций получим $\lambda^2 = J_1^2/J_0^2$. Точное же решение имеет вид

$$\phi(r) = \left[A_1 \exp\left(\sqrt{1-\lambda^2}\ln r\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{1-\lambda^2}\ln r\right)\right] r, \quad \text{если } |\lambda| < 1,$$

$$\phi(r) = (A_1 + A_2 \ln r) r, \quad \text{если } |\lambda| = 1,$$

$$\phi(r) = \left[A_1 \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1}\ln r\right) + A_2 \sin\left(-\sqrt{\lambda^2-1}\ln r\right)\right] r, \quad \text{если } |\lambda| > 1$$

Характеристические уравнения в каждом из трёх случаев в итоге сводятся к одному

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda^2-1}\ln R\right) = -\sqrt{\lambda^2-1} \qquad (11.3.20)$$

Минимальный положительный корень λ_{min} уравнения (11.3.20) удовлетворяет неравенству $\lambda_{min}^2 > (\pi^2 + \ln^2 R)/\ln^2 R$. Поэтому $J_1^2 \geqslant (\pi^2 + \ln^2 R) J_0^2/\ln^2 R$.

Выпишем теперь следующие мажорантные оценки

$$\frac{I_l^2}{R^2} \leqslant J_l^2 \leqslant I_l^2, \; K_1^2 \geqslant \frac{J_1^2}{q}, \; K_0^2 \leqslant \frac{J_0^2}{s}, \quad l = 0, 1, 2, \qquad (11.3.21)$$

где

$$s = \min_{1 \leqslant r \leqslant R} U^\circ(r)$$

Воспользуемся квадратичными неравенствами (11.3.17), (11.3.21) применительно к (11.3.16) и сформулируем результат в виде следствия теоремы 11.4.

Следствие 1. *Если*

$$\frac{R^2 qRe}{2} \leqslant \frac{4\pi^2 n^2 \varkappa}{q(\pi^2+n^2\ln^2 R)} + \frac{\pi^2+n^2\ln^2 R}{\ln^2 R} + \frac{\pi^2}{\pi^2+\ln^2 R}\frac{\pi^2+\ln^2 R[1-4n^2(1+\varkappa/s)]}{\pi^2+n^2\ln^2 R} \tag{11.3.22}$$

то $\alpha_* < 0$.

Для получения общей нижней оценки критического числа Рейнольдса необходимо найти минимальное по $n \in \mathbb{Z}$ значение правой части (11.3.22). Исследуем аналитически некоторые частные случаи задачи, которые дают характерные качественные и количественные результаты.

11.3.4. Осесимметричные возмущения. При $n = 0$ (осесимметричные возмущения) из (11.3.22) следует достаточное условие устойчивости

$$Re \leqslant \frac{2(\pi^2+\ln^2 R)(R^2-1)}{R^2\ln^2 R[2R^2|\omega| + \varkappa(2R^2\ln R - R^2+1)]} \tag{11.3.23}$$

Для изучения влияния пластической составляющей на линейно вязкое течение надо от $\varkappa$ перейти к другому безразмерному числу τ_s, не содержащему параметр вязкости. Подставляя $\varkappa = \tau_s Re$ в (11.3.23), после решения квадратного неравенства получим

$$Re \leqslant \frac{f_2(R)|\omega|}{f_3(R)\tau_s}\left(\sqrt{1+\frac{f_1(R)\tau_s}{f_2^2(R)\omega^2}} - 1\right), \tag{11.3.24}$$

где

$$f_1(R) = 2(\pi^2+\ln^2 R)(R^2-1)(2R^2\ln R - R^2+1),$$

$$f_2(R) = R^3\ln R, \quad f_3(R) = R(2R^2\ln R - R^2+1)\ln R$$

Оценка (11.3.24) позволяет получить асимптотику при малых τ_s либо при больших относительных скоростях вращения ($\omega^2 \gg \tau_s$). Удерживая первые три члена разложения Тейлора, будем иметь

$$Re \leqslant \frac{(\pi^2+\ln^2 R)(R^2-1)}{R^4|\omega|\ln^2 R} - \\ - \frac{(\pi^2+\ln^2 R)^2(R^2-1)^2(2R^2\ln R - R^2+1)\tau_s}{2R^{10}|\omega|^3\ln^4 R} + O\left(\frac{\tau_s^2}{|\omega|^5}\right) \tag{11.3.25}$$

Как видно из (11.3.25), при $\tau_s \to 0$ существует равномерная сходимость по τ_s к вязкому пределу. Устремляя τ_s/ω^2 к нулю, мы, по-прежнему, остаёмся в области **А** (рис. 11.5), жёсткой зоны при этом не возникает.

В случае узкого зазора между цилиндрами, т. е. $R - 1 \ll (R+1)/2$, достаточное условие устойчивости имеет простой вид

$$Re \leqslant \frac{2\pi^2}{|\omega|(R-1)} \tag{11.3.26}$$

Предыдущие исследования проводились в предположении о том, что исходная система и траектории предельных переходов лежат в области **А** (рис. 11.5).

Если же параметры системы принадлежат области Б, и тем самым зона течения сужается от 1 до ξ, то граничное условие прилипания при $r = R$ (11.3.11) (либо (11.3.8)) следует изменить на условие при $r = \xi$, на поверхности жёсткой зоны в возмущённом движении.

11.3.4. Коротковолновые возмущения

При $n \gg 1$ (коротковолновые возмущения) из общей нижней оценки (11.3.22) следует асимптотическая оценка

$$\frac{1}{2}R^2 qRe \leqslant n^2 + C, \tag{11.3.27}$$

где C — не зависящая от n функция $\varkappa, \omega, R$. Следовательно, гармоники возмущения с большими номерами всегда устойчивы, и критические числа Рейнольдса, им соответствующие, стремятся в бесконечность. Напоминаем, что везде в этом параграфе речь идёт об устойчивости относительно двумерной картины возмущений.

11.3.5. Вязкий предел

Покажем, что вязкий предел в данной задаче существует не только в случае осесимметричных возмущений, но и для любого n. При $\varkappa = 0$ достаточное условие устойчивости (11.3.22) имеет вид

$$\frac{R^2 q_0}{2}Re \leqslant \frac{\pi^2}{\ln^2 R} + n^2 + \frac{\pi^2}{\pi^2 + \ln^2 R}\frac{\pi^2 + (1 - 4n^2)\ln^2 R}{\pi^2 + n^2 \ln^2 R}, \tag{11.3.28}$$

где

$$q_0 = \frac{2R^2|\omega|}{R^2 - 1}$$

Формальный минимум правой части (11.3.28) достигается в точке

$$n^2 = a\left(\sqrt{\frac{5a^2+1}{a^2+1}} - a\right), \quad a = \frac{\pi}{\ln R} \tag{11.3.29}$$

Можно показать, что правая часть (11.3.29) при любом $a > 0$ меньше единицы, а при $a^2 > 2 + \sqrt{5}$ ($R < 4,6016$) и меньше нуля. Таким образом, минимум в (11.3.28) достигается при $n = 0$ и совпадает с (11.3.23). Предельные переходы при $\tau_s \to 0$ и $n = 0$ из самого общего случая вязкопластического течения оказываются перестановочными. Для узкого зазора между коаксиальными цилиндрами остаётся справедливым условие устойчивости (11.3.26).

Итак, из всех гармоник $n \in \mathbb{N}$ в вязком пределе наиболее опасны осесимметричные, что подтверждается классическими результатами [114, 250, 259, 313].

11.4. Наследственно вязкопластические сдвиговые течения

Среди многих моделей неньютоновских жидкостей особенно популярны в исследованиях релаксационные модели, в которых напряжения зависят от всей истории деформирования (полимерные или вязкоупругие жидкости с затухающей памятью [29, 224]). Ниже предлагается скалярное определяющее соотношение, являющееся обобщением линейной вязкоупругой жидкости и вязкопластического тела, построенного на основе модели Шведова–Бингама. Векторные соотношения между девиаторами напряжений и скоростей деформаций принимаются линейными. Таким материалам даётся название наследственно вязкопластические.

Одновременный учёт релаксации вязких свойств материала и наличие предела текучести позволяет в задачах о плоскопараллельном сдвиге описать изменение толщины жёсткой зоны. Заметим, что это изменение вызвано не переменными внешними данными (переменным градиентом давления в течении Пуазейля, переменной скоростью границы в течениях Куэтта и т. д.) [1, 16, 21, 33, 39, 83, 135, 136, 186–188, 191, 246, 315], а именно явной зависимостью материальных функций от времени при постоянных внешних воздействиях. Приводится также постановка линеаризованной краевой задачи устойчивости одномерного наследственно вязкопластического сдвига относительно малых возмущений.

11.4.1. Наследственно вязкопластическое течение Пуазейля в плоском слое

Пусть максимальное касательное напряжение $T(\boldsymbol{x}, t)$ и максимальная скорость скольжения $U(\boldsymbol{x}, t)$ связаны следующим образом

$$T = \tau_s H(t) + (\mu - \check{\mathcal{M}})U \tag{11.4.1}$$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда, $\check{\mathcal{M}}$ — интегральный оператор разностного типа

$$\check{\mathcal{M}}U = \int\limits_0^t \mathrm{M}(t-\zeta)U(\zeta)\,d\zeta \tag{11.4.2}$$

с регулярным ядром $\mathrm{M}(t) \geqslant 0$, описывающий релаксацию вязкости.

Рассматривается плоскопараллельное течение материала со скалярными соотношениями (11.4.1), (11.4.2) в слое $0 < x_3 < h$, причём причиной сдвига является постоянный по времени перепад давления ∇p по оси Ox_1 (обобщённое течение Пуазейля). В качестве базиса обезразмеривания проще всего выбрать тройку величин $\{\nabla p, \rho, h\}$. Роль числа Рейнольдса Re выполняет комбинация $\sqrt{\rho h^3 \nabla p}/\mu$, безразмерный же предел текучести равен $\tau_s/(h\nabla p)$.

Единственное уравнение движения для продольной скорости $v_1(x_3, t) \equiv v(x, t)$ в безразмерных переменных принимает следующий вид

$$\left(\frac{1}{Re} - \check{\mathcal{M}}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -1 + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{11.4.3}$$

Наследственно вязкопластическое течение реализуется в двух не связанных между собой пристеночных слоях $0 < x < \xi(t)$ и $1 - \xi(t) < x < 1$, где $\xi(t)$ – неизвестная граница, отделяющая зону течения от жёсткой прослойки.

Таким образом, на границах $x = 0$, $x = \xi(t)$ и при $x = 1/2$ (из соображений симметрии относительно оси $x = 1/2$) должны выполняться условия

$$x = 0 : \ v = 0; \quad x = \xi(t) : \ T = \tau_s; \quad x = \frac{1}{2} \quad T = 0 \tag{11.4.4}$$

В качестве начального условия можно взять соответствующее стационарное решение в слое $0 < x < \xi_0 = 1/2 - \tau_s$, полученное при $\mathrm{M}(t) \equiv 0$.

Одним из методов исследования краевой задачи (11.4.3), (11.4.4) является применение преобразования Лапласа. Его использование в области с меняющейся со временем границей предполагает привлечение специальных методов и приёмов операционного исчисления. Таким приёмом может быть аналитическое продолжение функции в более широкую область, включающую исходную, и решение задачи в изображениях в ней. Физически это означает некоторое доопределение скорости внутри жёсткой прослойки с последующим выполнением граничного условия на подвижной границе.

11.4.2. Наследственно вязкопластическое течение Куэтта в плоском слое

В случае плоскопараллельного течения Куэтта с заданной скоростью верхней границы V в безразмерный базис естественно включить величины $\{\rho, V, h\}$. Дальнейшие рассуждения в постановочном плане аналогичны проведённым в п. 11.4.1. Существенным же отличием здесь является отсутствие подвижной границы жёсткой зоны, что упрощает применение преобразования Лапласа

$$f_*(\alpha) = \int_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-\alpha t} dt \tag{11.4.5}$$

Единственное уравнение движения

$$\left(\frac{1}{Re} - \check{\mathcal{M}}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{11.4.6}$$

с граничными условиями $x = 0 \quad v = 0, \ x = 1 \quad v = 1$ в изображениях выглядит следующим образом

$$v_*'' - \alpha Re_* v_* = 0, \quad v_*(0) = 0; \ v_*(1) = 1 \tag{11.4.7}$$

и имеет решение

$$v_*(x_3) = \frac{\mathrm{sh}(\lambda x)}{\mathrm{sh}\lambda}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha Re_*(\alpha)} \tag{11.4.8}$$

Длительное число Рейнольдса $Re_*(\alpha)$ связано с мгновенным Re соотношением $1/Re_*(\alpha) = 1/Re - \mathrm{M}_*(\alpha)$. В силу неотрицательности функции $\mathrm{M}(t)$ справедливо неравенство $Re_*(\alpha) > Re$.

Исследуем далее вязкопластический предел в данной задаче. Если наследственные свойства у материала отсутствуют, т. е. $\mathrm{M} \equiv 0$, и, следовательно, $\lambda = \sqrt{\alpha Re}$, то из (11.4.8) можно получить известное решение в пространстве оригиналов задачи о вязкопластическом течении Куэтта.

Применение обратного преобразования Лапласа (преобразования Мелина) к изображению (11.4.8) позволяет перейти в пространство оригиналов и найти функцию $v(x,t)$. Рассмотрим два характерных вида ядер $\mathrm{M}(t)$ — экспоненциальное и степенное.

а) Экспоненциальное ядро, релаксирующее до нуля $\mathrm{M}(t) = \mathrm{e}^{-t/n}/(nRe)$. Здесь n — время релаксации. В данном случае $\mathrm{M}_*(\alpha) = [(1+n\alpha)Re]^{-1}$ и согласно (11.4.8) $\lambda(\alpha) = \sqrt{(1/n+\alpha)Re}$.

б) Степенное ядро $\mathrm{M}(t) = A/[(t+t_0)^2 Re]$; $A, t = \mathrm{const}$, $A \neq t_0$. Изображение M_* и собственное число λ имеют вид

$$\mathrm{M}_*(\alpha) = \frac{A}{Re}\left(\frac{1}{t_0} + \alpha \exp(\alpha t_0)\mathrm{Ei}(-\alpha t_0)\right) \tag{11.4.9}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\alpha t_0 Re}{t_0 - A[1 + \alpha t_0 \exp(\alpha t_0)\mathrm{Ei}(-\alpha t_0)]}}, \tag{11.4.10}$$

где $\mathrm{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция.

Из выражения (11.4.8) видно, что, если для некоторого ядра релаксации предельное при $\alpha \to 0$ значение λ равно нулю (например, для степенного ядра), то предельный профиль, если он существует, представляет собой линейную функцию. Для экспоненциального ядра, релаксирующего до нуля, как было найдено выше, $\lambda_0 = \sqrt{Re/n}$. Предельные профили скоростей для некоторых λ_0

$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = \frac{\mathrm{sh}(\lambda_0 x)}{\mathrm{sh}\lambda_0} \tag{11.4.11}$$

изображены на рис. 11.7. Видно, что, если $\lambda_0 \gg 1$ (время релаксации мало), то почти весь слой за исключением тонкой пристеночной области практически не движется. Если же $\lambda_0 \ll 1$ или $\lambda_0 \approx 1$, то определяющую роль играют мгно-

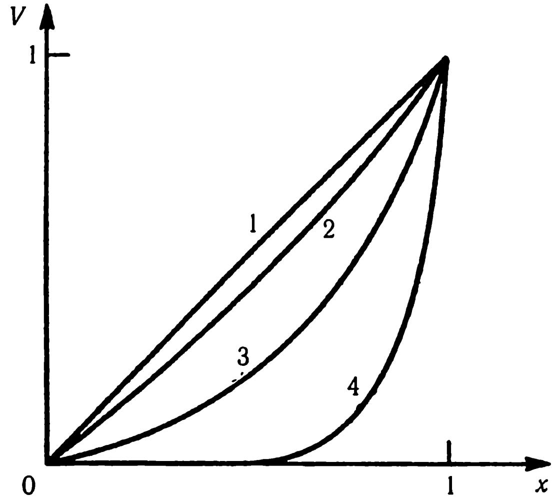


Рис. 11.7. Предельные профили скорости в наследственно вязкопластическом течении Куэтта для экспоненциального ядра при различных значениях λ_0 ($\lambda_{01} < \lambda_{02} < \lambda_{03} < \lambda_{04}$)

венные свойства материала. Полный анализ длительного поведения материала в пространстве оригиналов может быть основан на разложении изображения (11.4.8) в ряд по α [118].

11.4.3. Постановка линеаризованной задачи устойчивости

Приведём постановку линеаризованной краевой задачи устойчивости одномерного наследственно вязкопластического сдвига. Подставим в уравнения движения в возмущениях (10.1.11) проварьированные с учётом (11.4.1) векторные определяющие соотношения

$$s_{\beta\beta} = \frac{2T^\circ}{U^\circ} v_{\beta\beta}, \quad \beta = 1, 3, \quad s_{13} = \frac{2}{Re} v_{13} - 2\int\limits_0^t \mathrm{M}(t-\zeta) v_{13}(\zeta) d\zeta \qquad (11.4.12)$$

и далее стандартным путём придём к одному уравнению относительно функции тока $\psi(x_1, x_3, t)$

$$\begin{gathered} \frac{1}{Re}\Delta^+\Delta^+\psi + 4\left[\left(\tau_s - \int\limits_0^t \mathrm{M}(t-\zeta) U^\circ(\zeta)\, d\zeta\right)\frac{\psi_{,113}}{U^\circ}\right]_{,3} - \\ - \int\limits_0^t \mathrm{M}(t-\zeta)\Delta^-\Delta^-\psi(\zeta)\, d\zeta = \frac{\partial\Delta^+\psi}{\partial t} + v_1^\circ(\Delta^+\psi)_{,1} - v^\circ_{1,33}\psi_{,1}\, , \end{gathered} \qquad (11.4.13)$$

где $\Delta^\pm \equiv \partial^2/(\partial x_1)^2 \pm \partial^2/(\partial x_3)^2$.

Уравнение (11.4.13) с соответствующими условиями на прямолинейных границах слоя представляет собой обобщение задачи Орра–Зоммерфельда для наследственно вязкопластических течений.

Представляя функцию $\psi(x_1, x_3, t)$ в виде интеграла Фурье с гармониками $\psi = \phi(x_3, t)\exp(isx_1)$ и применяя к обеим частям уравнения (11.4.13) преобразование Лапласа по t, сведём это уравнение к интегро-дифференциальному (α, как и прежде,— параметр преобразования Лапласа)

$$\begin{gathered}\frac{1}{Re_\star}\left(\phi_\star^{IV} - 2s^2\phi_\star'' + s^4\phi_\star\right) - 4s^2 \mathrm{M}_\star \phi_\star'' - \\ -\frac{4s^2}{2\pi i}\left(\int\limits_\gamma \Xi(\alpha - z)\phi_\star'(z)\,dz\right)' = \alpha\left(\phi_\star'' - s^2\phi_\star\right) + \\ +\frac{is}{2\pi i}\int\limits_\gamma \left[v_{1\star}^\circ(\alpha - z)\left(\phi_\star'' - s^2\phi_\star\right)(z) - v_{1\star}^{\circ\prime\prime}(\alpha - z)\phi_\star(z)\right]dz\end{gathered} \tag{11.4.14}$$

Здесь

$$\Xi(\alpha) = \left[\frac{1}{U^\circ}\left(\tau_s - \int\limits_0^t \mathrm{M}(t - \zeta)U^\circ(\zeta)\,d\zeta\right)\right]_\star(\alpha), \tag{11.4.15}$$

а γ — некоторая вертикальная прямая в комплексной плоскости z.

Таким образом, постановка спектральной задачи устойчивости плоского наследственно вязкопластического сдвига включает в себя уравнения (11.4.14), (11.4.15) с соответствующими граничными условиями при $x_3 = 0$ и $x_3 = 1$. Отметим, что исследование устойчивости течений со свободными либо движущимися во времени границами осложнено тем, что преобразование Лапласа здесь необходимо проводить в области с постоянными границами, включающей в себя исходную.

Получение оценок устойчивости в выписанной выше линеаризованной краевой задаче может быть связано с развитием метода интегральных соотношений для уравнений типа (11.4.14) и формулировкой критериев устойчивости процесса в пространстве изображений.

Глава 12

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ С МАЛЫМ ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ

В данной главе приводится постановка линеаризованной краевой задачи устойчивости течения по отношению к малым возмущениям скалярного определяющего соотношения материала. Тензорные определяющие соотношения среды принимаются линейными. Учитывается наличие жёстких зон в области тела и изменение их границ в возмущенном движении. Подробно в качестве основного течения рассматривается течение ньютоновской жидкости. В этом случае выводится уравнение асимптотической границы жёсткой зоны, которая появляется при малом варьировании предела текучести и переходе к вязкопластическому материалу. В качестве примеров выбраны классические течения Джеффри—Гамеля и Кармана.

12.1. Устойчивость по отношению к возмущению материальных функций

Анализ устойчивости процессов деформирования относительно возмущения материальных функций связан с исследованием решений дифференциальных уравнений при вариации коэффициентов [152]. Варьироваться могут не только постоянные коэффициенты, но и целые функции и функционалы, характеризующие материал, такие как функция упрочнения, функционалы ползучести и релаксации и т. д. Неустойчивость интерпретируется как смена типа краевой задачи [171], влекущая качественное изменение свойств решения. С этим также связаны многие классические парадоксы в механике и инженерных приложениях (предельные переходы, дестабилизация, ложные резонансы и др.) [161].

В этотм параграфе дадим постановку линеаризованной задачи устойчивости течения несжимаемого материала с квазилинейными соотношениями (задачи первого приближения).

12.1.1. Постановка задачи устойчивости

Исследуем процесс деформирования несжимаемого тела со скалярным определяющим соотношением, взятым в достаточно общем виде

$$T = T(U) \tag{12.1.1}$$

где $T(\mathbf{x}, t)$ — максимальное касательное напряжение (8.4.7) ($T = \sigma_u/\sqrt{2}$), $U(\mathbf{x}, t)$ — максимальная скорость скольжения (8.4.8) ($U = \sqrt{2}v_u$). Функция $T(U)$ непрерывна вместе с первыми двумя производными по своему аргументу при $U > 0$. Тензорные соотношения принимаются линейными, поэтому связь девиатора напряжений $\underset{\sim}{s}$ с тензором скоростей деформаций $\underset{\sim}{v}$ при учете соотношения (12.1.1) имеет вид (см. (8.4.1))

$$\underset{\sim}{s} = \frac{2T(U)}{U}\underset{\sim}{v} \tag{12.1.2}$$

Величины, входящие в соотношения (12.1.1), (12.1.2) и последующие уравнения, приведены к безразмерному виду в базисе $\{\rho; V; h\}$, где ρ — постоянная плотность тела, V и h — характерные скорость и линейный размер соответственно.

Для общности выпишем в произвольных ортогональных криволинейных координатах постановку задачи о течении материала с определяющими соотношениями (12.1.2) в области Ω эйлерова пространства. Область Ω состоит из зоны течения Ω_f и жёсткой зоны Ω_r, граница Σ_r которой с Ω_f в каждый момент времени определяется из уравнения

$$\Sigma_r = \{\mathbf{x} : \ T[U(\mathbf{x}, t)] = \tau_s\}, \tag{12.1.3}$$

где τ_s — предел текучести при сдвиге.

В подобласти Ω_f имеем условие несжимаемости

$$\operatorname{tr}\underset{\sim}{v} = 0 \tag{12.1.4}$$

и уравнения движения с массовыми силами $\mathbf{F}$

$$-\operatorname{grad} p + 2\operatorname{Div}\left[\frac{T(U)}{U}\underset{\sim}{v}\right] + \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{12.1.5}$$

в которые надо подставить соотношения Стокса

$$\underset{\sim}{v} = \operatorname{Def}\mathbf{v} \tag{12.1.6}$$

для получения замкнутой системы четырёх уравнений относительно одной векторной функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и одной скалярной функции $p(\mathbf{x}, t)$.

Граничные условия

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \in \Sigma_v \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}\,; \\ &\mathbf{x} \in \Sigma_\sigma \quad -p\mathbf{n} + \underset{\sim}{s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \end{aligned} \tag{12.1.7}$$

задаются, вообще говоря, на движущихся поверхностях $F_j(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, уравнения которых имеют следующий вид

$$\frac{dF_j(\mathbf{x},t)}{dt} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_j, \quad j = v, \sigma \tag{12.1.8}$$

Если движение среды нестационарно, необходимо задать и начальные условия

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \tag{12.1.9}$$

Решение начально-краевой задачи (12.1.4)–(12.1.9) с «входными данными» ($\mathbf{F}$; $\mathbf{u}$; $\mathbf{P}$; $\mathbf{w}$) возможно отыскать только в заранее неизвестной подобласти Ω_f тела. Поверхность же Σ_r, определяемая условием (12.1.3), находится, как известно, в самом процессе решения задачи (12.1.4)–(12.1.9).

Предположим, что для некоторой фиксированной функции $T^0(U)$ решение задачи (12.1.4)–(12.1.9) с «входными данными» ($\mathbf{F}$; $\mathbf{u}$; $\mathbf{P}$; $\mathbf{w}$) известно. Известно также уравнение поверхности Σ_r^0. Данное решение, помечаемое по аналогии с обозначениями в главах 10 и 11 нулевым индексом, будем называть основным или невозмущённым.

Наряду с основной задачей рассмотрим задачу (12.1.4)–(12.1.9) с теми же «входными данными», но для материала с другой функцией $T(U)$ (возмущённую задачу), причём

$$\begin{gathered} T(U) = T^0(U) + \delta T(U) \equiv T^0(U) + \alpha T^{(1)}(U) \\ \delta T(U) \in C^{(1)}]0; +\infty[\,, \quad \alpha = \sup_{U>0} |\delta T(U)| \end{gathered} \tag{12.1.10}$$

так что $|T^{(1)}(U)| \leqslant 1$.

Считая α малым параметром ($\alpha \ll 1$), представим решение возмущённой задачи следующим образом:

$$p(\mathbf{x}, t) = p^0(\mathbf{x}, t) + \alpha p^{(1)}(\mathbf{x}, t), \ \ldots, \ \underset{\sim}{s}(\mathbf{x}, t) = \underset{\sim}{s}^0(\mathbf{x}, t) + \alpha s^{(1)}(\mathbf{x}, t) \tag{12.1.11}$$

а уравнение поверхности Σ_r, отделяющей жесткую зону от зоны течения в возмущённом процессе, определяется из (12.1.3):

$$\Sigma_r = \{\mathbf{x} : \ T[U(\mathbf{x}, t)] = \tau_s^0 + \alpha \tau_s^{(1)}\} \tag{12.1.12}$$

Отметим, что

$$\tau_s^0 = \lim_{U \to 0} T^0(U), \quad \tau_s^{(1)} = \lim_{U \to 0} T^{(1)}(U) \tag{12.1.13}$$

Подставим выражения (12.1.11) в (12.1.4)–(12.1.9) и примем во внимание тот факт, что величины с нулевым индексом — решения основной задачи. Приравнивая к нулю коэффициенты при α в каждом из уравнений, получим в Ω_f следующую пока незамкнутую начально-краевую задачу первого приближения

$$\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{v}^{(1)} = 0 \tag{12.1.14}$$

$$-\operatorname{grad} p^{(1)} + \operatorname{Div} \underset{\sim}{s}^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{v}^0 \otimes \nabla) \cdot \mathbf{v}^{(1)} + (\mathbf{v}^{(1)} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{v}^0 \qquad (12.1.15)$$

$$\underset{\sim}{v}^{(1)} = \operatorname{Def} \mathbf{v}^{(1)} \qquad (12.1.16)$$

$$\mathbf{x} \in \Sigma_v \quad \mathbf{v}^{(1)} = 0\,; \quad \mathbf{x} \in \Sigma_\sigma \quad -p^{(1)}\mathbf{n} + \underset{\sim}{s}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad (12.1.17)$$

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, 0) = 0 \qquad (12.1.18)$$

Подставляя далее (12.1.11) в определяющие соотношения (12.1.2), после некоторых преобразований выпишем связь тензоров $\underset{\sim}{s}^{(1)}$ и $\underset{\sim}{v}^{(1)}$ или аналог определяющих соотношений так называемой среды первого приближения:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{s}^{(1)} = \tfrac{2}{U^0}\Big[T^0(U^0)\,\underset{\sim}{v}^{(1)} + T^{(1)}(U^0)\,v^0\Big] + \\ +2\Big[T^{0\prime}(U^0) - \tfrac{T^0(U^0)}{U^0}\Big]\, \underset{\approx}{V}^0 : \underset{\sim}{v}^{(1)}, \end{aligned} \qquad (12.1.19)$$

$$\underset{\approx}{V}^0 = \frac{2\underset{\sim}{v}^0 \otimes \underset{\sim}{v}^0}{U^{0\,2}} \equiv \frac{\underset{\sim}{v}^0 \otimes \underset{\sim}{v}^0}{\underset{\sim}{v}^0 \;\; \underset{\sim}{v}^0}$$

Тензор четвёртого ранга $\underset{\approx}{V}^0$ определяется кинематикой основного течения.

Здесь было учтено, что из соотношения

$$U^0 + \alpha U^{(1)} = U = \sqrt{2(\underset{\sim}{v}^0 + \alpha \underset{\sim}{v}^{(1)}) \;\; (\underset{\sim}{v}^0 + \alpha \underset{\sim}{v}^{(1)})} =$$

$$= \sqrt{2\underset{\sim}{v}^0 : \underset{\sim}{v}^0}\sqrt{1 + \frac{2\alpha \underset{\sim}{v}^0 : \underset{\sim}{v}^{(1)}}{\underset{\sim}{v}^0 : \underset{\sim}{v}^0} + O\left(\alpha^2\right)} = U^0\left(1 + \frac{2\alpha \underset{\sim}{v}^0 : \underset{\sim}{v}^{(1)}}{U^{0\,2}}\right) + O(\alpha^2)$$

имеем

$$U^{(1)} = \frac{2\underset{\sim}{v}^0 : \underset{\sim}{v}^{(1)}}{U^0} \qquad (12.1.20)$$

Как следует из (12.1.20), величина $U^{(1)}$ не есть максимальная скорость скольжения, построенная на тензоре $\underset{\sim}{v}^{(1)}$, и может принимать даже отрицательные значения.

Так как $\underset{\sim}{v}^0$, U^0 известны из основного движения, то среда первого приближения линейна не только тензорно, но и скалярно. Эта среда с начальными напряжениями $2T^{(1)}(U^0)\underset{\sim}{v}^0/U^0$, которые после подстановки (12.1.19) в (12.1.15) можно считать фиктивными массовыми силами. В области Ω_f система уравнений относительно переменных с индексом единица становится замкнутой. Заметим, что в (12.1.15) войдут вторые производные от T^0 по U и первые производные от $T^{(1)}$ по U. Непрерывность этих функций в Ω_f оговорена ранее классами гладкости, которым принадлежат $T^0(U)$ и $T^{(1)}(U)$.

12.1.2. Устойчивость течения относительно возмущения скалярной функции

Представление (12.1.11) с последующим анализом начально-краевой задачи первого приближения (12.1.14) – (12.1.19) и нахождением асимптотических границ жёстких зон из (12.1.12) является возмущением известного решения при соответствующем возмущении материальной функции (в данном случае функции упрочнения материала).

Близость в том или ином смысле при $t > 0$ возмущённого и основного решений позволяет судить об устойчивости или чувствительности течения к вариации материальных функций. К понятиям такого рода можно подойти, обобщая классический метод Ляпунова—Мовчана устойчивости по двум метрикам [146, 194].

Дадим определение устойчивости процесса деформирования относительно начальных возмущений и вариации скалярной функции [43].

Определение 12.1. Невозмущённый процесс деформирования называется устойчивым по парам мер

$$\{(\rho_1^\circ, \rho_1(t)), (\rho_2^\circ, \rho_2(t)), \ldots, (\rho_k^\circ, \rho_k(t))\}$$

и по мере γ, если для любого набора положительных чисел $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ существуют числа $\delta_1(\bar{\varepsilon}), \ldots, \delta_{k+1}(\bar{\varepsilon})$, такие что для любого возмущённого процесса, удовлетворяющего неравенствам

$$\begin{gathered} \|\delta\mathbf{v}(\mathbf{x},0)\|_{\rho_1^\circ} < \delta_1, \quad \|\delta\underset{\sim}{\sigma}(\mathbf{x},0)\|_{\rho_2^\circ} < \delta_2, \\ \ldots, \|\delta F_\alpha(\mathbf{x},0)\|_{\rho_k^\circ} < \delta_k, \quad \|\delta T(U(\mathbf{x},0))\|_\gamma < \delta_{k+1} \end{gathered} \tag{12.1.21}$$

при $t = 0$, имеют место неравенства

$$\begin{gathered} \|\delta\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\|_{\rho_1} < \varepsilon_1, \quad \|\delta\underset{\sim}{\sigma}(\mathbf{x},t)\|_{\rho_2} < \varepsilon_2, \\ \|\delta F_\alpha(\mathbf{x},t)\|_{\rho_k} < \varepsilon_k \end{gathered} \tag{12.1.22}$$

при $t > 0$.

Первые k неравенств в (12.1.21) и все неравенства в (12.1.22) ограничивают начальные и текущие возмущения всех кинематических и динамических параметров движения (их всего k), включая уравнения поверхностей тела. Последнее неравенство в (12.1.21) ограничивает начальное возмущение скалярной функции материала. В силу (12.1.10) в качестве меры отклонения γ этого возмущения надо выбрать расстояние в пространстве функций из $C^{(1)}]0; +\infty[$.

Приведём далее примеры сред первого приближения для некоторых стандартных типов скалярных функций (12.1.1) и возмущений (12.1.10).

12.1.3. Устойчивость ньютоновских течений относительно возмущения предела текучести

В данном случае

$$\begin{aligned} &T^0(U) = \frac{U}{Re}, \quad T(U) = \tau_s + \frac{U}{Re}, \quad \delta T(U) \equiv \tau_s \\ &T^{(1)}(U) \equiv 1, \quad \tau_s^0 = 0, \quad \tau_s^{(1)} = 1, \quad \alpha = \tau_s \ll 1 \end{aligned} \tag{12.1.23}$$

где Re — число Рейнольдса. Определяющие соотношения (12.1.19) среды первого приближения примут вид

$$\underset{\sim}{s}^{(1)} = 2\left(\frac{\underset{\sim}{v}^0}{U^0} + \frac{\underset{\sim}{v}^{(1)}}{Re}\right) \tag{12.1.24}$$

т. е. эта среда соответствует линейной ньютоновской модели с начальными напряжениями, которые известны из основного течения. Для формулировки краевой задачи первого приближения соотношения (12.1.24) необходимо подставить в (12.1.15), (12.1.17).

После нахождения из этой задачи тензора $\underset{\sim}{v}^{(1)}$ уравнение (12.1.12) асимптотической границы Σ_r с учетом (12.1.23) запишем так:

$$\Sigma_r = \left\{\mathbf{x} :\ 2\alpha\underset{\sim}{v}^0 \quad \underset{\sim}{v}^{(1)} = -{U^0}^2\right\} \tag{12.1.25}$$

Вопросы предельного перехода вязкопластических течений к вязким подробно исследованы с точки зрения вариационных неравенств [77]. В качестве нерешенной была сформулирована следующая математическая проблема: «... можно ли доказать (из соображений механики это очевидно ...), что область, где скорости деформации равны нулю, увеличиваются с ростом предела текучести ?» ([77], с. 289).

Частичный ответ на этот вопрос (при малых пределах текучести) следует из уравнения (12.1.25). Действительно, жёсткие зоны, отсутствующие в ньютоновских течениях, начинают образовываться вокруг тех точек $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, в которых U^0 и T^0 равны нулю. Обозначим множество таких точек в каждый момент времени $\gamma^0(t)$: $\gamma^0(t) = \left\{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} :\ U^0(\mathbf{x}, t) = 0\right\}$. Множеству $\gamma^0(t)$ могут принадлежать и бесконечно удалённые точки тела. Тогда жёсткие зоны в любой момент представляют собой некоторые окрестности бесконечности.

Асимптотическое увеличение областей Ω_r с ростом τ_s представляет интерес и в практических задачах о вязкопластическом течении там, где точное решение при любом τ_s затруднительно. В то же время соответствующие вязкие течения хорошо известны. К числу таких примеров отнесем задачи, подробно исследуемые в последующих параграфах данной главы, а именно, задачу Джеффри—Гамеля о радиальном течении вязкой жидкости в плоском конфузоре и задачу

Кармана о движении вязкого полупространства над вращающейся в своей плоскости границей [114, 128].

12.1.4. Иллюстративный пример

Приведём пример, носящий чисто иллюстративный характер, где в качестве основного течения взят плоскопараллельный сдвиг тяжёлого вязкого слоя вдоль наклонной плоскости. В декартовых координатах (Ox_1x_2) (рис. 12.1) известное стационарное решение невозмущённой задачи имеет вид

$$v_1^0(x_2) = \frac{Re}{2} x_2(2 - x_2)\sin\beta, \; v_2^0 \equiv 0, \; v_{\alpha\alpha}^0 \equiv 0$$
$$v_{12}^0(x_2) = \frac{U^0}{2} = \frac{Re}{2}(1 - x_2)\sin\beta$$
$$p^0(x_2) = (1 - x_2)\cos\beta, \; s_{\alpha\alpha}^0 \equiv 0, \; s_{12}^0(x_2) = T^0 = (1 - x_2)\sin\beta$$

Характерная скорость V принята равной $\sqrt{gh}$.

Краевая задача первого приближения формулируется следующим образом:

$$v_{i,i}^{(1)} = 0$$
$$-p_{,i}^{(1)} + s_{ij,j}^{(1)} = \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial t} + Re\, x_2(1 - x_2)v_2^{(1)}\,\delta_{1i}\sin\beta + \frac{Re}{2} x_2(2 - x_2)v_{i,1}^{(1)}\sin\beta$$
$$s_{\alpha\alpha}^{(1)} = \frac{2}{Re} v_{\alpha\alpha}^{(1)}, \quad s_{12}^{(1)} = 1 + \frac{1}{Re}\left(v_{1,2}^{(1)} + v_{2,1}^{(1)}\right)$$
$$x_2 = 0 \quad v_i^{(1)} = 0, \quad x_2 = 1 \quad p^{(1)} = s_1^{(1)} = 0$$

Разыскивая её решение в Ω в классе плоскопараллельных полей ($v_1^{(1)} = v_1^{(1)}(x_2)$, $v_2^{(1)} \equiv 0$), получим

$$v_1^{(1)}(x_2) = -Re\, x_2, \; v_{\alpha\alpha}^{(1)} \equiv 0, \; v_{12}^{(1)} \equiv -\frac{Re}{2}, \; p^{(1)} \equiv 0, \; s_{ij}^{(1)} \equiv 0$$

Множество $\gamma^0(t)$ состоит из прямой $x_2 = 1$, а асимптотическая граница жёсткой зоны определяется из (12.1.25):

$$x_2 = 1 - \frac{\alpha}{\sin\beta} \tag{12.1.26}$$

Таким образом, при малом возмущении предела текучести вблизи свободной границы слоя образуется жёсткая корка толщины $\alpha/\sin\beta$. Заметим, что получающееся после подстановки в (12.1.11) решение задачи вязкопластического течения по наклонной плоскости в поле силы тяжести, так же как и формула (12.1.26) справедливы не только при малом, но и при любом конечном α. Так, если $\alpha \geqslant \sin\beta$, то сдвиговых усилий для деформирования недостаточно, и весь слой покоится.

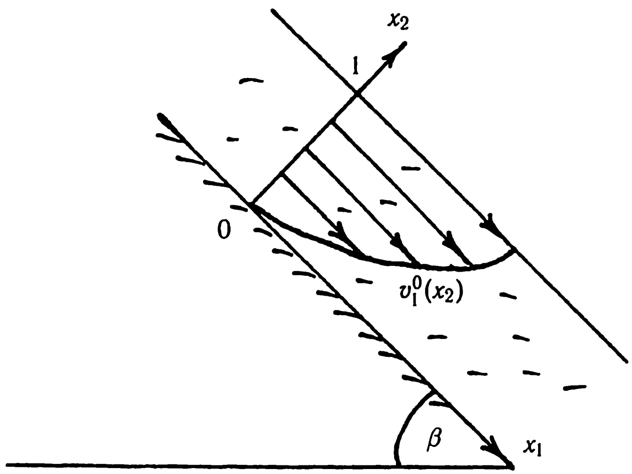


Рис. 12.1. Плоскопараллельный сдвиг тяжёлого вязкого слоя вдоль наклонной плоскости

12.1.5. Устойчивость идеальножёсткопластических течений (течений Сен-Венана) относительно возмущения вязкости

Положим

$$T^0(U) \equiv \tau_s\,, \quad T^{(1)\prime}(U) > 0\,, \quad \tau_s^{(1)} = 0\,, \quad U > 0 \tag{12.1.27}$$

что соответствует добавлению малой нелинейной вязкости (упрочнения) в идеальножёсткопластическую модель. Из (12.1.19) будем иметь

$$\underset{\sim}{s}^{(1)} = \frac{2T^{(1)}(U^0)}{U^0}\underset{\sim}{v}^0 + \frac{2\tau_s}{U^0}\left(\underset{\approx}{\Delta} - \underset{\approx}{V}^0\right)\ \underset{\sim}{v}^{(1)} \tag{12.1.28}$$

где $\underset{\approx}{\Delta}$ — единичный тензор четвёртого ранга. Решив линеаризованную начально-краевую задачу первого приближения (12.1.14)–(12.1.18), (12.1.28), можно найти кинематику $\mathbf{v}$ и тензор $\underset{\sim}{v}^{(1)}$. Однако в выражение (12.1.12) для асимптотической границы Σ_r компоненты этого тензора входить не будут. Действительно, подставляя соотношения (12.1.27) в уравнение (12.1.12), имеем

$$\Sigma_r = \left\{\mathbf{x} :\ T^{(1)}(U^0) = 0\right\} = \left\{\mathbf{x} :\ U^0 = 0\right\}, \tag{12.1.29}$$

т. е. при переходе от невозмущённого движения (течения Сен-Венана) к возмущённому уравнения границ жестких зон остаются теми же.

Как и ранее, задача первого приближения представляет интерес в случаях известных классических решений для идеальножёсткопластической среды. К числу последних отнесём решения многих квазистатических задач, собранные в монографии [81]. Эти течения моделируют процессы обработки материалов давлением, движения по поверхностям и в тонких слоях [102].

12.2. Вязкопластическое течение Джеффри–Гамеля

Задача Джеффри–Гамеля о стационарном радиальном течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском конфузоре — одна из немногих неодномерных задач гидродинамики ньютоновской жидкости, допускающая точное автомодельное решение. Поэтому полное исследование во всей области изменения безразмерных параметров — угла раствора конфузора и числа Рейнольдса — представляет большой теоретический и прикладной интерес.

В данном параграфе для случая малого предела текучести при сдвиге исследуется задача о стационарном течении вязкопластической среды в плоском конфузоре. Решение строится в первом приближении по малому пределу текучести, для которого порождающим является решение задачи Джеффри–Гамеля. Определяются и комментируются основные характеристики процесса — асимптотические жёсткие зоны и области течения, а также изучается их поведение в широкой области изменения параметров.

12.2.1. Постановка классической задачи Джеффри–Гамеля

Возобновившийся в последние годы интерес к задаче Джеффри–Гамеля и другим классическим задачам механики сплошной среды обусловлен как возросшими возможностями современных компьютеров, разработкой программного обеспечения, так и практическими потребностями решения более широкого класса задач о выдавливании неньютоновской и вязкопластической среды с малым пределом текучести из плоских щелей и конфузоров. Для таких течений решение Джеффри–Гамеля является опорным или нулевым приближением.

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в области $\Omega = \{(r,\theta) \quad r > 0, |\theta| < \beta\}$ (рис. 12.2), имеющее особенность типа источник-сток мощности $-Q$ в точке O. В зависимости от знака Q область Ω называется плоским диффузором ($Q < 0$) или плоским конфузором ($Q > 0$). Жидкость характеризуется плотностью ρ и динамической вязкостью μ.

Кроме четырёх величин β, Q, ρ, μ других характерных параметров в задаче нет. Поскольку из данной совокупности невозможно выбрать три размерно независимые величины, так как $[Q] = [\mu]/[\rho]$, то полностью обезразмерить последующие уравнения не удаётся. Имеются два безразмерные параметра — угол раствора 2β $(0 < \beta < \pi)$ и число Рейнольдса $Re = \rho Q/\mu$ $(-\infty < Re < \infty)$,— от которых будет зависеть решение.

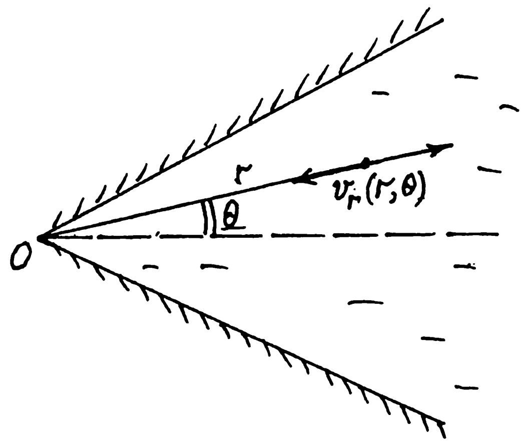


Рис. 12.2. Область конфузора (диффузора) Ω

Известно, что в плоском случае решение, описывающее данное течение, можно искать в автомодельном виде. Поле скорости $v = (v_r, v_\theta)$ радиально

$$v_r = -\frac{Q}{r}V(\theta), \quad v_\theta \equiv 0. \tag{12.2.1}$$

Представление (12.2.1) обеспечивает выполнение условия несжимаемости. По кинематике (12.2.1) выписываются отличные от нуля компоненты тензора скоростей деформации

$$v_{rr} = -v_{\theta\theta} = \frac{Q}{r^2}V(\theta), \quad v_{r\theta} = -\frac{Q}{2r^2}V'(\theta). \tag{12.2.2}$$

Подставляя (12.2.2) в определяющие соотношения вязкой жидкости

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv -p\delta_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \frac{2\rho Q}{Re}v_{\alpha\beta}, \tag{12.2.3}$$

находим поле напряжений

$$\sigma_{rr;\theta\theta} = -p \pm \frac{2\rho Q^2}{r^2 Re}V(\theta), \quad \sigma_{zz} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\rho Q^2}{r^2 Re}V'(\theta). \tag{12.2.4}$$

Два уравнения Навье–Стокса в проекции на радиус и угол с учётом (12.2.1), (12.2.4) приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно безразмерной функции $V(\theta)$:

$$V'' + 4V - ReV^2 = C \tag{12.2.5}$$

и выражению для давления p:

$$p = \frac{\rho Q^2}{2r^2 Re}(C - 4V). \tag{12.2.6}$$

Из условий прилипания материала на границе Ω

$$V(\pm\beta) = 0 \tag{12.2.7}$$

ясен смысл неизвестной постоянной C:

$$C = V''(\pm\beta). \tag{12.2.8}$$

Кроме того имеется интегральное условие постоянства расхода

$$\int\limits_{-\beta}^{\beta} V(\theta)\, d\theta = 1, \tag{12.2.9}$$

служащее для определения C.

В результате после решения краевой задачи (12.2.5), (12.2.7), (12.2.9) могут быть найдены силовые характеристики течения. Компоненты P_r и P_θ вектора напряжений $\boldsymbol{P}$ в любой точке дуги окружности $r = \text{const}$, $|\theta| < \beta$ согласно (12.2.4), (12.2.6) имеют вид

$$\begin{aligned} P_r(r,\theta) &= \sigma_{rr}(r,\theta) = \tfrac{\rho Q^2}{r^2 \mathrm{Re}}\left(4V(\theta) - \tfrac{C}{2}\right), \\ P_\theta(r,\theta) &= \sigma_{r\theta}(r,\theta) = -\tfrac{\rho Q^2}{r^2 \mathrm{Re}} V'(\theta), \end{aligned} \tag{12.2.10}$$

а в граничных точках этой дуги $\theta = \pm\beta$ согласно (12.2.7) вид

$$P_r(r, \pm\beta) = -\frac{\rho Q^2 C}{2r^2 Re}, \quad P_\theta(r, \pm\beta) = -\frac{\rho Q^2}{r^2 Re} V'(\pm\beta). \tag{12.2.11}$$

Компоненты F_r и F_θ суммарной силы $\boldsymbol{F}$ (точнее, её плотности вдоль оси z) с учётом выражений (12.2.10) на расстоянии r равны

$$F_r(r) = \int\limits_{-\beta}^{\beta} r P_r\, d\theta = \tfrac{\rho Q^2}{r \mathrm{Re}}(4 - \beta C), \quad F_\theta(r) = \int\limits_{-\beta}^{\beta} r P_\theta\, d\theta = 0, \tag{12.2.12}$$

т. е. выражаются через постоянную C.

Аналогично (12.2.12) вычислим плотность мощности N сил, обусловленных напряжениями $\boldsymbol{P}$:

$$\begin{aligned} N &= \int\limits_{-\beta}^{\beta} r\sigma_{rr} v_r\, d\theta = -\tfrac{\rho Q^3}{r^2 \mathrm{Re}} \int\limits_{-\beta}^{\beta} \left(4V^2 - \tfrac{CV}{2}\right) d\theta = \\ &= -\tfrac{\rho Q^3}{r^2 \mathrm{Re}} \int\limits_{-\beta}^{\beta} \left(\tfrac{4}{\mathrm{Re}}(V'' + 4V - C) - \tfrac{CV}{2}\right) d\theta = \\ &= \tfrac{\rho Q^3}{r^2 \mathrm{Re}} \left(\tfrac{C}{2} - \tfrac{4}{\mathrm{Re}}\Big(V'(\beta) - V'(-\beta) + 4 - 2\beta C\Big)\right) \end{aligned} \tag{12.2.13}$$

Уравнение (12.2.5) с граничными условиями (12.2.7) и одним интегральным условием (12.2.9) представляет собой классическую задачу Джеффри–Гамеля, название которой связано с Дж.Б.Джеффри и Г.Гамелем, впервые исследовавшими течение вязкой жидкости между сходящимися плоскостями и указавшими на автомодельность решения [264, 272]. Аналитическому изучению задачи (12.2.5), (12.2.7), (12.2.9) посвящена обширная специальная и учебная литература по гидродинамике [30, 114, 119, 128, 319]. Необходимо оговорить, что иногда под термином «задача Джеффри–Гамеля» подразумеваются не постановка (12.2.5), (12.2.7), (12.2.9), а некоторые другие задачи. В частности [291], интегральное условие (12.2.9) заменяется дополнительным «локальным» условием $V(0) = 1$, т.е. задаётся не расход, а скорость на оси диффузора–конфузора. Это существенно меняет аналитико-численное исследование задачи и свойства решения.

Отметим, что в соотношения (12.2.5), (12.2.7), (12.2.9) входят лишь безразмерные известные и неизвестные функции и константы. Это произошло не в силу обезразмеривания (полное обезразмеривание на базе собственных параметров задачи, как уже было сказано, здесь провести нельзя), а благодаря автомодельности [19].

Уравнение (12.2.5), очевидно, допускает понижение порядка после домножения на V' и выделения полных производных. Имеет место первый интеграл

$$\frac{V'^2}{2} + 2V^2 - Re\frac{V^3}{3} - CV = \frac{V'^2(\mp\beta)}{2}. \tag{12.2.14}$$

Классические результаты связаны с интегрированием в эллиптических функциях уравнения (12.2.14) [114, 119]. Анализ получающихся эллиптических интегралов, зависящих от нескольких параметров, а также корней системы двух трансцендентных уравнений относительно двух постоянных интегрирования затруднён. Построить явное решение краевой задачей с условием постоянства расхода для произвольных β, Re не удаётся.

В литературе считалось, что диффузорное течение ($Re < 0$) является более сложным и многообразным, чем конфузорное ($Re > 0$). Для него были известны как несимметричные относительно оси $\theta = 0$ профили скорости, так и многомодовые режимы. Под многомодовостью здесь и далее понимается чередование секторов вытекания и стока жидкости. Наличие многомодовых и несимметричных течений наряду с всегда существующим одномодовым симметричным свидетельствует о неединственности решения нелинейной краевой задачи Джеффри–Гамеля с условием постоянства расхода. Некоторые теоремы о единственности классического одномодового профиля при асимптотически малых числах Рейнольдса доказаны в [316].

Стационарное течение вязкой жидкости в диффузоре при достаточно больших числах Re теряет устойчивость [251], что приводит к наступлению турбулентности.

Как несимметрия, так и многомодовость профиля скорости не были явно установлены в классической литературе для конфузорного течения. Оставался открытым вопрос о возможности таких профилей (фактически о единственности конфузорного течения) и о свойствах соответствующих решений.

На основе модифицированного численно-аналитического метода ускоренной сходимости [10, 11] в [6–9] явно построено и проведено исследование одно- и многомодовых конфузорных течений в широком диапазоне параметров β и Re.

Краевая задача (12.2.5), (12.2.7), (12.2.9) может быть записана не относительно функции V от угла θ, а в терминах другой безразмерной функции y от безразмерной переменной x:

$$y = 2\beta V, \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\beta} + 1\right), \quad 0 < x < 1. \tag{12.2.15}$$

Имеем

$$y'' + a^2 y - b y^2 = \lambda, \quad a = 4\beta, \quad b = 2\beta\, Re \tag{12.2.16}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 y(x)\, dx = 1. \tag{12.2.17}$$

Постоянные $\lambda = 8\beta^3 C = y''(0) = y''(1)$ и $\gamma = y'(0)$ неизвестны и подлежат определению при заданной паре параметров a и b. От λ можно избавиться дифференцированием, однако в результате получается нелинейное уравнение третьего порядка.

Введём также функцию $z(x)$, характеризующую расход жидкости согласно (12.2.17)

$$z' = y - 1, \quad z(0) = z(1) = 0. \tag{12.2.18}$$

Исходя из (12.2.6) находим, что давление p связано с $y(x)$ следующим образом

$$p(r, \theta) = \frac{2\rho Q^2}{r^2} \frac{\lambda - a^2 y}{a^2 b}. \tag{12.2.19}$$

Из (12.2.19) видно, что при $b \to 0$ давление становится неограниченным и имеет место осбенность, хотя решение задачи (12.2.16), (12.2.17) может быть регулярным. Кроме того, для практического осуществления радиальности движения давление на любом расстоянии r должно определённым и заранее неизвестным образом зависеть от x (или угла θ).

12.2.2. Аналитические и асимптотические разложения

Приведём аналитические выражения $y(x)$ для различных значений параметров a и b (β и Re).

1°. Случай $0 < Re \ll 1$ реализуется при медленном движении очень вязкого материала в различных технологических приложениях (вытяжка листа, выдавливание пластических масс и др.). Решение $y(x)$ для произвольных углов β может быть найдено в виде разложения по степеням параметра b при конечном a

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n y_n(x), \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \lambda_n \tag{12.2.20}$$

и удерживания нескольких первых членов ряда (12.2.20). В частности, имеем [9]

$$\begin{gathered} y_0(x) = \tfrac{2\beta}{D}\left[\cos(2\beta(2x-1)) - \cos 2\beta\right] \equiv \\ \equiv \frac{1}{1-(2/a)\operatorname{tg}(a/2)}\left(1 - \cos ax - \operatorname{tg}\tfrac{a}{2}\sin ax\right), \\ D = \sin 2\beta - 2\beta\cos 2\beta, \quad \lambda_0 = -\tfrac{32\beta^3}{D}\cos 2\beta, \quad \gamma_0 = \tfrac{8\beta^2}{D}\sin 2\beta. \end{gathered} \tag{12.2.21}$$

Нулевое приближение (12.2.7) теряет смысл при $D = 0$, т. е. при значениях β, являющихся корнями уравнения $\operatorname{tg} 2\beta = 2\beta$. Наименьший положительный корень этого уравнения $\beta = \beta^* \approx 2.247$ соответствует вполне определённому конфузору с развёрнутым углом раствора.

Для коэффициентов последующих приближений $y_n(x)$, $n \geqslant 1$ могут быть поставлены линейные краевые задачи вида

$$\begin{gathered} y_n'' + a^2 y_n = \lambda_n + F_n(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}), \\ y_n(0) = y_n(1) = 0, \quad \int_0^1 y_n(x)\,dx = 0 \end{gathered} \tag{12.2.22}$$

с неизвестными постоянными $\lambda_n = y_n''(0) = y_n''(1)$ и с известной функцией F_n. Так, например, $F_1(y_0) = y_0^2$. Вычисления при $n \geqslant 1$ становятся громоздкими и при $b \sim 1$ нерациональными из-за низкой точности.

2°. Случай $0 < \beta \ll 1$, $0 < Re \sim 1$ или $0 < a \ll 1$, $0 < b \ll 1$ соответствует почти параллельным стенкам конфузора. В уравнении (12.2.16) асимптотические регулярные разложения по степеням β

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n y_n(x), \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \lambda_n \tag{12.2.23}$$

приводят к аппроксимации решения многочленами по x:

$$y_0(x) = 6x(1-x), \quad y_1(x) = \tfrac{6Re}{35}x(14x^5 - 42x^4 + 35x^3 - 9x + 2),$$
$$\lambda_0 = -12, \quad \lambda_1 = -\tfrac{108}{35}Re. \tag{12.2.24}$$

Профиль $y_0(x)$ в (12.2.24) отвечает течению Пуазейля между двумя параллельными плоскостями. Степень каждого многочлена $y_n(x)$ нарастает довольно быстро и равна $4n+2$.

3° Случай $Re \gg 1$, $\beta \sim 1$ формально означает предельный переход к идеальной жидкости. При $Re = \infty$ имеет место разрывное в граничных точках решение

$$y_\infty(x) \equiv 1, \quad 0 < x < 1, \quad y_\infty(0) = y_\infty(1) = 0. \tag{12.2.25}$$

Наличие малого параметра $1/b$ при старшей производной в (12.2.16) требует привлечение сингулярных асимптотических методов [72, 129]. В первом по $1/b$ приближении решение может быть представлено формулой Кочина [55, 114]

$$y(x) = 1 - \frac{6}{1+\operatorname{ch}\left[\operatorname{arch} 5 + \sqrt{b/2}(1-|2x-1|)\right]},$$
$$\lambda(b) = -b, \quad \gamma(b) = \tfrac{4b}{3}. \tag{12.2.26}$$

Данная формула приводит к удовлетворительной точности уже при $b \sim 10^3 \div 10^4$.

4°. Пусть $0 < \beta \ll 1$, но $b \sim 1$, что соответствует течению с большими числами Рейнольдса между почти параллельными стенками. В нулевом приближении левая часть (12.2.16) не содержит члена $a^2 y$. Однако интегрирование получающейся краевой задачи, как и в общем случае, приводит к эллиптическим функциям. Некоторое упрощение состоит лишь в том, что решение зависит от одного параметра b.

12.2.3. Интегральные оценки

Поставленная в п. 12.2.1 краевая задача (12.2.16), (12.2.17) эквивалентна изопериметрической вариационной задаче

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(y'^2 - a^2y^2 + \frac{2}{3}by^3\right) dx \to \min,$$
$$y(0) = y(1) = 0, \tag{12.2.27}$$
$$\int_0^1 y(x)\, dx = 1.$$

На основе (12.2.27) могут быть построены интегральные оценки $y(x)$, λ и γ.

Для любой функции $f(x) \in C^1[0;1]$ справедливо равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'' + a^2 y - by^2) f'\, dx = \lambda\big(f(x_2) - f(x_1)\big), \tag{12.2.28}$$

где $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$. Выберем в качестве x_1 и x_2 произвольные различные корни $y(x)$:

$$y(x_1) = y(x_2) = 0. \tag{12.2.29}$$

1°. Пусть $f(x) = y(x)$, тогда после интегрирования (12.2.28) по частям с учётом (12.2.29) получим важные равенства

$$y'(x_2) = \pm y'(x_1). \tag{12.2.30}$$

Если $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, то нижний знак в (12.2.30) соответствует классическому одномодовому режиму, а верхний – многомодовому. Условие $y'(1) = y'(0)$ влечёт за собой многомодовость режима течения.

2°. Пусть $f' = y$, $f(x_1) = 0$, тогда с учётом неравенства Фридрихса [180]

$$\int_{x_1}^{x_2} y'^2\, dx \geqslant \frac{\pi^2}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx \tag{12.2.31}$$

из (12.2.28) имеем оценку параметра λ:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{x_1}^{x_2} y\, dx &= \int_{x_1}^{x_2} (-y'^2 + a^2 y^2 - by^3)\, dx \leqslant \\ &\leqslant \left(a^2 - \frac{\pi^2}{(x_2 - x_1)^2}\right) \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx - b \int_{x_1}^{x_2} y^3\, dx. \end{aligned} \tag{12.2.32}$$

Оценка (12.2.32) оказывается весьма точной для случая одномодового течения ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$).

3°. Пусть $f = y'$, тогда, интегрируя (12.2.28) по частям, запишем равенство

$$n\lambda y'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (y''^2 - a^2 y^2 + 2byy')\, dx, \tag{12.2.33}$$

где $n = 0$ для функций $y(x)$, у которых в (12.2.30) следует выбрать верхний знак, и $n = -2$, если нижний. При $n = 0$, т.е. для функций с граничными условиями

$$y^{(m)}(x_1) = y^{(m)}(x_2), \quad m = 0, 1, 2 \tag{12.2.34}$$

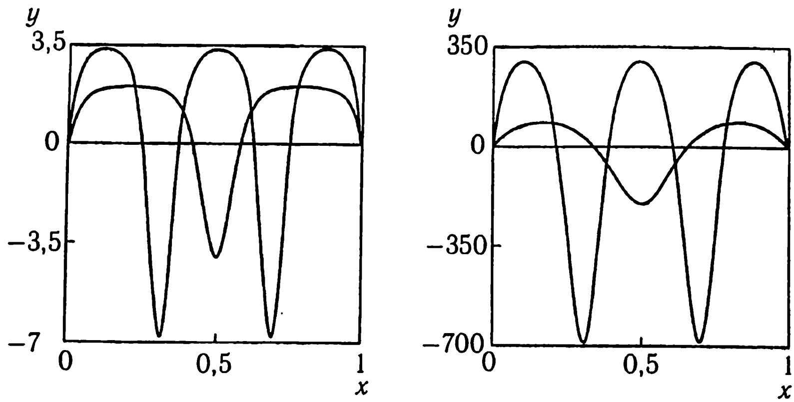


Рис. 12.3. Возможные многомодовые профили течения Джеффри—Гамеля

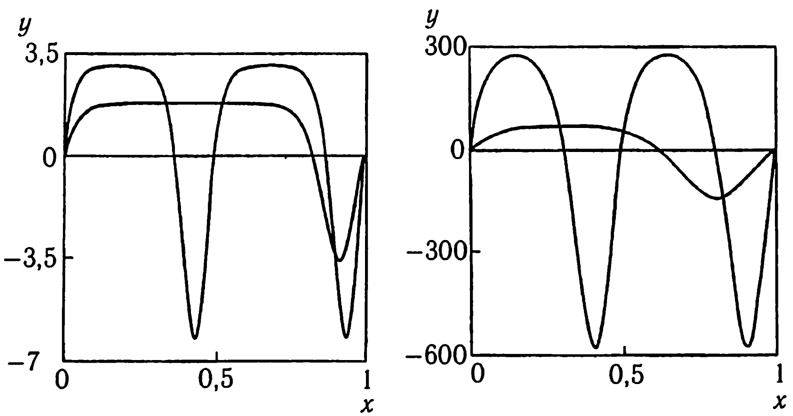


Рис. 12.4. Возможные несимметричные профили течения Джеффри—Гамеля

справедливо ещё одно неравенство Фридрихса

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} y''^2\,dx \geqslant \frac{4\pi^2}{(x_2 - x_1)^2}\int\limits_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx. \tag{12.2.35}$$

Из него и (12.2.33) следует оценка

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{4\pi^2}{(x_2 - x_1)^2} - a^2 + 2by\right] y'^2\,dx \leqslant 0. \tag{12.2.36}$$

Для некоторых x_1, x_2, a, b равенство в оценке (12.2.36) достигается, например, в случае $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $a = 2\pi$, $b = 0$. При этом, конечно, выполняются условия (12.2.34).

В [6–9] на основе модифицированного метода ускоренной сходимости [10, 11] построены профили скорости $y(x)$ для течения Джеффри—Гамеля в достаточно широком диапазоне параметров (β, Re) или $(a; b)$. Выделены случаи регулярного продолжения решения по числу Рейнольдса и отсутствия такого продолжения. Отмечено наличие некоторого критического угла раствора конфузора $2\beta^* \approx 257°$, при котором качественно перестраивается профиль скорости. Впервые доказано существование решений, соответствующих многомодовым (рис. 12.3) и несимметричным (рис. 12.4) течениям в конфузоре.

12.2.4. Устойчивость течения Джеффри—Гамеля по отношению к вариации предела текучести

Вместо ньютоновской вязкой жидкости с определяющими соотношениями (12.2.3) исследуем вязкопластическую среду с соотношениями

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv -p\delta_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + 2\left(\frac{\tau_s}{U} + \frac{\rho Q}{Re}\right) v_{\alpha\beta}, \qquad (12.2.37)$$

которым отвечает известная скалярная связь квадратичных инвариантов T и U

$$T = \tau_s + \frac{\rho Q}{Re} U. \qquad (12.2.38)$$

Следуя разд. 12.1, представим решение задачи о течении среды с определяющими соотношениями (12.2.37) в конфузоре в форме асимптотических рядов (12.1.11) $(\alpha = \tau)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(r,\theta) &= \boldsymbol{v}^0(r,\theta) + \tau \boldsymbol{v}^{(1)}(r,\theta) + O\left(\tau^2\right), \\
\underset{\sim}{v}(r,\theta) &= \underset{\sim}{v}^0(r,\theta) + \tau \underset{\sim}{v}^{(1)}(r,\theta) + O\left(\tau^2\right), \\
p(r,\theta) &= p^0(r,\theta) + \tau p^{(1)}(r,\theta) + O\left(\tau^2\right), \\
\underset{\sim}{s}(r,\theta) &= \underset{\sim}{s}^0(r,\theta) + \tau \underset{\sim}{s}^{(1)}(r,\theta) + O\left(\tau^2\right).
\end{aligned} \qquad (12.2.39)$$

Здесь верхним нулевым индексом помечено решение задачи Джеффри—Гамеля, аналитическому и численному изучению которого посвящены п.п. 12.2.1–12.2.3. Это решение фактически зависит от одной функции $V(\theta)$. Поправки порядка τ и выше уже нарушают автомодельность и приводят к двумерной краевой задаче.

В выражениях (12.2.39) τ — искусственный безразмерный параметр $(\tau \ll 1)$, который пока никак не связан с пределом текучести при сдвиге τ_s, фигурирующим в (12.2.37), (12.2.38). Его введение обусловлено тем, что размерную величину τ_s нельзя обезразмерить, используя входные параметры задачи β, Q,

ρ, μ. Асимптотики (12.2.39) являются промежуточными [19] и в окончательные формулы для решения числовой параметр τ не войдёт [4].

Уравнения (12.1.14), (12.1.15) задачи первого приближения по τ имеют вид

$$-p_{,r}^{(1)} + \frac{s_{r\theta,\theta}^{(1)}}{r} + s_{rr,r}^{(1)} + 2\frac{s_{rr}^{(1)}}{r} = -\rho Q\left(\frac{V}{r}v_{r,r}^{(1)} - \frac{V}{r^2}v_r^{(1)} + \frac{V'}{r^2}v_\theta^{(1)}\right) \tag{12.2.40}$$

$$-\frac{p_{,\theta}^{(1)}}{r} - \frac{s_{rr,\theta}^{(1)}}{r} + s_{r\theta,r}^{(1)} + 2\frac{s_{r\theta}^{(1)}}{r} = -\rho Q\left(\frac{V}{r}v_{\theta,r}^{(1)} + \frac{V}{r^2}v_\theta^{(1)}\right) \tag{12.2.41}$$

$$v_{r,r}^{(1)} + \frac{v_r^{(1)}}{r} + \frac{v_{\theta,\theta}^{(1)}}{r} = 0. \tag{12.2.42}$$

Линеаризуя векторные определяющие соотношения (12.2.37) и пользуясь (12.1.20), запишем связь тензоров $\underset{\sim}{s}^{(1)}$ и $\underset{\sim}{v}^{(1)}$ для среды первого приближения аналогичную (12.1.19) и (12.1.24)

$$\underset{\sim}{s}^{(1)} = 2\left(\frac{\tau_s}{\tau U^0}\underset{\sim}{v}^0 + \frac{\rho Q}{Re}\underset{\sim}{v}^{(1)}\right) - \frac{2\tau_s}{U^0}\left(\frac{U^{(1)}}{U^0}\underset{\sim}{v}^0 - \underset{\sim}{v}^{(1)}\right) \tag{12.2.43}$$

Пусть размерный предел текучести τ_s таков, что первое слагаемое в правой части (12.2.43) — величина порядка $O(1)$, а второе — порядка τ. Тогда тензорный коэффициент $\underset{\sim}{s}^{(1)}$ в разложении (12.2.39) имеет такой же вид, как и (12.1.24):

$$\underset{\sim}{s}^{(1)} = 2\left(\frac{\tau_s}{\tau U^0}\underset{\sim}{v}^0 + \frac{\rho Q}{Re}\underset{\sim}{v}^{(1)}\right) \tag{12.2.44}$$

Среда с соотношениями (среда первого приближения) соответствует ньютоновской вязкой модели с начальными напряжениями, которые известны из основного течения.

Параметризуем две известные из решения задачи Джеффри—Гамеля функции $v_{rr}^0(\theta)$ и $v_{r\theta}^0(\theta)$, входящие в (12.2.2) и связанные с $U^0(\theta)$ соотношением $(v_{rr}^0)^2 + (v_{r\theta}^0)^2 = (U^0)^2/4$, с помощью новой функции $\Psi(\theta)$ ($0 < \Psi < \pi$):

$$\sin\Psi = \frac{2v_{rr}^0}{U^0}, \quad \cos\Psi = \frac{2v_{r\theta}^0}{U^0}. \tag{12.2.45}$$

С учётом (12.2.45) и линеаризованных соотношений Стокса, перепишем покомпонентно тензорное равенство (12.2.44)

$$\begin{aligned} s_{rr}^{(1)} &= -s_{\theta\theta}^{(1)} = \tfrac{\tau_s}{\tau}\sin\Psi + \tfrac{2\rho Q}{Re}v_{r,r}^{(1)} \\ s_{r\theta}^{(1)} &= \tfrac{\tau_s}{\tau}\cos\Psi + \tfrac{\rho Q}{Re}\left(\tfrac{v_{r,\theta}^{(1)}}{r} + v_{\theta,r}^{(1)} - \tfrac{v_\theta^{(1)}}{r}\right) \end{aligned} \tag{12.2.46}$$

Граничные условия прилипания на стенках конфузора и условие постоянства расхода приводят к следующим однородным условиям на функции $v_r^{(1)}$ и $v_\theta^{(1)}$:

$$v_r^{(1)}(\pm\beta) = v_\theta^{(1)}(\pm\beta) = 0, \quad \int\limits_{-\beta}^{\beta} r v_r^{(1)}\, d\theta = 0. \tag{12.2.47}$$

Подставим выражения (12.2.46) в уравнения движения (12.2.40), (12.2.41) и получим замкнутую относительно трёх функций $v_r^{(1)}$, $v_\theta^{(1)}$ и $p^{(1)}$ систему уравнений (12.2.40)–(12.2.42) с граничными условиями (12.2.47). Система неоднородна из-за наличия слагаемых с Ψ в правых частях (12.2.46).

Будем искать решение данной системы в виде (ср. с [103]):

$$v_r^{(1)} = -\frac{\tau_s}{\tau\rho Q}\frac{rW'(\theta)}{2}, \quad v_\theta^{(1)} = \frac{\tau_s}{\tau\rho Q} rW(\theta), \tag{12.2.48}$$

автоматически удовлетворяя условие несжимаемости (12.2.42). Используя (12.2.48), выпишем поле скоростей деформаций

$$v_{rr}^{(1)} = -v_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{\tau_s}{\tau\rho Q}\frac{W'(\theta)}{2}, \quad v_{r\theta}^{(1)} = -\frac{\tau_s}{\tau\rho Q}\frac{W''(\theta)}{4}. \tag{12.2.49}$$

Установлено [55], что задачу можно редуцировать к одному линейному обыкновенному уравнению относительно безразмерной функции $W(\theta)$

$$\left[-\frac{W'''}{Re} - \frac{4W'}{Re} + 2V'W + 2(\cos\Psi)' + 4\sin\Psi\right]' = 0 \tag{12.2.50}$$

с однородными граничными условиями

$$W(\pm\beta) = 0, \quad W'(\pm\beta) = 0. \tag{12.2.51}$$

Таким образом, поиск добавки к радиальному полю скоростей, являющемуся решением задачи Джеффри–Гамеля, в виде (12.2.48) хоть и нарушает радиальность последнего, но, по-прежнему, имеет автомодельный характер, поскольку допускает сведение к обыкновенной краевой задаче (12.2.50), (12.2.51). Кроме (12.2.48) возможны и другие плоские возмущения течения Джеффри–Гамеля, также отличающиеся от него на величину порядка τ_s, но автомодельностью не обладающие. Именно в силу этого остановимся подробнее на поиске добавок $v_r^{(1)}$ и $v_\theta^{(1)}$ в виде (12.2.48).

После нахождения $W(\theta)$ из краевой задачи (12.2.50), (12.2.51) определяется добавка давления $p^{(1)}$:

$$p^{(1)} = \left[-\tfrac{\rho Q}{2Re}(W''' + 4W') + \tfrac{\tau_s}{\tau}\left((\cos\Psi)' + 2\sin\Psi\right) + \rho Q V'W\right]\ln r + P_1(\theta). \tag{12.2.52}$$

$$P_1'(\theta) = 2\rho Q V W - \frac{\tau_s}{\tau}(\sin\Psi)' + 2\frac{\tau_s}{\tau}\cos\Psi. \tag{12.2.53}$$

Обратим внимание на то, что функция $p^{(1)}$ имеет логарифмическую особенность по r.

12.2.5. Асимптотические границы жёстких зон

Исследуем вопрос об асимптотических границах Σ_r, отделяющих области Ω_r и Ω_f и образующихся при малой вариации предела текучести. В любой точке конфузора, находящейся на конечном расстоянии от его вершины, $U^0 > 0$. Так как $U^0(r,\theta) \to 0$ при $r \to \infty$, то множество $\gamma^0 = \{x \in \Omega \quad U^0(r,\theta) = 0\}$, о котором шла речь в разд. 12.1, состоит из бесконечно удалённых точек. При предельном переходе $\tau_s \to 0$ ($\tau \to 0$) граница Σ_r при любом θ стремится по r в бесконечность. Запишем уравнение этой границы подобно (12.1.25)

$$\Sigma_r = \left\{(r,\theta) \quad 2\tau \underset{\sim}{v}^0 : \underset{\sim}{v}^{(1)} = -(U^0)^2\right\} \tag{12.2.54}$$

Здесь существенно то, что параметр τ_s (или τ) асимптотически малый, а не конечный. При любом же конечном, пусть и малом значении предела текучести жёсткие зоны (ядра течения), понимаемые в классическом, а не асимптотическом смысле, отсутствуют. В [5, 104] области Ω_r, ограничиваемые поверхностями Σ_r, названы квазижёсткими.

Иногда, например, в задаче о вязкопластическом течении Пуазейля или в примере п. 12.1.4, квазижёсткие зоны в указанном выше смысле совпадают с жёсткими. Так, для течения Пуазейля в плоском слое они представляют собой полосу толщины порядка τ_s в середине слоя, а для течения в круглой трубе — прут с диаметром порядка τ_s в середине трубы. В неодномерных же задачах со сложной кинематикой, где жёсткие зоны чаще всего отсутствуют, определённую информацию об областях с малыми скоростями деформаций может дать картина квазижёстких зон Ω_r.

Подставим в уравнение (12.2.54) выражения (12.2.2) компонент тензора $\underset{\sim}{v}^0$ через $V(\theta)$ и выражения (12.2.49) компонент тензора $\underset{\sim}{v}^{(1)}$ через $W(\theta)$. Получим в полярных координатах уравнение кривой

$$r^*(\theta) = Q\left(\frac{\rho}{\tau_s}\frac{2(V'^2+4V^2)}{4VW' - V'W''}\right)^{1/2} \equiv \frac{Q\sqrt{\rho}}{\sqrt{\tau_s}}R(\theta), \tag{12.2.55}$$

бесконечно удалённой от вершины конфузора при $\tau_s \to 0$.

Как следует из (12.2.1), (12.2.2), (12.2.48), (12.2.49), на кривой (12.2.55) компоненты вектора скорости и тензора скоростей деформаций имеют вид (приведены лишь первые члены разложений)

$$v_r^* = -\left(\frac{V}{R} + \frac{RW'}{2}\right)\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}, \quad v_\theta^* = RW\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \tag{12.2.56}$$

$$v_{rr}^* = -v_{\theta\theta}^* = \left(\frac{V}{R^2} - \frac{W'}{2}\right)\frac{\tau_s}{\rho Q}, \quad v_{r\theta}^* = -\left(\frac{V'}{2R^2} + \frac{W''}{4}\right)\frac{\tau_s}{\rho Q}. \qquad (12.2.57)$$

В работах [5, 104] численно построены кривые (12.2.55), определяющие в первом приближении жёсткие (квазижёсткие) зоны и области течения, а также изучено их поведение в широкой области изменения параметров. Установлены новые эффекты, имеющие механическое содержание (бифуркации картины течения, форма и расположение жёстких зон, поведение скорости частиц среды на их границах).

12.3. Вязкопластическое течение Кармана

Задача о стационарном течении несжимаемой вязкой среды в полупространстве над вращающейся плоскостью (задача Кармана) — известная задача гидродинамики ньютоновской жидкости, которая благодаря автомодельности допускает сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [128]). Если плоскость заменяется диском конечного радиуса (а полупространство соответственно полубесконечным цилиндром) или если среда проявляет неньютоновские свойства, задача теряет автомодельность и существенно усложняется.

12.3.1. Задача Кармана и ее решение

Полупространство $\Omega = \{\mathbf{x} \quad z > 0\}$ заполнено вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν. Граница $z = 0$ данного полупространства вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω, увлекая за собой вязкую среду. Интерес представляет стационарный осесимметричный режим течения. Классическая задача Кармана рассматривает невесомую среду, однако для общности будем полагать, что жидкость весома и находится в поле силы тяжести с ускорением $\mathbf{g}$, противо- либо сонаправленным с осью z.

Включим в базис обезразмеривания тройку величин $\{\rho, \nu, \omega\}$, так что единственной безразмерной комбинацией параметров задачи является число Фруда $\mathrm{Fr} = g\nu^{-1/2}\omega^{-3/2}$, где $g = |\mathbf{g}|$. Возможны два случая $\mathrm{Fr} > 0$, если ускорение $\mathbf{g}$ сонаправлено с осью (Oz), и $\mathrm{Fr} < 0$, если противонаправлено. Все дальнейшие соотношения выписаны в безразмерном виде.

Поле скоростей $(v_r^0(r,z),\ v_\theta^0(r,z),\ v_z^0(r,z))$ в цилиндрической системе координат удовлетворяет граничным условиям на плоскости $z = 0$ и на бесконечности:

$$z = 0 \quad v_r^0 = v_z^0 = 0,\ v_\theta^0 = r; \qquad z = \infty \quad v_r^0 = v_\theta^0 = 0 \qquad (12.3.1)$$

Три уравнения Навье–Стокса и условие несжимаемости образуют замкнутую в Ω систему четырех уравнений относительно скоростей v_r^0, v_θ^0, v_z^0 и давления $p^0(r, z)$. Эта система должна быть дополнена граничными условиями (12.3.1).

Будем искать решение в форме

$$v_r^0 = rF(z), \quad v_\theta^0 = rG(z), \quad v_z^0 = H(z), \quad p^0 = -P(z) + z\,\mathrm{Fr} \tag{12.3.2}$$

что обеспечивает автомодельность и приводит к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно четырех функций F, G, H, P одной переменной z [128]:

$$\begin{aligned} &F^2 - G^2 + F'H = F'', \qquad &&HH' = P' + H'', \\ &2FG + G'H = G'', &&H' = -2F \end{aligned} \tag{12.3.3}$$

Из условий (12.3.1) следуют граничные условия для F, G, H

$$z = 0 \quad F = H = 0,\ G = 1; \qquad z = \infty \quad F = G = 0 \tag{12.3.4}$$

Функция $P(z)$ входит лишь в одно из уравнений (12.3.3), поэтому из системы (12.3.3) можно выделить замкнутую подсистему для функций F, G, H. Найдя последние, легко определить и давление $P(z)$, для чего необходимо задать еще одно граничное условие

$$z = 0 \quad P(0) = P^0 \tag{12.3.5}$$

Выпишем также компоненты тензора скоростей деформаций:

$$v_{rr}^0 = v_{\theta\theta}^0 = F, \quad v_{zz}^0 = H', \quad v_{r\theta}^0 = 0, \quad v_{rz}^0 = \frac{1}{2}rF', \quad v_{\theta z}^0 = \frac{1}{2}rG' \tag{12.3.6}$$

и тензора напряжений $\underset{\sim}{\sigma}^0 = -p^0\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{s}$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}^0 = \sigma_{\theta\theta}^0 = P - z\,\mathrm{Fr} + 2F, \quad \sigma_{zz}^0 = P - z\,\mathrm{Fr} + 2H', \\ &\sigma_{r\theta}^0 = 0, \quad \sigma_{rz}^0 = rF', \quad \sigma_{\theta z}^0 = rG' \end{aligned} \tag{12.3.7}$$

Максимальная скорость скольжения $U^0 = (2\underset{\sim}{v}^0 \;\; \underset{\sim}{v}^0)^{1/2}$ и максимальное касательное напряжение $T^0 = (\underset{\sim}{s}^0 \;\; \underset{\sim}{s}^0/2)^{1/2}$, вычисленные на основе (12.3.6), (12.3.7), имеют вид

$$T^0 = U^0 = \sqrt{12F^2 + r^2(F'^2 + G'^2)} \tag{12.3.8}$$

Исходя из (12.3.8), параметризуем функции F, F' и G' двумя углами $\Phi_2(z)$ и $\Phi_1(z, r)$:

$$F = \frac{U^0}{2\sqrt{3}}\cos\Phi_1, \quad rF' = U^0 \sin\Phi_1 \cos\Phi_2, \quad rG' = U^0 \sin\Phi_1 \sin\Phi_2 \tag{12.3.9}$$

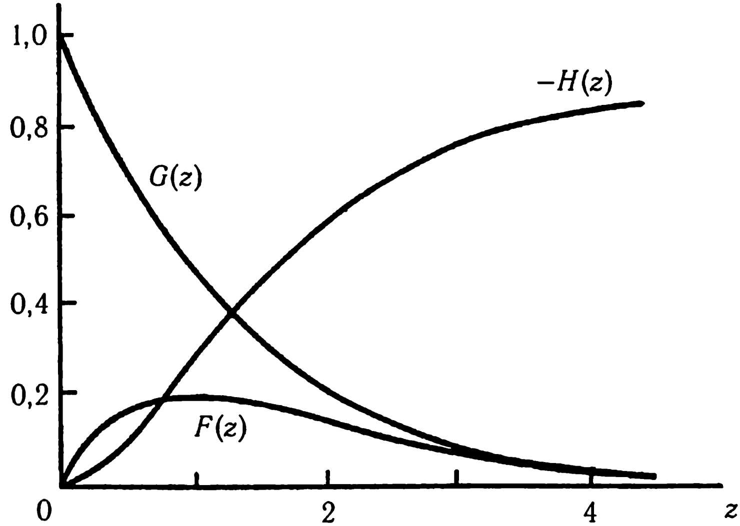


Рис. 12.5. Кривые $F(z)$, $G(z)$ и $H(z)$, характеризующие вязкое течение Кармана

Заметим, что ни в системе (12.3.3), ни в условиях (12.3.4), (12.3.5) не присутствует никаких безразмерных параметров. Число же Фруда Fr аддитивно вошло в выражения (12.3.2), (12.3.7) для p^0 и диагональных компонент $\underset{\sim}{\sigma}^0$ и в дальнейших выкладках участия не принимает. Таким образом, задача Кармана (12.3.3) – (12.3.5) в отличие от других автомодельных задач гидродинамики ньютоновской жидкости (например, задачи Джеффри — Гамеля о течении в конфузоре или диффузоре [9, 114], где имеются два безразмерных параметра) «ноль-параметрична», а следовательно, ее асимптотический и численный анализ в некоторой степени более прост и универсален. Отметим также, что постановка задачи (12.3.3) – (12.3.5) принадлежит Т. Карману [278].

Систему (12.3.3) нетрудно редуцировать к двум уравнениям относительно G и H:

$$4G^2 + 2HH'' - H'^2 = 2H''', \qquad G'H - GH' = G'' \tag{12.3.10}$$

или, выражая в (12.3.10) G через H, к одному нелинейному уравнению пятого порядка относительно H, которое не будем здесь приводить из-за громоздкости. Добавляя к этому уравнению пять граничных условий (12.3.4) в терминах функции $H(z)$, получим нелинейную краевую задачу, требующую численного интегрирования.

Результаты численного анализа задачи Кармана хорошо известны [128]. На рис. 12.5 приведены кривые $F(z), G(z), H(z)$, использующиеся далее как нулевое приближение решения задачи о вязкопластическом течении. Выделим характерные особенности кривых:

а) $\lim\limits_{z\to\infty} H(z) \approx -0,886$, т.е. вращающаяся плоскость «подсасывает» среду из бесконечности (по z) с постоянной (по r) скоростью и «отбрасывает» ее на бесконечность (по r) из-за наличия центробежных усилий;

б) $F', G', H' \ll 1$ на достаточном удалении от плоскости $z = 0$, что говорит о погранслойном эффекте вблизи вращающейся границы Ω.

12.3.2. Задача первого приближения по пределу текучести

Рассмотрим вязкопластическую среду со скалярным определяющим соотношением

$$T = \tau + U, \qquad \tau = \frac{\tau_s}{\rho\nu\omega} > 0 \tag{12.3.11}$$

где τ и τ_s — безразмерный и размерный пределы текучести, и квазилинейными тензорными соотношениями $\underset{\sim}{s} = 2T\underset{\sim}{v}/U$ или с учетом (12.3.11)

$$\underset{\sim}{s} = 2\left(\frac{\tau}{U} + 1\right)\underset{\sim}{v} \tag{12.3.12}$$

В области Ω имеем три уравнения движения и условие несжимаемости

$$-\mathrm{grad}\, p + \mathrm{Div}\, \underset{\sim}{s}[\underset{\sim}{v}(\mathbf{v})] + \mathrm{Fr}\, \mathbf{e}_z = \rho\dot{\mathbf{v}}, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \tag{12.3.13}$$

относительно трех компонент $\mathbf{v}$ и давления p. В уравнениях (12.3.13) учтены определяющие соотношения (12.3.12) среды и связь $\underset{\sim}{v}$ и $\mathbf{v}$. Кинематические граничные условия по-прежнему остаются в форме (12.3.1).

Положим $\tau \ll 1$ и представим решение задачи (12.3.13), (12.3.12), (12.3.1) в виде асимптотических разложений по τ:

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \tau\mathbf{v}^{(1)} + \quad , \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}^0 + \tau\underset{\sim}{v}^{(1)} + \\ p = p^0 + \tau p^{(1)} + \\ \underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{s}^0 + \tau\underset{\sim}{s}^{(1)} + \end{gathered} \tag{12.3.14}$$

Первые члены разложений (12.3.14) отвечают классическому течению Кармана.

Перейдем к постановке задачи первого приближения по τ для величин с верхним индексом 1 (возмущений). Подставляя (12.3.14) в (12.3.13) и линеаризуя относительно возмущений, получим с учетом (12.3.2)

$$-p^{(1)}_{,r} + s^{(1)}_{rr,r} + s^{(1)}_{rz,z} + \frac{1}{r}(s^{(1)}_{rr} - s^{(1)}_{\theta\theta}) =$$
$$= rFv^{(1)}_{r,r} + Fv^{(1)}_{r} + Hv^{(1)}_{r,z} + rF'v^{(1)}_{z} - 2Gv^{(1)}_{\theta},$$
$$s^{(1)}_{r\theta,r} + s^{(1)}_{z\theta,z} + \frac{2}{r}s^{(1)}_{r\theta} = rFv^{(1)}_{\theta,r} + 2Gv^{(1)}_{r} + Hv^{(1)}_{\theta,z} + rG'v^{(1)}_{z} + Fv^{(1)}_{\theta} \tag{12.3.15}$$
$$-p^{(1)}_{,z} + s^{(1)}_{zz,z} + s^{(1)}_{rz,r} + \frac{s^{(1)}_{rz}}{r} = rFv^{(1)}_{z,r} + Hv^{(1)}_{z,z} - 2Fv^{(1)}_{z},$$
$$v^{(1)}_{r,r} + \frac{v^{(1)}_{r}}{r} + v^{(1)}_{z,z} = 0$$

Систему (12.3.15) необходимо замкнуть определяющими соотношениями «среды первого приближения» [43, 55], получаемыми при линеаризации (12.3.12). Эта псевдосреда является вязкой жидкостью с известными из нулевого приближения (12.3.9) начальными напряжениями

$$s^{(1)}_{rr} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\Phi_1 + 2v^{(1)}_{r,r}, \qquad s^{(1)}_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\Phi_1 + \frac{2v^{(1)}_{r}}{r},$$
$$s^{(1)}_{zz} = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \cos\Phi_1 + 2v^{(1)}_{z,z}, \qquad s^{(1)}_{r\theta} = v^{(1)}_{\theta,r} - \frac{v^{(1)}_{\theta}}{r}, \tag{12.3.16}$$
$$s^{(1)}_{\theta z} = \sin\Phi_1\sin\Phi_2 + v^{(1)}_{\theta,z}, \qquad s^{(1)}_{rz} = \sin\Phi_1\cos\Phi_2 + v^{(1)}_{z,r} + v^{(1)}_{r,z}$$

При подстановке (12.3.16) в (12.3.15) получим систему четырех линейных уравнений относительно компонент $\mathbf{v}^{(1)}$ и $p^{(1)}$. Граничные условия для $\mathbf{v}^{(1)}$ согласно (12.3.1) и (12.3.14) однородны:

$$z = 0 \quad \mathbf{v}^{(1)} = 0; \qquad z = \infty \quad v^{(1)}_{r} = v^{(1)}_{\theta} = 0 \tag{12.3.17}$$

Пользуясь тем, что течение вязкопластической среды разыскивается в классе осесимметричных полей, можно ввести функцию тока

$$v^{(1)}_{r} = \frac{1}{r}\psi_{,z}, \quad v^{(1)}_{z} = -\frac{1}{r}\psi_{,r} \tag{12.3.18}$$

и редуцировать систему (12.3.15) к системе двух уравнений относительно $\psi(r,z)$ и $v^{(1)}_{\theta}(r,z)$. Одно из двух уравнений этой системы имеет вид

$$s^{(1)}_{rr,rz} + s^{(1)}_{rz,zz} + \frac{1}{r}(s^{(1)}_{rr} - s^{(1)}_{\theta\theta})_{,z} - s^{(1)}_{zz,rz} - s^{(1)}_{rz,rr} - \frac{1}{r}s^{(1)}_{rz,r} + \frac{1}{r^2}s^{(1)}_{rz} =$$
$$= rFv^{(1)}_{r,rz} - Fv^{(1)}_{r,z} + Hv^{(1)}_{r,zz} + rF''v^{(1)}_{z} - 2G'v^{(1)}_{\theta} - \tag{12.3.19}$$
$$-2Gv^{(1)}_{\theta,z} - rFv^{(1)}_{z,rr} - Hv^{(1)}_{z,rz} + Fv^{(1)}_{z,r}$$

а другое совпадает со вторым уравнением (12.3.15) (при этом в (12.3.19) и в (12.3.15) следует подставить выражения (12.3.16), (12.3.18)). Заметим, что функция тока в задаче Кармана имеет вид $\psi^0 = -r^2 H/2$.

Известно, что при деформировании вязкопластической среды возможно образование жестких зон $\Omega_r \subseteq \Omega$:

$$\Omega_r = \{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) < \tau\} \tag{12.3.20}$$

При малых же τ граница Σ_r, отделяющая Ω_r от зоны течения Ω_f, находится из равенства [43]

$$\Sigma_r = \{\mathbf{x} :\ \ 2\tau \underset{\sim}{v}^0 : \underset{\sim}{v}^{(1)} = -U^{0^2}\}, \tag{12.3.21}$$

где U^0 имеет вид (12.3.8). Образование жестких зон при малом возмущении τ начинается вокруг тех точек или областей, где $U^0 = 0$. В исследуемой задаче множество таких областей состоит из полюса O, где $F = 0$ и $r = 0$, и бесконечно удаленной плоскости $z = \infty$, на которой $F = 0,\ F' = 0$ и $G' = 0$. Подставим в (12.3.21) выражение (12.3.8) и получим уравнение асимптотических границ жестких зон, примыкающих к точке O либо к бесконечности:

$$\tau(6Fv_{zz}^{(1)} - rF'v_{rz}^{(1)} - rG'v_{\theta z}^{(1)}) = 12F^2 + r^2(F'^2 + G'^2) \tag{12.3.22}$$

12.3.3. Асимптотические границы жестких зон

Как видно, (12.3.22) представляет собой алгебраическое уравнение, связывающее r и z на поверхности Σ_r при малых τ. В него входят неизвестные функции $v_{zz}^{(1)}$, $v_{rz}^{(1)}$ и $v_{\theta z}^{(1)}$, для нахождения которых необходимо численно решать систему (12.3.15). Ограничимся аналитическим поиском координат характерных точек $A(r_0, 0)$, $B(0, z_0)$ поверхности Σ_{r1}, примыкающей к O, и точки $C(0, z_\infty)$ поверхности Σ_{r2}, примыкающей к бесконечности (рис. 12.6).

Точка A. Подставим $r = r_0$ и $z = 0$ в (12.3.22), положим $r_0 = \tau R_0$ и представим функции $v_{zz}^{(1)}(r_0, 0)$, $v_{rz}^{(1)}(r_0, 0)$ и $v_{\theta z}^{(1)}(r_0, 0)$ их рядами Тейлора вблизи точки O. Так как $F(0) = 0$, получим

$$R_0 = -\frac{F'(0)v_{rz}^{(1)}(0,0) + G'(0)v_{\theta z}^{(1)}(0,0)}{F'^2(0) + G'^2(0)} \tag{12.3.23}$$

Функции F, G, H имеют следующие разложения в ряды при малых z:

$$F = a_0 z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}b_0 z^3 - \frac{1}{12}b_0^2 z^4 +$$

$$G = 1 + b_0 z + \frac{1}{3}a_0 z^3 + \frac{1}{12}(a_0 b_0 - 1)z^4 +$$

$$H = -a_0 z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{6}b_0 z^4 +$$

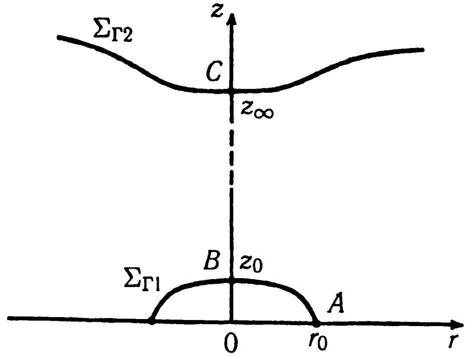


Рис. 12.6. Характерные точки A, B и C асимптотических границ жёстких зон в вязкопластическом течении Кармана

и при больших z:

$$F = A\,\mathrm{e}^{-cz} - \frac{A^2+B^2}{2c^2}\,\mathrm{e}^{-2cz} + \frac{A(A^2+B^2)}{4c^4}\,\mathrm{e}^{-3cz} + \ldots,$$

$$G = B\,\mathrm{e}^{-cz} - \frac{B(A^2+B^2)}{12c^4}\,\mathrm{e}^{-3cz} + \ldots, \tag{12.3.24}$$

$$H = -c + \frac{2A}{c}\,\mathrm{e}^{-cz} - \frac{A^2+B^2}{2c^3}\,\mathrm{e}^{-2cz} + \frac{A(A^2+B^2)}{6c^5}\,\mathrm{e}^{-3cz} +$$

где $a_0 \approx 0,510$; $b_0 \approx -0,616$; $c \approx 0,886$; $A \approx 0,934$; $B \approx 1,208$ [128, 243].

Таким образом, $F'(0) = a_0$, $G'(0) = b_0$, и для определения из соотношения (12.3.23) значения R_0 необходимо знать возмущения $v_{rz}^{(1)}$ и $v_{\theta z}^{(1)}$ в неподвижной точке O.

Точка B. Аналогично предыдущему подставим $r = 0$, $z = z_0$ в уравнение (12.3.22), положим $z_0 = \tau Z_0$ и проведем разложения в ряды Тейлора вблизи O функций $v_{zz}^{(1)}(0, z_0)$, $v_{rz}^{(1)}(0, z_0)$ и $v_{\theta z}^{(1)}(0, z_0)$. Получим

$$Z_0 = v_{zz}^{(1)}(0,0)\,/(2F'(0))$$

Опять же для того, чтобы определить Z_0, необходимо найти значение возмущения $v_{zz}^{(0)}$ в точке O.

Точка C. На бесконечности функции F, G и H представимы экспоненциальными рядами (12.3.24), поэтому положим $cz_\infty = -\ln(\tau Z_\infty)$ и подставим в (12.3.22) $r = 0$, $z = z_\infty$. Проводя разложения в окрестности бесконечности, получим

$$Z_\infty = \frac{v_{zz}^{(1)}(0,\infty)}{2A}, \qquad z_\infty = -\frac{1}{c}\ln\frac{\tau v_{zz}^{(1)}(0,\infty)}{2A}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаева С.Е.* Нестационарное прямолинейное движение тиксотропной вязко-пластичной жидкости между двумя параллельными бесконечными пластинками // Журн. приклад. мех. и техн. физ. 1966. № 5. С. 146-147.
2. *Адамов А.А.* Кручение вязкоупругого цилиндра из несжимаемого материала при конечных деформациях // Напряжённо-деформированное состояние и прочность конструкций. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1982. С. 61-65.
3. *Айвэни, Хэммит.* Численный анализ явления захлопывания кавитационного пузырька в вязкой сжимаемой жидкости // Тр. амер. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчётов. 1965. Т. 87. № 4. С. 140-150.
4. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В.* «Малость» и асимптотическая малость размерных параметров в задачах механики // Докл. РАН, 2003, Т. 390, № 5, С. 622-626.
5. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Выдавливание вязкопластического материала с малым пределом текучести из плоского конфузора // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 183-197.
6. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А.* Новые несимметричные и многомодовые решения задачи о течении вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН, 2002, т. 383, № 1, с. 46-50.
7. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А.* Течение вязкой жидкости в конфузоре с большим углом раствора // Докл. РАН, 2002, т. 386, № 3, с. 333-337.
8. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Несимметричные и многомодовые конфузорные течения в задаче Джеффри—Гамеля // Вестник МГУ. Сер. Математика и механика, 2003, № 2, с. 29-31.
9. *Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН, 2000, т. 374, № 1, с. 44-48.
10. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Нестеров С.В.* Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ, 2002, т. 66, вып. 5, с. 723-741.
11. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективное численно-аналитическое решение вариационных задач механики // Докл. РАН, 2000, т. 374, № 5, с. 624-627.
12. *Алейников С.М.* Устойчивость неизотермического течения слоя вязкой жидкости по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 4. С. 145-148.

13. *Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1985. 142 с.
14. *Аскаров М.А.* Кавитационное разрушение металлов и полимеров. Тбилиси: Сабчота сакартвело, 1973. 140 с.
15. *Астапов В.Ф., Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Кручение сплошного цилиндра из изотропного упругого материала // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1999. Т. 5. Вып. 2.
16. *Астрахан И.М.* Нестационарное круговое движение вязкопластической жидкости, заключённой между двумя цилиндрами // Изв. ВУЗов. Нефть и газ. 1961. № 4. С. 73-76.
17. *Астрахан И.М.* Устойчивость вращательного движения вязко-пластичной жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами // ПМТФ. 1961. № 2. С. 47-53.
18. *Ашкинази И.Я.* Эритроцит и внутреннее тромбопластинообразование. Л.: Наука, 1977. 154 с.
19. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 255 с.
20. *Баренблатт Г.И., Ишлинский А.Ю.* Об ударе вязкопластического стержня о жёсткую преграду // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 497-502.
21. *Бахшиян Ф.А., Моисеева Р.С.* О некоторых нелинейных задачах движения вязкопластической среды // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностр. 1963. № 3. С. 170-174.
22. *Белкин И.М., Виноградов Г.В., Леонов А.И.* Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-механических характеристик материалов. М.: Машиностроение, 1968. 272 с.
23. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел. Ч. I. Малые деформации. М.: Наука, 1984. 600 с.
24. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел. Ч. II. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
25. *Беломытцев В.П., Гвоздков Н.Н.* О потере тепловой устойчивости движения вязко-пластического материала // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. № 2. С. 305-307.
26. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 352 с.
27. *Богородская В.И., Куропатенко В.Ф.* О захлопывании пузырьков в вязкой сжимаемой жидкости // Тр. IV Всесоюз. семинара по числ. методам мех. вязкой жидкости. Рига, 1972. Новосибирск, 1973. С. 162-169.
28. *Бостанджиян С.А., Столин А.М.* Сложный сдвиг вязко-пластической жидкости между двумя параллельными пластинами // Теоретическая и инструментальная реология. Минск, 1970. С. 107-118.

29. *Брутян М.А., Крапивский П.Л.* Гидродинамика неньютоновских жидкостей // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 4. С. 3-98.
30. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973, 758 с.
31. *Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1997. 288 с.
32. *Виноградов Г.В., Мамаков А.А., Павлов В.П.* Течение аномально-вязких систем при действии двух чистых сдвигов во взаимно-перпендикулярных направлениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 2. С. 362-365.
33. *Вишняков В.И., Макаров А.М.* Нестационарное движение вязкопластичной среды над бесконечной пластинкой // Коллоид. журн. 1973. Т. 35. № 1. С. 3-8.
34. *Воларович М.П.* Исследование реологических свойств дисперсных систем // Коллоид. ж. 1954. Т. 16. № 3. С. 227-240.
35. *Воларович М.П., Лазовская Н.В.* Исследование течения торфа в конических насадках // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. № 2. С. 211-213.
36. *Гавриляченко Т.В., Карякин М.И.* Об особенностях нелинейно-упругого поведения сжимаемых тел цилиндрической формы при кручении // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 188-193.
37. *Гаипова А.Н.* Разностный метод решения задачи об ударе вязкопластического стержня о жёсткую преграду // Инж. ж. МТТ. 1968. № 1. С. 128-130.
38. *Гарифуллин Ф.А., Галимов К.З.* О гидродинамической устойчивости неньютоновских сред // Приклад. механика. 1974. Т. 10. № 8. С. 3-25.
39. *Гасанов Г.Т.* Нестационарное движение вязко-пластичной жидкости между двумя цилиндрами // Докл. АН АзССР. 1962. Т. 18. № 10. С. 21-25.
40. *Гасанов Г.Т., Гасанзаде Н.А., Мирзаджанзаде А.Х.* Сдавливание вязко-пластического слоя круглыми пластинками // ПМТФ. 1961. № 5. С. 88-90.
41. *Георгиевский Д.В.* Вязкопластическое течение Куэтта—Тейлора: распределение жёстких зон и устойчивость // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 101-106.
42. *Георгиевский Д.В.* Достаточные интегральные оценки устойчивости вязкопластического сдвига // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 124-131.
43. *Георгиевский Д.В.* Задача устойчивости квазилинейных течений относительно возмущений функции упрочнения // ПММ. 1999. Т. 63. № 5. С. 826-832.
44. *Георгиевский Д.В.* Интегральные оценки устойчивости нестационарного деформирования трёхмерных тел со сложной реологией // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 2. С. 196-198.
45. *Георгиевский Д.В.* Линеаризованная задача устойчивости вязкопластических тел с произвольным скалярным соотношением // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. 1992. № 6. С. 65-67.

46. *Георгиевский Д.В.* Метод интегральных соотношений в задачах устойчивости нелинейных течений с заданной на границе кинематикой // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 102-113.
47. *Георгиевский Д.В.* Нелинейные изотропные тензор-функции в теории определяющих соотношений // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 4. С. 483-485.
48. *Георгиевский Д.В.* Об устойчивости вращения набора вязкопластических слоёв в центрифугах // Математические методы в механике. М.: Изд-во МГУ, 1990. С. 105-109.
49. *Георгиевский Д.В.* Общие оценки развития возмущений в трёхмерных неоднородных скалярно нелинейных течениях // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 90-97.
50. *Георгиевский Д.В.* Оценки устойчивости нестационарного деформирования вязкопластических тел в плоских областях // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 4. С. 471-473.
51. *Георгиевский Д.В.* Схлопывание кавитационного пузырька в нелинейно-вязких и вязкопластических средах // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 2. С. 181-184.
52. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150-176.
53. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость двумерных и трёхмерных вязкопластических течений и обобщённая теорема Сквайра // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 117-123.
54. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость нестационарного сдвига вязкопластической полуплоскости с тангенциальным разрывом вдоль границы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1996. № 3. С. 65-72.
55. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: Изд-во «УРСС», 1998. 176 с.
56. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования по наборам мер относительно заданных классов возмущений // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 69-92.
57. *Георгиевский Д.В., Кириллов А.С.* Разгон и торможение тяжёлого вязкопластического слоя (ледника) вдоль наклонной плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 112-119.
58. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М.* Энергетический анализ развития кинематических возмущений в слабонеоднородных вязких жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 56-67.
59. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* О конвективной устойчивости жидкости Бингама // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208. № 1. С. 63-65.
60. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Об одном методе исследования пространственных течений вязкопластичных сред // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 150-158.

61. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Плоское течение вязкопластичных сред в узких каналах с деформируемыми стенками // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 23-31.
62. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Течение вязкопластичной среды между круглыми параллельными пластинами при их сближении и удалении // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 9-17.
63. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
64. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 367 с.
65. *Гонор А.Л., Куцаев С.Н.* Исследование соударения вязко-пластического тела с жёсткой преградой при произвольном угле встречи // Научн. тр. Всес. заоч. машиностроит. ин-та. 1976. Т. 38. С. 62-70.
66. *Григорьев В.Г., Дунин С.З., Сурков В.В.* Захлопывание сферической поры в вязкопластическом материале // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 1. С. 199-201.
67. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. В «Механика связанных полей в элементах конструкций». Т. 5. Киев: Наукова думка, 1989. 276 с.
68. *Гузей И.Л., Победря Б.Е.* Микронапряжения и микроконцентрации в композитах // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 64-80.
69. *Гуткин А.М.* Медленное течение вязкопластичной дисперсной среды в коническом и плоском диффузорах при малом угле раствора // Коллоид. ж. 1961. Т. 23. № 3. С. 352.
70. *Гуткин А.М.* Течение вязко-пластичной дисперсной системы на вращающемся диске // Коллоид. ж. 1960. Т. 22. № 5. С. 573-575.
71. *Гуткин А.М.* Течение вязко-пластичной дисперсной системы на вращающемся конусе // Коллоид. ж. 1962. Т. 24. № 3. С. 283-288.
72. *Дайк М. ван.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967, 310 с.
73. *Дементьев О.Н., Карась Е.В.* Устойчивость растяжения прямоугольной полосы // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. Математика и механика. 1991. № 1. С. 121-128.
74. *Демехин Е.А., Шкадов В.Я.* О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 151-154.
75. *Джафарли А.Г.* Нелинейные вязкопластические волны в нитях при их пространственном движении // Докл. АН АзССР. 1986. Т. 42. № 1. С. 16-19.
76. *Дудко А.С.* Влияние стока конечного размера на вращение линейной вязкопластичной среды // Гидромеханика. Киев: Наукова думка, 1989. Т. 59. С. 44-49.
77. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
78. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К.* Устойчивость вязкопластического течения полого толстостенного шара // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1984. № 1. С. 34-38.

79. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Жантаев Ж.Ш.* Устойчивость вязкопластического течения весомой слоистой среды // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1981. № 1. С. 17-23.

80. *Забабихин Е.И.* Заполнение пузырьков в вязкой жидкости // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1129-1131.

81. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.

82. *Заметалин В.В.* Устойчивость ламинарного пограничного слоя степенной неньютоновской жидкости // Журн. приклад. мех. и техн. физ. 1976. № 1. С. 101-106.

83. *Знаменский В.А., Зубов В.П.* Движение вязко-пластической среды в круглой трубе при переменном перепаде давления // Приклад. механика. 1970. Т. 6. № 3. С. 117-121.

84. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О каноническом представлении девиатора симметричного тензора // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 1. С. 44-47.

85. *Иванилов Ю.П.* Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном // ПММ. 1960. Т. 24. № 2. С. 380-381.

86. *Ий Чиа-Шун.* Волновые движения в слоистых средах // Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 271-296.

87. *Ильюшин А.А.* Деформация вязко-пластичного тела // Учён. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3-81.

88. *Ильюшин А.А.* Динамика // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 3. С. 79-87.

89. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.

90. *Ильюшин А.А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ. 1954. Т. 18. № 6. С. 641-666.

91. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч. 1. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.

92. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.

93. *Ильюшин А.А.* Функционалы и меры необратимости на множествах процессов в механике сплошной среды (МСС) // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 1. С. 48-50.

94. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

95. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 6. С. 405-412.

96. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 2. С. 109-130.

97. *Ишлинский А.Ю., Баренблатт Г.И.* Об ударе вязко-пластического стержня о жёсткую преграду // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 4. С. 734-737.

98. *Ишлинский А.Ю., Слепцова Г.П.* К вопросу об ударе вязко-пластического стержня о жёсткую преграду // Прикл. механика. 1965. Т. 1. № 2. С. 1-9.
99. *Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П.* О потенциальной изотропной форме связи соосных тензоров // Приклад. пробл. прочности и пластичности. 1997. № 56. С. 17-22.
100. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. В «Механика связанных полей в элементах конструкций». Т. 4. Киев: Наукова думка, 1988. 318 с.
101. *Кеппен И.В., Родионов С.Ю.* Растяжение сжатие полосы из нелинейного вязкопластического материала // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 97-105.
102. *Кийко И.А.* Теория пластического течения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 75 с.
103. *Ким А.Х., Воларович М.П.* Плоская задача о движении вязко-пластичной дисперсной системы между двумя плоскостями, составляющими острый угол // Коллоид. ж. 1960. Т. 22. № 2. С. 186-194.
104. *Климов Д.М., Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А.* Течение вязкопластической среды с малым пределом текучести в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 1. С. 37-41.
105. *Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.* Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
106. *Коган Л.З., Мольков В.А.* Магнитоэлектрические свойства волокнистых пьезокомпозитов // Изв. РАН. МТТ. 1996. №. 5. С. 62-68.
107. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3-89.
108. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Об оценке параметров нарастающих возмущений в сдвиговых течениях вязкой стратифицированной жидкости // ПММ. 1989. Т. 53. № 3. С. 522-525.
109. *Колбовский Ю.Я., Шанин Н.П., Хранин В.Н.* К вопросу о течении неньютоновской жидкости в коническом и плоском диффузорах // Научн. тр. Ярослав. технол. ин-та. 1972. Т. 31. С. 102-106.
110. *Колмогоров В.Л., Колмогоров Г.Л.* Течение вязкопластической смазки при волочении в режиме гидродинамического трения // Изв. вузов. Чёрная металлургия. 1968. № 2. С. 67-72.
111. *Конев С.В.* Гидродинамическая изотермическая задача качения цилиндрических поверхностей со скольжением при пластической смазке // Проблемы трения и изнашивания. Киев: Техніка, 1986. Вып. 30. С. 16-18.
112. *Котова Л.И.* Теория качения цилиндра по поверхности, покрытой слоем вязко-пластичной смазки // Ж. техн. физ. 1957. Т. 27. № 7. С. 1540-1557.
113. *Котова Л.И., Дерягин Б.В.* Теория качения цилиндра по поверхности, покрытой слоем пластичной смазки // Ж. техн. физ. 1957. Т. 27. № 6. С. 1261-1271.

114. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.

115. *Кружков С.Н.* О некоторых задачах с неизвестной границей для уравнения теплопроводности // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1009-1020.

116. *Кузин П.А.* Продольный удар по вязко-пластическому стержню // Инж. ж. МТТ. 1968. № 5. С. 94-97.

117. *Лазовская Н.В.* Исследование кинематики течения дисперсных систем (торфа, консистентных смазок и т. п.) в конических насадках // Коллоид. ж. 1949. Т. 11. № 2. С. 77-83.

118. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

119. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

120. *Лапушина Б.И., Ким А.Х.* Приближённое решение задачи стационарного изотермического течения вязкопластической среды в плоском параболическом диффузоре вариационным методом // Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйша школа, 1975. Вып. 1. С. 17-20.

121. *Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрина Н.Х.* Реология крови. М.: Медицина, 1982. 272 с.

122. *Ленский Э.В.* О групповых свойствах уравнения движения нелинейной вязкопластической среды // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1966. № 5. С. 116-125.

123. *Леонова Э.А.* Групповая классификация и инвариантные решения уравнений течения и теплообмена вязко-пластической среды // ПМТФ. 1966. № 4. С. 3-18.

124. *Леонова Э.А.* Инвариантные свойства уравнений термовязкопластичности с неполной информацией о свойствах среды // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1993. Ч. 1. С. 55-87.

125. *Лещий Н.П.* Переход от ламинарного к ткрбулентному режиму течения для нелинейных вязкопластичных жидкостей // Гидравлика и гидротехника. Киев, 1981. Вып. 33. С. 81-86.

126. *Листров А.Т., Чернышёв А.Д.* Об установившемся течении вязко-пластической среды при нелинейной вязкости // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 4. С. 805-807.

127. *Литвинов А.И.* Полуэмпирическое описание турбулентности вязкопластичных жидкостей // Изв. АН УзССР. Сер. техн. 1975. № 5. С. 46-50.

128. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

129. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981, 398 с.

130. *Лохин В.В.* Общие формы связи между тензорными полями в анизотропной сплошной среде, свойства которой описываются векторами, тензорами второго ранга и антисимметричными тензорами третьего ранга // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 6. С. 1282-1285.

131. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. № 3. С. 393-417.

132. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

133. *Ляхов Г.М., Султанов К.С.* Вопросы подобия и дисперсии волн в вязкопластических средах // Журн. приклад. мех. и техн. физ. 1975. № 6. С. 86-93.

134. *Магомедов О.Б., Победря Б.Е.* Некоторые задачи вязкоупругопластического течения // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 4. С. 152-169.

135. *Макаров А.М., Сальников В.Г.* Нестационарное сдвиговое течение вязкопластической среды // Журн. приклад. мех. и техн. физ. 1972. № 4. С. 133-137.

136. *Макаров А.М., Сальников В.Г., Трусова Т.Ф.* Обратная задача о нестационарном градиентном течении пластика Шведова–Бингама в плоском канале и цилиндрической трубе // Инж.-физич. журн. 1973. Т. 24. № 4. С. 725-729.

137. *Малышев Б.М.* Кручение трубок при ступенчатом изменении крутящего момента в процессе непрерывного растяжения // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии. 1958. № 2. С. 33-46.

138. *Малышев Б.М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии. 1958. № 1. С. 55-68.

139. *Мальков В.М.* Зависимость тензоров напряжений и деформаций в нелинейной теории упругости // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 1996. № 4. С. 83-86.

140. *Мальков В.М.* Нелинейный закон упругости для тензора условных напряжений и градиента деформации // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 91-98.

141. *Мамаков А.А., Тябин Н.В., Виноградов Г.В.* Применение теории подобия к расчёту процессов течения пластичных смазок в трубах // Коллоид. ж. 1959. Т. 21. № 2. С. 208-215.

142. *Матвеевский Р.М., Лахши В.Л., Буяновский И.А. и др.* Смазочные материалы: Антифрикционные и противоизносные свойства. Методы испытаний. М.: Машиностроение, 1989. 217 с.

143. *Мехтиев А.К.* О сжатии ударом цилиндрического образца при нелинейной зависимости напряжения от скорости деформации // Статические и динамические задачи теории упругости и пластичности. Баку: Изд-во АзССР, 1968. С. 90-95.

144. *Михайлов Н.В., Ребиндер П.А.* О структурно-механических свойствах дисперсных и высокомолекулярных систем // Коллоид. ж. 1955. Т. 17. №2. С. 107-119.

145. *Мовчан А.А.* Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел // Arch. Mech. Stosow. 1963. V. 15. № 5. S. 659-682.

146. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988-1001.

147. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.

148. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жёстко-вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1971. 114 с.

149. *Мясников В.П.* О сдавливании вязко-пластического слоя жёсткими плитами // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 4. С. 92-96.

150. *Мясников В.П.* Течение вязко-пластической среды при сложном сдвиге // ПМТФ. 1961. № 5. С. 76-87.

151. *Назаров А.Н.* Основы математического моделирования процессов трения и вовлечения при движении потоков лавинного типа // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1995. № 4. С. 79-85.

152. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

153. *Никитенко А.Ф.* О формах связи между двумя несоосными тензорами второго ранга (случай плоской деформации или плоского напряжённого состояния) // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 2. С. 135-140.

154. *Никитин Л.В., Токбергенов Дж.Б.* Взаимодействие с матрицей вязко-пластической динамически деформируемой нити // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1974. № 3. С. 58-61.

155. *Новожилов В.В.* О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // ПММ. 1963. Т. 27. № 5. С. 794-812.

156. *Нуриев Б.Р.* Поперечный удар конусом по вязкопластической нити с большими скоростями // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-хим. и мат. н. 1986. Т. 7. № 3. С. 58-63.

157. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 416 с.

158. *Павлов К.Б., Романов А.С., Симхович С.Л.* Гидродинамическая неустойчивость пуазейлева течения неньютоновской вязкопластической жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 6. С. 152-154.

159. *Павлов К.Б., Романов А.С., Симхович С.Л.* Гидродинамическая устойчивость течения Гартмана неньютоновской вязкопластической жидкости // Магнитн. гидродинамика. 1974. № 4. С. 43-46.

160. *Павлов К.Б., Романов А.С., Симхович С.Л.* Устойчивость пуазейлева течения вязкопластической жидкости по отношению к возмущениям конечной амплитуды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 166-169.

161. *Пановко Я.Г.* Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. М.: Наука, 1985. 288 с.
162. *Петров А.Г.* О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей. Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 12-19.
163. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 483-488.
164. *Петров А.Г.* Плоская задача о выдавливании вязкопластичной среды параллельными пластинами под действием постоянной силы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 608-617.
165. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 214 с.
166. *Победря Б.Е.* Модели механики сплошной среды // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 47-59.
167. *Победря Б.Е.* О моделях повреждаемости реономных сред // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 128-148.
168. *Победря Б.Е.* О фракталах в механике // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 2000. № 1. С. 40-44.
169. *Победря Б.Е.* Принципы вычислительной механики композитов // Механика композитных материалов. 1996. Т. 32. № 6. С. 729-746.
170. *Победря Б.Е.* Сложное нагружение слоистых композитов // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С.
171. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 335 с.
172. *Победря Б.Е., Гузей И.Л.* Математическое моделирование деформирования композитов с учётом термодиффузии // Математическое моделирование систем и процессов. 1998. № 6. С. 82-91.
173. *Приказчиков Г.П.* Об устойчивости течения вязко-пластической среды между плоскостями со щелью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1964. № 3. С. 51-55.
174. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
175. *Рамберг Х.* Сила тяжести и деформации в земной коре. М.: Недра, 1985. 399 с.
176. *Расулов Т.М.* Решение смешанной задачи для линеаризованной системы уравнений движения вязкопластических сред // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 9. С. 1610-1617.
177. *Ребиндер П.А., Сегалова Е.Е.* Исследование упруго-пластично-вязких свойств структурированных дисперсных систем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. № 1. С. 85-88.
178. *Регирер С.А.* Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971.
179. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.

180. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 592 с.
181. *Савельев Б.А.* Гляциология. М.: Изд-во МГУ, 1991. 288 с.
182. *Савельев Б.А., Латалин Д.А.* Искусственные ледяные платформы // Итоги науки и техники. Сер. Океанология. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 7. С. 3-193.
183. *Савін Г.М., Рущицький Я.Я.* Елементи механіки спадкових середовищ. Киев: Вища школа, 1976. 251 с.
184. *Сагомонян А.Я.* Дождевая эрозия почвы на склоне возвышенности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2000. № 4. С. 28-34.
185. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
186. *Сафрончик А.И.* Вращение цилиндра с переменной угловой скоростью в вязкопластической среде // ПММ. 1959. Т. 23. № 6. С. 1051-1056.
187. *Сафрончик А.И.* Неустановившееся течение вязкопластического материала в круглой трубе // ПММ. 1960. Т. 24. № 1. С. 149-153.
188. *Сафрончик А.И.* Неустановившееся течение вязкопластичного материала между параллельными стенками // ПММ. 1959. Т. 23. № 5. С. 925-935.
189. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1994. 528 с.
190. *Семёнов Н.В.* Биохимические компоненты и константы жидких сред и тканей человека. Справочник. М.: Медицина, 1971. 150 с.
191. *Сериков С.В.* Нестационарное растяжение вязкопластической прямолинейной полосы // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1981. Вып. 49. С. 100-106.
192. *Сериков С.В.* Об устойчивости течения плоского пластического кольца со свободными границами // ПМТФ. 1975. № 2. С. 94-101.
193. *Симхович С.Л., Романов А.С., Ионочкина Л.И.* Гидродинамическая устойчивость плоского градиентного течения обобщённой нелинейной вязкопластической жидкости // Инж.-физ. ж. 1983. Т. 45. № 1. С. 60-64.
194. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределёнными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
195. *Слободкин А.М.* Об особенностях понятия устойчивости равновесия в смысле Ляпунова для систем с бесконечным числом степеней свободы // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 38-46.
196. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
197. *Сугак М.Б.* Движение вязко-пластичной массы между двумя коаксиальными конусами // Инж.-физ. ж. 1966. Т. 11. № 6. С. 802-808.
198. *Тихонов В.П., Гуляев С.А., Семенюта С.С.* О разрыве слоя вязко-пластической жидкости между двумя поверхностями // Коллоид. ж. 1993. Т. 55. № 4. С. 104-109.
199. *Токбергенов Дж.Б.* Динамическое деформирование вязко-пластической нити // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1973. № 1. С. 72-76.

200. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
201. *Тябин Н.В.* О подобии потоков вязко-пластической жидкости // Коллоид. журн. 1952. Т. 14. № 4. С. 270-273.
202. *Тябин Н.В.* Реодинамическая теория вязко-пластической смазки // Тр. Казан. сельхоз. ин-та. 1958. Вып. 39. С. 132-150.
203. *Тябин Н.В.* Течение вязко-пластической жидкой дисперсной системы в диффузоре и погружение клина в дисперсную систему // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. № 5. С. 943-946.
204. *Тябин Н.В., Пудовкин М.А.* Течение вязко-пластической дисперсной системы в коническом диффузоре // Докл. АН СССР. 1953. Т. 92. № 1. С. 53-56.
205. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
206. *Фройштетер Г.Б., Накорчевский А.И., Синицын В.В., Цецохо Э.И.* Потеря устойчивости ламинарной формы движения при течении пластичных смазок в капиллярах // Прикладная реология. Минск: Изд-во ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1970. Т. 2. С. 135-146.
207. *Хокке У.* Движение двух слоёв вязких несжимаемых жидкостей на наклонной плоскости под действием силы тяжести. Исследование гидродинамической устойчивости // Динамические задачи механики сплошных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. С. 112-119.
208. *Черников А.К.* Вариационные методы решения задач о вязкопластическом течении соляных пород // Изв. вузов. Горный ж. 1985. № 10. С. 29-33.
209. *Черных К.Ф.* О формах связи между симметричными тензорами второго ранга в механике сплошных сред // Изв. РАН. МТТ. 1967. № 3. С. 42-51.
210. *Чернышов А.Д.* О движении вязко-пластической среды внутри двугранного угла // Прикл. механика. 1971. Т. 7. № 1. С. 120-124.
211. *Чернышов А.Д.* О течениях в клине вязко-пластической среды с нелинейной вязкостью // ПМТФ. 1966. № 4. С. 152-154.
212. *Чернышов А.Д.* Установившееся течение вязко-пластической среды между двумя соосными конусами и внутри двугранного угла // ПМТФ. 1970. № 5. С. 93-99.
213. *Чижевский А.Л.* Электрические и магнитные свойства эритроцитов. Киев: Наукова думка, 1973. 93 с.
214. *Шапиро Г.С., Шачнев В.А.* О динамическом поведении вязко-пластического тела, обладающего необратимой вязкостью // Волны в неупругих средах. Кишинёв: Изд-во МолдССР, 1970. С. 215-220.
215. *Шихалиев Ф.А.* О параметрах подобия при движении вязко-пластичных жидкостей в трубах // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 153-154.

216. *Шкадов В.Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43-51.
217. *Шкадов В.Я.* Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во МГУ. Институт механики, 1973. № 25. 192 с.
218. *Эглит М.Э.* Динамика снежных лавин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 186. С. 162-167.
219. *Яблонский В.О., Тябин Н.В., Ящук В.М.* Применение вязкопластичных смазок в гидростатических опорах с целью улучшения их основных эксплуатационных характеристик // Вестн. машиностр. 1995. № 3. С. 11-14.
220. *Akinola A.* An energy function for transversely-isotropic elastic material and the Poynting effect // Korean J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 6. No. 3. P. 639-649.
221. *Alexandru S.* Caracterizarea tranziţiei de la regimul laminar la cel turbulent de curgere pentru fluide nenewtoniene // Rev. Chim. 1993. V. 44. No. 7. P. 676-682.
222. *Anand L., Kim K.H., Shawki T.G.* Onset of shear localization in viscoplastic solids // J. Mech. and Phys. Solids. 1987. V. 35. No. 4. P. 407-429.
223. *Atkinson C., El-Ali K.* Some boundary value problem for the Bingham model // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1992. V. 41. No. 3. P. 339-363.
224. *Baranger J., Guillopé C., Saut J.-C.* Mathematical analysis of differential models for viscoelastic fluids // Départ. de Mathématiques. Univ. Paris XII — Val de Marne. Prépubl. No. 06-96. 40 p.
225. *Basuroychowdhury I.N., Voyiadjis G.Z.* A plasticity model for multiaxial cyclic loading and ratchetting // Acta Mechanica. 1998. V. 126. No. 1. P. 19-35.
226. *Batra R.C., dell'Isola F., Ruta G.C.* Generalized Poynting effects in prismatic bars // J. Elasticity. 1998. V. 50. No. 2. P. 181-196.
227. *Bejda J., Wierzbicki T.* Dispersion of small amplitude stress waves in pre-stressed elastic, visco-plastic cylindrical bars // Quart. Appl. Math. 1966. V. 24. No. 1. P. 63-71.
228. *Benjamin T.B., Ellis A.T.* Self-propulsion of asymmetrically vibrating bubbles // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. No. 1. P. 65-80.
229. *Beverly C.R., Tanner R.I.* Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1992. V. 42. No. 1-2. P. 85-115.
230. *Bird R.B., Dai G.C., Yarusso B.J.* The rheology and flow of viscoplastic materials // Rev. Chem. Engng. 1982. V. 1. No. 1. P. 1-70.
231. *Bittleston S.H., Hassager O.* Flow of viscoplastic fluids in a rotating concentric annulus // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1992. V. 42. No. 1-2. P. 19-36.
232. *Blinowski A., Rychlewski J.* Pure shears in the mechanics of materials // Math. and Mech. Solids. 1998. V. 3. No. 4. P. 471-503.
233. *Borodich F.M., Onishchenko D.A.* Similarity and fractality in the modelling of roughness by a multilevel profile with hierarchical structure // Internat. J. Solids Struct. 1999. V. 36. No. 17. P. 2585-2612.

234. *Bukowski R., Wojewòdzki W.* Dynamic buckling of viscoplastic spherical shell // Intern. J. Solids and Structures. 1984. V. 20. No. 8. P. 761-776.
235. *Burgess S.L., Wilson S.D.R.* Spin-coating of a viscoplastic material // Phys. Fluids. 1996. V. 8. No. 9. P. 2291-2297.
236. *Burns T.J.* Similarity and bifurcation in unstable viscoplastic solids // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. No. 1. P. 314-329.
237. *Camenschi G., Cristescu N., Şandru N.* Development in highspeed viscoplastic flow through conical converging dies // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. No. 3. P. 566-570.
238. *Chaboche J.L.* Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches // Europ. J. Mech. Ser. A. Solids. 1994. V. 13. No. 4. P. 501-518.
239. *Chakrabarti R.K., Harker R.J.* Frictional resistance of a radially-loaded journal bearing with grease lubrication // Lubricat. Engng. 1960. V. 16. No. 6. P. 274-280.
240. *Charm S.E., Kurland G.S.* Blood flow and microcirculation. N.-Y.: Wiley, 1974.
241. *Chen M., Chen Z.* Second-order effect of an elastic circular shaft during torsion // Appl. Math. Mech. 1991. V. 12. P. 769-776.
242. *Chhabra R.P., Uhlherr P.H.T.* Static equilibrium and motion of spheres in viscoplastic liquids // Encyclopedia of Fluid Mechanics. V. 7. Rheology and Non-Newton. Flows. Houston: Gulf. Publ., 1988. P. 611-633.
243. *Cochran W.G.* The flow due to a rotating disk // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1934. V. 30. P. 365-375.
244. *Cokelet G.R.* In: Biomechanics. Its Foundations and Objectives. N.-Y.: Englewood Cliffs, 1972. P. 63.
245. *Coles D.* Transition in circular Couette flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. P. 385-425.
246. *Cristescu N., Suliciu J.* Viscoplasticitate. Bucureşti: Ed. tehn. 1976. 304 p.
247. *Delobelle P., Robinet P., Bocher L.* Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel // Internat. J. Plasticity. 1995. V. 11. No. 4. P. 295-330.
248. *Doyle T.C., Ericksen J.L.* Nonlinear elasticity // Advances in Applied Mech. 1956. V. 4. P. 53-115.
249. *Drazin P.G.* On stability of parallel flow of an incompressible fluid with variable density and viscosity // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1962. V.58. P. 649-661.
250. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamical stability. Cambridge Univ. Press, 1981. 525 p.
251. *Eagles P.M.* The stability of a family of Jeffery—Hamel solutions for divergent channel flow // J. Fluid Mech., 1966, v. 24, no. 1, p. 199-207.
252. *Ericksen J.L.* Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body // ZAMP. 1954. Bd. 5. No. 6. P. 466-489.
253. *Fan Chun.* Flow of viscoplastic fluid on a rotating disk // Appl. Math. and Mech. 1994. V. 15. No. 5. P. 447-453.

254. *Fasano A., Primicerio M.* Viscoplastic impact of a rod on a wall // Bol. Unione mat. ital. 1975. T. 11. No. 3. P. 531-553.
255. *Florence A.L.* Buckling of viscoplastic cylindrical shells due to impulsive loading // AIAA Journal. 1968. V. 6. No. 3. P. 532-537.
256. *Florence A.L., Abrahamson G.R.* Critical velocity for collapse of viscoplastic cylindrical shells without buckling // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. No. 1. P. 89-94.
257. *Fogler H.S., Goddard J.D.* Collapse of spherical cavities in viscoelastic fluids // Phys. Fluids. 1970. V. 13. No. 5. P. 1135-1141.
258. *Frigaard I.A., Howison S.D., Sobey I.J.* On the stability of Poiseuille flow of a Bingham fluids // J. Fluid Mech. 1994. V. 263. P. 133-150.
259. *Fung Y.T.* Non-axisymmetric instability of a rotating layer of fluid // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 83-90.
260. *Georgievskii D.V.* Isotropic non-linear tensor functions in the theory of constitutive relations // J. Math. Sci. 2002. V. 112. No. 5. P. 4498-4516.
261. *Georgievskii D.V.* Viscoplastic stratified composites: shear flows and stability // Computers and structures. 2000. V. 76. P. 205-210.
262. *Green A.E.* A note on second-order effects in the torsion of incompressible cylinders // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1954. V. 50. No. 3. P. 488-490.
263. *Green A.E., Shield R.T.* Finite extension and torsion of cylinders // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1951. Ser. A244. P. 47-86.
264. *Hamel G.* Spiralformige Bewegungen zahen Flussigkeiten // Jahr.- Ber. Deutsch. Math. Ver., 1917, b. 25, s. 34-60.
265. *Hanks R.W.* The laminar-turbulent transition for fluids with a yield stress // AIChE J. 1963. V. 9. No. 3. P. 306-309.
266. *Hanks R.W., Ricks B.L.* Laminar-turbulent transition in flow of pseudoplastic fluids with yield stresses // J. Hydronaut. 1974. V. 8. No. 4. P. 163-166.
267. *Hlaváček I., Nečas J.* On inequalities of Korn's type. Pt. 1 // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1970. V. 36. No. 4. P. 305-311.
268. *Hlaváček I., Nečas J.* On inequalities of Korn's type. Pt. 2 // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1970. V. 36. No. 4. P. 312-334.
269. *Ionescu I.R., Sofonea M.* Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity. N.-Y.: Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1993. 288 p.
270. *Jaric J.P.* On the gradients of the principal invariants of a second-order tensor // J. Elasticity. 1996. V. 44. No. 3. P. 285-287.
271. *Jaric J.P.* On the representation of symmetric isotropic 4-tensors // J. Elasticity. 1998. V. 51. No. 1. P. 73-79.
272. *Jeffery G.B.* The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil. Mag., 1915, ser. 6, v. 29, no. 172, p. 455-465.

273. *Jemioło S.* Some coments on representation of vector-valued isotropic function // Mech. teor. i stosow. 1993. V. 31. No. 1. P. 121-125.
274. *Jenekhe S.A., Schuldt S.B.* Flow and film thickness of Bingham plastic liquids on a rotating disk // Chem. Engng. Communs. 1985. V. 33. No. 1-4. P. 135-147.
275. *Jiang Y., Sehitoglu H.* Cyclic ratchetting of 1070 steel under multiaxial stress states // Internat. J. Plasticity. 1994. V. 10. No. 5. P. 579-608.
276. *Joseph D.D.* Eigenvalue bounds for the Orr—Sommerfeld equation. Part 1 // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. P. 617-621.
277. *Joseph D.D.* Eigenvalue bounds for the Orr—Sommerfeld equation. Part 2 // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. P. 721-734.
278. *Kármán Th.* Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. V. 1. P. 233-252.
279. *Kelly J.M., Wierzbicki T.* Motion of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact // ZAMP. 1967. B. 18. No. 2. S. 236-246.
280. *Knowels J.K.* On the representation of the elasticity tensor for isotropic materials // J. Elasticity. 1995. V. 39. No. 2. P. 175-180.
281. *Ladyzhenskaya O.A., Seregin G.A.* On a global stability of the two-dimensional viscoplastic flows // Jyväskylä — St.Petersburg Seminar on Partial Differ. Equat. and Numer. Meth. Rept. 56. Univ. Jyväskylä, 1993. P. 43-52.
282. *Ladyzhenskaya O.A., Seregin G.A.* On semigroups generated by initial-boundary value problems describing two-dimensional viscoplastic flows // Nonlinear Evolution Equations. AMS Transl. Ser. 2. V. 164. AMS. Providence, 1995. P. 99-123.
283. *Lainé E., Vallée C., Fortuné D.* Nonlinear isotropic constitutive laws: choise of the three invariants, convex potentials and constitutive inequalities // Internat. J. Engng. Sci. 1999. V. 37. No. 15. P. 1927-1941.
284. *Lanos C., Dustens A.* Rhéométrie des écoulements entre plateaux parallèles: Réflexions // Europ. J. Mech. Engng. 1994. V. 39. No. 2. P. 77-89.
285. *Leroy Y.M., Molinari A.* Stability of steady states in shear zones // J. Mech. and Phys. Solids. 1992. V. 40. No. 1. P. 181-212.
286. *Man C.-S.* On the constitutive equations of some weakly-textured materials // Arch. Rational. Mech. Anal. 1998. V. 143. No. 1. P. 77-103.
287. *Man C.-S.* Remarks on the continuity of the scalar coefficients in the representation $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}) = \alpha \boldsymbol{I} + \beta \boldsymbol{A} + \gamma \boldsymbol{A}^2$ for isotropic tensor functions // J. Elasticity. 1994. V. 34. No. 3. P. 229-238.
288. *Matsumoto S., Takashima Y., Kamlya T., Kayano A., Ohta Y.* Film thickness of a Bingham liquid on a rotating disk // Industr. and Engineer. Chem. Fundamentals. 1982. V. 21. No. 3. P. 198-202.
289. *McDowell D.L.* Description of nonproportional cyclic ratchetting behavior // Europ. J. Mech. Ser. A. Solids. 1994. V. 13. No. 5. P. 593-604.

290. *McDowell D.L.* Stress state dependence of cyclic ratchetting behavior of two rail steels // Internat. J. Plasticity. 1995. V. 11. No. 4. P. 397-421.
291. *Millsaps K., Pohlhausen K.* Thermal distributions in Jeffery–Hamel flows between nonparallel plane walls // J. Aeronaut. Sci., 1953, v. 20, no. 3, p. 187-196.
292. *Mizuno M., Mima Y., Abdel-Karim M., Ohno N.* Uniaxial ratchetting of 316FR steel at room temperature. Part I. Experiments // J. Engng. Materials and Technology. 2000. V. 122. No. 1. P. 29-34.
293. *Molinari A., Clifton R.J.* Analytical characterization of shear localization in thermoviscoplastic materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1987. V. 54. No. 4. P. 806-812.
294. *Nakamura M., Sawada T.* A $k-\varepsilon$ model for the turbulent analysis of Bingham plastic fluid // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1986. B52. No. 479. P. 2544-2551.
295. *Nakamura M., Sawada T.* Theoretical study on turbulence transition of Bingham plastic fluid in a pipe // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1985. B51. No. 465. P. 1642-1647.
296. *Nicholson D.W.* Adiabatic temperature rise in a viscoplastic rod under impact // Mech. Res. Commun. 1984. V. 11. No. 5. P. 317-327.
297. *Noll W.* A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media // Arch. Rat. Mech. Anal. 1958. V. 2. P. 197-226.
298. *Noll W.* A new mathematical theory of simple materials // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 48. No. 1. P. 1-50.
299. *Noll W.* Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 27. No. 1. P. 1-32.
300. *Nowacki W.K.* On the dynamics description of the rock failure process // Arch. mech. stosow. 1986. V. 38. No. 1-2. S. 25-37.
301. *Ohno N., Abdel-Karim M.* Uniaxial ratchetting of 316FR steel at room temperature. Part II. Constitutive modeling and simulation // J. Engng. Materials and Technology. 2000. V. 122. No. 1. P. 35-41.
302. *Orszag S.A.* Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. No. 4. P. 689-703.
303. *Osterle J.F., Charnes A., Saibel E.* The rheodynamic squeezefilm // Lubricat. Engng. 1956. V. 12. No. 1. P. 33-36.
304. *Pascal J.P., Rasmussen H.* Stability of power law fluid flow between rotating cylinders // Dynamics and Stability of Syst. 1995. V. 10. No. 1. P. 65-93.
305. *Paslay P.R., Slibar A.* Criterion for flow of a Bingham plastic between two cylinders loaded by torque and pressure gradient // J. Appl. Mech. 1958. V.25. No. 2. P. 284-285.
306. *Paslay P.R., Slibar A.* Laminar flow of drilling mud due to axial pressure gradient and external torque // J. Petrol. Technology. 1957. V. 9. No. 11. P. 310-317.
307. *Pericak-Spector K.A., Spector S.J.* On the representation theorem for linear, isotropic tensor functions // J. Elasticity. 1995. V. 39. No. 2. P. 181-185.

308. *Pinarbasi A., Liakopoulos A.* Stability of two-layer Poiseuille flow of Carreau-Yasuda and Bingham-like fluids // J. Non-Newton. Fluid. Mech. 1995. V. 57. No. 2-3. P. 227-241.
309. *Podlubny I.* Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Mathematics in Science and Engineering. V. 198. San Diego: Academic Press, 1999. 340 p.
310. *Poritsky H.* The collapse or growth of a spherical bubble in a viscous fluid // Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1951. Ann Arbor, Mich., 1951. P. 812-821.
311. *Poynting J.H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted // Proc. Roy. Soc. London. 1909. Ser. A82. P. 546-559.
312. *Poynting J.H.* On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distorsional waves in steel // Proc. Roy. Soc. London. 1912. Ser. A86. P. 534-561.
313. *Raffai R., Laure P.* The influence of an axial mean flow on the Couette—Taylor problem // European J. Mech. B. Fluids. 1993. V. 12. No. 3. P. 277-288.
314. *Rajagopal K.R., Wineman A.* A constitutive equation for non-linear electro-active solids // Acta Mech. 1999. V. 135. No. 3-4. P. 219-228.
315. *Ratnawan H.P.* Unsteady flow of Bingham plastic between two fixed coaxial cylinders under time dependent pressure gradient // Deform. Sci. J. 1970. V. 20. No. 4. P. 213-218.
316. *Rivkind L., Solonnikov V.A.* Jeffery—Hamel asymptotics for steady state Navier—Stokes flow in domains with sector-like outlets to infinity // J. Math. Fluid Dynamics, 2000, v. 2, no. 4, p. 324-352.
317. *Rivlin R.S., Ericksen J.L.* Stress-deformation relations for isotropic materials // Journal of Rational Mech. and Analysis. 1955. V. 4. No. 2. P. 323-425.
318. *Rosakis P.* Characterization of convex isotropic functions // J. Elasticity. 1997/98. V. 49. No. 3. P. 257-267.
319. *Rosenhead L.* The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls // Proc. Soc. London, ser. A, 1940, v. 175, p. 436-467.
320. *Ryskin G.* Dynamics and sound emission of a spherical cavitation bubble in a dilute polymer solution // J. Fluid Mech. 1990. V. 218. P. 239-263.
321. *Sherwood J.D., Durban D.* Squeeze flow of a power-law viscoplastic solid // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1996. V. 62. No. 1. P. 35-54.
322. *Šilhavý M.* The mechanics and thermodynamics of continuous media. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 504 p.
323. *Smith G.F., Bao G.* Isotropic invariants of traceless symmetric tensors of orders three and four // Internat. J. Engng. Sci. 1997. V. 35. No. 15. P. 1457-1462.

324. *Squire H.B.* On stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1933. V. 142. No. 847. P. 621-628.
325. *Storakers B.* Plastic and visco-plastic instability of a thin tube under internal pressure, torsion and axial tension // Intern. J. Mech. Sci. 1968. V. 10. No. 6. P. 519-529.
326. *Surguladze T.A.* On certain applications of fractional calculus to viscoelasticity // J. Math. Sci. 2002. V. 112. No. 5. P. 4517-4557.
327. *Symonds P.S., Ting T.C.T.* Longitudinal impact on viscoplastic rods: approximate methods and comparisons // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31. No. 4. P. 611-620.
328. *Synge J.L.* Hydrodynamical stability // Semicentenn. Publ. Amer. Math. Soc. 1938. V. 2. P. 227-269.
329. *Ting T.C.T., Symonds P.S.* Impact on rods of non-linear viscoplastic material — numerical and approximate solutions // Intern. J. Solids and Structures. 1967. V. 3. No. 4. P. 587-605.
330. *Tugcu P., Neale K.W.* Analysis of neck propagation in polymeric fibres including the effects of viscoplasticity // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. 1988. V. 110. No. 4. P. 395-400.
331. *Vardoulakis I.G.* Stability and bifurcation in geomechanics // Proc. 6th Intern. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics. Innsbruck, 1988. V. 1. Rotterdam; Brookfield: Baekema, 1988. P. 155-168.
332. *Vinogradov G.V., Mamakov A.A.* Flow of greases under the action of complex shear // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1968. V. 90. No. 3. P. 604-607.
333. *Walicki E., Walicka A.* An approximate analysis for conical flow of viscoplastic fluids // Zecz. nauk. Bud. WSI Zielonej Gorze. 1994. No. 106. S. 197-217.
334. *Wang L.L.* A criterion of thermo-viscoplastic instability for adiabatic shearing // Proc. Intern. Symp. on Intense Dynam. Loading and Effects. Beijing, 1986. Oxford, 1988. P. 787-792.
335. *Wang P.G., Wang Z.D.* The analysis of stability of Bingham fluid flowing down an inclined plane // Appl. Math. and Mech. 1995. V. 16. No. 10. P. 1013-1018.
336. *Wertheim G.* Mémoire sur la torsion. Première Partie. // Annales de Chimie et de Physique. 1857. Sér. 50. P. 195-321.
337. *Wertheim G.* Mémoire sur la torsion. Deuxième Partie. // Annales de Chimie et de Physique. 1857. Sér. 50. P. 385-431.
338. *Whitmore R.L.* Rheology of the circulation. London: Pergamon Press, 1968.
339. *Williams R.A., Malvern L.E.* Harmonic dispersion analysis of incremental waves in uniaxially prestressed plastic and viscoplastic bars, plates, and unbounded media // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. No. 1. P. 59-64.
340. *Wojewòdzki W.* Buckling of short viscoplastic cylindrical shells subjected to radial impulse // Intern. J. Non-Linear Mech. 1973. V. 8. No. 4. P. 325-343.

341. *Wojewódzki W., Lewiński P.* Viscoplastic axisymmetrical buckling of spherical shell impulse subjected to radial pressure // Engng. Struct. 1981. V. 3. No. 3. P. 168-174.
342. *Wu C.W., Sun H.X.* A new hydrodynamic lubrication theory for bilinear rheological fluids // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1995. V. 56. No. 3. P. 253-256.
343. *Yih C.-S.* Note on eigenvalue bounds for the Orr—Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. P. 273-278.
344. *Yih C.-S.* Wave velocity in parallel flows of a viscous fluid // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. No. 4. P. 703-708.
345. *Zheng Q.-S.* A note on representation for isotropic functions of 4th-order tensors in 2-dimensional space // ZAMM. 1994. V. 74. No. 8. P. 357-359.
346. *Zheng Q.-S.* Two-dimensional tensor function representation for all kinds of material symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1993. Ser. A443. No. 1917. P. 127-138.
347. *Zwick K.J., Ayyaswamy P.S., Cohen I.M.* Variational analysis of the squeezing flow of a yield stress fluid // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1996. V. 63. No. 2-3. P. 179-199.

Klimov D.M.

Viscoplastic flows dynamic chaos, stability, mixing / D.M. Klimov, A.G. Petrov, D.V. Georgievskii [ed. by I.G. Goryacheva] ; Institute for Problems of Mechanics. – M. Nauka, 2005. – 394 p. – ISBN 5-02-032945-2.

The monograph summarizes the modern theory of viscoplastic flows, which has been developed during the twentieth century into an independent section of hydromechanics and solid mechanics. Along with both the classical formulations of initial-boundary value problems and the exact stationary solutions, the new directions in investigation of viscoplastic flows, developing due to progress in computer simulation, are analysed in detail. They include non-steady and transient regimes, dynamical chaos, hydrodynamical stability, and mixing.

The monograph is destined for specialists in continuum mechanics, scientific workers, postgraduates and students who study hydromechanics and solid mechanics.

Научное издание

Климов Дмитрий Михайлович
Петров Александр Георгиевич
Георгиевский Дмитрий Владимирович

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

Динамический хаос, устойчивость, перемешивание

Утверждено к печати Ученым советом Института проблем механики Российской академии наук

Зав. редакцией *Н.А. Степанова*
Редактор *В.В. Ященко*
Художник *Ю.И. Духовская*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*

Компьютерный набор и верстка произведены *М.Н. Зариповым*

Подписано к печати 23.05.2005. Формат 70 × 100
Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Усл.печ.л. 32,5. Усл.кр.-отт. 33,0. Уч.-изд.л. 24,0
Тип. зак. 4120

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
Internet: www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12