

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ – УПИ»**

**И.П. СОЛОВЬЯНОВА, М.П. НАЙМУШИН**

## **ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

## **ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ**

Учебное пособие

Екатеринбург  
**2005**

УДК 550.344.094.7

ББК 31.27-01

С 60

Рецензенты:

кафедра связи Уральского государственного университета путей  
сообщения (зав. кафедрой – проф. канд. тех. наук А.В. Паршин) ;  
главный инженер НПО «Сигнал» канд. тех. наук Ф.Х.Сабирзянов

Авторы: И.П. Соловьянова, М.П. Наймушин

С 60 Теория волновых процессов. Электромагнитные волны.  
Учебное пособие/ И.П. Соловьянова, М.П. Наймушин.  
Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2005. 131 с.

ISBN 5-321-00588-5

Изложены основы теории электромагнитных волн,  
рассмотрены особенности распространения волн в различных  
средах, поведение электромагнитных волн на границе раздела сред.

Пособие предназначено для студентов радиотехнических и  
связных специальностей.

Библиогр.: 4 назв. Табл. 2. Рис. 31.

УДК 550.344.094.7

ББК 31.27-01

ISBN 5-321-00588-5

© ГОУ ВПО «Уральский государственный  
технический университет – УПИ», 2005  
© И.П. Соловьянова, М.П. Наймушин, 2005

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем пособии изложены основные положения теории волновых процессов, имеющих обширное приложение во многих областях науки и техники. Пособие предназначено для студентов радиотехнических специальностей. В первой главе пособия вводятся общие понятия и определения волновых процессов, поясняются физические основы акустических и электромагнитных волн. В последующих главах детально изложена теория электромагнитных волн, используемых в системах связи и различных радиотехнических устройствах.

Основные физические величины электромагнитного поля (напряженности и индукции) являются векторными функциями, изменяющимися в пространстве и во времени. Через особенности взаимодействия этих величин со средой определяются параметры среды и проводится классификация сред. Этот материал представлен во второй главе пособия.

Физические законы электромагнитного поля излагаются и анализируются в третьей главе. При этом рассматриваются как произвольная зависимость полей от времени, так и практически очень важные гармонические поля, то есть изменяющиеся во времени по синусоидальному закону.

Из решений волновых уравнений Гельмгольца получаются математические выражения гармонических волновых электромагнитных процессов. В различных однородных средах для электромагнитных волн вводятся понятия основных параметров и характеристик, используемых при практическом применении волн.

В пятой главе пособия анализируются волновые явления на границе раздела сред. Особо выделяются специальные случаи полного прохождения волны через границу раздела сред и полного внутреннего отражения. Возникшие в последнем случае направляемые волны рассматриваются как прототип электромагнитных волн в реальных линиях передачи.

Материал учебного пособия представляет собой компактное, но достаточно полное изложение теории электромагнитных волновых процессов и найдёт широкое применение у студентов радиотехнических специальностей всех видов обучения.

# Глава 1. Общие сведения о волновых процессах

## 1.1. Понятие волнового процесса

Волновым процессом называется любое изменение (возмущение) состояния сплошной среды, распространяющееся с конечной скоростью и несущее энергию.

Существует большое многообразие волновых процессов (типов волн): звуковые волны, сейсмические, волны на поверхности воды, волны механических колебаний в кристаллах, радиоволны, оптические волны. Во всех волновых процессах наблюдаются сходные закономерности поведения в пространстве и во времени, которые описываются одинаковыми математическими моделями и исследуются общими методами.

Выделим два основных типа волн: упругие и электромагнитные. Упругие (другое название акустические от греческого слова *acustikos* – слуховой) волны – это волны, связанные с колебаниями частиц при механической деформации упругой среды (жидкой, газообразной, твердой). При этом имеет место перенос энергии при отсутствии переноса вещества. В акустической волне частицы совершают колебания вокруг точки покоя. Волна, у которой частицы среды совершают колебания вдоль направления распространения, называется продольной волной. Если частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны, акустическая волна называется поперечной или сдвиговой. Среди упругих волн самые низкие частоты имеют инфразвуковые волны, лежащие ниже границы слышимости их человеком (ниже 16 Гц). Слышимые звуковые колебания занимают диапазон частот от 16 Гц до 20 кГц. Волны более высоких частот – ультразвуковые (от 20 кГц до 1 ГГц) и гиперзвуковые (от 1 ГГц до 1000 ГГц).

Электромагнитные волны – это распространяющиеся в пространстве переменные во времени электромагнитные поля. Электромагнитные волны всегда имеют поперечные к направлению распространения составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей. Продольные составляющие этих векторов могут существовать лишь при определенных условиях (у границ раздела разных сред, вблизи возбуждающих источников, в линиях передачи). Чисто продольных

электромагнитных волн не существует. Среди электромагнитных волн выделяют радиоволны с диапазоном частот от  $3 \cdot 10^3$  Гц до  $3 \cdot 10^{11}$  Гц. Далее по частоте расположен оптический диапазон от  $3 \cdot 10^{11}$  Гц до  $1,5 \cdot 10^{17}$  Гц, включающий инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучения. На более высоких частотах происходят рентгеновское и гамма – излучения.

Наука, занимающаяся изучением излучения, распространения и поглощения электромагнитных волн, называется электродинамикой. До диапазона инфракрасных волн все среды можно рассматривать как сплошные без учета их внутренней микроструктуры, волновыми процессами в таких средах занимается классическая электродинамика. На более высоких частотах следует учитывать микроструктуру среды и дискретность электромагнитного излучения (поток фотонов). В этом случае электромагнитное излучение описывается методами квантовой электродинамики.

Выделим основные свойства всех волновых процессов. Два из них очевидны из определения процесса. Это прежде всего – перенос энергии. Величина энергии, переносимой волной, оценивается плотностью потока энергии в единицу времени и может меняться в широких пределах. Например, плотность потока энергии электромагнитного излучения Солнца на земной поверхности достигает  $1 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$ , а поток энергии вещательных радиостанций – всего тысячные и миллионные доли ватта на  $1 \text{ м}^2$ . Интенсивность звуковых волн человеческого голоса очень незначительна. Так, интенсивность звуковых волн на пороге слышимости их человеком на частоте  $f = 1 \text{ кГц}$  составляет всего  $10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

Второе общее свойство волновых процессов также заложено в определении – конечная скорость распространения волны в среде. Разные типы волн обладают различными скоростями. С наибольшей скоростью распространяются электромагнитные волны в вакууме, ее величина составляет  $3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Скорость акустических волн на несколько порядков меньше. Например, звуковые волны распространяются в воздухе при температуре  $t = 0^\circ \text{C}$  со скоростью  $331 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

Волновые процессы могут быть линейными и нелинейными. Волна называется линейной, если свойства среды для этой волны не зависят от интенсивности волны. Линейные волны распространяются независимо друг от друга без взаимных искажений. Пространство неограниченно может быть заполнено разными типами линейных волн, имеющих различные частоты и направления распространения. Для линейных волн выполняется принцип суперпозиции (наложения) волн без взаимных искажений. Для линейных волн существует единый теоретический подход независимо от их природы. Нелинейная волна – это волна, под действием которой меняются свойства среды и соответственно меняются свойства самой волны. Это обычно происходит при большой интенсивности волны.

## 1.2. Гармоническая волна и ее параметры.

Гармоническая волна - волна, изменяющаяся во времени по гармоническому (синусоидальному) закону. Для этой волны также употребляется термин монохроматическая (одноцветная) волна, заимствованный из оптики. Любой волновой процесс можно представить с помощью преобразований Фурье через гармонические волны.

Кратко остановимся на основных определениях и понятиях гармонической волны. Уравнения плоской гармонической волны, распространяющейся, например, вдоль оси  $z$  в среде без потерь записывается в следующем виде

$$A(z, t) = A_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0). \quad (1.1)$$

Под величиной  $A$  понимается физическая величина, определяющая волновой процесс. Максимальное значение этой величины называется амплитудой, обозначенной в (1.1) через  $A_0$ . Размерность амплитуды определяется природой волнового процесса. Например, в звуковых волнах амплитуда измеряется в единицах давления паскалях (Па), в электромагнитных волнах амплитуда напряженности электрического поля измеряется в вольтах на метр (В/м), а магнитного поля - в амперах на метр (А/м).

Выражение, стоящее в скобках (1.1), называется фазой колебания, через которую определяется значение физической величины в данный момент времени и в данной точке пространства. Константа  $\varphi_0$  называется начальной фазой,

использование которой имеет смысл при сравнении двух и более волн одной частоты в данной точке пространства и в фиксированный момент времени. Круговая частота  $\omega$  связана с частотой  $f$  (число колебаний в единицу времени) соотношением

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.2)$$

Частота  $\omega$  измеряется в радианах в секунду, частота  $f$  в герцах (1Гц – одно колебание в секунду). При известной частоте  $f$  период колебания находится из соотношения

$$T = \frac{1}{f}. \quad (1.3)$$

Из периодичности волнового процесса в пространстве определяется длина волны

$$k\lambda = 2\pi, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1.4)$$

Таким образом, длина волны – пространственный интервал, по прохождению которого фаза волны меняется на  $2\pi$  вдоль направления распространения. Число длин волн, укладывающихся на расстоянии  $2\pi$  метров, называется волновым числом и обозначается  $k$ .

Поверхность, на которой волновой процесс имеет одинаковую фазу колебания, называется поверхностью равных фаз или фронтом волны. По форме фронта волны можно выделить плоские, цилиндрические и сферические волны. Поверхность, на которой амплитуда волнового процесса постоянна, называется поверхностью равных амплитуд. Волна называется однородной, если у нее поверхности равных амплитуд и равных фаз совпадают, то есть на поверхности фронта не меняется амплитуда волнового процесса. В неоднородной волне амплитуда на поверхности фронта изменяется.

Плотность потока энергии (или интенсивность) волны – это энергия, переносимая волной через единицу перпендикулярно ориентированной поверхности за единицу времени. Плотность потока энергии пропорциональна квадрату амплитуды волны

$$\vec{J} = \vec{e}_0 p A_0^2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}, \quad (1.5)$$

где  $p$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды и типа волны;

$\vec{e}_0$  – единичный вектор, показывающий направление распространения энергии.

Вектор плотности потока энергии в единицу времени (плотности потока мощности) принято называть вектором Умова-Пойнтинга.

Распространение волны происходит в направлении, перпендикулярном поверхности фронта волны. Плоская волна идет в одном направлении по нормали к ее фронту. Цилиндрическая волна расходится по радиусу в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Сферическая волна расходится по радиусу перпендикулярно сферическому фронту. Элемент поверхности цилиндрического фронта ( $dS_{\text{ц}} = r d\varphi dz$ ) возрастает прямо пропорционально расстоянию, при этом плотность потока мощности убывает обратно пропорционально расстоянию, а амплитуда цилиндрической волны убывает обратно пропорционально корню квадратному из расстояния. Элемент поверхности сферического фронта ( $dS_{\text{сф}} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ) возрастает пропорционально квадрату расстояния, плотность потока мощности уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, а амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию. В среде с потерями распространяющиеся волны теряют часть своей энергии и их амплитуды убывают по экспоненциальному закону вдоль направления распространения.

## **Глава 2. Векторы электромагнитного поля. Параметры и классификация сред**

### **2.1. Векторы электромагнитного поля**

Электромагнитное поле представляет собой совокупность переменных во времени взаимосвязанных и влияющих друг на друга электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле проявляется в виде силы, действующей на электрические заряды. Любое силовое воздействие характеризуется величиной и направлением, поэтому для описания электромагнитных полей необходимо использовать векторные функции.



Электрическое поле оказывает силовое воздействие как на неподвижные, так и на движущиеся заряды. Математической моделью электрического поля в вакууме служит вектор  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля, определяемая по силе  $\vec{F}$ , действующей на пробный заряд  $q$ , внесенный в рассматриваемую точку поля с радиус-вектором  $\vec{r}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}). \quad (2.1)$$

В системе СИ напряженность электрического поля измеряется в вольтах на метр – В/м. Для описания электрического поля в материальной среде, как будет показано в дальнейшем, требуется ввести еще вектор электрической индукции  $\vec{D}$ , который в вакууме связан с вектором  $\vec{E}$  соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.2)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость) вакуума.

Вектор электрической индукции  $\vec{D}$  измеряется в кулонах на квадратный метр – Кл/м<sup>2</sup>, а диэлектрическая проницаемость – в фарадах на метр Ф/м. Величина  $\varepsilon_0$  определена экспериментально и равна  $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$  Ф/м =  $8,842 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Магнитное поле взаимодействует только с движущимися зарядами. В вакууме магнитное поле описывается вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ , который определяется по силе Лоренца  $\vec{F}_L$ , действующей на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{V}$

$$\vec{F}_L = q \vec{E} + q \left[ \vec{V}, \vec{B} \right]. \quad (2.3)$$

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  измеряется в веберах на квадратный метр – Вб/м<sup>2</sup>, то есть вольт-секундах на квадратный метр или в теслах [Тл]. Для описания магнитного поля в материальной среде дополнительно вводится вектор  $\vec{H}$ , который называется напряженностью магнитного поля. В вакууме векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (2.4)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная (магнитная проницаемость) вакуума.

Вектор  $\vec{H}$  имеет размерность амперы на метр – А/м, а величина  $\mu_0$  – генри на метр Гн/м. Численное значение  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

## 2.2. Материальные уравнения электромагнитного поля

Силовое воздействие электромагнитного поля на среды учитывается в материальных уравнениях, которые представляют собой соотношения, связывающие попарно векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . Вывод этих уравнений связан с описанием процессов, которые происходят в среде под действием сил электромагнитного поля.

Имеются многочисленные вещества-диэлектрики, которые не проводят электрический ток, но электрическое поле внутри их зависит от напряженности внешнего электрического поля. Диэлектрики, помещенные в электрическое поле (постоянное или переменное во времени), специфическим образом меняют свое состояние – они поляризуются. В результате появляется дополнительное электрическое поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное электрическое поле будет отличным от того, каким оно было бы в вакууме, и разным в различных диэлектрических средах. Поляризация – сложный физический процесс, связанный с атомной структурой конкретного вещества. Поэтому ограничимся лишь кратким и упрощенным рассмотрением процесса поляризации.

Молекулы и атомы вещества представляют собой объединение электрически заряженных частиц (связанные заряды), суммарный заряд молекулы (атома) равен нулю. Для диэлектриков характерны прочные связи заряженных частиц, поэтому при внешнем электрическом поле не происходит движения носителей заряда в толще материала, по крайней мере в не слишком сильных полях. Однако при этом молекула диэлектрика деформируется так,

что ее можно представить в виде малого электрического диполя – системы двух разноименных зарядов (+q и -q), смещенных в пространстве на малое расстояние  $l$ . Диполи характеризуются дипольным моментом  $\vec{p} = \vec{l}_0 \cdot q \cdot l$  ( $\vec{l}_0$  – орт вектора  $\vec{p}$ , направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному). Упрощенно этот процесс можно показать на модели атома водорода, состоящего из протона и электрона (рис. 2.1).

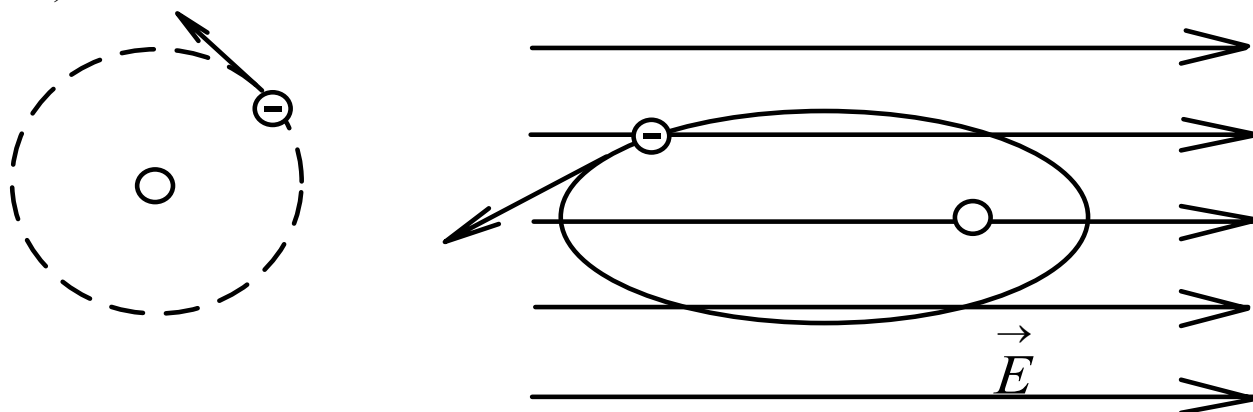


Рис. 2.1. Процесс поляризации атома водорода

В отсутствии внешнего электрического поля электрон вращается по круговой орбите. В электрическом поле орбита электрона вытягивается, центры положительного и отрицательного зарядов перестают совпадать в пространстве, и атом водорода ведет себя как электрический диполь, характеризующийся дипольным моментом. Так поляризуются неполярные диэлектрики, молекулы (атомы) которых в отсутствии внешнего поля не обладают собственным дипольным моментом. К ним относится большинство газов и многие твердые диэлектрики (кварц, полиэтилен и т. д.). У полярных диэлектриков (непроводящие жидкости и некоторые твердые диэлектрики, например, полихлорвинил) молекулы и без внешнего электрического поля представляют собой уже диполи, дипольные моменты которых ориентированны в пространстве хаотично.

В обоих случаях внешнее электрическое поле оказывает силовое воздействие на диполи и ориентирует дипольные моменты молекул по полю. В результате появляется дипольный момент рассматриваемого объема вещества. Количественной

характеристикой поляризации диэлектрика является вектор поляризованности  $\vec{P}$ . Вектор  $\vec{P}$  определяют как предел отношения суммарного дипольного момента вещества в объеме  $\Delta V$  к величине этого объема при  $\Delta V \rightarrow 0$

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}. \quad (2.5)$$

Вектор  $\vec{P}$  имеет размерность Кл/м<sup>2</sup>. Величина индуцированного дипольного момента пропорциональна напряженности электрического поля

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{\mathfrak{e}} \vec{E}. \quad (2.6)$$

Безразмерный параметр  $\chi^{\mathfrak{e}}$  называется диэлектрической восприимчивостью, характеризующей свойство диэлектрика поляризовываться. При описании электромагнитных полей в материальной среде удобно ввести вектор  $\vec{D}$ , связанный с вектором  $\vec{P}$  соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.7)$$

С учетом выражения (2.6) формулу (2.7) можно представить в виде

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi^{\mathfrak{e}} \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi^{\mathfrak{e}}) \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (2.8)$$

где  $\epsilon_a = \epsilon_0 (1 + \chi^{\mathfrak{e}})$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Уравнение (2.8) связывает между собой векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  и называется материальным уравнением. Пропорциональность векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$  в соотношении (2.6), а также векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  в формуле (2.8) справедлива при не очень сильных электрических полях, а в случае переменного во времени электрического поля еще и при условии, что вектор  $\vec{P}$  успевает «следить» за вектором  $\vec{E}$ , изменяясь синхронно. На высоких частотах в силу инерции

молекул вектор  $\vec{P}$ , а следовательно, и вектор  $\vec{D}$  отстает во времени от вектора  $\vec{E}$ . В дальнейшем будем считать, что среда безинерционна и соотношения (2.6) и (2.8) справедливы.

Под действием электрического поля (постоянного или переменного во времени) в среде, обладающей проводимостью, в которой есть свободные электрические заряды, возникает электрический ток проводимости, распределение которого характеризуется вектором объемной плотности тока проводимости

$$\vec{J}[M] = \vec{i}_0 \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}. \quad (2.9)$$

Здесь  $\vec{i}_0$  – единичный вектор, показывающий направление тока (направление движения положительных зарядов) в рассматриваемой точке  $M$ ,  $\Delta S$  – плоская площадка, расположенная перпендикулярно вектору  $\vec{i}_0$  и содержащая точку  $M$ ,  $\Delta I$  – ток проводимости, протекающий через  $\Delta S$ . Вектор  $\vec{J}$  имеет размерность  $A/m^2$ . Плотность тока проводимости пропорциональна напряженности электрического поля

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (2.10)$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется удельной проводимостью и имеет размерность сименс на метр –  $Cm/m \left[ \frac{1}{Om \cdot m} \right]$ .

Перейдем к рассмотрению сред (веществ), реагирующих на внешнее магнитное поле. Вещества, которые не проводят электрический ток, а магнитное поле внутри их зависит от внешнего магнитного поля, называются магнетиками. Под действием внешнего магнитного поля (постоянного или переменного во времени) магнетики намагничиваются. В результате появляется дополнительное магнитное поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное магнитное поле отличается от того, каким оно было бы в вакууме.

Явление намагничивания упрощенно можно представить следующим образом. Атомы и молекулы магнетиков обладают магнитным моментом  $\vec{m}$  и могут быть уподоблены маленьким рамкам с током. Каждая рамка с током создает собственное магнитное поле. В отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул направлены хаотично и суммарный магнитный момент рассматриваемого объема среды  $\Delta V$  равен нулю, т. е. магнитные поля отдельных молекул взаимно компенсируются. Под действием внешнего магнитного поля происходит ориентация магнитных моментов молекул, и суммарный магнитный момент будет отличен от нуля. Образующееся в результате намагничивания дополнительное магнитное поле может как ослаблять, так и усиливать первичное поле. Среда, в которых магнитное поле ослабляется, называют диамагнитными. Среда, в которых магнитное поле усиливается незначительно, называют парамагнитными, а среда, в которых происходит существенное усиление магнитного поля – ферромагнитными.

Намагниченность среды характеризуется вектором намагниченности  $\vec{M}$ , который определяют как предел отношения суммарного магнитного момента вещества в объеме  $\Delta V$  к величине этого объема при  $\Delta V \rightarrow 0$

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}. \quad (2.11)$$

Вектор  $\vec{M}$  имеет размерность А/м. При рассмотрении многих процессов удобно ввести вектор  $\vec{H}$ , связанный с вектором  $\vec{M}$  соотношением

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (2.12)$$

Экспериментально установлено, что в не слишком сильных и не слишком быстро меняющихся внешних полях связь между вектором  $\vec{M}$  и  $\vec{H}$  линейная

$$\vec{M} = \chi^M \vec{H}. \quad (2.13)$$

Безразмерный параметр  $\chi^M$  называется магнитной восприимчивостью среды. Подставляя (2.13) в (2.12), получаем

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi^M) \vec{H} = \mu_a \vec{H}. \quad (2.14)$$

Коэффициент пропорциональности  $\mu_a = \mu_0(1 + \chi^M)$  между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  называется абсолютной магнитной проницаемостью среды. Уравнение (2.14) представляет собой второе материальное уравнение. Сравнивая (2.14) с (2.8) можно усмотреть аналогию между поведением поляризуемых диэлектриков в электрическом поле и поведением магнетиков, помещенных во внешнее магнитное поле.

Электромагнитное поле в материальной среде описывается четырьмя основными векторами  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ , связанными между собой попарно материальными уравнениями

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (2.15)$$

Материальные уравнения характеризуют силовое воздействие электромагнитного поля на среду, которое проявляется в поляризуемости и намагниченности сред. Рассмотренные величины  $\vec{P}, \vec{M}, \chi^e, \chi^M$  выражают «меру» отклика среды на электромагнитное поле и входят в материальные уравнения (2.15).

### 2.3. Классификация сред

Свойства среды по отношению к электромагнитному полю определяются параметрами  $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ . Наряду с абсолютной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_a$  часто вводится относительная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0. \quad (2.16)$$

Для большинства сред  $\varepsilon > 1$ . Значения  $\varepsilon$  для некоторых диэлектриков, часто используемых в радиоэлектронных устройствах, приведены в таблице 2.1

Таблица 2.1 Относительные диэлектрические проницаемости некоторых диэлектриков

Материал	$\varepsilon$
Фторопласт-4	2,08
Полиэтилен	2,25
Полистирол	2,56
Плавленый кварц	3,80

Следует отметить, что существуют среды с  $\varepsilon < 1$  (ионосфера, плазма).

Аналогично вводится относительная магнитная проницаемость

$$\mu = \mu_a / \mu_0. \quad (2.17)$$

Относительная магнитная проницаемость диамагнитных и парамагнитных веществ незначительно отличается от единицы и в практических расчетах эффектами диамагнетизма и парамагнетизма обычно пренебрегают, считая  $\mu = 1$ , т. е.  $\mu_a = \mu_0$ . Ферромагнитные вещества (железо, никель и т. д.) имеют  $\mu \gg 1$  и ее величина существенно зависит от величины внешнего магнитного поля. Кроме того, в ферромагнитных материалах намагниченность среды зависит не только от величины магнитного поля в данный момент, но и от того, как оно изменялось раньше (явление магнитного гистерезиса).

Удельная проводимость  $\sigma$  имеет большие значения у металлов, для некоторых из них проводимость приведена в таблице 2.2

Таблица 2.2 Удельная проводимость некоторых металлов

Металл	$\sigma$ См/м
Серебро	$6,1 \cdot 10^7$
Медь	$5,7 \cdot 10^7$
Цинк	$1,7 \cdot 10^7$
Латунь	$1,4 \cdot 10^7$



Удельная проводимость других сред на несколько порядков ниже, чем металлов. Для описания проводящих свойств этих сред используют другую числовую характеристику – угол диэлектрических потерь, которая будет введена в дальнейшем.

По «поведению» параметров среды в электромагнитном поле вводится классификация сред.

Среда называется линейной, если ее параметры  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  не зависят от величины векторов поля. В линейной среде материальные уравнения (2.15) линейные, то есть представляют собой соотношения прямой пропорциональности. Среда называется нелинейной, если ее параметры  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  (или хотя бы один из них) зависят от величины векторов поля. Реальные среды при не очень сильных полях рассматриваются как линейные, и в дальнейшем речь пойдет только о линейных средах.

Линейные среды делятся на однородные и неоднородные, изотропные и анизотропные. Однородными называют среды, параметры которых  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  не зависят от координат, т. е. свойства среды одинаковы во всех ее точках. Среды, у которых хотя бы один из параметров  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  является функцией координат, называются неоднородными. Примером неоднородных сред являются тропосфера, ионосфера, диэлектрическая проницаемость которых изменяется с высотой.

Если свойства среды одинаковы для любых ориентаций векторов воздействующего поля, среду называют изотропной. В изотропных средах векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ , а так же  $\vec{M}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  параллельны, параметры  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  – скалярные величины. Среды, свойства которых зависят от ориентации векторов воздействующего поля, называются анизотропными. В

анизотропных средах векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  или  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  оказываются не параллельными. При этом диэлектрическая или магнитная проницаемости не могут быть скалярными величинами. Они должны быть представлены в виде квадратной матрицы из девяти компонентов, называемой тензором. К анизотропным средам относятся, например, намагниченная плазма и намагниченный

феррит. В намагниченной плазме тензором является диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_a$ . Запись материального уравнения, связывающего векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ , формально остается прежней

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}. \quad (2.18)$$

Двойная стрелка над  $\epsilon_a$  служит обозначением тензорной величины. Запись (2.18) в декартовой системе координат примет вид

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{axx} & \epsilon_{axy} & \epsilon_{axz} \\ \epsilon_{ayx} & \epsilon_{ayy} & \epsilon_{ayz} \\ \epsilon_{azx} & \epsilon_{azy} & \epsilon_{azz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Система скалярных уравнений, эквивалентных векторному уравнению (2.18), получается по правилам умножения матриц

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{axx} E_x + \epsilon_{axy} E_y + \epsilon_{axz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{ayx} E_x + \epsilon_{ayy} E_y + \epsilon_{ayz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{azx} E_x + \epsilon_{azy} E_y + \epsilon_{azz} E_z. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Непараллельность векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  (а также  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ ) в анизотропной среде объясняется тем, что направление вторичного электрического поля, возникшего в результате поляризации анизотропной среды, составляет некоторый угол с направлением первичного электрического поля.

В намагниченной ферритовой среде тензором является магнитная проницаемость и материальное уравнение, связывающее векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , принимает вид

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (2.20)$$

В линейных, однородных и изотропных средах, в которых справедливы материальные уравнения в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} ; \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}$$

электромагнитное поле может быть определено двумя векторами. В прикладной электродинамике обычно используют пару векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , через которые выражаются электромагнитные волны в различных средах и устройствах.

## Глава 3. Основные уравнения электромагнитного поля

### 3.1. Уравнения Максвелла

Электромагнитные волновые процессы подчиняются физическим законам, которые впервые были сформулированы и записаны в виде уравнений английским физиком Дж. К. Максвеллом. Основы теории поля опубликованы им в 1873 г. в работе «Трактат об электричестве и магнетизме». Уравнения Максвелла были получены в результате обобщения накопленных к тому времени экспериментальных данных. Уравнения принято представлять в интегральной и дифференциальной формах записи.

1. Первое уравнение Максвелла описывает закон полного тока: циркуляция вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $l$  равна полному току, пронизывающему этот контур

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{cm} \right) d\vec{S} . \quad (3.1)$$

Полный ток определяется потоком через поверхность  $S$  векторов объемной плотности токов проводимости, токов смещения и сторонних токов. В общем случае плотности токов имеют неравномерное распределение на произвольной поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $l$ . В случае постоянных токов и полей выражение (3.1) представляет собой закон Ампера.

Для перехода к дифференциальной форме записи закона полного тока в уравнении (3.1) циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по теореме Стокса заменяем интегралом от  $\text{rot } \vec{H}$  по поверхности  $S$

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{cm} \right) d\vec{S}.$$

Так как поверхность  $S$  произвольная и одна и та же в поверхностных интегралах, то подынтегральные выражения равны

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{cm}. \quad (3.2)$$

Равенство (3.2) называется первым уравнением Максвелла в дифференциальной форме. Изменяющаяся в момент времени  $t$  в некоторой точке пространства плотность полного тока порождает в этой точке и в этот момент времени вихревое магнитное поле.

Плотность полного тока в уравнении (3.2) содержит три слагаемых, имеющих размерность  $\text{А/м}^2$ . Вектор  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  представляет собой плотность тока проводимости, возникающего в проводящей среде под действием электрического поля. Наряду с плотностью тока проводимости Максвелл вводит вектор

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}^{cm}$  и называет его плотностью тока смещения (вектор  $\vec{D}$

имеет еще название вектора электрического смещения). Ток смещения устанавливает внутреннюю взаимосвязь переменных электрического и магнитного полей. Если даже в некоторой точке

пространства в момент времени  $t$  плотность тока проводимости  $\vec{J}$  отсутствует, то вихревое меняющееся в пространстве магнитное

поле порождается током смещения с плотностью  $\vec{J}^{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , то

есть меняющимся во времени электрическим полем. Таким образом, переменное электрическое поле, так же как и ток проводимости, сопровождается появлением магнитного поля. Плотность тока смещения может быть расписана с учетом (2.7) в виде двух слагаемых

$$\vec{J}^{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы представляет собой ток смещения в вакууме и соответствует только изменению электрического поля во времени, ток не сопровождается движением электрических зарядов. Второе слагаемое определяет ток смещения в диэлектрической среде, обусловленный упорядоченным движением связанных зарядов в результате действия переменного электрического поля. Примером электрической системы, в которой существует ток смещения, может служить конденсатор в цепи переменного тока. Ток смещения между обкладками конденсатора, разделенными диэлектриком, осуществляет замкнутость электрической цепи.

Третий вектор в плотности полного тока (3.2) – вектор  $\vec{J}^{cm}$  называется плотностью стороннего электрического тока и является первичным возбудителем электромагнитного поля. Сторонние токи берут энергию со стороны, не зависят от возбуждаемого ими поля и считаются заданными функциями координат и времени. Например, сторонние токи в антеннах вызываются внешними источниками (генераторами) и не зависят от возбуждаемых антеннами волн.

Векторное уравнение (3.2) эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые в декартовой системе координат  $x, y, z$  имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} + J_x^{cm}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} + J_y^{cm}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z^{cm}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

2. Второе уравнение Максвелла является законом электромагнитной индукции: в замкнутом контуре, пронизываемом переменным магнитным потоком, возникает электродвижущая сила, равная скорости изменения этого потока.

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S},\tag{3.5}$$

где  $l$  – произвольный замкнутый контур в любой среде;

$S$  – произвольная поверхность, опирающаяся на контур.

Закон (3.5) устанавливает факт возникновения и величину электрического поля под действием переменного магнитного поля. Если на месте воображаемого контура  $l$  разместить реальный контур, выполненный из проводника, то наличие электродвижущей силы приведет к протеканию в проводнике электрического тока в направлении вектора  $\vec{E}$  – это известный закон электромагнитной индукции Фарадея, открытый опытным путем.

От интегральной формы записи второго уравнения Максвелла (3.5) перейдем к дифференциальной форме. Циркуляцию вектора  $\vec{E}$  в (3.5) заменяем по теореме Стокса интегралом от  $\text{rot } \vec{E}$  по поверхности  $S$

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \, d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S}.$$

Так как поверхность  $S$  произвольна, то это равенство возможно только при равенстве подынтегральных выражений

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Это второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме. Оно справедливо в любой точке пространства в любой момент времени и выражает количественную связь между величинами в законе электромагнитной индукции. Векторное уравнение (3.6) эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые в декартовой системе координат  $x, y, z$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= - \frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3. Третье уравнение Максвелла является обобщением закона Гаусса для постоянных и переменных электромагнитных полей: поток вектора  $\vec{D}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  порождается свободным электрическим зарядом  $Q$ , находящимся в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q. \quad (3.8)$$

Заряд может быть произвольно распределен внутри объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , поэтому он задается объемной плотностью распределения  $\rho$ , имеющей размерность Кл/м<sup>3</sup>

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (3.9)$$

Подставляем (3.9) в (3.8), получаем

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (3.10)$$

Равенство (3.10) представляет собой третье уравнение Максвелла в интегральной форме. Преобразуем левую часть выражения (3.10) по теореме Остроградского-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Это равенство должно выполняться при произвольном объеме, что возможно, если равны подынтегральные выражения

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) называется третьим уравнением Максвелла в дифференциальной форме. Из (3.11) следует, что дивергенция вектора  $\vec{D}$  отлична от нуля в тех точках пространства, где имеются свободные электрические заряды. В этих точках линии вектора  $\vec{D}$  начинаются на положительных зарядах (источники поля) и заканчиваются на отрицательных зарядах (стоки поля). Уравнение (3.11) скалярное и в декартовой системе координат  $x, y, z$  оно записывается в виде

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (3.12)$$

Аналогично сторонним токам вводятся сторонние заряды, объемная плотность распределения которых  $\rho^{cm}$  добавляется в правые части третьего уравнения Максвелла (3.10) и (3.11)

$$\oint_S \vec{D} dS = \int_V (\rho + \rho^{cm}) dV, \quad \text{div } \vec{D} = \rho + \rho^{cm}. \quad (3.13)$$

4. Четвертое уравнение Максвелла называется законом непрерывности магнитных силовых линий: поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{B} dS = 0. \quad (3.14)$$

Это означает, что не существует линий вектора  $\vec{B}$ , которые только входят в замкнутую поверхность  $S$  (или, наоборот, только выходят из поверхности  $S$ ), линии вектора  $\vec{B}$  всегда пронизывают ее. Векторное поле  $\vec{B}$  не имеет источников, магнитные заряды не существуют. Линии магнитной индукции  $\vec{B}$  непрерывны, они не имеют ни начала, ни конца. От интегральной формы записи четвертого уравнения (3.14) можно перейти к дифференциальной с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

$$\int_V \text{div } \vec{B} dV = 0.$$

Поскольку объем произвольный, то это равенство может выполняться только при условии, что

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (3.15)$$

Уравнения (3.15) представляет собой четвертое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.



### 3.2. Система уравнений электромагнитного поля

Анализ электромагнитных волновых процессов возможен только на основе системы уравнений, включающей в себя четыре уравнения Максвелла и материальные уравнения, в которых фиксируется влияние среды на протекающие в ней электромагнитные явления

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{cm} ; \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \\ \vec{\text{div}} \vec{D} = \rho + \rho^{cm} ; \vec{\text{div}} \vec{B} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} ; \vec{B} = \mu_a \vec{H} . \quad (3.17)$$

Выделим основные выводы относительно свойств электромагнитного поля. Первые два уравнения Максвелла обладают симметрией в следующем смысле: по первому уравнению изменение во времени электрической индукции порождает вихревое магнитное поле, вектор напряженности которого изменяется в пространстве; по второму уравнению изменение во времени магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле, изменяющееся в пространстве. Электрическое и магнитное поля могут существовать, взаимно порождая друг друга. Из этого следует важный вывод: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно вдали от источника. Возмущения электромагнитного поля (изменения его состояния), распространяющиеся в пространстве, называют электромагнитными волнами. Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды и токи. Силовые линии магнитного поля всегда непрерывны. Силовые линии электрического поля непрерывны и могут прерываться на электрических зарядах.

Применим операцию дивергенции к обеим частям первого уравнения Максвелла, получим

$$\vec{\text{div}} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{cm} \right) = 0 . \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что линии вектора плотности полного тока непрерывны. Используя третье уравнение Максвелла и (3.18), получаем закон сохранения зарядов: всякое изменение заряда во времени порождает электрический ток

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{J}^{cm} = -\frac{\partial \rho^{cm}}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Большинство используемых на практике материальных сред являются линейными. В этом случае электромагнитные поля удовлетворяют принципу суперпозиции: поле, созданное несколькими источниками, можно рассматривать как сумму полей, созданных каждым источником.

Системы (3.16) и (3.17) описывают любые поля (статические, стационарные, квазистационарные, нестационарные) в любой среде.

### 3.3. Система уравнений монохроматического электромагнитного поля

Большинство реальных источников возбуждают гармонические электромагнитные поля, то есть поля, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону с определенной частотой. Такие поля получили еще название монохроматические, то есть «одноцветные» (термин взят из оптики). Монохроматические поля обладают энергией, но не несут информации. Информация будет передаваться, если в соответствии с заданным законом или случайным образом будут меняться амплитуда, частота и фаза электромагнитных волн. Это эквивалентно использованию группы (спектра) монохроматических волн, определенное суммирование которых дает электромагнитный сигнал, переносящий информацию. Связь составляющих спектра с этим сигналом производится с помощью преобразования Фурье. Знание поведения монохроматических волн с произвольными частотами в реальных условиях (естественные трассы распространения, линии передач, и т.д.) позволяют анализировать поведение сложных сигналов в тех же условиях.

При изучении монохроматических полей, подчиняющихся линейным уравнениям Максвелла, эффективно используется метод комплексных амплитуд. Суть метода заключается в том, что

векторным и скалярным величинам, входящим в системы (3.16), (3.17), приводятся в соответствие комплексные амплитуды. Связь между физическими величинами и их комплексными амплитудами покажем, например, для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Мгновенное значение вектора  $\vec{E}$ , изменяющегося во времени по гармоническому закону, в некоторой точке пространства записывается так:

$$\vec{E}(t) = \vec{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + \vec{y}_0 E_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + \vec{z}_0 E_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z). \quad (3.20)$$

Здесь  $E_{mi}$ ,  $\omega t + \varphi_i$  – амплитуды и фазы отдельных составляющих вектора  $\vec{E}$ , которые все являются действительными величинами. Фазы  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  будут определены далее при решении волновых уравнений и учете особенностей поляризации волн. Запись (3.20) может быть переписана как действительная часть (Re) комплексного вектора

$$\vec{E}(t) = \text{Re} \left[ \left( \vec{x}_0 E_{mx} e^{j\varphi_x} + \vec{y}_0 E_{my} e^{j\varphi_y} + \vec{z}_0 E_{mz} e^{j\varphi_z} \right) e^{j\omega t} \right]. \quad (3.21)$$

Вектор

$$\vec{\dot{E}} = \vec{x}_0 E_{mx} e^{j\varphi_x} + \vec{y}_0 E_{my} e^{j\varphi_y} + \vec{z}_0 E_{mz} e^{j\varphi_z} \quad (3.22)$$

не зависит от времени и называется комплексной амплитудой. Здесь и в дальнейшем комплексные амплитуды будут помечаться точками сверху. Мгновенное значение вектора (3.20), гармонически изменяющегося во времени, выражается через комплексную амплитуду следующим образом:

$$\vec{E} = \text{Re} \left( \vec{\dot{E}} e^{j\omega t} \right). \quad (3.23)$$

Аналогичным образом вводятся комплексные амплитуды для всех физических величин, входящих в уравнения (3.16), (3.17) и

колеблющихся с частотой  $\omega$ . Например, для скалярных функций объемных плотностей свободных и сторонних зарядов имеем

$$\rho(t) = \operatorname{Re} \left( \dot{\rho} e^{j\omega t} \right), \quad \rho^{cm}(t) = \operatorname{Re} \left( \dot{\rho}^{cm} e^{j\omega t} \right). \quad (3.24)$$

Уравнения Максвелла являются линейными дифференциальными уравнениями. В случае монохроматического поля этим же уравнениям будут удовлетворять соответствующие комплексные векторные и скалярные функции. Возьмем первое уравнение Максвелла из системы (3.16), подставим комплексные

векторы  $\vec{E} e^{j\omega t}$ ,  $\vec{H} e^{j\omega t}$ ,  $\vec{J}^{cm} e^{j\omega t}$ , продифференцируем по времени, сократим  $e^{j\omega t}$  и получим уравнение для комплексных амплитуд

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \varepsilon_a \vec{E} + \vec{J}^{cm}. \quad (3.25)$$

Преобразуем уравнение (3.25) к следующему виду:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \left( \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} + \vec{J}^{cm} = j\omega \varepsilon_a \vec{E} + \vec{J}^{cm}, \quad (3.26)$$

где  $\varepsilon_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}$  – комплексная диэлектрическая проницаемость среды.

Третье уравнение Максвелла для комплексных амплитуд примет вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = \dot{\rho} + \dot{\rho}^{cm}. \quad (3.27)$$

В теории монохроматических электромагнитных полей свободные заряды в среде обычно не рассматриваются, поскольку в силу уравнения непрерывности (3.19) они однозначно определяются токами проводимости

$$\operatorname{div} \vec{J} = -j\omega \dot{\rho}, \quad \dot{\rho} = \frac{j\sigma}{\omega} \operatorname{div} \vec{E}.$$

Последнее соотношение подставляем в (3.27), получаем

$$\operatorname{div} \dot{\varepsilon}_a \vec{E} - j \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \dot{\rho}^{cm} \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \dot{\varepsilon}_a \vec{E} = \dot{\rho}^{cm}. \quad (3.28)$$

Второе и четвертое уравнения Максвелла системы (3.16), а также материальные уравнения системы (3.17) без дополнительных преобразований сразу записываются для комплексных амплитуд. Система уравнений для монохроматического электромагнитного поля принимает следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} &= j\omega \dot{\varepsilon}_a \vec{E} + \dot{J}^{cm} \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= -j\omega \dot{\mu}_a \vec{H} \\ \operatorname{div} \dot{\varepsilon}_a \vec{E} &= \dot{\rho}^{cm} \\ \operatorname{div} \dot{\mu}_a \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.29);$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{D}} &= \dot{\varepsilon}_a \vec{E} \\ \dot{\vec{B}} &= \dot{\mu}_a \vec{H} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Такая форма записи уравнений монохроматического поля применима в достаточно широком диапазоне частот и наиболее употребительна для практических расчетов. Уравнения записаны для комплексных амплитуд, являющихся функциями трех пространственных координат и не зависящих от времени. Таким образом, из уравнений исключена временная переменная. Если решением электродинамической задачи найдены комплексные амплитуды векторов поля, то их мгновенные значения восстанавливаются по формуле (3.23).

Вернемся к введенной комплексной диэлектрической проницаемости

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}.$$

Введя этот параметр, можно одновременно учесть диэлектрические (поляризационные) и проводящие свойства среды. Комплексная диэлектрическая проницаемость может быть изображена на комплексной плоскости (рис. 3.1)

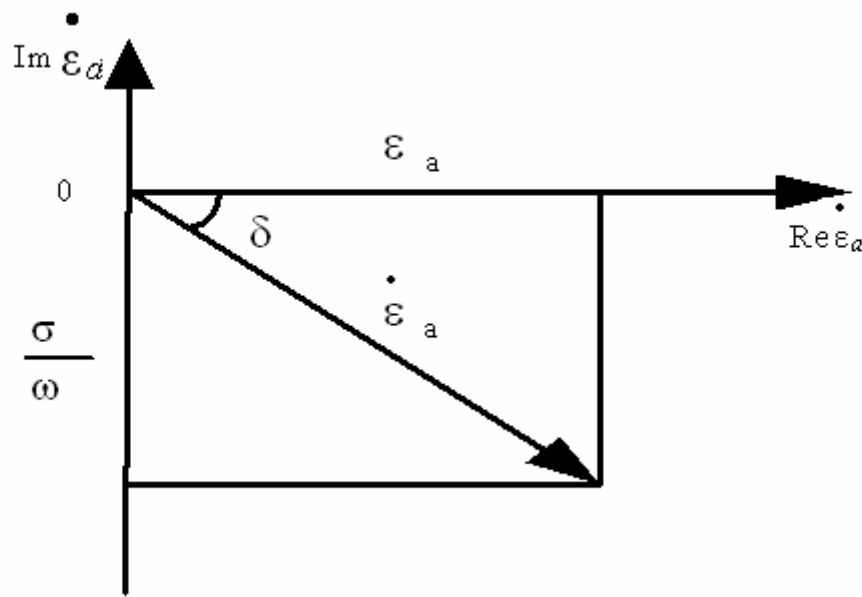


Рис. 3.1. Угол диэлектрических потерь  $\delta$

Соотношение между действительной и мнимой частями  $\epsilon_a$  можно описать тангенсом угла  $\delta$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} . \quad (3.31)$$

Величина (3.31) называется тангенсом угла диэлектрических потерь. С другой стороны тангенс угла потерь равен отношению амплитуды плотности тока проводимости к амплитуде плотности тока смещения

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{\vec{J}}{|\vec{J}|}}{\frac{\vec{J}^{cm}}{|\vec{J}^{cm}|}} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} . \quad (3.32)$$

Для монохроматического поля комплексные амплитуды векторов плотности тока проводимости и плотности тока смещения равны соответственно

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} , \quad \vec{J}^{cm} = j\omega \epsilon_a \vec{E} .$$

Тангенс угла диэлектрических потерь является критерием деления сред на проводники и диэлектрики. Если  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ , то в веществе плотность тока проводимости намного больше плотности

тока смещения, и вещество называется проводником. Если  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ , то в веществе плотность тока смещения намного больше плотности тока проводимости, и вещество называют диэлектриком. Металлы имеют большую удельную проводимость, поэтому у металлов  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$  на всех частотах радиодиапазона. У типичных диэлектриков, наоборот, удельная проводимость очень мала, например, у кварца  $\sigma = 2 \cdot 10^{-17}$  См/м, у стекла  $\sigma = 10^{-12}$  См/м. Существуют среды, у которых проводимость незначительна: у морской воды  $\sigma = 3 \div 5$  См/м, у влажной почвы  $\sigma = 10^{-3} \div 10^{-5}$  См/м. Такие среды на низких частотах проявляют свойства проводников ( $\sigma \gg \omega \varepsilon_a$ ), а на высоких частотах – свойства диэлектриков ( $\sigma \ll \omega \varepsilon_a$ ).

При математическом анализе электромагнитных волн применяют понятие идеального диэлектрика и идеального проводника. Если  $\sigma = 0$ , то среда (вещество) называется идеальным диэлектриком. Идеальный проводник – это среда с бесконечно большой удельной проводимостью ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Переменное электромагнитное поле не проникает в идеальный проводник, т.е. в нем  $\vec{E} = 0$  и  $\vec{H} = 0$ . Предположим от противного, что внутри идеального проводника  $\vec{E} \neq 0$ , тогда плотность тока проводимости  $|\vec{J}| = \sigma |\vec{E}| \rightarrow \infty$ . Сторонних источников, которые могли бы компенсировать бесконечные потери на нагревание, не существует.

Остается предположить, что при  $\sigma \rightarrow \infty$  поле  $\vec{E} = 0$ . Тогда из второго уравнения Максвелла следует, что  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ , т.е. внутри идеального проводника в отсутствии электрического поля переменное магнитное поле существовать не может. Таким образом, в идеальном проводнике  $\vec{E} = 0$  и  $\dot{\vec{H}} = 0$ , поэтому идеальный проводник, находящийся в электромагнитном поле, тепловых потерь в поле не вносит. Понятия идеальных проводников и диэлектриков упрощают решение практически

значимых задач, результаты которых могут быть использованы для реальных сред, близких по свойствам к идеальным.

### 3.4. Уравнение баланса мгновенных значений мощностей в электромагнитном поле

Электромагнитные поля способны переносить энергию в пространстве, при этом часть энергии может преобразовываться в другие виды энергии. Электромагнитная энергия подчиняется закону сохранения энергии, заложенному в уравнениях Максвелла.

Сформулируем уравнение баланса для мгновенных значений мощностей в электромагнитном поле применительно к некоторому объему среды  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$  (рис. 3.2)

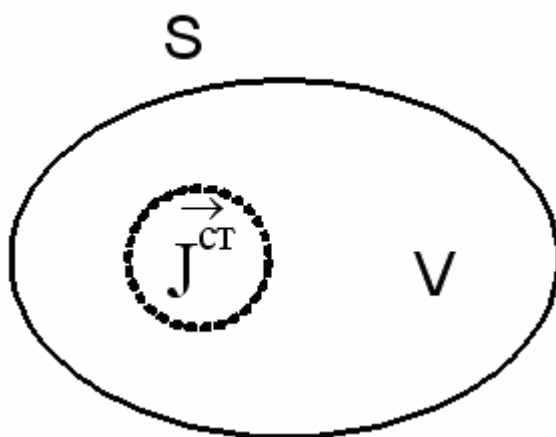


Рис. 3.2. К выводу уравнения баланса

В объеме  $V$ , заполненном линейной однородной и изотропной средой, находится сторонний источник поля. Для вывода возьмем два первых уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{cm};$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$



Умножим первое уравнение скалярно на вектор  $\vec{E}$ , второе – на вектор  $\vec{H}$ , а затем почленно вычтем из первого равенства второе. В результате получим соотношение

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J} \vec{E} + \vec{J}^{cm} \vec{E}. \quad (3.33)$$

Левую часть уравнения (3.33) преобразуем на основании известной формулы векторного анализа

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \left[ \vec{E}, \vec{H} \right]. \quad (3.34)$$

Далее, используя материальные уравнения  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$  и  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ , видоизменим два первых слагаемых правой части (3.33)

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}, \quad \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}. \quad (3.35)$$

С учетом (3.34), (3.35) уравнение (3.33) примет вид

$$\operatorname{div} \left[ \vec{E} \vec{H} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} \right) + \vec{J} \vec{E} = -\vec{J}^{cm} \vec{E}. \quad (3.36)$$

Это уравнение называется уравнением баланса мощности в дифференциальной форме.

Проинтегрируем почленно уравнение (3.36) по объему  $V$ , и к первому слагаемому правой части применим теорему Остроградского-Гаусса для перевода объемного интеграла от  $\operatorname{div} \left[ \vec{E}, \vec{H} \right]$  в поверхностный интеграл от векторного произведения  $\left[ \vec{E}, \vec{H} \right]$ . В результате получаем

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} \right) dV + \int_V \vec{J} \vec{E} dV = \int_V \left( -\vec{J}^{cm} \vec{E} \right) dV. \quad (3.37)$$

Выражение (3.37) представляет собой уравнение баланса мгновенных значений мощностей электромагнитного поля и определяет закон сохранения энергии электромагнитного поля для выделенного объема среды. Все члены этого уравнения имеют размерность мощности. Выясним смысл выражений входящих в уравнение (3.37) и введем для них обозначения. Объемный интеграл

$$W = \int_V \left( \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} \right) dV = W^{\mathcal{E}} + W^M, \quad [\text{Дж}] \quad (3.38)$$

представляет собой мгновенные значения энергии электромагнитного поля, содержащейся в объеме  $V$  и распределенной с объемной плотностью

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} = w^{\mathcal{E}} + w^M, \quad \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]. \quad (3.39)$$

Энергия электромагнитной волны состоит из энергии электрического поля и энергии магнитного поля.

Объемный интеграл

$$P_n = \int_V \vec{J} \vec{E} dV = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV, \quad [\text{Вт}]. \quad (3.40)$$

определяет мгновенное значение мощности тепловых (джоулевых) потерь в объеме  $V$ . Интеграл в правой части уравнения баланса (3.37) выражает мгновенное значение мощности, отдаваемой сторонними токами электромагнитному полю в объеме  $V$

$$P^{cm} = \int_V \left( -\vec{J}^{cm} \vec{E} \right) dV, \quad [\text{Вт}]. \quad (3.41)$$

Будем считать положительной мощность, отдаваемую сторонним током электромагнитному полю. Ток отдает энергию полю при торможении заряженных частиц, образующих ток. Для этого необходимо, чтобы вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  имел составляющую, ориентированную противоположно

направлению тока, то есть чтобы скалярное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{J}^{cm}$  было отрицательным. Осталось выяснить смысл поверхностного интеграла в уравнении (3.37). Введем обозначение

$$\vec{\Pi} = \left[ \vec{E}, \vec{H} \right], \left[ \frac{B_T}{m^2} \right]. \quad (3.42)$$

Вектор  $\vec{\Pi}$  определяет мгновенное значение плотности потока мощности (то есть энергии в единицу времени) через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения энергии. Вектор  $\vec{\Pi}$  называют вектором Пойнтинга. Поверхностный интеграл

$$P_{\Sigma} = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}, [Вт] \quad (3.43)$$

это мгновенное значение потока мощности, проходящего через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ . Если поток мощности выходит из рассматриваемого объема ( $P_{\Sigma} > 0$ ), то можно считать, что внутри объема находится передающее устройство и поток мощности излучается в окружающее пространство. При  $P_{\Sigma} < 0$  поток мощности входит в объем  $V$  и поглощается приемным устройством. Случай  $P_{\Sigma} = 0$  соответствует экранированию объема идеально проводящей поверхностью  $S$ . Символом  $\Sigma$  в электродинамике и теории антенн принято обозначать параметры, связанные с излучением.

Учитывая выше изложенное, перепишем уравнение (3.37) баланса мгновенных значений мощностей в электромагнитном поле (закон сохранения энергии поля) в области  $V$  в следующем виде:

$$P_{\Sigma} + \frac{\partial W}{\partial t} + P_n = P^{cm}. \quad (3.44)$$

Согласно (3.44) мощность стороннего источника тратится на нагревание среды в объеме  $V$ , на изменение энергии электромагнитного поля в этом объеме и на создание потока мощности через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ . Отметим, что выражения (3.38) для энергии поля и (3.40) для мощности тепловых потерь не учитывают потери на поляризацию и

намагниченность среды. Однако выражение (3.43) для потока мощности справедливо для любых сред.

Таким образом, равенства (3.37) и (3.44) представляют собой запись закона сохранения энергии электромагнитного поля, доказанного Дж. Пойнтингом в 1884 г. Ранее в 1874 г. ученым Н. А. Умовым доказан закон сохранения любого вида энергии, при этом впервые введены понятия плотности энергии в данной точке среды и плотности потока энергии. Поэтому вектор Пойнтинга часто называют вектором Умова-Пойнтинга.

В случае переменных во времени процессов распределение электромагнитной энергии непрерывно изменяется. Эти изменения в каждой точке можно определить на основе уравнения (3.36), которое удобно представить в виде

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial w}{\partial t} + p_n = p^{cm}, \quad (3.45)$$

где  $p_n = \vec{J} \vec{E}$  – мгновенное значение объемной плотности мощности потерь;

$p^{cm} = -\vec{J}^{cm} \vec{E}$  – мгновенное значение объемной плотности мощности сторонних источников.

Уравнение (3.45) является дифференциальной формой записи уравнения баланса мгновенных значений мощностей в электромагнитном поле.

Отметим, что принцип суперпозиции, которому удовлетворяют векторы напряженностей электрического и магнитного полей, не распространяется на энергию. Пусть энергии

двух полей  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , имеющих одинаковый закон изменения во времени и существующих по отдельности в области  $V$ , равны соответственно  $W_1$  и  $W_2$ . Рассмотрим энергию

суммарного поля  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left[ \varepsilon_a \left( \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right)^2 + \mu_a \left( \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \right)^2 \right] dV = W_1 + W_2 + W_{12}, \quad (3.46)$$

где  $W_{12} = \int_V \left[ \varepsilon_a \vec{E}_1 \vec{E}_2 + \mu_a \vec{H}_1 \vec{H}_2 \right] dV$  – взаимная энергия полей.

Увеличение суммарных электрического и магнитного полей вызывает не пропорциональное увеличение энергии суммарного поля, так как энергия связана с квадратом напряженности поля.

Если векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ , а так же  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  взаимно перпендикулярны, то  $W_{12} = 0$ .

Уравнение баланса мощностей в электромагнитном поле входит в систему основных уравнений электромагнитного поля и широко используется при решении электродинамических задач. Универсальное значение имеет вектор Пойнтинга, характеризующий не только перенос электромагнитной энергии посредством излучения в свободном пространстве, но и перенос энергии в линиях передачи.

### 3.5. Уравнение баланса мощностей в монохроматическом электромагнитном поле

Уравнение баланса (3.37) записано для мгновенных значений мощностей в электромагнитном поле и выполняется в каждый момент времени. Для гармонических полей практический интерес представляет также и уравнение баланса для средних за период колебаний значений мощностей. Выделим некий объем среды  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$  (рис. 3.2). Объем заполнен линейной, однородной и изотропной средой, внутри объема имеется источник монохроматического поля.

Определим средние за период значения энергетических характеристик, полученных в разделе 3.4. Уравнения монохроматического поля уже записаны через комплексные амплитуды, там метод комплексных амплитуд был применен к линейным уравнениям. Уравнение баланса (3.37) это нелинейное уравнение, все энергетические характеристики представляют собой скалярные произведения векторов поля и токов. Теперь придется воспользоваться другим комплексным представлением. Начнем с вектора Пойнтинга. Векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  выразим как полусуммы

комплексных и комплексно-сопряженных величин, где  $\vec{\dot{E}}, \vec{\dot{H}}$  – комплексные амплитуды

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{2} \left( \vec{\dot{E}} e^{j\omega t} + \vec{\dot{E}}^* e^{-j\omega t} \right); \\ \vec{H} &= \frac{1}{2} \left( \vec{\dot{H}} e^{j\omega t} + \vec{\dot{H}}^* e^{-j\omega t} \right).\end{aligned}\quad (3.47)$$

Подставляем эти выражения в мгновенное значение вектора Пойнтинга (3.42) и получим следующее выражение

$$\vec{\Pi} = \left[ \vec{E}, \vec{H} \right] = \frac{1}{4} \left[ \vec{\dot{E}}, \vec{\dot{H}} \right] + \frac{1}{4} \left[ \vec{\dot{E}}^*, \vec{\dot{H}}^* \right] + \frac{1}{4} \left[ \vec{\dot{E}}, \vec{\dot{H}}^* \right] e^{2j\omega t} + \frac{1}{4} \left[ \vec{\dot{E}}^*, \vec{\dot{H}} \right] e^{-2j\omega t}.$$

(3.48)

Перейдем к определению среднего за период колебаний значение вектора Пойнтинга по формуле

$$\vec{\Pi}_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\Pi} dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \vec{\dot{E}}, \vec{\dot{H}} \right]. \quad (3.49)$$

Таким образом, процесс переноса энергии в гармоническом электромагнитном поле характеризуется вещественным вектором (3.49), равным плотности потока мощности, усредненной за период. Вводится комплексный вектор Пойнтинга, определяемый

комплексными амплитудами векторов поля  $\vec{\dot{E}}$  и  $\vec{\dot{H}}$

$$\vec{\dot{\Pi}} = \frac{1}{2} \left[ \vec{\dot{E}}, \vec{\dot{H}}^* \right], \quad (3.50)$$

и обладающий тем свойством, что  $\vec{\Pi}_{cp} = \text{Re } \vec{\Pi}$ .

Согласно (3.49) переход к среднему значению сводится к следующему: одна величина заменяется комплексной амплитудой, другая – комплексно-сопряженной амплитудой, берется реальная часть и результат умножается на 1/2. Запишем средние значения объемных плотностей мощностей и энергий, входящих в уравнение баланса (3.45)

$$\begin{aligned} p_{n.cp} &= \frac{1}{2} \sigma \left| \vec{E} \right|^2, & w_{cp}^{\mathcal{E}} &= \frac{1}{4} \varepsilon_a \left| \vec{E} \right|^2, \\ w_{cp}^M &= \frac{1}{4} \varepsilon_a \left| \vec{H} \right|^2, & p_{cp}^{cm} &= \text{Re} \left( -\frac{1}{2} \vec{J}^{cm*} \vec{E} \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Для последней величины введем объемную плотность комплексной мощности сторонних источников, при этом  $p_{cp}^{cm} = \text{Re } p^{cm}$

$$p^{cm} = -\frac{1}{2} \vec{J}^{cm*} \vec{E}. \quad (3.52)$$

Уравнение баланса выводится из первого и второго уравнений Максвелла для монохроматического поля. Первое уравнение берем в сопряженном виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}^* &= \sigma \vec{E}^* - j\omega \varepsilon_a \vec{E}^* + \vec{J}^{cm*}; \\ \text{rot } \vec{E} &= -j\omega \mu_a \vec{H}. \end{aligned}$$

Первое уравнение скалярно умножаем на  $\vec{E}$ , второе на  $\vec{H}^*$ , из первого вычитаем второе и умножаем на 1/2

$$\frac{1}{2} \left( \vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} \right) = \frac{1}{2} \sigma \left| \vec{E} \right|^2 + 2j\omega \left( -\frac{1}{4} \varepsilon_a \left| \vec{E} \right|^2 + \frac{1}{4} \mu_a \left| \vec{H} \right|^2 \right) + \frac{1}{2} \vec{J}^{cm} \vec{E}. \quad (3.53)$$

Воспользуемся выражениями (3.34), (3.50), (3.51), (3.52) и перепишем (3.53) в следующем виде:

$$\text{div} \vec{\Pi} + p_{n.cp} + 2j\omega (w_{cp}^M - w_{cp}^\mathcal{E}) = p^{cm}. \quad (3.54)$$

Равенство (3.54) представляет собой уравнение баланса в дифференциальной форме. Проинтегрируем (3.53) по выделенному объему среды  $V$  и применим теорему Остроградского-Гаусса к интегралу от  $\text{div} \vec{\Pi}$

$$\oint_S \vec{\Pi} dS + \int_V \frac{1}{2} \sigma \left| \vec{E} \right|^2 dV + 2j\omega \int_V \left( \frac{1}{4} \mu_a \left| \vec{H} \right|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_a \left| \vec{E} \right|^2 \right) dV = \int_V \left( -\frac{1}{2} \vec{J}^{cm} \vec{E} \right) dV. \quad (3.55)$$

Это уравнение баланса комплексных мощностей, независящих от времени. Перепишем его в следующем виде

$$\dot{P}_\Sigma + P_{n.cp} + 2j\omega (W_{cp}^M - W_{cp}^\mathcal{E}) = \dot{P}^{cm}. \quad (3.56)$$

Разделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получаем два независимых уравнения

$$\text{Re} \dot{P}_\Sigma + P_{n.cp} = \text{Re} \dot{P}^{cm}. \quad (3.57)$$

$$\text{Im} \dot{P}_\Sigma + 2\omega (W_{cp}^M - W_{cp}^\mathcal{E}) = \text{Im} \dot{P}^{cm}. \quad (3.58)$$

Уравнение (3.57) представляет собой уравнение баланса средних за период мощностей, его называют так же уравнением активных мощностей. По известным комплексным амплитудам вычисляются средние значения или «постоянные части» энергетических характеристик электромагнитного процесса. Активная мощность стороннего источника – это мощность,



потраченная на излучение и на покрытие потерь в среде (нагрев среды). Уравнение (3.58) называют уравнением баланса реактивных (неактивных) мощностей. Реактивная мощность стороннего источника связана со сдвигом фаз между сторонним электрическим током и напряженностью электрического поля. Реактивная мощность потока электромагнитного поля связана со сдвигом фаз между напряженностями электрического и магнитного полей в проводящей среде ( $\sigma \neq 0$ ). При распространении электромагнитной волны в такой среде возникают электрические токи проводимости с плотностью  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , которые в свою очередь создают вторичную электромагнитную волну. Происходит непрерывный обмен энергией между первичной волной и средой, что и приводит к реактивному потоку энергии.

Вернемся к комплексному вектору Пойнтинга, используя

представление:  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\varphi_E}$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{j\varphi_H}$ , где  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$  - синфазные комплексные амплитуды

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}, \vec{H}^* \right] = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}_0, \vec{H}_0^* \right] e^{j(\varphi_E - \varphi_H)} \quad (3.59)$$

В формуле (3.59) фазы  $\varphi_E, \varphi_H$  определяют сдвиг по фазе между комплексными амплитудами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Если комплексные амплитуды векторов поля синфазны или противофазны ( $\varphi_E - \varphi_H = n\pi$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то  $\text{Im} \vec{\Pi} = 0$  и вся энергия переносится электромагнитной волной. Если комплексные амплитуды векторов поля имеют сдвиг по фазе  $\varphi_E - \varphi_H = \pm \frac{\pi}{2}$ , то

$\text{Re} \vec{\Pi} = \vec{\Pi}_{cp} = 0$  и рассматриваемый электромагнитный процесс в среднем за период не переносит энергии.

### 3.6. Скорость распространения электромагнитной энергии

Возбужденное переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве с конечной скоростью, перенося электромагнитную энергию из одной точки пространства в другую. Определение скорости распространения энергии связано с уравнением баланса мощности (3.37) и обусловлено потоком вектора Пойнтинга. Выделим в рассматриваемой части пространства так называемую энергетическую трубку, то есть трубку, на боковой поверхности которой перпендикулярная к ней составляющая вектора Пойнтинга равна нулю (рис. 3.3). Это означает, что через боковую поверхность трубки отсутствует излучение энергии.

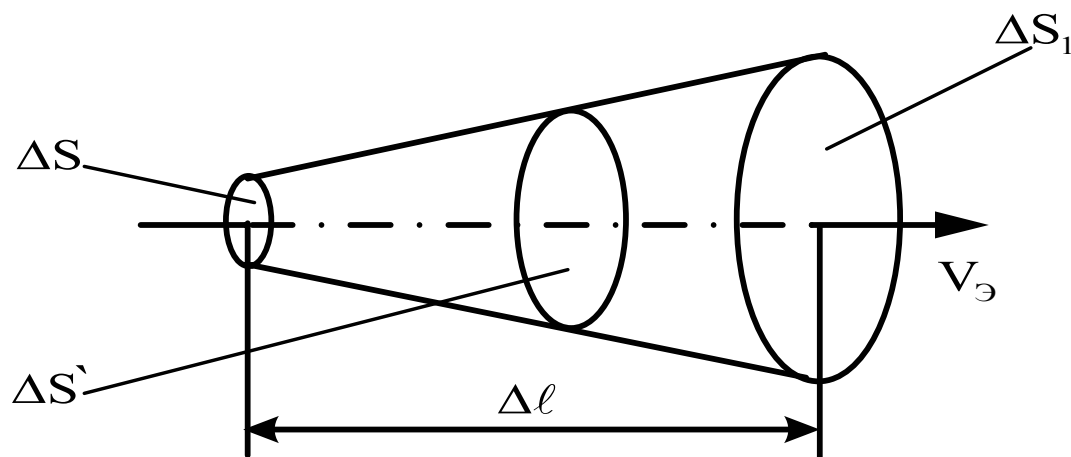


Рис. 3.3. К определению скорости распространения электромагнитной энергии

При этом условии средний за период поток энергии через поперечное сечение трубки при отсутствии тепловых потерь не изменится вдоль трубки.

Энергия электромагнитного поля  $\Delta W$ , прошедшая за время  $\Delta t$  через поперечное сечение трубки  $\Delta S$ , будет распределена с объемной плотностью  $w$  (3.39) в объеме  $\Delta V$ , ограниченном боковой поверхностью трубки и поперечными сечениями  $\Delta S$  и  $\Delta S_1$ , находящимися на расстоянии  $\Delta l$  друг от друга. Эта энергия может быть вычислена по формуле

$$\Delta W = \int_{\Delta V} w dV = \Delta l \int_{\Delta S'} w dS, \quad (3.60)$$

где  $\Delta S'$  – некоторое поперечное сечение, расположенное между сечениями  $\Delta S$  и  $\Delta S_1$ .

Будем называть скоростью распространения энергии  $\vec{V}_\Sigma$  предел отношения  $\Delta l$  к  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . При достаточно малых значениях  $\Delta t$  можно считать, что в пределах  $\Delta t$  вектор Пойнтинга не изменяется, поэтому наряду с (3.60) должно выполняться соотношение

$$\Delta W = \Delta t \int_{\Delta S} \vec{\Pi} d\vec{S}, \quad (3.61)$$

где  $d\vec{S} = \vec{l}_0 dS$ , а  $\vec{l}_0$  – единичный вектор, перпендикулярный к  $\Delta S$  и направленный в сторону  $\Delta S_1$ .

Приравняв правые части (3.60) и (3.61) и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , находим

$$\vec{V}_\Sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\int_{\Delta S} \vec{\Pi} d\vec{S}}{\int_{\Delta S} w dS}. \quad (3.62)$$

В выражении (3.62) учтено, что в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  сечение  $\Delta S'$  совпадает с  $\Delta S$ . Если  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а, следовательно, и вектор Пойнтинга  $\vec{\Pi}$  и объемная плотность энергии  $w$  не изменяются вдоль сечения  $\Delta S$ , формула (3.62) упрощается. Так как в этом случае направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением распространения энергии, то получаем следующую формулу расчета скорости распространения энергии

$$\vec{V}_\Sigma = \frac{\vec{\Pi}}{w} = \frac{\vec{\Pi}}{\frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}}, \quad \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]. \quad (3.63)$$

В случае монохроматического поля среднее за период значение скорости распространения энергии

$$\vec{V}_{\mathcal{E}cp} = \frac{\int \operatorname{Re} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}}{\int_{\Delta S} w_{cp} dS}. \quad (3.64)$$

Если значения вектора Пойнтинга и функции  $w_{cp}$  одинаковы во всех точках сечения  $\Delta S$ , выражение (3.64) можно записать в виде

$$\vec{V}_{\mathcal{E}cp} = \frac{\operatorname{Re} \vec{\Pi}}{w_{cp}} = \frac{\vec{\Pi}_{cp}}{\frac{1}{4} \varepsilon_a \left| \vec{E} \right|^2 + \frac{1}{4} \mu_a \left| \vec{H} \right|^2}. \quad (3.65)$$

В дальнейшем будет показано, что в среде без потерь ( $\sigma = 0$ ) скорость распространения энергии зависит только от параметров среды  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$  и не зависит от частоты и интенсивности поля.

### 3.7. Граничные условия для векторов электромагнитного поля на поверхности раздела сред

#### 3.7.1. Введение

Уравнения Максвелла, содержащие всю информацию об электромагнитном поле, позволяют определить, как изменяются векторы поля при переходе через границу раздела двух различных сред. На поверхности раздела параметры сред  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$  (или по крайней мере один из них) скачкообразно меняют свои значения. Например, на поверхности раздела вода-воздух происходят скачкообразные изменения проводимости и диэлектрической

проницаемости. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме используются в средах, параметры которых либо не зависят от координат, либо являются непрерывными функциями координат. На поверхности раздела сред, где нарушается непрерывность параметров среды, уравнения Максвелла в дифференциальной форме теряют смысл и должны быть дополнены условиями, определяющими поведение векторов поля на границе раздела сред. Эти условия устанавливаются с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.

Соотношения, показывающие связь между значениями составляющих векторов электромагнитного поля в разных средах у поверхности раздела, называются граничными условиями.

Задача о граничных условиях ставится следующим образом. Имеется некоторая граница раздела  $S$  между первой средой с параметрами  $\varepsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1$  и второй средой с параметрами  $\varepsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2$ . Среда – линейные, изотропные. На границе раздела отсутствуют сторонние источники. На поверхности  $S$  выделяем точку  $M$ , предполагая, что в малой окрестности этой точки со стороны первой среды поле задано, а поле со стороны второй среды нужно найти. Векторы поля в окрестности точки  $M$  раскладываются на тангенциальные (касательные) и нормальные составляющие к границе раздела. Например, вектор  $\vec{E}$  на границе раздела можно представить

$$\vec{E} = \vec{E}_\tau + \vec{E}_n = E_\tau \vec{\tau} + E_n \vec{n}. \quad (3.66)$$

Здесь  $\vec{\tau}, \vec{n}$  – единственные векторы (орты) касательного и нормального направлений (рис. 3.4).

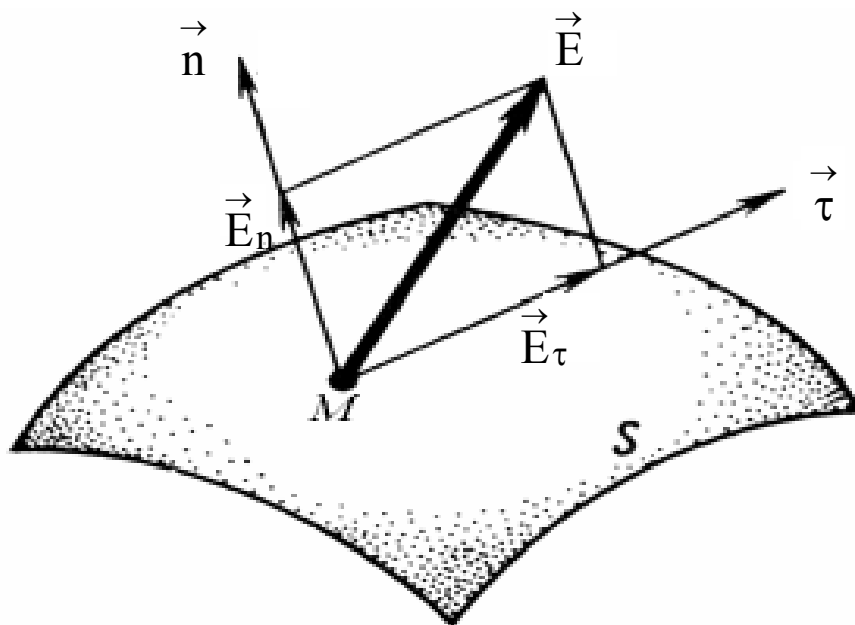


Рис. 3.4. Разложение одного из векторов поля на нормальную и касательную составляющие

Эти векторы лежат в плоскости, образованной вектором  $\vec{E}$  и нормалью к границе раздела, проведенной в точке  $M$ . Поведение нормальных и тангенциальных составляющих векторов поля рассматриваются по отдельности. В окрестности точки  $M$  выделяется элементарный объем  $\Delta V$  и элементарный контур  $\Delta L$  такие, что часть  $\Delta V$  и часть  $\Delta L$  находятся в первой среде, а другие их части – во второй среде. Тогда с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме можно связать векторы поля в обеих средах. При сжатии  $\Delta V$  и  $\Delta L$  к границе раздела сред предельные выражения уравнений Максвелла дадут граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля.

### 3.7.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля

Установим условия, определяющие поведение нормальных к границе раздела сред составляющих векторов поля. На поверхности раздела  $S$  в окрестности выбранной точки  $M$  выделим элемент поверхности  $\Delta S$ . Элемент  $\Delta S$  должен быть настолько мал, чтобы, во-первых, его можно было считать плоским, во-вторых, чтобы в

обеих средах распределение нормальной компоненты вектора  $\vec{D}$  можно было считать равномерным в пределах  $\Delta S$ . На элементе  $\Delta S$  строится цилиндр высотой  $\Delta h$  так, чтобы его основания (торцы) находились в разных средах (рис. 3.5).

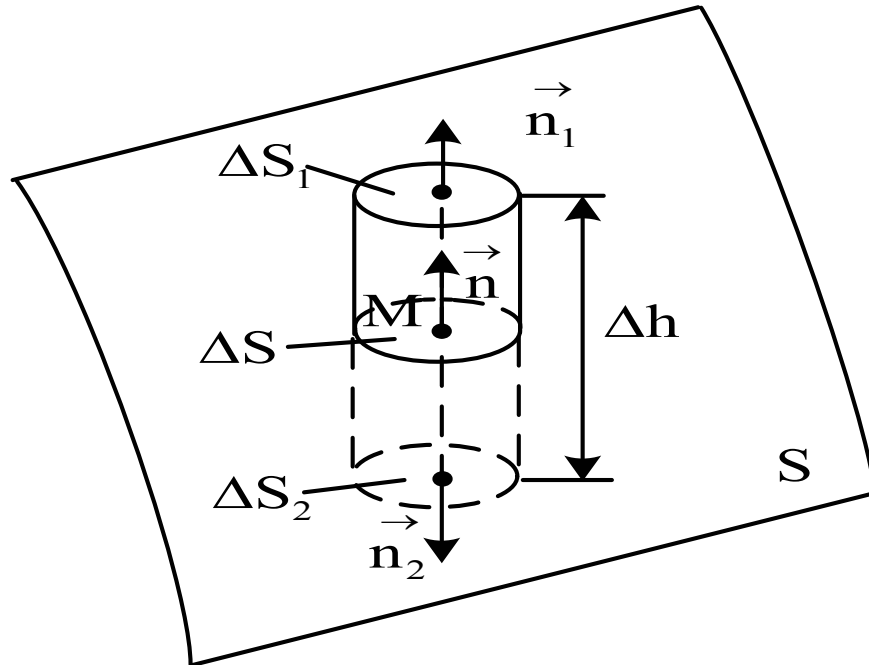


Рис. 3.5. К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля

Единичные векторы  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  – орты нормали к торцам цилиндра,  $\vec{n}$  – орт нормали к границе раздела. Применим третье уравнение Максвелла в интегральной форме к объему цилиндра  $\Delta V$ , ограниченного поверхностями торцов  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  и боковой поверхностью цилиндра  $\Delta S_\delta$ .

$$\int_{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_\delta} \vec{D} \cdot \vec{dS} = \int_{\Delta V} \rho dV. \quad (3.67)$$

Сжимаем цилиндр к границе раздела, устремляя  $\Delta h \rightarrow 0$ . Так как при  $\Delta h \rightarrow 0$  имеем  $\Delta S_\delta \rightarrow 0$ , поэтому интеграл по боковой поверхности цилиндра стремится к нулю. В левой части (3.67) сохраняются интегралы по поверхностям торцов  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$ , остающимся в своих средах вблизи границы раздела

$$\int_{\Delta S_1} \vec{D} d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S_2} \vec{D} d\vec{S}_2 = \int_{\Delta V} \rho dV, \quad (3.68)$$

где  $\vec{dS}_1 = \Delta S_1 \vec{n}_1, \vec{dS}_2 = \Delta S_2 \vec{n}_2$ .

Учтем, что при  $\Delta h \rightarrow 0$ :

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S, \quad \vec{n}_1 = \vec{n},$$

$$\vec{n}_2 = -\vec{n}, \quad \Delta V = \Delta S \Delta h.$$

Поскольку  $\Delta S$  мало, то можно вынести  $\vec{D}_1, \vec{D}_2$  и  $\rho$  из под знака интеграла. Таким образом, при  $\Delta h \rightarrow 0$  из (3.68), сокращая  $\Delta S$ , получаем соотношение

$$\left( \vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} \right) = \rho \Delta h. \quad (3.69)$$

В случае реальных сред заряды не скапливаются на границе раздела, они сосредоточиваются в тонком приграничном слое, так что объемная плотность зарядов остается конечной величиной и правая часть (3.69) стремится к нулю при  $\Delta h \rightarrow 0$ . Соотношение (3.69) принимает вид

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (3.70)$$

Равенство (3.70) представляет собой граничное условие, которое формулируется следующим образом: нормальные составляющие вектора электрической индукции  $\vec{D}$  на границе раздела двух сред непрерывны.

Выражая в уравнении (3.70)  $D_{n1}$  и  $D_{n2}$  через  $E_{n1}$  и  $E_{n2}$  с помощью материального уравнения  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ , получаем граничное условие для нормальных компонент вектора  $\vec{E}$



$$\varepsilon_{a1} E_{n1} = \varepsilon_{a2} E_{n2} \quad \text{или} \quad E_{n1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{n2}. \quad (3.71)$$

Соотношение (3.71) показывает, что нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  при переходе через поверхность раздела реальных сред имеет разрыв (скачок), величина которого определяется отношением диэлектрических проницаемостей этих сред.

Применим к объему цилиндра  $\Delta V$  четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\int_{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_{\text{б}}} \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

При  $\Delta h \rightarrow 0$  предельное выражение этого уравнения представляет собой граничное условие для нормальных компонент вектора магнитной индукции  $\vec{B}$

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (3.72)$$

Нормальные составляющие вектора  $\vec{B}$  при переходе через поверхность раздела сред непрерывны. Из материального уравнения  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$  получаем граничное условие для нормальных компонент вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$

$$\mu_{a1} H_{n1} = \mu_{a2} H_{n2} \quad \text{или} \quad H_{n1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{n2}. \quad (3.73)$$

Условия (3.73) показывают, что нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  при переходе через поверхность раздела сред имеет разрыв, величина которого определяется отношением магнитных проницаемостей этих сред.

Граничные условия (3.70) ÷ (3.73) справедливы для мгновенных значений векторов переменного электромагнитного поля. В случае гармонически изменяющегося поля

(монохроматического) граничные условия (3.70) ÷ (3.73) записываются для независящих от времени комплексных амплитуд векторов поля

$$\vec{D}_{n1} = \vec{D}_{n2}, \quad \vec{E}_{n1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \vec{E}_{n2}, \quad \vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2}, \quad \vec{H}_{n1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{H}_{n2}. \quad (3.74)$$

### 3.7.3. Граничные условия для касательных составляющих векторов электромагнитного поля

Установим условия, определяющие поведение касательных к границе раздела сред составляющих векторов поля. На поверхности раздела  $S$  двух изотропных сред из произвольной точки  $M$  проводится единичная нормаль  $\vec{n}$ , направленная из второй среды в первую (рис. 3.6).

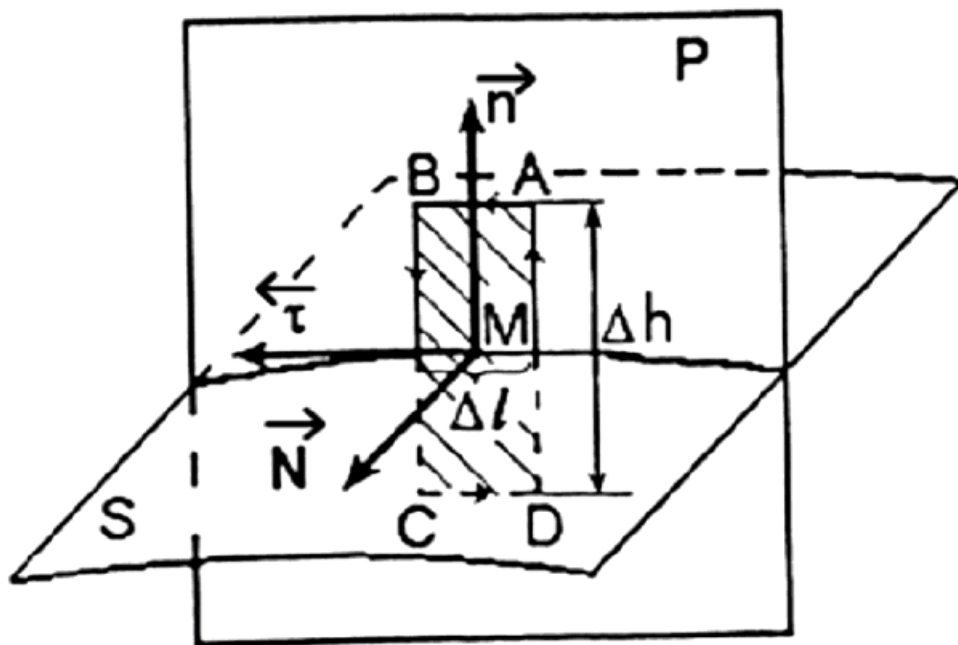


Рис. 3.6. К выводу граничных условий для касательных составляющих векторов электромагнитного поля

Через  $\vec{n}$  проведем плоскость  $P$ . На линии пересечения поверхности раздела  $S$  с плоскостью  $P$  выделим малый отрезок  $\Delta l$ , содержащий точку  $M$ . Размеры отрезка должны быть такими

малыми, чтобы, во-первых, его можно было считать прямолинейным, а во-вторых, чтобы распределения касательной составляющей вектора  $\vec{H}$  в пределах  $\Delta l$  в обеих средах можно было считать равномерными. В плоскости  $P$  построим прямоугольный замкнутый контур  $\Delta L$  ( $ABCD$ ). Стороны  $AB$  и  $CD$  параллельны  $\Delta l$  и находятся в разных средах. В точке  $M$  проведем единичную касательную  $\vec{\tau}$  к линии пересечения поверхности раздела  $S$  с плоскостью  $P$  и единичную нормаль  $\vec{N}$  к плоскости  $P$ . Орты  $\vec{n}$ ,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{N}$  составляют правую тройку векторов

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{\tau} \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

Обход контура  $ABCD$  образует правовинтовую систему с вектором  $\vec{N}$ .

Применим к контуру  $ABCD$  первое уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_{ABCD} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Delta S} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}, \quad (3.76)$$

где  $\Delta S$  – площадь, охваченная контуром  $ABCD$ , а  $d\vec{S} = \vec{N} dS = \vec{N} \Delta l \Delta h$ . Интеграл по замкнутому контуру  $ABCD$  в (3.76) представляем в виде суммы по частям контура  $AB$  и  $CD$  и двух интегралов по боковым сторонам длиной  $\Delta h$ . Устремляем  $\Delta h \rightarrow 0$ , при этом интегралы по боковым сторонам стремятся к нулю. В левой части (3.76) сохраняются интегралы по сторонам контура  $AB$  и  $CD$ , остающимся в своих средах вблизи границы раздела

$$\int_{AB} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Delta S} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{N} \cdot \Delta l \cdot \Delta h. \quad (3.77)$$

Далее при  $\Delta h \rightarrow 0$  имеем:

$$\vec{dl} = \vec{\tau} \Delta l \text{ на } AB \text{ и } \vec{dl} = -\vec{\tau} \Delta l \text{ на } CD.$$

Поскольку  $\Delta l$  мало, векторы поля и плотности токов можно вынести из под знака интеграла. Таким образом, при  $\Delta h \rightarrow 0$  из (3.77), сокращая  $\Delta l$ , получаем соотношение

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau} = \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{N} \cdot \Delta h. \quad (3.78)$$

В реальных средах числовые значения параметров сред конечны, следовательно, векторы плотности тока проводимости и тока смещения имеют конечные значения, при этом правая часть (3.78) при  $\Delta h \rightarrow 0$  стремится к нулю. Соотношение (3.78) принимает окончательный вид граничного условия

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (3.79)$$

Применим к контуру  $ABCD$  второе уравнение Максвелла в интегральной форме, проведем аналогичные преобразования и получим граничное условие для тангенциальных составляющих вектора  $\vec{E}$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (3.80)$$

Условия (3.79), (3.80) формулируются следующим образом: касательные составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей остаются непрерывными при переходе через поверхность раздела реальных сред.

Воспользуемся материальным уравнением  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$  и запишем с учетом (3.80) граничные условия для касательных составляющих вектора  $\vec{D}$

$$\frac{1}{\varepsilon_{a1}} D_{\tau 1} = \frac{1}{\varepsilon_{a2}} D_{\tau 2} \text{ или } D_{\tau 1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_{\tau 2}. \quad (3.81)$$

Касательная составляющая вектора  $\vec{D}$  претерпевает разрыв, величина которого определяется отношением диэлектрических

проницаемостей сред. Из материального уравнения  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$  и граничного условия (3.79) имеем

$$\frac{1}{\mu_{a1}} B_{\tau 1} = \frac{1}{\mu_{a2}} B_{\tau 2} \text{ или } B_{\tau 1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{\tau 2}. \quad (3.82)$$

Граничное условие (3.82) показывает, что касательная составляющая вектора  $\vec{B}$  претерпевает разрыв, величина которого зависит от соотношения между магнитными проницаемостями.

Граничные условия (3.79) и (3.82) записаны для мгновенных значений векторов переменного электромагнитного поля. В случае монохроматического поля граничные условия записываются для комплексных амплитуд векторов поля

$$\dot{H}_{\tau 1} = \dot{H}_{\tau 2}, \quad \dot{E}_{\tau 1} = \dot{E}_{\tau 2}, \quad \dot{D}_{\tau 1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \dot{D}_{\tau 2}, \quad \dot{B}_{\tau 1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \dot{B}_{\tau 2}. \quad (3.83)$$

Обратим внимание на тот факт, что граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля имеют различия. Причину этих различий покажем на примере вектора  $\vec{E}$ . Пусть имеются две изотропные среды с общей границей раздела, характеризуемые диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_{a1}$  и  $\epsilon_{a2}$ . Под воздействием внешнего электрического поля обе среды поляризуются, причем вектор поляризованности  $\vec{P}$  будет иметь различные значения, так как  $\epsilon_{a1} \neq \epsilon_{a2}$ . Пусть вектор  $\vec{E}$ , а, следовательно, и вектор  $\vec{P}$  перпендикулярны границе раздела (рис. 3.7).

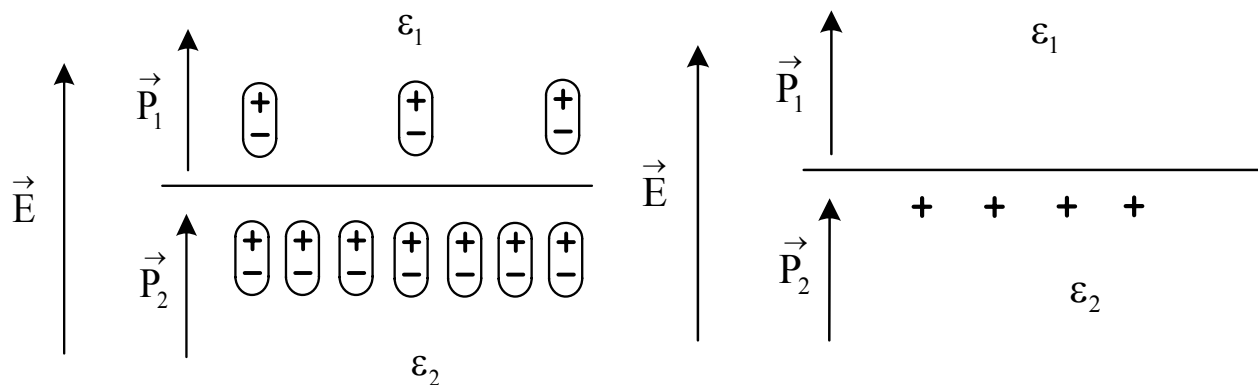


Рис. 3.7. Поляризация диэлектриков при нормальной ориентации

вектора  $\vec{E}$

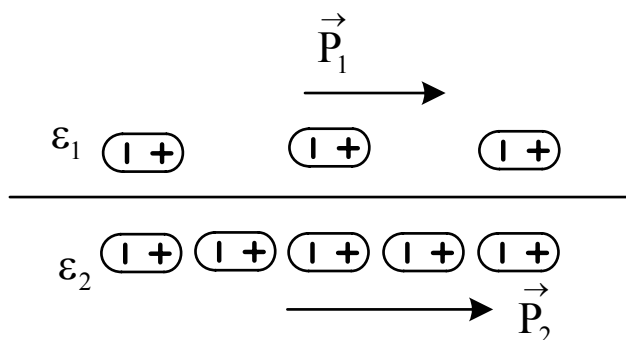


Рис. 3.8. Поляризация диэлектриков при касательной ориентации

вектора  $\vec{E}$

На рис. 3.7. показан случай, когда  $\epsilon_{a1} < \epsilon_{a2}$  и вторая среда поляризуется легче (символически это отображено на рис. 3.7) тем, что во второй среде больше молекулярных диполей, ориентированных параллельно вектору  $\vec{E}$ . На границе раздела возникают нескомпенсированные положительные связанные заряды (вторичные источники). Эти заряды создают дополнительное электрическое поле, которое в первой среде складывается с первичным полем, а во второй – вычитается, так что

$E_{n1} \neq E_{n2}$  и нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  имеет разрыв при переходе через границу раздела.

Если векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$  параллельны поверхности раздела (рис. 3.8), то нескомпенсированных зарядов на границе раздела не возникает,  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$  и тангенциальная составляющая непрерывна. Но при этом тангенциальная составляющая вектора индукции электрического поля  $D_{\tau} = \varepsilon_0 E_{\tau} + P_{\tau}$  испытывает скачок в силу одинаковых  $E_{\tau}$  в обеих средах, но разных  $P_{\tau}$ . Различие в граничных условиях для нормальных и тангенциальных составляющих векторов магнитного поля  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  объясняется разной степенью намагниченности сред, что приводит к появлению поверхностных молекулярных токов, создающих дополнительное магнитное поле.

### 3.7.4. Граничные условия на поверхности идеального проводника

При изучении переменных электромагнитных полей вблизи поверхности металлического тела предполагают, что рассматриваемое тело является идеальным проводником. При этом граничные условия упрощаются, так как в среде с  $\sigma \rightarrow \infty$  переменное поле отсутствует. Пусть идеально проводящей является вторая среда, тогда  $\vec{D}_2 = \vec{E}_2 = \vec{B}_2 = \vec{H}_2 = 0$ . Первая среда изотропная, непроводящая. Поведение нормальных составляющих векторов поля установим с помощью соотношения (3.69)

$$\left( \vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} \right) = \rho \Delta h.$$

В присутствии переменного поля заряды идеального проводника сосредотачиваются на его поверхности в бесконечно тонком слое, распределяясь с некой поверхностной плотностью. Представим объемную плотность зарядов в следующем виде:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta h} = \frac{\rho_S}{\Delta h}, \quad (3.84)$$

где  $\Delta S$  – элемент поверхности проводника;

$\rho_S = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$  – поверхностная плотность заряда (её часто называют также плотность поверхностных зарядов).

Тогда правая часть соотношения (3.69) принимает вид  $\rho_S$ , и, приравняв нулю  $D_{n2}$ , получаем граничное условие для нормальной составляющей вектора  $\vec{D}$  на поверхности идеального проводника

$$D_{n1} = \rho_S. \quad (3.85)$$

Нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  определяется из материального уравнения  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$

$$E_{n1} = \frac{\rho_S}{\epsilon_{a1}}. \quad (3.86)$$

Нормальные составляющие векторов магнитного поля определяются из (3.72) и (3.73)

$$B_{n1} = 0, \quad H_{n1} = 0. \quad (3.87)$$

Поведение касательных к поверхности  $S$  проводника составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  установим с помощью соотношения (3.78)

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau} = \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{N} \cdot \Delta h.$$

Объемная плотность тока смещения величина всегда конечна, так как векторы поля и их производные величины ограниченные,



поэтому в правой части (3.78) имеем  $\left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \Delta h \rightarrow 0$  при  $\Delta h \rightarrow 0$ .

Особый разговор об объёмной плотности тока проводимости в правой части (3.78)

$$\Delta h \vec{j} = \Delta h \rho \vec{v} = \Delta h \vec{v} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta h}, \quad (3.88)$$

где  $\vec{v}$  – скорость носителей заряда.

Поскольку заряд сосредоточен на поверхности, (3.88) примет вид

$$\Delta h \vec{j} = \vec{v} \rho_S = \vec{j}_S, \quad (3.89)$$

где  $\vec{j}_S$  – поверхностная плотность тока проводимости (её часто называют плотность поверхностного тока).

Поверхностная плотность тока проводимости  $\vec{j}_S$  имеет размерность А/м. Теперь предельный переход в (3.78) даст правую часть, отличную от нуля

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} = \vec{j}_S \vec{N}. \quad (3.90)$$

Заменяем  $\vec{\tau} = \left[ \vec{N}, \vec{n} \right]$  и используем свойства циклической перестановки сомножителей в смешанном произведении, в результате получаем

$$\left[ \vec{n}, \vec{H}_1 \right] \vec{N} = \vec{j}_S \vec{N}.$$

Поскольку это равенство выполняется при любом направлении орта  $\vec{N}$ , то из этого следует:

$$\left[ \vec{n}, \vec{H}_1 \right] = \vec{j}_S \text{ или } \left[ \vec{n}, \vec{H}_{\tau 1} \right] = \vec{j}_S. \quad (3.91)$$

Из уравнения (3.80) получаем граничное условие для тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}$

$$E_{\tau 1} = 0. \quad (3.92)$$

Итак, на поверхности идеального проводника выполняются следующие граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов поля:

$$E_{\tau 1} = 0, \quad E_{n1} = \frac{\rho_S}{\epsilon_{a1}}, \quad H_{n1} = 0, \quad \left[ \vec{n}, \vec{H}_{\tau 1} \right] = \vec{j}_S. \quad (3.93)$$

Тангенциальная составляющая магнитного поля наводит на поверхности идеального проводника электрический ток с плотностью  $\vec{j}_S$ , который перпендикулярен вектору магнитного поля  $\vec{H}$ . На поверхности идеального проводника нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  и касательная составляющая вектора  $\vec{E}$  обращаются в нуль. Силовые линии магнитного поля (замкнутые) подходят к идеальному проводнику так, что только касаются его поверхности. Силовые линии электрического поля к идеальному проводнику подходят так, что всегда перпендикулярны его поверхности.

## Глава 4. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде

### 4.1. Волновые уравнения

Одним из важнейших результатов, полученных Максвеллом, явилось доказательство волновой природы переменного во времени электромагнитного поля. Уже утверждалось то, что изменение во времени электрического поля приводит к возникновению вихревого магнитного поля, изменяющегося в пространстве, и наоборот. Докажем волновой характер электромагнитного поля математически. Сведем уравнения Максвелла к другим уравнениям, которые заведомо описывают волновой процесс. Для

этого можно взять уравнение Максвелла в виде, не охватывающем явление «первичного возбуждения» электромагнитного поля, то есть без сторонних источников, и исследовать поведение поля за пределами области, где находятся его источники.

Рассмотрим однородную изотропную среду с заданными параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$ . Для упрощения математических преобразований предположим, что проводимость среды  $\sigma = 0$ , то есть это идеальная диэлектрическая среда без потерь. Исходными являются уравнения Максвелла для данной среды

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (4.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (4.2)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0; \quad (4.3)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (4.4)$$

Уравнения (4.1) и (4.2) взаимосвязаны, в каждое из них входит и вектор  $\vec{E}$ , и вектор  $\vec{H}$ . При выделении из (4.1) и (4.2) в отдельности вектора  $\vec{E}$  и вектора  $\vec{H}$  приходим к дифференциальным уравнениям второго порядка для каждого вектора. Возьмем ротор от обеих частей уравнения (4.1) и изменим порядок дифференцирования по времени и по пространственным координатам в правой части (4.1)

$$\text{rot rot } \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}. \quad (4.5)$$

Используем равенство из векторного анализа

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}, \quad (4.6)$$

где  $\nabla^2 = \Delta$  – оператор Лапласа.

Подставляя (4.4) в (4.6) и (4.2), (4.6) в (4.5), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для вектора  $\vec{H}$

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.7)$$

Взяв ротор от обеих частей уравнения (4.2), аналогичным образом выводится уравнение для вектора  $\vec{E}$

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.8)$$

Коэффициент перед второй производной по времени в уравнениях (4.7), (4.8) имеет размерность сек<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>, то есть обратно пропорционален квадрату скорости. Каждое из векторных уравнений (4.7), (4.8) эквивалентно трем скалярным уравнениям. Обозначим через  $S$  любую из пространственных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , тогда скалярные уравнения принимают вид

$$\nabla^2 S - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0. \quad (4.9)$$

Как известно, уравнения вида (4.9) описывают волновые процессы, причем параметр  $V$  равен скорости распространения этого процесса. Такие уравнения называют однородными (с правой нулевой частью) уравнениями Даламбера или однородными волновыми уравнениями. Искомая функция  $S$ , описывающая волновой процесс, изменяется и в пространстве и во времени. При учете источников волновых процессов правая часть уравнения (4.9) не равна нулю и уравнение называется неоднородным. Волновое уравнение (4.9) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого являются функции вида  $F\left(t \mp \frac{r}{V}\right)$ , где верхний знак соответствует волне, бегущей вдоль направления  $r$ , а нижний знак - волне, бегущей в противоположном направлении. Выбор физического решения выполняется на основе знания местоположения источника.

Полученные уравнения для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитного процесса отличаются от (4.9) только тем, что входящие в них функции являются векторными. Уравнения такого типа (4.7), (4.8) называют однородными векторными уравнениями Даламбера или однородными векторными волновыми уравнениями. Входящий в уравнения (4.7), (4.8) параметр

$$\varepsilon_a \mu_a = \frac{1}{V^2} \quad (4.10)$$

связан со скоростью распространения электромагнитной волны в среде без потерь.

Для монохроматического поля вновь воспользуемся комплексным представлением мгновенных значений векторов поля, входящих в уравнения (4.7), (4.8)

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left( \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \right); \quad \vec{H} = \operatorname{Re} \left( \dot{\vec{H}} e^{j\omega t} \right). \quad (4.11)$$

Выполнив дифференцирование по времени в волновых уравнениях (4.7), (4.8) и сократив  $e^{j\omega t}$ , получим волновые

уравнения для комплексных амплитуд векторов поля  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0; \quad (4.12)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0, \quad (4.13)$$

где  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{V}$  – постоянная распространения.

Величина  $k$  имеет размерность рад/м или, короче,  $\text{м}^{-1}$ . Для  $k$  употребляются также термины коэффициент фазы и волновое число, это одна из важнейших характеристик волнового процесса. В теории гармонических волновых процессов уравнения (4.12), (4.13) получили название однородные векторные уравнения Гельмгольца. Если среда обладает потерями, в общем случае и электрическими, и магнитными, она характеризуется комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями

$\dot{\varepsilon}_a, \dot{\mu}_a$ . Тогда волновое число становится комплексным

$\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a}$  и уравнения Гельмгольца принимают вид

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \dot{k}^2 \dot{\vec{E}} = 0; \quad (4.14)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0. \quad (4.15)$$

Волновые уравнения (4.7), (4.8) для мгновенных значений векторов поля и волновые уравнения (4.12) – (4.15) для комплексных амплитуд векторов монохроматического поля описывают волновые процессы, то есть распространение электромагнитных волн в пространстве. Здесь и в дальнейшем речь пойдет о так называемых свободных волнах, распространяющихся в свободном пространстве (или в неограниченной однородной изотропной среде) и “потерявших” в процессе распространения связь со своими источниками. Ниже изучаются гармонические волны, математическая запись которых является решением волновых уравнений Гельмгольца. При решении волновых уравнений в сферической системе координат получаем математическую запись сферической волны, в цилиндрической системе координат – цилиндрической волны, в декартовой системе координат – плоской волны. В данном разделе будет изучен простейший вид волнового процесса – плоские однородные волны.

## 4.2. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде

Плоской называется электромагнитная волна, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  которой имеют постоянные фазы на плоскости, ортогональной направлению распространения. Эта плоскость называется фронтом волны, ее называют еще поверхностью равных фаз или волновой поверхностью или синфазной поверхностью. Плоская волна называется однородной, если амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не меняются в плоскости фронта. Возбудить в неограниченном пространстве плоскую однородную волну с помощью реального устройства невозможно, так как при этом источник должен представлять бесконечную синфазную плоскость и затрачивать бесконечную мощность. Понятие плоской однородной волны применяется как простейшая математическая модель, раскрывающая основные свойства свободных электромагнитных волн. В реальных случаях это понятие используется при

аппроксимации сложного волнового фронта в локальных условиях пространства. Так на достаточно большом расстоянии от источника малый участок сферического фронта в ограниченных участках пространства из-за малой кривизны можно заменить плоскостью и сферическую волну локально аппроксимировать плоской волной. Например, пусть сферическая волна создается элементарным электрическим вибратором. Рассмотрим электромагнитное поле в дальней зоне в безграничной однородной изотропной среде без

потерь. Предположим, что векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  требуется знать только в области  $V$ , размеры которой малы по сравнению с расстоянием до источника  $r_0$ . Под объемом  $V$  можно понимать объем приемной антенны с поперечными размерами малыми по сравнению с расстоянием до излучателя. Введем декартову систему координат  $x, y, z$ , ось  $z$  которой проведена вдоль радиуса – вектора, соединяющего середину вибратора  $Q$  с точкой  $O$ , принятой за начало координат (рис. 4.1).

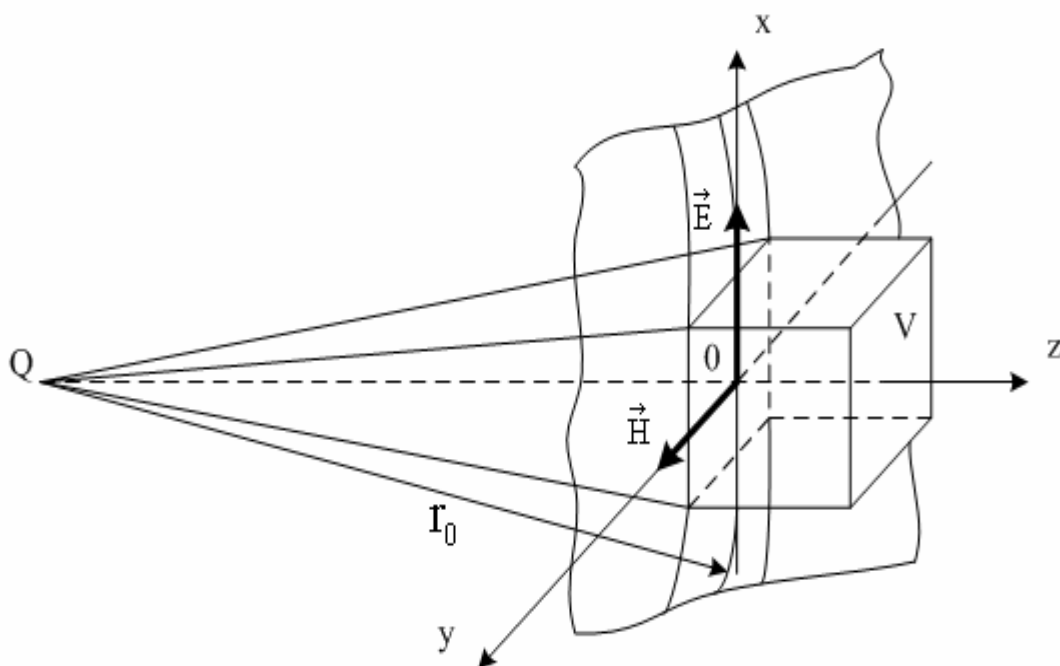


Рис. 4.1. К понятию локально плоского фронта волны

Ориентация векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  относительно осей  $x$  и  $y$  зависит от ориентации вибратора. В общем случае эти векторы могут иметь составляющие по осям  $x$  и  $y$ . В пределах объема  $V$  векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  синфазны и поверхности равных фаз

определяются уравнением  $z = \text{const}$ , т. е. представляют собой плоскости, перпендикулярные направлению распространения по оси  $z$ . Таким образом, сферическую волну в пределах области  $V$  можно рассматривать как плоскую. Этот вывод относится к любому источнику, излучающему сферическую волну.

Определение поля плоской однородной волны, и анализ основных ее параметров проведем в безграничной однородной изотропной среде с заданными параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$  и  $\sigma = 0$ . Частным случаем такой идеальной диэлектрической среды является вакуум с параметрами  $\epsilon_a = \epsilon_0, \mu_a = \mu_0, \sigma = 0$ . Атмосферный воздух по своим параметрам близок к вакууму, так что в большинстве случаев для расчета электромагнитных полей воздух рассматривается как среда с  $\epsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$ . Введем декартову систему координат (рис. 4.2).

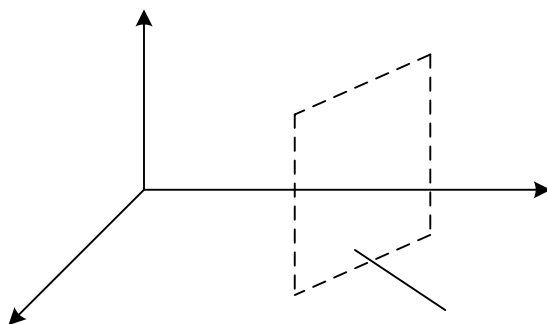


Рис. 4.2. Система координат для плоской волны

Источник, создающий плоскую однородную волну, находится за пределами рассматриваемой области. Предположим, он расположен со стороны отрицательных значений координаты  $z$  (рис. 4.1). Так как среда безгранична, то в рассматриваемой области пространства ( $z > 0$ ) волна распространяется в положительном направлении оси  $z$ . Фронт волны представляет собой бесконечные плоскости, перпендикулярные направлению распространения. Уравнение фронта волны  $z = \text{const}$ .

Поле плоской однородной волны определим из решения однородных уравнений Гельмгольца (4.12), (4.13)

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (4.16)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0. \quad (4.17)$$



Векторные уравнения (4.16), (4.17) эквивалентны системе шести скалярных уравнений, решение которых максимально упрощается для плоской однородной волны. Так как волна плоская и однородная, то фазы и амплитуды векторов поля не меняются в плоскости фронта, т. е. не зависят от координат  $x$  и  $y$ . Искомые

комплексные амплитуды  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  являются функциями только одной координаты  $z$ . Производные по координатам  $x$  и  $y$  равны нулю. Далее покажем, что если векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  зависят от одной координаты (в данном случае координаты  $z$ ), то у них отсутствует составляющая по этой координате. Запишем второе уравнение Максвелла в виде системы трех скалярных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_x; \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_y; \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_z.\end{aligned}\quad (4.18).$$

Из третьего уравнения сразу получаем  $\dot{H}_z = 0$ . Аналогичным образом из первого уравнения Максвелла получаем  $\dot{E}_z = 0$ . С учетом проведенного анализа векторное уравнение Гельмгольца (4.16) сводится к двум скалярным уравнениям. Это дифференциальные уравнения второго порядка уже не в частных, а в обыкновенных производных, так как  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  зависят лишь от координаты  $z$

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x = 0; \quad (4.19)$$

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y = 0. \quad (4.20)$$

Общее решение этих дифференциальных уравнений представляет собой сумму двух экспоненциальных слагаемых

$$\dot{E}_x = E_{mx} e^{-jkz} + E'_{mx} e^{jkz}; \quad (4.21)$$

$$\dot{E}_y = E_{my} e^{-jkz} + E'_{my} e^{jkz}, \quad (4.22)$$

где  $E_{mx}$ ,  $E'_{mx}$ ,  $E_{my}$ ,  $E'_{my}$  – амплитуды, определяемые мощностью источника.

Функция  $e^{\pm jkz}$  – называется волновым множителем, а так же оператором бегущей волны или фазовым множителем. Покажем, что решение, содержащее множитель  $e^{-jkz}$ , описывает волновой процесс, распространяющийся с определенной скоростью в положительном направлении оси  $z$  (так называемая прямая волна). Проведем рассуждения, например, для первого частного решения (4.21), записав его мгновенное значение.

$$E_x(z, t) = \operatorname{Re} E_{mx} e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t} = E_{mx} \cos(\omega t - kz). \quad (4.23)$$

В выражении (4.23)  $E_{mx}$  – амплитуда,  $(\omega t - kz)$  – фаза,  $\omega$  – круговая частота,  $k$  – коэффициент фазы. Напряженность электрического поля изменяется в пространстве и во времени. В фиксированной точке пространства, например  $z = 0$ , электрическое поле  $E_x(0, t)$  изменяется во времени по гармоническому закону

$$E_x(0, t) = E_{mx} \cos(\omega t).$$

Временной интервал, по истечению которого фаза меняется на  $2\pi$ , называется периодом  $T$

$$\omega T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \quad (4.24)$$

Если зафиксировать время, например  $t=0$ , то распределение  $E_x(z, 0)$  также имеет гармонический характер

$$E_x(z, 0) = E_{mx} \cos(kz).$$

Пространственный интервал, по прохождению которого фаза меняется на  $2\pi$  вдоль направления распространения, называется длиной волны  $\lambda$

$$k\lambda = 2\pi, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (4.25)$$

Таким образом, частота  $\omega$  переводит временной интервал  $T$  в фазу  $2\pi$ , а коэффициент  $k$  переводит пространственный интервал  $\lambda$  в ту же фазу.

Поверхность, удовлетворяющая уравнению постоянства фазы

$$\omega t - kz = \text{const}, \quad (4.26)$$

представляет собой фронт волны  $z = \text{const}$ . В рассматриваемом случае фронт представляет собой бесконечные плоскости, перпендикулярные оси  $z$ . Скорость перемещения фронта волны называется фазовой скоростью

$$V_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\omega t - \text{const}}{k} \right) = \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (4.27)$$

Выражение фазовой скорости (4.27) совпало со скоростью (4.10), входящей в волновые уравнения (4.7), (4.8). Фазовая скорость может быть определена экспериментально через измеренное значение длины волны в интерференционной картине поля, образованной волной падающей на границу раздела сред и отраженной волной. Возвращаемся к уравнению постоянства фазы (4.26). Поскольку время изменяется всегда лишь в одном направлении, уравнение  $\omega t - kz = \text{const}$  выполняется, если возрастает координата  $z$ , и соответствует перемещению фронта в направлении положительной оси  $z$ .

Таким образом, решение (4.23) определяет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $z$ . Мгновенное значение второго решения в (4.21) имеет вид

$$E_x(z, t) = E'_{mx} \cos(\omega t + kz). \quad (4.28)$$

Здесь уравнение постоянства фазы

$$\omega t + kz = \text{const}$$

будет выполняться, если положительным изменениям времени  $\Delta t$  соответствуют уменьшение координаты  $\Delta z$ , то есть волна (4.28) распространяется вдоль убывающих значений  $z$  (так называемая обратная волна). Эти волны (прямая и обратная) не связаны между собой, так как им соответствуют два линейно независимых

решения дифференциального уравнения (4.19). Ранее мы предположили, что источник расположен со стороны отрицательных значений  $z$  и в безграничной среде должна существовать только волна (4.23), бегущая в положительном направлении оси  $z$ . Поэтому в (4.28) берем  $E'_{mx} = 0$ . Все приведенные рассуждения относятся и к уравнению (4.22).

Итак, решение однородного уравнения Гельмгольца (4.16) определяет электрическое поле плоской однородной волны, распространяющейся вдоль оси  $z$

$$\dot{E}_x = E_{mx} e^{-jkz}, \quad \dot{E}_y = E_{my} e^{-jkz}, \quad \dot{E}_z = 0. \quad (4.29)$$

Аналогично может быть записано решение однородного уравнения Гельмгольца (4.17) для комплексной амплитуды вектора  $\vec{H}$ . Но уравнения Гельмгольца (4.16) и (4.17) независимы, и теряется связь между комплексными амплитудами векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Эта связь заложена в уравнениях Максвелла, и необходимо воспользоваться этой дополнительной информацией.

По найденному вектору  $\vec{E}$  (4.29) из второго уравнения Максвелла (4.18) определяем напряженность магнитного поля

$$\dot{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\mu_a} \dot{E}_y; \quad (4.30)$$

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = \frac{k}{\omega\mu_a} \dot{E}_x. \quad (4.31)$$

Значения комплексных амплитуд векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в любой точке пространства связаны коэффициентом пропорциональности, имеющим размерность Ом и называемым характеристическим сопротивлением среды  $Z_c$  (буква “с” является начальной буквой английского слова characteristic).

$$\dot{E}_x = Z_c \cdot \dot{H}_y, \quad \dot{E}_y = -Z_c \cdot \dot{H}_x. \quad (4.32)$$

По определению, характеристическое сопротивление среды – величина, определяемая отношением поперечных к направлению распространения волны составляющих комплексных амплитуд векторов поля бегущей волны. В нашем случае

$$Z_c = \frac{\dot{\vec{E}}_x}{\dot{\vec{H}}_y} = \frac{\omega \mu_a}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (4.32)$$

В идеальной диэлектрической среде ( $\sigma = 0$ ) сопротивление (4.32) определяется только параметрами среды. Подчеркнем, что сопротивление  $Z_c$  есть коэффициент пропорциональности, не связанный в общем случае с тепловыми потерями энергии в среде. Знание характеристического сопротивления данной среды позволяет находить поперечные компоненты магнитного поля в плоской волне по известным поперечным компонентам электрического поля и наоборот.

Искомое уравнение плоской однородной волны, распространяющейся вдоль оси  $z$  в идеальной диэлектрической среде, определяется решениями уравнений Гельмгольца (4.16), (4.17) и принимает вид

$$\dot{\vec{E}} = \vec{x}_0 E_{mx} e^{-jkz} + \vec{y}_0 E_{my} e^{-jkz}; \quad (4.34)$$

$$\dot{\vec{H}} = -\vec{x}_0 \frac{E_{my}}{Z_c} e^{-jkz} + \vec{y}_0 \frac{E_{mx}}{Z_c} e^{-jkz}. \quad (4.35)$$

Из четырех поперечных к направлению распространения компонент векторов поля, один компонент имеет знак минус. При этом каждая пара ортогональных составляющих электрического и магнитного полей дают одинаковое направление вектора Пойнтинга. На рис. 4.2а показана ориентация векторов поля (4.34), (4.35) и вектора Пойнтинга волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ .

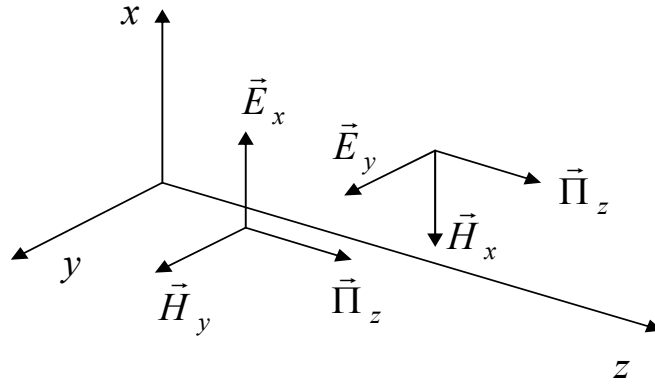


Рис. 4.2а. Ориентация векторов поля и вектора Пойнтинга. Во втором соотношении выражений (4.32) знак минус относится к х-ой составляющей магнитного поля, а не к характеристическому сопротивлению.

Прделаем небольшие преобразования и получим еще одну запись поля плоской однородной волны

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}} &= \vec{x}_0 \dot{\vec{H}}_x + \vec{y}_0 \dot{\vec{H}}_y = \vec{x}_0 \left( -\frac{\dot{E}_y}{Z_c} \right) + \vec{y}_0 \left( \frac{\dot{E}_x}{Z_c} \right) = \\ &= \left[ \vec{z}_0, \vec{y}_0 \right] \frac{\dot{E}_y}{Z_c} + \left[ \vec{z}_0, \vec{x}_0 \right] \frac{\dot{E}_x}{Z_c} = \\ &= \frac{1}{Z_c} \left[ \vec{z}_0, \vec{y}_0 \dot{E}_y + \vec{x}_0 \dot{E}_x \right] = \frac{1}{Z_c} \left[ \vec{z}_0, \dot{\vec{E}} \right].\end{aligned}$$

Аналогичные преобразования можно проделать с вектором  $\dot{\vec{E}}$ . В результате получим следующую запись поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси z

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{Z_c} \left[ \vec{z}_0, \dot{\vec{E}} \right]; \quad \dot{\vec{E}} = Z_c \left[ \dot{\vec{H}}, \vec{z}_0 \right]. \quad (4.36).$$

Из выражений (4.36) следует, что векторы  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  перпендикулярны и оба вектора  $\dot{\vec{E}}$  и  $\dot{\vec{H}}$  перпендикулярны оси

распространения, поэтому плоская однородная электромагнитная волна является поперечной.

Проанализируем полученные результаты. Рассмотрим случай, когда вектор  $\dot{\vec{E}}$  имеет лишь одну составляющую, например,  $\dot{E}_x$ , тогда вектор  $\dot{\vec{H}}$  также будет иметь одну составляющую, перпендикулярную  $\dot{E}_x$ , в данном случае это составляющая  $\dot{H}_y$ . Перейдем к их мгновенным значениям

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t - kz); \quad (4.37)$$

$$\vec{H} = \vec{y}_0 \frac{E_{mx}}{Z_c} \cos(\omega t - kz). \quad (4.38)$$

Поверхности равных фаз (фронт волны) определяются уравнением  $z = \text{const}$  и представляют собой плоскости,

перпендикулярные оси  $z$ . Согласно (4.37), (4.38) векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются синфазно, и их амплитуды не зависят от координат. На

рис. 4.3 изображены мгновенные значения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (4.37), (4.38) в зависимости от времени в некоторой точке пространства

$z = z_0$ , а на рис. 4.4 приведена зависимость  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  от координаты  $z$  в некоторый момент времени  $t = t_0$ .

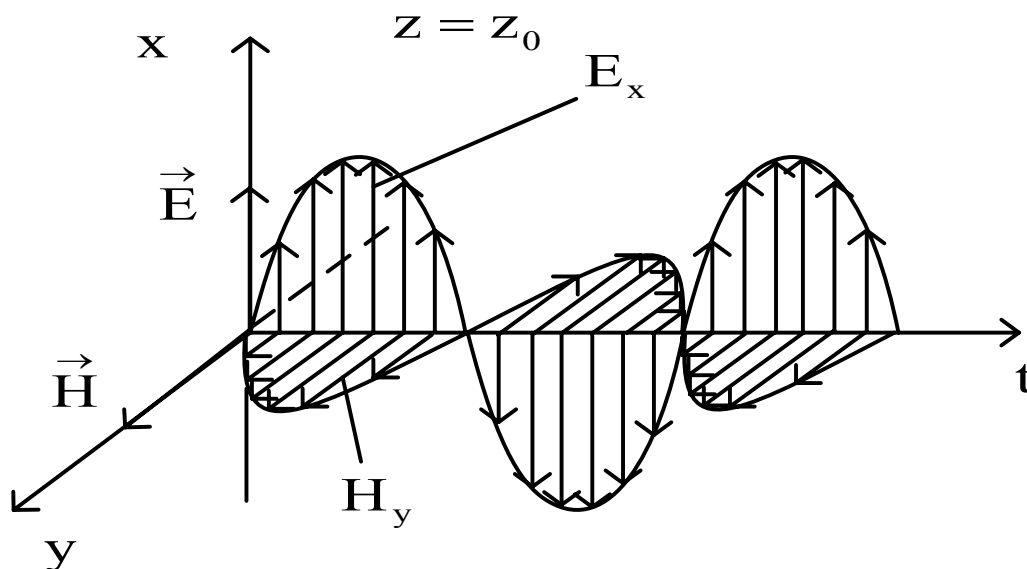


Рис. 4.3. Изменение поля плоской волны во времени

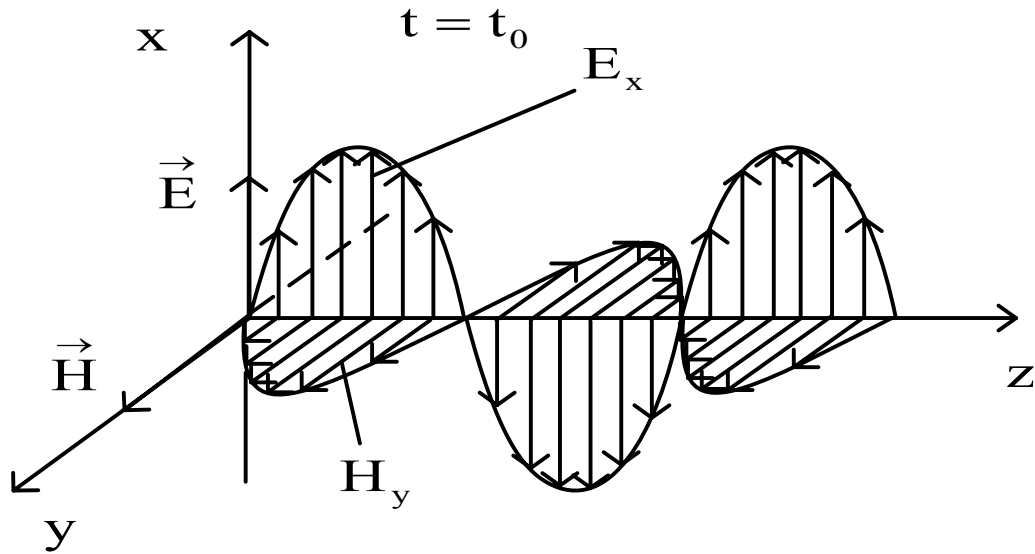


Рис. 4.4. Изменение поля плоской волны в пространстве

Из сравнения рисунков следует, что зависимости от времени и от координаты  $z$  имеют одинаковый характер. Как было показано в (4.27) такая волна распространяется с фазовой скоростью

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}, \quad (4.39)$$

не зависящей от частоты. Распространение волны сопровождается переносом энергии. Среднее за период значение вектора Пойнтинга вычисляется по формуле

$$\vec{\Pi}_{cp} = \text{Re} \vec{\Pi} = \text{Re} \frac{1}{2} \left[ \vec{E}_x, \vec{H}_y^* \right] = \vec{z}_0 \frac{1}{2} \frac{E_{mx}^2}{Z_c} = \vec{z}_0 \frac{1}{2} H_{my}^2 Z_c. \quad (4.40)$$

Имеется только активный поток энергии в направлении оси  $z$ .

Ориентация вектора  $\vec{\Pi}$  показывает направление распространения волны и направление переноса мощности. Скорость распространения энергии определяется по формуле (3.65), она равна фазовой скорости

$$\vec{V}_\varphi = \vec{z}_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a\mu_a}} \quad (4.41)$$

и одинакова при любой частоте волны. В качестве примера рассмотрим характеристики плоских электромагнитных волн в некоторых средах.



1. Вакуум. Идеальная среда, имеющая параметры  $\varepsilon_a = \varepsilon_0, \mu_a = \mu_0, \sigma = 0$ . Коэффициент фазы плоской волны в вакууме

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

Откуда фазовая скорость

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = C$$

равна скорости света и не зависит от частоты. Длину волны в вакууме принято обозначать  $\lambda_0$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{C}{f}.$$

Характеристическое сопротивление вакуума

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}$$

Величина  $Z_0$  действительная, то есть в любой точке  $z$  векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  синфазны. Как уже отмечалось, атмосферный воздух при нормальных условиях схож по своим свойствам с вакуумом, поэтому в большинстве случаев для расчета электромагнитных волн в воздухе можно использовать формулы, представленные для вакуума.

2. Диэлектрическая немагнитная среда без потерь с параметрами  $\varepsilon > 1, \mu = 1, \sigma = 0$ . Фазовая скорость плоских однородных волн в такой среде

$$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Фазовая скорость, а, следовательно, и длина волны в диэлектрике

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}}$$

уменьшаются в  $\sqrt{\varepsilon}$  раз по сравнению с аналогичными величинами в вакууме. Характеристическое сопротивление диэлектрической среды также уменьшается

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 120\pi \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

3. Магнитоэлектрическая среда без потерь с параметрами  $\varepsilon > 1, \mu > 1, \sigma = 0$ . Фазовая скорость, длина волны и характеристическое сопротивление волны в такой среде вычисляются по формулам:

$$V_\phi = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad Z_c = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

#### 4.3. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде с проводимостью, отличной от нуля

При распространении в реальных средах электромагнитные волны испытывают затухание, происходит потеря энергии, переносимой этими волнами. Основные потери в среде связаны с проводимостью, отличной от нуля. Электромагнитная волна вызывает в такой среде токи проводимости с плотностью  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , на поддержание которых расходуется часть энергии волны, в результате чего выделяется тепло (джоулевы потери). Тепловые потери в среде могут быть также обусловлены инерционностью процессов поляризации и намагниченности сред. Но в большинстве практических случаев при рассмотрении электромагнитных волн радиодиапазона среды безинерционны и эти потери не приходится учитывать.

Рассмотрим однородную изотропную среду с параметрами  $\mu_a$  и комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta). \quad (4.42).$$

В однородной изотропной среде при наличии потерь поле плоской волны так же описывается формулами (4.34), (4.35), если в них учесть, что волновое число становится комплексной величиной

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \mu_a} = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta)} = \beta + j\alpha. \quad (4.43).$$

В выражении (4.43) за  $\beta$  обозначена реальная часть комплексного волнового числа, за  $\alpha$  — мнимая часть. Для дальнейшего анализа необходимо определить  $\beta$  и  $\alpha$  и обосновать

знак перед мнимой частью. Возведя в квадрат обе части равенства (4.43), разделяя вещественную и мнимую части, получаем систему двух алгебраических уравнений относительно  $\beta$  и  $\alpha$

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \\ 2\beta\alpha = -\omega^2 \varepsilon_a \mu_a \operatorname{tg} \delta \end{cases} \quad (4.44).$$

Из (4.44) следует, что

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right). \quad (4.45).$$

Так как реальная часть комплексного волнового числа не может быть отрицательной величиной, то в формуле (4.45) нужно выбрать знак «+». Для коэффициента фазы  $\beta$ , характеризующего изменение фазы бегущей волны, получаем расчетную формулу

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)}. \quad (4.46).$$

Отметим, что коэффициент фазы  $\beta$  в среде с  $\sigma \neq 0$  больше коэффициента фазы  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$  в среде без потерь ( $\sigma = 0$ ) с теми же значениями  $\varepsilon_a, \mu_a$ . Из системы (4.44) получаем выражение для коэффициента затухания  $\alpha$ , характеризующего уменьшение амплитуды бегущей волны

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right)}. \quad (4.47)$$

Далее, нужно учесть, что из второго уравнения системы (4.44) следует, что  $\beta$  и  $\alpha$  имеют разные знаки, т. е. возможны равенства

$$\dot{k} = \beta - j\alpha, \quad \dot{k} = -\beta + j\alpha. \quad (4.48).$$

Рассмотрим волновой множитель (оператор бегущей волны)  $e^{-jkz}$  в выражениях (4.34), (4.35). В среде с потерями, учитывая (4.48), функция  $e^{-i\dot{k}z}$  может быть записана одним из двух способов

$$e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad e^{\alpha z} e^{j\beta z}. \quad (4.49)$$

По предположению (раздел 4.2) источник находится со стороны отрицательных значений координаты  $z$  и волна

распространяется вдоль оси  $z$ . Этому условию соответствует первое выражение (4.49), в котором множитель  $e^{-\alpha z}$  учитывает экспоненциальное уменьшение амплитуды из-за потерь на нагревание среды при  $\sigma \neq 0$ . В соответствии с этим выбором комплексное волновое число записывается

$$\dot{k} = \beta - j\alpha. \quad (4.50).$$

В выражении (4.50) коэффициент фазы  $\beta$  вычисляется по формуле (4.46), коэффициент затухания  $\alpha$  по (4.47), обе формулы справедливы при любой проводимости среды.

Комплексная диэлектрическая проницаемость (4.42) входит в характеристическое сопротивление среды, которое становится также комплексной величиной. В рассматриваемом случае

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a(1 - j \operatorname{tg} \delta)}} = \left| \dot{Z}_c \right| e^{j\varphi_c}, \quad (4.51)$$

где  $\left| \dot{Z}_c \right| = \sqrt{\frac{\mu_a \cos \delta}{\epsilon_a}}, \quad \varphi_c = \frac{1}{2} \delta.$

Подставляя выражения (4.50), (4.51) в формулы (4.34), (4.35), получаем поле плоской однородной волны, распространяющейся вдоль оси  $z$  в среде с проводимостью, отличной от нуля

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{mx} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \vec{y}_0 E_{my} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}; \quad (4.52)$$

$$\vec{H} = -\vec{x}_0 \frac{E_{my}}{\left| \dot{Z}_c \right|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\varphi_c} + \vec{y}_0 \frac{E_{mx}}{\left| \dot{Z}_c \right|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\varphi_c}. \quad (4.53)$$

При изменении удельной проводимости  $\sigma$  от нуля до бесконечности фаза  $\varphi_c$  увеличивается от нуля до  $\pi/4$ , а модуль  $\left| \dot{Z}_c \right|$  убывает от  $\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$  до нуля. Наличие потерь приводит к уменьшению абсолютной величины характеристического сопротивления, то есть

к увеличению  $\left| \vec{H} \right|$  при заданном значении  $\left| \vec{E} \right|$ . Это обусловлено тем, что величина  $\left| \vec{H} \right|$  определяется как током проводимости, так и током смещения. В среде с  $\sigma = 0$  существуют только токи смещения, которые при одинаковых значениях  $\left| \vec{E} \right|$  и  $\epsilon_a$  остаются прежними и в среде с потерями ( $\sigma \neq 0$ ), а возникшие токи проводимости увеличивают лишь магнитное поле.

Для дальнейшего анализа плоской волны в среде с потерями рассмотрим случай, когда вектор  $\vec{E}$  (4.52) имеет одну составляющую, например,  $\dot{E}_x$ , а вектор  $\vec{H}$  (4.53) имеет соответственно  $\dot{H}_y$ . Перейдем к мгновенным значениям этих составляющих

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{mx} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (4.54)$$

$$\vec{H} = \vec{y}_0 \frac{E_{mx}}{\left| \vec{Z}_c \right|} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\delta}{2}\right). \quad (4.55)$$

Амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  экспоненциально убывают вдоль оси  $z$ , вектор  $\vec{H}$  опаздывает по фазе относительно вектора  $\vec{E}$  на величину  $\Phi_c$ , равную половине угла потерь ( $\Phi_c = \frac{\delta}{2}$ ). На рис. 4.5 приведена зависимость мгновенных значений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  от времени  $t$  в некоторой фиксированной точке пространства  $z = z_0$ , а на рис. 4.6 – зависимость мгновенных значений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  от координаты  $z$  в некоторый момент времени  $t = t_0$ .

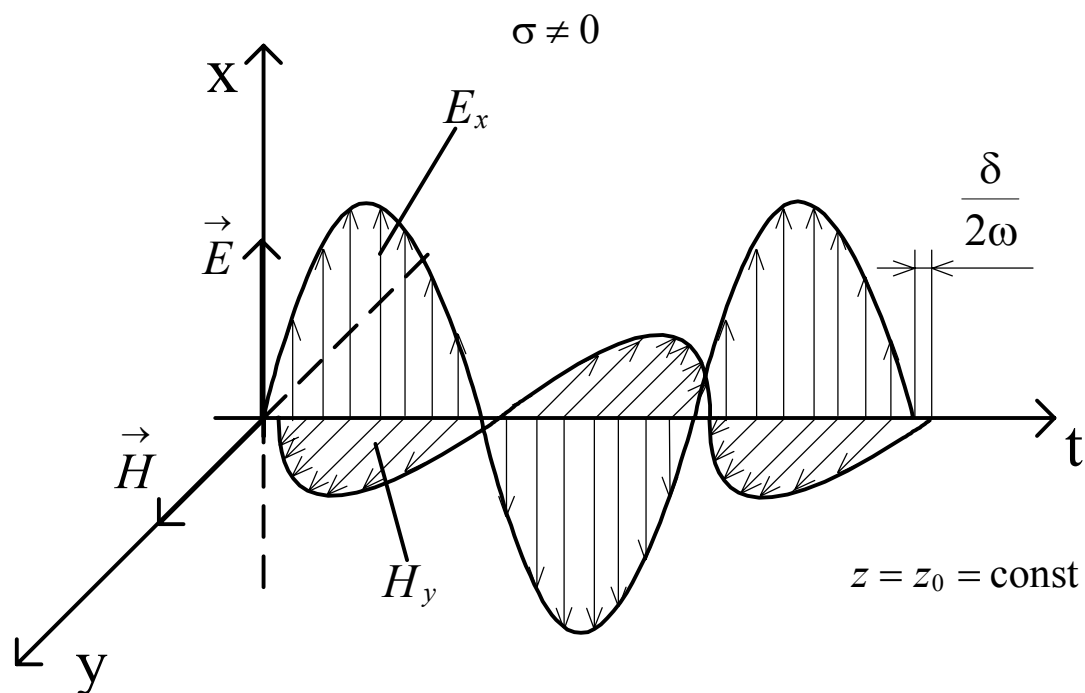


Рис. 4.5. Изменение поля плоской волны во времени

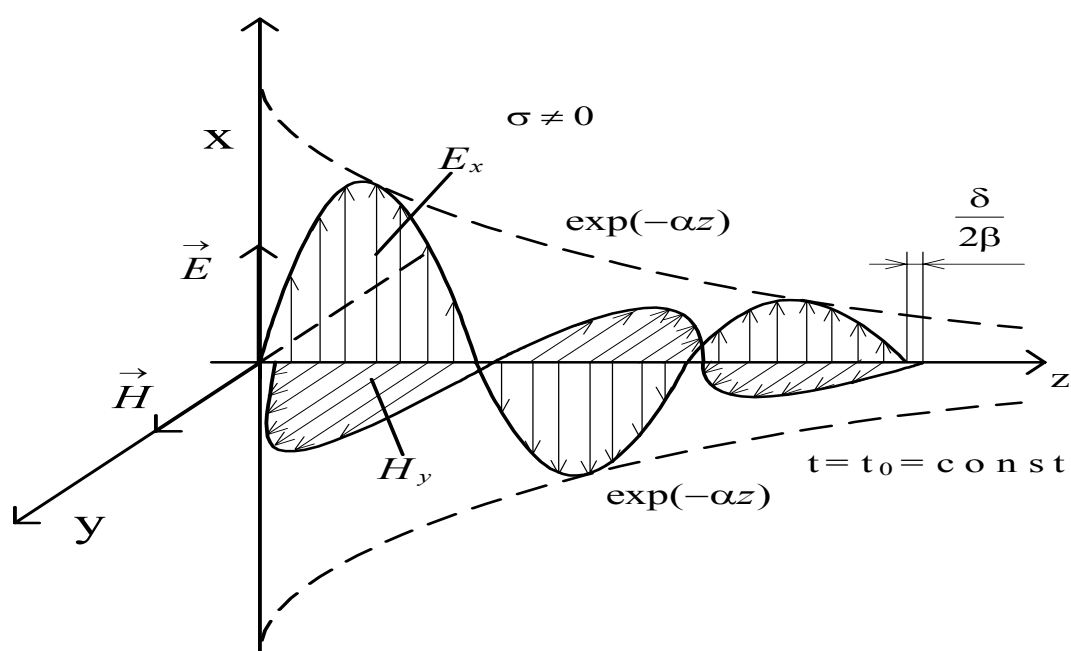


Рис.4.6. Изменение поля плоской волны в пространстве

Фазовая скорость плоской волны определяется по общей формуле, как отношение частоты к коэффициенту фазы

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\text{Re } \dot{k}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1 \right)}}. \quad (4.56)$$

Фазовая скорость плоской волны в среде с потерями меньше чем фазовая скорость плоской волны в среде без потерь ( $\sigma = 0$ ) с теми же параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ . Как видно из (4.56) фазовая скорость зависит от частоты  $\left( \operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)$ , с увеличением частоты она возрастает и стремится к фазовой скорости в среде без потерь  $V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ . Кроме того, величина  $V_\phi$  зависит от проводимости среды: при одинаковой частоте она будет меньше в среде с большей проводимостью.

Длина волны в среде с потерями

$$\lambda = \frac{2\pi}{\operatorname{Re} \dot{k}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)}} = \frac{V_\phi}{f} \quad (4.57)$$

Длина волны при фиксированной частоте убывает с увеличением проводимости  $\sigma$ .

Коэффициент затухания  $\alpha$  (4.47) это действительная величина, которая, подобно коэффициенту фазы, имеет размерность 1/м.

Экспонента  $e^{\alpha z}$  показывает во сколько раз уменьшаются амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  по прохождению расстояния в  $z$  (м). Поскольку величина затухания может меняться в больших пределах в разных средах, то удобно ввести логарифмический масштаб представления коэффициента затухания. Для этого используется отношение амплитуд напряженности электрического поля по прохождению расстояния в один метр

$$\frac{E_m(z)}{E_m(z + 1\text{м})} = e^{\alpha \cdot 1\text{м}}. \quad (4.58).$$

Натуральный логарифм (4.58) определяет коэффициент затухания в неперах на метр (Нп/м)

$$\alpha \left( \frac{\text{Нп}}{\text{м}} \right) = \frac{1}{1\text{м}} \ln \frac{E_m(z)}{E_m(z + 1\text{м})}.$$

В технических расчетах часто используют другую логарифмическую единицу – децибелы на метр (дБ/м), которую

определяют как двадцать десятичных логарифмов того же отношения амплитуд (4.58)

$$\alpha\left(\frac{\partial B}{m}\right) = \frac{1}{1m} 20 \lg \frac{E_m(z)}{E_m(z+1m)}.$$

Поскольку  $\ln 10=2,303$ , а  $\lg e=0,4343$ , то  $1\text{Нп} = 8,868 \text{ дБ}$  и  $1 \text{ дБ}=0,1151 \text{ Нп}$ . В названии коэффициента затухания использованы имена известных ученых – Непера и Белла (д – децимальная приставка). Если плоская волна распространяется в однородной среде и проходит расстояние  $l(\text{м})$ , то общее затухание (потери) на трассе рассчитываются в логарифмических единицах следующим образом:

$$L(Hn) = \alpha\left(\frac{Hn}{m}\right)l(m) \quad \text{или} \quad L(\partial B) = \alpha\left(\frac{\partial B}{m}\right)l(m).$$

Расстояние, по прохождению которого электромагнитная волна ослабевает в  $e=2.718$  раз, называется глубиной проникновения волны в среду и определяется как  $\Delta = \frac{1}{\alpha}$  ( $\Delta$  – заглавная буква дельта греческого алфавита).

Распространение волны сопровождается переносом энергии. В среде с  $\sigma \neq 0$  комплексный вектор Пойнтинга в общем случае, когда векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  имеют по две составляющие (4.52), (4.53) рассчитывается следующим образом:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}, \vec{H}^* \right] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \vec{E}_x & \vec{E}_y & 0 \\ * & * & * \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{z}_0 \frac{1}{2} \left( \vec{E}_x \vec{H}_y^* - \vec{E}_y \vec{H}_x^* \right). \quad (4.59)$$

В рассматриваемом случае, когда вектор  $\vec{E}$  имеет одну  $\vec{E}_x$  составляющую, а вектор  $\vec{H}$  – одну  $\vec{H}_y$ , комплексный вектор Пойнтинга равен



$$\vec{\dot{\Pi}} = \vec{z}_0 \frac{1}{2} \frac{E_{mx}^2}{\left| \vec{\dot{Z}}_c \right|} e^{-2\alpha z} e^{j\frac{\delta}{2}} \quad (4.60)$$

и содержит как действительную, так и мнимую части. Это означает, что имеется как активный, так и реактивный поток мощности. Средняя за период плотность потока мощности экспоненциально убывает вдоль оси  $z$

$$\vec{\Pi}_{cp} = \text{Re} \vec{\dot{\Pi}} = \vec{z}_0 \frac{E_{mx}^2}{\left| \vec{\dot{Z}}_c \right|} e^{-2\alpha z} \cos \frac{\delta}{2}. \quad (4.61)$$

Возникновение плотности потока реактивной энергии  $\left( \text{Im} \vec{\dot{\Pi}} \right)$  в среде с  $\sigma \neq 0$  может быть объяснено следующим образом. При распространении электромагнитной волны в среде возникают электрические токи с плотностью  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , на поддержание которых расходуется часть энергии волны. В свою очередь, возникшие в среде электрические токи излучают электромагнитное поле, создают вторичную электромагнитную волну, которая складывается с первичной и происходит непрерывный обмен энергией между волной и средой, что и приводит к возникновению потока реактивной мощности.

Скорость распространения энергии вычисляется по формуле (3.65)

$$\vec{V}_\varepsilon = \frac{\vec{\Pi}_{cp}}{w_{cp}} = \vec{z}_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1 \right)}}. \quad (4.62)$$

Как видно из (4.62) скорость распространения энергии зависит от частоты. Основное отличие параметров плоской волны, распространяющейся в среде с конечной проводимостью и в среде с  $\sigma = 0$  состоит в том, что в среде без потерь параметры волны ( $V_\phi$ ,  $V_\varepsilon$ ,  $Z_c$  и др.) одинаковы при любых частотах, а в среде с проводимостью они зависят от частоты. Зависимость фазовой скорости волны от частоты называется дисперсией. Следует

отметить, что если есть необходимость учесть другие потери, например, магнитные, то следует воспользоваться изложенным способом определения коэффициента фазы, коэффициента затухания и характеристического сопротивления среды и всеми последующими преобразованиями.

Рассмотрим два частных случая реальных сред: диэлектрики с малыми потерями и хорошо проводящие среды (проводники).

### 4.3.1. Плоские однородные волны в диэлектрических средах с малыми потерями

Диэлектрики с малыми потерями  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$  широко используются в аппаратуре радиоэлектроники и связи. Обычно это немагнитные диэлектрики с  $\mu = 1$ . Выведем приближенные формулы для расчета основных параметров плоской электромагнитной волны в таких материалах. Воспользуемся абсолютной комплексной диэлектрической проницаемостью (4.42)

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a(1 - j \operatorname{tg} \delta)$$

и комплексным волновым числом (4.43)

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_a(1 - j \operatorname{tg} \delta)} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_a} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta}. \quad (4.63)$$

Поскольку  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ , то корень  $\sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta}$  можно разложить в ряд Тейлора, сохранив два первых члена разложения

$$\sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta} \approx 1 - j \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta. \quad (4.64)$$

Выражение (4.64) подставляем в (4.63) и выделяем реальную и мнимую части комплексного волнового числа

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_a} \left( 1 - j \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \right) = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_a} - j \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a}} = \beta - j \alpha. \quad (4.65)$$

Получаем приближенные выражения для коэффициента фазы и коэффициента затухания

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_a} = \omega \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{C} \sqrt{\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon}, \quad (4.66)$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a}} = \operatorname{tg} \delta \frac{\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \delta. \quad (4.67)$$

Для характеристического сопротивления среды

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a(1-j\operatorname{tg}\delta)}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-j\operatorname{tg}\delta}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + j\frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta\right) \quad (4.68).$$

Комплексный характер  $Z_c$  показывает на небольшую несинфазность векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , которой на практике можно пренебречь.

Длина волны вычисляется по обычной формуле

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (4.69)$$

Фазовая скорость и скорость распространения энергии рассчитываются как в среде с  $\sigma = 0$

$$V_\phi = V_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} \quad (4.70)$$

Из полученных результатов следует, что параметры волны ( $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $V_\phi$ ,  $V_\varepsilon$ ,  $Z_c$ ), распространяющейся в реальном диэлектрике в первом приближении совпадают с параметрами волны в среде без потерь. Коэффициент затухания  $\alpha$  является малой величиной, не зависит от частоты, дисперсионные свойства проявляются незначительно.

#### 4.3.2. Плоские однородные волны в хорошо проводящих средах

В хорошо проводящих средах (например, в металлах)  $\operatorname{tg}\delta \gg 1$ , относительная магнитная проницаемость  $\mu = 1$  ( $\mu_a = \mu_0$ ). При  $\operatorname{tg}\delta \gg 1$  в общих выражениях коэффициента фазы (4.46) и коэффициента затухания (4.47) можно пренебречь единицей по сравнению с  $\operatorname{tg}\delta$ . В результате получаем

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu_0\sigma}, \quad (4.69)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu_0\sigma}. \quad (4.70)$$

Постоянные  $\beta$  и  $\alpha$  нелинейно зависят от частоты, следовательно, свойства волны на разных частотах будут существенно различаться. Формулы для фазовой скорости, длины волны и характеристического сопротивления в таких средах принимают вид

$$V_\phi = V_\vartheta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\pi f}{\mu_0\sigma}}; \quad (4.71)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{f \mu_0 \sigma}}; \quad (4.72)$$

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = (1+j) \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}}. \quad (4.73)$$

Сравним параметры плоских волн, распространяющихся в вакууме и меди ( $\sigma = 5,65 \cdot 10^7$  См/м) на частоте 1 МГц:

в вакууме

в металле (медь)

$$V_\phi = V_\vartheta = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$V_\phi = V_\vartheta = 421 \text{ м/с}$$

$$\lambda_0 = 300 \text{ м}$$

$$\lambda = 4,21 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$Z_0 = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом}$$

$$|\dot{Z}_c| \approx 3,74 \cdot 10^{-4} \text{ Ом.}$$

Коэффициент затухания волны, распространяющейся в меди при частоте 1 МГц равен  $\alpha = 14935$  1/м. Глубина проникновения волны в медь на частоте 1 МГц составляет 67 мкм. Приведенные примеры показывают, что электромагнитная волна на частотах радиодиапазона практически не проникает вглубь проводника.

#### 4.4. Поляризация электромагнитных волн

Поляризацией электромагнитной волны называют изменения величины и ориентации векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в фиксированной точке пространства в течение периода колебания волны. Волна, у которой в фиксированной точке пространства в любой момент времени величина и ориентация векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  являются детерминированными (точно определенными), называется поляризованной. Поляризация волны ориентационная характеристика. В плоской однородной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимосвязаны (4.36), характер их поведения в пространстве одинаков, поэтому ограничиваются рассмотрением одного вектора

$\vec{E}$ . Плоскость, проходящую через вектор  $\vec{E}$  и направление распространения волны, называют плоскостью поляризации.

Предположим, что волна создается двумя взаимно перпендикулярными элементарными электрическими вибраторами с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 4.7).

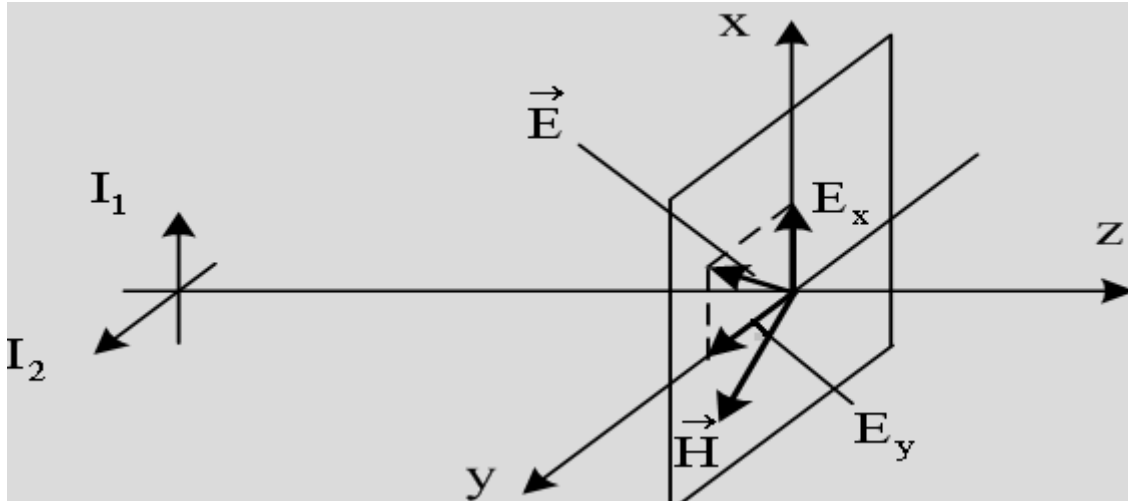


Рис. 4.7. К введению понятия поляризации волны

Вектор  $\vec{E}$  имеет две составляющие  $E_x$  и  $E_y$ , которые имеют разные амплитуды и изменяются с некоторым фазовым сдвигом в зависимости от соотношения между амплитудами и фазами токов вибраторов. Вектор  $\vec{H}$  при этом также имеет две составляющие  $H_x$  и  $H_y$ , связанные с  $E_x$  и  $E_y$  характеристическим сопротивлением.

Таким образом, в общем случае выражение для вектора  $\vec{E}$  плоской волны в среде без потерь записывается в виде

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2). \quad (4.74)$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – начальные фазы составляющих  $E_x$  и  $E_y$  в точке  $z=0$  при  $t=0$ . Волну (4.74) можно рассматривать как суперпозицию(сумму) двух плоских волн одинаковой частоты с взаимно перпендикулярной ориентацией векторов  $\vec{E}_x$  и  $\vec{E}_y$ , распространяющихся в одном направлении (вдоль оси  $z$ ).

Определим ориентацию суммарного вектора  $\vec{E}$  (4.74) углом  $\Theta$  (рис. 4.8).

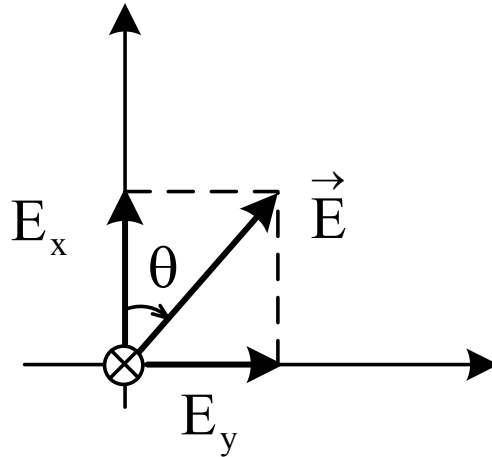


Рис. 4.8. Мгновенное положение вектора  $\vec{E}$

Угол  $\Theta$  отсчитывается по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны и определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2)}{E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1)}. \quad (4.75)$$

Характер изменения вектора  $\vec{E}$  (4.74) с течением времени в фиксированной точке пространства зависит от сдвига фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  и от равенства или неравенства амплитуд  $E_{mx}$  и  $E_{my}$ . В общем случае угол  $\Theta$  может изменяться во времени. Конец вектора  $\vec{E}$  с течением времени в фиксированной точке пространства будет описывать линию, называемую годографом. По форме годографа выделяют три вида поляризации.

1. Линейная поляризация. Составляющие  $E_x$  и  $E_y$  синфазны или противофазны

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = n\pi, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.76).$$

Для простоты возьмем  $n = 0$ , то есть начальные фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  совпадают. Полагая в формуле (4.75)  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , получаем постоянное значение угла ориентации

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi)}{E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi)} = \frac{E_{my}}{E_{mx}} = \operatorname{const}. \quad (4.77)$$

Величина вектора  $\vec{E}$  (4.74) меняется во времени

$$\left| \vec{E} \right| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{mx}^2 + E_{my}^2} \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (4.78)$$

В фиксированной точке пространства вектор  $\vec{E}$ , не меняя ориентации ( $\Theta = \text{const}$ ) изменяется по модулю, конец вектора  $\vec{E}$  с течением времени перемещается вдоль отрезка прямой линии, составляющей с осью  $x$  угол  $\Theta$

$$\Theta = (-1)^n \arctg \frac{E_{my}}{E_{mx}}. \quad (4.79)$$

При четных значениях числа  $n$  ( $E_x$  и  $E_y$  синфазны) угол  $\Theta$  величина положительная; при нечетных  $n$  ( $E_x$  и  $E_y$  противофазны) угол  $\Theta$  величина отрицательная. Таким образом, волна (4.74) при выполнении условия (4.76) имеет линейную поляризацию. Отметим, что если вектор  $\vec{E}$  плоской волны имеет одну составляющую, волна линейно поляризована.

2. Круговая поляризация. Амплитуды составляющих  $E_x$  и  $E_y$  равны, а фазы отличаются на  $\pm \frac{\pi}{2}$

$$E_{mx} = E_{my} = E_0, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (4.80)$$

Подставляя эти значения в (4.75), получаем равенство

$$\text{tg } \Theta = \frac{E_0 \cos\left(\omega t - kz + \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}\right)}{E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)} = \frac{\mp \sin(\omega t - kz + \varphi_1)}{\cos(\omega t - kz + \varphi_1)}. \quad (4.81)$$

Из (4.81) следует, что

$$\Theta = +(\omega t - kz + \varphi_1), \text{ если } \varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \quad (4.82)$$

$$\Theta = -(\omega t - kz + \varphi_1), \text{ если } \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}. \quad (4.83)$$

Равенства (4.82), (4.83) означают, что угол  $\Theta$  в фиксированной точке пространства изменяется линейно во времени и происходит периодическое изменение ориентации вектора  $\vec{E}$ . Величина вектора  $\vec{E}$  при этом остается неизменной

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0.$$

Таким образом, в фиксированной точке пространства вектор  $\vec{E}$ , оставаясь неизменным по величине, вращается с угловой частотой  $\omega$  вокруг направления  $\vec{z}_0$ . Число оборотов вектора  $\vec{E}$  за секунду равно частоте колебаний. В рассматриваемую точку в разные моменты времени приходит вектор  $\vec{E}$  разной ориентации. Конец вектора  $\vec{E}$  при этом описывает окружность (рис. 4.9).

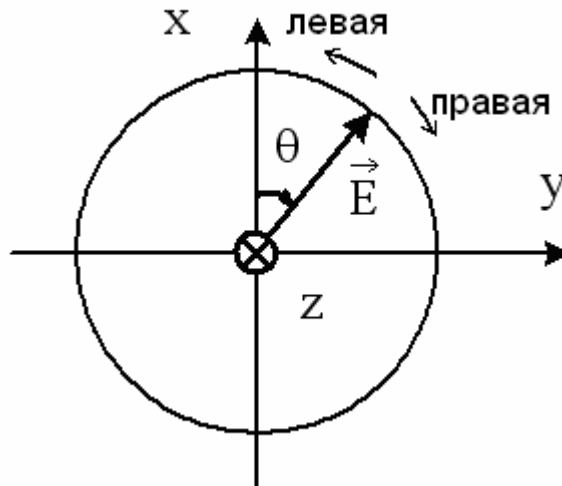


Рис. 4.9. Годограф вектора  $\vec{E}$  при круговой поляризации

Волна (4.74) при условии (4.80) имеет круговую поляризацию. В зависимости от направления вращения вектора  $\vec{E}$  различают волны с правой и левой поляризацией. Волна имеет правую круговую поляризацию, когда вектор  $\vec{E}$  вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны ( $\Theta > 0$ ). Волна имеет левую круговую поляризацию, когда вектор  $\vec{E}$  вращается против часовой стрелки, если смотреть вдоль направления распространения волны ( $\Theta < 0$ ). Согласно условиям (4.82), (4.83) вектор  $\vec{E}$  вращается в сторону к отстающей по фазе составляющей. На рис. 4.10 показана ориентация вектора  $\vec{E}$  в



пространстве в фиксированный момент времени для плоской волны с круговой поляризацией, распространяющейся вдоль оси  $z$  в среде без потерь

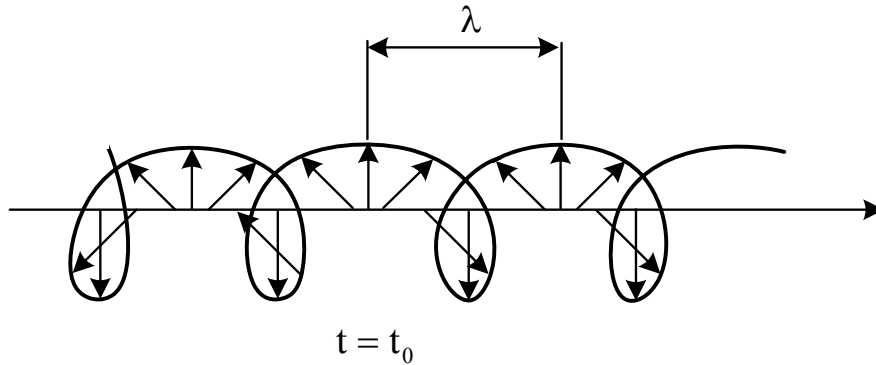


Рис. 4.10. Ориентация вектора  $\vec{E}$  в пространстве при круговой поляризации

Линия, соединяющая концы векторов, представляет собой правовинтовую спираль с шагом, равным длине волны. Ее проекция на плоскость  $xOy$  образует окружность с вращением вектора  $\vec{E}$  против часовой стрелки, глядя вдоль направления распространения волны. Отметим, что винтовая линия, соответствующая волне с правой круговой поляризацией, имеет левую намотку, и, наоборот, в случае волны с левой круговой поляризацией винтовая линия имеет правую намотку.

Очевидно, такой же анализ для вектора  $\vec{H}$  привел бы к аналогичным результатам. Запишем для примера поле плоской однородной волны левой круговой поляризации, распространяющейся вдоль оси  $z$  в среде без потерь. В записи электрического поля используем условие круговой поляризации (4.80), а взаимосвязанное с ним магнитное поле определяем по формуле (4.32). Комплексные амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  рассматриваемой волны принимают вид

$$\vec{E} = x_0 \vec{E}_0 e^{-jkz} + j y_0 \vec{E}_0 e^{-jkz}, \quad (4.84)$$

$$\dot{\vec{H}} = -j \vec{x}_0 \frac{E_0}{Z_C} e^{-jkz} + \vec{y}_0 \frac{E_0}{Z_C} e^{-jkz}. \quad (4.85)$$

При записи этой волны использовано известное соотношение  $e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$ . На основании последних выражений (4.84), (4.85) находим среднее за период значение плотности потока мощности

$$\vec{\Pi}_{cp} = \text{Re} \dot{\vec{\Pi}} = \text{Re} \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{E}}, \vec{H}^* \right] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & 0 \\ H_x^* & H_y^* & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \vec{z}_0 \left( \frac{E_0^2}{Z_C} + \frac{E_0^2}{Z_C} \right) = \vec{z}_0 \frac{E_0^2}{Z_C}. \quad (4.86)$$

Среднее значение вектора Пойнтинга волны круговой поляризации равно сумме средних плотностей мощности двух волн с ортогональными линейными поляризациями.

Любая волна круговой поляризации является суперпозицией двух волн с ортогональными линейными поляризациями при условии (4.80). В свою очередь, всякую линейно поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн с правой и левой круговой поляризацией. Вновь воспользуемся комплексным

представлением вектора  $\vec{E}$  волны линейной поляризации

$$\dot{\vec{E}} = \vec{x}_0 E_0 e^{-jkz}. \quad (4.87)$$

Прибавим и вычтем в правой части (4.87) дополнительный вектор и перегруппируем слагаемые

$$\dot{\vec{E}} = \vec{x}_0 E_0 e^{-jkz} \pm j \vec{y}_0 0.5 E_0 e^{-jkz} = \left( \vec{x}_0 + j \vec{y}_0 \right) 0.5 E_0 e^{-jkz} + \left( \vec{x}_0 - j \vec{y}_0 \right) 0.5 E_0 e^{-jkz}. \quad (4.88)$$

Первое слагаемое в правой части (4.88) описывает волну с левой круговой поляризацией, а второе слагаемое описывает волну с правой круговой поляризацией с равными амплитудами.

3. *Эллиптическая поляризация.* Составляющие  $E_x$  и  $E_y$  (4.74) имеют произвольные соотношения амплитуд и фаз. Суммарный вектор  $\vec{E}$

в фиксированной точке пространства с течением времени  $\vec{z}_0$  изменяется по величине и вращается вокруг направления  $\vec{z}_0$ , его конец описывает эллипс (рис. 4.11).

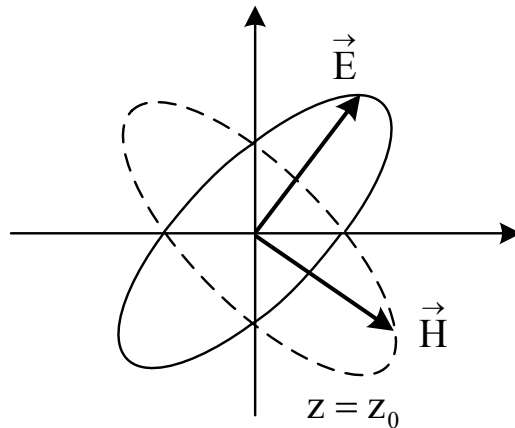


Рис. 4.11. Годографы векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  при эллиптической поляризации

Волны такого типа принято называть эллиптически поляризованными. Вращение вектора  $\vec{E}$  происходит в сторону составляющей, отстающей по фазе. Если это вращение происходит по часовой стрелке, глядя вдоль направления распространения волны, то волна имеет правую эллиптическую поляризацию, если вращение против часовой стрелки – волна левой эллиптической поляризации. Степень эллиптичности волны оценивают по коэффициенту эллиптичности, равному отношению малой оси эллипса к большой. Ориентация эллипса задается углом между большой осью эллипса и осью  $x$  (или осью  $y$ ). Такой же анализ для вектора  $\vec{H}$  привел бы к аналогичным результатам. Конец вектора  $\vec{H}$  в фиксированной точке пространства в течение периода колебаний также описывает эллипс, подобный эллипсу вектора  $\vec{E}$ , но повернутый относительно него на угол  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 4.11).

Введем понятие ортогонально поляризованных волн. Две волны ортогонально поляризованы, если их поляризационные эллипсы взаимно перпендикулярны в пространстве, равны коэффициенты эллиптичности, а вращение вектора  $\vec{E}$  в эллипсах

противоположное. Волну одного вида поляризации можно представить как сумму двух волн с ортогональными поляризациями и разными амплитудами. Так эллиптически поляризованную волну можно представить как сумму двух волн с ортогональными линейными поляризациями, как сумму двух волн круговой поляризации с разными амплитудами и разным направлением вращения, либо как сумму двух волн эллиптической поляризации с ортогональными осями эллипсов, с разными амплитудами и разным направлением вращения. Приемная антенна извлекает из падающей на нее электромагнитной волны максимальную мощность, если поляризованные эллипсы передающей и приемной антенны совпадают. Прием будет отсутствовать, если антенны имеют ортогональные поляризации. В промежуточных случаях происходит уменьшение принятой мощности.

Отметим, что понятие эллиптической, круговой и линейной поляризации применимо не только для плоских однородных волн, но и других типов волн. Поляризационные свойства электромагнитных волн имеют большое значение в прикладной радиотехнике. Например, штыревая антенна, размещенная в поле волны с круговой поляризацией перпендикулярно оси распространения, будет создавать выходной сигнал неизменной амплитуды независимо от ориентации в поперечной плоскости. Это обстоятельство делает волны с круговой поляризацией предпочтительными для организации радиосвязи с подвижными объектами, которые могут занимать в пространстве любые положения.

#### **4.5. Плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении**

При анализе распространения плоской электромагнитной волны в неограниченной однородной среде была использована прямоугольная система координат, одна из осей которой (ось  $z$ ) совпадала с направлением распространения волны. Для изучения волновых явлений на плоской границе раздела двух сред прямоугольную систему координат обычно вводят таким образом, чтобы поверхность раздела совпадала с одной из координатных поверхностей. При этом в общем случае направления

распространения падающей, отраженной и преломленной волн не совпадают ни с одной из координатных осей. Рассмотрим случай, когда плоская электромагнитная волна распространяется в произвольном направлении, не совпадающем ни с одной из координатных осей. Ограничимся записью линейно поляризованной волны, так как волны круговой и эллиптической поляризации можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных плоских волн. Предположим, что волна распространяется в однородной среде вдоль оси  $z'$ , образующей с осями  $x, y, z$  прямоугольной системы координат углы  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  соответственно (рис. 4.12).

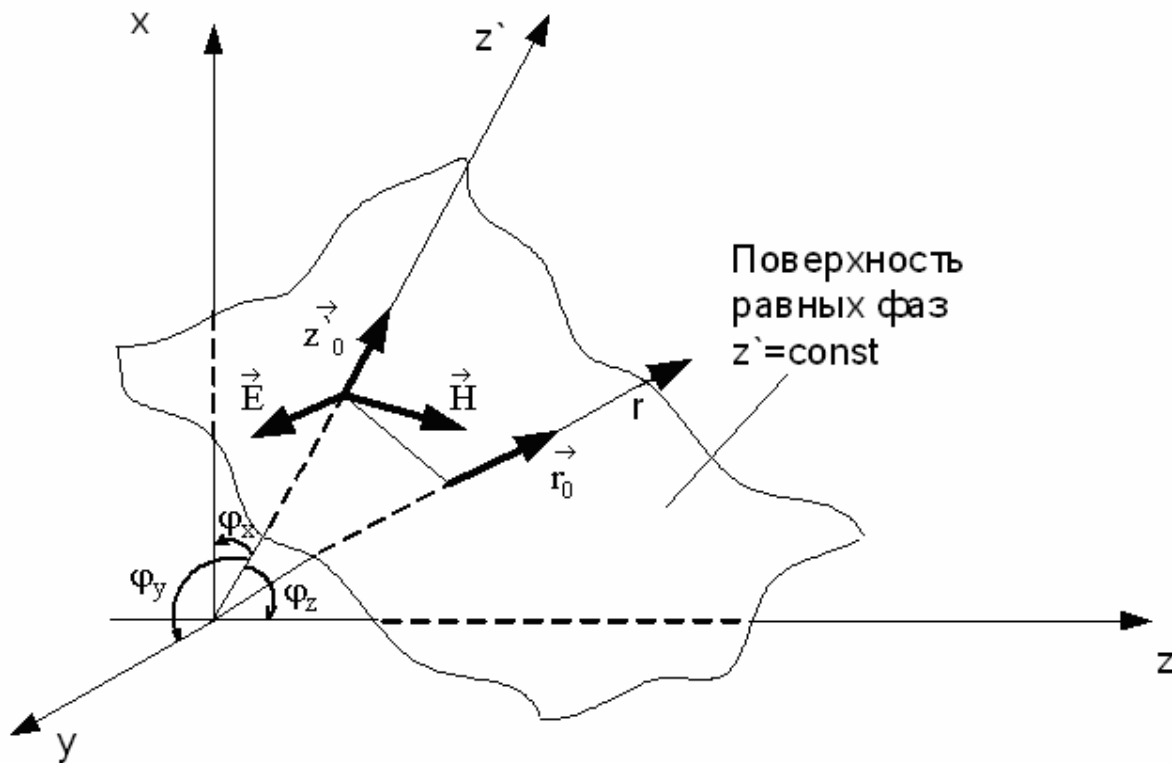


Рис. 4.12. Произвольные направления распространения плоской волны

Поле плоской однородной волны в среде без потерь запишем через комплексные амплитуды

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jkz'}; \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-jkz'}. \quad (4.89).$$

Векторы  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$  лежат в плоскости перпендикулярной оси  $z'$ , причем

$$\vec{E}_0 = \left[ \vec{H}_0, \vec{z}'_0 \right] \cdot Z_C, \quad (4.90)$$

где  $\vec{z}'_0 = x_0 \cos \varphi_x + y_0 \cos \varphi_y + z_0 \cos \varphi_z$  – координатный орт переменной  $z'$ .

Поверхность равных фаз (фронт волны) является плоскостью, перпендикулярной оси  $Z'$ , и удовлетворяет уравнению

$$z' = \left( \vec{r}, \vec{z}'_0 \right) = \text{const}, \quad (4.91)$$

где  $\vec{r}$  – радиус вектор, проведенный из начала координат до произвольной точки, лежащей на рассматриваемой поверхности равных фаз.

Для перехода к координатам  $x, y, z$  нужно вычислить скалярное произведение вектора  $\vec{r}$  на вектор  $\vec{z}'_0$  (4.91). Учитывая, что радиус вектор равен

$$\vec{r} = x_0 \vec{x} + y_0 \vec{y} + z_0 \vec{z},$$

из (4.91) запишем

$$z' = x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z. \quad (4.92).$$

Подставляем (4.92) в (4.89), получаем запись комплексных амплитуд векторов поля волны, произвольное направление распространения которой расписано в системе  $x, y, z$  через направляющие косинусы вектора  $\vec{z}'_0$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jk(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)}, \quad (4.93)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-jk(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)}. \quad (4.94)$$

Частными случаями формул (4.93), (4.94) являются записи плоских волн, распространяющихся вдоль какой-либо координаты  $x, y, z$ .

## Глава 5. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела сред

### 5.1. Введение

Ранее рассматривалось распространение электромагнитных волн в однородных неограниченных средах. Однако, при решении многих практически важных задач приходится учитывать влияние границ препятствий, встречающихся на пути распространения волны. На границе препятствия (это среда уже с другими параметрами) волна испытывает отражение. Это значит, что от границы распространяется новая волна, налагающаяся на первичную. Внутри препятствия также возникает волновой процесс.

В данной главе рассматриваются волновые явления, наблюдаемые при падении электромагнитных волн на границу раздела сред, обладающих разными параметрами ( $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$ ). Определение поля, возникающего при падении какой-либо электромагнитной волны на поверхность раздела сложной формы, связано с большими математическими трудностями, поэтому начнем с простейшей задачи такого типа. Будем рассматривать гармонический электромагнитный волновой процесс в случае, когда все пространство разделено плоскостью на две однородные среды с разными параметрами. На плоскую границу раздела падает плоская однородная волна. Попадая на границу раздела, электромагнитная волна частично (или полностью) отражается и частично (или полностью) проходит во вторую среду, то есть возникают явления отражения и преломления волны. Для анализа этих явлений введем некоторые определения. Плоскость, проходящая через нормаль к поверхности раздела двух сред и направление распространения падающей волны, называется плоскостью падения.

Ограничимся рассмотрением линейно поляризованных волн, так как волны круговой и эллиптической поляризации можно представить в виде суммы двух линейно поляризованных плоских волн. Вектор напряженности электрического поля плоской волны перпендикулярен направлению ее распространения, а по отношению к плоскости падения может быть ориентирован

произвольно. Рассмотрим две ориентации вектора  $\vec{E}$ , то есть две ориентации плоскости поляризации, проходящей через  $\vec{E}$  и направление распространения волны. Пусть вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен плоскости падения. Назовем такую волну нормально поляризованной. Если вектор  $\vec{E}$  параллелен плоскости падения (лежит в этой плоскости) – волна параллельно поляризована. Очевидно, что волну с любой другой ориентацией вектора  $\vec{E}$ , а также волны, имеющие круговую или эллиптическую поляризацию, можно представить в виде суперпозиции двух волн, одна из которых является нормально поляризованной, а вторая – параллельно поляризованной. Проанализируем случай нормальной и параллельной поляризации падающей волны по отдельности.

## 5.2. Падение нормально поляризованной плоской волны на границу раздела двух сред

Плоская электромагнитная волна нормальной линейной поляризации, распространяясь в первой среде, падает на плоскую бесконечно протяженную границу раздела двух однородных изотропных сред, характеризуемых параметрами  $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1 = 0$  и  $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2 = 0$ . Введем прямоугольную систему координат  $x, y, z$  так, чтобы плоскость  $yoz$  совпадала с поверхностью раздела, а плоскость  $xoz$  – с плоскостью падения. Угол  $\varphi$  между направлением распространения падающей волны и нормалью к границе раздела называется углом падения. Геометрия данной задачи и ориентация координатных осей показана на рис.5.1.



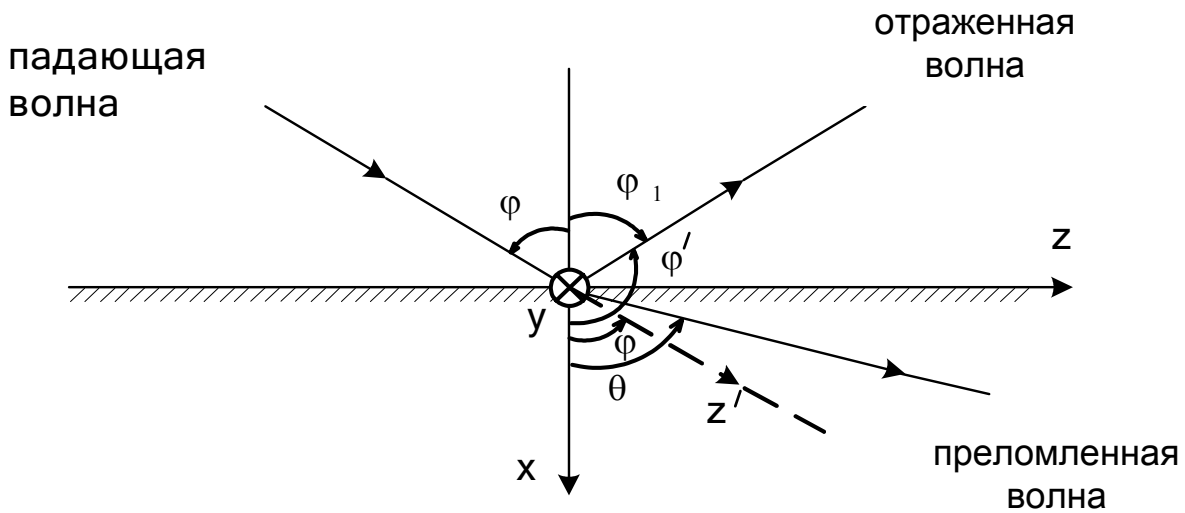


Рис. 5.1. Падение нормально поляризованной волны.

Направление распространения падающей волны  $z'$  записывается в системе координат  $x, y, z$  через направляющие косинусы

$$\cos \varphi_x = \cos \varphi, \quad \cos \varphi_y = 0, \quad \cos \varphi_z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi, \\ z' = x \cos \varphi + z \sin \varphi. \quad (5.1)$$

Падающая волна нормально поляризована, в этом случае вектор  $\vec{E}$  параллелен оси  $y$ , вектор  $\vec{H}$  лежит в плоскости падения (рис. 5.2)

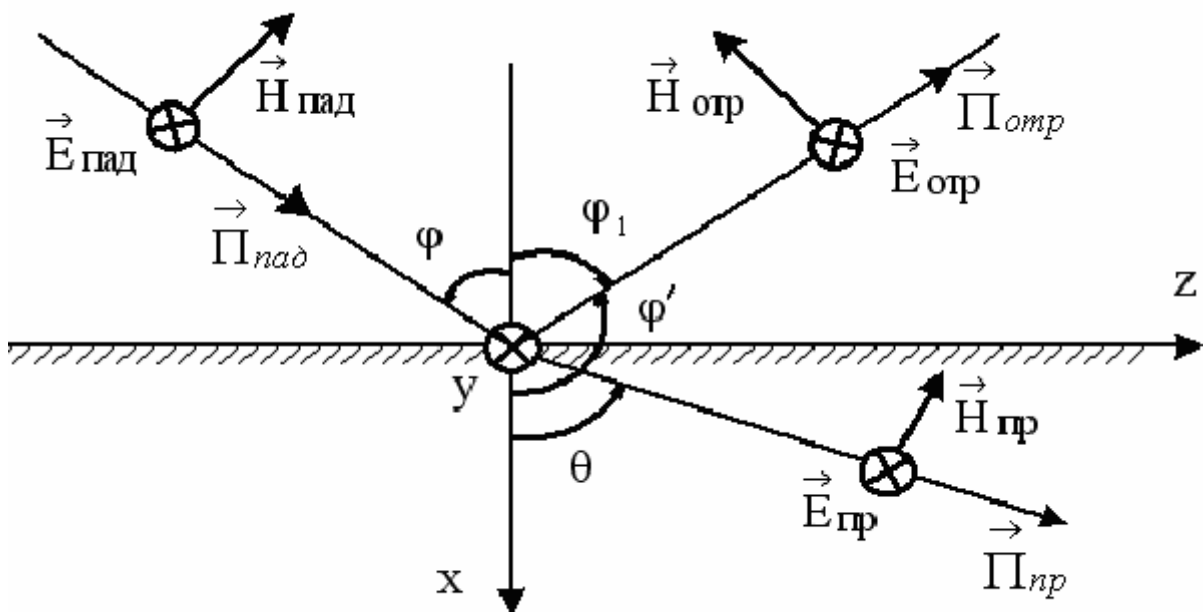


Рис. 5.2. Ориентация векторов поля

Комплексные амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  падающей волны в системе координат  $x, y, z$  принимают вид

$$\vec{E}_{nad} = \vec{y}_0 \dot{E}_{nad} e^{-jk_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}; \quad (5.2)$$

$$\vec{H}_{nad} = -(\vec{x}_0 \sin \varphi - \vec{z}_0 \cos \varphi) \frac{\dot{E}_{nad}}{Z_{C1}} e^{-jk_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}. \quad (5.3)$$

где  $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}}$  – коэффициент фазы падающей волны в первой среде;

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \quad - \text{характеристическое сопротивление первой}$$

среды.

Постоянная  $\dot{E}_{nad}$  равна значению комплексной амплитуды  $y$ -ой составляющей напряженности электромагнитного поля в начале координат (при  $x = 0$ ). Падающая волна частично (или полностью) отражается от границы раздела ( $x = 0$ ) и частично (или полностью) проходит во вторую среду. Формируются отраженная и преломленная волны (последнюю называют также прошедшей волной). Так как поле падающей волны (5.2), (5.3) не зависит от переменной  $y$ , то поля преломленной и отраженной волн также не зависят от координаты  $y$ . Это означает, что направления распространения отраженной и преломленной волн лежат в плоскости падения  $xoz$  и задаются углом отражения  $\varphi_1$  и углом преломления  $\theta$  соответственно (рис 5.1). Отраженную и преломленную волны, возбуждаемые падающей волной, ищем аналогично (5.2), (5.3) в виде нормально поляризованных плоских однородных волн (рис 5.2.).

Выражения для векторов поля отраженной волны могут быть получены из формул (5.2), (5.3), если в последних заменить  $\dot{E}_{nad}$  на  $\dot{E}_{otr}$  и угол  $\varphi$  на угол  $\varphi'$ , где  $\varphi'$  – угол между положительной

осью  $x$  и направлением распространения отраженной волны (рис. 5.1.). Угол  $\varphi'$  связан с углом отражения  $\varphi_1$  простым соотношением  $\varphi' = \pi - \varphi_1$ . При этом комплексные амплитуды векторов поля отраженной волны принимают вид

$$\vec{E}_{omp} = y_0 \vec{E}_{omp} e^{-jk_1(-x \cos \varphi_1 + z \sin \varphi_1)}; \quad (5.4)$$

$$\vec{H}_{omp} = -(x_0 \sin \varphi_1 + z_0 \cos \varphi_1) \frac{\vec{E}_{omp}}{Z_{c1}} e^{-jk_1(-x \cos \varphi_1 + z \sin \varphi_1)} \quad (5.5)$$

Поле преломленной волны, распространяющейся во второй среде, записывается также с использованием формул (5.2), (5.3) при следующих заменах:  $\vec{E}_{nad}$  заменяется на  $\vec{E}_{np}$ , угол падения  $\varphi$  - на угол преломления  $\theta$ ,  $k_1$  - на  $k_2$ ,  $Z_{c1}$  на  $Z_{c2}$

$$\vec{E}_{np} = y_0 \vec{E}_{np} e^{-jk_2(x \cos \theta + z \sin \theta)}, \quad (5.6)$$

$$\vec{H}_{np} = -(x_0 \sin \theta - z_0 \cos \theta) \frac{\vec{E}_{np}}{Z_{c2}} e^{-jk_2(x \cos \theta + z \sin \theta)}, \quad (5.7)$$

где  $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}$  - коэффициент фазы преломленной волны во второй среде;

$Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}}$  - характеристическое сопротивление второй среды.

Теперь задача состоит в том, чтобы при заданной падающей волне (5.2), (5.3) подобрать такие направления и комплексные амплитуды отраженной и преломленной волн, при которых поля в первой и во второй средах удовлетворяли бы обязательным граничным условиям - касательные (тангенциальные) составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  остаются непрерывными (равными) на границе раздела, то есть в плоскости  $x = 0$

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau} . \quad (5.8)$$

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau} . \quad (5.9)$$

Поле в первой среде складывается из полей падающей и отраженной волн, а поле во второй среде совпадает с полем преломленной волны. Для записи условия (5.8) используем выражения (5.2), (5.4) и (5.6) при  $x=0$

$$\dot{E}_{nad} e^{-jk_1 z \sin \varphi} + \dot{E}_{omp} e^{-jk_1 z \sin \varphi_1} = \dot{E}_{np} e^{-jk_2 z \sin \theta} \quad (5.10)$$

Поскольку от значений  $z$  зависят лишь экспоненты, то равенство (5.10) может удовлетвориться только при условии, если

$$k_1 \sin \varphi = k_1 \sin \varphi_1 = k_2 \sin \theta . \quad (5.11)$$

Значит

$$\varphi = \varphi_1 ; \quad (5.12)$$

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \theta . \quad (5.13)$$

Равенство (5.12) представляет собой первый закон Снеллиуса (Снелля) – угол отражения равен углу падения. Из соотношения (5.13) определяем угол преломления

$$\sin \theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi . \quad (5.14)$$

Равенство (5.14) выражает второй закон Снеллиуса. Поскольку коэффициенты фазы в обеих средах вычисляются по одной и той же формуле вида

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$$

соотношение (5.14) можно записать так, что в него войдут лишь параметры сред, а рабочая частота будет исключена. Закону (5.14) можно придать вид

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{V_{\varphi 2}}{V_{\varphi 1}} , \quad (5.15)$$

где  $V_{\varphi 1}, V_{\varphi 2}$  – фазовые скорости плоской однородной волны для обеих сред.

Отметим, что законы Снеллиуса (5.12), (5.14) справедливы при любой ориентации векторов поля относительно плоскости

падения. Они определяют направления распространения отраженной и преломленной волн при наклонном падении плоской однородной волны на границу раздела различных сред. Соотношения (5.12), (5.14) остаются верными и в случае сред с потерями, когда проницаемости сред, а с ними и волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  в (5.14) становятся комплексными величинами и при вещественном угле падения  $\varphi$  величина угла преломления  $\theta$  будет комплексной. Комплексным значениям угла преломления отвечает определенное физическое содержание (см., в частности, раздел 5.4).

Теперь требуется ответить на вопрос, каковы будут комплексные амплитуды векторов поля отраженной и прошедшей волн при заданной падающей волне, которая может нести любой поток энергии. Вернемся к граничным условиям (5.8), (5.9). На границе раздела касательные составляющие векторов  $\vec{E}$  трех волн представляют собой у-е составляющие (рис. 5.2.), а касательные составляющие векторов  $\vec{H}$  – z-е составляющие.

Берем эти составляющие из выражений полей трех волн (5.2)÷(5.7), подставляем в них  $x=0$  (это граница раздела) и учитываем равенство (5.11). При этом граничное условие (5.8) примет вид

$$\dot{E}_{nad} + \dot{E}_{omp} = \dot{E}_{np} . \quad (5.16)$$

а граничное условие (5.9):

$$\frac{\dot{E}_{nad}}{Z_{C1}} \cos \varphi - \frac{\dot{E}_{omp}}{Z_{C1}} \cos \varphi = \frac{\dot{E}_{np}}{Z_{C2}} \cos \theta . \quad (5.17)$$

Введем коэффициент отражения как отношение комплексных амплитуд напряженности электрического поля отраженной и падающей волн на границе раздела

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{omp}}{\dot{E}_{nad}} . \quad (5.18)$$

Аналогично определяется коэффициент прохождения (преломления)

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{np}}{\dot{E}_{nad}}. \quad (5.19)$$

Коэффициенты  $\dot{R}_{\perp}$  и  $\dot{T}_{\perp}$  называют еще коэффициентами Френеля. Символ  $\perp$  означает, что рассматриваются нормально (перпендикулярно) поляризованные волны. Поделив обе части уравнений (5.16), (5.17) на первое слагаемое каждого уравнения, получаем систему двух алгебраических уравнений относительно

неизвестных коэффициентов  $\dot{R}_{\perp}, \dot{T}_{\perp}$

$$\begin{aligned} 1 + \dot{R}_{\perp} &= \dot{T}_{\perp}; \\ 1 - \dot{R}_{\perp} &= \frac{Z_{C1} \cos \theta}{Z_{C2} \cos \varphi} \dot{T}_{\perp}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Решая эту систему, находим значения коэффициентов отражения и прохождения для случая нормальной поляризации

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{Z_{C2} \cos \varphi - Z_{C1} \cos \theta}{Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \theta}; \quad (5.21)$$

$$\dot{T}_{\perp} = 1 + \dot{R}_{\perp} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \theta}. \quad (5.22)$$

Формулы (5.21), (5.22) справедливы и в том случае, если одна из сред (или обе среды) обладают проводимостью. При этом комплексными будут волновые числа при определении угла преломления  $\theta$  и характеристические сопротивления сред в формулах (5.21), (5.22).

Как видно из формулы (5.18) модуль коэффициента отражения (5.21) представляет собой отношение амплитуд напряженностей электрических полей отраженной и падающей волн на границе раздела, а фаза (5.21) равна разности фаз этих напряженностей. Аналогично трактуются модуль и фаза коэффициента прохождения, в этом случае нужно вместо отраженной волны рассматривать преломленную волну. Чтобы пользоваться формулами (5.21), (5.22) необходимо, задавшись конкретным значением угла падения  $\varphi$ , предварительно вычислить угол преломления  $\theta$  на основании закона Снеллиуса (5.14). На практике часто приходится вычислять коэффициенты отражения и преломления плоских волн для случая, когда первой

средой служит воздух ( $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ), а второй средой – немагнитный ( $\mu = 1$ ) диэлектрик без потерь с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . При этом формулы (5.21), (5.22) удастся объединить с законом Снеллиуса (5.14), записав их в виде

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}} \quad (5.23)$$

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}} \quad (5.24)$$

Далее будет проведен подробный анализ выведенных формул законов Снеллиуса и коэффициентов отражения и прохождения.

### 5.3. Падение параллельно поляризованной плоской волны на границу раздела двух сред

Плоская однородная волна, падающая на границу раздела, является параллельно поляризованной. В этом случае векторы напряженности электрического поля  $\vec{E}$  падающей, отраженной и преломленной волн лежат в плоскости падения  $xoz$ , а векторы напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  этих трех волн перпендикулярны плоскости падения (рис. 5.3)

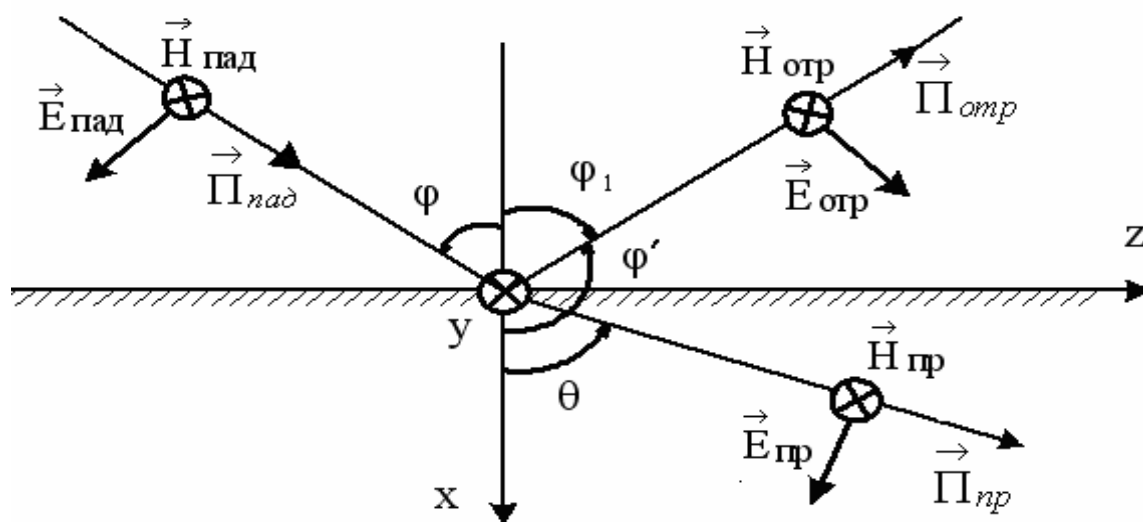


Рис. 5.3. Ориентация векторов поля.

Геометрия этой задачи (рис. 5.3.) совпадает с геометрией задачи падения плоской нормально поляризованной волны (рис.

5.2), если в последней заменить  $\vec{E}$  на  $\vec{H}$ , а  $\vec{H}$  заменить на минус  $\vec{E}$ . Учитывая смену ориентации векторов поля по аналогии с формулами (5.2)÷(5.7), можно записать поля падающей, отраженной и преломленной волн. Направления распространения этих волн остаются прежними и подчинены тем же законам Снеллиуса (5.12), (5.14). Комплексные амплитуды векторов поля отраженной и преломленной волн определяются из граничных условий (5.8), (5.9), запись которых в данной задаче будет отличаться от случая нормальной поляризации. Касательными к границе раздела составляющими векторов  $\vec{E}$  трех волн будут теперь z-е составляющие, а касательными векторов  $\vec{H}$  – y-е составляющие. Граничные условия (5.8), (5.9) принимают вид

$$\dot{E}_{nad} \cos \varphi - \dot{E}_{omp} \cos \varphi = \dot{E}_{np} \cos \theta; \quad (5.25)$$

$$\frac{\dot{E}_{nad}}{Z_{C1}} + \frac{\dot{E}_{omp}}{Z_{C1}} = \frac{\dot{E}_{np}}{Z_{C2}}. \quad (5.26)$$

Введем коэффициенты отражения и преломления как отношение комплексных амплитуд напряженности электрического поля отраженной и прошедшей волн к комплексной амплитуде напряженности электрического поля падающей волны на границе раздела сред

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{omp}}{\dot{E}_{nad}}, \quad T_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{np}}{\dot{E}_{nad}}. \quad (5.27)$$

Нижний значок указывает, что эти коэффициенты Френеля относятся к случаю параллельной поляризации волн. Разделив обе части равенств (5.25), (5.26) на первое слагаемое каждого уравнения, получим следующую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $\dot{R}_{\parallel}$  и  $\dot{T}_{\parallel}$



$$\begin{cases} 1 - \dot{R}_{\parallel} = \dot{T}_{\parallel} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \\ 1 + \dot{R}_{\parallel} = \dot{T}_{\parallel} \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \end{cases} \quad (5.28)$$

Решая систему (5.28), находим значения коэффициентов отражения и преломления для параллельно поляризованных волн

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{C1} \cos \varphi - Z_{C2} \cos \theta}{Z_{C1} \cos \varphi + Z_{C2} \cos \theta}; \quad (5.29)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{Z_{C1} \cos \varphi + Z_{C2} \cos \theta}; \quad (5.30)$$

Если первой средой является воздух ( $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ), а второй средой – немагнитный ( $\mu = 1$ ) диэлектрик без потерь с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , то формулы (5.29), (5.30) приводятся к виду более удобному для расчетов

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\varepsilon \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\varepsilon \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}. \quad (5.31)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2\sqrt{\varepsilon} \cos \varphi}{\varepsilon \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}. \quad (5.32)$$

Как видно, коэффициенты Френеля  $\dot{R}_{\parallel}$  и  $\dot{T}_{\parallel}$  существенно отличаются от коэффициентов  $\dot{R}_{\perp}$  и  $\dot{T}_{\perp}$ , то есть отражение волны от границы раздела и прохождение во вторую среду зависят от вида поляризации волны.

Пусть на поверхность раздела сред падает волна, имеющая произвольную линейную поляризацию. Вектор  $\vec{E}_{пад}$  разложим на сумму двух синфазных векторов, один из которых параллелен, а другой перпендикулярен плоскости падения. В общем случае модули  $\left| \dot{R}_{\perp} \right| \neq \left| \dot{R}_{\parallel} \right|$  и фазы  $\Phi_{\perp}$  и  $\Phi_{\parallel}$  коэффициентов отражения неодинаковы. Следовательно, в отраженных нормально и

параллельно поляризованных волнах соотношения амплитуд и фаз будут отличаться от соотношений амплитуд и фаз в нормально и параллельно поляризованных падающих волнах. Поэтому результирующее отраженное поле имеет эллиптическую поляризацию. Суммарное прошедшее поле также будет эллиптически поляризовано. При падающей волне круговой или эллиптической поляризации в отраженной и преломленной волнах изменяются параметры поляризационного эллипса.

Отметим, что формулы (5.29), (5.30) справедливы и в том случае, если одна из сред (или обе среды) обладают проводимостью. При этом диэлектрические проницаемости сред будут комплексными величинами, соответственно комплексными будут волновые числа в (5.14) и характеристические сопротивления сред в формулах (5.29), (5.30).

#### 5.4. Полное прохождение волны во вторую среду

При определенных условиях падающая волна без отражения полностью переходит во вторую среду, мощность падающей волны полностью переходит в мощность преломленной волны. Условия, при которых отсутствует отраженная волна, могут быть установлены путем решения уравнений  $R_{\perp} = 0$  и  $R_{\parallel} = 0$  относительно угла падения  $\Phi$ . В частном случае, когда обе среды являются немагнитными диэлектриками без тепловых потерь, угол падения, обеспечивающий полное прохождение волны во вторую среду, легко находится из физических соображений. Пусть параллельно поляризованная волна падает на плоскую границу двух немагнитных диэлектриков ( $\epsilon_{a1} \neq \epsilon_{a2}$ ,  $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$ ). Под воздействием поля преломленной волны вторая среда поляризуется – дипольные моменты молекул второй среды ориентируются параллельно вектору напряженности электрического поля преломленной волны (рис. 5.4.)

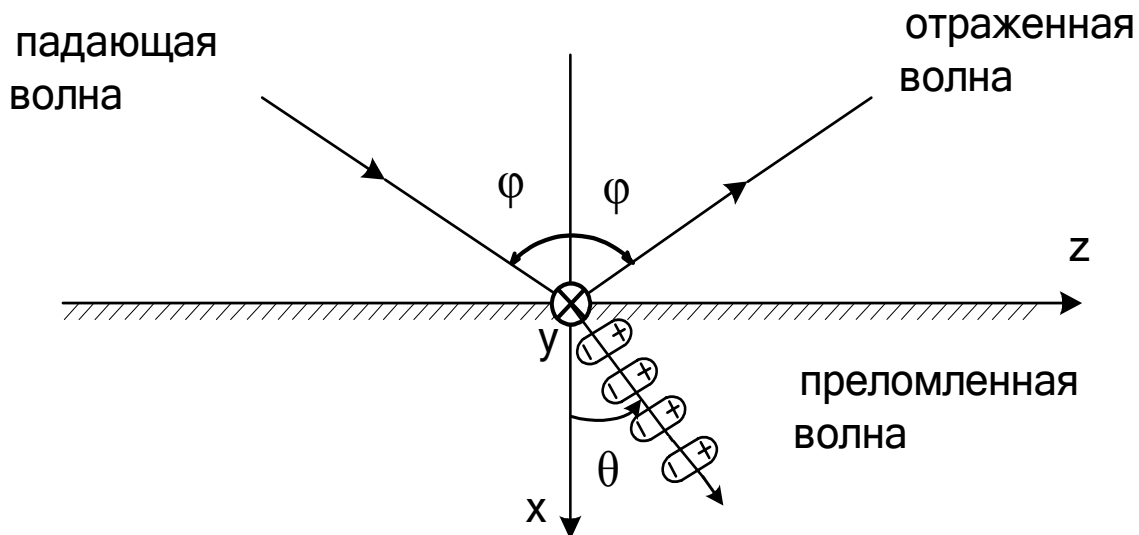


Рис. 5.4. К явлению полного прохождения

Упорядоченно ориентированные молекулярные диполи второй среды излучают электромагнитные волны, суперпозиция которых и образует в первой среде плоскую отраженную волну. Молекулярный диполь (его можно считать элементарным электрическим вибратором) не излучает вдоль своей оси. Следовательно, отраженная волна не сможет возникнуть, если оси диполей будут параллельны направлению, в котором должна распространяться отраженная волна. Указанная ориентация молекулярных диполей имеет место при выполнении условия

$\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$ , из которого следует, что

$$\cos \varphi = \sin \theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \varphi, \text{ тогда } \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (5.33)$$

Таким образом, плоская параллельно поляризованная волна целиком проходит во вторую среду при угле падения, называемым углом Брюстера

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (5.34)$$

В случае нормальной поляризации молекулярные диполи ориентируются перпендикулярно плоскости падения, т.е. перпендикулярно направлению распространения отраженной волны. Перпендикулярно своей оси молекулярный диполь излучает одинаково во всех направлениях и возникает отраженная волна. В данном случае угла Брюстера не существует: от границы двух

немагнитных диэлектриков нормально поляризованная волна отражается при любом угле падения. В более общем случае, когда  $\epsilon_{a1} \neq \epsilon_{a2}$  и  $\mu_{a1} \neq \mu_{a2}$  коэффициент отражения  $R_{\parallel} = 0$ , если

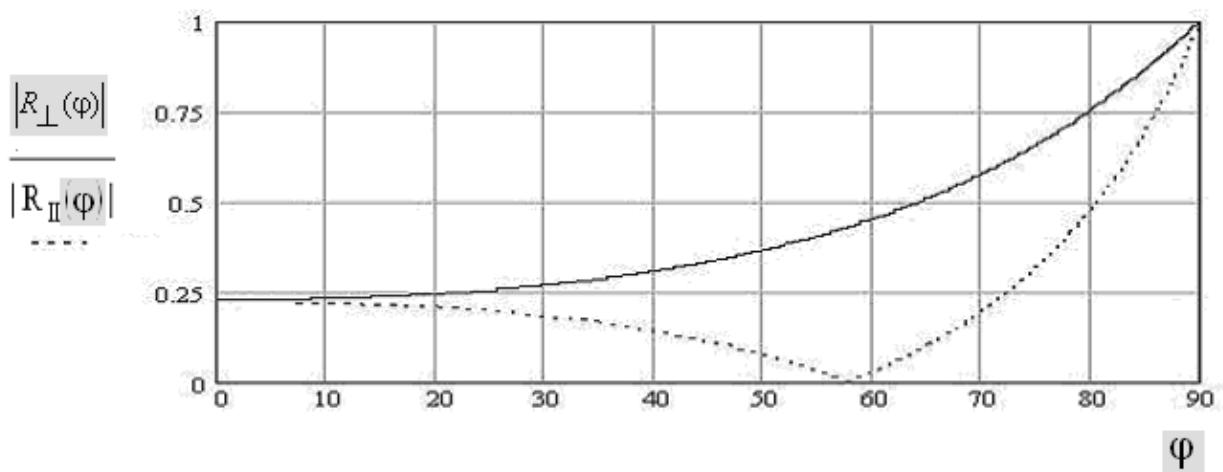
$$\sin^2 \varphi_B = \frac{\frac{\mu_2}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_2}{\mu_1}}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (5.35)$$

и коэффициент  $R_{\perp} = 0$ , если

$$\sin^2 \varphi_B = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}. \quad (5.36)$$

Для существования угла Брюстера при нормальной поляризации необходимо, чтобы  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Явление полного прохождения может быть использовано в технике создания неотражающих поверхностей

Графики модулей и фаз коэффициентов отражения и прохождения при нормальной (перпендикулярной) и параллельной поляризациях, рассчитанные по формулам (5.21), (5.22), (5.29), (5.30) в диапазоне углов падения  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$  для немагнитных сред приведены на рис. 5.5



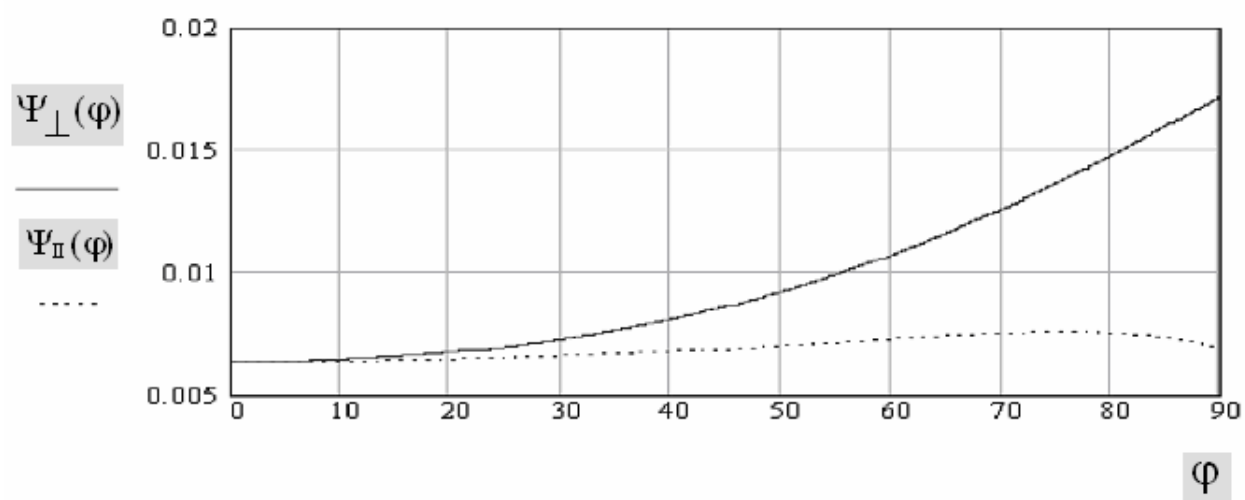
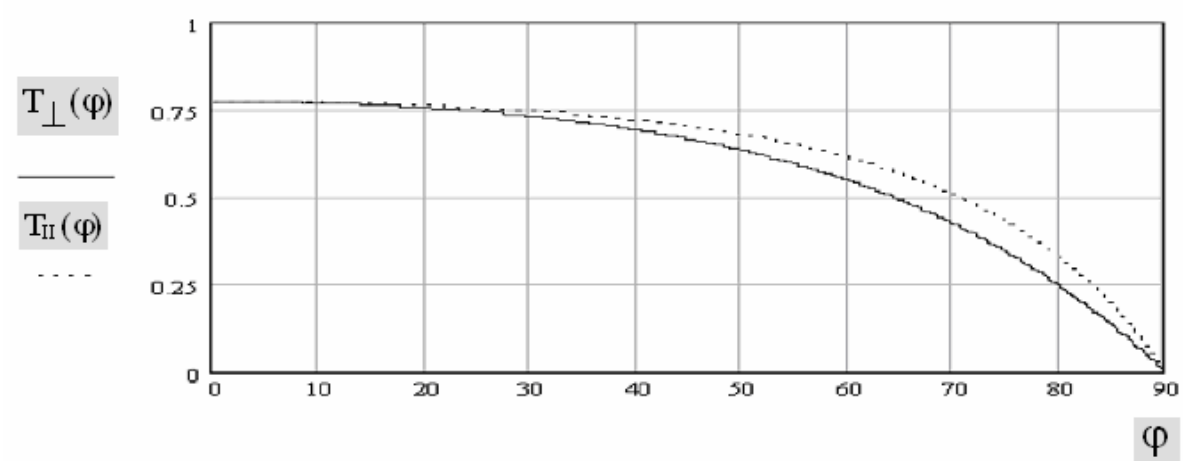
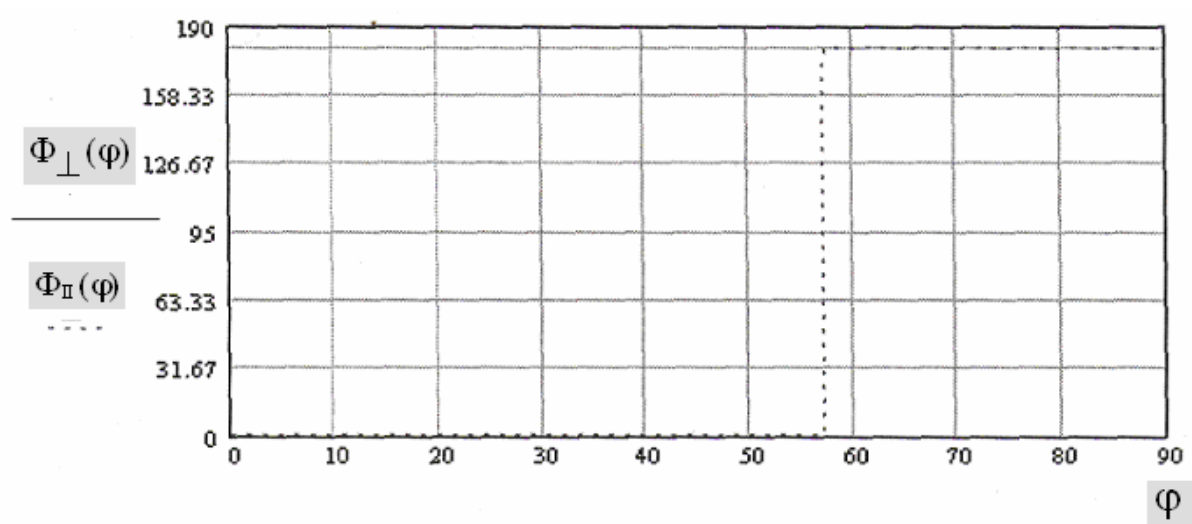


Рис. 5.5. Зависимость коэффициентов отражения и преломления от угла падения

Первой средой служит воздух с параметрами  $\varepsilon_1 = 1$  и  $\operatorname{tg} \delta_1 = 0$ , второй средой является лед с параметрами  $\varepsilon_2 = 2.5$  и  $\operatorname{tg} \delta_2 = 3.6 \cdot 10^{-4}$  на частоте  $f=10$  ГГц. Кривые  $\left| \dot{R}_\perp \right|$  имеют монотонный характер. При параллельной поляризации и угле падения равном углу Брюстера получаем  $\left| \dot{R}_\parallel \right| = 0$ . Следует отметить, что с ростом проводимости второй среды (или обеих сред) явление полного преломления в чистом виде не наблюдается, при угле Брюстера модуль  $\left| \dot{R}_\parallel \right|$  не равен нулю, а лишь имеет минимальное значение. Фаза коэффициентов отражения  $\Phi_\perp$  равна  $180^\circ$ , фаза  $\Phi_\parallel$  при угле Брюстера резко изменяет свое значение на  $180^\circ$ . Характер изменения модулей коэффициентов прохождения  $\left| \dot{T}_\perp \right|$  и  $\left| \dot{T}_\parallel \right|$  практически один и тот же. И всегда мощность падающей волны равна сумме мощностей отраженной и прошедшей волн.

Плоские волны круговой и эллиптической поляризаций можно представить в виде суммы параллельно и нормально поляризованных волн. Так как условия существования угла Брюстера для параллельной и нормальной поляризации различны, то волны с круговой и эллиптической поляризацией будут отражаться при любых углах падения. Однако при этом изменится поляризация отраженной и преломленной волн по сравнению с поляризацией падающей волны. В частности, если плоская волна с круговой поляризацией попадет под углом Брюстера на границу двух немагнитных диэлектриков, то отраженная волна оказывается нормально поляризованной, а преломленная - эллиптически поляризованной.

## 5.5. Полное отражение от границы раздела двух сред

Определим условия, при которых плоская электромагнитная волна в случае наклонного падения на границу раздела двух

идеальных диэлектриков полностью отражается. Обратимся вновь ко второму закону Снеллиуса.

$$\sin \theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}} \sin \varphi = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi . \quad (5.37)$$

Здесь введена безразмерная величина  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ , называемая показателем преломления среды. Считаем, что  $k_1 > k_2$  (например, граница диэлектрик – воздух), при этом говорят, что вторая среда оптически менее плотная, чем первая ( $n_2 < n_1$ ). В данном случае угол преломления  $\theta$  больше угла падения  $\varphi$ , и поэтому найдется такое значение угла падения, при котором преломленная волна распространяется параллельно границе раздела под углом  $\theta = 90^\circ$ . Данное значение угла падения называется критическим. Полагая в (5.37) угол  $\theta = 90^\circ$ , получаем

$$\sin \varphi_{кр} = \frac{k_2}{k_1} . \quad (5.38)$$

Для немагнитных диэлектриков ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ )

$$\sin \varphi_{кр} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} . \quad (5.39)$$

Подставляя значение  $\theta = 90^\circ$  в формулы коэффициентов отражения (5.21), (5.29), получаем

$$\left| \dot{R}_\perp \right| = 1 \text{ и } \left| \dot{R}_\parallel \right| = 1 . \quad (5.39)$$

Наблюдается явление полного отражения, мощность падающей волны полностью отражается внутрь первой среды с большей оптической плотностью.

При углах падения больше критического из (5.37) следует, что величина  $\sin \theta$  должна быть больше единицы. Этого не может быть при вещественных значениях угла  $\theta$ , а возможно лишь при комплексных значениях этого угла. Будем считать, что при  $\varphi > \varphi_{кр}$  угол преломления  $\theta$ , достигший уже значения  $\frac{\pi}{2}$  при  $\varphi = \varphi_{кр}$ , получает мнимое приращение, так что

$$\sin \dot{\theta} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \alpha + j \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \alpha = \operatorname{ch} \alpha ,$$

$$\cos \dot{\theta} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + j\alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \alpha - j \sin \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \alpha = -j \operatorname{sh} \alpha, \quad (5.40)$$

где  $\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$ ,  $\operatorname{ch} \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$  – гиперболические синус и косинус.

С другой стороны по второму закону Снеллиуса

$$\sin \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \varphi, \quad \cos \dot{\theta} = -j \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \varphi - 1} \quad (5.41)$$

Запись поля преломленной волны при использовании выражений (5.40) является компактной. Вычисление гиперболических синуса и косинуса следует проводить через исходные данные  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varphi$ , сравнивая (5.40), (5.41)

$$\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \varphi, \quad \operatorname{sh} \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \varphi - 1}.$$

Итак, понятия комплексного угла преломления позволяет удовлетворить закон преломления Снеллиуса в области углов падения, превышающих критический угол падения. Так как  $\sin \dot{\theta} > 1$ , то  $\cos \dot{\theta}$  оказывается чисто мнимой величиной. При этом коэффициенты отражения, определяемые формулами (5.21), (5.29), принимают вид выражений  $(a + jb)/(a - jb)$ , где  $a$  и  $b$  действительные числа. Следовательно, по абсолютной величине коэффициенты отражения остаются равными единице и могут быть представлены в форме

$$\dot{R}_{\perp} = e^{j\Phi_{\perp}}, \quad \dot{R}_{\parallel} = e^{j\Phi_{\parallel}}. \quad (5.41a)$$

Это означает, в частности, что средняя плотность потока мощности одинакова в падающей и отраженной волнах, полное отражение падающей волны сохраняется.

Согласно граничным условиям тангенциальные составляющие векторов поля равны в обеих средах, поэтому при полном отражении поле существует и во второй среде в виде преломленной волны при угле падения  $\varphi > \varphi_{кр}$ .

В случае нормальной поляризации поле преломленной волны определяется формулами (5.4), (5.5) при условии (5.40)



$$\begin{aligned} \dot{E}_{2y} &= T_{\perp} \dot{E}_{na\partial} e^{-k_2 x \operatorname{sh} \alpha} e^{-jk_2 z \operatorname{ch} \alpha}; \quad \dot{E}_{2x} = \dot{E}_{2y} = 0; \\ \dot{H}_{2x} &= -\frac{\dot{E}_{2y}}{Z_{c2}} \operatorname{ch} \alpha; \quad \dot{H}_{2z} = -j \frac{\dot{E}_{2y}}{Z_{c2}} \operatorname{sh} \alpha; \quad \dot{H}_{2y} = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Формулы для поля параллельно поляризованной волны записываются аналогично. Очевидно, что в случае параллельной

поляризации вектор  $\vec{\dot{E}}_2$  будет иметь две составляющие  $\dot{E}_{2x}$  и  $\dot{E}_{2z}$ , а вектор  $\vec{\dot{H}}_2$  - только составляющую  $\dot{H}_{2y}$ .

Перейдем к анализу волны (5.42). Эта волна распространяется вдоль координаты  $z$ , то есть вдоль границы, ее амплитуда убывает по экспоненциальному закону вдоль координаты  $x$ , то есть в плоскости фронта. Такие волны называются плоскими неоднородными волнами. У этой волны имеется продольная

составляющая  $\dot{H}_{2z}$  ( $\dot{E}_{2z}$  в случае параллельной поляризации), которая сдвинута по фазе относительно поперечных составляющих на  $\frac{\pi}{2}$ . Комплексный вектор Пойнтинга волны (5.42) имеет

вещественную продольную и чисто мнимую поперечную составляющие. Это означает, что во второй среде энергия в среднем за период распространяется только в направлении оси  $z$ , то есть вдоль границы. В направлении перпендикулярном границе раздела, существует только реактивный поток энергии. Амплитуды векторов поля экспоненциально убывают с удалением от поверхности раздела. Таким образом, при  $\Phi > \Phi_{кр}$  волна во второй среде практически существует лишь в поверхностном слое и распространяется вдоль границы раздела. Такая волна называется поверхностной.

Перейдем к анализу свойств волны в первой среде, представляющую собой сумму падающей и отраженной волн. Рассмотрим случай нормальной поляризации. Сложим поля (5.2) и (5.4), (5.3) и (5.5) и учтем, что при  $\Phi > \Phi_{кр}$  коэффициент отражения имеет вид (5.41a). Положим в (5.4), (5.5)  $\Phi_1 = \Phi$ ,

вынесем за скобки  $\exp\left(j\frac{\Phi_{\perp}}{2}\right)$  и, используя формулу Эйлера, получаем полное поле в первой среде

$$\begin{aligned}\dot{E}_{1y} &= 2 \dot{E}_{nad} \cos\left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Phi_{\perp}}{2}\right) e^{j\Phi_{\perp}/2} e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \\ \dot{H}_{1x} &= -\frac{\dot{E}_{1y}}{Z_{C1}} \sin \varphi, \quad \dot{H}_{1z} = -j \frac{\dot{E}_{1y}}{Z_{C1}} \cos \varphi \cdot \operatorname{tg}(k_1 x \cos \varphi + \Phi_{\perp}/2). \quad (5.43)\end{aligned}$$

Аналогично записывается поле в первой среде в случае параллельно поляризованных волн, при этом вектор  $\vec{E}_1$  будет иметь две составляющие  $\dot{E}_{1x}$  и  $\dot{E}_{1z}$ , а вектор  $\vec{H}_1$  только составляющую  $\dot{H}_{1y}$ .

Из полученных формул следует, что в первой среде плоская волна (5.43) распространяется вдоль поверхности раздела (вдоль оси  $z$ ), ее направление распространения определяется (направляется) границей раздела, такая волна получила название направляемой волны. Амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направляемой волны зависят от координаты  $x$  и угла падения  $\varphi$ , изменяясь по тригонометрическим функциям в плоскости фронта. Направляемая волна является неоднородной плоской волной. В отличие от плоской волны, распространяющейся в неограниченной однородной среде и всегда являющейся поперечной, в направляемой плоской волне имеются продольные составляющие векторов поля.

В случае нормальной поляризации (5.43) вектор  $\vec{H}_1$  имеет как поперечную  $\dot{H}_{1x}$ , так и продольную  $\dot{H}_{1z}$  составляющие, а вектор  $\vec{E}_1$  целиком лежит в поперечной плоскости. В случае параллельной поляризации, наоборот, вектор  $\vec{E}_1$  имеет и продольную  $\dot{E}_{1z}$ , и поперечную  $\dot{E}_{1x}$  составляющие, а вектор  $\vec{H}_1$

целиком лежит в поперечной плоскости. Поперечные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в направляемой волне изменяются синфазно. Продольные составляющие векторов поля сдвинуты по фазе относительно поперечных составляющих на  $\frac{\pi}{2}$ . Комплексный вектор Пойнтинга направляемой волны (5.43) имеет вещественную продольную и чисто мнимую поперечную составляющие. Следовательно, в первой среде так же, как и во второй среде, энергия распространяется только в направлении оси  $z$ , то есть вдоль поверхности раздела. В направлении перпендикулярном поверхности раздела, существует реактивный поток энергии.

Полученные выше выражения и выводы для направляемых волн позволяют рассмотреть случай, когда первая среда – диэлектрик, а вторая среда – идеальный проводник. Как уже отмечалось, характеристическое сопротивление для идеального проводника равно нулю. Подставляя  $Z_{C2} = 0$  в формулы Френеля (5.21), (5.22), (5.29) и (5.30), получим при любых углах падения

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= -1 \text{ и } \Phi_{\perp} = \pi, \quad T_{\perp} = 0, \\ R_{\parallel} &= 1 \text{ и } \Phi_{\parallel} = 0, \quad T_{\parallel} = 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Равенство нулю коэффициентов прохождения очевидно, т.к. переменное электромагнитное поле в идеально проводящей среде не существует. Полное отражение от поверхности идеального проводника имеет место при любых углах падения. При наклонном падении поле в первой среде представляет собой направляемую волну. Для случая нормальной поляризации поле направляемой волны определяется выражением (5.43) при  $\Phi_{\perp} = \pi$ . Поверхностные и направляемые волны переносят энергию в линиях передачи.

## 5.6. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на границу раздела сред

Решение задачи о падении плоской однородной электромагнитной волны на границу раздела двух разных сред необходимо дополнить практически важным случаем нормального падения. При нормальном падении плоской волны на границу раздела теряет определенность понятие плоскости падения, и,

следовательно, исчезает различие между нормально поляризованными и параллельно поляризованными волнами. Так как углы падения и преломления равны нулю, то коэффициенты отражения и преломления (5.21, 5.22, 5.29, 5.30) при нормальном падении принимают вид

$$\dot{R} = \dot{R}_{\perp} = -\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}}, \quad (5.45)$$

$$\dot{T} = \dot{T}_{\perp} = -\dot{T}_{\parallel} = \frac{2Z_{C2}}{Z_{C2} + Z_{C1}}, \quad (5.46)$$

где  $Z_{C1}, Z_{C2}$  – характеристические сопротивления первой и второй сред.

Коэффициенты отражения и прохождения полностью определяются характеристическими сопротивлениями граничащих сред. Важный частный случай – нормальное падение волны из воздуха ( $\epsilon=1, \mu=1, \sigma=0$ ) на немагнитный диэлектрик ( $\epsilon, \mu=1, \sigma=0$ ). Формулы (5.45), (5.46) упрощаются и принимают вид

$$\dot{R} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon}}{1 + \sqrt{\epsilon}}, \quad \dot{T} = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon}}.$$

Следует обратить внимание на то, что при  $\epsilon > 1$  коэффициент отражения  $R < 0$ . Это означает, что на границе раздела комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  отраженной волны сдвинута по фазе на  $180^\circ$  относительно комплексной амплитуды вектора  $\vec{E}$  падающей волны.

Теперь выразим полные поля в обеих средах. По прежнему считаем, что обе среды не обладают проводимостью и характеризуются параметрами  $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}$  и  $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}$ . Падающая волна распространяется вдоль оси  $z$ , то есть по нормали к границе раздела. Отраженная и прошедшая волны также распространяются

перпендикулярно к границе раздела. Векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  трех волн ориентированы в пространстве так, как это показано на рис. 5.6.

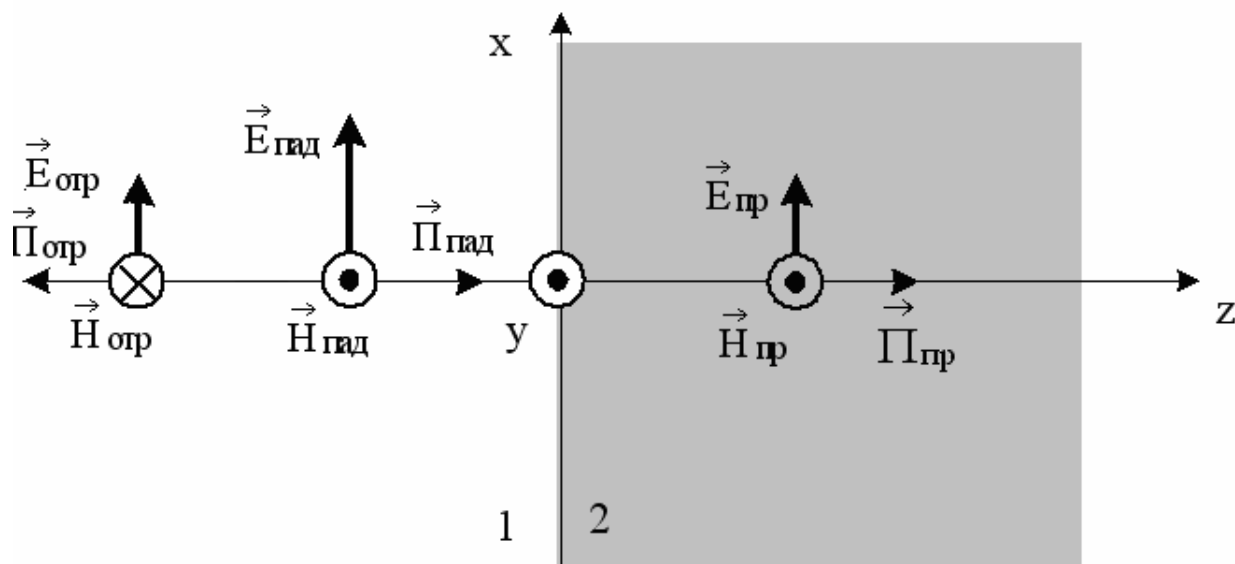


Рис. 5.6. Нормальное падение волн на границу раздела

Полное поле во второй среде представляет собой поле преломленной волны, комплексные амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  которой имеют вид

$$\vec{E}_2 = x_0 \vec{T} \vec{E}_{nad} e^{-jk_2 z}, \quad \vec{H}_2 = y_0 \vec{T} \frac{\vec{E}_{nad}}{Z_{C2}} e^{-jk_2 z}. \quad (5.47)$$

Это плоская однородная волна, обладающая свойствами плоских волн, распространяющихся в неограниченной однородной среде.

Займемся анализом полного поля в первой среде. Это поле представляет собой интерференцию падающей и отраженной волн. Интерференцией называется сложение в пространстве двух или нескольких волн, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны. Комплексные амплитуды векторов поля результирующей волны имеют вид

$$\vec{E}_1 = x_0 \vec{E}_{nad} e^{-jk_1 z} + x_0 \vec{R} \vec{E}_{nad} e^{jk_1 z} = x_0 \vec{E}_{nad} e^{-jk_1 z} \left( 1 + \vec{R} e^{2jk_1 z} \right); \quad (5.48)$$

$$\vec{H}_1 = y_0 \frac{\vec{E}_{nad}}{Z_{C1}} e^{-jk_1 z} - y_0 \dot{R} \frac{\vec{E}_{nad}}{Z_{C1}} e^{jk_1 z} = y_0 \frac{\vec{E}_{nad}}{Z_{C1}} e^{-jk_1 z} \left( 1 - \dot{R} e^{2jk_1 z} \right). \quad (5.49)$$

В записи (5.48), (5.49) учтено, что вектор Пойнтинга отраженной волны направлен в сторону уменьшения координаты  $z$ . Модули круглых скобок будут определять периодические изменения амплитуд электрического и магнитного полей (5.48), (5.49) вдоль координаты  $z$  в первой среде. В зависимости от величины коэффициента отражения различают три режима распространения волны в первой среде.

1. Режим с частичным отражением.

Учтем, что при  $Z_{C2} > Z_{C1}$  коэффициент отражения (5.45) величина положительная, при  $Z_{C2} < Z_{C1}$  – величина отрицательная. На границе раздела  $z = 0$  амплитуда электрического поля (5.48) имеет максимальное значение  $E_m = E_{nad} \left( 1 + \left| \dot{R} \right| \right)$  при

$Z_{C2} > Z_{C1}$  (при этом амплитуда магнитного поля имеет минимальное значение за счет знака минус в круглой скобке) или минимальное значение  $E_m = E_{nad} \left( 1 - \left| \dot{R} \right| \right)$  при  $Z_{C2} < Z_{C1}$ . При смещении по

координате  $z$  влево от границы на  $\lambda_1/2$  экспонента в круглых скобках равна единице и значения амплитуд будут такими же, что и на границе раздела. Таким образом, период пространственного распределения амплитуд электрического (5.48) и магнитного (5.49) полей равен половине длины волны в первой среде. Это расстояние между соседними максимумами либо минимумами амплитуд в результирующей волне (5.48), (5.49). Напряженности поля принимают максимальные значения, которые в  $\left( 1 + \left| \dot{R} \right| \right)$  раз выше, и

минимальные, которые в  $\left( 1 - \left| \dot{R} \right| \right)$  раз ниже, чем в падающей волне.

Распределение амплитуды  $x$ -ой составляющей электрического поля (5.48) результирующей волны в первой среде в случае  $Z_{C1} > Z_{C2}$  показано на рис. 5.7

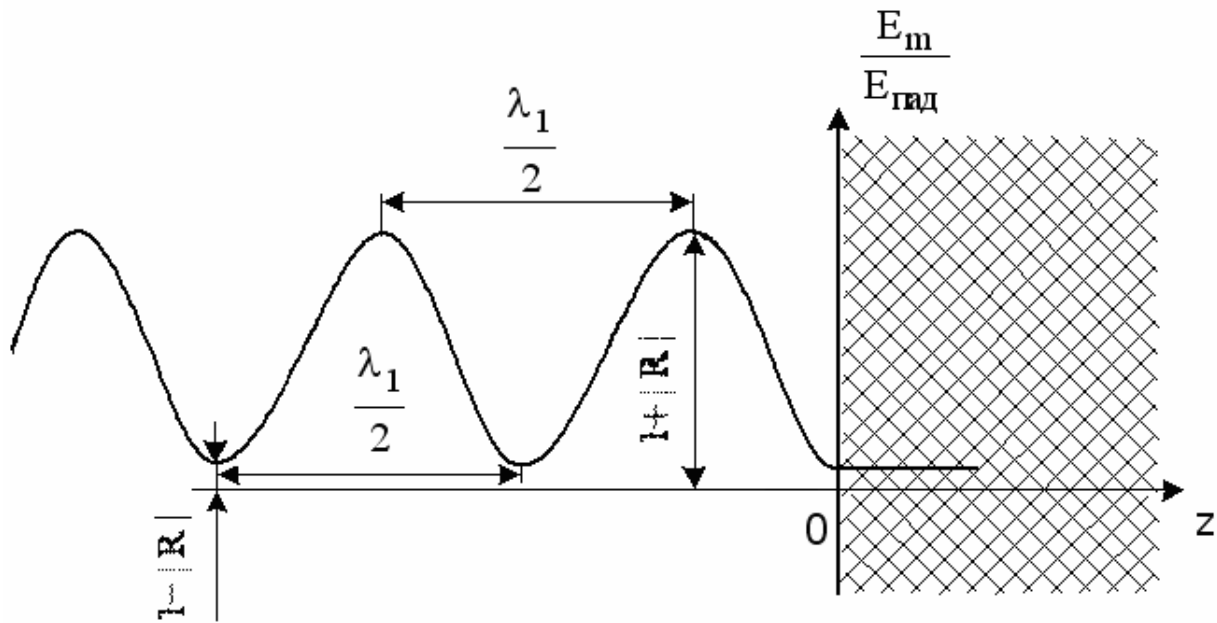


Рис. 5.7. Распределение амплитуды электрического поля при нормальном падении

Аналогичное распределение имеет у-я составляющая магнитного поля (5.49) с тем лишь отличием, что периодическое изменение амплитуды начинается с максимального значения на границе раздела (случай  $Z_{C1} > Z_{C2}$ ). Распределение амплитуды поля результирующей волны вдоль координаты распространения принято характеризовать коэффициентом бегущей волны (КБВ). КБВ – это отношение наименьшей амплитуды поля к наибольшей вдоль направления распространения

$$КБВ = \frac{E_{над} \left( 1 - \left| \dot{R} \right| \right)}{E_{над} \left( 1 + \left| \dot{R} \right| \right)} = \frac{1 - \left| \dot{R} \right|}{1 + \left| \dot{R} \right|}. \quad (5.50)$$

Величина, обратная КБВ, называется коэффициентом стоячей волны (КСВ)

$$КСВ = \frac{1 + \left| \dot{R} \right|}{1 - \left| \dot{R} \right|}. \quad (5.51)$$

Коэффициент бегущей волны изменяется в интервале от нуля до единицы, коэффициент стоячей волны изменяется от единицы

до бесконечности. Вследствие того, что шкала значений КСВ является «растянутой», КСВ чаще применяется при оценке параметров реальных технических устройств. Режим с частичным отражением называют еще смешанным режимом в отличие от других следующих режимов бегущих и стоячих волн.

## 2. Режим бегущих волн.

На границе раздела отсутствует отражение, волна полностью переходит во вторую среду. В первой среде поле представлено бегущей плоской однородной волной, ее амплитуда постоянна вдоль направления распространения и КСВ = 1. Нулевой коэффициент отражения достигается включением между средами дополнительного слоя диэлектрика. Его параметры рассчитываются так, что волны отраженные от обеих границ слоя компенсируют друг друга и в первой среде отражение отсутствует (рис. 5.8).

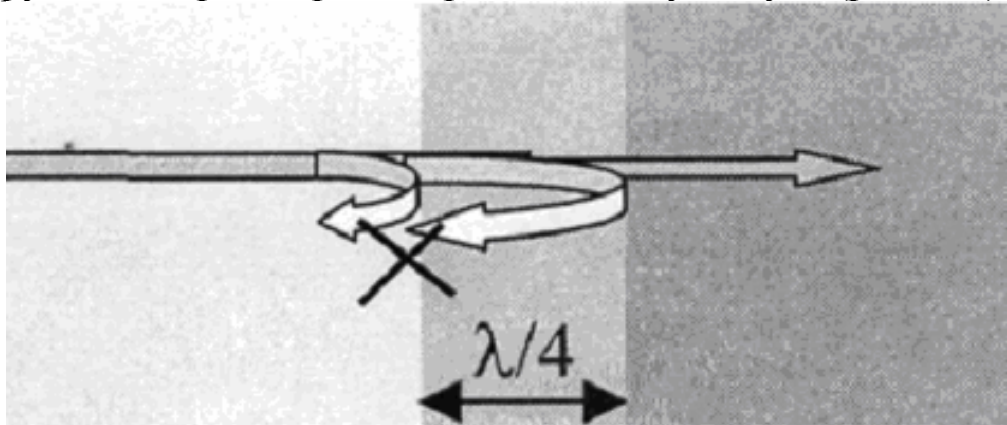


Рис. 5.8. Обеспечение режима бегущей волны с помощью четвертьволнового трансформатора

Сдвиг фаз в  $180^\circ$  между этими отраженными волнами обеспечивается толщиной согласующего слоя в четверть длины волны, а равенство амплитуд достигается выбором характеристического сопротивления. Такой дополнительный слой материала называется четвертьволновым согласующим трансформатором. Его параметрами являются характеристическое сопротивление  $Z_{mp}$  и толщина  $\ell_{mp}$

$$Z_{mp} = \sqrt{Z_{C1} Z_{C2}}, \quad \ell_{mp} = \frac{\lambda_{mp}}{4}. \quad (5.52)$$

## 3. Режим стоячих волн.

Примем, что вторая среда, на границу которой нормально падает плоская однородная волна, является идеальным



проводником. Характеристическое сопротивление идеального проводника  $Z_{C2} = 0$ . Из выражений (5.45), (5.46) следует, что

$$R = -1, \quad T = 0, \quad (5.53)$$

то есть происходит полное отражение. При подстановке  $R = -1$  в (5.48), (5.49) получаем полное поле в среде над идеальным проводником

$$\vec{E}_1 = -j \vec{x}_0 2E_{na\partial} \sin(k_1 z) \quad \vec{E}_1 = \vec{x}_0 2E_{na\partial} \sin(k_1 z) \sin(\omega t). \quad (5.54)$$

$$\vec{H}_1 = \vec{y}_0 \frac{2E_{na\partial}}{Z_{C1}} \cos(k_1 z) \quad \vec{H}_1 = \vec{y}_0 \frac{2E_{na\partial}}{Z_{C1}} \cos(k_1 z) \cos(\omega t). \quad (5.55)$$

В каждый момент времени мы имеем неподвижную, так называемую стоячую волну. Чисто стоячая волна образуется при наложении двух распространяющихся в противоположных направлениях волн с одинаковыми амплитудами. Отметим свойства стоячей волны.

а) Фазы векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются лишь во времени, причем  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Это означает, что среднее за период значение вектора Пойнтинга равно нулю, и стоячая волна не переносит энергии.

б) Пространственные распределения амплитуд векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  сдвинуты на четверть длины волны.

На поверхности идеального проводника  $z = 0$  амплитуда  $x$ -ой составляющей электрического поля (5.54) равна нулю, а амплитуда  $y$ -ой составляющей магнитного поля (5.55) удваивается. Распределение амплитуд поля стоячей волны (5.54), (5.55)

$$E_m = 2E_{na\partial} \sin(k_1 z), \quad H_m = \frac{2E_{na\partial}}{Z_{C1}} \cos(k_1 z), \quad (5.56)$$

показано на рис. 5.9.

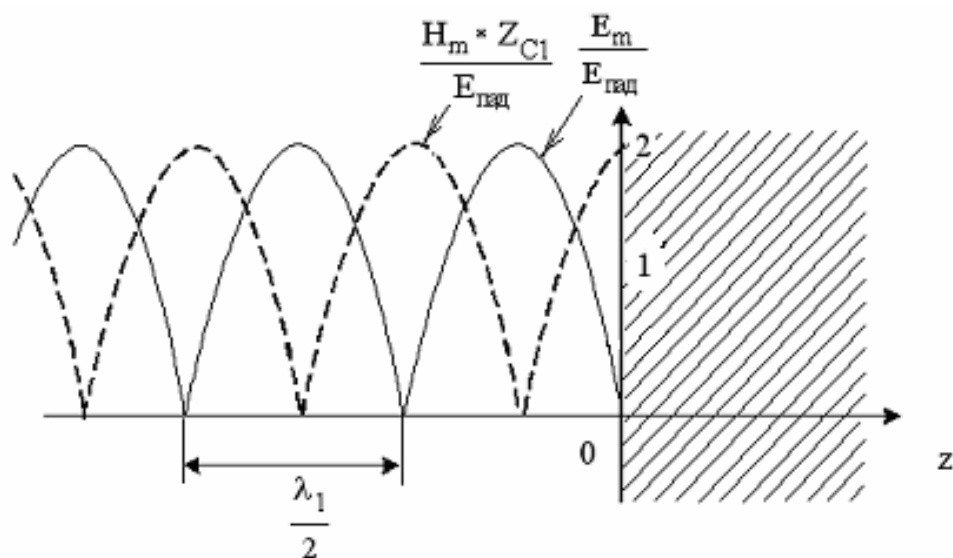


Рис. 5.9. Стоячая волна при полном отражении

Таким образом, на поверхности идеального проводника ( $z = 0$ ) напряженность электрического поля равна нулю, а напряженность суммарного магнитного поля в два раза превышает напряженность магнитного поля падающей электромагнитной волны

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{пад} + \vec{E}_{отр} = 0; \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_{пад} + \vec{H}_{отр} = 2\vec{H}_{пад}. \quad (5.57)$$

Векторы поля при нормальном падении плоской волны на поверхность идеального проводника показаны на рис. 5.10.

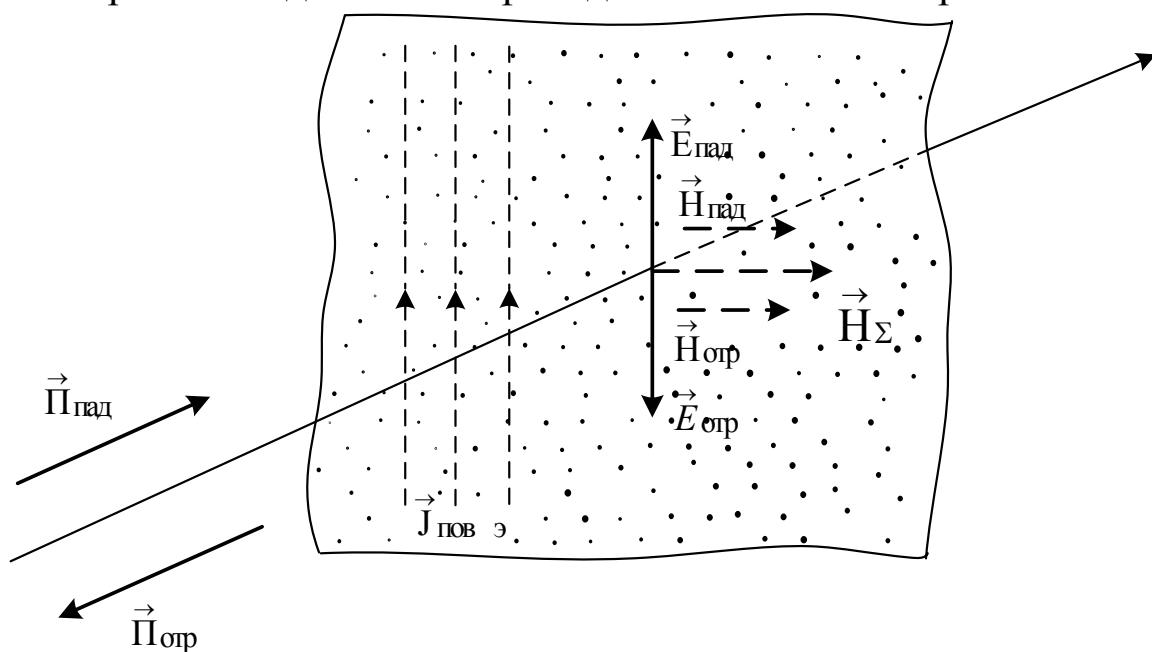


Рис. 5.10. Поля и токи на границе идеального проводника

Очевидно, что выполняются полученные ранее граничные условия: тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  равна нулю ( $E_{1\tau} = 0$ ) и на границе ( $z = 0$ ) наведен электрический ток с поверхностной плотностью

$$\vec{J}_{\text{пов.э}} = \left[ \vec{z}_0, 2 H_{\text{над}}(0) \right] = \vec{x}_0 2 H_{\text{над}}(0) = \vec{x}_0 \frac{2 E_{\text{над}}}{Z_{C1}}. \quad (5.58)$$

Поле, близкое к стоячей волне, возникает при почти полном отражении от границы сред с резко отличающимися сопротивлениями  $Z_{C1} \gg Z_{C2}$  или  $Z_{C1} \ll Z_{C2}$ .

### 5.7. Приближенные граничные условия Леонтовича. Мощность потерь в проводниках

Плоская волна падает под углом  $\varphi$  на плоскую границу раздела двух сред, причем вторая среда оптически более плотная, чем первая, то есть  $k_2 \gg k_1$  ( $n_2 \gg n_1$ ). Из второго закона Снеллиуса

$$\sin \theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi$$

следует, что угол преломления  $\theta$  близок к нулю и во второй среде волна распространяется по нормали к границе раздела при любом угле падения. Практически важным является случай, когда вторая среда обладает большой проводимостью или высокой диэлектрической проницаемостью и является намного плотнее первой

$$\left| \vec{k}_2 \right| \gg k_1. \quad (5.59)$$

Частным случаем таких сред являются хорошо проводящие металлы, а так же водная среда на низких частотах. У металлов  $\left| \vec{k}_2 \right| = \sqrt{\omega \mu_{a2} \sigma_2}$ , и так как удельная проводимость  $\sigma_2$  велика, то условие (5.59) практически всегда выполняется. Можно показать, что и в случае (5.59) преломленная волна в хорошо проводящей

среде распространяется практически вдоль нормали к поверхности раздела при любом угле падения. Эта волна является поперечной, причем векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в ней сдвинуты по фазе на  $\pi/4$ .

Амплитуды векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  преломленной волны в металле быстро убывают с удалением от границы раздела и на высоких частотах волна фактически существует лишь в тонком слое вблизи поверхности раздела. Это явление называется поверхностным эффектом или скин-эффектом (skin – кожа). Явление поверхностного эффекта позволяет использовать на высоких частотах металлические экраны для защиты различных устройств от влияния на них внешнего электромагнитного поля. Следует отметить, что в случае постоянных и низкочастотных полей металлический экран не пропускает электрическое поле, но пропускает магнитное, если экран выполнен из парамагнитного или диамагнитного металла.

Вернемся к волне во второй хорошо проводящей среде (металле). Эту волну можно считать плоской однородной, для которой должно выполняться соотношение

$$\vec{E}_2 = Z_{C2} \left[ \vec{n}, \vec{H}_2 \right], \quad (5.60)$$

где  $\vec{n}$  – единичная нормаль, внешняя ко второй среде.

Так как предполагается, что волна во второй среде распространяется перпендикулярно границе раздела, то векторы

$\vec{E}_2$  и  $\vec{H}_2$  будут параллельны (касательны) границе

$$\vec{E}_2 = E_{2\tau} \vec{\tau} \text{ и } \vec{H}_2 = H_{2\tau'} \vec{\tau'}. \quad (5.61)$$

Разные индексы  $\tau$  и  $\tau'$  у векторов  $\vec{E}_2$  и  $\vec{H}_2$  подчеркивают, что касательные составляющие векторов поля на плоскости раздела перпендикулярны по направлению. Согласно точным граничным

условиям касательные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  непрерывны на границе раздела

$$\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau} \text{ и } \vec{H}_{1\tau'} = \vec{H}_{2\tau'} \quad (5.62)$$

С учетом равенств (5.61), (5.62) соотношение (5.60) принимает вид

$$\vec{E}_{1\tau} = Z_{C2} \left[ \vec{n}, \vec{H}_{1\tau'} \right] \quad (5.63)$$

Если ввести на поверхности проводника декартову систему координат, то (5.63) можно переписать в скалярном виде

$$E_x = Z_{C2} H_y, \quad E_y = -Z_{C2} H_x. \quad (5.64)$$

Соотношения (5.63), (5.64) называют приближенными граничными условиями Леонтовича. Из (5.63) следует, что на поверхности реального проводника касательная составляющая электрического поля отлична от нуля. В предельном случае  $\sigma_2 \rightarrow \infty$  граничное условие Леонтовича совпадает с точным граничным условием  $E_{1\tau} = 0$  на поверхности идеального проводника. Так как характеристическое сопротивление в случае хорошо проводящей среды (металла) мало, то и касательная составляющая вектора  $\vec{E}$  на поверхности такой среды будет мала. В инженерных расчетах ее обычно не учитывают, то есть считают, что структура поля над реальным проводником такая же, как и над идеальным проводником. Но учет касательной составляющей электрического поля на поверхности реального проводника (5.63) необходим при расчете потерь в проводниках. Эта касательная составляющая  $\vec{E}_{1\tau}$  определяет нормальную к поверхности, направленную вглубь проводника компоненту вектора Пойнтинга, то есть уходящий в металл поток энергии.

Условие (5.63) было получено для плоской границы раздела. При произвольной форме поверхности раздела этим условием можно пользоваться в тех случаях, если радиус кривизны поверхности значительно превышает глубину проникновения поля

в проводящую среду, которая, в свою очередь, должна быть малой по сравнению с длиной волны.

Граничные условия Леонтовича позволяют не рассматривать электромагнитное поле в хорошо проводящей среде (металле) и учитывать влияние этой среды на поле вне ее лишь через граничные условия на поверхности. В сопротивлении  $\dot{Z}_{C2}$  заложена информация о параметрах проводника и поведении электромагнитного поля внутри него.

Вычислим потери энергии в проводнике. Пусть металлический объект(проводник), размеры и минимальный радиус кривизны поверхности  $S$  которого велики по сравнению с глубиной проникновения, находится в монохроматическом электромагнитном поле. Под воздействием этого поля в металле наводятся токи проводимости, на поддержание которых расходуется электромагнитная энергия. Вычислим соответствующую этому процессу среднюю за период мощность тепловых потерь, определяемую как поток среднего значения вектора Пойнтинга через поверхность  $S$  проводника

$$P_{\text{пот. ср.}} = \operatorname{Re} \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad (5.65)$$

Для вычисления мощности (5.65) нет необходимости определять поле внутри объекта (проводника), достаточно вычислить составляющую комплексного вектора Пойнтинга, направленную внутрь проводника. Нормальная составляющая вектора Пойнтинга определяется касательными составляющими векторов поля на поверхности проводника

$$\vec{\Pi}_n = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}_{1\tau}, \vec{H}_{1\tau'}^* \right] \quad (5.66)$$

Используя граничное условие Леонтовича (5.63), получаем

$$\vec{\Pi}_n = \frac{1}{2} \dot{Z}_{C2} \left[ \left[ \vec{n}, \vec{H}_{1\tau'} \right], \vec{H}_{1\tau'}^* \right] = -\vec{n} \frac{1}{2} \dot{Z}_{C2} \left| \vec{H}_{1\tau'} \right|^2 \quad (5.68)$$

Подставляем (5.68) в (5.65) и учтем, что поток энергии направлен внутрь проводника, а  $\vec{n}$  – единичная нормаль внешняя к поверхности проводника

$$P_{nom. cp} = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \dot{Z}_{C2} \int_S \left| \vec{H}_{1\tau'} \right|^2 dS. \quad (5.69)$$

Характеристическое сопротивление реального проводника определено ранее

$$\dot{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma_2}} (1 + j) = \frac{1}{\sigma_2 \Delta} (1 + j),$$

где  $\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_{a2} \sigma_2}}$  – глубина проникновения поля в проводник.

Таким образом, средняя за период мощность тепловых потерь в проводнике равна

$$P_{nom. cp} = \frac{1}{2 \sigma_2 \Delta} \int_S \left| \vec{H}_{1\tau'} \right|^2 dS. \quad (5.70)$$

Как уже отмечалось, структура поля у поверхности реального проводника близка к структуре поля у такой же поверхности идеального проводника. Поэтому при вычислении мощности потерь амплитуда касательной составляющей магнитного поля берется равной амплитуде касательной составляющей магнитного поля на поверхности идеального проводника. В случае нормального падения амплитуда берется из (5.57)

$$H_{1\tau} = 2H_{nad} = \frac{2E_{nad}}{Z_{C1}}. \quad (5.71)$$

Это предположение существенно упрощает расчеты, обеспечивая достаточную для практики точность результатов.

В заключении следует отметить, что рассмотренные выше явления, имеющие место при падении плоской однородной волны на границу раздела двух сред, имеют широкую область приложения. Во-первых, представленные законы отражения и преломления используются и в случаях, когда электромагнитные волны и поверхности раздела не являются плоскими. Правильные результаты будут получены, если радиусы кривизны как

поверхности раздела, так и поверхности фронта волны значительно больше глубины проникновения. Во-вторых, законы могут быть применены и для расчета прохождения волн через пластинки и более сложные слоистые среды. В-третьих, эти же законы применимы и к линиям передачи.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн / Б.М. Петров. М.: Горячая линия-Телеком, 2003. 558с.
2. Вольман В.И. Техническая электродинамика/ В.И. Вольман, Ю.В. Пименов, А.В. Муравцев. М.: Связь, 2000. 480с.
3. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн/С.И. Баскаков. М.: Высшая школа, 1992. 416с.
4. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны/ Л.А. Вайнштейн. М.: Радио и связь, 1988. 581с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Глава 1. Общие сведения о волновых процессах.....	4
1.1 . Понятие волнового процесса.....	4
1.2 . Гармоническая волна и её параметры.....	6
Глава 2. Векторы электромагнитного поля. Параметры и классификация сред.....	8
2.1. Векторы электромагнитного поля .....	8
2.2. Материальные уравнения электромагнитного поля.....	10
2.3. Классификация сред ... ..	15
Глава 3. Основные уравнения электромагнитного поля.....	19
3.1. Уравнения Максвелла.....	19
3.2. Система уравнений электромагнитного поля.....	25
3.3. Система уравнений монохроматического электромагнитного поля.....	26
3.4. Уравнение баланса мгновенных значений мощностей в электромагнитном поле.....	32
3.5. Уравнение баланса мощностей в монохроматическом электромагнитном поле.....	37
3.6. Скорость распространения энергии электромагнитного поля.....	42
3.7. Граничные условия для векторов электромагнитного поля на поверхности раздела сред.....	44
3.7.1. Введение.....	44
3.7.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля.....	46

3.7.3. Граничные условия для касательных составляющих векторов электромагнитного поля.....	50
3.7.4. Граничные условия на поверхности идеального проводника.....	55
Глава 4. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде.....	58
4.1. Волновые уравнения.....	58
4.2. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде.....	62
4.3. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде с проводимостью, отличной от нуля...	74
4.3.1. Плоские однородные волны в диэлектрических средах с малыми потерями.....	82
4.3.2. Плоские однородные волны в хорошо проводящих средах.....	83
4.4. Поляризация электромагнитных волн.....	84
4.5. Плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении.....	92
Глава 5. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела сред.....	95
5.1. Введение .....	95
5.2. Падение нормально поляризованной плоской волны на границу раздела двух сред .....	96
5.3. Падение параллельно поляризованной плоской волны на границу раздела двух сред .....	103

5.4. Полное прохождение волны во вторую среду.....	106
5.5. Полное отражение от границы раздела двух сред.....	110
5.6. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на границу раздела сред.....	115
5.7. Приближенные граничные условия Леонтовича. Мощность потерь в проводниках.....	123
Библиографический список.....	129

*Учебное пособие*

Соловьянова Ираида Павловна

Наймушин Михаил Павлович

Теория волновых процессов

Электромагнитные волны

Редактор Н.В. Рощина

Компьютерная верстка Сорокин А.К.

ИД № 06263 от 12.11.2001 г.

---

Подписано в печать

Формат 60x84/16

Бумага писчая

Печать офсетная

Уч.-изд. л. 6,5

Усл. печ. л. 7,44

Тираж

Заказ

Цена «С»

---

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография НИЧ УГТУ-УПИ  
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19