

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Э.Ф. Крючков, Л.Н. Юрова

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2007

УДК 539.125.5
ББК 22.382я7
К85

Крючков Э.Ф., Юрова Л.Н. **Теория переноса нейтронов**: Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2007. – 272 с.

Пособие написано на основе лекций, читаемых авторами по курсу «Теория переноса нейтронов» в МИФИ в течение более чем пятнадцати лет. Книга, по сути, является существенно переработанным и дополненным учебным пособием В.В. Хромова и А.А. Кашутина «Теория диффузии и замедления нейтронов в неразмножающих средах», которое было издано в МИФИ более двадцати лет назад. Курс «Теория переноса нейтронов» – первый курс специализации, и в нем изложены классические подходы к различным моделям, описывающим распределение нейтронов в среде. Авторы не претендуют на всеобъемлющее описание теории переноса нейтронов. Пособие ограничено, как правило, областью реакторной физики и ориентировано, прежде всего, на студентов, обучающихся по специальности 1403 «Ядерные реакторы и энергетические установки». В ряде случаев описание ограничивается неразмножающими средами, поскольку случай размножающей среды рассматривается в таких дальнейших курсах, как «Физическая теория ядерных реакторов» и др. Пособие может быть полезно также для студентов и аспирантов, обучающихся по смежным специальностям.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент проф., д-р физ.-мат. наук В.А.Климанов

ISBN 978-5-7262-0859-6

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Основные понятия и определения.....	5
1.1. Предмет курса.....	5
1.2. Свойства свободного нейтрона.....	5
1.3. Основные ядерные реакции – источники нейтронов.....	10
1.4. Основные процессы взаимодействия нейтронов с ядрами среды.....	22
1.5. Эффективные нейтронные сечения.....	26
1.6. Длина свободного пробега нейтрона в среде.....	30
1.7. Описание нейтронного поля в среде.....	34
Глава 2. Теория диффузии моноэнергетических нейтронов.....	42
2.1. Балансное уравнение для скоростей процессов.....	43
2.2. Закон Фика.....	46
2.3. Уравнение диффузии моноэнергетических нейтронов.....	52
2.4. Условия однозначного выбора решения уравнения диффузии моноэнергетических нейтронов в физических задачах.....	53
2.5. Характерные задачи стационарной теории диффузии моноэнергетических нейтронов.....	59
2.6. Диффузионные функции влияния (функции Грина). Принцип суперпозиции источников.....	67
2.7. Альбеда. Постановка граничных условий с помощью альбеда.....	72
2.8. Решение уравнения диффузии в конечной среде на примере математического обоснования экспоненциального эксперимента.....	77
Глава 3. Теория замедления нейтронов при упругом рассеянии.....	83
3.1. Микроскопическое эффективное сечение упругого рассеяния нейтронов.....	84
3.2. Кинематика замедления.....	89
3.3. Законы упругого рассеяния.....	93
3.4. Летаргия.....	102
3.5. Уравнение замедления нейтронов в бесконечной неразмножающей однородной среде.....	106
3.6. Плотность замедления нейтронов.....	110
3.7. Замедление нейтронов в поглощающей среде на водороде.....	112
3.8. Замедление нейтронов в поглощающей среде на ядрах с атомной массой больше единицы.....	115
3.9. Замедление в поглощающей среде, состоящей из смеси нуклидов (асимптотическая область энергии).....	128
3.10. Микроскопическое эффективное сечение поглощения. Понятие эффекта Доплера.....	131
3.11. Замедление на водороде при наличии поглощения.....	137
3.12. Замедление на ядрах с атомной массой больше единицы с учетом поглощения.....	142

3.13. Поглощение нейтронов на группе узких изолированных резонансов	153
3.14. Эффективный и истинный резонансные интегралы	155
Глава 4. Пространственное распределение замедляющихся нейтронов	159
4.1. Уравнение замедления в диффузионном приближении	160
4.2. Модель непрерывного замедления (диффузионно-возрастное приближение)	162
4.3. Уравнение возраста	167
4.4. Возраст нейтронов и время замедления	171
4.5. Условия однозначного выбора решения уравнения возраста в физических задачах	174
4.6. Решение уравнения возраста	177
4.7. Пространственное распределение замедляющихся нейтронов в среде из водорода	190
4.8. Особенности замедления быстрых нейтронов	193
Глава 5. Групповое диффузионное приближение	196
Глава 6. Основы термализации нейтронов	207
6.1. Уравнение замедления в области термализации	209
6.2. Спектр Максвелла. Температура нейтронного газа. Эффект диффузионного охлаждения	213
6.3. Диффузия тепловых нейтронов	216
6.4. Расчет средних сечений в тепловой области	219
Глава 7. Газокинетическая модель переноса нейтронов в неразмножающих средах	224
7.1. Уравнение Больцмана	224
7.2. Условия однозначного выбора решения уравнения Больцмана в физических задачах	230
7.3. Интегральная форма уравнения переноса нейтронов	233
7.4. Интегральное уравнение Пайерлса	237
Список литературы	240
Приложение 1. Свойства некоторых изотопов, важных для физики ядерных реакторов	241
Приложение 2. Свойства некоторых нуклидов и веществ	242
Приложение 3. Диффузионные функции влияния пластины конечной толщины	245
Приложение 4. Расчет вероятности избежать поглощения на резонансе при замедлении на водороде в приближении бесконечной массы поглотителя. Случай сильного разбавления	249
Приложение 5. Расчет вероятности избежать поглощения на узком изолированном резонансе в приближении бесконечной массы поглотителя	255
Приложение 6. Вывод уравнения диффузии моноэнергетических нейтронов из уравнения Больцмана	258
Приложение 7. Эквивалентность интегродифференциальной и интегральной форм уравнения переноса	268

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Предмет курса

В курсе «Теория переноса нейтронов» изучаются основные закономерности распределения нейтронов в среде, характерные, прежде всего, для ядерных реакторов, а также рассматриваются и анализируются различные модели, описывающие эти распределения.

Описание распределения нейтронов в среде связано с необходимостью решения двух задач.

1. *Описание процесса взаимодействия одного нейтрона (или нейтронной волны) с ядром.* Решение этой задачи рассматривается в других курсах (ядерная физика, квантовая механика, эффективные нейтронные сечения) и не является предметом изучения данного курса. В курсе «Теория переноса нейтронов» используются лишь результаты этого рассмотрения.

2. *Статистическое описание распространения ансамбля (большого числа) нейтронов в среде.* Изучение этого вопроса и является предметом данного курса. Подчеркнем, что все величины, которые используются для описания распределения нейтронов в среде, носят статистический характер и являются результатом усреднения по большому числу случайных событий – столкновений нейтронов с ядрами среды.

Материал, изложенный далее, ориентирован на описание нейтронного поля в классических задачах физики ядерных реакторов. Хотя необходимо отметить, что рассмотренные модели могут использоваться и для описания распределения нейтронов в других задачах. Область их применения ограничена лишь приближениями, заложенными в ту или иную модель, описывающую нейтронное поле.

1.2. Свойства свободного нейтрона

Существование нейтрона было предсказано на заре XX в. великим английским исследователем Резерфордом в лекции по поводу

присуждения ему Нобелевской премии. Планетарная модель атома, которую разработал Резерфорд, подразумевала существование наряду с протоном, который в те времена уже был открыт, неизвестной элементарной частицы по основным свойствам (масса, спин и др.), близкой к свойствам протона, но не имеющей электрического заряда. Немецкие физики Боте и Беккер, продолжая опыты Резерфорда по облучению α -частицами легких атомов и наблюдению ядерных реакций, обнаружили, что в некоторых случаях, например при облучении лития, бериллия или бора, появляется сильно проникающее излучение, которое проходит через свинец легче, чем наиболее жесткое γ -излучение, испускаемое естественными радиоактивными веществами. Новым излучением заинтересовались французские физики Ирен и Фредерик Жолио-Кюри, которые открыли свойство излучения образовывать ядра отдачи с большой кинетической энергией. Если считать, что ядра отдачи возникают под действием γ -квантов, то энергия этих γ -квантов должна быть настолько большой, что ее невозможно согласовать с энергетическим балансом ядерной реакции взаимодействия α -частицы с легким ядром. Предположение о том, что γ -кванты могут передать практически всю свою энергию ядрам отдачи противоречило закону сохранения импульса при этом взаимодействии. Природу загадочного излучения объяснил англичанин Чедвик в 1932 г., предположив, что исследуемое излучение представляет собой не поток γ -квантов, а поток тяжелых (по сравнению с γ -квантами) частиц, не имеющих электрического заряда. Измерив энергию отдачи ядер водорода и азота, он вычислил массу предполагаемой частицы, которая оказалась в пределах точности эксперимента равной массе протона. Это и был нейтрон, предсказанный Резерфордом за несколько десятилетий до его открытия. Основные свойства свободного нейтрона в сравнении со свойствами протона приведены в табл. 1.1.

Таким образом, нейтрон *не имеет электрического заряда, обладает дипольным магнитным моментом и не стабилен*. Свободный нейтрон испытывает β -распад по следующей схеме:

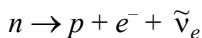


Таблица 1.1

Свойства свободного нейтрона и протона

Свойства	Протон	Нейтрон
Электрический заряд, единицы заряда электрона	1 ± 10^{-15}	$< 10^{-17}$
Масса, МэВ/с ²	$938,2786 \pm 0,0027$	$939,573 \pm 0,0027$
Время жизни свободной частицы	$> 2 \cdot 10^{30}$ лет	918 ± 14 с
Радиус распределения заряда, 10^{-13} см	$0,805 \pm 0,010$	$0,36 \pm 0,01$
Спин, единиц \hbar	1/2	1/2
Лептонный заряд	0	0
Барионный заряд	+1	+1
Странность	0	0
Изотопический спин	1/2	1/2
Дипольный магнитный момент, $\mu_{\text{яд}} = 5,0538 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс	$2,79274 \pm 6 \cdot 10^{-5}$	$-1,91314 \pm 10^{-5}$

На основании приведенных свойств можно утверждать, что нейтрон принимает участие в следующих взаимодействиях:

- 1) сильное (ядерные силы);
- 2) слабое (β -распад);
- 3) электромагнитное;
- 4) гравитационное.

Ввиду отсутствия электрического заряда нейтрон не участвует в кулоновском взаимодействии, т.е. для него не существует кулоновского барьера ядра, имеет возможность при сколь угодно малой кинетической энергии проникнуть в область действия ядерных сил и вступить в сильные (ядерные) взаимодействия. Из всех перечисленных взаимодействий наиболее сильными являются ядерные. Ядерные силы – короткодействующие и проявляются на расстояниях порядка радиуса ядра (около $(1 - 10) \cdot 10^{-13}$ см).

В нейтронной физике принята классификация нейтронов в зависимости от их энергии (табл. 1.2).

В зависимости от того, нейтроны каких энергий определяют нейтронно-физические процессы, протекающие в ядерных реакторах (прежде всего – поглощение нейтронов и деление ядер топлив-

ва), среди ядерных реакторов различают реакторы: на тепловых нейтронах (вся современная ядерная энергетика базируется на реакторах этого типа: ВВЭР, РБМК, PWR, BWR, ABWR и др.), на промежуточных нейтронах (например, ядерные реакторы космического назначения) и на быстрых нейтронах (единственный действующий энергетический реактор на быстрых нейтронах – БН-600).

Таблица 1.2

Классификация нейтронов в зависимости от их энергии, эВ

Энергия*	Ниже 10^{-7}	$[10^{-7}, 10^{-3}]$	$[10^{-3}, 1]$	$[1, 10^{+5}]$	$[10^{+5}, 5 \cdot 10^{+7}]$	Выше $5 \cdot 10^{+7}$
Название	Ультра-холодные	Холодные	Тепловые	Промежуточные (резонансные)	Быстрые	Сверх-быстрые

* Энергетические границы носят достаточно условный характер и приведены для качественного описания.

В ядерном реакторе нейтроны получают в результате реакции деления ядер топлива. При этом доля нейтронов с энергией выше 12 МэВ пренебрежимо мала (см. разд. 1.4). С другой стороны, чем меньше энергия нейтронов, тем активнее они поглощаются ядрами среды. Поэтому в реальных средах относительная доля нейтронов с энергиями ниже 10^{-3} эВ также пренебрежимо мала. Таким образом, в ядерных реакторах присутствуют нейтроны, энергия которых с подавляющей вероятностью лежит в интервале $[10^{-3}$ эВ, 12 МэВ].

Из атомной физики известно, что любую частицу можно характеризовать приведенной длиной волны де Бройля – λ , которая зависит от энергии частицы:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \text{ или } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E}} \text{ [см]},$$

где h – приведенная постоянная Планка; p – импульс нейтрона; m – масса нейтрона; E – кинетическая энергия нейтрона.

Приведенная длина волны нейтронов де Бройля для нейтронов различных энергий дана в табл. 1.3.

Таблица 1.3

**Приведенная длина волны де Бройля
для нейтронов различных энергий**

Энергия, эВ	10^{-3}	0,5	10^{+4}	10^{+6}
λ , см	$1,43 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-10}$	$4,55 \cdot 10^{-12}$	$4,55 \cdot 10^{-13}$

Поскольку для характерной для ядерных реакторов энергетической области приведенная длина волны де Бройля нейтронов (см. табл. 1.3) существенно больше или сравнима с размером ядра (порядка $1 - 10 \cdot 10^{-13}$ см), то при описании акта взаимодействия нейтрона с ядром нейтрон необходимо рассматривать как нейтронную волну. В то же время, если говорить об описании распределения нейтронов в среде, то необходимо сравнивать приведенную длину волны де Бройля нейтрона с расстоянием между соседними ядрами (порядка 10^{-8} см), поскольку неопределенность положения нейтрона в пространстве определяется величиной приведенной длиной волны де Бройля, а распределение нейтронов в среде формируется в результате их столкновений с ядрами среды. В этом случае в широком диапазоне энергий (по крайней мере, для промежуточных и быстрых нейтронов) приведенная длина волны де Бройля нейтрона много меньше расстояния между ядрами, а, следовательно, для описания положения нейтрона в пространстве он может рассматриваться как точечная частица. Только для нейтронов тепловых энергий последнее утверждение нарушается, и необходимо учитывать волновые свойства нейтрона.

Время ядерного взаимодействия (время жизни составного ядра) составляет около $10^{-13} - 10^{-17}$ с, а время жизни поколения нейтронов в среде, т.е. среднее время между рождением нейтрона и его поглощением ядром среды $\sim 10^{-3} - 10^{-8}$ с. Эти времена намного порядков меньше среднего времени жизни свободного нейтрона (см. табл. 1.1), следовательно, как для описания акта взаимодействия нейтрона с ядром, так и для описания нейтронного поля в среде нейтрон может рассматриваться как стабильная частица.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- свободный нейтрон по сравнению с протоном немного тяжелее, не имеет заряда и претерпевает β -распад;

- нейтрон, не имея электрического заряда, легко проникает в область действия ядерных сил и участвует в ядерных взаимодействиях;
- нейтрон необходимо рассматривать как волну при описании взаимодействия нейтрона с ядром, и в то же время как точечную частицу при описании нейтронного поля в среде (кроме тепловой области энергий);
- нейтрон рассматривается в качестве стабильной частицы как при описании взаимодействия нейтрона с ядром, так и при описании нейтронного поля в среде.

1.3. Основные ядерные реакции – источники нейтронов

Поскольку свободный нейтрон – нестабильная частица, то необходимы внешние, т.е. не зависящие от нейтронного поля, источники нейтронов. Под источником нейтронов понимается устройство, в котором в результате ядерных реакций появляются нейтроны. Источники нейтронов характеризуются мощностью (или интенсивностью излучения) – количество нейтронов, испускаемых единицей массы вещества, эффективностью (т.е. количеством нейтронов, которые получают в расчете на одну частицу, вызвавшую ядерную реакцию), распределением нейтронов по энергии, периодом полураспада и интенсивностью сопровождающего гамма-излучения. Кратко рассмотрим основные источники нейтронов, которые нашли в настоящее время широкое применение в нейтронно-физических экспериментах.

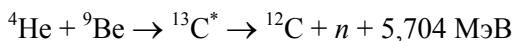
1. Источники на основе (α, n) -реакции. Излучателями α -частиц в источниках данного типа являются радиоактивные нуклиды, имеющие сравнительно высокую удельную α -активность. К ним, например, относятся следующие нуклиды: ^{210}Po ($T_{1/2} = 138,4$ дня), ^{226}Ra ($T_{1/2} = 1622$ года), ^{227}Ac ($T_{1/2} = 22$ года), ^{238}Pu ($T_{1/2} = 86,4$ года), ^{239}Pu ($T_{1/2} = 24360$ лет), ^{241}Am ($T_{1/2} = 458$ лет), ^{242}Cm ($T_{1/2} = 162,7$ дня), ^{244}Cm ($T_{1/2} = 18,4$ года).

Реакция (α, n) может происходить только в том случае, если:

- кинетическая энергия α -частицы выше кулоновского барьера ядра-мишени;

- энергии возбуждения составного ядра, получившегося после захвата α -частицы ядром-мишенью, больше, чем энергия связи нейтрона в этом составном ядре.

Поэтому в качестве ядра-мишени используют легкие ядра, имеющие малый заряд ядра и, следовательно, низкий кулоновский барьер. Например, для ядра ${}^9\text{Be}$ высота кулоновского барьера для α -частицы составляет около 4 МэВ и при облучении мишени, состоящей из ядер ${}^9\text{Be}$, протекает следующая реакция:



${}^9\text{Be}$ используется в качестве ядра-мишени еще потому, что после захвата им α -частицы образуется возбужденное ядро ${}^{13}\text{C}^*$, у которого аномально низкая энергия связи нечетного нейтрона.

К основным характеристикам источников на основе (α, n) -реакции относятся: период полураспада основного α -излучателя, энергетический спектр нейтронов, интенсивность γ -излучения и выход нейтронов. В табл. 1.4 приведены характеристики для наиболее распространенных источников нейтронов на основе (α, n) -реакции, по которым можно судить об их преимуществах и недостатках.

Таблица 1.4

Характеристики нейтронных источников на основе (α, n) -реакции

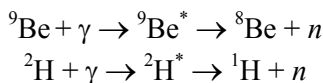
Источник нейтронов	$T_{1/2}$	Выход* нейтронов, 10^8 нейтр./ (Ки·с)	Средняя энергия нейтронов, МэВ
Po-Be	138,4 дн.	2,5	4,3
Ra-Be	1 622 года	10	4,5
RaBeF ₄	1 622 года	2	4,5
Ac-Be	22 года	10	4,6
Pu-Be	24 360 лет	2	4,5

* Выход нейтронов может меняться в пределах 10 – 20 % в зависимости от технологии изготовления источника.

Из данных табл. 1.4 видно, что если требуется стабильный во времени источник, то его основой может служить радий или плутоний. Недостатком радиевых источников нейтронов является большая интенсивность γ -излучения радия и продуктов его распада. Плутоний излучает гораздо меньше γ -квантов. Когда необходим источник, практически не испускающий γ -квантов, используют Po-Be. Однако Po имеет сравнительно малый период полураспада, поэтому с таким источником нельзя проводить длительных измерений без введения поправок на распад полония.

Методы изготовления источников нейтронов на основе (α , n)-реакции сравнительно просты, но требуют тщательного перемешивания используемых веществ (α -радиоактивного нуклида с веществом-мишенью) и их надежной герметизации.

2. Источники на основе (γ , n)-реакции. Реакция (γ , n), или фотонейтронная, может происходить в том случае, если энергия γ -квантов выше, чем энергия связи нейтрона в ядре-мишени. Обычно энергия связи нейтрона в ядре составляет 6 – 8 МэВ и только у нуклидов ${}^9\text{Be}$ и ${}^2\text{H}$ она аномально низкая (соответственно 1,67 и 2,23 МэВ). Энергия γ -квантов, испускаемых радиоактивными нуклидами не превышает 3 – 4 МэВ, но этого оказывается достаточно, чтобы фотонейтронная реакция могла протекать на ядрах бериллия и дейтерия. Соответствующие реакции можно записать следующим образом:



Нейтроны источников типа (γ , n) практически моноэнергетичны. Способ изготовления источников данного типа весьма прост: ампулу с γ -радиоактивным веществом помещают либо в заготовку из металлического бериллия, либо в сосуд с тяжелой водой.

В табл. 1.5 приведены основные характеристики часто используемых фотонейтронных источников, в которых γ -излучателями являются искусственно полученные радиоактивные нуклиды.

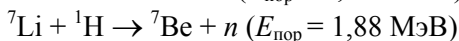
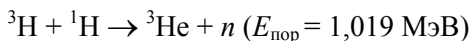
Таблица 1.5

Характеристики фотонейтронных источников

Источник нейтронов	$T_{1/2}$	Выход нейтронов, 10^4 нейтр./ (Ки·с)	Энергия нейтронов, МэВ	Энергия γ -квантов, МэВ
$^{24}\text{Na-Be}$	14,8 ч	13	0,830	2,76
$^{24}\text{Na-D}_2\text{O}$	14,8 ч	27	0,22	2,76
$^{88}\text{Y-Be}$	104 дн.	10	0,158	1,85 (99 %)
$^{88}\text{Y-D}^2\text{O}$	104 дн.	0,3	0,310	2,8 (1 %)
$^{124}\text{Sb-Be}$	60 дн.	19	0,024	1,7
$^{140}\text{La-Be}$	40 ч	0,3	0,620	2,5
$^{140}\text{La-D}^2\text{O}$	40 ч	0,8	0,151	2,5

Фотонейтронные источники, приведенные в табл. 1.5, имеют общие недостатки: большую интенсивность γ -излучения, значительные геометрические размеры и очень малый период полураспада. Кроме того, выход нейтронов на 1 Ки излучения на несколько порядков ниже, чем в источниках на основе (α, n) -реакции. Наиболее важным фотонейтронным источником является Ra-Be, принятый в ряде стран в качестве эталона нейтронного излучения. Выход нейтронов этого источника составляет $1,26 \cdot 10^6$ нейтр./с на 1 г радия. Спектр нейтронов его состоит из нескольких групп, лежащих в диапазоне от 20 до 670 кэВ (средняя энергия – около 300 кэВ).

3. Источники, на основе (p, n) -реакций. Реакции (p, n) являются экзотермическими и пороговыми. При бомбардировке тонких мишеней протонами с энергией, несколько превышающей порог реакции, имеется возможность получить монохроматический источник нейтронов. Из-за необходимости проникновения протона со сравнительно небольшой энергией через кулоновский барьер набор подходящих мишеней ограничивается легкими ядрами. Наиболее широкое распространение нашли две реакции:

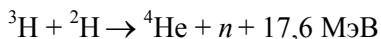
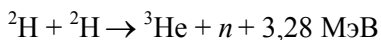


При осуществлении этих реакций источником монохроматических протонов обычно является генератор Ван-де-Граафа. Использование приведенных реакций позволяет получать нейтроны с энергией

от десятков килоэлектронвольт до нескольких мегаэлектронвольт с выходом около $10^6 - 10^7$ нейтр./с на 1 мкА тока протонов. Так как на генераторах Ван-де-Граафа можно достигать токов протонов порядка одного миллиампера, то выход нейтронов может быть весьма высоким.

Отметим, что ускорители могут использоваться для получения нейтронов на основе реакции электронов с тяжелыми ядрами. Электроны, ускоренные до энергий в сотни мегаэлектронвольт или даже несколько гигаэлектронвольт, падают на мишень, состоящую, например, из ядер урана-238. В результате получаются нейтроны, из которых формируют монохроматические пучки на основе времяпролетной методики.

4. Источники на основе реакции синтеза. Эти реакции – эндотермические и отличаются относительно высоким выходом нейтронов. Для основных реакций синтеза



сравнительно высокий выход нейтронов уже достигается при энергии дейтонов (ядра дейтерия) около 100 кэВ. В качестве мишеней обычно используются циркониевые подложки, адсорбировавшие газообразный дейтерий или тритий. Установки, на которых получают нейтроны по приведенным выше реакциям, называются нейтронными генераторами. Энергия ускоренных ионов дейтерия колеблется в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен килоэлектронвольт. Эти установки сравнительно дешевы, компактны и удобны в эксплуатации. Выход нейтронов в первой реакции достигает порядка 10^6 нейтр./с·мкА, во второй – в сотни раз больше. Таким образом, нейтронный генератор с дейтонным током в сотни микроампер может генерировать до $10^8 - 10^{10}$ нейтр./с в зависимости от типа реакции.

5. Ядерная реакция деления как источник нейтронов. Для самых тяжелых ядер средняя энергия связи нуклона примерно на 1 МэВ ниже, чем у наиболее устойчивых ядер (рис.1.1).

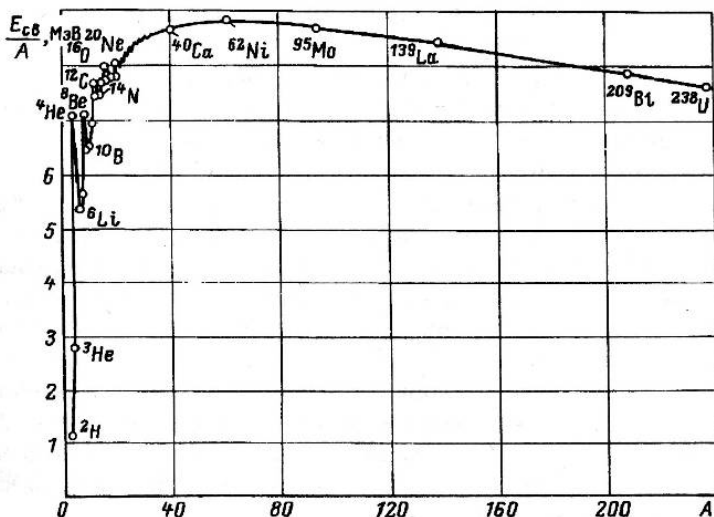


Рис. 1.1. Зависимость средней энергии связи нуклона в ядре от массового числа

Поскольку энергия связи – убыль энергии покоя частицы в связанном состоянии, превращение тяжелого ядра в два более легких сопровождается выделением свободной энергии. Если энергетически выгодный процесс возможен, но не происходит немедленно, это означает, что его течению препятствует энергетический барьер. Отделение одной части ядра от другой сначала сопровождается возрастанием потенциальной энергии, которая снижается лишь по достижении высоты энергетического барьера $U_б$. Так как барьер при делении определяется силами поверхностного натяжения, которые направлены на сохранение формы ядра, соответствующей минимуму поверхностной потенциальной энергии, то начальное изменение формы ядра возможно только при получении извне какого-то количества энергии, т.е. при возбуждении ядра.

Процесс деления энергетически выгоден уже для ядер с массовыми числами более 80. Но выигрыш в энергии сначала очень мал, а высота барьера $U_б$ столь велика, что при возбуждении ядер идут реакции с испусканием нуклонов, а не реакции деления. Только для самых тяжелых ядер энергетический барьер оказывается примерно равным величине энергии связи нуклона, так что распад составных

ядер по каналу деления становится существенным, а в некоторых случаях и преобладающим.

Представление об абсолютных величинах барьеров U_b дают экспериментальные пороги деления ядер под действием γ -квантов (табл. 1.6).

Таблица 1.6

Экспериментальные пороги деления ядер под действием γ -квантов

Нуклид	^{232}Th	^{233}U	^{235}U	^{238}U	^{239}Pu
Энергия порога (γ, f)-реакции, МэВ	5,9	5,5	5,75	5,85	5,5

Эти данные свидетельствуют о том, что энергетический барьер у самых тяжелых ядер по отношению к делению мало зависит от состава ядра, а относительно малые величины этих барьеров говорят о возможности спонтанного деления ядер (табл. 1.7).

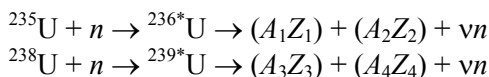
Таблица 1.7

Параметры спонтанного деления ядер

Нуклид	Период полураспада при спонтанном делении, лет	Число делений в 1 с в 1 г вещества
^{232}Th	$> 10^{21}$	$> 6 \cdot 10^{-8}$
^{233}U	$1,2 \cdot 10^{17}$	$8,6 \cdot 10^{-4}$
^{235}U	$3,5 \cdot 10^{17}$	$2,99 \cdot 10^{-4}$
^{238}U	$8,2 \cdot 10^{15}$	$1,36 \cdot 10^{-2}$
^{239}Pu	$5,5 \cdot 10^{15}$	$2,18 \cdot 10^{-2}$
^{241}Am	$1,05 \cdot 10^{14}$	1,18
^{242}Cm	$6,56 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^7$
^{252}Cf	85,5	$2,34 \cdot 10^{12}$

Другими словами, если деление энергетически выгодно, то оно возможно и без предварительного возбуждения ядра. Если тяжелое ядро находится в возбужденном состоянии, например после процесса захвата нейтрона, то вероятность деления резко возрастает, если энергия возбуждения ядра больше, чем энергия порога его деления.

Во время деления тяжелых ядер под действием нейтронов в результате каждого акта деления появляются новые свободные нейтроны, способные вызвать последующие акты деления, таким образом возникает возможность для получения самоподдерживающейся цепной реакции. При возбуждении процесса нейтронами делится ядро с массовым числом на единицу большим, чем массовое число ядра мишени. Например, при поглощении нейтронов ядрами ^{235}U или ^{238}U протекают следующие реакции:



т.е. фактически делятся ядра ^{236}U или ^{239}U (составные ядра), которые находятся в возбужденном состоянии. Для того, чтобы выяснить возможности деления исходных ядер, нужно сравнить энергии возбуждения составных ядер, образующихся при захвате нейтронов (в данном случае ^{236}U и ^{239}U), с величинами энергетических барьеров. Поскольку минимальная энергия возбуждения составного ядра равна энергии связи присоединяющегося к ядру нейтрона, то (в случае если эта энергия связи больше величины энергетического барьера) исходное ядро может делиться при поглощении нейтронов с любой кинетической энергией. Если же энергия связи меньше величины барьера, то деление возможно только при условии: кинетическая энергия нейтрона такова, что в сумме с энергией связи превосходит величину барьера. Энергии связи нейтронов в ядрах, являющихся составными при делении наиболее важных нуклидов, приведены в табл. 1.8.

Таблица 1.8

Энергии связи нейтронов в ядрах, являющихся составными при делении наиболее важных нуклидов

Нуклид	^{233}Th	^{234}U	^{236}U	^{239}U	^{240}Pu
Энергия связи нейтронов, МэВ	5,07	6,77	6,40	4,76	6,38

Так как энергия связи парного нейтрона всегда больше, чем непарного, то энергия связи нейтрона в ядрах ^{234}U , ^{236}U и ^{240}Pu оказывается больше величины энергетического барьера деления, а в яд-

рах ^{233}Th и ^{239}U – меньше. Это и обуславливает возможность деления ^{233}U , ^{235}U и ^{239}Pu нейтронами любых энергий. Нуклиды, которые делятся нейтронами с любой кинетической энергией, называются *делящимися*. Напротив, ^{232}Th и ^{238}U могут делиться только нейтронами с достаточно высокой кинетической энергией, так как пороги деления у них составляют у ^{232}Th около 1,2 МэВ, а у ^{238}U – около 1 МэВ.

Процесс деления ядер хорошо объясняется на основе капельной модели ядра. Если ядру сообщена энергия возбуждения, то в нем возникают колебания, сопровождающиеся отклонением от начальной формы. В недеформированном состоянии ядерным силам притяжения противостоят силы кулоновского отталкивания, которые препятствуют наиболее прочной связи нуклонов в ядре. Энергия ядерного притяжения пропорциональна числу частиц, а энергия кулоновского отталкивания – квадрату числа заряженных частиц. Поэтому при деформации ядра-капли и рассредоточении нейтронов и протонов эффективность кулоновского противодействия в каждой половине капли ослабевает. Если энергия активации принимает значение большее, чем порог деления, то становится возможной критическая деформация ядра, при которой электрические силы больше не препятствуют ядерным силам связать нуклоны более эффективно. Однако это достижимо только в двух новых ядрах, каждое из которых имеет меньше протонов. Увеличение энергии связи участвующих в процессе нуклонов означает, что в результате работы ядерных сил энергия покоя каждого из нуклонов уменьшилась примерно на 1 МэВ, что для ядра в целом составляет примерно 200 МэВ.

Электростатическое отталкивание осколков деления приводит к тому, что потенциальная энергия кулоновского поля переходит в кинетическую энергию осколков деления. Двигаясь в веществе, осколки ионизируют другие атомы, и их кинетическая энергия превращается в энергию теплового движения частиц среды. Часть освободившейся при делении энергии переходит в энергию возбуждения осколков деления. Энергия возбуждения каждого осколка значительно больше энергии связи нейтрона, так что при переходе новых ядер в основные энергетические состояния сначала испускаются нейтроны, один или два каждым осколком, а затем γ -кванты. Эти нейтроны и γ -кванты называются *мгновенными*. После

торможения в среде осколки деления превращаются в нейтральные атомы с ядрами в основных энергетических состояниях и называются *продуктами деления*. Поскольку устойчивые тяжелые ядра имеют в составе избыток нейтронов по сравнению с устойчивыми ядрами средних массовых чисел, продукты деления содержат избыточное число нейтронов и являются β -радиоактивными. Разных атомов-продуктов образуется очень много, и каждый из них в среднем претерпевает по три β -распада, прежде чем становится стабильным. В некоторых случаях в результате β -распада продуктов деления испускаются нейтроны, которые называются *запаздывающими*. Так, бета-распад ядра ^{87}Br , которое может образоваться в результате деления ядра ^{235}U , примерно в двух случаях из 100 приводит к образованию ядра ^{87}Kr с энергией возбуждения 5,8 МэВ, которая выше энергии связи нейтрона в ядре ^{87}Kr (5,53 МэВ). В этом случае ядро ^{87}Kr с большой вероятностью испускает нейтрон, а не испытывает гамма- и бета-распады.

Полная энергия деления включает в себя как мгновенно освобождающуюся энергию (кинетическую энергию мгновенных нейтронов деления, кинетическую энергию осколков), так и энергию β -излучения, энергию, которая уносится нейтрино и гамма-квантами, и энергию, выделяющуюся при поглощении нейтронов.

При делении ядер ^{235}U тепловыми нейтронами образуется более тридцати различных пар осколков, преимущественно не равной массы. Сумма массовых чисел парных осколков равна 234, так как фактически делится ядро ^{236}U , а осколки деления, находящиеся в возбужденном состоянии, в среднем испускают два нейтрона. На рис. 1.2 показано распределение выходов продуктов деления как функция массового числа.

Наибольший выход (около 6 %) имеют осколки с массовыми числами 95 и 139. Самое же легкое и самое тяжелое ядра-продукты из зарегистрированных при делении ^{235}U имеют массовые числа 72 и 161 соответственно. Деление на равные части с $A = 117$ маловероятно. В ядерном реакторе, работающем на мощности, когда состояние равновесия в продуктах деления достигнуто, четверть всех продуктов деления – редкоземельные элементы. Из других элементов наиболее важны цирконий – 15 %, молибден – 12 %, цезий – 6,5 %. Газы ксенон и криптон составляют 16 %.

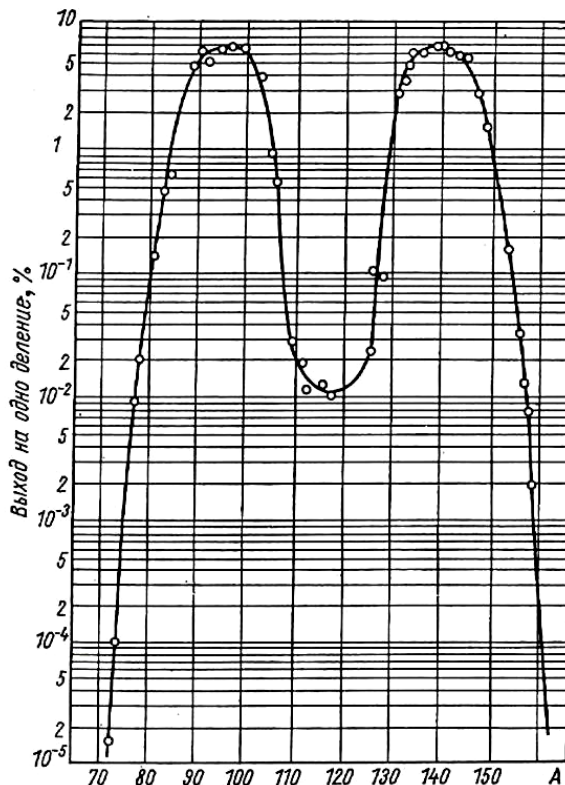


Рис. 1.2. Массовое распределение продуктов деления ^{235}U тепловыми нейтронами

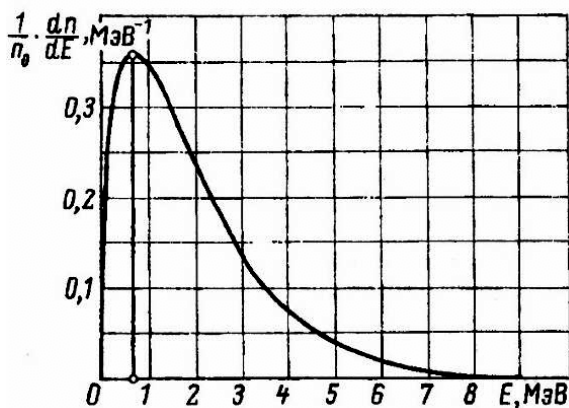
Среднее число вторичных нейтронов, приходящееся на один акт деления, играет определяющую роль в развитии цепной реакции. В табл. 1.9 приведены характеристики мгновенных нейтронов для основных делящихся нуклидов при делении тепловыми нейтронами и для ^{238}U при делении быстрыми нейтронами. С увеличением энергии нейтрона, вызывающего деление, несколько возрастает энергия возбуждения ядер-осколков, и это приводит к небольшому росту среднего числа испускаемых ими нейтронов.

Таблица 1.9

Среднее число мгновенных нейтронов на один акт деления

Нуклид	Нейтронов на один акт деления	Зависимость от энергии нейтрона dn/dE , 1/МэВ
^{233}U	2,507	0,115
^{235}U	2,442	0,115
^{239}Pu	2,881	0,110
^{238}U	2,8	Пороговая

Параметры распределения по энергии нейтронов деления определяются из эксперимента. Характерный спектр мгновенных нейтронов при делении ядра ^{235}U тепловыми нейтронами приведен на рис. 1.3. Средняя энергия мгновенных нейтронов близка к 2 МэВ, а энергия максимума распределения около 0,7 МэВ. В экспериментах были зарегистрированы отдельные нейтроны деления с энергией до 18 МэВ, но в области энергий выше 12 МэВ нейтронов так мало, что практического значения в реакторной физики они не имеют. Поэтому считается, что спектр энергий нейтронов деления простирается до 12 МэВ.

Рис. 1.3. Спектр мгновенных нейтронов деления ^{235}U тепловыми нейтронами

1.4. Основные процессы взаимодействия нейтронов с ядрами среды

Процессы, которые могут происходить при взаимодействии нейтрона с ядром (ядерные реакции), принято делить на два основных вида – *рассеяние* и *поглощение*. Поглощение включает все взаимодействия нейтрона с ядром, в результате которых появляются *новое ядро* и *новые частицы* (в том числе и нейтроны). Под рассеянием понимаются такие взаимодействия нейтрона с ядром, в результате которых новых ядер не образуется, а происходит только перераспределение кинетической энергии и момента количества движения между нейтроном и ядром. Любое столкновение нейтрона с ядром приводит или к рассеянию нейтрона, или к его поглощению. Эта классификация процессов взаимодействия нейтронов с ядрами основана на балансе нейтронов, что является принципиальным в физике ядерных реакторов. Действительно, рассеяние может рассматриваться как взаимодействие, в результате которого баланс нейтронов не изменился. В тоже время любое поглощение приводит к исчезновению исходного нейтрона. Надо понимать, что в результате реакции поглощения могут появиться новые нейтроны, но они будут учитываться как источники в соответствующих уравнениях баланса. Процессы, протекающие при взаимодействии нейтрона с ядром, определяются свойствами ядра и кинетической энергией нейтрона.

Среди процессов рассеяния нейтрона выделяют потенциальное, упругое резонансное и неупругое рассеяния.

Потенциальное рассеяние представляет собой рассеяние нейтронной волны на потенциале ядра без проникновения нейтронной волны внутрь ядра. При этом происходит перераспределение энергии и импульса между нейтроном и ядром, но квантовое состояние ядра в процессе взаимодействия не меняется. Потенциальное рассеяние идет при любой кинетической энергии нейтрона, а его величина зависит только от радиуса ядра.

Все другие ядерные реакции взаимодействия нейтрона с ядром при кинетической энергии нейтрона примерно до 20 МэВ хорошо описываются *моделью составного ядра*. Этот механизм предполагает, что реакция протекает в две стадии. Первая стадия реакции

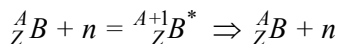
состоит в поглощении ядром-мишенью нейтрона и образовании промежуточного, или *составного ядра*. Вероятность образования составного ядра зависит от структуры энергетических уровней ядра и кинетической энергии нейтрона. Вероятность образования составного ядра максимальна, если кинетическая энергия нейтрона соответствует энергии энергетического уровня составного ядра (с учетом неопределенности в энергии этого уровня), которое может образоваться в результате поглощения нейтрона ядром-мишенью. В противном случае вероятность образования составного ядра мала, и идет только реакция потенциального рассеяния нейтрона. Составное ядро находится в возбужденном состоянии и существует около $10^{-13} - 10^{-17}$ с. Вторая стадия реакции состоит в распаде составного ядра с испусканием той или иной частицы. Адекватность такого описания подтверждается многочисленными экспериментальными данными.

Энергия возбуждения E^* составного ядра, образовавшегося при поглощении свободного нейтрона, приблизительно (с точностью до энергии отдачи ядра, что для тяжелых ядер является не существенным) равна сумме энергии связи $E_{\text{св}}$ нейтрона в составном ядре и его кинетической энергии E : $E^* = E_{\text{св}} + E$.

Энергия связи в среднем для легких ядер составляет 5 – 7 МэВ, а для средних и тяжелых – 7 – 9 МэВ (см. рис. 1.1). Она несколько варьируется в зависимости от индивидуальных особенностей образующегося составного ядра, хотя для данных ядра-мишени и нуклона эта величина есть константа. Кинетическая энергия нейтрона может меняться в широком диапазоне от долей электронвольт до мегаэлектронвольт.

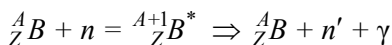
Реакции, описываемые через механизм составного ядра, получили названия исходя из способов распада составного ядра. Для физики ядерных реакторов важную роль играют следующие резонансные реакции взаимодействия нейтронов с ядрами.

1. *Упругое резонансное рассеяние* – реакция рассеяния нейтрона, в результате которой составное ядро при распаде испускает нейтрон с кинетической энергией, равной той, которую имел нейтрон до столкновения с ядром. Таким образом, при упругом резонансном рассеянии энергия нейтрона не меняется



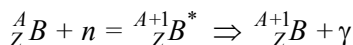
где здесь и далее приняты следующие обозначения: B – символ элемента; Z – число протонов в ядре (заряд ядра); A – атомная масса ядра; n – нейтрон; $*$ – символ, показывающий, что ядро находится в возбужденном состоянии.

2. *Неупругое рассеяние* – реакция рассеяния нейтрона, в результате которой составное ядро при распаде испускает нейтрон с энергией меньше, чем кинетическая энергия, которую имел нейтрон до столкновения с ядром. Разница в энергиях нейтрона до и после взаимодействия равна разнице в энергиях соответствующих энергетических уровней составного ядра и уносится гамма-квантами. При этом возможна значительная потеря энергии нейтроном:

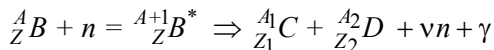


где n' обозначает нейтрон с кинетической энергией меньше, чем у нейтрона, обозначенного символом n .

3. *Радиационный захват* – реакция поглощения нейтрона, в результате которой нейтрон захватывается ядром, т.е. образуется новый изотоп (новое ядро), а вся энергия возбуждения составного ядра уносится гамма-квантами:



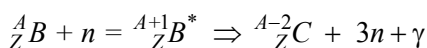
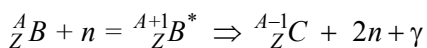
4. *Деление* – реакция поглощения нейтрона, в результате которой составное ядро распадается на несколько осколков (подробно рассмотрена в разд. 1.2):



где C и D – осколки деления; $Z = Z_1 + Z_2$; $A = A_1 + A_2 + (\nu - 1)$.

5. *Реакции с испусканием нескольких нейтронов* – реакции поглощения, в результате которых составное ядро испускает несколько нейтронов, так называемые $(n, 2n)$ - и $(n, 3n)$ -реакции. Естествен-

но, что для протекания этих реакций кинетическая энергия нейтрона должны быть достаточной, для того чтобы преодолеть энергию связи вылетающих из ядра нейтронов. Поэтому данные реакции – всегда пороговые, т.е. протекают только при значении кинетической энергии сталкивающегося нейтрона большей, чем некоторая величина, которая зависит от свойств ядра:



Отметим, что возможны и другие реакции с образованием вторичных частиц (например, протона, альфа-частицы и т.п.), но они, как правило, протекают только при кинетической энергии нейтрона, близкой к верхней границы рассматриваемой области энергий, и не имеют существенного значения для физики ядерных реакторов. Хотя необходимо отметить, что существуют ядра с аномально низкой энергией связи нуклонов (например, ${}^{10}\text{B}$), на которых реакции с образованием вторичных частиц протекают при существенно меньших значениях энергии нейтрона. Реакции упругого резонансного рассеяния, неупругого рассеяния, радиационного захвата и деления часто называются *резонансными*, поскольку вероятность их протекания зависит от соотношения энергии резонанса составного ядра и кинетической энергии нейтрона.

Для легких ядер первый энергетический уровень, как правило, расположен в области высоких энергий (выше сотен килоэлектронвольт), а для тяжелых – в области около тепловой энергии (электронвольты). Поэтому резонансные реакции на тяжелых ядрах протекают при кинетической энергии нейтрона, начиная с электронвольтной области энергий, а на легких – только в областях выше сотен килоэлектронвольт. Однако существуют исключения из этого правила (например, ядро ${}^6\text{Li}$), с аномально низким расположением первого энергетического уровня.

На рис. 1.4 изображена схема возможных взаимодействий нейтрона с ядром. Пунктирной линией обведены процессы, описываемые через механизм составного ядра.

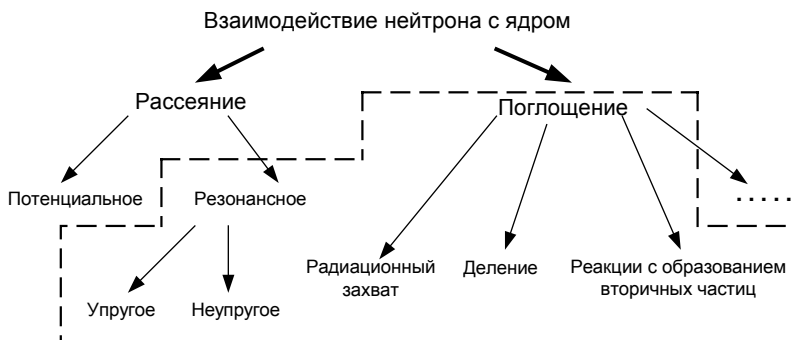


Рис. 1.4. Схема возможных взаимодействий нейтрона с ядром

1.5. Эффективные нейтронные сечения

Рассмотрим следующий эксперимент: на тонкую фольгу (толщина фольги X [см] много меньше длины свободного пробега нейтрона в веществе фольги) площадью S [см²], содержащую N [1/см³] ядер в единице объема, падает коллимированный моноэнергетический пучок нейтронов интенсивностью I [нейтр./см²·с] перпендикулярно поверхности фольги-мишени.

Очевидно, что скорость взаимодействия нейтронов с ядрами среды в фольге ($R_{вз}$) пропорциональна интенсивности нейтронного пучка и полному числу атомов в фольге ($N \cdot S \cdot X$):

$$R_{вз} \sim I \cdot (N \cdot S \cdot X) \text{ [взаимодействий/с].}$$

Коэффициент пропорциональности в этой зависимости называется *эффективным микроскопическим сечением* взаимодействия нейтронов с ядрами и обозначается σ :

$$\sigma = R_{вз} / (I \cdot N \cdot S \cdot X).$$

Таким образом, *физический смысл эффективного микроскопического сечения* – *скорость взаимодействия нейтронов с ядрами*

среды, приходящаяся на один атом мишени при единичной интенсивности падающего пучка.

Эффективное микроскопическое сечение характеризует вероятность протекания данного типа реакции при взаимодействии нейтрона с ядром и зависит от типа ядра (энергетической структуры) и кинетической энергии нейтрона.

Очевидно, что размерность σ – это сантиметры в квадрате (см^2). В качестве единицы измерения микроскопического сечения удобно использовать не см^2 , а барны (б):

$$1 \text{ б} = 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Любому процессу взаимодействия нейтронов с ядрами среды, рассмотренному в разд. 1.4, соответствует свое эффективное микроскопическое сечение:

σ_{tot} – полное микроскопическое сечение взаимодействия (total);

σ_a – микроскопическое сечение реакции поглощения (absorption);

σ_s – микроскопическое сечение реакции рассеяния (scattering);

σ_c – микроскопическое сечение реакции радиационного захвата (capture);

σ_f – микроскопическое сечение реакции деления (fission);

σ_{el} – микроскопическое сечение упругого рассеяния (elastic);

σ_{in} – микроскопическое сечение неупругого рассеяния (inelastic);

$\sigma_{(n, 2n)}$ – микроскопическое сечение $(n, 2n)$ -реакции и т.д.

Согласно введенной в разд. 1.4 терминологии и учитывая, что по определению эффективное микроскопическое сечение – величина аддитивная, выполняются следующие равенства:

$$\sigma_{tot} = \sigma_a + \sigma_s, \quad \sigma_a = \sigma_c + \sigma_f + \sigma_{(n, 2n)} + \dots, \quad \sigma_s = \sigma_{el} + \sigma_{in}.$$

Учитывая, что процессы взаимодействия нейтронов с ядрами среды сложным образом зависят от энергии нейтрона, что обсуждалось в разд. 1.4, зависимость микроскопического сечения взаимодействия (количественная характеристика этих взаимодействий) от энергии нейтрона носит, в общем случае, сложный характер. Типичные зависимости для ряда микроскопических сечений приведены на рис. 1.5 – 1.7.

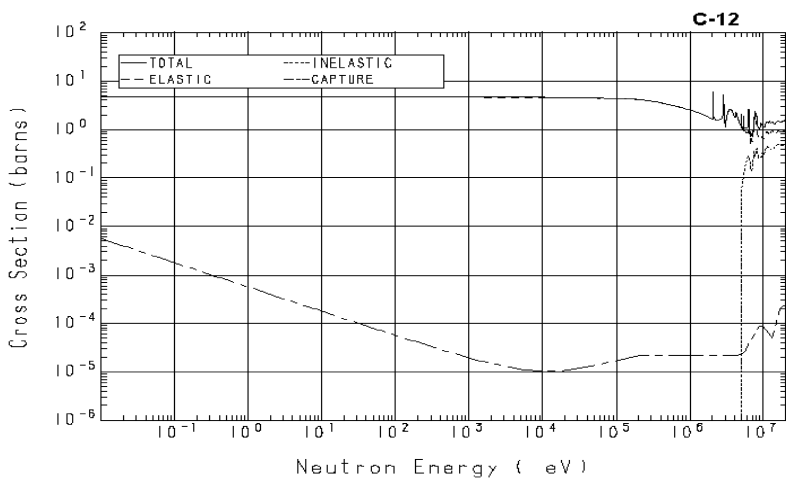


Рис. 1.5. Зависимость микроscопического сечения от энергии для $^{12}_6\text{C}$

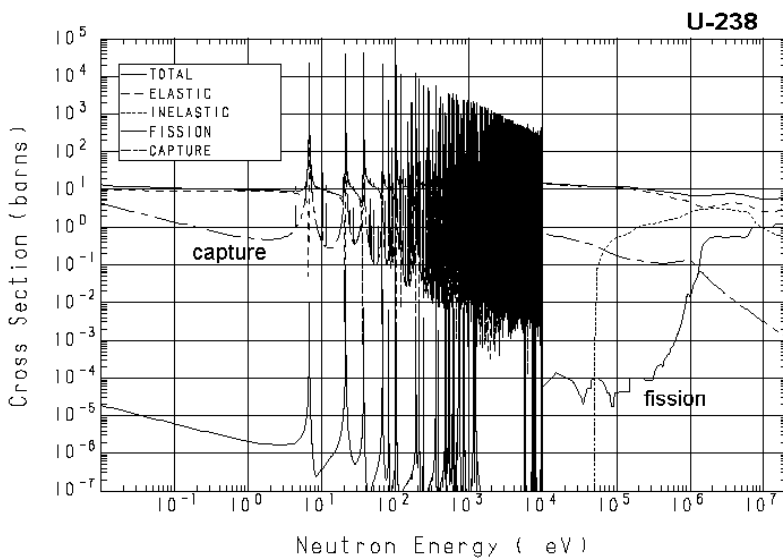


Рис. 1.6. Зависимость микроscопических сечений от энергии для $^{238}_{92}\text{U}$

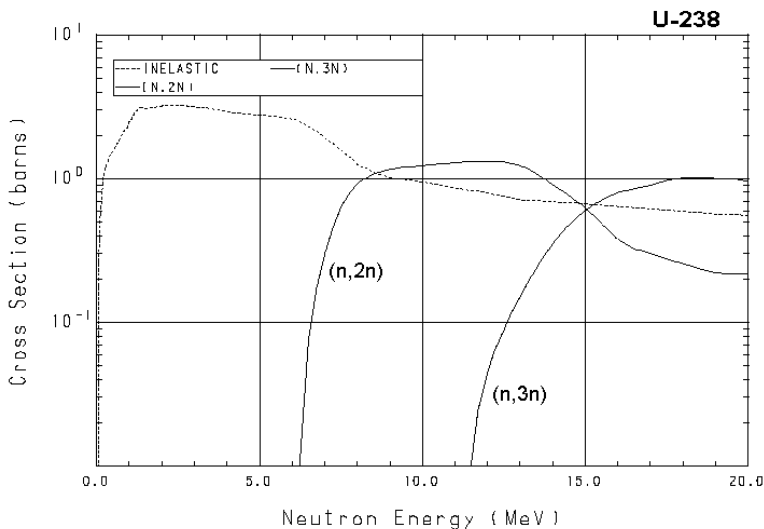


Рис. 1.7. Зависимость пороговых микроскопических сечений от энергии для $^{238}_{92}\text{U}$

Из рис. 1.5 видно, что поскольку для легких ядер первый резонансный уровень лежит в области высоких энергий, то резонансная зависимость микроскопического сечения от энергии проявляется в области выше сотен килоэлектронвольт (для углерода – выше 1 МэВ), а до этих энергий сечение не зависит от энергии, поскольку идет только процесс потенциального рассеяния. Совершенно другая картина наблюдается для тяжелых ядер (см. рис. 1.6). Первый резонансный уровень для ядра урана-238 расположен при 6,7 эВ, поэтому, начиная с энергии в несколько электронвольт, зависимость сечения от энергии носит ярко выраженный резонансный характер. В области резонансной зависимости сечения от энергии принято выделять область разрешенных резонансов – область энергий, где неопределенность в энергии каждого энергетического уровня меньше, чем расстояние между соседними уровнями и, как следствие этого, каждый резонанс в микроскопическом сечении «вырисовывается» отдельно. Для ядра урана-238 область разрешенных резонансов лежит от нескольких электронвольт до нескольких килоэлектронвольт. Выше расположена область энергий, где соседние энергетические

уровни ядра начинают перекрываться, и каждый отдельный резонанс в сечении не может быть разрешен. Это так называемая область неразрешенных резонансов. На рис. 1.6 – это область энергий от единиц до десятков килоэлектронвольт. В области более высоких энергий идет возбуждение непрерывного спектра ядра, и зависимость сечений от энергии носит плавный характер. В области энергий выше энергии связи нейтрона в ядре (несколько мегаэлектронвольт) начинают идти пороговые реакции $(n, 2n)$, а выше двух энергий связи нейтрона в ядре – $(n, 3n)$ -реакции, сечения которых для ядра урана-238 приведены на рис. 1.7.

Величину $\Sigma_i = \sigma_i \cdot N$, где σ_i – микроскопическое сечение взаимодействия процесса i (поглощение, рассеяние, деление, радиационный захват и т.д.); N – число ядер среды в единице объема, назовем *макроскопическим сечением* среды по отношению к i -му процессу взаимодействия нейтронов с ядрами. Размерность макроскопического сечения – 1/см. Если среда состоит из смеси ядер, то макроскопическое сечение среды по отношению к процессу i рассчитывается как

$$\Sigma_i = \sum_k \sigma_i^k \cdot N_k,$$

где σ_i^k – микроскопическое сечение i -го типа взаимодействия нейтронов с k -м типом ядер; N_k – количество ядер k -го типа в единице объема.

Макроскопическое сечение является характеристикой среды и зависит от ее состава и кинетической энергии нейтронов.

Свойства некоторых изотопов, нуклидов и веществ, играющих важную роль в физике ядерных реакторов, приведены в прил. 1 и 2.

1.6. Длина свободного пробега нейтрона в среде

Длина свободного пробега λ [см] – среднее расстояние, которое проходит нейтрон в среде от точки рождения до точки первого взаимодействия. Если при взаимодействии нейтрона с ядрами его энергия не меняется, то длину свободного пробега можно рассмат-

ривать как среднее расстояние между двумя последовательными взаимодействиями. Это, например, имеет место для модели диффузии моноэнергетических нейтронов, которая будет рассмотрена далее. Для вычисления длины свободного пробега в бесконечной среде (в среде, характерный размер которой много больше длины свободного пробега) рассмотрим полубесконечную среду, состоящую из атомов одного типа, на которую перпендикулярно к границе падает коллимированный пучок моноэнергетических нейтронов интенсивностью I_0 [$1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$] (рис. 1.8). Количество атомов в единице объема среды – N [$1/\text{см}^3$], микроскопическое сечение взаимодействия нейтронов данной энергии с ядрами среды – σ [см^2].

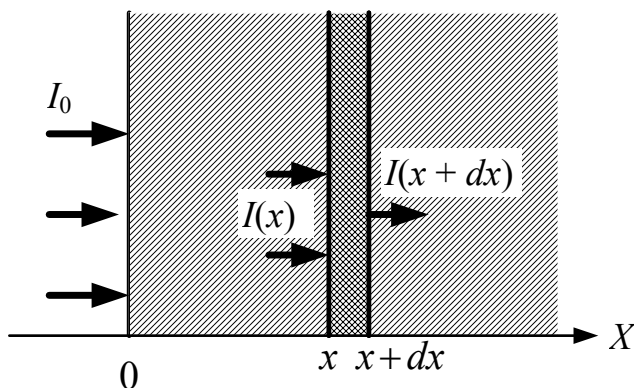


Рис. 1.8. Схема задачи для расчета длины свободного пробега

Вычислим длину свободного пробега, исходя из ее определения: как среднее расстояние, которое проходит нейтрон в среде от точки влета в среду ($x = 0$) до точки первого взаимодействия, т.е.

$$\lambda = \frac{\int_0^{\infty} x w(x) dx}{\int_0^{\infty} w(x) dx},$$

где $w(x)dx$ – вероятность первых взаимодействий, которую можно определить как произведение вероятностей двух независимых процессов, т.е. прохождение нейтроном в среде пути x без взаимодействия (P_1) и взаимодействие нейтрона на пути dx около точки x (P_2): $w(x)dx = P_1 \cdot P_2$.

Рассчитаем упомянутые выше вероятности. Любое взаимодействие нейтронов с ядрами среды выводит нейтрон из начального пучка, так как произойдет изменение энергии и направления движения нейтрона в случае рассеяния нейтрона на ядре или он поглотится, в противном случае. Обозначим: $I(x)$ – интенсивность пучка нейтронов, которые не испытали взаимодействие с ядрами среды на пройденном в среде пути (от 0 до x). Рассмотрим баланс нейтронов в слое $[x, x + dx]$. Очевидно, что скорость взаимодействий нейтронов с ядрами среды в этом слое, в расчете на единичную площадь, равна разности в интенсивностях пучка нейтронов на границах слоя:

$$I(x) - I(x + dx) = \sigma \cdot I(x) \cdot N \cdot \Delta x.$$

Перепишем это уравнение в дифференциальной форме:

$$-dI(x) = I(x) \cdot \Sigma \cdot dx$$

с начальным условием

$$I(0) = I_0.$$

Здесь учтено, что

$$dI = I(x + dx) - I(x) \quad \text{и} \quad \Sigma = \sigma \cdot N.$$

Решением этого дифференциального уравнения с приведенным начальным условием является функция

$$I(x) = I_0 \exp\{-\Sigma x\}.$$

Функция $I(x)$ описывает распределение вдоль оси x нейтронов, которые еще не испытали взаимодействие с ядрами среды (непрореагировавшие нейтроны). Очевидно, что величина

$$I(x)/I_0 = \exp\{-\Sigma x\}$$

является вероятностью пройти нейтрону в среде путь x без взаимодействия, а величина

$$\left| dI(x)/I(x) \right| = \left| d(I_0 \exp\{-\Sigma x\}) / (I_0 \exp\{-\Sigma x\}) \right| = \Sigma dx$$

вероятностью нейтрону испытать взаимодействие на пути dx . Отсюда следует *физический смысл макроскопического сечения – это вероятность нейтрону испытать взаимодействие на единичном пути в среде.*

Таким образом,

$$w(x)dx = P_1 \cdot P_2 = \Sigma dx \exp\{-\Sigma x\} \quad \text{и} \quad w(x) = P_1 \cdot P_2 = \Sigma \exp\{-\Sigma x\}.$$

Подставив найденное выражение для плотности вероятности в выражение для средней длины свободного пробега нейтрона в среде, получим:

$$\lambda = \frac{\int_0^{\infty} dx x \Sigma \exp\{-\Sigma x\}}{\int_0^{\infty} dx \Sigma \exp\{-\Sigma x\}} = \frac{1}{\Sigma} \text{ [см]}.$$

Получая последнее выражение, не оговаривался тип процесса взаимодействия нейтронов с ядром. Различают длину свободного пробега до первого взаимодействия, до первого рассеяния и до поглощения в выражениях, для которых стоят соответствующие макроскопические сечения:

$$\lambda = \frac{1}{\Sigma_{tot}}; \quad \lambda_s = \frac{1}{\Sigma_s}; \quad \lambda_a = \frac{1}{\Sigma_a}.$$

1.7. Описание нейтронного поля в среде

Под *нейтронным полем* будем понимать совокупность нейтронов в среде, характеризующихся распределением по пространству, энергии, направлению движения в данный момент времени. При описании нейтронного поля в среде важно подчеркнуть следующие утверждения, которые являются общими для всех рассматриваемых в данном курсе моделей.

1. Как было показано в разд. 1.2, в задачах, связанных со статистическим описанием распределения нейтронов в среде, нейтрон может рассматриваться как *точечная частица*, поскольку для нейтронов, имеющих энергию от единиц электронвольт до нескольких мегаэлектронвольт, приведенная длина волны де Бройля много меньше расстояний между соседними ядрами в среде. Это утверждение нарушается только при энергиях нейтронов в тепловой области (существенно ниже 1 эВ) – в так называемой области термализации нейтронов, которая будет рассмотрена отдельно в специальной главе данного пособия.

2. Плотность ядер в среде $\sim 10^{21} - 10^{22}$ [яд./см³]. В ядерных реакторах плотность нейтронов составляет $10^7 - 10^8$ [нейтр./см³] (в специальных ловушках может достигать до 10^{12} нейтр./см³). Таким образом, вероятность нейтрону столкнуться с нейтроном в среде гораздо меньше, чем вероятность нейтрону столкнуться с ядром, и, следовательно, *взаимодействия нейтронов с нейтронами можно не учитывать* при описании нейтронного поля. Математическим следствием этого факта является линейность уравнений, которые описывают нейтронное поле в среде.

3. Поскольку среднее время жизни поколения нейтронов в среде, а тем более время ядерного взаимодействия, на много порядков меньше периода полураспада нейтрона, то нейтрон может рассматриваться как *стабильная частица*.

4. Все функции, описывающие нейтронное поле в среде, носят *статистический характер*, т.е. являются результатом усреднения по большому числу событий. Поскольку плотность нейтронов в среде достаточно высока, то среднестатистические значения хорошо описывают рассматриваемые процессы. Таким образом, не учи-

тываются флуктуации нейтронного поля. Это справедливо для практически всех задач физики ядерных реакторов.

Точечная частица в пространстве в каждый момент времени описывается следующим набором фазовых переменных: $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор, описывающий пространственное положение нейтрона; $\vec{\Omega} = (\theta, \varphi)$ – единичный вектор направления скорости нейтрона (θ – полярный угол, φ – азимутальный угол); E – энергия нейтрона.

Поэтому в общем случае область определения функций, описывающих нейтронное поле, – это семимерное фазовое пространство $(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$. В конкретных моделях нейтронное поле может описываться в фазовом пространстве меньшей размерности.

Рассмотрим основные функции, описывающие нейтронное поле в среде.

Плотность нейтронов: $n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ [$1/(\text{см}^3 \cdot \text{эВ} \cdot \text{стер})$] – средне-статистическое число нейтронов в единице объема около точки \vec{r} , направление вектора скорости которых лежит в единичном угловом диапазоне около направления $\vec{\Omega}$, энергия – в единичном интервале около энергии E , в данный момент времени t . В различных моделях используется плотность нейтронов, определенная в фазовом пространстве меньшей размерности:

$$n(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \text{ [1/см}^3 \cdot \text{эВ]}$$

и

$$n(\vec{r}, t) = \int_0^{E_{\max}} dE n(\vec{r}, E, t) \text{ [1/см}^3\text{]},$$

которые имеют тот же физический смысл, только для всех направлений скорости нейтронов, или в дополнении к этому и для всех значений энергии нейтронов соответственно. E_{\max} – максимально возможная энергия нейтронов которая для ядерных реакторов составляет около 12 МэВ. Часто функцию $n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ называют дифференциальной плотностью нейтронов, $n(\vec{r}, E, t)$ – полной плотностью нейтронов, а $n(\vec{r}, t)$ – глобальной плотностью нейтронов.

Плотность потока нейтронов: $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ [$1/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{эВ} \cdot \text{стер})$] – среднестатистическое число нейтронов, направление вектора скорости которых лежит в единичном интервале около направления $\vec{\Omega}$, энергия – в единичном интервале около E , и которые в единицу времени пересекают *воображаемую* единичную площадку, расположенную в окрестности точки \vec{r} таким образом, что единичный вектор нормали к этой площадке совпадает с направлением вектора скорости нейтронов $\vec{\Omega}$.

В различных моделях используется плотность потока нейтронов, определенная в фазовом пространстве меньшей размерности:

$$\Phi(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \quad [1/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{эВ})]$$

и

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_0^{E_{\max}} dE \Phi(\vec{r}, E, t) \quad [1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})],$$

которая имеет тот же физический смысл, только по отношению к единичным площадкам, ориентированным всевозможными способами в точке \vec{r} – функция $\Phi(\vec{r}, E, t)$, и в дополнение к этому по отношению к всевозможным энергиям нейтронов – функция $\Phi(\vec{r}, t)$.

Часто функцию $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ называют дифференциальной плотностью потока нейтронов, $\Phi(\vec{r}, E, t)$ – полной плотностью потока нейтронов, а $\Phi(\vec{r}, t)$ – глобальной плотностью потока нейтронов.

Плотность потока нейтронов связана с плотностью нейтронов следующим соотношением:

$\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot V,$

(1.1)

где V – скорость нейтронов.

Это равенство получается из рассмотрения объема около точки \vec{r} с боковой поверхностью dS (рис. 1.9).

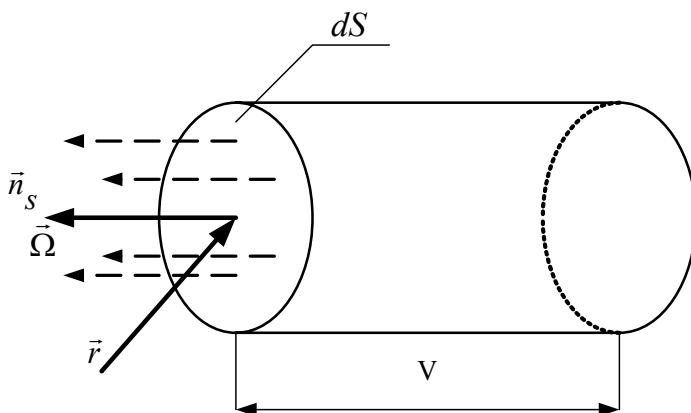


Рис. 1.9. Схема для получения связи плотности потока с плотностью нейтронов

Площадку dS с нормалью \vec{n}_s , совпадающей с $\vec{\Omega}$, в единицу времени в единичном угловом диапазоне около $\vec{\Omega}$ пересекут только те нейтроны, которые расположены внутри объема, определенного dS и V , направление скорости которых лежит в единичном диапазоне около направления скорости $\vec{\Omega}$. А это значит, что выполняется равенство

$$\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dS = n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot V \cdot dS,$$

левая часть которого по определению плотности потока представляет собой количество нейтронов, пересекающую описанную выше площадку в единицу времени, а правая – полное число нейтронов в описанном выше объеме, которые в единицу времени пересекут эту же площадку. После сокращения dS , получается приведенное выше равенство (1.1).

Плотность тока нейтронов: $i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ [1/(см²·с·эВ·стер)] – среднестатистическое число нейтронов, направление вектора скорости которых лежит в единичном интервале около направления $\vec{\Omega}$, энергия – в единичном интервале около E , которые пересекают

в единицу времени единичную площадку с нормалью \vec{n}_S , расположенную в точке \vec{r} . Плотность тока нейтронов всегда определяется через конкретную площадку (поверхность), что подчеркивает индекс нормали n в обозначении $i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$.

В различных моделях используется плотность тока нейтронов, определенная в фазовом пространстве меньшей размерности:

$$i_n(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \text{ [1/(см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{эВ)]}$$

и

$$i_n(\vec{r}, t) = \int_0^{E_{\max}} dE i_n(\vec{r}, E, t) \text{ [1/(см}^2 \cdot \text{с)]},$$

которые имеют тот же физический смысл, только по отношению к всевозможным направлениям скорости нейтронов $\vec{\Omega}$ – функция $i_n(\vec{r}, E, t)$ и в дополнении к этому по отношению к всевозможным энергиям нейтронов – функция $i_n(\vec{r}, t)$.

Часто функцию $i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ называют дифференциальной плотностью тока нейтронов через единичную площадку с нормалью \vec{n}_S , $i_n(\vec{r}, E, t)$ – полной плотностью тока нейтронов, а $i_n(\vec{r}, t)$ – глобальной плотностью тока нейтронов.

Функция плотности тока нейтронов связана с функцией плотности потока следующим выражением:

$$i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S), \quad (1.2)$$

которое следует из определения этих функций.

Площадку dS с нормалью \vec{n}_S (рис. 1.10) в единичном угловом интервале около $\vec{\Omega}$ по определению плотности тока нейтронов пересекает $i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot dS$ нейтронов. С другой стороны, площадку dS' , которая получается поворотом dS таким образом, чтобы нормаль к площадке dS' совпадала с направлением скорости нейтро-

нов $\vec{\Omega}$, пересекает точно такое же количество нейтронов, которое по определению плотности потока нейтронов может быть записано как $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot dS'$. Из этого факта, с учетом очевидного равенства $dS' = dS \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S)$, вытекает формула (1.2).

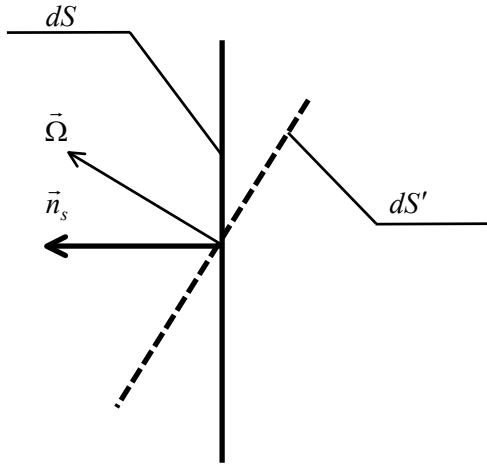


Рис. 1.10. Схема для получения связи плотности тока и потока нейтронов

Рассмотрим выражение для полной плотности тока нейтронов и тождественно преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned}
 i_n(\vec{r}, E, t) &= \int_{4\pi} d\vec{\Omega} i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \\
 &= \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) + \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} d\vec{\Omega} i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \\
 &= \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) + \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} d\vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S).
 \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функции, которые называются *односторонними токами нейтронов* (в направлении нормали к площадке и

в противоположном направлении) и определяются следующими выражениями:

$$i_n^+(\vec{r}, E, t) = \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) > 0} d\vec{\Omega} i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) > 0} d\vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) ;$$

$$i_n^-(\vec{r}, E, t) = - \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) < 0} d\vec{\Omega} i_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = - \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) < 0} d\vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) .$$

По физическому смыслу эти функции представляют собой количество нейтронов, которые пересекают площадку dS в полусферу, определяемую направлением нормали \vec{n}_S , – функция $i_n^+(\vec{r}, E, t)$ и в полусферу, определяемую противоположным направлением, – функция $i_n^-(\vec{r}, E, t)$. Очевидно, что выполняется следующее равенство:

$$i_n(\vec{r}, E, t) = i_n^+(\vec{r}, E, t) - i_n^-(\vec{r}, E, t) .$$

Отметим, что односторонние токи всегда положительные величины, а функция $i_n(\vec{r}, E, t)$ может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Отрицательное значение этой функции говорит о том, что единичную площадку в направлениях, определяемых полусферой против нормали, пересекает больше нейтронов, чем в направлениях, определяемой полусферой по нормали.

По существу, функцию плотности тока нейтронов $i_n(\vec{r}, E, t)$ можно рассматривать как проекцию векторной функции – вектора плотности тока нейтронов $i_n(\vec{r}, E, t)$ на нормаль к площадке:

$$i_n(\vec{r}, E, t) = [\vec{i}(\vec{r}, E, t) \cdot \vec{n}_S] . \quad (1.3)$$

Используя формулу (1.2), из (1.3) для вектора плотности тока нейтронов легко получить выражение:

$$\vec{i}(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \cdot \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t). \quad (1.4)$$

Направление функции вектора плотности тока нейтронов в пространственной точке \vec{r} в момент времени t совпадает с направлением преимущественного движения нейтронов, энергия которых лежит в единичном диапазоне около энергии E , а модуль этой функции равен количеству нейтронов с рассматриваемыми параметрами, пересекающими в единицу времени единичную площадку, расположенную в точке \vec{r} , таким образом, что ее нормаль совпадает с направлением преимущественного движения нейтронов.

Глава 2

ТЕОРИЯ ДИФфуЗИИ

МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕЙТРОНОВ

Основное приближение модели диффузии моноэнергетических нейтронов заключается в предположении, что все нейтроны имеют одну и ту же энергию, т.е. считается, что при взаимодействии с ядрами среды энергия нейтронов не изменяется. Это возможно, если при взаимодействии нейтронов с ядрами среды идут только процессы поглощения, упругого резонансного рассеяния или потенциального рассеяния на тяжелых или жестко связанных в кристаллической решетке или молекуле ядрах среды, поскольку при протекании всех перечисленных процессов взаимодействия нейтронов с ядрами среды энергия нейтрона не меняется. Показано, что для сред, состоящих из ядер с атомной массой более 10 атомных единиц массы (а.е.м.), использование диффузионного приближения дает хорошие результаты в случае, если это применение возможно, исходя из других ограничений, рассмотренных ниже. Рассматриваемая модель позволяет получать пространственное распределение нейтронов как в неразмножающих, так и в размножающих средах. Естественно, что модель диффузии моноэнергетических нейтронов допускает рассмотрение только моноэнергетического источника. Обобщение модели диффузии моноэнергетических нейтронов на многогрупповой случай, которое будет сделано в гл. 5, позволяет описывать не только пространственное, но и энергетическое распределение нейтронов для широкого класса задач расчета ядерных реакторов.

Если рассматривать изотропный внешний источник и учесть, что рассеяние на тяжелых ядрах изотропно в лабораторной системе (это будет показано в гл. 3), то из семимерного фазового пространства остается только пространственная и временная переменные: (\vec{r}, t) . Таким образом, модель диффузии моноэнергетических нейтронов описывает только изменение во времени пространственного распределения нейтронов.

2.1. Балансное уравнение для скоростей процессов

Все уравнения, описывающие нейтронное поле в том или ином приближении по сути отражают закон сохранения нейтронов в элементарном фазовом объеме, т.е. являются балансными уравнениями. Для вывода уравнения модели диффузии моноэнергетических нейтронов рассмотрим баланс нейтронов в фазовом объеме, характерном для данной модели, а именно, в элементарном пространственном объеме ΔV с поверхностью ΔS , расположенным около точки \vec{r} . Баланс нейтронов отражает закон сохранения нейтронов в объеме, т.е. тот факт, что разность между скоростью генерации нейтронов в объеме и скоростью исчезновения нейтронов из объема есть скорость изменения числа нейтронов в объеме. Последняя величина определяется как $\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} \Delta V$. Появляться в рассматриваемом фазовом объеме нейтроны могут за счет внешнего источника нейтронов ($Q(\vec{r}, t)$ – скорость генерации нейтронов внешними источниками) и деления ядер среды ($F(\vec{r}, t)$ – скорость генерации нейтронов за счет деления ядер среды). А исчезать из фазового объема – за счет процессов поглощения нейтронов ядрами среды ($A(\vec{r}, t)$ – скорость поглощения нейтронов в объеме) и утечки нейтронов через поверхность объема ($L(\vec{r}, t)$ – скорость утечки нейтронов через поверхность объема). Под термином «утечка нейтронов» понимается результирующий процесс пересечения нейтронами границы объема как в направлении из объема в среду, так и в обратном направлении. Процесс утечки в общем балансе нейтронов отнесен к процессам, описывающим исчезновение нейтронов в фазовом объеме, поскольку принято всегда выбирать внешнюю (т.е. по направлению из объема) нормаль для границы объема. Если при вычислении утечка нейтронов будет иметь знак минус, то это означает, что в единицу времени больше нейтронов втекают в объем через его границу из окружающей среды, чем покидают объем через его границу. В этом случае член утечки автоматически (из-за знака минуса) перейдет в группу членов, описывающих скорость генерации нейтронов в объеме. Уравнение баланса скоростей процессов имеет вид

$$-L(\vec{r}, t) - A(\vec{r}, t) + F(\vec{r}, t) + Q(\vec{r}, t) = \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} \Delta V. \quad (2.1)$$

Прежде, чем определить каждый из членов в левой части уравнения (2.1), получим общее выражение для вычисления скорости реакции в фазовом объеме. Если скорость нейтронов V [см/с], а длина свободного пробега нейтрона до i -го типа (любой из возможных типов) взаимодействия с ядром – λ_i [см], то среднее время, которое проходит между двумя взаимодействиями i -го типа – λ_i/V . Обратная величина – V/λ_i представляет собой число взаимодействий i -го типа, которое испытывает нейтрон в единицу времени, а величина $\frac{V}{\lambda_i} n(\vec{r}, t)$ – среднее число взаимодействий i -го

типа в единице фазового объема (другими словами, скорость реакций i -го типа в единице фазового объема). Тогда в фазовом объеме ΔV скорость реакций i -го типа будет рассчитываться по формуле

$$\frac{V}{\lambda_i} n(\vec{r}, t) \Delta V,$$

и с учетом формулы (1.1) и выражения для длины свободного пробега через макроскопическое сечение, последнее выражение можно переписать в виде

$$R_i(\vec{r}, t) = \Sigma_i(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t) \cdot \Delta V, \quad (2.2)$$

где $R_i(\vec{r}, t)$ – скорость реакции i -го типа в фазовом объеме ΔV .

Таким образом, для расчета скорости реакции i -го типа взаимодействия нейтронов с ядрами среды в фазовом объеме необходимо соответствующее типу реакции макроскопическое сечение умножить на плотность потока нейтронов и на величину фазового объема.

С учетом выражения (2.2) скорость реакций поглощения нейтронов и генерации нейтронов за счет реакций деления ядер определяются выражениями:

$$A(\vec{r}, t) = \Sigma_a(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t) \cdot \Delta V, \quad F(\vec{r}, t) = \nu_f \Sigma_f(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t) \cdot \Delta V,$$

где ν_f – среднее число нейтронов, которое возникает в результате одной реакции деления ядра (среднее число мгновенных нейтронов деления).

Если задана функция распределения мощности внешних источников нейтронов – $S(\vec{r}, t)$, то скорость генерации нейтронов в фазовом объеме внешними источниками записывается как $Q(\vec{r}, t) = S(\vec{r}, t) \cdot \Delta V$.

Член утечки можно записать следующим образом, если в ходе математических преобразований использовать теорему Остроградского – Гаусса и принять во внимание, что рассматриваемый объем – элементарный:

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, t) &= \oint_{\Gamma} d\vec{r}_s i_n(\vec{r}_s, t) = \oint_{\Gamma} d\vec{r}_s [\vec{i}_n(\vec{r}_s, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_s)] = \\ &= \int_{\Delta V} d\vec{r} \operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}, t) = \operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}, t) \cdot \Delta V, \end{aligned}$$

где Γ – граница фазового объема; \vec{r}_s – радиус-вектор границы фазового объема; \vec{r} – радиус-вектор фазового объема ΔV ; $\vec{n}(\vec{r}_s)$ – единичный вектор внешней нормали границы Γ фазового объема в точке \vec{r}_s . Здесь и далее $d\vec{r}_s$ обозначает элементарную площадку около точки \vec{r}_s , а $d\vec{r}$ – элементарный пространственный объем около точки \vec{r} .

Подставим полученные выражение в уравнение (2.1), сократим на ΔV , учтем выражение (1.1), связывающее плотность нейтронов и плотность потока нейтронов, и получим уравнение баланса скоростей процессов в единичном фазовом объеме:

$$-\operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t) + \nu_f \Sigma_f(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t) = \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) получено в рамках следующих предположений:

- все функции – статистические величины;
- нейтрон рассматривается как точечная частица;

- взаимодействия нейтрон-нейтрон не учитываются;
- нейтрон – стабильная частица;
- все нейтроны имеют одну и ту же энергию.

Уравнение (2.3) записано относительно двух неизвестных функций – плотности потока и вектора тока нейтронов, поэтому для нахождения функции плотности потока нейтронов необходимо получить еще одно уравнение, связывающее эти две функции.

2.2. Закон Фика

Закон Фика – уравнение, которое в рамках дополнительных предположений устанавливает связь между плотностью потока и вектором тока нейтронов. Дополнительные предположения, которые необходимо будет сделать в ходе вывода этого закона, выделены далее по тексту курсивом.

Рассмотрим *большую среду* – среду, характерные размеры которой много больше длины свободного пробега нейтронов в этой среде. Рассчитаем количество нейтронов, которые пересекают в единицу времени около момента t площадку dS , расположенную в начале координат так, что ее нормаль совпадает с осью Z в направлении из верхнего полупространства ($Z > 0$) в нижнее ($Z < 0$), см. рис. 2.1. Исходя из определения односторонних токов, ищется величина $i_z^-(0, t) \cdot dS$.

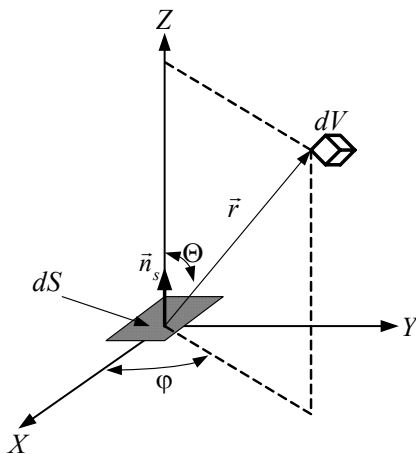


Рис. 2.1. Схема к выводу закона Фика

Выберем элементарный объем dV около точки верхнего полупространства, определенной вектором \vec{r} , или в сферической системе координат модулем вектора $\vec{r} - r$, и двумя углами – Θ и φ (см. рис. 2.1). Из выражения (2.2) следует, что величина $\Sigma_s(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t') \cdot dV$ – скорость рассеяния нейтронов в объеме dV в момент времени $t' = t - r/V$, где V – скорость нейтронов; а следовательно, r/V – время, которое необходимо нейтрону для прохождения пути r . Предположим, что *рассеяние изотропно* в лабораторной системе, а это для потенциального рассеяния справедливо, как будет показано в гл. 3, в случае, если *среда состоит из достаточно тяжелых ядер (атомная масса ядер должна быть больше*

10 а.е.м.). В случае изотропного рассеяния $\frac{1}{4\pi r^2}$ из всех рассея-

вшихся нейтронов имеют направление движения в сторону единичной площадки на поверхности сферы радиусом r с центром в точке рассеяния. Для рассматриваемой площадки это число нейтронов

составляет $\frac{dS \cdot \cos\Theta}{4\pi r^2}$ от общего числа рассеянных в объеме ней-

тронов, где $dS \cdot \cos\Theta$ – проекция рассматриваемой площадки dS на поверхность соответствующей сферы. Вероятность нейтрону пройти путь r без взаимодействия в среде – $\exp\{-\Sigma_{tot}r\}$, поэтому из всех нейтронов, которые испытали рассеяние в объеме dV в момент времени t' , после рассеяния только

$\Sigma_s(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t') \cdot dV \frac{dS \cdot \cos\Theta}{4\pi r^2} \cdot \exp\{-\Sigma_{tot}r\}$ нейтронов имеют направ-

ление движения в сторону площадки dS , достигнут площадку в момент времени t и, следовательно, пересекут ее. Проинтегрировав последнее выражение по всему верхнему полупространству ($Z > 0$), получим полное число нейтронов, которые пересекают площадку dS против направления нормали в момент времени t , т.е. величину $i_z^-(0, t) \cdot dS$. При интегрировании учтем, что в сферических координатах $dV = r^2 \sin\Theta \cdot dr \cdot d\Theta \cdot d\varphi$. Величина dS не зависит от переменных интегрирования, и сократится в правой и левой частях уравнения. Таким образом,

$$i_z^-(0,t) = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \Sigma_s(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t') \frac{\cos\Theta}{4\pi r^2} \exp\{-\Sigma_{tot}r\} r^2 \sin\Theta.$$

Под интегралом в правой части последнего равенства стоит функция $\exp\{-\Sigma_{tot}r\}$, которая при значении показателя $\Sigma_{tot}r$, уже равном трем, близка к нулю (а этот случай соответствует значению $r = 3\lambda$). Поэтому подавляющий вклад в величину $i_z^-(0,t)$ вносит область интегрирования от нуля до нескольких длин свободного пробега нейтрона. Предположим, что для рассматриваемой области справедливы следующие утверждения:

1) эта область находится далеко (более 2 – 3 длин свободного пробега нейтрона) от локальных неоднородностей (локализованные источники нейтронов, граница «среда – вакуум», граница раздела двух сред с разными свойствами);

2) в этой области слабое поглощение нейтронов ($\Sigma_s \gg \Sigma_a$ т.е. $\Sigma_{tot} \approx \Sigma_s$);

3) сечение рассеяния в этой области не зависит от пространственной координаты;

4) среднее время между двумя последовательными процессами рассеяния нейтрона (λ_s/V) много меньше времени, в течение которого существенно меняется плотность потока нейтронов в точке наблюдения.

Утверждение 3) после сокращения на r^2 дает возможность переписать последнее выражение в виде

$$i_z^-(0,t) = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \Phi(\vec{r}, t') \exp\{-\Sigma_{tot}r\} \cos\Theta \sin\Theta.$$

Предположение 4) позволяет утверждать, что выполняется следующее равенство: $\Phi(\vec{r}, t') \approx \Phi(\vec{r}, t)$, поскольку моменты времени t' и t отличаются на интервал времени не больший, чем время между двумя последовательными столкновениями нейтрона в среде, а согласно предположению 4) за это время функция плотности потока

меняется не существенно. Предположения 1) и 2) дают возможность утверждать, что функция плотности потока нейтронов слабо меняется в рассматриваемой области, а следовательно, она достаточно хорошо может быть описана двумя первыми членами разложения ее в ряд Тейлора около нуля:

$$\Phi(\vec{r}, t) \approx \Phi(0, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0, t) \cdot x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(0, t) \cdot y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, t) \cdot z ,$$

где координаты x , y и z выражаются в сферических координатах следующим образом:

$$x = r \sin \Theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \Theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \Theta .$$

После подстановки последних выражений в ряд Тейлора, а его – в формулу для $i_z^-(0, t)$, получим справа четыре слагаемых, два из которых будут равны нулю, поскольку будут содержать интегралы $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi$ или $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi$, которые равны нулю. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} i_z^-(0, t) = & \frac{\Sigma_s}{4\pi} \Phi(0, t) \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \exp\{-\Sigma_{tot} r\} \cos \Theta \sin \Theta + \\ & + \frac{\Sigma_s}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, t) \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \quad r \cos \Theta \exp\{-\Sigma_{tot} r\} \cos \Theta \sin \Theta . \end{aligned}$$

После вычисления интегралов, получим:

$$i_z^-(0, t) = \frac{\Sigma_s}{4\Sigma_{tot}} \Phi(0, t) + \frac{\Sigma_s}{6\Sigma_{tot}^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, t) .$$

Учитывая, что одним из условий получения последнего уравнения являлось выполнение предположения 2), т.е. следующего ра-

венства $\Sigma_{tot} \approx \Sigma_s$, сократим макроскопическое сечение рассеяния в числителе дробей с полным макроскопическим сечением в знаменателе и получим следующее выражение для одностороннего тока:

$$i_z^-(0, t) = \frac{1}{4} \Phi(0, t) + \frac{1}{6\Sigma_{tot}} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, t). \text{ Совершенно аналогично, пу-}$$

тем интегрирования по нижнему полупространству ($Z < 0$), можно получить выражение для одностороннего тока в направлении нор-

$$\text{мали к площадке } dS - i_z^+(0, t): i_z^+(0, t) = \frac{1}{4} \Phi(0, t) - \frac{1}{6\Sigma_{tot}} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(0, t).$$

Знак минус в последнем равенстве получается в результате интегрирования по углу Θ в пределах $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, что отвечает нижнему по-

лупространству, а не в пределах $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, как это было сделано для

верхнего полупространства выше.

Если провести рассмотрения, аналогичные уже проведенным, для площадки dS , расположенной не в начале координат с нормалью, ориентированной по оси Z , а для произвольной площадки dS с нормалью \vec{n} , расположенной в точке \vec{r} , то для односторонних токов можно получить следующие выражения:

$$i_n^-(\vec{r}, t) = \frac{1}{4} \Phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{6\Sigma_{tot}} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(\vec{r}, t),$$

$$i_n^+(\vec{r}, t) = \frac{1}{4} \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{6\Sigma_{tot}} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(\vec{r}, t),$$

а следовательно, для проекции вектора тока на нормаль \vec{n} –

$$i_n(\vec{r}, t) = i_n^+(\vec{r}, t) - i_n^-(\vec{r}, t) = - \frac{1}{3\Sigma_{tot}} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(\vec{r}, t).$$

Величину $\frac{1}{3\Sigma_{tot}(\vec{r})}$ называют *коэффициентом диффузии* и обозначают $D(\vec{r})$:

$$D(\vec{r}) = \frac{1}{3\Sigma_{tot}(\vec{r})} \text{ [см]}.$$

Производная по нормали $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}(\vec{r},t)$ представляет собой проекцию градиента функции на нормаль $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}(\vec{r},t) = (\text{grad}\Phi(\vec{r},t) \cdot \vec{n})$ и обозначается как $\nabla_n\Phi(\vec{r},t)$. Учитывая этот факт и то, что $i_n(\vec{r},t) = (\vec{i}(\vec{r},t) \cdot \vec{n})$, из последнего равенства получается искомая связь между вектором тока нейтронов и плотностью потока нейтронов – закон Фика:

$$\boxed{\vec{i}(\vec{r},t) = -D(\vec{r}) \nabla\Phi(\vec{r},t).} \quad (2.4)$$

Суммировав используемые при выводе закона Фика предположения, можно утверждать, что закон Фика справедлив для больших (размер среды много больше длины свободного пробега нейтрона в среде) слабопоглощающих ($\Sigma_s \gg \Sigma_a$) сред, состоящих из тяжелых (атомная масса больше 10 а.е.м.) ядер, далеко (более трех длин свободного пробега нейтрона в среде) от локальных неоднородностей и в случае, если макроскопическое сечение рассеяния слабо зависит от пространственной переменной.

При выводе закона Фика для односторонних токов в диффузионном приближении получены выражения:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{i}_n^-(\vec{r},t) &= \frac{1}{4}\Phi(\vec{r},t) + \frac{D(\vec{r})}{2}\nabla_n\Phi(\vec{r},t); \\ \vec{i}_n^+(\vec{r},t) &= \frac{1}{4}\Phi(\vec{r},t) - \frac{D(\vec{r})}{2}\nabla_n\Phi(\vec{r},t). \end{aligned}} \quad (2.5)$$

Необходимо отметить, что в рамках диффузионного приближения возможно учесть слабую анизотропию упругого рассеяния, если для определения коэффициента диффузии вместо полного макроскопического сечения использовать так называемое транспортное макроскопическое сечение Σ_{tr} , которое рассчитывается по следующей формуле: $\Sigma_{tr} = \Sigma_{tot} - \mu \cdot \Sigma_s$, где μ – средний косинус угла рассеяния в лабораторной системе. Если рассеяние в лабораторной системе изотропно, то средний косинус угла рассеяния равен нулю, и транспортное сечение равно полному сечению.

2.3. Уравнение диффузии моноэнергетических нейтронов

Подставив закон Фика (2.4) в уравнение баланса скоростей процессов (2.3), получим:

$$\boxed{\text{div} D(\vec{r}) \nabla \Phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t) + v_f \Sigma_f(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t) = \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) называется *уравнением диффузии моноэнергетических нейтронов* и справедливо только, если выполняются все предположения, сделанные при выводе закона Фика, т.е. для больших слабопоглощающих сред, состоящих из тяжелых ядер, далеко от локальных неоднородностей и в случае, если макроскопическое сечение рассеяния слабо зависит от пространственной переменной. Во всех других случаях использование уравнения (2.6) для описания нейтронного поля будет приводить к неадекватным результатам, причем погрешность описания будет тем больше, чем существеннее нарушаются перечисленные условия.

Запишем уравнение диффузии моноэнергетических нейтронов для нескольких частных случаев:

1) стационарная задача (нет зависимости от временной переменной) –

$$\text{div} D(\vec{r}) \nabla \Phi(\vec{r}) - \Sigma_a(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}) + v_f \Sigma_f(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0;$$

2) стационарная задача, среда неразмножающая (сечение деления равно нулю) –

$$\operatorname{div} D(\vec{r}) \nabla \Phi(\vec{r}) - \Sigma_a(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0;$$

3) гомогенная (свойства среды не зависят от пространственной переменной) неразмножающая среда, стационарная задача –

$$D \Delta \Phi(\vec{r}) - \Sigma_a \cdot \Phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0.$$

Поскольку в случае гомогенной среды ее свойства не зависят от пространственной переменной, следовательно, в первом слагаемом коэффициент диффузии можно вынести за знак дивергенции, а дивергенция от градиента функции – лапласиан этой функции. Этот факт учтен в последнем уравнении. Разделим последнее уравнение на коэффициент диффузии и введем новое обозначение: $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$ [см²].

Введенная величина называется *квадратом длины диффузии нейтронов*, а L [см] – *длиной диффузии нейтронов* соответственно. Перепишем последнее уравнение в виде

$$\Delta \Phi(\vec{r}) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{D} S(\vec{r}) = 0. \quad (2.7)$$

Еще раз отметим, что (2.7) – стационарное уравнение диффузии в гомогенной неразмножающей среде с внешним источником нейтронов.

2.4. Условия однозначного выбора решения уравнения диффузии моноэнергетических нейтронов в физических задачах

Уравнение (2.6) (или (2.7)) – дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\Phi(\vec{r}, t)$. Следовательно, общее решение этих уравнений имеет две произвольные константы, которые необходимо определить из физической постановки задачи. В

данном разделе будут рассмотрены условия, которые позволяют это сделать.

Условия для функции плотности потока нейтронов, следующие из ее определения. Эти очевидные условия отражают тот факт, что по определению функция плотности потока нейтронов не отрицательна и ограничена.

Начальное условие по времени. Это условие важно для решения нестационарного уравнения диффузии (2.6) и говорит о том, что в начальный момент времени $t = 0$ функция плотности потока известна, например, из решения соответствующего стационарного уравнения: $\Phi(\vec{r}, 0) = f(\vec{r})$, где $f(\vec{r})$ – известная функция.

Условие на границе раздела сред с разными свойствами. Это условие сшивки плотности потока нейтронов на границе раздела двух сред с разными свойствами. Необходимо отметить, что при получении этого условия будут использоваться выражения для односторонних токов в области около границы раздела двух сред, поэтому погрешность решения уравнения диффузии в этой области будет высокой. В то же время, допуская большую погрешность решения в области около границы раздела, получаются условия для сшивки решений на границы раздела двух сред, которые гарантируют хорошую точность решения вне этой области. Рассмотрим границу раздела сред (рис. 2.2).

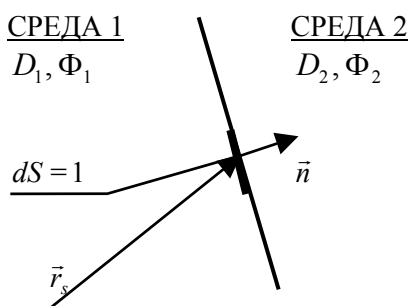


Рис. 2.2. Граница раздела сред с разными свойствами

Если на линии границы нет локальных источников и поглотителей нейтронов, то количество нейтронов, которые пересекают единичную площадку, расположенную в точке \vec{r}_S , из первой среды во вторую, равно количеству нейтронов, которые влетают во вторую среду из первой через эту же площадку, и наоборот. Это значит, что выполняются следующие точные равенства:

$$i_{n,1}^+(\vec{r}_S, t) = i_{n,2}^+(\vec{r}_S, t) \quad \text{и} \quad i_{n,1}^-(\vec{r}_S, t) = i_{n,2}^-(\vec{r}_S, t),$$

которые отражают этот факт. Воспользуемся для односторонних токов выражениями (2.5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\Phi_1(\vec{r}_S, t) - \frac{D_1}{2}\nabla_n\Phi_1(\vec{r}_S, t) &= \frac{1}{4}\Phi_2(\vec{r}_S, t) - \frac{D_2}{2}\nabla_n\Phi_2(\vec{r}_S, t), \\ \frac{1}{4}\Phi_1(\vec{r}_S, t) + \frac{D_1}{2}\nabla_n\Phi_1(\vec{r}_S, t) &= \frac{1}{4}\Phi_2(\vec{r}_S, t) + \frac{D_2}{2}\nabla_n\Phi_2(\vec{r}_S, t). \end{aligned}$$

Это уже приближенные (с точностью до применимости диффузионного приближения) соотношения. После сложения этих равенств получим одно условие – $\Phi_1(\vec{r}_S, t) = \Phi_2(\vec{r}_S, t)$, а после вычитания – второе: $D_1\nabla_n\Phi_1(\vec{r}_S, t) = D_2\nabla_n\Phi_2(\vec{r}_S, t)$.

Таким образом, на границе раздела двух сред с разными свойствами функция плотности потока нейтронов и проекции вектора тока на нормаль непрерывны.

Условие на невогнутой границе «среда – вакуум». Рассмотрим невогнутую границу «среда – вакуум», т.е. такую границу, что все нейтроны, покинувшие среду, обратно возвратиться из вакуума в среду не могут. Необходимо отметить, что при получении этого условия будет использоваться выражение для одностороннего тока в области около границы «среда – вакуум», поэтому погрешность решения диффузионного уравнения в этой области будет высокой. В то же время, допуская большую погрешность решения в области около границы среды и вакуума, получается условие для плотности потока на этой границе, которое гарантирует хорошую точность решения внутри среды. Рассмотрим границу раздела двух сред (рис. 2.3).

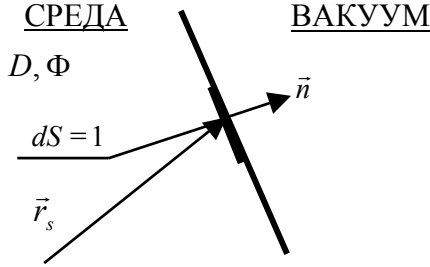


Рис. 2.3. Невогнутая граница среды с вакуумом

Поскольку граница «среда – вакуум» – невогнутая, то нет нейтронов, которые имеют направление движения из вакуума в среду, поэтому через единичную площадку, расположенную в точке \vec{r}_s , нет тока нейтронов из вакуума в среду, т.е. $i_n(\vec{r}_s, t) = 0$. Использование для одностороннего тока выражения (2.5) приводит к равенству:

$$\frac{1}{4}\Phi(\vec{r}_s, t) + \frac{D}{2}\nabla_n\Phi(\vec{r}_s, t) = 0, \text{ из которого получается искомое условие на границе «среда – вакуум»: } \frac{\nabla_n\Phi(\vec{r}_s, t)}{\Phi(\vec{r}_s, t)} = -\frac{1}{2D} = -\frac{3}{2}\Sigma_{tr} = -\frac{1}{\alpha},$$

где комплекс, стоящий в левой части уравнения, часто называют *логарифмической производной*, а величину $\alpha = \frac{2}{3}\lambda_{tr}$ – *длиной линейной экстраполяции плотности потока в вакуум*. Для выяснения смысла этого названия рассмотрим одномерную плоскую геометрию (рис. 2.4).

Экстраполируем линейно функцию плотности потока, которая определена внутри среды, в вакуум. Необходимо подчеркнуть, что выполненная линейная экстраполяция не имеет никакого отношения к описанию нейтронного поля в вакууме, это просто удобный математический прием. Используем полученное выше условие на границе «среда – вакуум» (точка x_s на рис. 2.4) для одномерной

$$\text{плоской геометрии: } \frac{1}{\Phi(x_s)} \frac{d\Phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_s} = -\frac{1}{\alpha}.$$

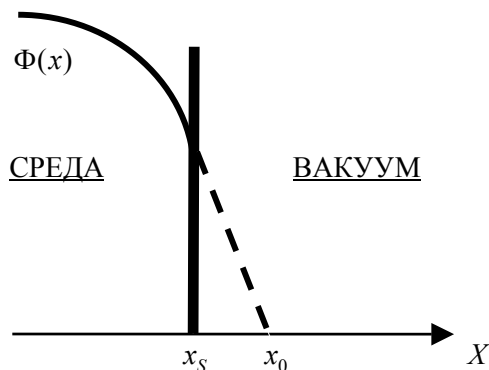


Рис. 2.4. Иллюстрация понятия длины линейной экстраполяции потока в вакуум

Найдем значение x_0 , при котором функция, описывающая при $x \geq x_s$ линейную экстраполяцию потока в вакуум: $\Phi(x) = C_1x + C_2$, обращается в нуль. Для этого получим систему линейных уравнений, первое из которых определяет обращение в нуль $\Phi(x)$ при $x = x_0$: $C_1x_0 + C_2 = 0$, а второе – условие на границе «среда – вакуум», написанное выше: $\frac{C_1}{C_1x_s + C_2} = -\frac{1}{\alpha}$. Решив эту систему урав-

нений, получим: $x_0 = x_s + \alpha$. Таким образом, *длина линейной экстраполяции плотности потока в вакуум – расстояние от границы среды и вакуума, на котором плотность потока нейтронов обращается в нуль при ее линейной экстраполяции от границы среды в вакуум*. А воображаемая граница, на которой функция, линейно экстраполирующая поток в вакуум, обращается в нуль, называется *экстраполированной границей «среда – вакуум»*.

В диффузионном приближении часто ставят условие равенства плотности потока нулю на экстраполированной границе «среда – вакуум»: $\Phi(\vec{r}_s + \alpha \cdot \vec{n}, t) = 0$.

Поскольку диффузионное приближение применимо для описания нейтронного поля в средах, размер которых много больше длины свободного пробега нейтрона, то добавкой $\alpha \cdot \vec{n}$ часто пренебрегают и используют условие равенства потока нулю на границе

среды и вакуума. При этом, естественно, точность описания нейтронного потока около границы еще более ухудшается, но это не оказывает существенного влияния на точность описания нейтронного поля на расстояниях более трех длин свободного пробега нейтрона от границы.

Используя более точные приближения, чем диффузионное, можно показать, что (для обеспечения наилучшей точности описания плотности потока нейтронов внутри среды в рамках диффузионного приближения) длину линейной экстраполяции плотности потока в вакуум надо рассчитывать не как $\frac{2}{3}\lambda_{tr}$, а как $0,71\lambda_{tr}$.

Условие локализованного источника. Рассмотрим среду, в которой в точке \vec{r}_0 расположен точечный источник мощностью S [1/с]. Перепишем уравнение (2.3) для случая стационарной задачи и данного вида источника:

$$-\operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}) - \Sigma_a(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}) + \nu_f \Sigma_f(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}) + S \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – дельта-функция Дирака, которая равна единице, если $\vec{r} = \vec{r}_0$, и нулю – в противном случае. Окружим источник сферой радиусом R с центром в точке расположения источника, проинтегрируем последнее равенство по объему получившегося шара и возьмем предел при стремлении радиуса шара к нулю:

$$\begin{aligned} & -\lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}) \right\} - \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \int_V d\vec{r} \Sigma_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \right\} + \\ & + \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \int_V d\vec{r} \nu_f \Sigma_f(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \right\} + \lim_{R \rightarrow 0} \int_V d\vec{r} S \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \end{aligned}$$

Во втором и третьем членах в левой части уравнения стоят интегралы от ограниченных функций при стремлении области интегрирования к нулю, так как объем шара бесконечно малого радиуса равен нулю. Предел от этих интегралов равен нулю. Интеграл от последнего члена в левой части равен S . В первом же члене перейдем от интеграла по объему шара к интегралу по его поверхности

Г. В результате получим следующее условие локализованного источника: $\lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \oint_{\Gamma} d\vec{r}_S i_n(\vec{r}_S) \right\} = S$. В левой части этого равенства

стоит выражение, которое равно числу нейтронов, которые пересекают в единицу времени поверхность сферы бесконечно малого радиуса, окружающей источник. Естественно, что это число нейтронов равно мощности внешнего источника.

2.5. Характерные задачи стационарной теории диффузии моноэнергетических нейтронов

В дальнейшем в этой главе будут рассматриваться стационарные задачи для однородных неразмножающих сред. Уравнение диффузии моноэнергетических нейтронов для этого случая имеет вид (2.7):

$$\Delta \Phi(\vec{r}) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{D} S(\vec{r}) = 0.$$

Процесс решения этого уравнения состоит из нескольких этапов: запись общего уравнения (2.7) применительно к конкретной геометрии среды (лапласиан в первом члене и переменные, от которых зависит решение) и конкретному виду внешнего источника; нахождение общего решения дифференциального уравнения второго порядка; определение констант, входящих в это решение. Рассмотрим три характерные геометрии: сферическую, плоскую и цилиндрическую.

Точечный источник мощностью q [1/с] в бесконечной неразмножающей однородной среде. В данном случае решение будет зависеть от r — расстояния от источника до точки наблюдения. В качестве оператора Лапласа необходимо взять часть лапласиана в сферической геометрии, которая отвечает за пространственную переменную, так как задача полностью симметрична по полярному и азимутальному углу и соответствующие члены в лапласиане обратятся в нуль. Член источника $S(\vec{r})$ имеет вид $q\delta(r)$. Поэтому для данной постановки задачи уравнение (2.7) запишется в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \Phi(r) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(r) + \frac{1}{D} q \delta(r) = 0, \quad r \geq 0.$$

Вне точки расположения источника, т.е. для $r > 0$, последний член, содержащий дельта-функцию, будет равен нулю и уравнение примет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \Phi(r) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(r) = 0, \quad r > 0.$$

Общее решение этого однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$\Phi(r) = C_1 \frac{\exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}}{r} + C_2 \frac{\exp\left\{\frac{r}{L}\right\}}{r}.$$

Для нахождения констант, прежде всего, рассмотрим поведение решения при $r \rightarrow \infty$. В этом случае второй член в решении неограниченно возрастает, что нарушает условие ограниченности функции плотности потока нейтронов во всей области ее определения. Поэтому константа $C_2 = 0$. Для определения оставшейся константы воспользуемся условием локализованного источника:

$\lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \oint_{\Gamma} d\vec{r}_S i_n(\vec{r}_S) \right\} = q$. В рассматриваемом случае направление вектора тока всегда совпадает с направлением внешней нормали к поверхности сферы и $|d\vec{n}| = dr$, поэтому на поверхности сферы

$$\begin{aligned} i_n(R) &= (\vec{n} \cdot \vec{i}(R)) = -D \frac{d\Phi(r)}{d\vec{n}} \Big|_{r=R} = -D \frac{d\Phi(r)}{dr} \Big|_{r=R} = \\ &= DC_1 \left[\frac{\exp\left\{-\frac{R}{L}\right\}}{R^2} + \frac{\exp\left\{-\frac{R}{L}\right\}}{LR} \right]. \end{aligned}$$

Решение рассматриваемой задачи зависит только от расстояния от источника, поэтому в любой точки на поверхности сферы решение одно и тоже, т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \oint_S d\vec{r}_S i_n(\vec{r}_S) \right\} &= \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ 4\pi R^2 \cdot i_n(R) \right\} = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ 4\pi D C_1 \left[\exp\left\{-\frac{R}{L}\right\} + \frac{R}{L} \exp\left\{-\frac{R}{L}\right\} \right] \right\} = 4\pi D C_1 = q. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $C_1 = \frac{q}{4\pi D}$ и функция плотности потока нейтронов в бесконечной гомогенной неразмножающей среде от точечного источника мощностью q имеет вид $\Phi(r) = \frac{q}{4\pi D} \frac{\exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}}{r}$.

Заметим, что для бесконечной гомогенной неразмножающей среды константа C_1 может быть определена из условия стационарности задачи: скорость генерации нейтронов источником должна быть равна скорости поглощения нейтронов во всей среде, а именно:

$$\begin{aligned} q = \int_V d\vec{r} \Sigma_a \Phi(\vec{r}) &= \Sigma_a \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \Theta C_1 \frac{\exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}}{r} = \\ &= 4\pi C_1 \Sigma_a L^2 = 4\pi C_1 D. \end{aligned}$$

Из этого равенства находится константа $C_1 = \frac{q}{4\pi D}$.

Найдем величину $\overline{r^2}$ – средний квадрат смещения нейтрона (по прямой) от точки рождения до точки поглощения. Как любую среднюю по объему величину, $\overline{r^2}$ необходимо рассчитывать по

формуле: $\overline{r^2} = \frac{\int_V dV r^2 p(r)}{\int_V dV p(r)}$, где $p(r)$ – величина, пропорцио-

нальная плотности вероятности того процесса, относительно которого рассчитывается среднее значение. В данном случае – величина, пропорциональная плотности вероятности поглощения нейтронов. Очевидно, что плотность вероятности поглощения нейтронов прямо пропорциональна скорости реакции поглощения в единичном объеме, т.е. $p(r) = A \Sigma_a \Phi(r)$, где A – произвольная константа. Используя найденное выражение для плотности потока нейтронов и выполнив интегрирование по всему пространству в сферической геометрии, получим следующее выражение для среднего квадрата смещения нейтрона от точки рождения до точки поглощения:

$$\overline{r^2} = \frac{4\pi \int_0^\infty dr r^2 r^2 A \Sigma_a \left(\frac{q}{4\pi D} \right) r^{-1} \exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}}{4\pi \int_0^\infty dr r^2 A \Sigma_a \left(\frac{q}{4\pi D} \right) r^{-1} \exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}} = \frac{\int_0^\infty dr r^3 \exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}}{\int_0^\infty dr r \exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}} = 6L^2.$$

При вычислении интегралов, получающихся в вышеприведенном равенстве, удобно пользоваться следующим табличным интегралом

$$[1]: \int_0^\infty dx x^n \exp\{-px\} = n! p^{-n-1}.$$

Таким образом, величина L^2 , которая была ранее введена как формальный коэффициент в уравнение диффузии, имеет следующий физический смысл: *квадрат длины диффузии нейтронов – одна шестая среднего квадрата смещения (по прямой) нейтрона от точки рождения до точки поглощения.*

Плоский источник мощностью q [1/(см²·с)] в бесконечной неразмножающей гомогенной среде. В этой задаче плотность потока нейтронов будет зависеть от x – расстояния от источника до точки наблюдения (считается, что источник расположен при $x = 0$). Оператора Лапласа в данной геометрии записывается как вторая производная по переменной x . Член источника $S(\vec{r})$ имеет вид $\frac{q}{2} \delta(x)$, поскольку полная мощность источника q [1/(см²·с)] распределяется между полупространством $x > 0$ и полупространством $x < 0$. Таким

образом, для данной постановки задачи уравнение (2.7) запишется в виде:

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(x) + \frac{1}{2D} q \delta(x) = 0, \quad x \in [-\infty, +\infty].$$

Очевидно, что решение симметрично относительно точки расположения источника ($x = 0$), поэтому найдем решения этого уравнения только в области $x > 0$. Вне точки источника ($x = 0$) третий член в левой части уравнения обращается в нуль, а решение однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(x) = 0$$

при $x > 0$ хорошо известно:

$$\Phi(x) = C_1 \exp\left\{-\frac{x}{L}\right\} + C_2 \exp\left\{\frac{x}{L}\right\}.$$

Функция плотности потока нейтронов должна быть ограничена во всей области определения ($x > 0$), поэтому константа $C_2 = 0$, поскольку второй член в решении не ограничен при $x \rightarrow \infty$. Для определения константы C_1 рассмотрим условие локализованного источника.

В данной геометрии оно имеет вид $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i_x(\varepsilon) = \frac{q}{2}$ и от-

ражает тот факт, что единичную площадку с нормалью по оси X , расположенную бесконечно близко к плоскости источника, в единицу времени пересекает $\frac{q}{2}$ нейтронов.

Поскольку в рассматриваемом случае для $x > 0$ направление вектора тока всегда совпадает с направлением оси X , т.е. $|d\vec{n}| = dx$, то выполняется равенство

$$i_x(\varepsilon) = -D \frac{d\Phi(x)}{dx} \Big|_{x=\varepsilon}.$$

Учитывая, что $\frac{d\Phi(x)}{dx} = -\frac{C_1}{L} \exp\left\{-\frac{x}{L}\right\}$, условие локализованного источника для данной задачи примет вид: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{DC_1}{L} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{L}\right\} = \frac{DC_1}{L} = \frac{q}{2}$. Отсюда следует, что $C_1 = \frac{qL}{2D}$, и плотность потока нейтронов определяется как $\Phi(x) = \frac{qL}{2D} \exp\left\{-\frac{x}{L}\right\}$ для области $x > 0$.

Учитывая симметрию задачи, а следовательно, и решения относительно точки $x = 0$, решение для всей области изменения переменной x , за исключением точки источника $x = 0$, можно записать как

$$\Phi(x) = \frac{qL}{2D} \exp\left\{-\frac{|x|}{L}\right\}, x \neq 0.$$

Необходимо отметить, что на расстояниях порядка нескольких длин свободного пробега нейтрона от источника это решение имеет максимальную погрешность, а анализ его в точке источника ($x = 0$) вообще не имеет смысла. Погрешность решения диффузионного приближения около внешних источников нейтронов обусловлена тем фактом, что в этой области нейтронное поле во многом формируется прямопротрельными нейтронами, т.е. нейтронами, которые еще не испытали ни одного столкновения с ядрами среды, а решения, получаемые в диффузионном приближении, есть результат усреднения по большому числу столкновений нейтронов с ядрами среды и, следовательно, вообще не учитывают прямопротрельные нейтроны.

Нитевидный источник мощностью q [1/(см·с)] в бесконечной неразмножающей гомогенной среде. В данном случае решение будет зависеть только от ρ – расстояния от нитевидного источника до точки наблюдения. В качестве оператора Лапласа необходимо взять пространственную часть оператора Лапласа в цилиндрической геометрии. Член источника $S(\vec{r})$ имеет вид $q\delta(\rho)$. Поэтому для данной постановки задачи уравнение (2.7) запишется в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} \Phi(\rho) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(\rho) + \frac{1}{D} q \delta(\rho) = 0,$$

а вне области источника ($\rho > 0$)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} \Phi(\rho) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(\rho) = 0.$$

Из теории специальных функций [2] известно, что общее решение последнего уравнения имеет вид $\Phi(\rho) = C_1 K_0\left(\frac{\rho}{L}\right) + C_2 I_0\left(\frac{\rho}{L}\right)$, где

$K_0(x)$ – модифицированная функция Ганкеля нулевого порядка; $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Из рис. 2.5, на котором изображены эти функции, следует, что константа C_2 в общем решении должна быть равна нулю, поскольку модифицированная функция Бесселя нулевого порядка бесконечно возрастает при стремлении аргумента к бесконечности, т.е. не обеспечивает ограниченность решения во всей области определения. Для определения константы C_1 воспользуемся условием лока-

лизованного источника: $\lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \oint_S d\vec{r}_S i_n(\vec{r}_S) \right\} = q$.

В нашем случае в качестве поверхности выступает цилиндр единичной длины, радиусом R и осью, совпадающей с источником. Поскольку направление вектора тока всегда совпадает с направлением внешней нормали к боковой поверхности цилиндра и в рассматриваемом случае направление вектора тока всегда совпадает с направлением и $|d\vec{n}| = d\rho$, поэтому

$$\begin{aligned} i_n(r_S) = (\vec{n} \cdot \vec{i}(\vec{r}_S)) &= -D \frac{d\Phi(\rho)}{d\vec{n}} \Big|_{\rho=R} = -D \frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=R} = -DC_1 \left[\frac{dK_0\left(\frac{\rho}{L}\right)}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=R} = \\ &= \frac{DC_1}{L} K_1\left(\frac{R}{L}\right) \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовано следующее свойство модифицированных функций Ганкеля [2]: $\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$, где $K_1(x)$ – модифицированная функция Ганкеля первого порядка.

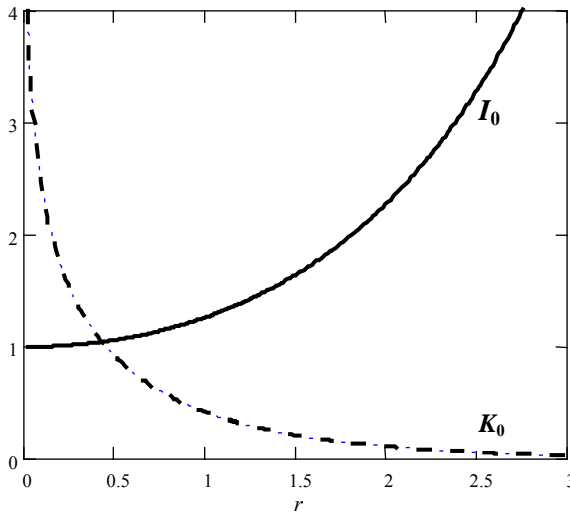


Рис. 2.5. Модифицированные функции Ганкеля и Бесселя нулевого порядка

Решение рассматриваемой задачи зависит только от расстояния от источника, поэтому в любой точки на боковой поверхности цилиндра решение одно и тоже, т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \oint_S d\vec{r}_S i_n(\vec{r}_S) \right\} &= \lim_{R \rightarrow 0} \{ 2\pi R \cdot i_n(R) \} = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ 2\pi R D \frac{C_1}{L} K_1\left(\frac{R}{L}\right) \right\} = 2\pi D C_1 \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \frac{R}{L} K_1\left(\frac{R}{L}\right) \right\} = 2\pi D C_1 = q. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовалось следующее свойство функции $K_1(x)$ [2]: $\lim_{x \rightarrow 0} [x K_1(x)] = 1$. Отсюда следует, что

$C_1 = \frac{q}{2\pi D}$ и решение уравнения диффузии в цилиндрической геометрии в бесконечной неразмножающей гомогенной среде имеет вид: $\Phi(\rho) = \frac{q}{2\pi D} K_0\left(\frac{\rho}{L}\right)$.

2.6. Диффузионные функции влияния (функции Грина). Принцип суперпозиции источников

По своему физическому смыслу *функция Грина* $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ (*функции влияния*) – поток нейтронов в точке \vec{r} от единичного точечного источника, расположенного в точке \vec{r}_0 .

Для нахождения диффузионных функций влияния в общем случае необходимо решать уравнение диффузии

$$\text{div } D(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}_0) - \Sigma_a(\vec{r}) \cdot G(\vec{r}, \vec{r}_0) + \nu_f \Sigma_f(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}_0) + 1 \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

с соответствующими граничными условиями и условиями сшивки решений на границах раздела сред с разными свойствами.

В случае бесконечной неразмножающей гомогенной среды, используя полученные в разд. 2.5 выражения для плотности потока нейтронов от источника мощностью q , диффузионные функции влияния (диффузионные функции Грина) записываются следующим образом:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi D} \frac{\exp\left\{-\frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{L}\right\}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \text{диффузионная функция влияния}$$

(диффузионная функция Грина) точечного источника в бесконечной неразмножающей гомогенной среде;

$$G(x, x_0) = \frac{L}{2D} \exp\left\{-\frac{|x - x_0|}{L}\right\} - \text{диффузионная функция влияния}$$

(диффузионная функция Грина) плоского источника в бесконечной неразмножающей гомогенной среде;

$$G(\rho, \rho_0) = \frac{1}{2\pi D} K_0 \left(\frac{|\rho - \rho_0|}{L} \right) - \text{диффузионная функция влияния}$$

(диффузионная функция Грина) нитевидного источника в бесконечной неразмножающей однородной среде. Отметим, что в общем случае функции Грина имеют существенно более сложный вид.

Рассмотренные функции по определению представляют собой поток нейтронов в точке \vec{r} (для точечного источника), точке x (для плоского источника) или точке ρ (для нитевидного источника) в бесконечной неразмножающей однородной среде от единичного источника (точечного, плоского или нитевидного соответственно), расположенного в точке \vec{r}_0 , x_0 или ρ_0 соответственно. Они удовлетворяют соответствующему диффузионному уравнению для однородной неразмножающей среды: $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_0) - \frac{1}{L^2} \cdot G(\vec{r}, \vec{r}_0) + \frac{1}{D} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ с условием ограниченности на бесконечности и условием локализованного источника. В случае бесконечной однородной среды для функций Грина справедливо соотношение взаимности: $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = G(\vec{r}_0, \vec{r})$.

Если в среде расположен не один источник нейтронов, то результирующее нейтронное поле будет представлять собой суперпозицию нейтронных полей от каждого из источников, поскольку при описании нейтронного поля не учитывается взаимодействие нейтронов между собой, т.е. соответствующие уравнения диффузии, описывающие нейтронное поле линейны. В этом заключается *принцип суперпозиции источников*. Например, если в бесконечной однородной однородной среде действует I точечных источников нейтронов различной мощности (рис. 2.6), то поток нейтронов в точке \vec{r} будет определяться выражением:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I q_i G(\vec{r}, \vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi D} \sum_{i=1}^I q_i \frac{\exp \left\{ \frac{|\vec{r} - \vec{r}_i|}{L} \right\}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Если в среде существует область V_0 , в которой находится распределенный источник нейтронов мощностью $q(\vec{r}_0)$, то, согласно принципу суперпозиции источников, поток нейтронов в точке \vec{r} будет определяться выражением:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{V_0} d\vec{r}_0 q(\vec{r}_0) G(\vec{r}, \vec{r}_0),$$

где конкретный вид функций Грина будет определяться постановкой задачи.

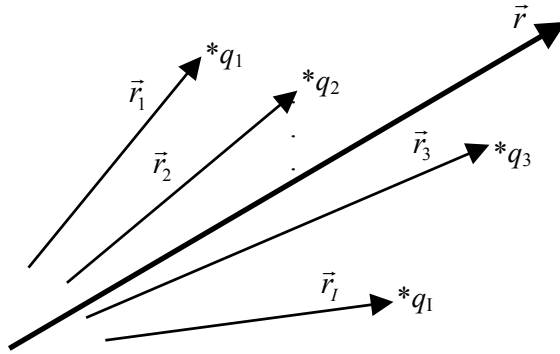


Рис. 2.6. Расположение точечных источников в среде

В качестве иллюстрации применения принципа суперпозиции источников рассмотрим задачу о нахождении плотности потока нейтронов от плоского источника, используя известную функцию плотности потока от точечного источника (рис. 2.7).

Поток нейтронов в точке x от точечного источника единичной мощностью, расположенного в любой точке на окружности радиуса ρ , определяется выражением

$$\Phi_{\text{point}}(x) = \frac{1}{4\pi D} \frac{\exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}}{r},$$

где r – расстояние от окружности до точки x (рис. 2.7).

Представим плоский источник как совокупность точечных источников. Для этого выделим на плоскости элементарное кольцо радиусом ρ и толщиной $\delta\rho$. Это кольцо представляет собой источник нейтронов мощностью $S(\rho) = (2\pi\rho\delta\rho)q$ [1/с], где q [1/(см²·с)] – мощность плоского источника. Поток нейтронов в точке x от элементарного кольца будет определяться выражением

$\Phi_{dS}(x) = S(\rho) \Phi_{\text{point}}(r)$, а от всей плоскости — выражением

$$\Phi(x) = \int_0^\infty d\rho S(\rho) \Phi_{\text{point}}(r) = \int_0^\infty d\rho \frac{2\pi\rho q}{4\pi D} \frac{\exp\left\{-\frac{r}{L}\right\}}{r}.$$

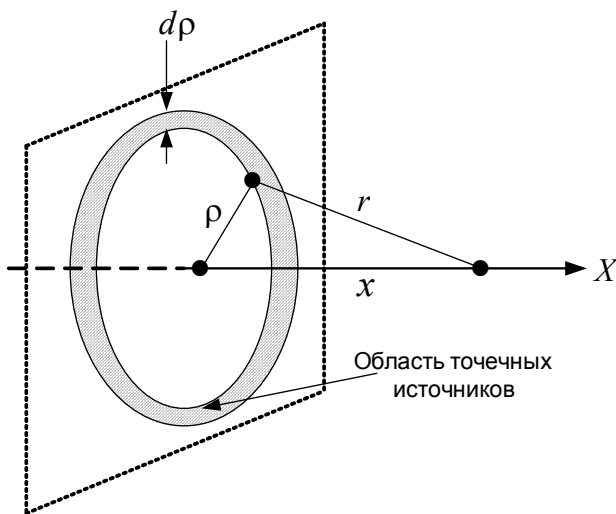


Рис. 2.7. Схема к примеру использования принципа суперпозиции источников

С учетом очевидной связи $r^2 = \rho^2 + x^2$, после перехода от интегрирования по переменной ρ к интегрированию по переменной r , это равенство принимает вид

$$\Phi(x) = \frac{q}{2D} \int_x^\infty dr \exp\left\{-\frac{r}{L}\right\} = \frac{qL}{2D} \exp\left\{-\frac{x}{L}\right\},$$

что совпадает с полученным ранее выражением.

Отметим, что принцип суперпозиции в общем случае легко применим лишь для расчета распределений нейтронов в бесконечной неразмножающей гомогенной среде, поскольку в этом случае удает-

ся построить функцию Грина, зависящую только от расстояния между источником и точкой наблюдения. Для других сред функции влияния (функции Грина) будут зависеть непосредственно от координаты источника и точки наблюдения. В качестве примера в прил. 3 рассмотрена задача по нахождению функции Грина пластины конечной толщины. Однако для полубесконечной неразмножающей гомогенной среды удастся довольно просто построить функцию влияния, используя прием, известный как «метод ложного источника». Проиллюстрируем этот прием на решении задачи о нахождении функции влияния точечного источника, расположенного в полубесконечной гомогенной неразмножающей среде на расстоянии a от границы этой среды с вакуумом (рис. 2.8).

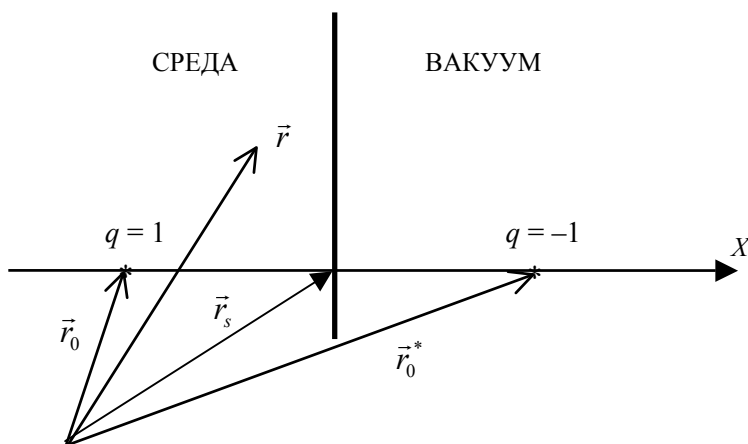


Рис. 2.8. Метод ложного источника

Искомая функция $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$, по определению, должна удовлетворять уравнению

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_0) - \frac{1}{L^2} \cdot G(\vec{r}, \vec{r}_0) + \frac{1}{D} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

с граничным условием $G(\vec{r}_s, \vec{r}_0) = 0$ и условием ограниченности на бесконечности. Для нахождения этой функции искусственно про-

должим среду в вакуум, и симметрично реальному источнику $q = 1$ (который расположен в точке \vec{r}_0) относительно экстраполированной границы в точке \vec{r}_0^* расположим точечный источник отрицательной мощности $q = -1$ (ложный источник). Согласно принципу суперпозиции источников, функция плотности потока нейтронов в бесконечной неразмножающей гомогенной среде с таким расположением источников имеет вид

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi D} \left[\frac{\exp\left\{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{L}\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{\exp\left\{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0^*|}{L}\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}_0^*|} \right]$$

и удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi(\vec{r}) - \frac{1}{L^2} \cdot \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{D} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) - \frac{1}{D} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0^*) = 0.$$

Видно, что функция $\Phi(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению для функции $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ и обращается в нуль на границе \vec{r}_s , поскольку источники расположены симметрично относительно границы. Следовательно, по определению, она является искомой функцией влияния точечного источника в полубесконечной среде.

2.7. Альbedo. Постановка граничных условий с помощью альbedo

Среду конечных размеров, в которой распределены источники нейтронов, нейтроны покидают через границу среды. Этот процесс называется *утечкой нейтронов из среды* и отрицательно влияет на баланс нейтронов в среде. В случае, если среда окружена вакуумом, то покинувшие ее нейтроны обратно не возвращаются. Для улучшения баланса нейтронов в среде путем возврата в нее части покинувших ее нейтронов размножающую среду, например активную зону ядерного реактора, окружают веществом, которое хоро-

шо рассеивает и плохо поглощает нейтроны ($\Sigma_a \ll \Sigma_s$). Это вещество называется *отражателем*. В этом случае часть нейтронов, покинувших размножающую среду в результате утечки, после ряда рассеяний в отражателе вернется в размножающую среду. Остальные нейтроны или поглотятся в отражателе, или вылетят из него в вакуум. Поэтому эффективность отражателя тем выше, чем лучше его рассеивающие свойства, меньше поглощение в нем нейтронов и чем толще его слой. Для количественной характеристики эффективности отражателя введем величину, которая называется *альбедо* и определяется выражением:

$$\beta = \frac{i_n^-(\vec{r}_S)}{i_n^+(\vec{r}_S)},$$

где \vec{r}_S – радиус-вектор границы размножающей среды и отражателя.

Альбедо – отношение числа нейтронов, которые пересекают единичную площадку в единицу времени в направлении из отражателя в размножающую среду (возвращаются в активную зону ядерного реактора), к числу нейтронов, которые пересекают в единицу времени ту же самую площадку в направлении из размножающей среды в отражатель (покидают активную зону). Очевидно, что $0 \leq \beta \leq 1$. Но так как среда, из которой состоит отражатель, хоть мало, но поглощает нейтроны, и отражатель имеет конечные размеры, то альбедо всегда меньше единицы.

Если для односторонних токов использовать выражения (2.5), то получим следующую формулу для альбедо в диффузионном приближении:

$$\beta = \frac{1 + 2D_o \frac{\nabla_n \Phi_o(\vec{r}_S)}{\Phi_o(\vec{r}_S)}}{1 - 2D_o \frac{\nabla_n \Phi_o(\vec{r}_S)}{\Phi_o(\vec{r}_S)}}, \quad (2.8)$$

где индекс «о» показывает, что поток нейтронов и коэффициент диффузии берутся для отражателя. Отметим, что поскольку в диффузионном приближении на границе «активная зона – отражатель» справедливы следующие условия сшивки решения:

$$\Phi_o(\vec{r}_S) = \Phi_c(\vec{r}_S) \quad \text{и} \quad D_o \nabla_n \Phi_o(\vec{r}_S) = D_c \nabla_n \Phi_c(\vec{r}_S),$$

где индекс «с» относится к размножающей среде, то в выражении для альбеда можно использовать функцию плотности потока нейтронов и коэффициент диффузии, взятые не для отражателя, а для активной зоны.

Найдем альбеда плоского слоя толщиной a (рис. 2.9). В отражателе уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi_o(x) - \frac{1}{L_o^2} \cdot \Phi_o(x) = 0.$$

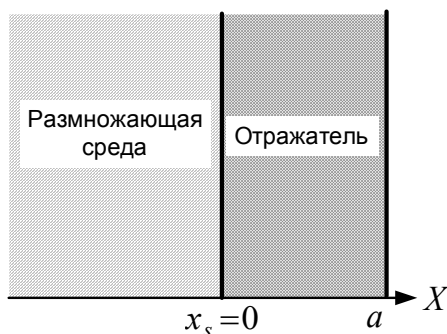


Рис. 2.9. Альбеда плоского слоя

Решением этого однородного дифференциального уравнения второго порядка является функция: $\Phi_o(x) = C_1 \exp\left\{-\frac{x}{L_o}\right\} + C_2 \exp\left\{\frac{x}{L_o}\right\}$. Считая, что a – экстраполированная граница отражателя и вакуума, воспользуемся условием равенства потока нулю на этой границе: $C_1 \exp\left\{-\frac{a}{L_o}\right\} + C_2 \exp\left\{\frac{a}{L_o}\right\} = 0$. Из последнего равенства можно найти связь между константами C_1 и C_2 : $C_1 = -C_2 \exp\left\{\frac{2a}{L_o}\right\}$. С учетом этой связи выражение для плотности потока нейтронов в отражателе примет вид

$$\begin{aligned}\Phi_o(x) &= -C_2 \exp\left\{\frac{2a}{L_o}\right\} \exp\left\{\frac{-x}{L_o}\right\} + C_2 \exp\left\{\frac{x}{L_o}\right\} = \\ &= -C_2 \exp\left\{\frac{a}{L_o}\right\} \left[\exp\left\{\frac{a-x}{L_o}\right\} - \exp\left\{-\frac{a-x}{L_o}\right\} \right] = K \cdot \text{sh}\left\{\frac{a-x}{L_o}\right\},\end{aligned}$$

где $K = -2C_2 \exp\left\{\frac{a}{L_o}\right\}$ – произвольная константа, а $\text{sh}(x)$ – гиперболический синус. В формулу для альбеда входит комплекс $\nabla_n \Phi_o(\vec{r}_S)/\Phi_o(\vec{r}_S)$. Определим его, используя найденное выражение для функции плотности потока:

$$\begin{aligned}\frac{\nabla_n \Phi_o(\vec{r}_S)}{\Phi_o(\vec{r}_S)} &= \frac{1}{\Phi_o(0)} \frac{d\Phi_o(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{K \text{sh}\left\{\frac{a}{L_o}\right\}} K \text{ch}\left\{\frac{a}{L_o}\right\} \left(-\frac{1}{L_o}\right) = \\ &= -\frac{1}{L_o} \text{cth}\left\{\frac{a}{L_o}\right\},\end{aligned}$$

где $\text{cth}(x) \equiv \text{ch}(x)/\text{sh}(x)$ – гиперболический котангенс.

Таким образом, для альбеда плоского слоя толщиной a получим выражение:

$$\beta_x(a) = \frac{1 - \frac{2D_o}{L_o} \text{cth}\left\{\frac{a}{L_o}\right\}}{1 + \frac{2D_o}{L_o} \text{cth}\left\{\frac{a}{L_o}\right\}},$$

где индекс x говорит о том, что рассматривается плоская геометрия.

Чем меньше вклад процессов поглощения в полное сечение взаимодействия нейтронов с веществом в отражателе, тем больше длина диффузии нейтронов в отражателе, и, следовательно, при неизменной толщине отражателя, тем ближе значение альбеда плоского слоя к единице. Заметим, что функция $\text{cth}\left\{\frac{a}{L_o}\right\}$ приблизительно равна единице уже при значениях аргумента порядка трех.

Другими словами, при толщине отражателя порядка трех длин диффузии нейтронов в отражателе его эффективность практически совпадает с эффективностью полубесконечного отражателя.

При выводе уравнения диффузии моноэнергетических нейтронов отмечалось, что диффузионная теория неприменима около границы раздела зон с сильно отличающимися физическими свойствами, поскольку в этой области функция плотности потока нейтронов может претерпевать существенные изменения, и ее аппроксимация двумя членами разложения в ряд Тейлора может быть не адекватной. В связи с этим использование обычных условий шивки решения уравнения диффузии на указанной границе (например, на границе «активная зона – отражатель») приводит к существенным ошибкам при описании нейтронного поля в среде. Поэтому для уточнения пространственного распределения нейтронов в размножающей среде в окрестности границы с отражателем, при решении уравнения диффузии в качестве граничного условия используют значение альбедо, которое получено либо экспериментально, либо в результате расчетов с использованием более точных моделей описания нейтронного поля.

Пусть известно значение альбедо β , которое, например, рассчитано в более точном, чем диффузионное, приближении, или получено экспериментально. Выразим из уравнения (2.8), записанного через параметры размножающей среды, а не отражателя, комплекс

$$\nabla_n \Phi_c(\vec{r}_S) / \Phi_c(\vec{r}_S) : \frac{\nabla_n \Phi_c}{\Phi_c} \Big|_{\vec{r}_S} = -\frac{3}{2} \Sigma_{tot} \frac{1-\beta}{1+\beta}, \text{ который будем использо-}$$

вать в качестве граничного условия на границе размножающей среды и отражателя. Вспомним, что в диффузионном приближении на границе «среда – вакуум» было получено условие:

$$\frac{\nabla_n \Phi_c}{\Phi_c} \Big|_{\vec{r}_S} = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{3}{2} \Sigma_{tot}.$$

Видно, что условие на границе «среда – отражатель», полученное в случае наличия отражателя, отличается от аналогичного граничного условия, полученного в диффузионном приближении для границы «среда – вакуум» наличием множителя $\frac{1-\beta}{1+\beta}$, который учитывает влияние отражателя.

2.8. Решение уравнения диффузии в конечной среде на примере математического обоснования экспоненциального эксперимента

Для решения уравнения диффузии в неразмножающих средах необходимо знать характеристики среды, а именно, коэффициент диффузии и квадрат длины диффузии, или полное макроскопическое сечение взаимодействия нейтронов и макроскопическое сечение поглощения нейтронов для среды. Полное макроскопическое сечение взаимодействия нейтронов можно измерить, например, в экспериментах по ослаблению интенсивности монохроматического пучка нейтронов, падающего перпендикулярно к поверхности пластины из вещества изучаемой среды (рис. 2.10). Если на тонкую пластину падает пучок нейтронов интенсивностью I_0 [$1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$], а после прохождения пластины интенсивность пучка равна $I(\Delta x)$, то $I(\Delta x) = I_0 \exp\{-\Sigma_{tot}\Delta x\}$, откуда можно определить

$$\Sigma_{tot} = -\frac{1}{\Delta x} \ln \left\{ \frac{I(\Delta x)}{I_0} \right\} \quad \text{и} \quad \text{рассчитать коэффициент диффузии}$$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tot}}.$$

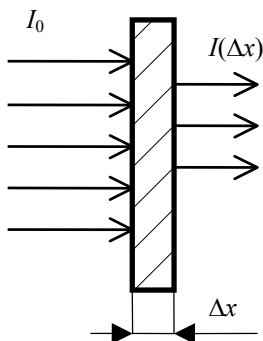


Рис. 2.10. Схема эксперимента по определению полного макроскопического сечения взаимодействия нейтронов в среде

В подобных экспериментах измеряется полное макроскопическое сечение взаимодействия нейтронов в среде, а следовательно, и коэффициенты диффузии этих сред. Квадрат длины диффузии определялся в специальных экспериментах, которые получили назва-

ние «экспоненциальный эксперимент». Рассмотрим экспериментальную установку, которая представляет собой прямоугольную призму высотой b , в основании которой лежит квадрат со стороной a , набранную из исследуемого материала, которая со стороны меньшей грани облучается источником тепловых нейтронов (рис. 2.11). Установку собирают таким образом, что $b \gg a$, а a — много больше длины свободного пробега нейтронов в веществе, т.е. все грани призмы, кроме облучаемой нейтронами, можно рассматривать как экстраполированные границы среды с вакуумом. Поскольку длина свободного пробега нейтронов в веществе составляет несколько сантиметров, то размеры установки получаются порядка нескольких десятков сантиметров (до метра). Для того чтобы получить источник тепловых нейтронов, внешний источник помещается в среду, хорошо замедляющую нейтроны (например, парафин).

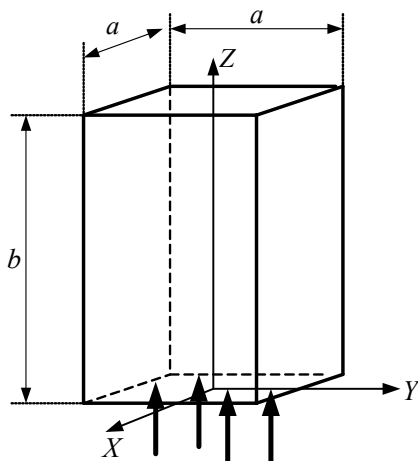


Рис. 2.11. Схема установки экспоненциального эксперимента

Уравнение диффузии нейтронов в призме имеет вид:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right\} \Phi(x, y, z) - \frac{1}{L^2} \Phi(x, y, z) = 0$$

и удовлетворяет условиям симметрии по переменным x и y , а также граничным условиям $\Phi\left(\pm \frac{a}{2}, y, z\right)=0$, $\Phi\left(x, \pm \frac{a}{2}, z\right)=0$, $\Phi(x, y, b)=0$. Подобные уравнения решаются методом разделения переменных, т.е. будем искать решение уравнения в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $\Phi(x, y, z)=X(x)Y(y)Z(z)$. После подстановки такого вида решения в исходное уравнение и деления обеих частей получившегося равенства на $\Phi(x, y, z)$, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{L^2} \quad (2.9)$$

с условиями симметрии $X(-x)=X(x)$, $Y(-y)=Y(y)$ и граничными условиями $X\left(\pm \frac{a}{2}\right)=0$, $Y\left(\pm \frac{a}{2}\right)=0$.

Из уравнения (2.9) следует, что сумма трех независимых друг от друга функций, каждая из которых зависит только от своей переменной, всегда равна одной и той же константе. Это возможно только, если каждое из слагаемых есть константа. Рассмотрим последовательно каждое из слагаемых в левой части уравнения (2.9).

Если первое слагаемое в (2.9) равно произвольной положительной константе μ^2 , то решением уравнения $\frac{X''(x)}{X(x)}=\mu^2$ является

функция $X(x)=C_1 \exp\left\{\frac{x}{L}\right\}+C_2 \exp\left\{-\frac{x}{L}\right\}$, которая ни в каких случаях, кроме тривиального $C_1=C_2=0$, не может удовлетворить условию равенства потока нулю на экстраполированной границе «среда – вакуум»: $X\left(\pm \frac{a}{2}\right)=0$. Следовательно, первое слагаемое в

(2.9) должно быть равно отрицательной константе $(-\mu^2)$. В этом случае решением уравнения $\frac{X''(x)}{X(x)}=-\mu^2$ является функция $X(x)=A \cos\{\mu x\}+B \sin\{\mu x\}$, где A, B – произвольные константы.

Постановка задачи такова, что решения должны быть четными функциями относительно оси OX , поэтому константа $B = 0$ для того, чтобы нечетные функции (синусы) в решении отсутствовали. Для нахождения константы μ , которая пока может принимать любые значения, рассмотрим граничное условие $X\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0$. После подстановки в него решения получим: $\cos\left\{\mu \frac{a}{2}\right\} = 0$. Следовательно, константа μ может принимать не одно, а бесконечное множество значений, удовлетворяющих постановке задачи: $\mu_m = (2m+1)\frac{\pi}{a}$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, а решением по оси OX может быть любая линейная комбинация функций, соответствующих этим значениям:

$$X_m(x) = A_m \cos\left\{(2m+1)\frac{\pi}{a}x\right\}.$$

Проведя аналогичные рассуждения для второго члена в (2.9), получим, что нетривиальное решение существует только в случае равенства второго члена отрицательной константе $(-v^2)$, константа v может принимать любое значение из набора $v_n = (2n+1)\frac{\pi}{a}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, а решением по оси OY может быть любая линейная комбинация функций $Y_n(x) = B_n \cos\left\{(2n+1)\frac{\pi}{a}y\right\}$.

Тогда для нахождения функции $Z(z)$ получим следующее уравнение

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{L^2} + \mu_m^2 + v_n^2. \quad \text{После обозначения}$$

$$\frac{1}{\Lambda_{mn}^2} = \frac{1}{L^2} + \mu_m^2 + v_n^2 \quad \text{это уравнение переписывается в виде}$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{\Lambda_{mn}^2}. \quad \text{Решением последнего уравнения является функция}$$

$$Z(z) = C_1 \exp\left\{-\frac{z}{\Lambda_{mn}}\right\} + C_2 \exp\left\{\frac{z}{\Lambda_{mn}}\right\}.$$

Так как размер рассматриваемой системы по оси OZ много больше других размеров и длины свободного пробега нейтронов в среде, то для определения решения в этом направлении внутри системы (далеко от ее границ) можно считать, что в направлении оси OZ система бесконечно большая, а следовательно, константа C_2 в решении по оси OZ равна нулю. Учитывая, что постановке задачи удовлетворяет любая линейная комбинация найденных функций, плотность потока нейтронов в призме запишется в виде

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m,n} A_{mn} \cos\left\{(2m+1)\frac{\pi}{a}x\right\} \cos\left\{(2n+1)\frac{\pi}{a}y\right\} \exp\left\{-\frac{z}{\Lambda_{mn}}\right\},$$

$$\text{где } \Lambda_{mn} = \left[\frac{1}{L^2} + \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{a^2} \right]^{-1/2}; m, n = 0, 1, 2, \dots$$

В решение одним из множителей входит функция $\exp\left\{-\frac{z}{\Lambda_{mn}}\right\}$.

Чем больше параметр Λ_{mn} , тем дольше «затухает» экспоненциальная функция. Следовательно, начиная от какого-то расстояния от облучаемой грани, основной вклад в решение будет вносить член ряда, в котором в качестве сомножителя стоит экспоненциальная функция с максимальным параметром Λ_{mn} , поскольку остальные экспоненциальные функции на этом расстоянии от источника уже будут близки к нулю. Параметр Λ_{mn} имеет максимальное значение

$$\text{при } m = 0 \text{ и } n = 0: \Lambda_{00} = \left[\frac{1}{L^2} + 2 \frac{\pi^2}{a^2} \right]^{-1/2}.$$

Таким образом, на некотором расстоянии от облучаемой поверхности решение внутри призмы будет иметь вид

$$\Phi(x, y, z) = A_{00} \cos\left\{\frac{\pi}{a}x\right\} \cos\left\{\frac{\pi}{a}y\right\} \exp\left\{-\frac{z}{\Lambda_{00}}\right\}.$$

Если в точках вдоль оси OZ , т.е. при $x = y = 0$, в призме измерить величину, пропорциональную плотности потока нейтронов (например, активационным методом), и построить график зависимости логарифма этой величины от координаты z , то по тангенсу угла

наклона получившейся прямой можно определить параметр Λ_{00} . Действительно, $\ln\Phi(z) = \ln K - \frac{z}{\Lambda_{00}}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\Delta \ln\Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Lambda_{00}}$ (рис. 2.12).

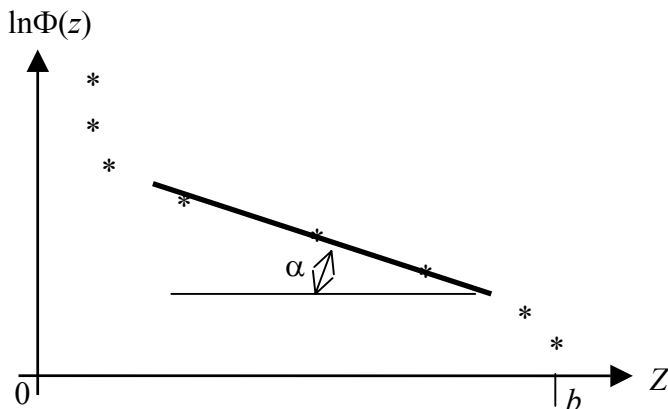


Рис. 2.12. Зависимость логарифма потока нейтронов от z

В областях около $z = 0$ и $z = b$ приведенная на рис. 2.12 зависимость будет отклоняться от прямой линии из-за влияния граничных условий (около $z = b$) и наличия еще на «затухнувших» экспонент в решении (около $z = 0$).

Таким образом, описанный выше эксперимент позволяет определить $\Lambda_{00} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ и, следовательно, $L^2 = \left[\frac{1}{\Lambda_{00}^2} - 2 \frac{\pi^2}{a^2} \right]^{-1}$ и рассчитать макроскопическое сечение поглощения среды $\Sigma_a = \frac{1}{3\Sigma_{tot}L^2}$.

Данный эксперимент получил название «экспоненциальный» эксперимент из-за экспоненциального вида зависимости плотности потока нейтронов вдоль оси OZ .

Глава 3

ТЕОРИЯ ЗАМЕДЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ ПРИ УПРУГОМ РАССЕЯНИИ

В предыдущей главе была рассмотрена теория диффузии моноэнергетических нейтронов, т.е. описывался процесс пространственного распространения нейтронов в веществе без учета изменения их энергии в процессе взаимодействия с ядрами среды. Цель данной главы – рассмотреть закономерности формирования энергетического распределения нейтронов в среде без учета их пространственной миграции. Таким образом, *в данной главе будет рассматриваться бесконечная неразмножающаяся гомогенная среда, в которой равномерно распределены изотропные монохроматические стационарные источники нейтронов.* Такая постановка задачи с учетом того факта, что потенциальное рассеяние нейтронов изотропно в системе центра масс (будет обсуждено далее) приводит к тому, что семимерное фазовое пространство $(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, в котором в общем случае определяются функции, описывающие нейтронное поле, сводится к одномерному – (E) . Зависимость $\Phi(E)$ называется *спектр нейтронов*. Нейтроны, которые испускаются внешним источником с энергией E_0 , в результате столкновений с ядрами среды теряют свою энергию. Этот процесс называется *замедлением нейтронов* и играет важную роль в физике ядерных реакторов. Действительно, средняя энергия нейтронов деления в реакторе составляет около 2 МэВ, т.е. большая часть нейтронов рождается при энергии порядка мегаэлектронвольт, а, с другой стороны, основные процессы взаимодействия нейтронов с ядрами среды, определяющие физические особенности ядерных реакторов на тепловых нейтронах, протекают в области энергий ниже 1 эВ. Именно в результате процесса замедления нейтроны переходят из области высоких энергий, где они рождаются, в область низких энергий, где они поглощаются ядрами среды. Необходимо отметить, что замедление нейтронов идет как в результате упругого, так и неупругого рассеяния. В данной главе будут изучаться особенности формирования спектра нейтронов в различных средах только в результате упругого рассеяния на легких ядрах, хотя надо иметь в виду, что в

быстрой области энергий существенное значение для замедления нейтронов играет также неупругое рассеяние на тяжелых ядрах.

Естественно, что при упругом столкновении с легким ядром нейтрон теряет больше энергии, чем при упругом столкновении с более тяжелым ядром. Поэтому в тепловых ядерных реакторах присутствуют вещества, состоящие из легких ядер, основная цель которых – обеспечить замедление нейтронов. Это вещество называется *замедлителем*. В качестве замедлителя в основных энергетических тепловых реакторах используются вода (все типы водородных реакторов, например ВВЭР), тяжелая вода (реакторы типа CANDU) и углерод (графитовые каналные реакторы, например РБМК). В реакторах специального назначения в качестве замедлителя используется также бериллий, оксид бериллия и гидрид циркония. Все замедлители имеют малое макроскопическое эффективное сечение поглощения нейтронов (см. данные таблицы в прил. 2).

3.1. Микроскопическое эффективное сечение упругого рассеяния нейтронов

Замедления нейтронов происходит в результате их рассеяния на ядрах среды. Как было показано в разд. 1.4, процесс рассеяния нейтронов включает в себя потенциальное, упругое резонансное и неупругое резонансное рассеяния. Потенциальное и упругое резонансное рассеяния называют *упругим рассеянием*. Сечение рассеяния нейтронов в зависимости от кинетической энергии нейтрона имеет сложную зависимость, но из анализа соответствующих данных можно сделать вывод, что для легких ядер в широком диапазоне энергий идет только процесс потенциального рассеяния, сечение которого не зависит от кинетической энергии нейтрона. Например, из рис. 3.1 видно, что область потенциального рассеяния для ядра углерода простирается от границы тепловой области энергий до около 10^5 эВ.

Резонансная зависимость эффективного микроскопического сечения упругого рассеяния от энергии описывается формулой Брейта – Вигнера [3], которая получается в результате квантово-механического рассмотрения процесса взаимодействия нейтронной волны с потенциалом ядра. В общем случае зависимость эффек-

тивного микроскопического сечения упругого рассеяния от энергии описывается формулой:

$$\sigma_S(E) = g_J \pi \tilde{\lambda}^2 \frac{\Gamma_n^2}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} + 4\pi a^2 + \Delta\sigma(E), \quad (3.1)$$

где g_J – статистический множитель, учитывающий взаимную ориентацию спинов нейтрона и ядра (для рассматриваемого случая равен единице); $\tilde{\lambda}$ – приведенная длина волны нейтрона; Γ_n – нейтронная ширина энергетического уровня ядра с энергией E_r ; Γ – полная ширина энергетического уровня ядра с энергией E_r ; E – кинетическая энергия нейтрона в системе центра масс; E_r – энергия резонансного уровня составного ядра; a – константа, примерно равная радиусу ядра; $\Delta\sigma(E)$ – интерференционный член.

Нейтронная и полная ширины резонансного уровня – параметры энергетического уровня ядра, которые описывают неопределенность в энергии данного резонансного уровня по отношению к процессам упругого резонансного рассеяния и полного взаимодействия нейтрона с ядром соответственно. Согласно принципу неопределенности Гайзенберга ширина Γ_i энергетического уровня ядра для процесса i связана со временем жизни τ_i составного ядра до распада по i -му каналу соотношением: $\tau_i = \hbar/\Gamma_i$, где \hbar – приведенная постоянная Планка. Ширины энергетических уровней для данного ядра приведены в соответствующих справочниках и определяются как ширина резонанса микроскопического сечения соответствующего процесса на его полувысоте.

В формуле (3.1) первый член описывает упругое резонансное рассеяние (формула Брейта – Вигнера). Он отличен от нуля только в области, где кинетическая энергия нейтрона E практически совпадает с энергией резонансного уровня ядра E_r и максимален при $E = E_r$. В этой области зависимость сечения от энергии носит ярко выраженный резонансный характер и имеет вид гауссовой кривой.

Второй член в формуле (3.1) описывает потенциальное рассеяние, не зависит от энергии нейтрона и приблизительно равен площади поперечного сечения ядра. В области энергий, где резонанс-

ное рассеяние отсутствует, сечение упругого рассеяния совпадает с сечением потенциального рассеяния.

Интерференционный член (третье слагаемое в формуле (3.1)) отличен от нуля только в области энергий, где идут одновременно потенциальное и резонансное рассеяния и связан с интерференцией двух нейтронных волн, одна из которых есть результат потенциального рассеяния исходной нейтронной волны, а вторая – представляет собой нейтронную волну, которую испускает ядро в результате процесса упругого резонансного рассеяния. У этих двух волн существует разность фаз, связанная с тем, что процесс потенциального рассеяния идет без задержки во времени, а процесс резонансного рассеяния связан с образованием составного ядра, время жизни которого $10^{-13} - 10^{-17}$ с. Интерференция этих двух волн приводит к тому, что идеальная картина резонанса в сечении (гауссова кривая) искажается. Реальная зависимость микроскопического сечения рассеяния для $^{12}_6\text{C}$ приведена на рис. 3.1. Подробная теория потенциального рассеяния приведена, например, в монографии [3].

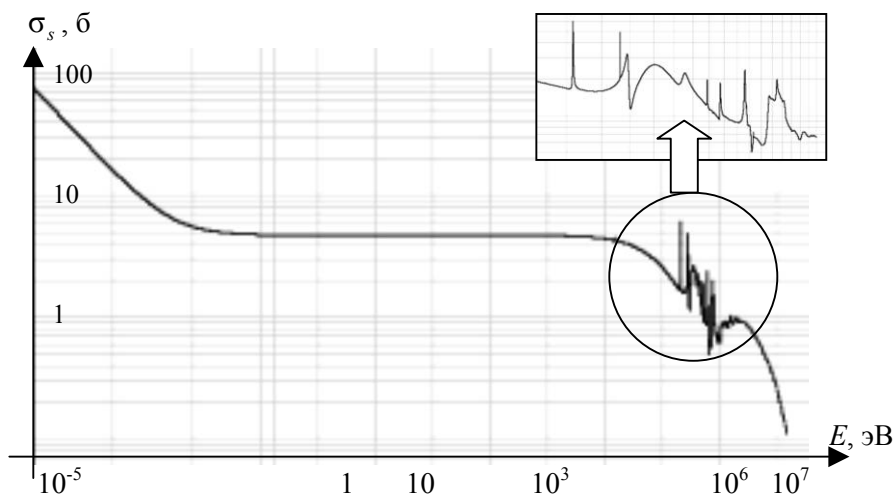


Рис. 3.1. Зависимость микроскопического сечения рассеяния от энергии для $^{12}_6\text{C}$

Поскольку у легких ядер, как правило, первый резонансный уровень лежит в области высоких энергий (энергия первого резонансного уровня E_{r1} составляет не менее сотен килоэлектронвольт), то естественно, что до этой области энергий на легких ядрах идет только процесс упругого потенциального рассеяния (см. рис. 3.1).

До тех пор, пока длина волны нейтрона больше или сравнима с размером ядра, на котором происходит рассеяние, угловое распределение рассеянных нейтронов изотропно в системе центра масс. Поскольку легкие ядра имеют относительно небольшие размеры, и длина волны нейтрона обратно пропорциональна его кинетической энергии, то для легких ядер в широком диапазоне энергий выполняется указанное выше соотношение между длиной волны и размером ядра, а следовательно, рассеяние нейтронов изотропно в системе центра масс. Чем тяжелее ядро, тем оно больше и, следовательно, потенциальное рассеяние становится анизотропным при меньших значениях кинетической энергии нейтрона. Пороговое значение кинетической энергии нейтрона, при которой рассеяние становится анизотропным в системе центра масс (максимальное значение энергии, при котором рассеяние еще изотропно в системе центра масс), оценивается по формуле:

$$E_{\max} = \frac{10 \text{ МэВ}}{A^{2/3}},$$

где A – атомная масса ядра, а.е.м. Исходя из этой формулы, потенциальное рассеяние становится анизотропным при рассеянии на ядре водорода при 10 МэВ, а при рассеянии на ядре углерода – при около 2 МэВ. В качестве примера на рис. 3.2 приведены зависимости эффективного микроскопического сечения потенциального рассеяния нейтронов от косинуса угла рассеяния в системе центра масс для ядра углерода и урана. Видно, что для нейтронов с энергией 14 МэВ потенциальное рассеяние анизотропно на обоих ядрах, в то время как для нейтронов с энергией 0,5 МэВ на ядре меньшего размера (ядро углерода) потенциальное рассеяние изотропно, а на ядре большего размера (ядро урана) – анизотропно.

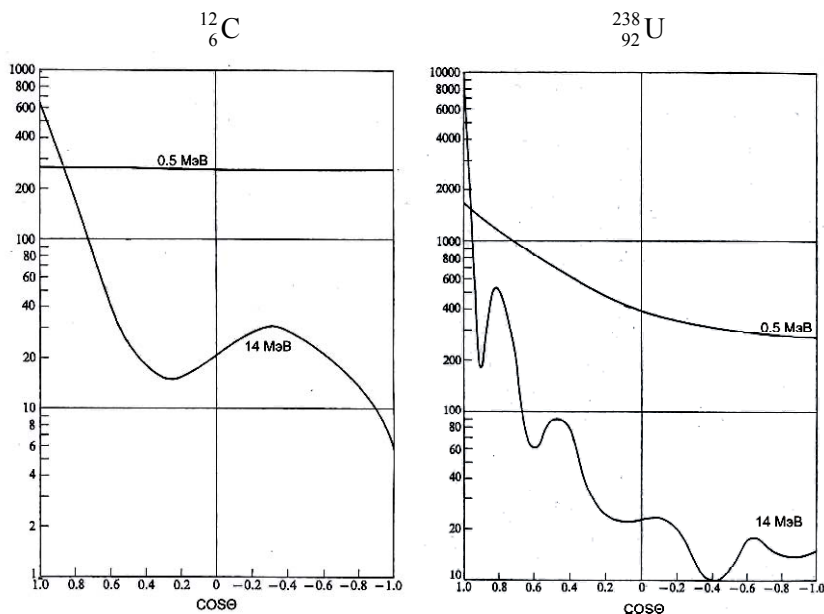


Рис. 3.2. Зависимости эффективного микроскопического сечения потенциального рассеяния нейтронов от косинуса угла рассеяния в системе центра масс

В дальнейшем будем рассматривать процесс замедления нейтронов для области энергий, где замедление идет только за счет упругого потенциального рассеяния, изотропного в системе центра масс. Схематически эта область энергий приведена на рис. 3.3.

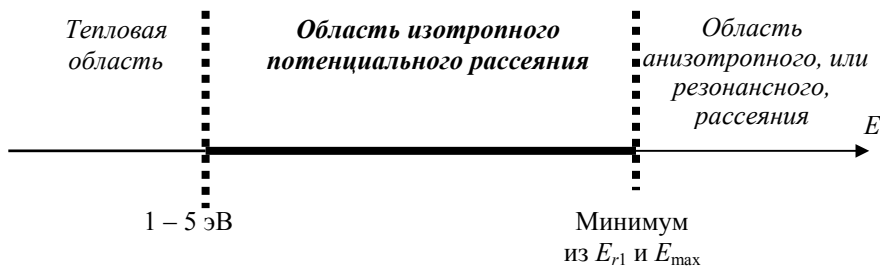


Рис. 3.3. Схема энергетических областей

Для легких ядер область изотропного потенциального рассеяния простирается от границы тепловой области энергий до нескольких сотен килоэлектронвольт. Отметим, что выше рассматриваемой области энергий (область быстрых нейтронов) существенную роль с точки зрения замедления нейтронов будут играть процессы неупругого резонансного рассеяния на тяжелых ядрах, поскольку в результате неупругого рассеяния на тяжелом ядре в этой области энергий возможна большая потеря энергии нейтроном.

Таким образом, в результате рассмотрения процесса рассеяния нейтронов на легких ядрах среды можно сделать два вывода, на которых будет основываться все последующее рассмотрение в данной главе:

- сечение рассеяния нейтронов в области замедления не зависит от энергии нейтрона, поскольку замедление нейтронов идет только за счет процессов упругого потенциального рассеяния на ядрах замедлителя;
- рассеяние нейтронов изотропно в системе центра масс.

3.2. Кинематика замедления

Рассмотрим процесс замедления нейтронов за счет упругого потенциального рассеяния, т.е. столкновений нейтрона с ядром, при котором меняется только скорость нейтрона и ядра, но не квантово-механическое состояние ядра. Будем считать, что:

- нейтроны сталкиваются со свободными ядрами, т.е. ядро не связано в молекуле или кристаллической решетке (это хорошее приближение для рассматриваемой области энергий, такой подход позволяет описывать процесс рассеяния нейтрона на ядре как столкновение двух упругих шаров);
- до рассеяния ядро покоится в лабораторной системе (ЛС), т.е. кинетическая энергия нейтрона на много больше энергии теплового движения ядер среды (это утверждение верно для рассматриваемой области энергий нейтронов и нарушается только в тепловой области).

Задача заключается в нахождении связи энергии нейтрона после рассеяния (E_2) с энергией нейтрона до рассеяния (E_1) и углом рассеяния в системе центра масс.

На рис. 3.4 приведена схема упругого рассеяния нейтрона в ЛС и в системе центра масс (ЦМ).

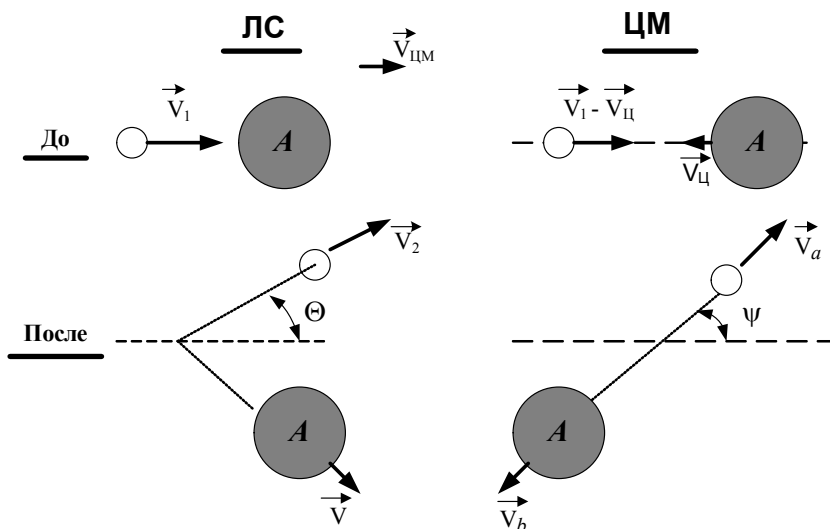


Рис. 3.4. Схема рассеяния нейтрона на ядре:

A – атомная масса ядра, а.е.м.; \vec{V}_1 – скорость нейтрона в ЛС до взаимодействия; \vec{V}_2 – скорость нейтрона в ЛС после взаимодействия; \vec{V} – скорость ядра в ЛС после взаимодействия; Θ – угол рассеяния в ЛС; $\vec{V}_{Ц}$ – скорость системы ЦМ относительно ЛС; \vec{V}_a – скорость нейтрона в системе ЦМ после взаимодействия, $V_a = V_1 - V_{Ц}$; \vec{V}_b – скорость ядра в системе ЦМ после взаимодействия, $V_b = V_{Ц}$; ψ – угол рассеяния в системе ЦМ

При упругом рассеянии в системе ЦМ скорости по величине остаются неизменными, но меняется направление движения нейтрона и ядра. Так как атомная масса нейтрона равна единице, то учитывая, что в системе центра масс суммарный импульс равен нулю, можно записать:

$$V_1 - V_{Ц} = A \cdot V_{Ц},$$

откуда следует:

$$V_{\text{Ц}} = \frac{V_1}{A+1}.$$

Очевидны следующие выражения, определяющие переход от системы ЦМ к ЛС:

$$\begin{aligned}\vec{V}_2 &= \vec{V}_a + \vec{V}_{\text{ЦМ}}, \\ \vec{V}_{\text{ЦМ}} &= -\vec{V}_{\text{Ц}}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Связь скоростей и углов рассеяния в различных системах приведена на диаграмме скоростей (рис. 3.5).

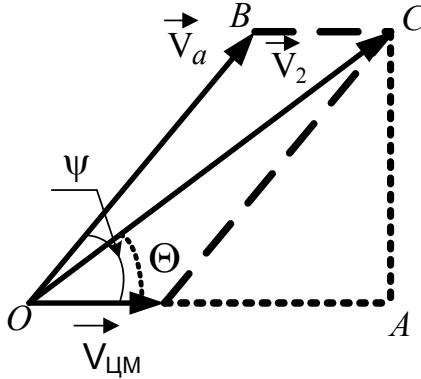


Рис. 3.5. Диаграмма скоростей

Возведем обе части первого выражения (3.2) в квадрат:

$$\begin{aligned}V_2^2 &= (\vec{V}_a + \vec{V}_{\text{ЦМ}})^2, \\ V_2^2 &= V_a^2 + V_{\text{ЦМ}}^2 + 2 \cdot V_a \cdot V_{\text{ЦМ}} \cdot \cos\psi.\end{aligned}$$

Учитывая следующие соотношения

$$V_a = V_1 - V_{Ц} = V_1 - \frac{V_1}{A+1} = V_1 \frac{A}{A+1}; \quad V_{ЦМ} = V_1 \frac{1}{A+1},$$

перепишем последнее выражение в виде

$$V_2^2 = V_1^2 \frac{A^2}{(A+1)^2} + V_1^2 \frac{1}{(A+1)^2} + 2 \cdot V_1^2 \frac{A}{(A+1)^2} \cos \psi. \quad (3.3)$$

Приведенная атомная масса нейтрона равна единице, следовательно, его кинетическая энергия записывается как $E = \frac{V^2}{2}$. Подставим это выражение в (3.3):

$$E_2 = E_1 \frac{A^2}{(A+1)^2} + E_1 \frac{1}{(A+1)^2} + 2 \cdot E_1 \frac{A}{(A+1)^2} \cos \psi.$$

Таким образом, получаем искомую связь энергии нейтрона до (E_1) и после (E_2) рассеяния:

$$\boxed{E_2 = E_1 \frac{A^2 + 2 \cdot A \cos \psi + 1}{(A+1)^2}}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. Если угол рассеяния в системе ЦМ равен нулю ($\psi = 0$), что соответствует случаю отсутствия рассеяния, то $\cos \psi = 1$ и, следовательно, из формулы (3.4):

$$E_2 = E_1 \frac{A^2 + 2A + 1}{(A+1)^2} = E_1.$$

Таким образом, получен очевидный результат: если не было столкновения нейтрона с ядром, то его кинетическая энергия не изменилась.

2. Если угол рассеяния в системе ЦМ равен π ($\psi = \pi$), что соответствует рассеянию нейтрона «прямо назад», то $\cos \psi = -1$, и, следовательно, из формулы (3.4):

$$E_2 = E_1 \frac{A^2 - 2A + 1}{(A + 1)^2} = E_1 \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 \equiv E_1 \alpha,$$

где $\alpha = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2$.

Поскольку второй случай соответствует максимальной потере кинетической энергии нейтрона, то E_2 – минимально возможная энергия нейтрона после рассеяния. Величину α называют *максимальной относительной потерей энергии при одном столкновении нейтрона с ядром*. Отметим, что эта величина определяется только атомной массой ядра, а возможный диапазон изменения α лежит от единицы в случае бесконечно тяжелого ядра до нуля в случае самого легкого ядра (водород – $A = 1$).

Таким образом, энергия нейтрона после упругого столкновения с ядром не может быть любой, а лежит внутри интервала от αE_1 до E_1 :

$$\boxed{\alpha E_1 \leq E_2 \leq E_1 \quad \text{или} \quad E_2 \in [\alpha E_1; E_1].} \quad (3.5)$$

Интервал энергий $[\alpha E_1; E_1]$ называется *ступенькой замедления*. Отметим, что в случае замедления на водороде $A = 1$ и $\alpha = 0$, следовательно, нейтрон может потерять всю свою кинетическую энергию в результате одного столкновения с ядром. Для водорода ступенька замедления имеет вид $[0; E_1]$.

3.3. Законы упругого рассеяния

В разд. 3.2 было показано, что нейтрон с энергией E_1 после рассеяния будет иметь энергию E' в диапазоне $[\alpha E_1; E_1]$, т.е. энергия нейтрона после рассеяния лежит в пределах ступеньки замедления. Найдем распределение энергии рассеянного нейтрона (E') внутри

ступеньки замедления. Это распределение описывается функцией $p(E_1 \rightarrow E')$, которая представляет собой плотность вероятности того, что нейтрон, обладающий до столкновения энергией E_1 , после столкновения будет иметь энергию E' . Тогда функция $p(E_1 \rightarrow E')dE'$ представляет собой вероятность того, что нейтрон, обладающий до столкновения энергией E_1 , после столкновения будет иметь энергию в диапазоне $[E'; E' + dE']$.

Для того чтобы определить функцию $p(E_1 \rightarrow E')$, сначала найдем функцию $W(\psi)$ – плотность вероятности рассеяния нейтрона на угол ψ в системе ЦМ. При этом воспользуемся тем, что в рассматриваемом интервале энергий рассеяние изотропно в системе ЦМ. Схема процесса рассеяния нейтрона на угол ψ в системе ЦМ приведена на рис. 3.6.

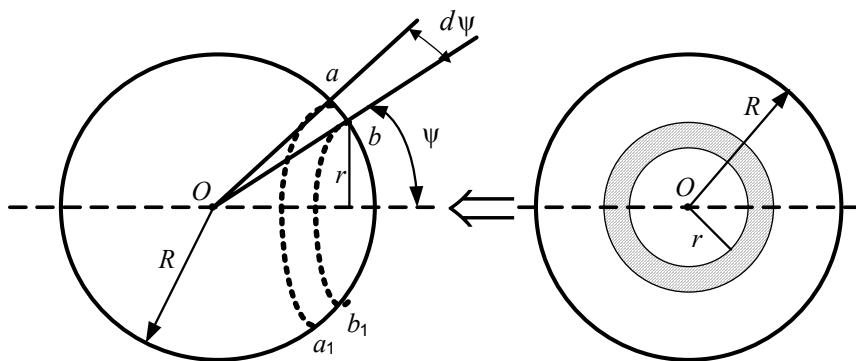


Рис. 3.6. Схема рассеяния нейтрона в системе ЦМ

На рис. 3.6 точкой O обозначена точка рассеяния. Все нейтроны, направление движения которых после рассеяния ограничено кривыми $a-a_1$ и $b-b_1$, рассеялись в $d\psi$ около ψ . Так как рассеяние изотропно в системе ЦМ, то вероятность рассеяния в $d\psi$ около ψ равна $\frac{S^*}{S}$, где S – площадь сферы; S^* – часть площади сферы, ог-

раниченная кривыми $a-a_1$ и $b-b_1$ (заштрихованная область на рис. 3.6). Площадь сферы $S = 4\pi R^2$. Поскольку $d\psi$ – элементарный угловой диапазон, то $S^* = 2\pi \cdot r \cdot |ab| = 2\pi \cdot R \sin \psi \cdot R d\psi = 2\pi R^2 \sin \psi d\psi$, так как $r = R \sin \psi$, а $|ab| = R d\psi$.

Вероятность рассеяться на угол $d\psi$ описывается функцией $W(\psi)d\psi$. Таким образом,

$$W(\psi)d\psi = \frac{S^*}{S} = \frac{2\pi R^2 \sin \psi d\psi}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} \sin \psi d\psi.$$

Из последнего выражения следует, что

$$W(\psi) = \frac{1}{2} \sin \psi. \quad (3.6)$$

Очевидно, что $\int_0^\pi d\psi W(\psi) = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\psi \sin \psi = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, т.е. вероятность рассеяния на любой угол в интервале от 0 до π равна единице.

Из курса теории вероятности известно, что для двух функций $\Im(x)$ и $\Re(y)$ в случае, если переменные x и y однозначно связаны между собой, справедливо следующее выражение:

$$\Im(x)|dx| = \Re(y)|dy(x)|,$$

которое представляет собой равенство соответствующих вероятностей.

В рассматриваемом случае известна функция $W(\psi)$, а надо определить функцию $p(E_1 \rightarrow E')$, в которой переменная E' однозначно связана с переменной ψ выражением (3.4), т.е. в рассматриваемом случае $E' = E'(\psi)$. Используя вышеприведенные соотношения, получаем:

$$\begin{aligned}
 p(E_1 \rightarrow E') |dE'| &= W(\psi) |d\psi|; \\
 p(E_1 \rightarrow E') &= W(\psi) \left| \frac{d\psi}{dE'} \right|.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Первое из приведенных выражений имеет очевидный физический смысл: поскольку энергия нейтрона после рассеяния E' однозначно связана с углом рассеяния в системе ЦМ ψ выражением (3.4), то вероятность рассеяния в энергетический интервал dE' равна вероятности рассеяния в соответствующий угловой интервал $d\psi$.

Найдем $\left| \frac{d\psi}{dE'} \right|$ из (3.4):

$$\cos \psi = \frac{(A+1)^2}{2A} \frac{E'}{E_1} - \frac{A^2+1}{2A}.$$

После дифференцирования правой и левой частей этого уравнения получим:

$$\begin{aligned}
 -\sin \psi d\psi &= \frac{(A+1)^2}{2AE_1} dE'; \\
 \left| \frac{d\psi}{dE'} \right| &= \frac{1}{\sin \psi} \frac{(A+1)^2}{2AE_1}.
 \end{aligned}$$

После подстановки последнего выражения и (3.6) в (3.7) находим, что:

$$p(E_1 \rightarrow E') = \frac{1}{2} \sin \psi \frac{1}{\sin \psi} \frac{(A+1)^2}{2AE_1} = \frac{(A+1)^2}{4A} \frac{1}{E_1}.$$

Учитывая, что $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 = \frac{A^2 - 2A + 1}{(A+1)^2}$, имеем:

$$1 - \alpha = 1 - \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 = \frac{A^2 + 2A + 1 - A^2 + 2A - 1}{(A+1)^2} = \frac{4A}{(A+1)^2}.$$

Окончательно получаем выражение для $p(E_1 \rightarrow E')$:

$$\boxed{p(E_1 \rightarrow E') = \frac{1}{(1 - \alpha)E_1}}. \quad (3.8)$$

Отметим, что последнее выражение не зависит от E' – кинетической энергии нейтрона после рассеяния. Зависимость (3.8) представлена на рис. 3.7. Вероятность того, что после рассеяния нейтрона его энергия будет лежать внутри ступеньки замедления, определяется выражением:

$$Y = \int_{\alpha E_1}^{E_1} dE' p(E_1 \rightarrow E') = \frac{1}{E_1(1 - \alpha)} \cdot E_1(1 - \alpha) = 1.$$

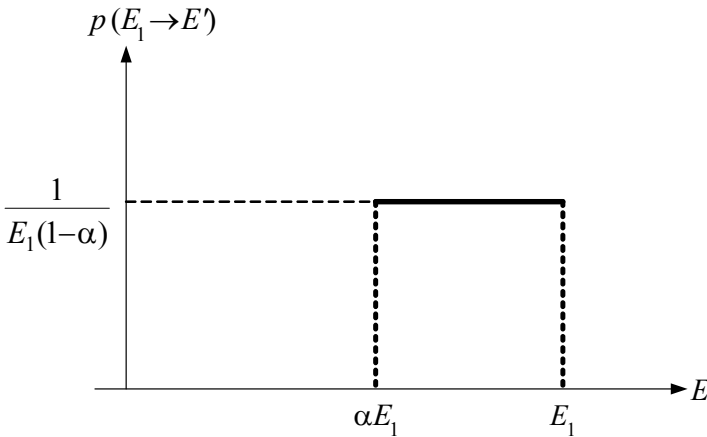


Рис. 3.7. Закон упругого рассеяния (распределение нейтронов по энергии после рассеяния внутри ступеньки замедления)

Таким образом, закон упругого рассеяния гласит, что после рассеяния при энергии E_1 нейтроны равномерно (равновероятно) распределены внутри ступеньки замедления.

Зная $p(E_1 \rightarrow E')$, можно рассчитать любые величины, характеризующие акт рассеяния нейтрона на ядре. Рассмотрим некоторые из этих величин.

1. *Средняя потеря энергии нейтрона на одно столкновение с ядром массой A , т.е.*

$$\overline{\Delta E} = \overline{(E_1 - E')},$$

$$\overline{\Delta E} = \frac{\int_{\alpha E_1}^{E_1} dE' p(E_1 \rightarrow E') \cdot (E_1 - E')}{\int_{\alpha E_1}^{E_1} dE' p(E_1 \rightarrow E')}.$$

Вероятность замедлиться в пределах ступеньки замедления:

$$\int_{\alpha E_1}^{E_1} dE' p(E_1 \rightarrow E') = 1. \text{ Тогда далее получаем:}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta E} &= \int_{\alpha E_1}^{E_1} dE' \frac{(E_1 - E')}{(1 - \alpha)E_1} = \frac{E_1 \cdot E_1(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)E_1} - \int_{\alpha E_1}^{E_1} dE' \cdot E' \cdot \frac{1}{(1 - \alpha)E_1} = \\ &= E_1 - \frac{1}{(1 - \alpha)E_1} \frac{1}{2} (E_1^2 - \alpha^2 E_1^2) = E_1 - \frac{E_1(1 - \alpha)(1 + \alpha)}{2(1 - \alpha)} = E_1 - \frac{E_1(1 + \alpha)}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что средняя энергия после столкновения $\overline{E'} = E_1 \frac{1 + \alpha}{2}$; средняя потеря энергии на одно столкновение $\overline{\Delta E} = E_1 \frac{1 - \alpha}{2}$.

2. *Средний косинус угла рассеяния в ЛС.* В рассматриваемой области энергий рассеяние изотропно в системе ЦМ (т.е. средний косинус угла рассеяния $\cos \psi = 0$). Рассчитаем $\cos \Theta$ – средний косинус угла рассеяния в ЛС.

Прежде всего, найдем связь между $\cos \psi$ и $\cos \Theta$. Из рассмотрения приведенной на рис. 3.4 схемы следуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned}|OA| &= V_{\text{ЦМ}} + V_a \cos \psi, \\ |OA| &= V_2 \cos \Theta.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$V_{\text{ЦМ}} + V_a \cos \psi = V_2 \cos \Theta. \quad (3.9)$$

Используя полученные выше выражения для скоростей $V_{\text{ЦМ}} = V_1 \frac{1}{A+1}$, $V_a = V_1 \frac{A}{A+1}$, $V_2^2 = V_a^2 + V_{\text{ЦМ}}^2 + 2V_a V_{\text{ЦМ}} \cos \psi$, после подстановки их в (3.9) получим:

$$\begin{aligned}& V_1 \frac{1}{A+1} + V_1 \frac{A}{A+1} \cos \psi = \\&= \cos \Theta \sqrt{\left(\frac{A}{A+1} V_1\right)^2 + \left(\frac{V_1}{A+1}\right)^2 + 2V_1^2 \frac{A \cos \psi}{(A+1)^2}}; \\& 1 + A \cos \psi = \cos \Theta \sqrt{A^2 + 1 + 2A \cos \psi}; \\& \cos \Theta = \frac{1 + A \cos \psi}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cos \psi}}.\end{aligned} \quad (3.10)$$

Определим средний косинус угла рассеяния в ЛС, используя полученную связь (3.9): $f(\psi) = \frac{1 + A \cos \psi}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cos \psi}} = \cos \Theta$. Под средним значением функции $f(\psi)$ понимается следующее выражение:

$$\overline{f(\psi)} = \frac{\int_0^\pi d\psi \cdot f(\psi) W(\psi)}{\int_0^\pi d\psi \cdot W(\psi)}, \quad (3.11)$$

где $W(\psi) = \frac{1}{2} \cdot \sin \psi$ и $\int_0^\pi d\psi \cdot W(\psi) = 1$.

$$\begin{aligned}\overline{f(\psi)} &= \overline{\cos \Theta} = \int_0^\pi d\psi \cdot \frac{1 + A \cos \psi}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cos \psi}} \cdot \frac{1}{2} \sin \psi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \cdot \frac{1 + A \cdot x}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cdot x}},\end{aligned}$$

где $x = \cos \psi$.

Используя справочные данные [2]:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{2}{b} \sqrt{z}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{z}} = \left(\frac{1}{3} z - a \right) \frac{2\sqrt{z}}{b^2},$$

где $z = a + bx$, выполним тождественные преобразования последнего выражения, учитывая, что $A > 1$:

$$\begin{aligned}\overline{\cos \Theta} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cdot x}} + \frac{A}{2} \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cdot x}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{2A} \sqrt{1 + A^2 + 2A \cdot x} \Big|_{-1}^1 + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{3} (1 + A^2 + 2A \cdot x) - 1 - A^2 \right) \frac{2\sqrt{1 + A^2 + 2A \cdot x}}{4A^2} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{2A} [1 + A - (A - 1)] + \\ &+ \frac{2 \cdot A}{2 \cdot 4A^2} \left[\left(\frac{1}{3} (1 + A^2 + 2A) - 1 - A^2 \right) \cdot (1 + A) - \left(\frac{1}{3} (1 + A^2 - 2A) - 1 - A^2 \right) \cdot (A - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{A} + \frac{1}{4A} \left[\left(\frac{2}{3} A - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} A^2 \right) \cdot (1 + A) - \left(-\frac{2}{3} A - \frac{2}{3} A^2 - \frac{2}{3} \right) \cdot (A - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{A} + \frac{1}{4A} \left[\frac{2}{3} A - \frac{2}{3} - \frac{2}{2} A^2 + \frac{2}{3} A^2 - \frac{2}{3} A - \frac{2}{3} A^3 + \frac{2}{3} A^2 + \frac{2}{3} A^3 - \frac{2}{3} A - \frac{2}{3} A^2 - \frac{2}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{A} - \frac{1}{4A} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{A} - \frac{1}{3A} = \frac{2}{3A}.\end{aligned}$$

Таким образом, даже если рассеяние изотропно в системе центра масс ($\overline{\cos \psi} = 0$), то в лабораторной системе оно анизотропно, и при этом

$$\boxed{\overline{\cos \Theta} = \frac{2}{3A}}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим два предельных случая:

- $A = 1$ (водород), тогда $\overline{\cos \Theta} = \frac{2}{3}$;
- $A \rightarrow \infty$, тогда $\overline{\cos \Theta} \rightarrow 0$ (уже для ядер с массой большей 10 рассеяние практически изотропно в ЛС).

Таким образом, показано, что требование изотропии рассеяния в ЛС эквивалентно тому, что среда состоит из тяжелых ядер.

3. *Среднелогарифмическая потеря энергии при столкновении нейтрона с ядром:*

$$\xi \equiv \overline{\ln E_1 - \ln E'} = \ln \frac{E_1}{E'}, \quad (3.13)$$

где E_1 – кинетическая энергия нейтрона до столкновения с ядром;
 E' – кинетическая энергия нейтрона после столкновения с ядром.

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{\alpha E_1}^{E_1} dE' \cdot \ln \frac{E_1}{E'} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)E_1} = \frac{1}{(1-\alpha)E_1} \int_{\alpha E_1}^{E_1} dE' \cdot \ln \frac{E_1}{E'} = \\ &= \ln E_1 - \frac{1}{(1-\alpha)E_1} (E' \cdot \ln E' - E') \Big|_{\alpha E_1}^{E_1} = \\ &= \ln E_1 - \frac{1}{(1-\alpha)E_1} [E_1 \ln E_1 - E_1 - \alpha E_1 \ln(\alpha E_1) + \alpha E_1] = \\ &= \ln E_1 - \frac{1}{(1-\alpha)E_1} [E_1 \ln E_1 - E_1 - \alpha E_1 \ln \alpha - \alpha E_1 \ln E_1 + \alpha E_1] = \\ &= \ln E_1 - \frac{\ln E_1 - 1 - \alpha \ln \alpha - \alpha \ln E_1 + \alpha}{1-\alpha} = \\ &= \frac{\ln E_1 - \alpha \ln E_1 - \ln E_1 + 1 + \alpha \ln \alpha + \alpha \ln E_1 - \alpha}{1-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, среднелогарифмическая потеря энергии на одно столкновение нейтрона с ядром не зависит от энергии нейтрона, при которой произошло это столкновение:

$$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \alpha. \quad (3.14)$$

В табл. 3.1 приведены значения величин α и ξ для различных изотопов.

Таблица 3.1

Значения величин α и ξ для различных изотопов

Изотоп	${}^1_1\text{H}$	${}^2_1\text{D}$	${}^9_4\text{Be}$	${}^{12}_6\text{C}$	${}^{16}_8\text{O}$	${}^{238}_{92}\text{U}$	$A \rightarrow \infty$
α	0	0,111	0,640	0,716	0,779	0,983	1
ξ	1	0,725	0,352	0,159	0,12	0,00838	0

Чем больше ξ , тем при прочих равных условиях эффективнее замедлитель.

3.4. Летаргия

В разд. 3.3 было показано, что средняя потеря энергии на одно столкновение нейтрона с ядром $\overline{\Delta E} = E_1 \frac{1 - \alpha}{2}$ и зависит от E_1 – энергии нейтрона, при которой произошло столкновение. В то же время среднелогарифмическая потеря энергии на одно столкновение нейтрона с ядром $\xi = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \alpha$ не зависит от E_1 .

Поэтому в ряде случаев удобно использовать не переменную энергии – E , а переменную летаргии – u , где летаргия однозначно связана с энергией следующим соотношением:

$$u = \ln \frac{E_{\text{ист}}}{E}. \quad (3.15)$$

Здесь $E_{\text{ист}}$ – максимально возможная энергия нейтрона (энергия источника), а E – текущее значение энергии, которой соответствует летаргия u . Летаргия – величина безразмерная. Летаргия нейтронов, энергия которых равна $E_{\text{ист}}$, равна нулю, а в процессе замедления с уменьшением энергии нейтрона летаргия возрастает. Рассчитаем средний прирост летаргии на одно столкновение нейтрона ядром:

$$|\overline{\Delta u}| = \left| \ln \frac{E_{\text{ист}}}{E_1} - \ln \frac{E_{\text{ист}}}{E'} \right| = |\ln E' - \ln E_1| = \overline{\ln E_1 - \ln E'} = \xi, \text{ так как } E' < E_1.$$

Получаем, что средний прирост летаргии за одно столкновение равен среднелогарифмической потере энергии на одно столкновение ξ , не зависит от энергии нейтрона, при которой произошло столкновение с ядром, и определяется только массой ядра замедлителя. Максимально возможная потеря энергии на одно столкновение (ширина ступеньки замедления) равна $\Delta E_{\text{max}} = E_1 - \alpha E_1 = E_1(1 - \alpha)$ и зависит от E_1 , а максимально возможный прирост летаргии на одно столкновение $\Delta u_{\text{max}} = \ln \frac{E_{\text{ист}}}{\alpha E_1} - \ln \frac{E_{\text{ист}}}{E_1} = \ln \frac{1}{\alpha}$ не зависит от E_1 и определяется только массой ядра замедлителя.

Таким образом, если процесс замедления описывать в переменных энергии, то он носит неравномерный характер, т.е. с уменьшением энергии нейтрона уменьшается как средняя потеря энергии на одно столкновение нейтрона с ядром, так и ширина ступеньки замедления. Если же процесс замедления описывать в переменных летаргии, то он носит равномерный характер в том смысле, что средний прирост летаргии на одно столкновение нейтрона с ядром и ширина ступеньки замедления являются величинами постоянными, не зависят от текущего значения летаргии нейтрона и определяются только массой ядра замедлителя. Это отличие в описании процесса замедления отражено на рис. 3.8.

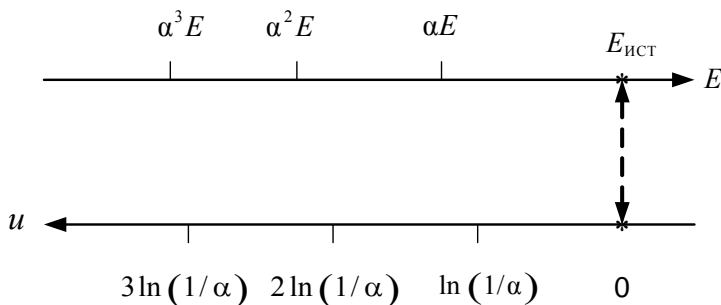


Рис. 3.8. Схема замедления нейтрона в переменных энергии и терминах летаргии

Описывая процесс замедления в переменных летаргии, легко рассчитать среднее число столкновений нейтронов с ядрами среды N , необходимое для замедления от энергии E_1 до E_2 :

$$N = \frac{u_2 - u_1}{\xi} = \frac{\ln \frac{E_{\text{ист}}}{E_2} - \ln \frac{E_{\text{ист}}}{E_1}}{\xi} = \frac{\ln \frac{E_1}{E_2}}{\xi}.$$

В табл. 3.2 приведены значения величины N для различных сред при замедлении от энергии в 1 МэВ до 1 эВ. Необходимо помнить, что приведенные величины носят среднестатистический характер, т.е. представляют собой результат усреднения для большого числа нейтронов.

Таблица 3.2

Среднее число столкновений нейтрона с ядрами среды при замедлении от 1 МэВ до 1 эВ

Среда	^1_1H	^2_1D	^9_4Be	$^{12}_6\text{C}$	$^{16}_8\text{O}$	$^{238}_{92}\text{U}$
N	13,8	19,1	39,2	86,8	115	1647

Рассмотрим, как будет выглядеть закон рассеяния в переменных летаргии, т.е. получим функцию $W(u \rightarrow u')$ – плотность вероятности того, что нейтрон имел до столкновения с ядром летаргию u , а

после столкновения его летаргия стала u' . Для этого воспользуемся для плотностей вероятностей выражением, которое было использовано в разд. 3.3. Поскольку энергия и летаргия однозначно связаны между собой, будет выполняться следующее равенство:

$$W(u \rightarrow u') = p(E \rightarrow E') \left| \frac{dE'}{du'} \right|. \quad (3.16)$$

Из выражения (3.16) рассчитаем $\left| \frac{dE}{du} \right|$ и выразим энергию через летаргию:

$$u = \ln \frac{E_{\text{ист}}}{E} = \ln E_{\text{ист}} - \ln E, \text{ следовательно, } du = -\frac{dE}{E} \text{ и } \left| \frac{dE}{du} \right| = E.$$

$$u = \ln \frac{E_{\text{ист}}}{E}, \text{ откуда } e^u = \frac{E_{\text{ист}}}{E} \text{ и } E = E_{\text{ист}} \cdot e^{-u}, \quad E' = E_{\text{ист}} \cdot e^{-u'}.$$

$$\text{Окончательно имеем: } \left| \frac{dE'}{du'} \right| = E_{\text{ист}} \cdot e^{-u'}.$$

Подставим это выражение в (3.16) и перейдем от энергии к летаргии. Получим:

$$W(u \rightarrow u') = \frac{1}{(1-\alpha)E} \left| \frac{dE}{du} \right| = \frac{E_{\text{ист}} e^{-u'}}{(1-\alpha)E_{\text{ист}} e^{-u}} = \frac{e^{-(u'-u)}}{1-\alpha}. \quad (3.17)$$

Таким образом, распределение нейтронов внутри ступеньки замедления в переменных летаргии носит экспоненциальный характер.

Рассмотрим как спектр нейтронов, записанный в энергетической переменной $\Phi(E)$, можно записать в переменных летаргии. $\Phi(E)dE$ – среднестатистическое число нейтронов, энергия которых лежит в интервале энергии dE около E , и которые пересекают в направлении нормали единичные площадки, всевозможными способами ориентированные в пространстве. Наряду с функцией $\Phi(E)$ рассмотрим функцию $\Psi(u)$ – тот же самый спектр нейтронов, но записанный в переменных летаргии. Так как $du < 0$, то

$\{ -\Psi(u)du \}$ – число нейтронов, летаргия которых лежит в интервале летаргии du около u , и которые пересекают в направлении нормали единичные площадки, всевозможными способами ориентированные в пространстве. Очевидно, что если dE и du – взаимосогласованные интервалы, то и количество нейтронов, пересекающих в направлении нормали единичные площадки, всевозможными способами ориентированные в пространстве, должно быть одним и тем же, т.е. выполняется равенство:

$$\Phi(E)dE = -\Psi(u)du,$$

которое с учетом того, что $\left| \frac{dE}{du} \right| = E$, переписывается в виде

$$\boxed{\Psi(u) = \Phi(E) \cdot E.} \quad (3.18)$$

Таким образом, для того, чтобы функцию плотности потока, записанную в терминах энергии, переписать в терминах летаргии, необходимо сначала умножить ее на энергию, а затем переписать через переменную «летаргия».

3.5. Уравнение замедления нейтронов в бесконечной неразмножающей гомогенной среде

Процесс замедления – вероятностный, в том смысле, что каждый отдельный нейтрон испытывает различное число столкновений с ядрами среды в процессе замедления от энергии источника до данного значения энергии. Нейтронное поле описывается средними величинами, поэтому рассмотрим процесс замедления, усредненный по большому количеству столкновений нейтронов с ядрами среды. Рассмотрим бесконечную неразмножающую гомогенную среду, в которой равномерно распределены изотропные стационарные источники нейтронов мощностью q , которые испускают нейтроны с энергией E_0 .

Рассмотрим фазовый объем, который в данном случае представляет собой интервал энергий dE около энергии E , и баланс ней-

тронов в фазовом объеме. Для этого определим всевозможные процессы, приводящие к изменению числа нейтронов в фазовом объеме dE :

$P_S(E)$ – скорость исчезновения нейтронов за счет упругого рассеяния;

$A(E)$ – скорость исчезновения нейтронов за счет процессов поглощения;

$R_S(E)$ – скорость появления нейтронов за счет рассеяния нейтронов с более высокими энергиями;

$Q(E)$ – скорость появления нейтронов за счет генерации внешними источниками.

Учитывая вышесказанное, уравнение баланса нейтронов в фазовом объеме имеет вид

$$-P_S(E) - A(E) + R_S(E) + Q(E) = 0. \quad (3.19)$$

Рассмотрим $P_S(E)$ – число нейтронов, которые за счет рассеяния на ядрах среды покидают dE в единицу времени. Так как dE – элементарный интервал энергий, т.е. величина dE много меньше ступеньки замедления, поэтому все нейтроны, испытавшие столкновение в dE , покинут его, так как вероятность попасть в интервал dE после рассеяния при энергии E определяется выражением $\frac{dE}{(1-\alpha)E} \ll 1$. Число нейтронов, испытывающих рассеяние в интервале dE в единицу времени, определяется выражением:

$$P_S(E) = \Sigma_s(E) \Phi(E) dE. \quad (3.20)$$

Скорость исчезновения нейтронов из интервала dE за счет процессов поглощения находится как

$$A(E) = \Sigma_a(E) \Phi(E) dE. \quad (3.21)$$

Скорость появления нейтронов в интервале dE за счет генерации внешними источниками определяется выражением:

$$Q(E) = q\delta(E - E_0)dE. \quad (3.22)$$

Рассчитаем величину $R_S(E)$ – скорость появления нейтронов в интервале dE за счет их рассеяния при более высоких энергиях. В интервал dE нейтрон может попасть только при рассеянии из интервала $\left[E, \frac{E}{\alpha}\right]$ (ступенька замедления вверх от E), или $[E, E_0]$, если $E_0 < \frac{E}{\alpha}$ (рис. 3.9). Выберем произвольный интервал dE' в пределах рассматриваемого интервала.

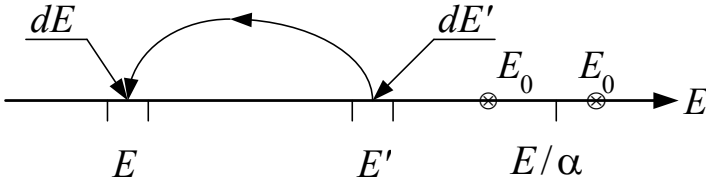


Рис. 3.9. Схема расположения энергетических интервалов для расчета $R_S(E)$

Количество нейтронов, которые рассеялись в интервале dE' в единицу времени, определяется выражением: $\Sigma_s(E')\Phi(E')dE'$. Вероятность нейтрону попасть в интервал dE после рассеяния при энергии E' можно рассчитать как $\frac{dE}{(1-\alpha)E'}$. Тогда число нейтронов, которые в единицу времени рассеялись в интервале dE' и их энергия после рассеяния принадлежит интервалу dE , рассчитывается как

$$\Sigma_s(E')\Phi(E')dE' \cdot \frac{dE}{(1-\alpha)E'}.$$

Для определения $R_s(E)$ необходимо данное выражение проинтегрировать по dE' от E до минимальной из двух возможных величин: E_0 , если $E_0 < \frac{E}{\alpha}$ или $\frac{E}{\alpha}$, в противоположном случае:

$$R_s(E) = \int_E^{\min\left(E_0, \frac{E}{\alpha}\right)} dE' \cdot \frac{\Phi(E') \cdot \Sigma_s(E')}{(1-\alpha)E'} \cdot dE. \quad (3.23)$$

Подставив полученные выражения (3.20), (3.21), (3.22) и (3.23) в уравнение баланса (3.19) и сократив на dE , получим искомое уравнение замедления, которое по существу представляет собой уравнение баланса нейтронов в единичном фазовом объеме:

$$-\Sigma_s(E)\Phi(E) - \Sigma_a(E)\Phi(E) + \int_E^{\min\left(E_0, \frac{E}{\alpha}\right)} dE' \cdot \frac{\Phi_s(E') \cdot \Sigma_s(E')}{(1-\alpha)E'} + q\delta(E - E_0) = 0.$$

(3.24)

Введем следующие тождественные обозначения:

$$F_s(E) = \Sigma_s(E)\Phi(E) - \quad (3.25)$$

плотность рассеяния, т.е. скорость рассеяния нейтронов в единичном фазовом объеме, и

$$F(E) = \Sigma_{tot}(E)\Phi(E) - \quad (3.26)$$

плотность взаимодействий (столкновений), т.е. скорость столкновений нейтронов с ядрами среды в единичном фазовом объеме.

В этом случае уравнение замедления (3.24) можно переписать в виде

$$F(E) = \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{\min\left(E_0, \frac{E}{\alpha}\right)} dE' \cdot \frac{F_S(E')}{E'} + q\delta(E - E_0). \quad (3.27)$$

Отметим, что в случае замедления на водороде ($\alpha = 0$) всегда выполняется условие $E_0 < \frac{E}{\alpha}$, и уравнение замедления (3.27) принимает вид

$$F(E) = \int_E^{E_0} dE' \cdot \frac{F_S(E')}{E'} + q\delta(E - E_0). \quad (3.28)$$

3.6. Плотность замедления нейтронов

Рассмотрим функцию, которая описывает количество нейтронов в единичном пространственном объеме, энергия которых в процессе замедления в единицу времени меняется от значения большего E до значения меньшего E . Эта функция называется *плотностью замедления* и обозначается как $j(E)$.

Получим выражение для плотности замедления, исходя из ее определения. Рассмотрим единичный пространственный объем и энергию E . Пересечь это значение энергии в процессе замедления могут нейтроны, которые рассеялись при энергиях выше чем E . Выберем интервал dE' в области энергий выше чем E (рис. 3.10). Число нейтронов, рассеявшихся в единицу времени в интервале dE' , определяется выражением $\Sigma_S(E')\Phi(E')dE'$. Из всех этих нейтронов пересекут значение энергии E в процессе замедления только те нейтроны, энергия которых после рассеяния лежит ниже чем E , т.е. в интервале $[\alpha E', E]$. Вероятность того, что энергия нейтрона, который до рассеяния имел энергию E' , после рассеяния окажется в интервале $[\alpha E', E]$, рассчитывается как $\frac{E - \alpha E'}{(1 - \alpha)E'}$. Таким образом, из полного числа нейтронов, рассеявшихся в интервале dE' , пересекут энергию E в процессе замедления только

$\Sigma_s(E')\Phi(E')dE' \cdot \frac{E - \alpha E'}{(1 - \alpha)E'}$ нейтронов. Для расчета $j(E)$ необходимо данное выражение проинтегрировать по dE' от E до минимальной из двух возможных величин: E_0 , если $E_0 < \frac{E}{\alpha}$, или $\frac{E}{\alpha}$ – в противоположном случае:

$$j(E) = \int_E^{\min\left[E_0, \frac{E}{\alpha}\right]} dE' \cdot F_s(E') \frac{E - \alpha E'}{(1 - \alpha)E'}. \quad (3.29)$$

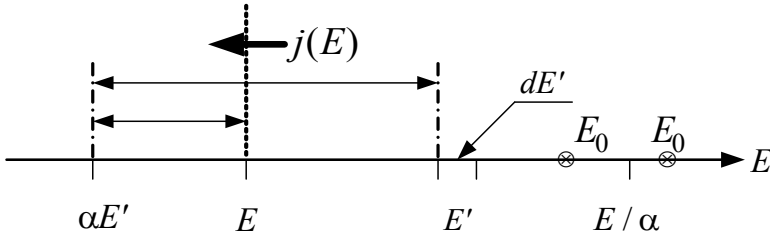


Рис. 3.10. Схема энергетических интервалов для определения плотности замедления

В случае если замедление происходит на водороде ($\alpha = 0$), всегда выполняется условие $E_0 < \frac{E}{\alpha}$ и формула (3.29) принимает вид

$$j(E) = \int_E^{E_0} dE' \cdot F_s(E') \frac{E}{E'}. \quad (3.30)$$

Рассмотрим *бесконечную* неразмножающуюся гомогенную и *непоглощающую* среду ($\Sigma_a = 0$) с равномерно распределенным монохроматическим нейтронным источником мощностью q . Тогда в случае стационарной задачи любое значение E «пересекают» q

нейтронов в секунду, поскольку уменьшение числа нейтронов является следствием или пространственной утечки, или поглощения нейтронов, которые при рассматриваемой постановке задачи отсутствуют. Таким образом, в бесконечной однородной непоглощающей среде плотность замедления постоянна и равна мощности внешнего монохроматического источника нейтронов.

3.7. Замедление нейтронов в непоглощающей среде на водороде

Рассмотрим бесконечную неразмножающую однородную и непоглощающую среду из водорода с равномерно распределенным объемным монохроматическим (E_0) источником нейтронов мощностью q . Найдем спектр нейтронов $\Phi(E)$ в такой среде. Так как рассматривается замедление на водороде, то $A = 1$ и $\alpha = 0$. В случае непоглощающей среды ($\Sigma_a = 0$) уравнение замедления на водороде (3.28) принимает вид

$$-F_S(E) + \int_E^{E_0} F_S(E') \frac{dE'}{E'} + q\delta(E - E_0) = 0, \quad (3.31)$$

где $F_S(E) = \Sigma_S(E)\Phi(E)$.

Будем решать уравнение (3.31) относительно плотности рассеяния $F_S(E)$. Уравнение (3.31) имеет особенность при $E = E_0$, поэтому решение $F_S(E)$ будем искать в виде

$$F_S(E) = \mathfrak{Z}(E) + q\delta(E - E_0), \quad (3.32)$$

где функция $\mathfrak{Z}(E)$ представляет собой плотность рассеяния нейтронов, которые до этого испытали хотя бы одно столкновение с ядрами среды («рассеянные» нейтроны), а второй член описывает плотность рассеяния нейтронов источника («нерассеянных» нейтронов). Другими словами, второй член в уравнении (3.32) – плотность первых рассеяний.

Отметим, что при любых значениях энергий нейтронов, не равных энергии источника (E_0), формула (3.31) имеет вид

$$F_s(E) = \Im(E).$$

После подстановки (3.32) в (3.31) получим:

$$-\Im(E) - q\delta(E - E_0) + \int_E^{E_0} dE' \frac{\Im(E') + q\delta(E' - E_0)}{E'} + q\delta(E - E_0) = 0,$$

или

$$-\Im(E) + \int_E^{E_0} dE' \frac{\Im(E')}{E'} + \frac{q}{E_0} = 0. \quad (3.33)$$

Уравнение (3.33) аналогично уравнению (3.31), только вместо слагаемого $q\delta(E - E_0)$, описывающего, как было отмечено, плотность рассеяния нейтронов источника, присутствует слагаемое $\frac{q}{E_0}$, ко-

торое описывает распределение по энергии нейтронов после первого рассеяния или плотность вторых рассеяний. Действительно, после первого рассеяния на ядре водорода при энергии E_0 согласно закону рассеяния нейтроны будут равномерно распределены внутри ступеньки замедления на водороде ($1/E_0$). Если мощность монохроматического источника равна q , то после первых рассеяний будет сформирован распределенный в пределах ступеньки замедления на водороде (от 0 до E_0) источник мощностью q/E_0 . Естественно, что в случае бесконечной непоглощающей среды полное число нейтронов источника сохраняется.

Продифференцируем (3.33) по E , воспользовавшись правилом дифференцирования интегралов с переменной дифференцирования, стоящей на нижнем пределе:

$$\begin{aligned} -d\Im(E) - \frac{\Im(E)dE}{E} &= 0; \\ -\frac{d\Im(E)}{\Im(E)} &= \frac{dE}{E}. \end{aligned}$$

Решением последнего дифференциального уравнения является функция:

$$\mathfrak{I}(E) = \frac{C}{E}, \quad (3.34)$$

где C – произвольная константа.

Для нахождения константы рассмотрим уравнение (3.33), которое справедливо для любых значений $E \in [0, E_0]$, в точке $E = E_0$. В этой точке интегральное уравнение (3.33) принимает вид

$$\mathfrak{I}(E_0) = \frac{q}{E_0}. \text{ С другой стороны, из (3.34) следует, что при } E = E_0$$

$$\mathfrak{I}(E_0) = \frac{C}{E_0}. \text{ Из сравнения двух последних выражений следует, что}$$

$C = q$. Тогда

$$\mathfrak{I}(E) = \frac{q}{E}$$

и

$$\boxed{\Phi(E) = \frac{q}{\Sigma_s(E) \cdot E}}, \quad (3.35)$$

где $\Phi(E)$ – спектр рассеянных нейтронов, т.е. нейтронов, которые испытали хотя бы одно рассеяние на ядрах среды.

Спектр, описываемый формулой (3.35), называется *спектром Ферми*, и имеет физический смысл плотности потока рассеянных нейтронов. Перепишем спектр Ферми в переменных лётаргии:

$$\mathfrak{I}(u) = \mathfrak{I}(E) \cdot E = q = \text{const},$$

или

$$\Phi(u) = \Phi(E) \cdot E = \frac{q}{\Sigma_s(u)}.$$

Таким образом, отличительной особенностью спектра Ферми является тот факт, что плотность рассеяния рассеянных нейтронов, записанная в терминах летаргии, – величина постоянная.

Определим плотность замедления для данной задачи, воспользовавшись выражениями (3.30) и (3.32):

$$\begin{aligned} j(E) &= \int_E^{E_0} F_S(E') \frac{E}{E'} dE' = E \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \left[\frac{q}{E'} + q\delta(E' - E_0) \right] = \\ &= qE \left[-\frac{1}{E'} \right]_E^{E_0} + E \frac{q}{E_0} = qE \left[-\frac{1}{E'} \right]_E^{E_0} + E \frac{q}{E_0} = q. \end{aligned}$$

Получили ожидаемый результат: плотность замедления в бесконечной непоглощающей среде постоянна и равна мощности внешних источников.

3.8. Замедление нейтронов в непоглощающей среде на ядрах с атомной массой больше единицы

Рассмотрим задачу о нахождении спектра нейтронов $\Phi(E)$ в бесконечной неразмножающей гомогенной и непоглощающей среде, состоящей из ядер с атомной массой, большей единицы ($A > 1$), в которой равномерно распределен объемный источник нейтронов мощностью q , испускающий нейтроны с энергией E_0 .

Для того чтобы понять физическую картину замедления нейтронов, рассмотрим нейтроны, испытавшие разное число столкновений (рассеяний) с ядрами среды. Поскольку все нейтроны появляются с энергией E_0 , плотность первых столкновений (или плотность столкновений нейтронов источника) описывается выражением:

$$\Psi_0(E) = q \cdot \delta(E - E_0) \quad (3.36)$$

Свое первое рассеяние нейтрон всегда испытывает при энергии E_0 , поэтому функция, определяемая выражением (3.36), отлична от нуля только в точке E_0 . После первого рассеяния нейтроны распреде-

лены по закону $p(E_0 \rightarrow E) = \frac{1}{(1-\alpha)E_0}$ в пределах ступеньки замедления $E \in [\alpha E_0, E_0]$. Поэтому плотность вторых столкновений (или плотность столкновений однократно рассеянных нейтронов) описывается формулой:

$$\Psi_1(E) = \frac{q}{(1-\alpha)E_0}. \quad (3.37)$$

Функция $\Psi_1(E)$ определена в пределах первой ступеньки замедления, т.е. в интервале $E \in [\alpha E_0, E_0]$.

Найдем $\Psi_2(E)$ – плотность третьих столкновений (или плотность столкновений нейтронов, испытавших два рассеяния). Так как источником для функции $\Psi_2(E)$ служит функция $\Psi_1(E)$, которая определена в первой ступеньки замедления $E \in [\alpha E_0, E_0]$, то функция $\Psi_2(E)$ будет отлична от нуля в двух первых ступеньках замедления, т.е. в интервале $E \in [\alpha^2 E_0, E_0]$ и ее вид будет зависеть от наличия или отсутствия источника, а следовательно, от ступеньки замедления. Поэтому для расчета $\Psi_2(E)$ надо рассмотреть первую и вторую ступеньки замедления отдельно.

1. *Первая ступенька замедления, $E \in [\alpha E_0, E_0]$.* Рассмотрим схему, приведенную на рис. 3.11, т.е. энергию E и интервал dE в пределах первой ступеньки замедления. $\Psi_2(E)dE$ – число нейтронов, энергия которых после второго столкновения лежит в интервале dE . Рассмотрим энергию E' , большую чем E , и соответствующий интервал энергий dE' . Тогда величина $\Psi_1(E')dE'$ представляет собой число нейтронов, энергия которых после первого столкновения лежит в интервале dE' , т.е. число нейтронов, которые испытают второе столкновение в этом энергетическом интервале.

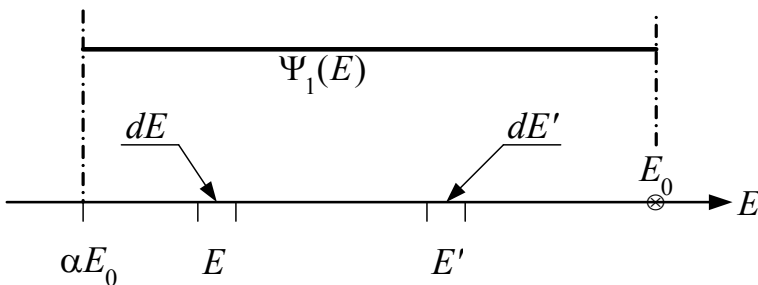


Рис. 3.11. Схема для определения $\Psi_2(E)$ в пределах первой ступеньки замедления

После столкновения эти нейтроны будут распределены по энергии согласно закону рассеяния $p(E' \rightarrow E) = \frac{1}{(1-\alpha)E'}$, а, следовательно, вероятность того, что энергия нейтрона после рассеяния будет лежать в интервале dE , определяется выражением $\frac{dE}{(1-\alpha)E'}$. Чтобы найти функцию $\Psi_2(E)dE$, необходимо выражение $\Psi_1(E')dE' \cdot \frac{dE}{(1-\alpha)E'}$ проинтегрировать по всем возможным значениям E' , т.е. по интервалу от E до E_0 :

$$\begin{aligned} \Psi_2(E)dE &= \frac{dE}{(1-\alpha)} \int_E^{E_0} dE' \Psi_1(E') \frac{1}{E'} = \frac{dE}{(1-\alpha)} \int_E^{E_0} dE' \frac{q}{(1-\alpha)E_0 E'} = \\ &= dE \frac{q}{(1-\alpha)^2} \ln \left(\frac{E_0}{E} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Psi_2(E) = \frac{q}{(1-\alpha)^2 E_0} \ln \frac{E_0}{E}, \quad E \in [\alpha E_0, E_0]. \quad (3.38)$$

2. Вторая ступенька замедления, $E \in [\alpha^2 E_0, \alpha E_0]$. Рассмотрим схему, приведенную на рис. 3.12. В этом случае энергия E и интер-

вал dE лежат уже в пределах второй ступеньки замедления. $\Psi_2(E)dE$ – число нейтронов, столкнувшихся второй раз выше E и попавших в интервал $E \in [\alpha^2 E_0, \alpha E_0]$. Отметим, что, так как источником нейтронов для функции $\Psi_2(E)$ служит функция $\Psi_1(E)$, которая отлична от нуля только в пределах первой ступеньки замедления, то второе столкновение нейтронов с ядрами среды возможно только при энергии нейтрона, принадлежащей интервалу $\left[\alpha E_0, \frac{E}{\alpha} \right]$.

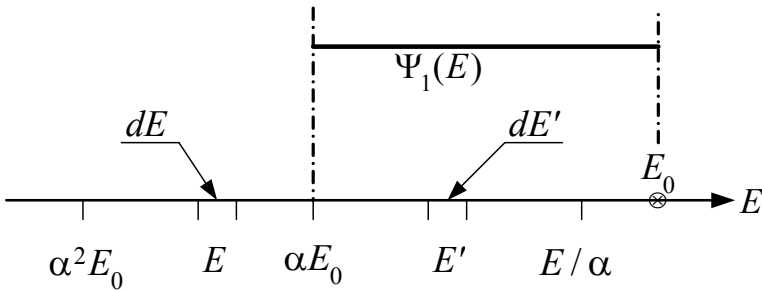


Рис. 3.12. Схема для расчета $\Psi_2(E)$ в пределах второй ступеньки замедления

Рассмотрим энергию E' , большую чем αE_0 , и соответствующий интервал энергий dE' . $\Psi_1(E')dE'$ – число нейтронов, столкнувшихся второй раз, имея энергию в интервале dE' .

После столкновения эти нейтроны будут распределены по энергии согласно закону рассеяния $p(E' \rightarrow E) = \frac{1}{(1-\alpha)E'}$, а, следовательно, вероятность того, что энергия нейтрона после рассеяния будет лежать в интервале dE , определяется выражением $\frac{dE}{(1-\alpha)E'}$.

Чтобы найти функцию $\Psi_2(E)dE$, необходимо выражение $\Psi_1(E')dE' \cdot \frac{dE}{(1-\alpha)E'}$ проинтегрировать по всем возможным значениям E' , т.е. по интервалу от αE_0 до E/α :

$$\begin{aligned}\Psi_2(E)dE &= dE \int_{\alpha E_0}^{\frac{E}{\alpha}} dE' \frac{\Psi_1(E')}{(1-\alpha)E'} = dE \int_{\alpha E_0}^{\frac{E}{\alpha}} dE' \frac{q}{(1-\alpha)^2 E'E_0} = \\ &= dE \frac{q}{(1-\alpha)^2 E_0} \ln \frac{E}{\alpha^2 E_0}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Psi_2(E) = \frac{q}{(1-\alpha)^2 E_0} \ln \frac{E}{\alpha^2 E_0}, \quad E \in [\alpha^2 E_0, \alpha E_0]. \quad (3.39)$$

Окончательно получаем следующие выражения для функции $\Psi_2(E)$:

$$\begin{cases} \Psi_2(E) = \frac{q}{(1-\alpha)^2} \ln \frac{E_0}{E}, & E \in [\alpha E_0, E_0]; \\ \Psi_2(E) = \frac{q}{(1-\alpha)^2} \ln \frac{E}{\alpha^2 E_0}, & E \in [\alpha^2 E_0, \alpha E_0]. \end{cases} \quad (3.40)$$

Из формулы (3.39) следует, что:

а) если $E = \alpha E_0$, то $\Psi_2(E) = \frac{q}{(1-\alpha)^2 E_0} \ln \frac{1}{\alpha}$;

б) если $E = E_0$, то $\Psi_2(E) = 0$;

в) если $E = \alpha^2 E_0$, то $\Psi_2(E) = 0$.

Аналогично можно найти $\Psi_3(E)$ – плотность столкновения нейтронов, которые до этого испытали два рассеяния на ядрах среды (плотность третьих столкновений). Источником для этой функции будет являться найденная функция $\Psi_2(E)$ и т.д. Поскольку функция $\Psi_2(E)$ определена на первых двух ступеньках замедления, то функция $\Psi_3(E)$ будет определена на первых трех ступеньках замедления.

Функция плотности столкновения рассеянных нейтронов (всех нейтронов, кроме нейтронов источника) представляет собой сумму функций $\Psi_i(E)$: $F(E) = \sum_i \Psi_i(E)$, где $i = 1, 2, 3, \dots$. На рис. 3.13 в

качестве примера приведены распределения по энергии плотности столкновений нейтронов, испытавших одно, два и три столкновения с ядром бериллия от единичного источника с энергией 1 МэВ. Исходя из анализа поведения найденных нескольких функций $\Psi_i(E)$, можно утверждать, что их сумма будет иметь следующие особенности:

- имеет разрыв величиной $\frac{q}{(1-\alpha)E_0}$ на границе первой ступеньки замедления, т.е. при $E = \alpha E_0$;
- производная искомой функции будет иметь разрыв на границе второй ступеньки замедления, т.е. при $E = \alpha^2 E_0$;
- вторая производная искомой функции будет иметь разрыв на границе третьей ступеньки замедления, т.е. при $E = \alpha^3 E_0$.

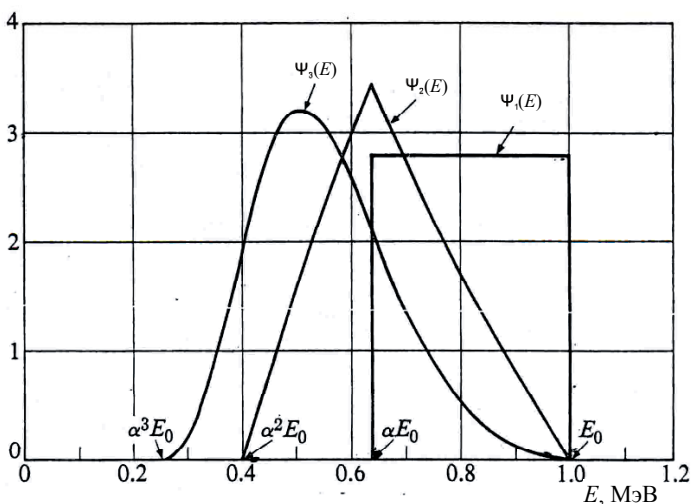


Рис. 3.13. Плотность столкновений $\left(\frac{1}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} \right)$ в среде из бериллия от единичного источника с энергией 1 МэВ для разных поколений нейтронов

Для того чтобы найти $F(E)$, надо решать уравнение замедления последовательно в пределах каждой из ступенек замедления. Сделаем это для первой ступеньки замедления ($E \in [\alpha E_0, E_0]$). Уравнение замедления в пределах первой ступеньки замедления имеет вид

$$-F_S^{(1)}(E) + \int_E^{E_0} dE' \frac{F_S^{(1)}(E')}{(1-\alpha)E'} + q\delta(E - E_0) = 0, \quad (3.41)$$

где верхний индекс (1) подчеркивает, что ищется плотность рассеяния в пределах первой ступеньки замедления. Будем искать решение уравнения (3.41) в виде

$$F_S^{(1)}(E) = \mathfrak{Z}^{(1)}(E) + q\delta(E - E_0), \quad (3.42)$$

где функция $\mathfrak{Z}^{(1)}(E)$ представляет собой плотность столкновений (рассеяний) рассеянных нейтронов в пределах первой ступеньки замедления; $q\delta(E - E_0)$ – плотность рассеяния нейтронов источника (плотность первых столкновений); $F_S(E)$ – полную плотность рассеяния нейтронов в пределах первой ступеньки замедления. Подставим выражение (3.42) в уравнение (3.41):

$$\begin{aligned} -\mathfrak{Z}^{(1)}(E) - q\delta(E - E_0) + \int_E^{E_0} dE' \frac{\mathfrak{Z}^{(1)}(E')}{(1-\alpha)E'} + \frac{q}{(1-\alpha)E_0} + q\delta(E - E_0) &= 0; \\ -\mathfrak{Z}^{(1)}(E) + \int_E^{E_0} dE' \frac{\mathfrak{Z}^{(1)}(E')}{(1-\alpha)E'} + \frac{q}{(1-\alpha)E_0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Последнее слагаемое в уравнении (3.43) описывает источник нейтронов, сформированный однократно рассеянными при энергии E_0 нейтронами. Продифференцируем уравнение (3.43) по E , используя правило дифференцирования интегральной функции, где переменная дифференцирования стоит в качестве нижнего предела интегрирования:

$$-d\mathfrak{I}^{(1)}(E) - \frac{\mathfrak{I}^{(1)}(E)dE}{(1-\alpha)E} = 0,$$

что приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathfrak{I}^{(1)}(E)}{\mathfrak{I}^{(1)}(E)} = -\frac{dE}{(1-\alpha)E}.$$

Решением последнего дифференциального уравнения является функция

$$\mathfrak{I}^{(1)}(E) = \frac{C}{E^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \quad (3.44)$$

Константу C найдем, сравнивая выражения (3.44) и (3.43) при $E = E_0$. Уравнение (3.43) при $E = E_0$ переходит в равенство:

$$\mathfrak{I}^{(1)}(E_0) = \frac{q}{(1-\alpha)E_0},$$

а из (3.44) следует, что $\mathfrak{I}^{(1)}(E_0) = \frac{C}{E_0^{\frac{1}{1-\alpha}}}$. Сравнивая два последних

равенства, приходим к следующему выражению:

$$\frac{C}{E_0^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{q}{(1-\alpha)E_0}.$$

Отсюда имеем, что

$$C = \frac{q}{1-\alpha} E_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

и окончательно для плотности столкновения рассеянных нейтронов получаем

$$\mathfrak{I}^{(1)}(E) = \frac{\frac{q}{1-\alpha} E_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{E^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad (3.45)$$

а для полной плотности рассеяния в пределах первой ступеньки замедления:

$$F_S^{(1)}(E) = \frac{\frac{q}{1-\alpha} E_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{E^{\frac{1}{1-\alpha}}} + q\delta(E - E_0), \quad E \in [\alpha E_0, E_0]. \quad (3.46)$$

Запишем решение (3.45) в переменных летаргии, учитывая, что $\mathfrak{I}^{(1)}(u) = \mathfrak{I}^{(1)}(E) \cdot E$ и $E = E_0 \cdot e^{-u}$:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(u) &= \frac{q}{1-\alpha} E_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot E^{1-\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{q}{1-\alpha} E_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot E^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \\ &= \frac{q}{1-\alpha} E_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot E_0^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot e^{u\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{q}{1-\alpha} e^{u\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом, плотность столкновений рассеянных нейтронов в пределах первой ступеньки замедления в переменных летаргии имеет вид

$$\mathfrak{I}^{(1)}(u) = \frac{q}{1-\alpha} e^{u\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (3.47)$$

и зависит от летаргии в отличие от случая замедления на водороде.

Рассмотрим теперь уравнение замедления в пределах второй ступеньки замедления ($E \in [\alpha^2 E_0, E_0]$):

$$-F_S^{(2)}(E) + \int_E^{\frac{E}{\alpha}} dE' \frac{F_S(E')}{(1-\alpha)E'} = 0, \quad (3.48)$$

где $F_S^{(2)}$ – плотность рассеяния, определенная во второй ступеньке замедления, а $F_S(E')$ равна или известной функции $\mathfrak{Z}^{(1)}(E')$ в пределах первой ступеньки замедления $\left(E \in [\alpha E_0, \frac{E}{\alpha}]\right)$, или искомой функции $F_S^{(2)}(E')$ в пределах второй ступеньки замедления $(E \in [E, \alpha E_0])$ – рис. 3.14. В уравнении (3.48) разобьем интеграл на два интеграла, соответствующие каждой из ступенек замедления:

$$F_S^{(2)}(E) = \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{\alpha E_0} dE' \frac{F_S^{(2)}(E')}{E'} + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha E_0}^{\frac{E}{\alpha}} dE' \frac{\mathfrak{Z}^{(1)}(E')}{E'}. \quad (3.49)$$

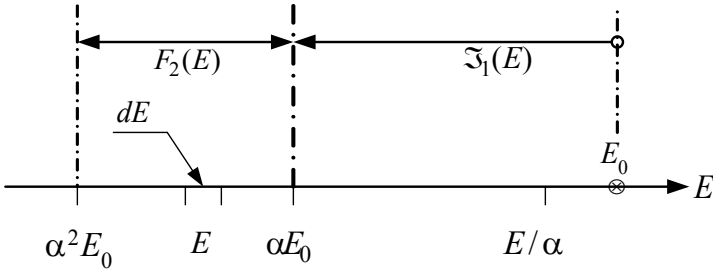


Рис. 3.14. Схема для расчета плотности рассеяния во второй ступеньке замедления

Так как $\mathfrak{Z}^{(1)}(E')$ определена равенством (3.45), то интегральное уравнение (3.49) может быть решено относительно функции $F_S^{(2)}(E)$. Покажем, что плотность рассеяния имеет разрыв при $E = \alpha E_0$, т.е. на границе первой ступеньки замедления. Для этого из (3.49) найдем $F_S^{(2)}(\alpha E_0)$:

$$F_S^{(2)}(\alpha E_0) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha E_0}^{E_0} dE' \frac{\mathfrak{Z}^{(1)}(E')}{E'}.$$

В то же время из (3.43) следует:

$$F_S^{(1)}(\alpha E_0) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha E_0}^{E_0} dE' \frac{\mathfrak{I}^{(1)}(E')}{E'} + \frac{q}{(1-\alpha)E_0}.$$

Сравнивая два последних уравнения, можно сделать вывод, что плотность рассеяния имеет разрыв на границе первой ступеньки замедления, и величина этого разрыва равна $\frac{q}{(1-\alpha)E_0}$. После решения уравнения замедления в пределах второй ступеньки замедления можно решить его в третьей ступеньке и т.д.

Рассмотрим асимптотическую область энергий. Считается, что асимптотическая область энергий начинается после третьей ступеньки замедления от энергии источника. Нейтрон должен испытать достаточно много столкновений с ядрами среды для того, чтобы его энергия попала в асимптотическую область. Асимптотическая область энергий характеризуется тем, что плотность рассеяния $F_{ac}(E)$ уже не зависит от номера ступеньки замедления. Уравнение замедления в асимптотической области энергий имеет вид

$$F_{ac}(E) = \int_E^{\frac{E}{\alpha}} F_{ac}(E') \frac{dE'}{E'(1-\alpha)},$$

а его решение:

$$F_{ac}(E) = \frac{C}{E}, \quad C = \text{const}.$$

Найдем константу C , воспользовавшись тем, что в бесконечной однородной непоглощающей среде $j(E) = \text{const} = q$. Определим плотность замедления в асимптотической области энергий:

$$j(E) = \int_E^{\frac{E}{\alpha}} F(E') \frac{(E - \alpha E') dE'}{(1-\alpha)E'} = \frac{C}{1-\alpha} \int_E^{\frac{E}{\alpha}} dE' \frac{E - \alpha E'}{E'^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{C}{1-\alpha} \left[E \cdot \frac{1}{E'} \right]_{\frac{E}{\alpha}}^E - \frac{C\alpha}{1-\alpha} \int_E^{\frac{E}{\alpha}} \frac{dE'}{E'} = \frac{C}{1-\alpha} [1-\alpha] - \frac{C\alpha}{1-\alpha} \ln E' \Big|_E^{\frac{E}{\alpha}} = \\
&= C - C \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\ln \frac{E}{\alpha} - \ln E \right] = C \left[1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} \right] = C \left[1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \right] = q .
\end{aligned}$$

Вспомним, что согласно (3.14):

$$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha .$$

Таким образом, окончательно получаем $C = \frac{q}{\xi}$, и для асимптотической плотности рассеяния:

$$F_{\text{ac}}(E) = \frac{q}{\xi E} \quad (3.50)$$

или для асимптотического спектра нейтронов:

$$\Phi_{\text{ac}}(E) = \frac{q}{\xi \Sigma_S(E) E} . \quad (3.51)$$

В переменных латаргии выражения (3.50) и (3.51) можно переписать следующим образом:

$$F_{\text{ac}}(u) = \frac{q}{\xi} , \quad (3.52)$$

$$\Phi_{\text{ac}}(u) = \frac{q}{\xi \Sigma_S(u)} . \quad (3.53)$$

Отметим, что в асимптотической области энергий устанавливается спектр Ферми – выражения (3.50) – (3.53). Показано, что использо-

вание $\Phi_{\text{ас}}(E)$ в виде спектра Ферми оправдано уже для четвертой ступеньки при замедлении даже на легких ядрах.

На рис. 3.15 приведен график функции $F_S(u)$ в относительных единицах для разных атомных масс замедлителя A . Впервые эта функция была получена и исследована чешским ученым Плачеком в 1948 г., поэтому она носит название «функция Плачека».

Видно, что в пределах первой ступеньки замедления поведение функции плотности рассеяния нейтронов определяется выражением (3.47), на границе первой ступеньки замедления исследуемая функция терпит разрыв, а после третьей ступеньки замедления выходит на асимптотическое значение (3.50).

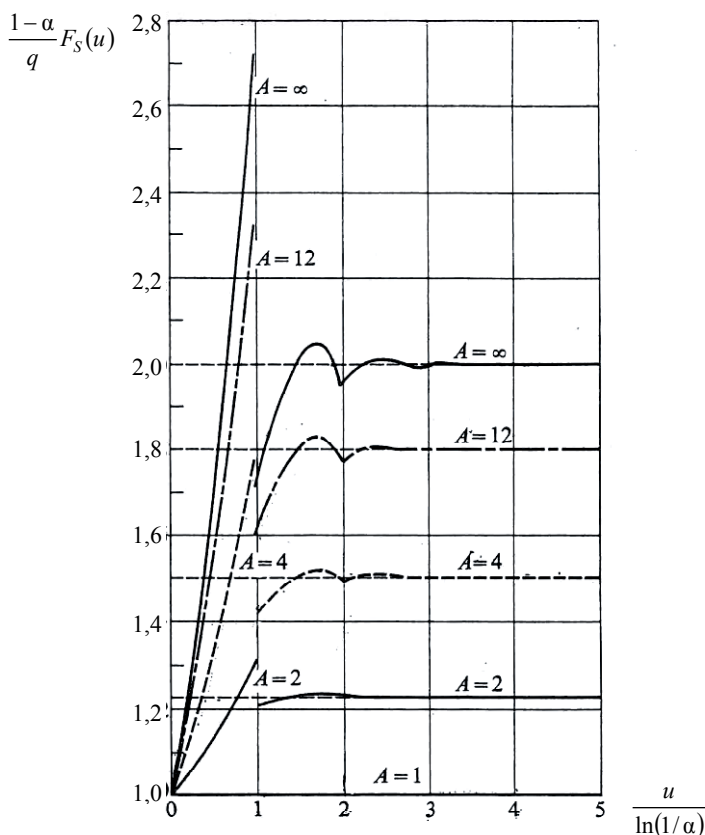


Рис. 3.15. Функция Плачека для разных масс ядер замедлителя

3.9. Замедление в непоглощающей среде, состоящей из смеси нуклидов (асимптотическая область энергии)

Рассмотрим бесконечную неразмножающуюся гомогенную и непоглощающую ($\Sigma_a = 0$) среду с равномерно распределенным объемным монохроматическим источником нейтронов мощностью q , испускающим нейтроны с энергией E_0 . Для этого приведем уравнение замедления в асимптотической области энергий:

$$-F_S(E) + \int_E^{\frac{E}{\alpha}} dE' \frac{F_S(E')}{(1-\alpha)E'} = 0.$$

Это уравнение записано для случая, если среда состоит из одного нуклида. Если среда состоит из смеси нуклидов, то необходимо учитывать замедление на каждом из них, и уравнение замедления записывается в виде суммы соответствующих уравнений для каждого из нуклидов:

$$-\sum_i \Sigma_{S_i}(E) \Phi_{ac}(E) + \sum_i \frac{1}{1-\alpha_i} \int_E^{\frac{E}{\alpha_i}} dE' \frac{\Sigma_{S_i}(E') \Phi_{ac}(E')}{E'} = 0. \quad (3.54)$$

В уравнении (3.53) $\Phi_{ac}(E)$ – асимптотический спектр. Отметим, что асимптотический спектр нейтронов устанавливается в среде и не зависит от типа нуклида i , на котором происходит рассеяние нейтрона. В то же время сечения рассеяния и максимальная относительная потеря энергии на одно столкновение зависят от типа нуклида. Предположим, что макроскопические сечения рассеяния для разных нуклидов зависят от энергии единым образом, т.е. выполняется равенство:

$$\Sigma_{S_i}(E) = \Sigma_{S_i} \cdot f(E). \quad (3.55)$$

Отметим, что на практике сечения рассеяния для замедлителей в рассматриваемой области энергий вообще не зависят от энергии, т.е. $f(E)=1$. Используя (3.55), перепишем уравнение (3.54) следующим образом:

$$-\Phi_{\text{ac}}(E)f(E)\sum_i\Sigma_{S_i}+\sum_i\frac{\Sigma_{S_i}}{1-\alpha_i}\int_E^{\frac{E}{\alpha_i}}dE'\frac{f(E')\Phi_{\text{ac}}(E')}{E'}=0. \quad (3.56)$$

Введем обозначения: $\Sigma_S \equiv \sum_i \Sigma_{S_i}$ – полное макроскопическое сечение среды; $F_{\text{ac}}(E)=\Phi_{\text{ac}}(E)f(E)\Sigma_S$ – асимптотическая плотность рассеяния. В этом случае уравнение (3.56) принимает вид

$$F_{\text{ac}}(E)=\sum_i\frac{1}{1-\alpha_i}\frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S}\int_E^{\frac{E}{\alpha_i}}dE'\frac{F_{\text{ac}}(E')}{E'}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$F_{\text{ac}}(E)=\frac{C}{E}. \quad (3.57)$$

Действительно, подстановка (3.57) в уравнение приводит к тождеству:

$$\begin{aligned} \frac{C}{E} &= \sum_i \frac{1}{1-\alpha_i} \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} \int_E^{\frac{E}{\alpha_i}} dE' \frac{C}{E'^2} = \\ &= \sum_i \frac{1}{1-\alpha_i} \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} C \left[\frac{1}{E} - \frac{\alpha_i}{E} \right] = \frac{C}{E} \frac{\sum_i \Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} = \frac{C}{E}. \end{aligned}$$

Так как рассматривается непоглощающая среда, то константу C определим из условия того, что плотность замедления – величина постоянная и равна мощности внешнего источника. Если среда состояла из одного нуклида, то уравнение для плотности замедления имеет вид

$$j(E) = \int_E^{\frac{E}{\alpha}} dE' \cdot F_S(E') \frac{E - \alpha E'}{(1 - \alpha)E'}.$$

Если среда состоит из смеси нуклидов, то уравнение для плотности замедления будет представлять собой сумму уравнений для каждого из них:

$$\begin{aligned} j(E) &= \sum_i \int_E^{\frac{E}{\alpha_i}} dE' \frac{\Sigma_{S_i} \Phi_{ac}(E')(E - \alpha_i E')}{(1 - \alpha_i)E'} = \\ &= \sum_i \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} \int_E^{\frac{E}{\alpha_i}} dE' \frac{\Sigma_S f(E') \Phi_{ac}(E')(E - \alpha_i E')}{(1 - \alpha_i)E'} = \\ &= \sum_i \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} \int_E^{\frac{E}{\alpha_i}} dE' \frac{F_{ac}(E - \alpha_i E')}{(1 - \alpha_i)E'} = \sum_i \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} C \int_E^{\frac{E}{\alpha_i}} dE' \frac{(E - \alpha_i E')}{(1 - \alpha_i)E'} = \\ &= \sum_i \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} C \left[\frac{E}{1 - \alpha_i} \left(\frac{1}{E} - \frac{\alpha_i}{E} \right) - \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} \ln \frac{E}{\alpha_i \cdot E} \right] = \\ &= \sum_i \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} C \left[1 + \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} \ln \alpha_i \right] = C \sum_i \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} \xi_i. \end{aligned}$$

Таким образом, если определить среднелогарифмическую потерю энергии в среде, состоящей из смеси нуклидов, следующим образом:

$$\boxed{\bar{\xi} = \sum_i \frac{\Sigma_{S_i}}{\Sigma_S} \xi_i}, \quad (3.58)$$

то для плотности замедления в асимптотической области энергии получим выражение $j(E) = q = C \bar{\xi}$, а следовательно, $C = \frac{q}{\bar{\xi}}$ и асимптотическая плотность рассеяния определяется выражением

$$F_{\text{ac}}(E) = \frac{q}{\xi E}, \quad (3.59)$$

или в переменных летаргии $F_{\text{ac}}(u) = \frac{q}{\xi}$.

Таким образом, в асимптотической области энергий при замедлении в бесконечной непоглощающей однородной среде, состоящей из смеси нуклидов, устанавливается спектр Ферми. При этом среднелогарифмическая потеря энергии в среде рассчитывается по формуле (3.58).

3.10. Микроскопическое эффективное сечение поглощения. Понятие эффекта Доплера

В предыдущих разделах было рассмотрено замедление в непоглощающих средах. Но для реальных замедлителей поглощение всегда присутствует, поэтому нейтрон при столкновении с ядром может как рассеяться, так и поглотиться. Кроме того, среда, как правило, состоит из смеси ядер замедлителя и топлива, а при взаимодействии нейтронов с ядрами топлива преобладающей является именно реакция поглощения, а не рассеяния. Для учета поглощения нейтронов при замедлении, прежде всего, необходимо рассмотреть зависимость микроскопического эффективного сечения поглощения от энергии. Из всех ядерных реакций поглощения в рассматриваемой области энергий преобладает реакция радиационного захвата. Поэтому далее в этой главе под реакцией поглощения понимается реакция радиационного захвата.

Ядерная реакция поглощения, как было рассмотрено ранее, идет через образование составного ядра. При этом энергия возбуждения E^* составного ядра представляет собой сумму кинетической энергии нейтрона в системе центра масс (E) и энергии связи нейтрона в составном ядре ($E_{\text{св}}$):

$$E^* = E_{\text{св}} + E.$$

Существование составного ядра является экспериментальным фактом, причем его время жизни составляет $10^{-13} \div 10^{-17}$ с. После этого составное ядро распадается по одному из возможных каналов. Реакция радиационного захвата характеризуется тем, что в результате взаимодействия нейтрона с ядром образуется новый изотоп, а энергия возбуждения уносится гамма-квантами. Таким образом, реакция радиационного захвата приводит к поглощению исходного нейтрона ядром и всегда сопровождается гамма-излучением.

Микроскопическое сечение реакции радиационного захвата равно произведению микроскопического сечения образования составного ядра и вероятности распада составного ядра по каналу (n, γ) -реакции:

$$\sigma(n, \gamma) = \sigma_c(E) \cdot W(\gamma). \quad (3.60)$$

Вероятность распада составного ядра по тому или иному каналу определяется только энергией возбуждения E^* и свойствами составного ядра, но не способом его образования. А сечение образования составного ядра определяется свойствами исходного ядра и кинетической энергией налетающего нейтрона в системе центра масс.

Микроскопическое сечение образования составного ядра описывается формулой Брейта – Вигнера [3]:

$$\sigma_c(E) = g\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n \cdot \Gamma}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (3.61)$$

где g – статистический множитель (зависит от взаимной ориентации спинов нейтрона и ядра), в нашем случае $g = 1$; λ – приведенная длина волны де Бройля нейтрона; Γ_n – нейтронная ширина уровня; Γ – полная ширина уровня, $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ (Γ_i – парциальные ширины уровня); E_r – энергия резонансного уровня; E – кинетическая энергия нейтрона в системе ЦМ.

Отметим, что величины Γ_i и Γ являются известными параметрами данного уровня ядра и приведены в соответствующих справочниках. Γ_n называется нейтронной шириной уровня, Γ_γ – радиационной шириной, Γ_f – делительной шириной. Полная ширина уровня всегда есть сумма всех возможных для данного уровня парциальных ширин. Парциальные ширины измеряются как ширина резонанса в микроскопическом сечении соответствующей ядерной реакции на его полувысоте (рис. 3.16), а полная ширина – как ширина резонанса полного микроскопического сечения взаимодействия нейтрона с ядром на его полувысоте. По существу, парциальная ширина уровня характеризует неопределенность в энергии данного энергетического уровня по отношению к конкретному типу ядерной реакции.

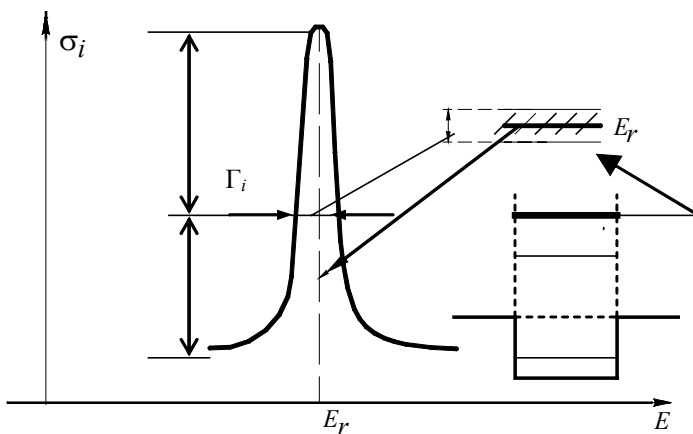


Рис. 3.16. Схема определения парциальных ширин уровня

Вероятности различных каналов распада составного ядра рассчитываются как отношение соответствующей парциальной ширины уровня к полной ширине этого уровня:

$$W(i) = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}. \quad (3.62)$$

Таким образом, подставив (3.61) и (3.62) в (3.60), получим формулу Брейта – Вигнера, описывающую зависимость микроскопического эффективного сечения радиационного захвата от энергии:

$$\sigma(n, \gamma) = g\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n \cdot \Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}. \quad (3.63)$$

Отметим, что формула (3.63) дает возможность описать резонансную часть зависимости микроскопического эффективного сечения радиационного захвата от энергии как систему гауссовых кривых, расположенных при $E = E_r$. Если рассмотреть зависимость микроскопического сечения радиационного захвата от энергии во всей области энергий, то можно выделить четыре характерные области энергий (рис. 3.17), которые наиболее ярко проявляются для тяжелых ядер (топливо):

- тепловая область энергий (ниже 1 эВ), в этой области для большинства ядер зависимость микроскопического сечения радиационного захвата от энергии описывается выражением $1/V = \frac{1}{\sqrt{E}}$;

- область разрешенных резонансов (от долей электронвольт до килоэлектронвольт области энергий), в этой области каждый отдельный резонанс в сечении, описываемой формулой (3.63), можно измерить отдельно (таких резонансов для тяжелых ядер может быть несколько сотен, причем высота резонансов падает с ростом кинетической энергии нейтрона);

- область неразрешенных резонансов лежит в килоэлектронвольтовой области энергий (эта область характеризуется тем, что в ней идет перекрытие отдельных резонансных уровней). Вместе область разрешенных и неразрешенных резонансов называется *резонансной областью энергий*;

- быстрая область энергий (выше верхней границы области неразрешенных резонансов), в этой области энергий сечение имеет плавную зависимость от энергии нейтрона, которая, как правило, хорошо описывается функцией $1/E$.

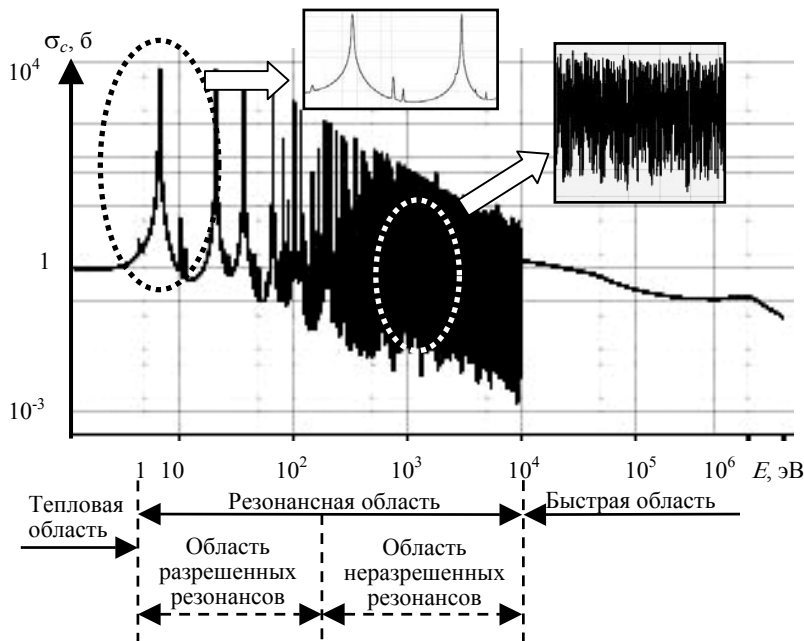


Рис. 3.17. Зависимость микроскопического сечения радиационного захвата $^{238}_{92}\text{U}$ от энергии

Для самого нижнего резонанса, который для ряда тяжелых изотопов лежит около тепловой (или даже в тепловой) области энергий, кинетическая энергия нейтрона сравнима (или становится сравнимой при повышении температуры среды) с энергией теплового движения ядер среды. В этом случае необходимо учитывать направление движения ядра в момент взаимодействия с нейтроном. Естественно, что при этом в зависимости от направления движения ядра меняется значение кинетической энергии нейтрона в системе ЦМ. Действительно, если в момент взаимодействия с нейтроном ядро двигалось в направлении от нейтрона, то кинетическая энергия нейтрона в системе ЦМ, которая определяет энергию возбуждения составного ядра, будет меньше, чем в случае покоящегося ядра. А в случае, если ядро двигалось навстречу нейтрону – боль-

ше. Эту возникающую неопределенность в кинетической энергии нейтрона можно учесть, если, применяя формулу Брейта – Вигнера (3.63) для описания самого нижнего резонанса в сечении тяжелого ядра, вместо табличных значений парциальных ширин и полной ширины уровня взять соответствующим образом поправленные величины парциальных и полной ширин. Это, в свою очередь, приводит к тому, что гауссова кривая, описывающая резонанс, становится ниже и шире (рис. 3.18). Естественно, что поскольку средняя кинетическая энергия нейтрона (относительная кинетическая энергия, усредненная по всем возможным направлениям движения ядра) остается неизменной ввиду хаотичности движения ядер среды, то площадь под кривой остается также неизменной.

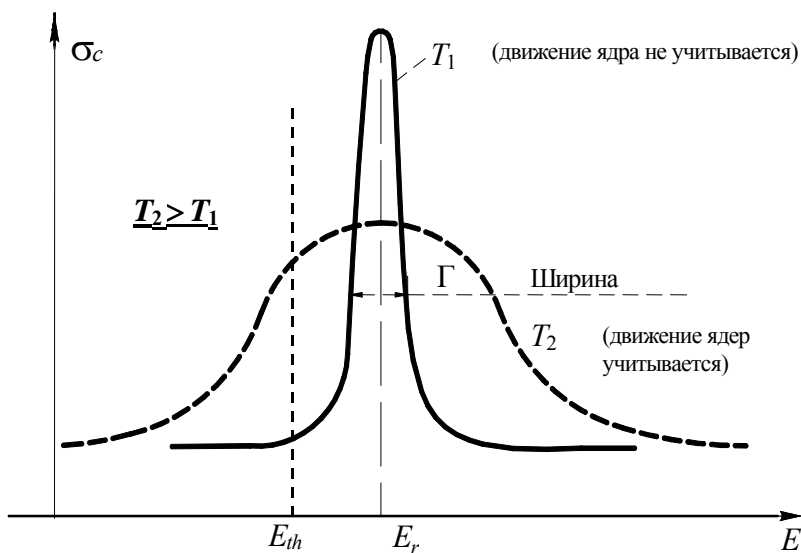


Рис. 3.18. Схема изменения формы резонанса вследствие эффекта Доплера

Этот эффект называется *эффектом Доплера*, а явление описанного изменения формы самого нижнего резонанса при увеличении температуры среды – *доплеровским уширением резонанса*. Отметим, что достаточно строгое математическое описание эффекта

Доплера можно найти, например, в работах [4, 5]. Доплер-эффект играет принципиальную роль для обеспечения безопасности ядерных реакторов. Поскольку одновременно с повышением мощности реактора нагревается топливо, то требование увеличения радиационного захвата при повышении температуры топлива – обязательное для безопасной работы реактора. Ответственным за выполнение этого требования является эффект Доплера. На рис. 3.19 E_{th} – граница тепловой области энергий. В тепловых ядерных реакторах физику реактора определяют скорости процессов в тепловой области энергий. При T_1 (рабочей температуре топлива) первый резонанс в сечении радиационного захвата для ${}^{238}_{92}\text{U}$, которого в топливе 94 – 98 %, расположен выше тепловой области энергий ($E_{r1} = 6,7$ эВ). Предположим, что произошло какое-либо событие, приведшее к увеличению мощности реактора. При этом температура топлива моментально повысится до T_2 , и первый резонанс в сечении радиационного захвата ${}^{238}_{92}\text{U}$ изменит форму и станет соответствовать T_2 . Но при этой температуре уже значительная часть резонанса попадает в тепловую область энергии, а следовательно, возрастет среднее сечение радиационного захвата нейтронов в тепловой области, что приведет к уменьшению относительного количества делений ядер топлива, т.е., в конечном счете, к понижению температуры топлива. Этот эффект называется *отрицательной обратной связью* по температуре топлива.

3.11. Замедление на водороде при наличии поглощения

В случае рассмотрения замедления нейтронов с учетом их поглощения важной величиной является вероятность избежать поглощения при замедлении от энергии E_0 до энергии E – $\varphi(E_0, E)$. Очевидно, что вероятность избежать поглощения при замедлении можно рассчитать по формуле:

$$\varphi(E_0, E) = \frac{j(E)}{j(E_0)},$$

где $j(E)$ – плотность замедления при энергии E ; $j(E_0)$ – плотность замедления при энергии E_0 .

Поскольку в поглощающей среде всегда $j(E) < j(E_0)$, то $\varphi(E_0, E) < 1$. Только в непоглощающей бесконечной среде $j(E) = j(E_0) = q$ и $\varphi(E_0, E) = 1$.

Рассмотрим бесконечную неразмножающую гомогенную среду с равномерно распределенным объемным изотропным монохроматическим источником нейтронов мощностью q и энергией E_0 . Среда состоит из смеси атомов водорода ${}^1_1\text{H}$, который будем называть замедлителем, с тяжелыми ядрами (например, ${}^{238}_{92}\text{U}$) – поглотителем. Необходимо найти спектр нейтронов, который установится в данной среде. Поскольку поглотителем нейтронов являются тяжелые ядра, на которых практически не происходит замедления, то будем считать, что все замедление происходит на ядрах водорода. Уравнение замедления в этом случае имеет вид

$$-\Sigma_{tot}(E)\Phi(E) + \int_E^{E_0} dE' \frac{\Sigma_S(E')\Phi(E')}{E'} + q\delta(E - E_0) = 0.$$

Введем вспомогательную функцию:

$$h(E) = \frac{\Sigma_S(E)}{\Sigma_{tot}(E)}, \quad 0 < h(E) \leq 1.$$

Случай $h(E) \cong 1$ соответствует $\Sigma_{tot}(E) \approx \Sigma_S(E)$, а следовательно, поглощение пренебрежимо мало. Учитывая, что $h(E')\Sigma_{tot}(E') = \Sigma_S(E')$, перепишем уравнение замедления в виде

$$\Sigma_{tot}(E)\Phi(E) = \int_E^{E_0} dE' \cdot h(E') \cdot \Sigma_{tot}(E')\Phi(E') \frac{1}{E'} + q\delta(E - E_0). \quad (3.64)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\Sigma_{tot}(E)\Phi(E) = \mathfrak{Z}(E) + q\delta(E - E_0). \quad (3.65)$$

Таким образом, полная плотность столкновений $\sum_{tot}(E)\Phi(E)$ представляется как сумма плотности столкновений рассеянных нейтронов $\mathfrak{I}(E)$ и плотности столкновений нейтронов источника $q\delta(E - E_0)$. Подставив (3.65) в (3.64), получим:

$$\mathfrak{I}(E) + q\delta(E - E_0) = \int_E^{E_0} dE' \cdot h(E') \cdot \mathfrak{I}(E') \frac{1}{E'} + \frac{q \cdot h(E_0)}{E_0} + q\delta(E - E_0),$$

$$\mathfrak{I}(E) = \int_E^{E_0} dE' h(E') \frac{\mathfrak{I}(E')}{E'} + \frac{qh(E_0)}{E_0}. \quad (3.66)$$

Продифференцируем выражение (3.66), используя правило дифференцирования интегральных выражений, где переменная дифференцирования стоит на нижнем пределе, и получим следующее дифференциальное уравнение:

$$d\mathfrak{I}(E) = -dE \cdot h(E) \frac{\mathfrak{I}(E)}{E},$$

или

$$\frac{d\mathfrak{I}(E)}{\mathfrak{I}(E)} = -\frac{h(E)}{E} dE.$$

Общим решением последнего дифференциального уравнения, учитывая область интегрирования в исходном интегральном уравнении (3.66), является функция

$$\mathfrak{I}(E) = C \exp \left\{ \int_E^{E_0} dE' \frac{h(E')}{E'} \right\}. \quad (3.67)$$

Для нахождения константы C вспомним, что уравнение (3.66) выполняется для любых значений энергий, а значит, и при $E = E_0$.

В этом случае уравнение (3.66) принимает вид $\mathfrak{I}(E_0) = \frac{q \cdot h(E_0)}{E_0}$. В то же время из уравнения (3.67) следует при $E = E_0$: $\mathfrak{I}(E_0) = C$, следовательно, $C = \frac{qh(E_0)}{E_0}$, и выражение (3.67) для плотности столкновений рассеянных нейтронов переписывается в виде

$$\mathfrak{I}(E) = \frac{q \cdot h(E_0)}{E_0} \exp \left\{ \int_E^{E_0} dE' \frac{h(E')}{E'} \right\}. \quad (3.68)$$

В случае отсутствия поглощения $h(E) \equiv 1$, и учитывая, что $\int_E^{E_0} dE' \frac{1}{E'} = \ln \frac{E_0}{E}$, для плотности столкновений рассеянных нейтронов получаем выражение $\mathfrak{I}(E) = \frac{q}{E_0} e^{\ln \frac{E_0}{E}} = \frac{q}{E}$, т.е. спектр Ферми. Если же поглощение присутствует, то

$$h(E) \neq 1,$$

и

$$h(E') = \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma_{tot}(E')} = \frac{\Sigma_{tot}(E') - \Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} = 1 - \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')}.$$

С учетом этого проведем тождественные преобразования выражения (3.68):

$$\begin{aligned}
\int_E^{E_0} dE' \frac{h(E')}{E'} &= \int_E^{E_0} dE' \frac{1}{E'} \left(1 - \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} \right) = \ln \frac{E_0}{E} - \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')}, \\
\exp \left\{ \int_E^{E_0} dE' \frac{h(E')}{E'} \right\} &= \exp \left\{ \ln \frac{E_0}{E} - \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} \right\} = \\
&= \frac{E_0}{E} \exp \left\{ - \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} \right\}; \\
\mathfrak{Z}(E) &= \frac{q \cdot h(E_0)}{E} \exp \left\{ - \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} \right\}. \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Найдем плотность замедления $j(E)$ в рассматриваемой среде

$$\begin{aligned}
j(E) &= \int_E^{E_0} dE' \frac{F_s(E')E}{E'} = \int_E^{E_0} dE' \frac{\Sigma_s(E')\Phi(E')E}{E'} = \\
&= \int_E^{E_0} dE' \frac{\Sigma_s(E')E}{\Sigma_{tot}(E')E'} \cdot \Sigma_{tot}(E')\Phi(E') = \int_E^{E_0} dE' \cdot h(E') \frac{E}{E'} (\mathfrak{Z}(E') + \\
&+ q\delta(E' - E_0)) = E \int_E^{E_0} dE' \cdot h(E') \frac{\mathfrak{Z}(E')}{E'} + \frac{q \cdot h(E_0)E}{E_0}.
\end{aligned}$$

При выводе было использовано выражение для $h(E)$ и формула (3.65). Функция $\mathfrak{Z}(E)$ удовлетворяет уравнению (3.66), следовательно, для плотности замедления окончательно получим:

$$j(E) = E \cdot \left[\int_E^{E_0} dE' \cdot h(E') \frac{\mathfrak{Z}(E')}{E'} + \frac{qh(E_0)}{E_0} \right] = E\mathfrak{Z}(E),$$

или, используя (3.69):

$$j(E) = E \cdot \mathfrak{Z}(E) = qh(E_0) \exp \left\{ - \int_E^{E_0} dE' \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')E'} \right\}. \quad (3.70)$$

В свою очередь, на основе вышеприведенных выкладок можно записать:

$$\mathfrak{I}(E) = \frac{j(E)}{E}. \quad (3.71)$$

Если $\Sigma_a = 0$, то для бесконечной среды $j(E) = q$ и из (3.71) следует, что $\mathfrak{I}(E) = \frac{j(E)}{E} = \frac{q}{E}$, т.е. в среде устанавливается спектр Ферми.

Используя выражение для плотности замедления (3.70), найдем вероятность избежать поглощения при замедлении от энергии E_0 до энергии E :

$$\phi(E_0, E) = \frac{j(E)}{J(E_0)} = \exp \left\{ - \int_E^{E_0} dE' \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} \frac{1}{E'} \right\}. \quad (3.72)$$

В прил. 4 приведен пример использования формулы (3.72) для расчета избежать поглощения на первом резонансе урана-238 при замедлении на водороде.

3.12. Замедление на ядрах с атомной массой больше единицы с учетом поглощения

Рассмотрим задачу о нахождении спектра нейтронов и вероятности избежать поглощения при замедлении в среде, состоящей из смеси ядер замедлителя с атомной массой больше единицы и поглотителя (тяжелые ядра). Оказывается, что уравнение замедления в данной постановке задачи без дополнительных приближений (как в случае замедления на водороде) решить не представляется возможным.

По отношению к энергии источника (это область мегаэлектрон-вольт) область резонансов (до сотен килоэлектронвольт) – асимптотическая область энергий, т.е. область, отстоящая от энергии источника более, чем на три ступеньки замедления на замедлителе.

Но даже в асимптотической области энергии необходимо использовать приближенные модели для решения уравнения замедления. Во всей области энергий, где происходит поглощение на ядрах поглотителя, можно выделить две характерные области: область, где поглощение много меньше рассеяния (случай слабого поглощения), и область, где в сечении поглощения поглотителя расположен резонанс. Рассмотрим последовательно обе эти области энергий.

Случай слабого поглощения. Случай слабого поглощения означает, что $\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_s(E)} \ll 1$, и реализуется в области неразрешенных резонансов и в областях между разрешенными резонансами. В этих областях микроскопическое сечение рассеяния замедлителя имеет тот же порядок величины, что и микроскопическое сечение поглощения поглотителя (единицы – десятки барн), поэтому с учетом того факта, что концентрация ядер замедлителя существенно больше концентрации ядер поглотителя, можно утверждать, что макроскопическое сечение рассеяния среды будет существенно больше макроскопического сечения поглощения.

Рассмотрим энергетический интервал ΔE (рис. 3.19) в области $[E_1, E_2]$, где реализуется случай слабого поглощения, и баланс нейтронов в этом энергетическом интервале.

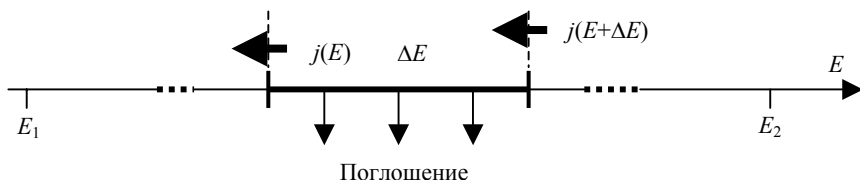


Рис. 3.19. Схема баланса нейтронов в энергетическом интервале

Исходя из определения плотности замедления и основываясь на законе сохранения нейтронов, можно утверждать, что изменение плотности замедления на энергетическом интервале ΔE равно скорости реакции поглощения нейтронов в интервале ΔE , т.е.

$$j(E + \Delta E) - j(E) = \Sigma_a(E) \Phi(E) \Delta E. \quad (3.73)$$

Так как рассматривается случай слабого поглощения, то в качестве спектра нейтронов в правой части уравнения (3.71) можно использовать спектр Ферми, который бы установился в среде из замедлителя в асимптотической области энергий. Только вместо мощности внешнего источника в этом спектре должна стоять соответствующая плотность замедления, что позволяет учесть поглощение нейтронов в области энергий выше рассматриваемой:

$$\Phi(E) \approx \frac{j(E)}{\xi \cdot \Sigma_S(E) \cdot E}. \quad (3.74)$$

В случае отсутствия поглощения $j(E) = q$ и (3.74) представляет собой спектр Ферми в асимптотической области энергий в непоглощающей среде.

Подставим (3.74) в (3.73):

$$j(E + \Delta E) - j(E) \equiv \Delta j(E) = \frac{\Sigma_a(E) j(E) \Delta E}{\xi \Sigma_S(E) \cdot E}$$

и перейдем к дифференциальному уравнению

$$\frac{dj(E)}{j(E)} = \frac{\Sigma_a(E)}{\xi \Sigma_S(E)} \frac{dE}{E},$$

решением которого на рассматриваемом интервале энергий $[E, E_2]$ является функция

$$j(E) = C \exp \left\{ - \int_E^{E_2} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_S(E')} \frac{dE'}{E'} \right\}.$$

Учитывая слабое поглощение, т.е. равенство $\Sigma_S(E') \approx \Sigma_{tot}(E')$, получим выражение для вероятности избежать поглощения при замедлении на интервале $[E_1, E_2]$:

$$\varphi(E_2, E_1) = \frac{j(E_1)}{j(E_2)} = \exp \left\{ - \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{tot}(E')} \frac{dE'}{E'} \right\}. \quad (3.75)$$

Случай узкого изолированного резонанса. Определим вероятность избежать поглощения в энергетическом интервале $[E_1, E_2]$ при замедлении на ядрах с атомной массой больше единицы, если в рассматриваемом энергетическом интервале в сечении поглощения (радиационного захвата) поглотителя расположен *узкий изолированный резонанс* (рис. 3.20).

На рис. 3.20 выделены две характерные области энергий:

область I, где реализуется случай слабого поглощения, т.е. $\Sigma_a \ll \Sigma_S$;

область II, где в сечении поглотителя расположен узкий изолированный резонанс и, следовательно, априорно неизвестны соотношения макроскопических сечений поглощения и рассеяния.

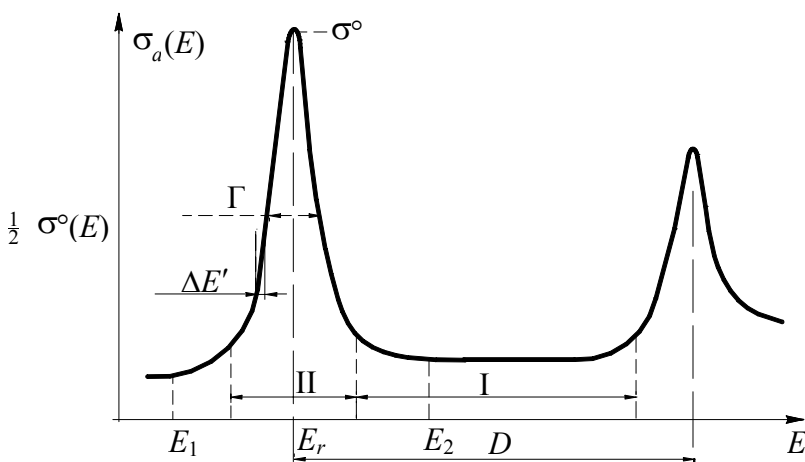


Рис. 3.20. Зависимость сечения поглощения от энергии

Резонанс называется *узким*, если ширина резонанса Γ много меньше средней потери энергии при одном столкновении нейтрона с ядром замедлителя $\Gamma \ll \frac{E_r}{2}(1-\alpha_3)$.

Резонанс называется *изолированным*, если расстояние между ним и следующим, расположенным выше, резонансом много больше ступеньки замедления для замедлителя $D \gg E_r(1-\alpha_3)$.

Узкие изолированные резонансы реально существуют. Например, рассмотрим первый резонанс ^{238}U при замедлении на углероде. Первый резонанс ^{238}U имеет следующие параметры: $E_r = 6,7$ эВ, $\Gamma = 26,5 \cdot 10^{-3}$ эВ. Второй резонанс ^{238}U лежит при энергии 21 эВ. Для углерода $\alpha = 0,716$. Проверим выполнимость условий узости и изолированности первого резонанса урана-238 при замедлении на углероде:

$$\frac{E_r}{2}(1-\alpha_c) = \frac{6,7 \cdot (1-0,716)}{2} \cong 0,95 \text{ эВ};$$

$$E_r(1-\alpha_c) \cong 1,9 \text{ эВ}.$$

Оба из условий $26,5 \cdot 10^{-3} \ll 0,95$ и $(21-6,7) = 14,3 \gg 1,9$ эВ с хорошей точностью выполняются, поэтому первый резонанс урана-238 можно считать узким и изолированным при замедлении на углероде.

Подчеркнем еще раз, что говорить об узости и изолированности резонанса в сечении поглощения поглотителя можно только по отношению к замедлению на конкретном замедлителе. При этом надо отметить, что далеко не все резонансы урана-238 при замедлении на реальных замедлителях можно считать узкими и изолированными.

Условие узости резонанса позволяет утверждать, что вероятность того, что энергия нейтрона при замедлении попадет в область резонанса, т.е. в область энергий $[E - 3\Gamma, E + 3\Gamma]$, мала, поскольку эта область существенно меньше ступеньки замедления на замедлителе.

Условие изолированности резонанса позволяет утверждать, что на пути от предыдущего резонанса к рассматриваемому нейтрон испытает много столкновений с ядрами среды, т.е. в области слабого поглощения на интервале ступеньки замедления до резонанса сформируется невозмущенный спектр Ферми, характерный для асимптотической области энергий. Действительно, для урана-238 при замедлении от энергии второго резонанса до энергии первого

$$\text{резонанса нейтрон в среднем испытает } \bar{N} = \frac{\ln \frac{21}{6,7}}{\xi_C} = \frac{1,142}{0,158} \approx 7,2$$

столкновений с ядрами среды в области слабого поглощения.

Выберем в пределах резонанса (в интервале энергий $[E_1, E_2]$) интервал $\Delta E'$ и рассмотрим уравнение баланса нейтронов (3.75):

$$j(E' + \Delta E') - j(E') = \Delta j(E') = \Sigma_a(E') \Phi(E') \Delta E'.$$

Но если в случае слабого поглощения в качестве спектра нейтронов $\Phi(E')$ можно было использовать невозмущенный спектр Ферми, то в данном случае в области резонанса возможно сильное поглощение нейтронов, а следовательно, и возмущение спектра нейтронов.

Найдем спектр нейтронов в области узкого изолированного резонанса $\Phi(E')$ (рис. 3.21).

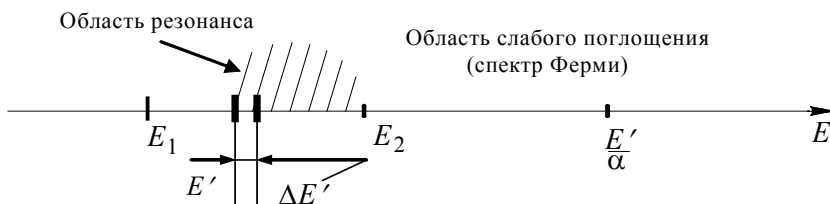


Рис. 3.21. Схема для нахождения спектра нейтронов в области резонанса

Резонанс – узкий, поэтому выполняется равенство $(E_2 - E') \ll \left(\frac{E'}{\alpha} - E_2 \right)$, т.е. в интервал $\Delta E'$ подавляющее большинство нейтронов приходит из интервала $\left[E_2, \frac{E'}{\alpha} \right]$. А это – область слабого поглощения, в которой установился невозмущенный спектр Ферми $\Phi_0(E)$ вне зависимости от того, есть резонанс или его нет, поскольку наличие резонанса ни как не влияет на спектр нейтронов в более высокой области энергий. Наличие или отсутствие резонанса влияет только на спектр нейтронов в области $[E', E_2]$, размеры которой по сравнению со ступенькой замедления, а следовательно, и вклад в баланс нейтронов в интервале $\Delta E'$ малы. Таким образом, в интервал $\Delta E'$ приходит примерно одинаковое число нейтронов за счет рассеяния при более высоких энергиях вне зависимости от наличия или отсутствия резонанса. Но в случае стационарной задачи скорость генерации нейтронов в $\Delta E'$ всегда равна скорости исчезновения нейтронов из $\Delta E'$. Таким образом, получается логическая цепочка, изображенная на рис. 3.22.

В изображенной на рис. 3.22 логической диаграмме все знаки равенства, за исключением жирного, обсуждены выше. А жирный знак равенства следует из логики приведенной диаграммы.

Таким образом, скорость исчезновения нейтронов из $\Delta E'$ не зависит от наличия или отсутствия резонанса. Но в случае наличия резонанса эта величина определяется соотношением $\Sigma_{tot}(E')\Phi(E')\Delta E'$, поскольку любое столкновение с ядром среды приводит или к рассеянию, или к поглощению нейтрона. А в случае отсутствия резонанса реализуется случай слабого поглощения, т.е. $\Sigma_{tot} \approx \Sigma_S$, и устанавливается невозмущенный спектр нейтронов – спектр Ферми – $\Phi_0(E')$. Поэтому в случае отсутствия резонанса скорость исчезновения нейтронов из $\Delta E'$ рассчитывается как $\Sigma_S(E')\Phi_0(E')\Delta E'$.

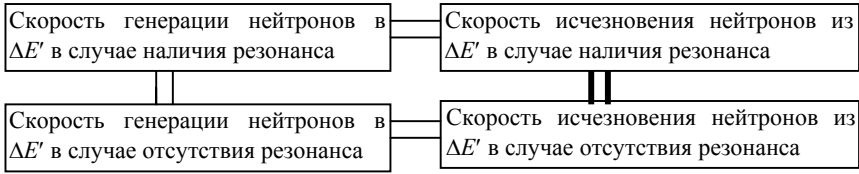


Рис. 3.22. Логическая диаграмма

Итак, получено следующее равенство:

$$\Sigma_{tot}(E')\Phi(E')\Delta E' = \Sigma_S(E')\Phi_0(E')\Delta E', \quad (3.76)$$

где

$$\Phi_0(E') = \frac{j(E')}{\xi \Sigma_S(E')E'}.$$

Отметим, что поскольку сечение рассеяния замедлителя фактически не зависит от энергии, а плотность замедления слабо меняется на малом интервале $[E_1, E_2]$ в случае слабого поглощения, то правая часть равенства (3.76) фактически не зависит от энергии. А это означает, что плотность столкновений (левая часть (3.76)) постоянна в области узкого изолированного резонанса. Поскольку плотность замедления слабо меняется на малом интервале $[E_1, E_2]$ в случае слабого поглощения, то в формуле для невозмущенного спектра Ферми (Φ_0) заменим в числителе $j(E')$ на $j(E_2)$, где $j(E_2)$ – плотность замедления, «падающая» на резонанс:

$$\Phi_0(E') = \frac{j(E')}{\xi \Sigma_S(E')E'} \approx \frac{j(E_2)}{\xi \Sigma_S(E')E'}.$$

Подставим последнее выражение в (3.76) и выразим спектр нейтронов $\Phi(E)$ в пределах узкого изолированного резонанса:

$$\Phi(E') = \frac{\Sigma_S(E')\Phi_0(E')}{\Sigma_{tot}(E')} = \frac{j(E_2)}{\xi\Sigma_{tot}(E')E'}.$$

Таким образом, в пределах узкого изолированного резонанса устанавливается следующий спектр:

$$\boxed{\Phi(E) = \frac{j(E_2)}{\xi\Sigma_{tot}(E)E}}, \quad (3.77)$$

который называется *спектром Вигнера*. Отметим, что в отличие от спектра Ферми в знаменателе спектра Вигнера стоит не макроскопическое сечение рассеяния замедлителя, которое фактически не зависит от энергии, а полное сечение, которое сильно зависит от энергии, поскольку включает сечение поглощения поглотителя:

$$\Sigma_{tot}(E) = \Sigma_{a\Pi}(E) + \Sigma_{s\Pi}(E) + \Sigma_{s3}(E) + \Sigma_{a3}(E).$$

Если пренебречь сечением поглощения замедлителя по сравнению с сечением рассеяния замедлителя и сечением рассеяния поглотителя по сравнению с сечением поглощения поглотителя, то для полного сечения получится следующее выражение:

$$\Sigma_{tot}(E) \cong \Sigma_{a\Pi}(E) + \Sigma_{s3} = N_{\Pi}\sigma_{a\Pi}(E) + N_3\sigma_{s3}. \quad (3.78)$$

Если в среде очень мало поглотителя (случай бесконечного разбавления), то каким бы большим не было микроскопическое сечение поглощения поглотителя первое слагаемое в (3.78) стремится к нулю, следовательно, полное сечение стремится к сечению рассеяния замедлителя, а спектр Вигнера – к спектру Ферми (кривая 1 на рис. 3.23). При повышении концентрации ядер поглотителя растет влияние первого слагаемого в (3.78) и в спектре нейтронов (3.77) начинает наблюдаться «провал», который ведет себя противоположным образом по отношению к микроскопическому сечению поглощения (кривая 2 на рис. 3.23).

Чем больше доля ядер поглотителя, тем сильнее депрессия спектра нейтронов в области резонанса. Этот эффект «выедания» спектра нейтронов на резонансе при повышении доли ядер поглотителя в среде называется *эффектом резонансной самоэкранировки*. Он приводит к тому, что при повышении концентрации ядер поглотителя в среде скорость поглощения на резонансе, которая определяется интегралом по энергии от произведения макроскопического сечения поглощения поглотителя на спектр нейтронов, растет медленнее, чем макроскопическое сечение поглощения поглотителя.

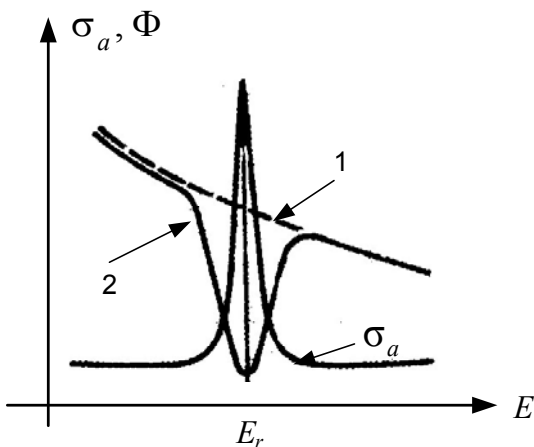


Рис. 3.23. Спектр нейтронов в области резонанса

Подставим найденный спектр Вигнера (3.78) в уравнение баланса нейтронов в интервале $\Delta E'$:

$$\Delta j(E') = \Sigma_a(E') \Phi(E') \Delta E' = \Sigma_a(E') \frac{j(E_2)}{\xi \Sigma_{tot}(E') E'} \Delta E'.$$

Рассчитаем скорость поглощения на резонансе, проинтегрировав последнее выражение по интервалу энергий $[E_1, E_2]$:

$$j(E_2) - j(E_1) = j(E_2) \int_{E_1}^{E_2} dE' \frac{\Sigma_a(E)}{\xi \Sigma_{tot}(E') E'}.$$

Вероятность избежать поглощения при замедлении в области энергий $[E_1, E_2]$ будет определять следующей формулой:

$$\begin{aligned} \varphi(E_2, E_1) &= \frac{j(E_1)}{j(E_2)} = 1 - \frac{j(E_2) - j(E_1)}{j(E_2)} = 1 - \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{tot}(E') E'} dE' \approx \\ &\approx \exp \left\{ - \int_{E_1}^{E_2} dE \frac{\Sigma_a(E)}{\xi \Sigma_{tot}(E) E} \right\}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве учтено, что интеграл всегда существенно меньше единицы, и использована формула разложения экспоненциальной функции около нуля.

Таким образом, для вероятности избежать поглощения на узком изолированном резонансе при замедлении на ядрах замедлителя с атомной массой большей единицы получена следующая формула:

$$\varphi(E_2, E_1) \approx \exp \left\{ - \int_{E_1}^{E_2} dE \frac{\Sigma_a(E)}{\xi \Sigma_{tot}(E) E} \right\}. \quad (3.79)$$

Если учесть, что функция $1/E$ слабо меняется на небольшом интервале $[E_1, E_2]$, то для расчетов вероятности избежать поглощения на узком изолированном резонансе при замедлении на ядрах замедлителя с атомной массой большей единицы можно использовать следующую формулу:

$$\varphi(E_2, E_1) \approx 1 - \frac{1}{\xi E_r} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} dE'. \quad (3.80)$$

Необходимо подчеркнуть, что в $\Sigma_{tot}(E')$ входит и $\Sigma_a(E')$, и $\Sigma_s(E')$, причем в $\Sigma_s(E')$ входит $\Sigma_{s3}(E')$ – слабоменяющаяся

функция и $\Sigma_{\text{СП}}(E')$ – сильноменяющаяся резонансная функция. Но поскольку рассматривается тяжелый поглотитель, то замедлением на поглотителе часто пренебрегают (это так называемое приближение бесконечной массы поглотителя). При этом в $\Sigma_{\text{tot}}(E')$ учитывают только $\Sigma_{\text{СЗ}}$, считая, что $\Sigma_{\text{СП}} \ll \Sigma_{\text{СЗ}}$ даже в резонансе, и $\Sigma_{\text{аП}}(E')$, пренебрегая $\Sigma_{\text{аЗ}}$, по сравнению с $\Sigma_{\text{СЗ}}$. Этот случай рассмотрен в прил. 5.

3.13. Поглощение нейтронов на группе узких изолированных резонансов

Рассмотрим задачу о нахождении вероятности избежать поглощения на группе узких изолированных резонансов в сечении поглощения поглотителя, расположенных в асимптотической по отношению к замедлителю области энергии. Отметим, что результат будет приближенным, поскольку не все резонансы в сечении поглощения поглотителя реально являются узкими и изолированными по отношению к замедлению на реальных замедлителях.

Всю энергетическую область в данной задаче представим как совокупность непересекающихся энергетических интервалов (рис. 3.24), в каждом из которых выполняется одно из нижеследующих условий:

- макроскопическое сечение поглощения много меньше макроскопического сечения рассеяния (область слабого поглощения), это условие реализуется между узкими изолированными резонансами или в области неразрешенных резонансов;
- внутри интервала расположен узкий изолированный резонанс в сечении радиационного захвата поглотителя.

В предыдущем разделе были получены выражения для расчета вероятности избежать поглощения при замедлении для обоих, перечисленных выше, случаев: выражение (3.75) для случая слабого поглощения и (3.79) для случая узкого изолированного резонанса.

Видно, что вид этого выражения не зависит от рассматриваемого случая. Для расчета вероятности избежать поглощения при замедлении для всей энергетической области $[E_1, E_2]$ необходимо перемножить вероятности избежать поглощения при замедлении для каждого из энергетических интервалов, составляющих эту область (см. рис. 3.24), при этом каждая из вероятностей определяется одним и тем же выражением (3.75) или (3.79):

$$\begin{aligned}\varphi(E_2, E_1) &= \prod_{i=1}^I \varphi(E_{i+1}, E_i) = \prod_{i=1}^I \left[\exp \left\{ - \frac{E_{i+1}}{E_i} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{tot}(E')} \frac{dE'}{E'} \right\} \right] = \\ &= \exp \left[- \int_{E_1}^{E_2} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{tot}(E')} \frac{dE'}{E'} \right].\end{aligned}$$

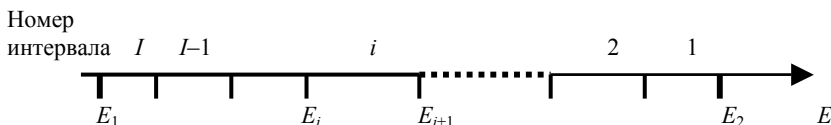


Рис. 3.24. Схема разбиения энергетической области на интервалы

Необходимо отметить, что последнее выражение:

- точное для замедления на водороде;
- приближенное для случая слабого поглощения при замедлении на ядрах с атомной массой большей единицы;
- приближенное для случая одного или нескольких узких изолированных резонансов в сечении поглощения поглотителя при расположенных в асимптотической области энергии по отношению к замедлению на замедлителе с атомной массой большей единицы.

В физике ядерных реакторов большой интерес представляет вероятность избежать поглощения при замедлении от E_0 – энергии, при которой нейтроны рождаются (около 2 МэВ), до E_{th} – верхней границы тепловой области энергии (1 – 5 эВ). Естественно, что эту вероятность можно рассчитать по формуле:

$$\varphi(E_0, E_{th}) \approx \exp \left[- \int_{E_{th}}^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{tot}(E')} \frac{dE'}{E'} \right]. \quad (3.81)$$

3.14. Эффективный и истинный резонансные интегралы

Расчет вероятности избежать поглощения при замедлении по общей, пусть даже приближенной, формуле (3.81), представляет собой сложную задачу. Действительно, для каждой конкретной топливной композиции необходимо вычислить интеграл по энергетической переменной от функции, которая имеет сложную (резонансную) зависимость от энергии и которая стоит и в числителе, и в знаменателе подынтегральной функции. Задача существенно усложняется для реальных сред, состоящих из нескольких десятков резонансных поглотителей (тяжелых ядер).

В показателе экспоненты в выражении (3.81) стоит интеграл $R = \int_{E_{th}}^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{tot}(E')} \frac{dE'}{E'}$, который пропорционален скорости поглощения нейтронов. Действительно, скорость поглощения нейтронов в области от E_{th} до E_0 рассчитывается по формуле:

$$R_1 = \int_{E_{th}}^{E_0} \Sigma_a(E') \Phi(E') dE',$$

где в общем случае под интегралом стоит спектр Вигнера

$$\Phi(E') \sim \frac{1}{\xi \Sigma_{tot}(E')E'}. \text{ Поэтому } R_1 \sim \int_{E_{th}}^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{tot}(E')} \frac{dE'}{E'} = R.$$

Перепишем R в переменных летаргии: $R = \int_0^{u_{th}} \frac{\Sigma_a(u')}{\xi \Sigma(u')} du'$, где u_{th} –

летаргия, соответствующая E_{th} .

Если во всей области замедления реализуется *случай слабого поглощения*, то полное макроскопическое сечение приблизительно равно макроскопическому сечению рассеяния замедлителя и не зависит от энергии нейтрона ($\Sigma_{tot}(E) \approx \Sigma_{S3}$). В этом случае выражение для R можно переписать следующим образом:

$$\int_0^{u_{th}} \frac{\Sigma_a(u')}{\xi \Sigma_{tot}(u')} du' = N_{\Pi} \int_0^{u_{th}} du' \frac{\sigma_{a\Pi}(u')}{\xi \Sigma_{S3}} = N_{\Pi} I \frac{1}{\xi \Sigma_{S3}},$$

где введено обозначение

$$I \equiv \int_0^{u_{th}} du' \sigma_{a\Pi}(u').$$

Величина I называется *истинным резонансным интегралом*, представляет собой интеграл от микроскопического сечения поглощения поглотителя по всей области замедления и измеряется в барнах. Истинный резонансный интеграл не зависит от соотношения ядер поглотителя и замедлителя в среде, а является характеристикой данного нуклида. Для всех значимых в физике ядерных реакторов нуклидов он рассчитан и приведен в соответствующих справочниках. Таким образом, если во всей области замедления реализуется случай слабого поглощения, то вероятность избежать резонансного захвата может быть рассчитана по формуле:

$$\Phi(0, u_{th}) = \exp \left\{ - \frac{N_{\Pi} I}{\xi \Sigma_{S3}} \right\}.$$

В общем случае преобразуем выражение для R следующем образом:

$$\int_0^{u_{th}} \frac{\Sigma_a(u')}{\xi \Sigma_{tot}(u')} du' = \frac{N_{\Pi}}{\xi \Sigma_{S3}} \int_0^{u_{th}} du' \sigma_{a\Pi}(u) \frac{\Sigma_{S3}}{\Sigma_{tot}(u')} = N_{\Pi} I_{\text{эф}} \frac{1}{\xi \Sigma_{S3}},$$

где введено обозначение

$$I_{\text{эф}} \equiv \int_0^{u_{th}} du' \sigma_{a\Pi}(u') \frac{\Sigma_{S3}}{\Sigma_{tot}(u')}.$$

Величина $I_{\text{эф}}$ называется *эффективным резонансным интегралом* и измеряется в барнах. Эффективный резонансный интеграл рассчитывается для конкретной среды, поскольку он зависит от соотношения ядер поглотителя и замедлителя в среде, т.е. от изотопного состава среды. Эффективный резонансный интеграл в отличие от истинного учитывает резонансную самоэкранировку, поскольку использует спектр Вигнера. Зная эффективный резонансный интеграл в данной среде, можно рассчитать вероятность избежать поглощения при замедлении:

$$\varphi(0, u_{th}) = \exp \left\{ - \frac{N_{\Pi}}{\xi \Sigma_{S3}} I_{\text{эф}} \right\}, \quad (3.82)$$

где N_{Π} — концентрация ядер поглотителя в среде.

Исходя из последней формулы, легко дать определение $I_{\text{эф}}$.

Эффективный резонансный интеграл — эффективное микроскопическое сечение поглощения ядер резонансного поглотителя, которое позволяет на невозмущенном спектре замедления (спектре Ферми — $1/\xi \Sigma_S$) правильно рассчитать интегральную величину — вероятность избежать поглощения при замедлении.

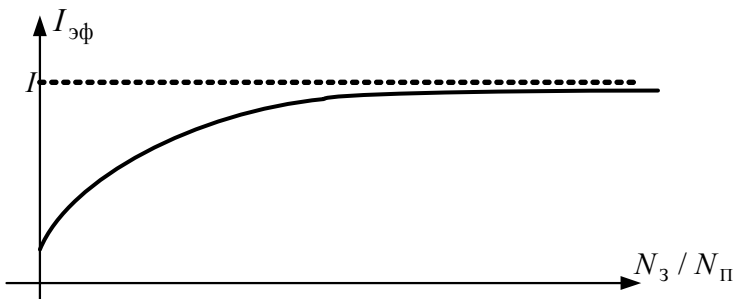


Рис. 3.25. Зависимость эффективного резонансного интеграла от соотношения количества ядер замедлителя и поглотителя в среде

Естественно, что эффективный резонансный интеграл всегда меньше истинного и стремится к нему в случае бесконечного разбавления (рис. 3.25). При этом спектр Вигнера стремится к спектру Ферми и резонансная самоэкранировка играет все меньшую роль.

Глава 4

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАМЕДЛЯЮЩИХСЯ НЕЙТРОНОВ

В данной главе в рамках одной модели будут рассмотрены как пространственное распределение (диффузия), так и энергетическое распределение (замедление) нейтронов, которые обсуждались по отдельности в гл. 2 и 3 соответственно. После рождения внешним источником, или в результате деления ядер среды, нейтроны сталкиваются с ядрами, теряя энергию, и одновременно смещаются от источника нейтронов в пространстве. Поэтому для описания нейтронного поля в среде необходимо учитывать взаимосвязанные процессы диффузии и замедления нейтронов, или, другими словами, описывать пространственно-энергетическое распределение нейтронов. Таким образом, фазовое пространство для модели описания нейтронного поля, которое будет рассмотрено в данной главе, представляет собой совокупность переменных (\vec{r}, E) . Будет рассмотрена конечная гомогенная неразмножающаяся и слабопоглощающая среда ($\Sigma_a \ll \Sigma_s$), состоящая из тяжелых ядер ($A \gg 1$). Размер среды должен быть существенно больше длины свободного пробега нейтронов в этой среде. Модель нейтронного поля будет формулироваться для пространственных областей, расположенных далеко (более трех длин свободного пробега нейтрона в среде) от локальных неоднородностей и в асимптотической области энергий. В случае замедления на ядрах с атомной массой существенно большей единицы, как было показано в гл. 3, упругое потенциальное рассеяние изотропно в ЛС. Если при этом рассматривать изотропные источники нейтронов, то можно сформулировать уравнения относительно интегральных по угловой переменной функций, т.е. исключить зависимость от угловой переменной. Отметим, что требование того, чтобы среда состояла из тяжелых ядер, является необходимым для применимости рассматриваемой модели (для сред, состоящих из водорода и дейтерия, данная модель не применима), но расчетные исследования показали, что данная модель может с успехом использоваться для описания нейтронного поля в

средах, состоящих из веществ с атомной массой больше десяти, т.е. для реальных замедлителей (H_2O , C , D_2O , Be и др.).

4.1. Уравнение замедления в диффузионном приближении

Рассмотрим баланс нейтронов в элементарном фазовом объеме $dVdE$ около точки фазового пространства (\vec{r}, E) . При этом одновременно учтем два процесса – замедление нейтронов и их диффузию. Рассмотрим стационарную задачу и неразмножающую среду, состоящую из тяжелых ядер.

Уравнение баланса нейтронов в элементарном фазовом объеме в данном случае будет иметь вид

$$-L(\vec{r}, E) - A(\vec{r}, E) + R(\vec{r}, E) + Q(\vec{r}, E) = 0,$$

где $L(\vec{r}, E)$ – скорость утечки нейтронов из $dVdE$ через границу объема dV за счет диффузии; $A(\vec{r}, E)$ – скорость исчезновения нейтронов из $dVdE$ за счет процессов поглощения и рассеяния нейтронов; $R(\vec{r}, E)$ – скорость генерации нейтронов в $dVdE$ за счет замедления при $E' > E$; $Q(\vec{r}, E)$ – скорость генерации нейтронов в $dVdE$ внешним источником.

Отметим, что любое рассеяние нейтрона уводит его из фазового объема $dVdE$, поскольку вероятность того, что энергия нейтрона после рассеяния останется в элементарном интервале dE бесконечно мала. Каждое из слагаемых в уравнении баланса можно записать известным способом, который подробно обсуждался или в гл. 2, или в гл. 3 при выводе соответствующих уравнения баланса нейтронов:

$$L(\vec{r}, E) = \text{div } \vec{i}(\vec{r}, E) dVdE,$$

где $\vec{i}(\vec{r}, E)$ – вектор тока нейтронов;

$$A(\vec{r}, E) = \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) dV dE,$$

где $\Sigma_{tot}(\vec{r}, E) = \Sigma_a(\vec{r}, E) + \Sigma_s(\vec{r}, E)$;

$$R(\vec{r}, E) = \int_E^{\min(E_0, E/\alpha)} \Sigma_s(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E') \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} dV dE ;$$

$$Q(\vec{r}, E) = S(\vec{r}, E) dV dE,$$

где $S(\vec{r}, E)$ – мощность внешних источников нейтронов (заданная функция).

После подстановки полученных выражений в уравнение баланса нейтронов в фазовом объеме $dV dE$ и сокращения $dV dE$ получим уравнение баланса нейтронов в единичном фазовом объеме

$$\begin{aligned} & -\operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}, E) - \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) + \\ & + \int_E^{\min(E_0, E/\alpha)} \Sigma_s(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E') \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} + S(\vec{r}, E) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение – точное и отражает закон сохранения нейтронов, но содержит две неизвестные функции – плотность потока и вектор тока нейтронов. Для связи вектора тока нейтронов с плотностью потока нейтронов используем полученный в гл. 2 закон Фика, который обобщим на случай рассматриваемого фазового пространства: $\vec{i}(\vec{r}, E) = -D(\vec{r}, E) \operatorname{grad} \Phi(\vec{r}, E)$. После подстановки закона Фика в последнее уравнение получим искомое уравнение замедления в диффузионном приближении (или уравнение диффузии замедляющихся нейтронов):

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} D(\vec{r}, E) \nabla \Phi(\vec{r}, E) - \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) + \\ & + \int_E^{\min(E_0, E/\alpha)} dE' \Sigma_s(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E') \frac{1}{(1-\alpha)E'} + S(\vec{r}, E) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку это уравнение использует закон Фика, то оно применимо только в случае применимости закона Фика, т.е. для больших слабопоглощающих сред, состоящих из тяжелых ядер, далеко от локальных неоднородностей и в случае, если сечение рассеяния постоянно на расстоянии нескольких длин свободного пробега нейтрона от рассматриваемой точки пространства.

В случае гомогенной среды (параметры среды не зависят от пространственной переменной) уравнение замедления в диффузионном приближении принимает вид

$$D(E)\Delta\Phi(\vec{r}, E) - \Sigma_{tot}(E)\Phi(\vec{r}, E) + \int_E^{\min(E_0, E/\alpha)} dE' \Sigma_S(E')\Phi(\vec{r}, E') \frac{1}{(1-\alpha)E'} + S(\vec{r}, E) = 0. \quad (4.1)$$

Третий член в этом уравнении, т.е. $\int_E^{\min(E_0, E/\alpha)} dE' \Sigma_S(E')\Phi(\vec{r}, E') \frac{1}{(1-\alpha)E'}$, часто называется *интегралом столкновений*.

4.2. Модель непрерывного замедления (диффузионно-возрастное приближение)

Рассмотрим асимптотическую область энергий, т.е. будем разбирать уравнение (4.1) в области, отстоящей от области источника более чем на три ступеньки замедления.

Преобразуем интеграл столкновений в уравнении (4.1). В интеграл столкновений входит функция $F_S(\vec{r}, E) = \Sigma_S(E)\Phi(\vec{r}, E)$ – плотность рассеяния нейтронов около точки \vec{r} при энергии E . Из теории замедления (см. гл. 3) известно, что в бесконечной гомогенной неразмножающей и непоглощающей среде при замедлении на ядрах с атомной массой больше единицы в асимптотической области энергий устанавливается спектр Ферми:

$$F_S(\vec{r}, E) = \frac{q}{\xi E} \quad \text{или} \quad F_S(\vec{r}, u) = \frac{q}{\xi},$$

где q – мощность внешнего источника нейтронов. Этот спектр, записанный в переменных летаргии, не зависит от энергетической переменной. В данном случае рассматривается конечная (но большая) поглощающая (но слабопоглощающая) среда с неоднородным расположением источников нейтронов. Поскольку рассматриваемое уравнение применимо только для больших слабопоглощающих сред далеко от локальных неоднородностей, то можно ожидать, что функция плотности рассеяния слабо меняется по энергетической переменной (летаргии) в пределах ступеньки замедления, а следовательно, функцию $F_S(\vec{r}, u)$ в пределах ступеньки замедления можно адекватно описать двумя членами разложения в ряд Тейлора по летаргии u (летаргия после рассеяние) около летаргии u' (летаргия до рассеяния):

$$F_S(\vec{r}, u') \approx F_S(\vec{r}, u) + \frac{\partial F_S(\vec{r}, u)}{\partial u} (u' - u). \quad (4.2)$$

Это выражение точное в бесконечной гомогенной среде без поглощения даже без второго члена. Введением второго члена в разложении (4.2) учитывается конечность среды, наличие поглощения и локальных неоднородностей для большой слабопоглощающей среды далеко от локальных неоднородностей. Заметим, что чем меньше ступенька замедления, т.е. чем тяжелее ядра среды, тем меньше интервал, на котором проводится разложение функции, и, следовательно, точность аппроксимации функции двумя первыми членами разложения в ряд (4.2) выше. Отметим, что использование разложения (4.2) подразумевает, что энергия нейтрона в процессе замедления меняется непрерывно, а не дискретным образом. Это *модель непрерывного замедления* (рис. 4.1).

Необходимо отметить, что на рис. 4.1 приведена качественная картина замедления для среднего нейтрона. Реально при описании нейтронного поля имеют дело с величинами, усредненными по

большому количеству нейтронов, и, естественно, что ступенчатый график на рис. 4.1 трансформируется в гладкую функцию после нескольких первых ступенек замедления.

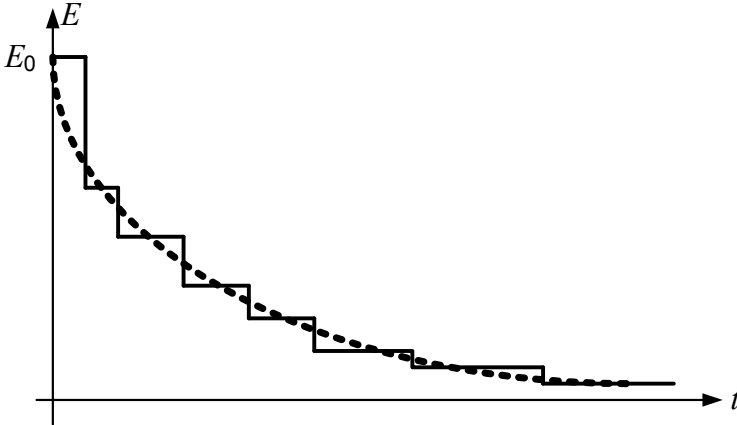


Рис. 4.1. Потеря энергии во времени при замедлении среднего нейтрона

Для выполнения описанных выше преобразований перейдем в уравнении (4.1) от энергетической переменной к летаргии и запишем его в асимптотической области энергий, т.е. для нейтронов, которые испытали уже большое количество столкновений с ядрами среды. Для этого умножим уравнение замедления в диффузионном приближении на E и перейдем к переменной u , учитывая, что $\Phi(\vec{r}, E) \cdot E = \Phi(\vec{r}, u)$:

$$-D(u)\Delta\Phi(\vec{r}, u) + \Sigma_{tot}(u)\Phi(\vec{r}, u) - E \int_E^{E/\alpha} \Sigma_S(E')\Phi(\vec{r}, E') \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} = 0.$$

В последнем уравнении отсутствует член внешнего источника, поскольку оно записано для асимптотической области энергий. Перейдем к переменной летаргии в интеграле столкновений с учетом равенств $E = E_0 e^{-u}$ и $F_S(\vec{r}, u') du' = -F_S(\vec{r}, E') dE'$:

$$\begin{aligned}
E \int_E^{E/\alpha} F_S(\vec{r}, E') \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} &= - \int_u^{u+\ln \alpha} F_S(\vec{r}, u') \frac{E_0 e^{-u}}{(1-\alpha)E_0 e^{-u'}} du' = \\
&= \int_{u-g}^u F_S(\vec{r}, u') \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} du',
\end{aligned}$$

где $g \equiv \ln \frac{1}{\alpha} > 0$, так как $\alpha < 1$.

Таким образом, уравнение замедления в диффузионном приближении в асимптотической области энергий в переменных летаргии записывается в виде

$$-D(u)\Delta\Phi(\vec{r}, u) + \Sigma_{tot}(u)\Phi(\vec{r}, u) - \int_{u-g}^u F_S(\vec{r}, u') \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} du' = 0,$$

где $F_S(\vec{r}, u) = \Sigma_S(u)\Phi(\vec{r}, u)$ – плотности рассеяния.

В последнем уравнении в выражение под интегралом подставим разложение плотности рассеяния $F_S(\vec{r}, u')$ в ряд (4.2):

$$\begin{aligned}
\int_{u-g}^u du' F_S(\vec{r}, u') \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} &= F_S(\vec{r}, u) \int_{u-g}^u du' \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} + \\
&+ \frac{\partial F_S(\vec{r}, u)}{\partial u} \int_{u-g}^u du' (u' - u) \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Выполним интегрирования в последнем выражении:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{u-g}^u \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} du' = \int_g^0 \frac{e^{-y}}{1-\alpha} dy = \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^g e^{-y} dy = \frac{1}{1-\alpha} [-e^{-g} + e^0] = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1,
\end{aligned}$$

так как $e^{-g} = e^{-\ln \frac{1}{\alpha}} = \alpha$.

В ходе вычисления интеграла I_2 используем замену переменных: $y = u - u'$, $dy = -du'$. Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{u-g}^u (u' - u) \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} du' = \int_g^0 y \frac{e^{-y}}{1-\alpha} dy = \int_0^g \frac{y}{1-\alpha} d(e^{-y}) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[ye^{-y} \Big|_0^g - \int_0^g e^{-y} dy \right] = \frac{1}{1-\alpha} [ge^{-g} - (1-\alpha)] = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[\alpha \ln \frac{1}{\alpha} - (1-\alpha) \right] = - \left[1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \right] \equiv -\xi, \end{aligned}$$

так как $-\int_0^g e^{-y} dy = 1-\alpha$ и $e^{-\ln \frac{1}{\alpha}} = e^{\ln \alpha} = \alpha$.

Таким образом, для интеграла рассеяния получаем выражение:

$$\int_{u-g}^u F_S(\vec{r}, u) \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} du' = F_S(\vec{r}, u) - \xi \frac{\partial F_S(\vec{r}, u)}{\partial u}.$$

В этом случае уравнение замедления с учетом диффузии нейтронов принимает вид

$$-D(u)\Delta\Phi(\vec{r}, u) + \Sigma_{tot}(u)\Phi(\vec{r}, u) - \Sigma_S(u)\Phi(\vec{r}, u) + \frac{\partial}{\partial u}(\xi F_S(\vec{r}, u)) = 0.$$

Здесь учтено, что $\Sigma_S(u)\Phi(\vec{r}, u) = F_S(\vec{r}, u)$.

После выполнения сложения второго и третьего члена в этом уравнении получим:

$$-D(u)\Delta\Phi(\vec{r}, u) + \Sigma_a(u)\Phi(\vec{r}, u) + \frac{\partial}{\partial u}(\xi \Sigma_S(u)\Phi(\vec{r}, u)) = 0. \quad (4.3)$$

Последнее уравнение называется уравнением замедления в модели непрерывного замедления. Оно справедливо в асимптотической области энергий в том случае, если можно использовать закон

Фика. Отметим, что чем тяжелее ядра среды, тем более точно разложение (4.2), а следовательно, тем более адекватно уравнение (4.3) описывает пространственно-энергетическое распределение нейтронов в среде.

4.3. Уравнение возраста

Выполним тождественные преобразования уравнения (4.3) к более удобной форме. В асимптотической области энергий в случае слабого поглощения устанавливается спектр Ферми:

$$\Phi(\vec{r}, u) = \frac{j(\vec{r}, u)}{\xi \Sigma_S(u)}. \text{ Перейдем в уравнении (4.3) от плотности потока}$$

нейтронов к плотности замедления:

$$-\frac{D(u)}{\xi \Sigma_S(u)} \Delta j(\vec{r}, u) + \frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma_S(u)} j(\vec{r}, u) + \frac{\partial}{\partial u} j(\vec{r}, u) = 0;$$

$$\Delta j(\vec{r}, u) - \frac{\Sigma_a(u)}{D(u)} j(\vec{r}, u) - \frac{\frac{\partial j(\vec{r}, u)}{\partial u}}{\frac{D(u)}{\xi \Sigma_S(u)}} = 0.$$

Введем новую переменную τ , которая удовлетворяет следующему равенству:

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D(u')}{\xi \Sigma_S(u')} du' = \int_0^u \frac{du'}{3 \xi \Sigma_S(u') \Sigma_{tr}(u')} \text{ [см}^2\text{]}$$

и называется *возрастом нейтронов*. Тогда $d\tau = \frac{du}{3 \xi \Sigma_S(u) \Sigma_{tr}(u)} \equiv$

$\equiv \frac{D(u) du}{\xi \Sigma_S(u)}$ и рассматриваемое уравнение запишется в виде:

$$\boxed{\Delta j(\vec{r}, \tau) - \frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} j(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial j(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = 0.} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) называют *уравнением возраста*, которое, по существу, есть уравнение баланса скоростей процессов в единичном фазовом объеме около точки (\vec{r}, τ) в модели непрерывного замедления. Первый член в этом уравнении описывает скорость изменения плотности замедления за счет диффузии нейтронов (утечка через границу пространственного объема), второй – скорость изменения плотности замедления за счет процессов поглощения, а третий – скорость изменения плотности замедления за счет процессов рассеяния при более высоких энергиях.

Уравнение (4.4) можно применять для описания пространственно-энергетического распределения нейтронов в асимптотической области энергий для больших слабопоглощающих сред, состоящих из тяжелых ядер, далеко от локальных неоднородностей и в случае, если макроскопическое сечение рассеяния слабо зависит от пространственной переменной.

Уравнение возраста можно преобразовать к более простой форме. Для этого наряду с уравнением возраста (4.4), записанного относительно функции $j^*(\vec{r}, \tau)$ – плотности замедления в реальной поглощающей среде:

$$\Delta j^*(\vec{r}, \tau) - \frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} j^*(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial j^*(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (4.5)$$

рассмотрим уравнение возраста в аналогичной по геометрии и составу среде, но будем считать, что в среде отсутствует поглощение нейтронов:

$$\Delta j(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial j(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (4.6)$$

где $j(\vec{r}, \tau)$ – плотность замедления в не поглощающей среде.

При $\tau = 0$ для обоих уравнений должно выполняться начальное условие:

$$j^*(\vec{r}, 0) = j(\vec{r}, 0) = S(\vec{r}). \quad (4.7)$$

Найдем связь между функциями $j^*(\vec{r}, \tau)$ и $j(\vec{r}, \tau)$. Будем искать эту связь в виде $j^*(\vec{r}, \tau) = j(\vec{r}, \tau) \cdot \rho(\tau)$. Подставив это выражение в уравнение (4.5), получим:

$$\rho(\tau) \Delta j(\vec{r}, \tau) - \frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} \rho(\tau) j(\vec{r}, \tau) - \rho(\tau) \frac{\partial j(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} - j(\vec{r}, \tau) \frac{\partial \rho(\tau)}{d\tau} = 0.$$

Или после группировки слагаемых:

$$\rho(\tau) \left[\Delta j(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial j(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} \right] - j(\vec{r}, \tau) \left[\frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} \rho(\tau) + \frac{d\rho(\tau)}{d\tau} \right] = 0.$$

Выражение в первых квадратных скобках представляет собой правую часть равенства (4.6), а следовательно, всегда равно нулю. Таким образом, для того, чтобы оставшееся равенство выполнялось для любого значения $j(\vec{r}, \tau)$, необходимо, чтобы выражение во вторых квадратных скобках было тождественно равно нулю, т.е.

$$\frac{d\rho(\tau)}{d\tau} + \frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)} \rho(\tau) = 0,$$

и, следовательно

$$\frac{d\rho(\tau)}{\rho(\tau)} = -d\tau \frac{\Sigma_a(\tau)}{D(\tau)}.$$

Из начального условия (4.7) получаем, что $\rho(0) = 1$. Решение последнего уравнения с данным начальным условием имеет вид

$$\rho(\tau) = \exp \left\{ - \int_0^{\tau} d\tau' \frac{\Sigma_a(\tau')}{D(\tau')} \right\}.$$

Тождественно преобразуем интеграл в полученном выражении:

$$\int_0^{\tau} d\tau' \frac{\Sigma_a(\tau')}{D(\tau')} = \int_0^u du' \frac{\Sigma_a(u')}{\xi \Sigma_S(u')} = \int_E^{E_0} dE' \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_S(E') E'}.$$

Для вышеприведенных преобразований был использован переход от переменной «возраст» к переменной «летаргия» по формуле

$$d\tau' = \frac{D du'}{\xi \Sigma_S}, \text{ а затем от переменной «летаргия» к переменной «энергия» по формуле: } du' = -\frac{dE'}{E'}.$$

Таким образом, если учесть, что в слабопоглощающей среде $\Sigma_{tot} \approx \Sigma_S$, получим, что $\rho(\tau) \equiv \exp \left\{ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_{tot}(E')} \frac{dE'}{E'} \right\}$ – вероятность избежать поглощения при замедлении от энергии источника E_0 ($\tau = 0$) до текущего значения энергии E , соответствующего возрасту τ . А следовательно, плотности замедления в среде с поглощением и в точно такой же среде, но без поглощения, связаны между собой выражением:

$$j^*(\vec{r}, \tau) = j(\vec{r}, \tau) \cdot \exp \left\{ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_S(E')} \frac{dE'}{E'} \right\} \quad (4.8)$$

$$\text{или } j^*(\vec{r}, \tau) = j(\vec{r}, \tau) \cdot \varphi(0, \tau).$$

Таким образом, вместо уравнения возраста (4.5) можно решать более простое уравнение возраста без учета поглощения:

$$\begin{cases} \Delta j(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial j(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = 0; \\ j(\vec{r}, 0) = S(\vec{r}). \end{cases}$$

Для получения решения в среде с поглощением необходимо, согласно (4.8), найденное решение умножить на вероятность избежать поглощения при замедлении от $\tau = 0$ до текущего значения τ . Отметим, что вероятность избежать поглощения при замедлении может быть рассчитана любым из известных способов, рассмотренных в гл. 3, независимо от решения уравнения возраста.

4.4. Возраст нейтронов и время замедления

Возраст нейтронов τ зависит от E – текущего значения энергии, и E_0 – энергии источника:

$$\tau = \int_0^u \frac{du}{3\xi\Sigma_{tr}\Sigma_S} = \int_0^{E_0} \frac{1}{3\xi\Sigma_{tr}\Sigma_S} \frac{dE'}{E'} \equiv \tau(E_0, E). \quad (4.9)$$

Отметим, что возраст нейтронов, энергия которых равна энергии источника E_0 , равен нулю. В процессе замедления возраст нейтронов, как и латаргия, возрастает. Поскольку макроскопические сечения измеряются в см^{-1} , то единица измерения возраста – см^2 . В дальнейшем будет показано, что τ определяет средний квадрат смещения нейтрона при замедлении от E_0 до E .

Происхождение названия «возраст нейтрона» связано с тем, что τ однозначно связан и с хронологическим возрастом нейтронов – средним временем замедления нейтрона от E_0 до E . Действительно, если V – скорость нейтрона, то $dS = Vdt$ – путь, проходимый нейтроном за время dt , а $\frac{Vdt}{\lambda_S}$ (где λ_S – средняя длина свободного пробега до рассеяния) – среднее число актов рассеяния на ядрах среды, которое испытал нейтрон на пути dS . В среднем за одно рас-

сеяние летаргия возрастает на ξ , т.е. после $\frac{Vdt}{\lambda_S}$ рассеяний прирост

летаргии du можно определить как $du = \frac{Vdt}{\lambda_S} \xi$. Поскольку

$d\tau = \frac{du}{3\xi\Sigma_S\Sigma_{tr}}$, то после подстановки выражения для du имеем:

$d\tau = \frac{Vdt\xi}{\lambda_S 3\xi\Sigma_S\Sigma_{tr}} = DVdt$. Отсюда легко получить среднее время

замедления до возраста τ :

$$T(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{d\tau'}{D(\tau')V(\tau')} . \quad (4.10)$$

Получим $T(E_0, E)$ – среднее время замедления нейтрона от E_0 до E . Для этого надо перейти от переменной «возраст» к переменной «энергия» в последнем выражении, воспользовавшись равенством:

$$d\tau = \frac{D(u)du}{\xi\Sigma_S(u)} = -\frac{D(E)dE}{\xi\Sigma_S(E)E} .$$

С учетом этого равенства и того факта, что возраст, равный нулю, соответствует E_0 , получим искомое выражение:

$$T(E_0, E) = \int_E^{E_0} \frac{1}{V(E)\xi\Sigma_S(E)} \frac{dE'}{E'} . \quad (4.11)$$

Получим формулу для определения времени замедления нейтронов. Для этого в уравнении (4.11) перейдем от энергии к скорости,

воспользовавшись равенством $E = \frac{1}{2}V^2$, $dE = VdV$, поскольку

масса нейтрона равна одной атомной единицы массы, и получим выражение для времени замедления через скорость нейтронов:

$$T(V_0, V) = 2 \int_V^{V_0} \frac{dV'}{\xi \Sigma_S V'^2},$$

где V_0 – скорости нейтронов источника; V – текущее значение скорости.

Поскольку в области замедления сечение рассеяния слабо меняется от энергии нейтрона: $\xi \Sigma_S = \bar{\xi} \bar{\Sigma}_S$, то время замедления можно

рассчитать по формуле: $T(V_0, V) = \frac{2}{\xi \Sigma_S} \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} \right)$. Практически

всегда $V_0 \gg V$, поэтому $\frac{1}{V_0} \ll \frac{1}{V}$ и время замедления можно

оценить по формуле: $T \cong \frac{2}{\xi \Sigma_S V}$. В табл. 4.1 приведены характер-

ные времена замедления и возраст нейтронов для разных замедлителей при замедлении от 2 МэВ до 1 эВ (границы тепловой области энергий).

Таблица 4.1

**Характерные время замедления и возраст нейтронов
для основных замедлителей**

Замедлитель	$T \times 10^6, \text{с}$	$\tau, \text{см}^2$
H ₂ O	6,7	27
D ₂ O	48	120
Be	59	98
C	149	350

Отметим, что все полученные выше формулы носят приближенный характер, поскольку еще до первого столкновения нейтрона с ядром он прошел некоторый путь от источника, на протяжении которого его возраст не менялся и был равен нулю, и который ни одна из приведенных выше формул не учитывает. А, с другой стороны, после последнего столкновения с ядром, когда у нейтрона энергия станет равной E , нейтрон пройдет некоторый путь в среде до столкновения с ядром, а следовательно, до изменения своей

энергии. Этот факт также не учтен ни в одной из формул. Все это следствие того факта, что приведенные выше формулы получены в рамках модели непрерывного замедления, хотя реально замедление носит ступенчатый характер. Для учета перечисленных выше эффектов, например при сравнении экспериментальных и расчетных данные, в формулу для возраста (4.9) необходимо прибавить член, учитывающий пробег до первого и после последнего столкновения нейтрона с ядром:

$$\tau(u) = \{2\lambda_S^2(0) + 2\lambda_S^2(u)\} + \int_0^u du' \frac{D(u')}{\xi \Sigma_S(u')}.$$

Поправочный член в фигурных скобках может быть очень существенным. Так, для воды он составляет примерно одну треть полного возраста при замедлении от энергии деления до границы тепловой области энергий. Особенно существенным этот член становится при описании замедления быстрых нейтронов, что будет рассмотрено в разд. 4.8.

Формула (4.9) не учитывает также отклонение от моноэнергетичности источника нейтронов. Если источник нейтронов имеет спектр $\chi(E)$ (например, спектр деления), то вместо формул (4.9) и (4.11) необходимо использовать следующие формулы:

$$\tau(E) = \int_0^\infty dE' \chi(E') \tau(E', E)$$

и

$$T(E) = \int_0^\infty dE' \chi(E') T(E', E).$$

При этом для спектра деления в средах, состоящих из смеси замедлителя и тяжелых ядер, становится необходимо учитывать процессы неупругого рассеяния нейтронов на тяжелых ядрах. Этот эффект будет обсуждаться в разд. 4.8.

4.5. Условия однозначного выбора решения уравнения возраста в физических задачах

Уравнение возраста $\Delta j(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial j(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = 0$ представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка и имеет в общем решении две неопределенные константы, т.е. с математической точки зрения оно имеет бесконечное множество решений. Но для физически однозначно сформулированной задачи необходимо из всего бесконечного множества решений выбрать одно, соответствующее именно рассматриваемой постановке физической задаче. Это достигается путем использования одного или нескольких условий, приведенных ниже.

1. Условие неотрицательности и ограниченности плотности замедления. Исходя из определения для плотности замедления, должно выполняться следующее условие:

$$0 \leq j(\vec{r}, \tau) \leq S(\vec{r}) .$$

2. Условие на внешней невогнутой границе среды с вакуумом. Это условие получается из соответствующего условия для плотности потока в диффузионном приближении:

$$\Phi(\vec{r}_S + \alpha \vec{n}, \tau) = 0 ,$$

где \vec{r}_S – радиус-вектор границы; $\alpha = 0,71 \lambda_{lr}$ – длина линейной экстраполяции потока в вакуум, путем использования выражения для связи плотности потока и плотности замедления:

$$j(\vec{r}, \tau) = \xi \Sigma_S(\tau) \Phi(\vec{r}, \tau) .$$

Тогда условие для плотности замедления имеет вид:

$$j(\vec{r}_S + \alpha \vec{n}, \tau) = 0 .$$

Отметим, что α через величину λ_{tr} зависит от τ , так как при разных энергиях Σ_{tr} различно. Но поскольку рассматриваются большие среды, и размеры среды велики по сравнению с λ_{tr} , то можно считать, что $\tilde{\alpha} = 0,71 \tilde{\lambda}_{tr}$ не зависит от τ , и тогда для всех значений возраста можно использовать одно граничное условие $j(\vec{r}_S + \tilde{\alpha} \vec{n}, \tau) = 0$. Более того при реальных расчетах больших сред часто пренебрегают экстраполированной добавкой и используют условие равенства плотности замедления нулю на реальной границе «среда – вакуум». При этом сознательно идут на ухудшение и так «плохого» решения уравнения возраста в области около границы «среда – вакуум», анализируя решение уравнения возраста внутри рассматриваемой области (далеко от границы «среда – вакуум»).

3. Условия на границе раздела сред с разными свойствами.

Эти условия получаются из соответствующих условий для плотности потока нейтронов в диффузионном приближении на границе раздела двух сред:

$$\begin{cases} \Phi_1(\vec{r}_S, \tau) = \Phi_2(\vec{r}_S, \tau); \\ D_1(\tau) \nabla_n \Phi_1(\vec{r}_S, \tau) = D_2(\tau) \nabla_n \Phi_2(\vec{r}_S, \tau) \end{cases}$$

путем использования выражения для связи плотности потока и плотности замедления $\Phi(\vec{r}, \tau) = \frac{j(\vec{r}, \tau)}{\xi \Sigma_S(\tau)}$. Подставив это выражение

в приведенную выше систему, получим условия для плотности замедления:

$$\begin{cases} \frac{j_1(\vec{r}_S, \tau)}{(\xi \Sigma_S(\tau))_1} = \frac{j_2(\vec{r}_S, \tau)}{(\xi \Sigma_S(\tau))_2}; \\ \left(\frac{D(\tau)}{\xi \Sigma_S(\tau)} \right)_1 \nabla_n j_1(\vec{r}_S, \tau) = \left(\frac{D(\tau)}{\xi \Sigma_S(\tau)} \right)_2 \nabla_n j_2(\vec{r}_S, \tau). \end{cases}$$

Таким образом, если плотность потока на границе раздела двух сред непрерывна, то плотность замедления терпит разрыв, величина которого равна отношению замедляющих способностей сред ($\xi\Sigma_S$). Точно так же, как и при анализе диффузионного приближения, надо понимать, что уравнение возраста дает максимальную погрешность около границы раздела двух сред с разными свойствами, и анализировать его решение имеет смысл только на расстояниях более трех длин свободного пробега нейтрона от рассматриваемой границы.

4. Условие внешнего источника. Это так называемое начальное условие, или условие при $\tau = 0$:

$$j(\vec{r}, 0) = S(\vec{r}),$$

где $S(\vec{r})$ – заданная мощность источника нейтронов с $\tau = 0$ ($u = 0, E = E_0$).

4.6. Решение уравнения возраста

Рассмотрим несколько характерных задач, которые решаются с использованием возрастной теории.

Задача 1. Определить плотность замедления от плоского моноэнергетического источника мощностью S [$1/(\text{см}^2\text{с})$], расположенного в центре бесконечной однородной пластины толщиной a , которая окружена вакуумом (рис. 4.2).

Уравнение возраста для $\tau > 0$ (вне энергии источника) имеет вид

$$\frac{\partial^2 j(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial j(x, \tau)}{\partial \tau}.$$

Источник расположен в пространстве при $x = 0$, т.е. $S(x) = S\delta(x)$, а соответствующее начальное условие по возрасту

имеет вид $j(x, 0) = S\delta(x)$. Будем считать границы пластины ($\pm a/2$) экстраполированными, тогда граничные условия нашей задачи имеют вид $j(\pm a/2, \tau) = 0$ для любого возраста, большего нуля.

Очевидно, что задача – симметричная относительно $x = 0$, т.е. имеет место условие симметрии: $j(-x, \tau) = j(x, \tau)$.

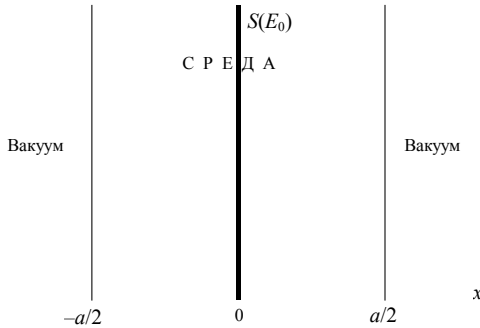


Рис. 4.2. Плоский источник в центре пластины

Уравнение возраста решается методом разделения переменных, т.е. решение ищется в следующем виде:

$$j(x, \tau) = \sum_n f_n(\tau) \psi_n(x) . \quad (4.12)$$

В этом случае граничные условия и условие симметрии примут вид

$$\psi_n(\pm a/2) = 0 \text{ – граничные условия,} \quad (4.13)$$

$$\psi_n(-x) = \psi_n(x) \text{ – условие симметрии.} \quad (4.14)$$

После подстановки (4.12) в исходное уравнение получим:

$$\sum_n \left[f_n(\tau) \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} - \psi_n(x) \frac{df_n(\tau)}{d\tau} \right] = 0 .$$

Разделим обе части уравнения на $f_n(\tau)\psi_n(x)$:

$$\sum_n \left[\frac{\psi_n''(x)}{\psi_n(x)} - \frac{f_n'(\tau)}{f_n(\tau)} \right] = 0.$$

В последнем уравнении первое слагаемое зависит только от переменной x , а второе – только от переменной τ . Эти переменные независимы, а значение выражения в квадратных скобках при любых значениях каждой из переменных всегда равно нулю. Это возможно только в случае, если первое и второе слагаемые равны одной и той же константе. Рассмотрим возможные варианты: положительная и отрицательная константы (константа, равная нулю не рассматривается, поскольку соответствует тривиальному решению).

Если константа положительная: $B_n^2 > 0$, то для функции $\psi_n(x)$ получается уравнение: $\psi_n''(x) = B_n^2 \psi_n(x)$, общее решение которого имеет вид $\psi_n(x) = C_1 \exp(B_n x) + C_2 \exp(-B_n x)$ и не может удовлетворять граничным условиям (4.13), кроме тривиального решения при $C_1 = C_2 = 0$.

Если константа отрицательная: $-B_n^2 < 0$, то для функции $\psi_n(x)$ получается следующее уравнение с соответствующим граничным условием:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} = -B_n^2 \psi_n(x); \\ \psi_n(-a/2) = \psi_n(a/2) = 0. \end{cases}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $\psi_n(x) = C_{n_1} \cos(B_n x) + C_{n_2} \sin(B_n x)$.

Чтобы удовлетворить условию симметрии (4.14), необходимо положить константу $C_{n_2} = 0$, поскольку синус – функция нечетная и не удовлетворяет (4.14).

Таким образом, $\psi_n(x) = C_n \cos(B_n x)$. Для определения константы B_n воспользуемся граничным условием (4.13):

$$C_n \cos\left(B_n \frac{a}{2}\right) = C_n \cos\left(-B_n \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $B_n \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Получаем выражение для определения константы B_n :

$$B_n = \frac{\pi}{a}(1 + 2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Система функций $\{\cos(B_n x)\}$, где B_n определяются выражением (4.15), ортогональна на отрезке $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, т.е. выполняется выражение:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(B_m x) \cos(B_n x) dx = \begin{cases} a/2, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (4.16)$$

В рассматриваемом случае (константа отрицательная: $-B_n^2 < 0$) для функции $f_n(\tau)$ получается следующее уравнение:

$$f_n(\tau) B_n^2 + \frac{df_n(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \text{решением которого являются функции:}$$

$$f_n(\tau) = A_n \exp(-B_n^2 \tau).$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения возраста, согласно (4.12), имеет вид

$$j(x, \tau) = \sum_n \Re_n \exp(-B_n^2 \tau) \cos B_n x, \quad (4.17)$$

где B_n определяется выражением (4.15), а константа \mathfrak{R}_n включает в себя константы A_n и C_n . Для определения константы \mathfrak{R}_n используем начальное условие (решение (4.17) при $\tau = 0$):

$$j(x, 0) = S\delta(x) = \sum_n A_n \cos B_n x.$$

Умножим обе части последнего уравнения на $\cos(B_m x)$ и проинтегрируем по отрезку $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$:

$$S \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \cos(B_m x) \delta(x) = \sum_n A_n \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(B_n x) \cos(B_m x) dx.$$

Воспользовавшись ортогональностью системы косинусов (4.16) и правилами интегрирования дельта-функции, получим: $S = A_m \frac{a}{2}$, а следовательно, $A_m = \frac{2S}{a}$. Таким образом, окончательно имеем решение исходного уравнения возраста:

$$j(x, \tau) = \frac{2S}{a} \sum_n \exp(-B_n^2 \tau) \cos B_n x, \quad (4.18)$$

где коэффициенты B_n определяются выражением (4.15).

Задача 2. Определить плотность замедления от плоского моноэнергетического источника мощностью S , расположенного в бесконечной гомогенной среде.

Необходимо решить уравнение возраста:

$$\frac{\partial^2 j(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial j(x, \tau)}{\partial \tau}$$

с начальным условием $j(x, \tau) = S\delta(x)$, условием симметрии $j(x, \tau) = j(-x, \tau)$ и условием ограниченности плотности замедления на бесконечности. Поскольку среда бесконечна, то, основываясь на методе разделения переменных, решение уравнения возраста будем искать в виде

$$j(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(B, \tau) \psi(x, B) dB. \quad (4.19)$$

После подстановки (4.19) в исходное уравнение получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dB \left[F(B, \tau) \frac{\partial^2 \psi(x, B)}{\partial x^2} - \psi(x, B) \frac{\partial F(B, \tau)}{\partial \tau} \right] = 0,$$

причем функция $\psi(x, B)$ должна удовлетворять условию ограниченности при стремлении переменной x к плюс, минус бесконечности и условию симметрии по переменной x . Разделим обе части последнего равенства на произведение функций $F(B, \tau)\psi(x, B)$ и получим следующее уравнение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dB \left[\frac{\psi''(x, B)}{\psi(x, B)} - \frac{F'(B, \tau)}{F(B, \tau)} \right] = 0.$$

В последнем уравнении первое слагаемое зависит только от переменной x , а второе – только от переменной τ . Эти переменные независимы, а выражение в квадратных скобках при любых значениях каждой из переменных всегда равно нулю. Это возможно только в случае, если первое и второе слагаемые равны одной и той же константе. Рассмотрим возможные варианты: положительная и отрицательная константы (константа, равная нулю, не рассматривается, поскольку соответствует тривиальному решению).

Если константа положительная: $B^2 > 0$, то для функции $\psi(x, B)$ получается уравнение: $\psi''(x, B) = B^2 \psi(x, B)$, общее решение которого имеет вид $\psi(x, B) = C_1 \exp(Bx) + C_2 \exp(-Bx)$ и не может удовлетворить условию ограниченности на бесконечности, кроме тривиального решения при $C_1 = C_2 = 0$.

Если эта константа отрицательная: $-B^2 < 0$, то для функции $\psi(x, B)$ получается следующее уравнение: $\frac{\partial^2 \psi(x, B)}{\partial x^2} = -B^2 \psi(x, B)$, решение которого имеет вид

$$\psi(x, B) = C_1(B) \sin(Bx) + C_2(B) \cos(Bx).$$

Для удовлетворения условию симметрии необходимо принять равной нулю константу C_1 , поскольку функция $\sin(x)$ – нечетная. Таким образом, решение будет иметь вид $\psi(x, B) = C(B) \cos(Bx)$.

В рассматриваемом случае (константа отрицательная: $-B^2 > 0$) для функции $F(B, \tau)$ получается следующее уравнение:

$$\frac{\partial F(B, \tau)}{\partial \tau} = -B^2 F(B, \tau),$$

решением которого является функция

$$F(B, \tau) = H(B) \exp(-B^2 \tau).$$

Таким образом, согласно формуле (4.19), решение исходного уравнения возраста будет иметь вид

$$j(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(B) \exp(-B^2 \tau) \cos(Bx) dB,$$

где константа $G(B)$ включает в себя константы $C(B)$ и $H(B)$.

Для нахождения константы $G(B)$ используем начальное условие по возрасту. При $\tau = 0$

$$S\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(B) \cos(Bx) dB.$$

Известно [2], что $\delta(x)$ может быть представлена в виде

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos Bx dB. \text{ Тогда из выражения}$$

$$\frac{S}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(Bx) dB = \int_{-\infty}^{\infty} G(B) \cos(Bx) dB$$

определяется константа $G(B) = \frac{S}{2\pi}$.

Таким образом, решение уравнения возраста для данной задачи можно записать в виде

$$j(x, \tau) = \frac{S}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-B^2 \tau) \cos(Bx) dB.$$

Интеграл в последнем выражении можно вычислить, используя следующий табличный интеграл [1]:

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) \cos(bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

В нашем случае $a = \tau$, $b = x$ и интеграл преобразовывается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-B^2 \tau) \cos(Bx) dB = 2 \int_0^{\infty} \exp(-B^2 \tau) \cos(Bx) dB = 2 \sqrt{\frac{\pi}{4\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right).$$

В результате для плотности замедления получаем:

$$j(x, \tau) = \frac{S}{2\pi} \frac{2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) = \frac{S}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right).$$

И окончательно, плотность замедления в рассматриваемой задаче имеет вид

$$j(x, \tau) = \frac{S}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right). \quad (4.20)$$

Задача 3. Определить плотность замедления от изотропного моноэнергетического точечного источника мощностью S в бесконечной однородной среде.

Решим данную задачу, используя принцип суперпозиции источников. Для этого воспользуемся найденным в предыдущей задаче решением. Пусть мощность источников плоскости равна единице:

$S = 1 \left[\frac{1}{\text{с} \cdot \text{см}^2} \right]$. Тогда, согласно (4.20), плотность замедления на расстоянии x от плоскости определяется выражением:

$$j_{\text{пл}}(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right). \quad (4.21)$$

Представим плоскость как суперпозицию точечных источников. Для этого возьмем кольцо радиусом ρ и шириной $d\rho$. Все точечные источники, расположенные на этом кольце, удалены на одинаковое расстояние r от точки x (рис. 4.3). Построим плотность замедления от плоскости $j_{\text{пл}}$ как суперпозицию плотности замедления от точечных источников.

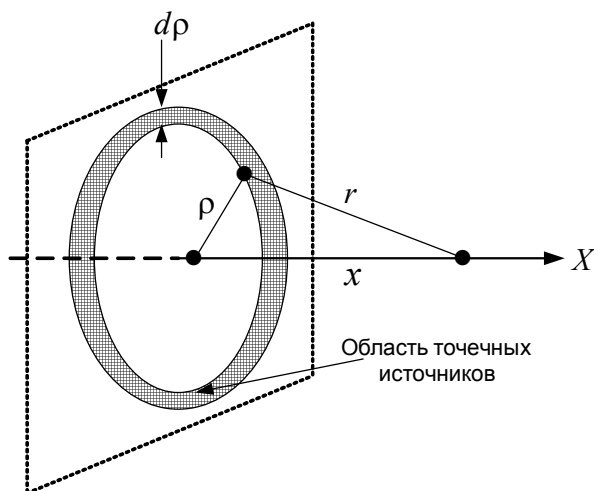


Рис. 4.3. Схема для расчета плотности замедления от точечного источника

Плотность замедления $dj_{\text{пл}}(x, \tau)$ от выбранного кольца площадью $2\pi\rho d\rho$ определяется выражением:

$$dj_{\text{пл}}(x, \tau) = 2\pi\rho dj_T(r, \tau).$$

Тогда плотность замедления от всей плоскости можно вычислить как

$$j_{\text{пл}}(x, \tau) = 2\pi \int_0^{\infty} j_T(r, \tau) \rho d\rho.$$

Учитывая, что

$$x^2 + \rho^2 = r^2, \quad \rho d\rho = r dr,$$

интеграл в последнем выражении можно переписать как

$$j_{\text{пл}}(x, \tau) = 2\pi \int_x^{\infty} j_T(r, \tau) r dr.$$

Продифференцируем последнее выражение по переменной x :

$$\frac{\partial j_{\text{пл}}(x, \tau)}{\partial x} = -2\pi x j_T(x, \tau), \text{ или } j_T(x, \tau) = -\frac{1}{2\pi x} \frac{\partial j_{\text{пл}}(x, \tau)}{\partial x}.$$

Вычислим производную в последнем равенстве, используя (4.21):

$$\frac{\partial j_{\text{пл}}(x, \tau)}{\partial x} = -\frac{2x}{4\tau\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right).$$

Окончательно получаем:

$$j_T(x, \tau) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)}{(4\pi\tau)^{3/2}}.$$

Таким образом, если при $r = 0$ в бесконечной гомогенной среде расположен изотропный точечный источник мощностью S , то плотность замедления рассчитывается по формуле:

$$j(r, \tau) = S \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right)}{(4\pi\tau)^{3/2}}. \quad (4.22)$$

Отметим, что интеграл от плотности замедления по всему объему бесконечной среды равен мощности внешнего источника, поскольку решение уравнения возраста получено для непоглощающей среды (решалось уравнение возраста в непоглощающей среде):

$$\begin{aligned} \int_{\text{весь объем}} dV j(r, \tau) &= 4\pi \int_0^\infty j(r, \tau) r^2 dr = \frac{4\pi S}{(4\pi\tau)^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right) r^2 dr = \\ &= \frac{4\pi S}{2(4\pi\tau)^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{4\tau}\right) t^{1/2} dt = \frac{4\pi S}{2(4\pi\tau)^{3/2}} \cdot \frac{\pi^{1/2}}{2\left(\frac{1}{4\tau}\right)^{3/2}} = S. \end{aligned}$$

При вычислении интеграла последовательно использовались выражение для dV в сферических координатах ($dV = 4\pi r^2$) и замена переменных $t = r^2$ ($dt = 2rdr$, $r = t^{1/2}$), а также табличное значение определенного интеграла, взятое из [1]:

$$\int_0^\infty x^{n-\frac{1}{2}} \exp(-px) dx = \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^n p^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (4.23)$$

при $n=1$, $p = \frac{1}{4\tau}$.

Вычислим средний квадрат смещения (расстояние по прямой) нейтрона при замедлении от энергии E_0 (точки источника) до той точки пространства, где в процессе замедления его возраст стал равен τ :

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle &= \frac{\int dV r^2 j(r, \tau)}{\int dV j(r, \tau)} = \frac{\int_0^\infty r^4 \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right) dr \cdot \frac{S}{(4\pi\tau)^{3/2}}}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4\tau}\right) dr \cdot \frac{S}{(4\pi\tau)^{3/2}}} = \\
&= \frac{\int_0^\infty t^{3/2} \exp\left(-\frac{t}{4\tau}\right) dt}{\int_0^\infty t^{1/2} \exp\left(-\frac{t}{4\tau}\right) dt} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\left(\frac{1}{4\tau}\right)^{5/2}} \cdot \frac{2\left(\frac{1}{4\tau}\right)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} = 6\tau.
\end{aligned}$$

При вычислении интеграла использовались выражение для dV в сферических координатах ($dV = 4\pi r^2$), замена переменных $t = r^2$ ($dt = 2rdr$, $r = t^{1/2}$) и значения интеграла (4.23):

в знаменателе

$$\int_0^\infty t^{1/2} \exp\left(-\frac{t}{4\tau}\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{1}{4\tau}\right)^{3/2}};$$

в числителе

$$\int_0^\infty t^{3/2} \exp\left(-\frac{t}{4\tau}\right) dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\left(\frac{1}{4\tau}\right)^{5/2}}.$$

Таким образом, *возраст нейтронов – одна шестая среднего квадрата смещения (расстояние по прямой) нейтрона в процессе замедления от точки, где его энергия равна E_0 (энергия источника), до той точки, где его возраст стал равен заданной величине τ* . Еще раз отметим, что этот вывод получен в рамках модели непрерывного замедления и не учитывает как пробег нейтрона до первого столкновения, так и смещение нейтрона после последнего столкновения. Плотность замедления $j(r, \tau)$ от единичного источника в бесконечной непоглощающей среде (см. формулу (4.22)) как функция расстояния от источника r при разных значениях возраста τ приведена на рис. 4.4.

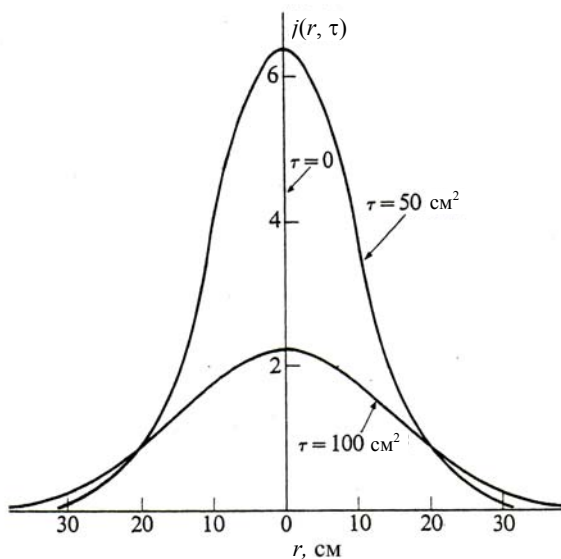


Рис. 4.4. Зависимость плотности замедления от расстояния от точечного источника

Из формулы (4.22) следует, что зависимость $j(r, \tau)$ от r – распределение Гаусса. Чем меньше возраст нейтронов τ , тем ближе распределение $j(r, \tau)$ стремится к дельта-функции и переходит в нее при $\tau = 0$, т.е. чем ближе к источнику, тем больше относительная доля нейтронов с малым возрастом. Чем больше возраст нейтронов, тем реализуется более широкое распределение по пространственной переменной, т.е. нейтроны большего возраста в среднем группируются дальше от источника. При стремлении расстояния от источника к бесконечности соответствующая плотность замедления стремится к нулю, т.е. для любого возраста нейтронов τ смещение на очень большое расстояние от источника маловероятно.

Функция плотности замедления $j(r, \tau)$ для той же самой задачи в зависимости от возраста нейтронов τ при разных расстояниях от источника r изображена на рис. 4.5.

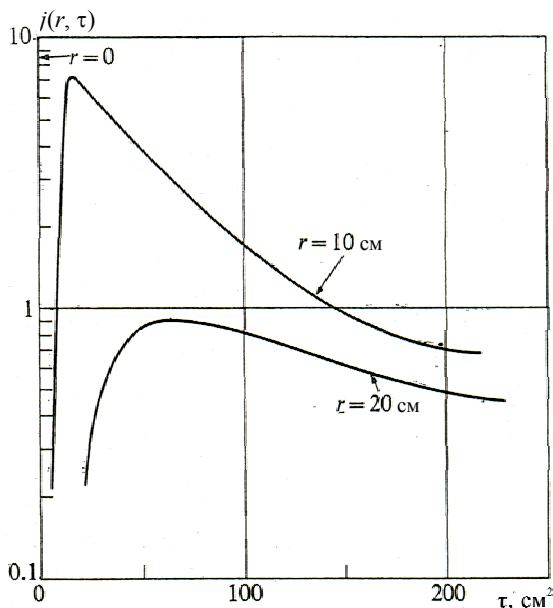


Рис. 4.5. Зависимость плотности замедления от возраста нейтронов

Отметим, что поскольку плотность замедления однозначно связана с плотностью потока нейтронов, то рис. 4.5 дает представление о спектре нейтронов от точечного источника на различных расстояниях от него. Чем дальше от источника, тем более мягкий спектр нейтронов устанавливается в среде, так как с удалением от источника возрастает относительная доля нейтронов с большим возрастом.

4.7. Пространственное распределение замедляющихся нейтронов в среде из водорода

В настоящей главе неоднократно подчеркивалось, что модель непрерывного замедления можно применять только в средах, состоящих из тяжелых ядер, поскольку, во-первых, при выводе ис-

ходного уравнения замедления в диффузионном приближении использовался закон Фика, а, во-вторых, при выводе диффузионно-возрастного уравнения использовались только два первых члена разложения плотности рассеяния в ряд по лётаргии. Оба, перечисленные ранее, приближения реализуются только для сред, состоящих из тяжелых ядер. Рассмотрим особенности пространственного распределения замедляющихся нейтронов в среде, состоящей из чистого водорода. Зависимость сечения рассеяния водорода от энергии дана на рис. 4.6. Средняя энергия нейтронов деления – 2 МэВ. Рассмотрим источник быстрых нейтронов мощностью S , расположенный в среде из водорода.

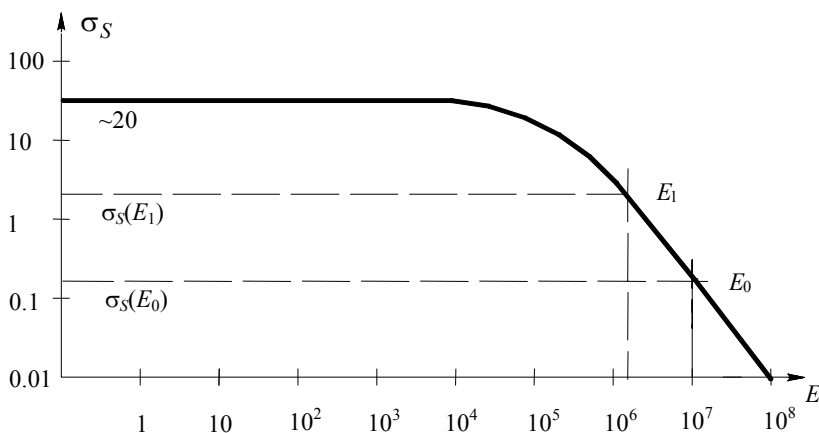


Рис. 4.6. Зависимость сечения рассеяния водорода от энергии

До первого столкновения с ядрами среды нейтроны источника, т.е. нейтроны, не испытавшие до этого ни одного столкновения с ядрами среды, в среднем пройдут путь $\lambda_{s0} = \frac{1}{\Sigma_s(E_0)}$. После первого столкновения средний прирост лётаргии будет составлять $\Delta u = \xi = 1$, а следовательно, средняя энергия после рассеяния будет

$E_1 = E_0 e^{-1} \approx 0,37 E_0$. Из рис. 4.6 видно, что энергии E_1 после рассеяния соответствует $\sigma_S(E_1) \gg \sigma_S(E_0)$, а следовательно, среднее расстояние, которое будут проходить нейтроны между первым и вторым рассеянием, будет существенно меньше среднего расстояния, пройденного нейтронами до первого рассеяния:

$$\lambda(E_1) = \frac{1}{\Sigma_S(E_1)} \ll \lambda_{S_0} = \frac{1}{\Sigma_S(E_0)}.$$

Таким образом, пространственное распределение замедляющихся нейтронов в среде из водорода нейтроном будет определяться пространственным распределением первых взаимодействий, поскольку, как было показано ранее, все замедление происходит около точки первого рассеяния. Для вычисления пространственного распределения первых взаимодействий диффузионное приближение неприменимо. Построим приближенно это распределение. Если S [с⁻¹] – мощность изотропного источника быстрых нейтронов,

то $\frac{S}{4\pi r^2}$ нейтронов источника будут иметь направление движения в пределах единичной площадки сферы радиусом r . Из них

$\frac{S}{4\pi r^2} \exp\{-\Sigma_S(E_0)r\}$ нейтронов долетят до этой площадки и пересекут ее, т.е. данное выражение представляет собой плотность потока нейтронов. А, соответственно, $\frac{S}{4\pi r^2} \exp\{-\Sigma_S(E_0)r\} \cdot \Sigma_S(E_0)$ –

количество нейтронов, которые испытывают первое взаимодействие в единичном объеме на расстоянии r от источника, т.е. пространственное распределение первых взаимодействий. Если рассматривается непоглощающая среда, то любое значение энергии при замедлении около точки r будет пересекать примерно такое же количество нейтронов, так как, это было показано ранее, весь процесс замедления будет происходить в пространственной области около r . Таким образом,

$$j(r, E) \approx \frac{S}{4\pi r^2} \exp\{-\Sigma_S(E_0)r\} \cdot \Sigma_S(E_0),$$

т.е. все замедление нейтронов будет происходить в непосредственной близости от точки первого столкновения нейтрона с ядром. Особенности пространственного распределения замедляющихся нейтронов на водороде необходимо учитывать в любой среде, содержащей в значимых количествах водород. Например, для воды основное замедление идет на ядрах водорода, но рассеяние на ядрах кислорода приводит к тому, что нейтрон не так далеко уходит от источника до первого взаимодействия. И возраст нейтронов в воде примерно в два раза меньше, чем в случае, если все ядра кислорода заменить на ядра водорода.

4.8. Особенности замедления быстрых нейтронов

Все полученные в данной главе результаты относятся к замедлению нейтронов при упругом рассеянии в асимптотической области энергий в случае, если рассеяние изотропно в ЛС. При описании пространственно-энергетического распределения быстрых нейтронов уже существенную роль играют процессы неупругого рассеяния на тяжелых ядрах и анизотропия рассеяния на легких и средних ядрах. Оба этих процесса приводят к существенному отклонению измеренного в экспериментах возраста нейтронов от рассчитанного в рамках возрастной теории значения.

Анизотропия рассеяния наиболее существенна при расчете пространственно-энергетического распределения от источника нейтронов с большой энергией (например, нейтронов, появившихся в результате термоядерной реакции) в средах, состоящих из ядер небольшой и средних масс. В этом случае рассеяние нейтрона идет преимущественно в направлении его первоначального движения и не приводит к существенному изменению энергии нейтрона при его столкновении с ядром среды. Следовательно, нейтроны источника без существенной потери энергии (прямопротрельные нейтроны)

удаляются от источника на расстояния, существенно большие, чем дает расчет с использованием теории возраста, и необходимо вводить поправочный член в формулу расчета возраста нейтронов (4.9), который в ряде случаев существенно превосходит значение возраста, рассчитанное по этой формуле. Таким образом, в этом случае пространственное распределение замедляющихся нейтронов во много определяется той точкой пространства, где анизотропия рассеяния прямо вперед перестает играть существенную роль, и начинается классический процесс замедления нейтронов при упругом рассеянии на ядрах среды, который рассмотрен ранее.

Процессы неупругого рассеяния играют существенную роль при расчете пространственно-энергетического распределения от источника быстрых нейтронов (например, спектр нейтронов деления) в средах, состоящих из смеси ядер замедлителя и топлива (тяжелых ядер). Неупругое рассеяние быстрого нейтрона на тяжелых ядрах приводит к существенной потере энергии нейтронов в результате одного столкновения нейтрона с ядром. Следовательно, при расчете возраста нейтронов по формуле (4.9) будут получены завышенные результаты для возраста нейтронов, поскольку будет учитываться только эффект уменьшения количества ядер замедлителя в смеси замедлителя и поглотителя по сравнению со средой, состоящей из чистого замедлителя, и не будет учтено, что появление тяжелых ядер в среде приводит к реакциям неупругого рассеяния быстрых нейтронов на этих ядрах. В качестве иллюстрации этого эффекта на рис. 4.7 приведены результаты экспериментального определения возраста нейтронов (от спектра деления до значений энергии 1,47 эВ) в среде, состоящей из смеси воды и металла, для различных сред и разных объемных отношений металла и воды — $V_{\text{м}}/V_{\text{вода}}$. Кривая 1 на данном рисунке соответствует результатам, которые были получены в рамках теории возраста без учета эффекта от процесса неупругого рассеяния нейтронов на ядрах металла (учитывается только эффект уменьшения плотности ядер воды за счет замещения их ядрами металла).

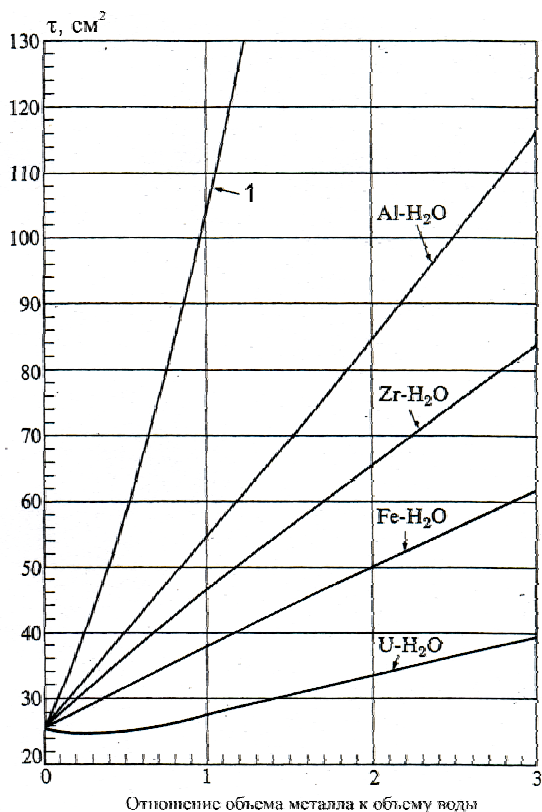


Рис. 4.7. Возраст нейтронов (от спектра деления до энергии 1,47 эВ) в среде, состоящей из смеси воды и металла

Из рис. 4.7 видно, что чем тяжелее ядро металла, тем существеннее влияние процессов неупругого рассеяния быстрых нейтронов на результаты определения возраста нейтронов. Естественно, что с ростом отношения $V_m/V_{\text{вода}}$ возраст нейтронов повышается (замедление идет менее эффективно, чем в чистой воде, поскольку меньше ядер замедлителя), но увеличение возраста гораздо менее существенное, чем дает расчет без учета процессов неупругого рассеяния на ядрах металла.

Глава 5

ГРУППОВОЕ ДИФFUЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В гл. 4 была рассмотрена теория возраста, или модель непрерывного замедления, которая позволяет рассчитать пространственно-энергетическое распределение нейтронов в среде. Было рассмотрено решение уравнения возраста в простых случаях. Но для расчета реальных систем – многокомпонентных гетерогенных многомерных сред – найти аналитическое решение уравнения возраста не представляется возможным. Поэтому в практике расчетов ядерных реакторов используют другую модель описания пространственно-энергетического распределения нейтронов – групповое приближение.

Рассмотрим уравнение баланса нейтронов в фазовом объеме $dVdE$, которое было получено в гл. 4 (4.1):

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}, E) - \Sigma_{tot}(\vec{r}, E)\Phi(\vec{r}, E) + \\
 & + \int_E^{\min(E_0, E/\alpha)} \Sigma_S(\vec{r}, E')\Phi(\vec{r}, E') \frac{dE'}{(1-\alpha)E'} + S(\vec{r}, E) = 0,
 \end{aligned}$$

и перепишем его в более общей форме, дополнив законом Фика:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & -\operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}, E) - \Sigma_{tot}(\vec{r}, E)\Phi(\vec{r}, E) + \\
 & + \int_E^{E_{\max}} \Sigma_S(\vec{r}, E')W(\vec{r}; E' \rightarrow E)\Phi(\vec{r}, E')dE' + S(\vec{r}, E) = 0; \\
 & \operatorname{grad} \Phi(\vec{r}, E) = -3\Sigma_{tr}(\vec{r}, E) \cdot \vec{i}(\vec{r}, E).
 \end{aligned} \right. \quad (5.1)$$

В первом уравнении системы (5.1) по сравнению с (4.1) в интеграле столкновений поставлен верхний предел E_{\max} , и одновременно выражение

$\frac{\Sigma_S(\vec{r}, E')}{(1-\alpha)E'}$ записано в виде

$$\Sigma_S(\vec{r}, E') \cdot W(\vec{r}; E' \rightarrow E),$$

где $\Sigma_S(\vec{r}, E')$ – макроскопическое сечение рассеяния в точке с координатой \vec{r} при энергии E' , а $W(\vec{r}; E' \rightarrow E)$ – плотность вероятности нейтрону при рассеянии в точке \vec{r} с энергией E' приобрести энергию E . Эту функцию называют *индикатрисой рассеяния*. Если реализуется только упругое потенциальное рассеяние, то индикатриса рассеяния имеет известный вид:

$$W(\vec{r}, E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)E'}, & \text{если } E' \in [E, E/\alpha]; \\ 0, & \text{если } E' > E/\alpha. \end{cases}$$

А в общем случае это – более сложная функция, описывающая все возможные процессы рассеяния: как упругие, так и неупругие.

Разобьем весь энергетический интервал $[0, E_{\max}]$ на G непересекающихся диапазонов (рис. 5.1). Нумерация диапазонов производится от самых высоких значений энергий (номер 1) вниз по энергии. Каждый из диапазонов называется *энергетической группой*. Таким образом, разбив весь энергетический интервал на диапазоны, была определена *групповая структура* (количество энергетических групп и их границы).

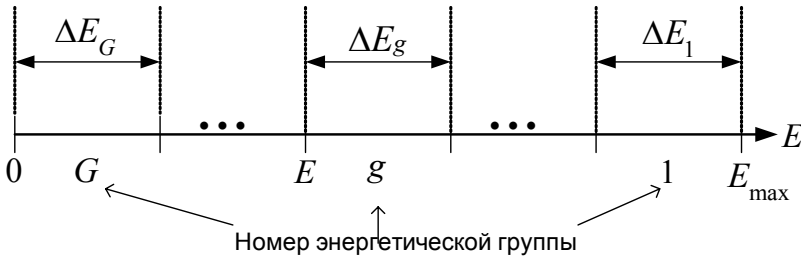


Рис. 5.1. Групповая структура

Проинтегрируем первое уравнение системы (5.1) по энергетическому интервалу ΔE_g :

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{div} \int_{\Delta E_g} \vec{i}(\vec{r}, E) dE - \int_{\Delta E_g} \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) dE + \\
& + \sum_{g'=1}^g \int_{\Delta E_g} dE \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_S(\vec{r}, E') \cdot W(\vec{r}; E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, E') dE' + \int_{\Delta E_g} S(\vec{r}, E) dE = 0.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Одновременно в третьем слагаемом интеграл от текущего значения энергии E до E_{\max} был заменен суммой интегралов по каждой из энергетических групп от самой верхней группы с номером 1 до данной группы с номером g .

Интегральную по группе функцию плотности потока нейтронов будем описывать через интегральную по данной группе плотность нейтронов $n_g(\vec{r}) = \int_{\Delta E_g} n(\vec{r}, E) dE$ и среднюю по группе скорость нейтронов

$$\bar{V}_g = \frac{\int_{\Delta E_g} V(E) n(\vec{r}, E) dE}{\int_{\Delta E_g} n(\vec{r}, E) dE}$$

следующим образом:

$$\int_{\Delta E_g} \Phi(\vec{r}, E) dE = \int_{\Delta E_g} n(\vec{r}, E) V(E) dE \cdot \frac{\int_{\Delta E_g} n(\vec{r}, E) dE}{\int_{\Delta E_g} n(\vec{r}, E) dE} = \bar{V}_g \cdot n_g(\vec{r}) \equiv \Phi_g(\vec{r}).$$

Функцию $\Phi_g(\vec{r})$ называют *потоком нейтронов в группе g* , или групповым потоком нейтронов.

Введем в рассмотрение интегральный по группе ток нейтронов $\vec{i}_g(\vec{r}) \equiv \int_{\Delta E_g} \vec{i}(\vec{r}, E) dE$ – ток нейтронов в группе g , и интегральный по группе источник нейтронов $q_g(\vec{r}) = \int_{\Delta E_g} S(\vec{r}, E) dE$ – источник нейтронов в группе g .

Тождественно преобразуем второй член в уравнении (5.2):

$$\begin{aligned} \int_{\Delta E_g} \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) dE &= \frac{\int_{\Delta E_g} \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) dE}{\int_{\Delta E_g} \Phi(\vec{r}, E) dE} \cdot \int_{\Delta E_g} \Phi(\vec{r}, E) dE \equiv \\ &\equiv \Sigma_g(\vec{r}) \Phi_g(\vec{r}). \end{aligned}$$

Величину $\Sigma_g(\vec{r})$ называют *полным макроскопическим сечением взаимодействия нейтронов в группе g*, или *полным групповым макроскопическим сечением*. При этом второй член в уравнении (5.2), который описывает скорость взаимодействия нейтронов в группе g, записывается как произведение полного макроскопического сечения в этой группе на поток нейтронов в этой группе.

Тождественно преобразуем выражение, стоящее под суммой в третьем члене в уравнении (5.2):

$$\begin{aligned} \int_{\Delta E_g} dE \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_S(\vec{r}, E') W(E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, E') dE' &= \\ = \frac{\int_{\Delta E_g} dE \int_{\Delta E_{g'}} \Sigma_S(\vec{r}, E') W(E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, E') dE'}{\int_{\Delta E_{g'}} \Phi(\vec{r}, E') dE'} \times \\ \times \int_{\Delta E_{g'}} \Phi(\vec{r}, E') dE' &= \Sigma_S^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) \Phi_{g'}(\vec{r}). \end{aligned}$$

Величину $\Sigma_S^{g' \rightarrow g}(\vec{r})$ называют *макроскопическим сечением перевода нейтронов из группы g' в группу g*, или *макроскопическим сечением межгрупповых переводов*.

Таким образом, используя введенные обозначения, уравнение (5.2) можно тождественно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \vec{i}_g(\vec{r}) - \Sigma_g(\vec{r}) \Phi_g(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^G \Sigma_S^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) \Phi_{g'}(\vec{r}) + q_g(\vec{r}) &= 0, \\ g &= 1, 2, \dots, G. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем второе уравнение в системе (5.1), предварительно проинтегрировав его по энергетической группе g :

$$\begin{aligned} \text{grad} \int_{\Delta E_g} \Phi(\vec{r}, E) dE &= -3 \int_{\Delta E_g} \Sigma_{tr}(\vec{r}, E) \vec{i}(\vec{r}, E) dE = \\ &= -3 \frac{\int_{\Delta E_g} \Sigma_{tr}(\vec{r}, E) \vec{i}(\vec{r}, E) dE}{\int_{\Delta E_g} \vec{i}(\vec{r}, E) dE} \cdot \int_{\Delta E_g} \vec{i}(\vec{r}, E) dE = -3 \Sigma_{tr,g}(\vec{r}) \vec{i}_g(\vec{r}). \end{aligned}$$

Величину $\Sigma_{tr,g}(\vec{r})$ называют *транспортным макроскопическим сечением в группе g* .

Таким образом, система уравнений (5.2) тождественно переписывается в виде

$$-\text{div} \vec{i}_g(\vec{r}) - \Sigma_g(\vec{r}) \Phi_g(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^g \Sigma_S^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) \Phi_{g'}(\vec{r}) + q_g(\vec{r}) = 0; \quad (5.3)$$

$$\text{grad} \Phi_g(\vec{r}) = -3 \Sigma_{tr,g}(\vec{r}) \vec{i}_g(\vec{r}), \quad g = 1, 2, \dots, G. \quad (5.4)$$

Необходимо подчеркнуть, что уравнения (5.3) и (5.4), записанные для всех энергетических групп от первой до G -й, полностью тождественны системе (5.1), поскольку были получены из нее последовательными тождественными преобразованиями. Для решения уравнений (5.3) и (5.4) необходимо знать групповые макроскопические сечения, которые могут быть получены, как следует из их определения, путем усреднения соответствующих макроскопических сечений по функции плотности потока нейтронов (плотности тока для транспортного сечения), которая зависит от энергетической переменной. А для того, чтобы найти зависимость плотности потока нейтронов от энергии внутри каждой энергетической группы, надо решить исходную задачу – систему уравнений (5.1).

Предположим, что для каждой группы нейтронов нейтронное поле внутри ΔE_g имеет одинаковое пространственное распределение, т.е. функции плотности нейтронов и тока нейтронов допускают разделение переменных:

$$\begin{cases} n(\vec{r}, E) = R_g(\vec{r})S_g(E); \\ \vec{i}(\vec{r}, E) = \vec{I}_g(\vec{r})S_g(E), \end{cases} E \in \Delta E_g, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (5.5)$$

где функция $S_g(E)$ называется *внутригрупповым спектром нейтронов*.

Тогда, используя формулу $\Sigma_i(\vec{r}, E) = N(\vec{r})\sigma_i(E)$, где $N(\vec{r})$ – плотность ядер, из дробно-линейных функционалов, которые определяют макроскопические сечения в группе, можно получить функционалы для определения микроскопических сечений в группе. Так, полное макроскопическое сечение в группе g было определяется следующим дробно-линейным функционалом:

$$\Sigma_g(\vec{r}) = \frac{\int \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E) dE}{\int \Phi(\vec{r}, E) dE} \quad \Delta E_g$$

Воспользовавшись выражением для представления плотности потока нейтронов как произведения скорости на плотность нейтронов и выражением (5.5) для плотности нейтронов, получим:

$$\Phi(\vec{r}, E) = V(E) \cdot n(\vec{r}, E) = V(E) R_g(\vec{r}) S_g(E).$$

После подстановки в выражение для полного макроскопического сечения в группе данного представления для плотности потока нейтронов имеем:

$$N(\vec{r})\sigma_{tot}^g(\vec{r}) = N(\vec{r}) \frac{\int \sigma_{tot}(E) V(E) R_g(\vec{r}) S_g(E) dE}{\int V(E) R_g(\vec{r}) S_g(E) dE} \quad \Delta E_g$$

и после сокращения функций, не зависящих от энергетической переменной, получим:

$$\sigma_{tot}^g(\vec{r}) = \frac{\int_{\Delta E_g} \sigma_{tot}(E) V(E) S_g(E) dE}{\int_{\Delta E_g} V(E) S_g(E) dE}. \quad (5.6)$$

Аналогичную процедуру можно проделать и для сечения межгрупповых переводов и транспортного сечения. В результате для соответствующих микроскопических сечений получаются следующие выражения:

$$\sigma_s^{g' \rightarrow g} = \frac{\int_{\Delta E_g} dE \int_{\Delta E_{g'}} V(E') \sigma_s(E') S_g(E') W_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) dE'}{\int_{\Delta E_{g'}} V(E') S_g(E') dE'};$$

$$\sigma_{tr}^g = \frac{\int_{\Delta E_g} \sigma_{tr}(E) S_g(E) dE}{\int_{\Delta E_g} S_g(E) dE}.$$

Необходимо отметить, что для микроскопических сечений реакций радиационного захвата, рассеяния и деления в группе можно получить выражения, полностью аналогичные (5.6). Набор всех необходимых микроскопических сечений, полученный для выбранной групповой структуры, называется *каталогом групповых микроконстант*, а база данных, которая содержит каталоги групповых микроконстант для ряда изотопов, – *библиотекой групповых сечений*, или *групповой библиотекой констант*. В настоящее время существует много различных библиотек групповых сечений. Например, БНАБ-26 – 26-групповая библиотека микроконстант. Библиотеки групповых сечений генерируются независимо от решения уравнений, описывающих нейтронное поле. Для того чтобы получить групповую библиотеку констант, необходимо знать зависимость соответствующих микроскопических сечений от энергии внутри каждой энергетической группы и внутригрупповые спектры нейтронов. Зависимости микросечений от энергии известны и хранятся в специальных базах данных, которые называются *файлами*

оцененных ядерных данных (например, ENDF/B – Evaluated Nuclear Data Files). В качестве внутригрупповых спектров в простейшем случае берутся стандартные спектры нейтронов в зависимости от того, в какой области энергий расположена рассматриваемая энергетическая группа: для быстрой области энергий – спектр деления, для области замедления – спектр Ферми, для тепловой области энергий – спектр Максвелла. Процедура генерации групповых библиотек констант автоматизирована и выполняется, например, программным комплексом NJOY. Ранее описан простейший подход к генерации групповых библиотек. Более сложные подходы учитывают в том или ином приближении состава среды, а в качестве внутригруппового спектра нейтронов берутся не стандартные спектры, а спектр, характерный для рассчитываемого реактора. Необходимо отметить, что при выборе групповой структуры уже, как правило, учитываются особенности спектра рассчитываемой системы. Например, для расчета тепловых реакторов необходимо иметь достаточно много групп в тепловой области энергий, поскольку именно эта область определяет физику теплового реактора. С другой стороны, для расчета бланкетов термоядерных реакторов необходимо выбирать много энергетических групп в высокой области энергии, а тепловая область может содержать всего одну группу. Именно поэтому говорят, что групповые библиотеки констант *проблемно ориентированы*, т.е. предназначены для расчета определенного класса установок. Чем больше число групп, тем менее проблемно ориентирована библиотека. И только библиотеки, содержащие десятки тысяч групп, могут рассматриваться как универсальные, естественно, если при этом правильно выбрана групповая структура.

В уравнении (5.3) в третьем слагаемом выделим член, относящийся к рассматриваемой группе g :

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{div} \vec{i}_g(\vec{r}) - \Sigma_g(\vec{r})\Phi_g(\vec{r}) + \Sigma_S^{g \rightarrow g}(\vec{r})\Phi_g(\vec{r}) + \\
 & + \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_S^{g' \rightarrow g}(\vec{r})\Phi_{g'}(\vec{r}) + q_g(\vec{r}) = 0,
 \end{aligned}$$

и введем макроскопическое сечение поглощения в группе g : $\Sigma_a^g(\vec{r}) = \Sigma_g(\vec{r}) - \Sigma_S^{g \rightarrow g}(\vec{r})$. Таким образом, макроскопическое сече-

ние поглощения в группе определяется как полное сечение за вычетом сечения внутригруппового рассеяния и описывает все процессы, приводящие к исчезновению нейтрона из данной группы, т.е. радиационный захват в группе, деление в группе и все процессы рассеяния нейтрона из рассматриваемой группы в нижележащие:

$$\Sigma_a^g = \Sigma_c^g + \Sigma_f^g + \Sigma_d^g,$$

где

$$\Sigma_d^g = \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_S^{g \rightarrow g'}$$

и называется *сечением замедления из группы g*.

Используя закон Фика (5.4), перепишем последнее уравнение в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D_g(\vec{r}) \operatorname{grad} \Phi_g(\vec{r}) - \Sigma_a^g(\vec{r}) \Phi_g(\vec{r}) + \\ + \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_S^{g' \rightarrow g}(\vec{r}) \Phi_{g'}(\vec{r}) + q_g(\vec{r}) = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$g = 1, 2, \dots, G,$$

где $D_g(\vec{r}) = \frac{1}{3\Sigma_{tr}^g(\vec{r})}$ – коэффициент диффузии нейтронов в группе g.

Формула (5.7) называется *уравнением диффузии в групповом приближении*. Отметим, что поскольку в нем использован закон Фика, то применимость уравнения (5.7) ограничена всеми условиями применимости этого закона. Для гомогенной среды это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} D_g \Delta \Phi_g(\vec{r}) - \Sigma_a^g \Phi_g(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_S^{g' \rightarrow g} \Phi_{g'}(\vec{r}) + q_g(\vec{r}) = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$g = 1, 2, \dots, G.$$

Используя групповые библиотеки констант для определения соответствующих макроскопических сечений, система уравнений (5.8) может быть решена относительно пространственной переменной для каждой энергетической группы последовательно с учетом граничного условия $\Phi_g(\vec{r}_0) = 0$ на экстраполированной границе среды с вакуумом и условий сшивки ($\Phi_g(\vec{r}_S)$ и $D_g \nabla_n \Phi_g(\vec{r}_S)$ непрерывны) на границах раздела сред.

Рассмотрим в качестве примера трехгрупповую систему диффузионных уравнений. Введем групповую структуру (рис. 5.2).

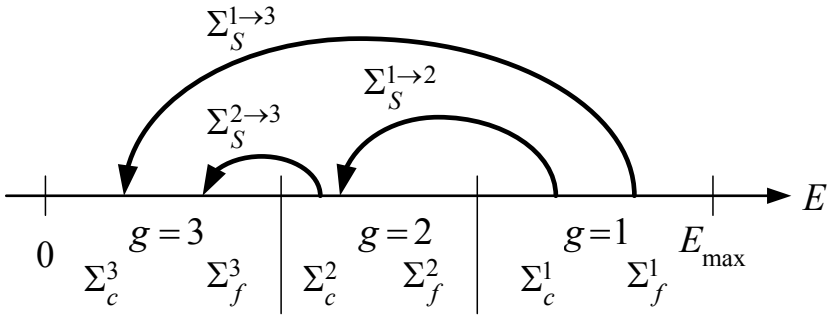


Рис. 5.2. Групповая структура и групповые сечения для трехгрупповой задачи

Запишем уравнение (5.8) для каждой из групп, начиная с первой:

$$\begin{aligned}
 D_1 \Delta \Phi_1(\vec{r}) - \Sigma_a^1 \Phi_1(\vec{r}) + q_1(\vec{r}) &= 0; \\
 D_2 \Delta \Phi_2(\vec{r}) - \Sigma_a^2 \Phi_2(\vec{r}) + \Sigma_S^{1 \rightarrow 2} \Phi_1(\vec{r}) + q_2(\vec{r}) &= 0; \\
 D_3 \Delta \Phi_3(\vec{r}) - \Sigma_a^3 \Phi_3(\vec{r}) + \Sigma_S^{1 \rightarrow 3} \Phi_1(\vec{r}) + \Sigma_S^{2 \rightarrow 3} \Phi_2(\vec{r}) + q_3(\vec{r}) &= 0,
 \end{aligned}$$

где сечения поглощения в группах определены выражениями:

$$\Sigma_a^1 = \Sigma_c^1 + \Sigma_f^1 + \Sigma_S^{1 \rightarrow 2} + \Sigma_S^{1 \rightarrow 3};$$

$$\Sigma_a^2 = \Sigma_c^2 + \Sigma_f^2 + \Sigma_S^{2 \rightarrow 3};$$

$$\Sigma_a^3 = \Sigma_c^3 + \Sigma_f^3.$$

Уравнение для первой группы нейтронов может быть решено относительно плотности потока нейтронов в первой группе. После этого в уравнении для второй группы нейтронов может быть определено третье слагаемое, описывающее источник нейтронов во второй группе за счет переводов нейтронов из первой группы во вторую, и второе уравнение может быть решено относительно плотности потока нейтронов во второй группе. Далее в третьем уравнении рассчитывается источник за счет переводов нейтронов из первой и второй групп в третью (третье и четвертые слагаемые соответственно), и уравнение для третьей группы решается относительно плотности потока нейтронов в третьей группе. Естественно, что аналогичный подход к решению системы диффузионных групповых уравнений сохраняется для любого числа энергетических групп.

Более подробно многогрупповое приближение рассмотрено в работе [5].

Глава 6

ОСНОВЫ ТЕРМАЛИЗАЦИИ НЕЙТРОНОВ

Вся теория замедления нейтронов при упругом рассеянии, приведенная ранее, основывалась на законе рассеяния, который был получен в результате рассмотрения упругого взаимодействия нейтрона со свободным покоящимся ядром. Эти условия имели место для рассматриваемой области энергий – области замедления, но ядро уже нельзя считать свободным и покоящимся при описании взаимодействия нейтронов в области энергий ниже примерно нескольких электронвольт, т.е. в тепловой области энергии. Тепловая область энергий представляет собой область от примерно 10^{-3} до нескольких электронвольт. Нейтронов с энергией ниже 10^{-3} эВ в ядерном реакторе пренебрежимо мало, поскольку сечение поглощения с уменьшением энергии растет, как правило, пропорционально $1/V$, где V – скорость нейтронов. Значение верхней энергетической границы тепловой области E_{th} зависит от состава среды и ее температуры и составляет, как правило, несколько электронвольт или $4 - 5 kT$, где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура среды. Процесс рассеяния нейтронов на ядрах среды в тепловой области энергий всегда носит неупругий характер, называется *термализацией* и имеет ряд характерных особенностей.

1. В тепловой области кинетическая энергия нейтрона становится сравнима с энергией теплового движения ядер среды – $3/2 kT$. Это означает, что при описании рассеяния нейтрона на ядре уже необходимо учитывать тепловое движение ядер среды, т.е. ядро не может считаться покоящимся. Учет теплового движения ядер среды приводит к тому, что энергия нейтрона после рассеяния может быть не только меньше, чем до рассеяния, как это было всегда в области замедления, но и возрасти в случае, когда, например, ядро движется навстречу нейтрону.

2. С уменьшением кинетической энергии нейтрона длина волны де Бройля соответствующего волнового пакета возрастает, и в тепловой области энергий становится существенно больше размера ядра и сравнима с размерами молекулы или размерами соответст-

вующих кристаллических структур. Это приводит к тому, что при рассмотрении рассеяния нейтронной волны необходимо учитывать, что она взаимодействует не с отдельным ядром, как это было в области замедления, а с молекулой жидкости (газа) в целом или с соответствующей областью кристаллической структуры для твердых тел. При описании взаимодействия нейтронной волны с молекулой необходимо учитывать возбуждение колебательных и вращательных уровней соответствующей квантово-механической системы, а при описании взаимодействия нейтронной волны с кристаллической структурой – интерференцию рассеянных от разных кристаллических плоскостей нейтронных волн. Тепловую область энергий часто называют еще *областью термализации*. Верхняя граница этой области выбирается таким образом, что выше ее справедлива теория замедления, рассмотренная в гл. 3.

Учет вышеперечисленных фактов приводит к существенному усложнению описания процесса рассеяния нейтрона в тепловой области энергий, которое может быть выполнено только с использованием подходов квантовой физики. Задача существенно упрощается, если ограничиться учетом только теплового движения ядер среды при описании процесса рассеяния нейтрона – это, так называемая, *модель одноатомного газа*. В рамках этой модели фактически рассматривается равновесное состояние двух одноатомных газов, одним из которых являются нейтроны (легкий газ), а вторым – тяжелый газ, моделирующий среду и распределение ядер которого по энергии известно из классической термодинамики (распределение Максвелла). Такой подход позволяет выявить и проанализировать основные закономерности формирования спектра нейтронов в тепловой области энергий. В рамках модели одноатомного газа аналитически возможно найти закон рассеяния, т.е. плотность вероятности рассеяния нейтрона с энергией E до энергии E' – функцию $p(E \rightarrow E')$, зависимость отношения которой к закону упругого рассеяния, полученного в области замедления, от отношения энергии нейтрона после рассеяния к энергии нейтрона до рассеяния в случае среды, состоящей из чистого водорода, изображена на рис. 6.1. Вид плотности вероятности уже зависит от той энергии, которую нейтрон имел до рассеяния – E . В случае, если эта энергия существенно больше средней энергии теплового движения ядер

среды ($E \gg kT$), закон рассеяния совпадает с законом упругого рассеяния, который был получен в гл. 3. Чем ниже кинетическая энергия нейтрона E , тем более явно проявляется неупругий характер рассеяния нейтрона, связанный с учетом теплового движения ядер, что приводит к возрастанию относительной доли нейтронов, энергия которых после рассеяния E' становится больше, чем энергия нейтрона до рассеяния – E .

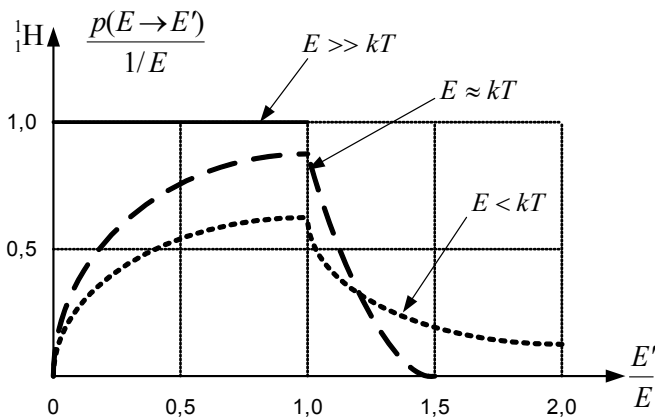


Рис. 6.1. Закон рассеяния на водороде в модели одноатомного газа

6.1. Уравнение замедления в области термализации

Рассмотрим бесконечную гомогенную среду с равномерно распределенным источником нейтронов с энергией E_0 , а также тепловую область энергий $[0, E_{th}]$, которая всегда расположена в асимптотической области энергии. Возьмем фазовый объем, который в данном случае представляет собой интервал энергий dE около энергии E в тепловой области энергий. Рассмотрим баланс нейтронов в фазовом объеме. Для этого определим все возможные процессы, приводящие к изменению числа нейтронов в фазовом объеме:

$AP(E)$ – скорость исчезновения нейтронов за счет процессов взаимодействия с ядрами среды (поглощение и рассеяние);

$R_S(E)$ – скорость появления нейтронов в dE за счет рассеяния при других (необязательно более высоких) значениях энергий;

$Q(E)$ – скорость появления нейтронов за счет их рассеяния при энергиях, больших чем E_{th} (верхняя граница тепловой области).

Учитывая вышесказанное, уравнение баланса нейтронов в фазовом объеме имеет вид:

$$-AP(E) + R_S(E) + Q(E) = 0. \quad (6.1)$$

Число нейтронов, которые испытывают взаимодействие с ядрами среды в рассматриваемом фазовом объеме в единицу времени, определяется выражением:

$$AP(E) = \Sigma_{tot}(E)\Phi(E)dE. \quad (6.2)$$

Скорость появления нейтронов в фазовом объеме за счет их рассеяния при энергиях, больших чем E_{th} , определяется выражением:

$$Q(E) = S(E)dE, \quad (6.3)$$

где $S(E)$ – мощность источника нейтронов в тепловой области, который формируется нейтронами, рассеявшимися при энергиях выше, чем граница тепловой области – из области замедления. Этот источник называется *источником замедляющихся нейтронов*, он отличен от нуля только в интервале энергий $[\alpha E_{th}, E_{th}]$ и возрастает с ростом энергии внутри этого интервала.

Рассчитаем величину $R_S(E)$ – скорость появления нейтронов в интервале dE за счет их рассеяния при других значениях энергии. В интервал dE нейтрон может попасть при рассеянии из любого интервала dE' в пределах тепловой области (рис. 6.2).

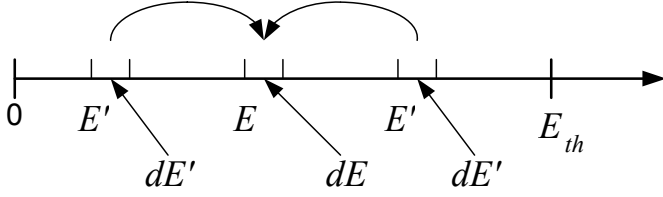


Рис. 6.2. Схема расположения энергетических интервалов для расчета $R_S(E)$

Количество нейтронов, которые рассеялись в интервале dE' в единицу времени, определяется выражением: $\Sigma_S(E')\Phi(E')dE'$. Вероятность нейтрону попасть в интервал dE после рассеяния при энергии E' можно рассчитать как $p(E' \rightarrow E)dE$. Тогда число нейтронов, которые в единицу времени рассеялись в интервале dE' и энергия которых после рассеяния принадлежит интервалу dE , рассчитывается как:

$$\Sigma_S(E')\Phi(E')dE'p(E' \rightarrow E)dE.$$

Для определения $R_S(E)$ необходимо данное выражение проинтегрировать по dE' от нуля до границы тепловой области E_{th} :

$$R_S(E) = \int_0^{E_{th}} dE' \cdot \Phi(E')\Sigma_S(E')p(E' \rightarrow E) \cdot dE. \quad (6.4)$$

Подставив полученные выражения (6.2), (6.3) и (6.4) в уравнение баланса (6.1) и сократив на dE , получим искомое уравнение замедления, которое, по существу, представляет собой уравнение баланса нейтронов в единичном фазовом объеме, расположенном в тепловой области:

$$\begin{aligned} -\Sigma_S(E)\Phi(E) - \Sigma_a(E)\Phi(E) + \int_0^{E_{th}} dE' \cdot \Phi(E')\Sigma_S(E')p(E' \rightarrow E) + \\ + S(E) = 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

или, используя понятия плотности столкновений и плотности рассеяния, придем к следующему виду:

$$-F(E) + \int_0^{E_{th}} dE' \cdot F_S(E') p(E' \rightarrow E) + S(E) = 0. \quad (6.6)$$

В общем случае ввиду сложности функции $p(E' \rightarrow E)$ решить полученные уравнения аналитически не представляется возможным.

Проинтегрируем уравнение (6.5) по тепловой области энергии и, учитывая следующее равенство

$$\int_0^{E_{th}} dE' \cdot \Phi(E') \Sigma_S(E') \int_0^{E_{th}} dE p(E' \rightarrow E) = \int_0^{E_{th}} dE' \cdot \Phi(E') \Sigma_S(E'),$$

которое справедливо, поскольку интеграл от плотности вероятности по всей области ее определения равен единице, получим следующее выражение:

$$\int_0^{E_{th}} dE \Sigma_a(E) \Phi(E) = \int_0^{E_{th}} dE S(E).$$

Левая часть последнего равенства представляет собой скорость поглощения нейтронов во всей тепловой области энергий, а правая – скорость появления нейтронов в тепловой области энергий за счет их рассеяния при энергиях, выше E_{th} , т.е. количество нейтронов, энергия которых в единицу времени меняется от значений, больших E_{th} , до значений, меньших чем E_{th} . А это, по определению, есть плотность замедления через энергию E_{th} . Таким образом, интегральный баланс нейтронов в тепловой области энергий выглядит следующим образом:

$$\int_0^{E_{th}} dE \Sigma_a(E) \Phi(E) = j(E_{th})$$

и отражает тот факт, что скорость прихода нейтронов в тепловую область за счет их замедления в надтепловой области энергий равна скорости поглощения нейтронов в тепловой области энергий.

6.2. Спектр Максвелла. Температура нейтронного газа. Эффект диффузионного охлаждения

Рассмотрим *бесконечную гомогенную непоглощающую среду и предположим, что в тепловой области энергий нет источника замедляющихся нейтронов*. В этом случае уравнение замедления имеет вид

$$\Sigma_S(E)\Phi(E) = \int_0^{E_{th}} dE' \cdot \Phi(E')\Sigma_S(E')p(E' \rightarrow E)$$

и в приближении модели одноатомного газа может быть решено аналитически. Фактически в данном случае устанавливается термодинамическое равновесие двух газов: тяжелого – ядра среды с температурой T , и легкого – нейтроны. Данная задача решена в рамках классической термодинамики и получено распределение ядер легкого газа (в данном случае нейтронов) по энергии, которое называется *спектром Максвелла*:

$$\Phi_M(E) = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{m}} E \exp\left[-\frac{E}{kT}\right], \quad (6.7)$$

где n – плотность нейтронов; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура среды (в градусах Кельвина); m – масса нейтрона; E – энергия нейтрона.

При выводе спектра Максвелла может быть получено соотношение детального баланса нейтронов, которое отражает факт термодинамического равновесия между двумя любыми единичными интервалами энергий:

$$\Phi_M(E)\Sigma_S(E)p(E \rightarrow E') = \Phi_M(E')\Sigma_S(E')p(E' \rightarrow E). \quad (6.8)$$

Таким образом, в случае бесконечной гомогенной непоглощающей среды и отсутствии источника замедляющихся нейтронов распределение нейтронов по энергии в тепловой области будет повторять распределение по энергии ядер среды с температурой T . Необходимо отметить, что это – идеальный случай, который в реальных средах никогда не реализуется, поскольку из-за поглощения нейтронов ядрами среды, утечки нейтронов через границу среды и наличия около верхней границы тепловой области замедляющихся нейтронов термодинамического равновесия нейтронов со средой никогда не наступает. На рис. 6.3 приведен характерный вид спектра Максвелла (кривая 1). Он имеет максимум при $E = kT$ и практически равен нулю на границе тепловой области энергий.

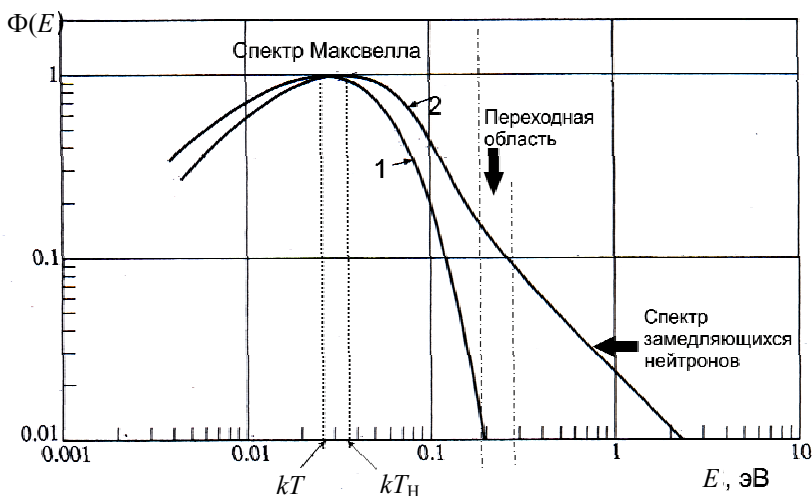


Рис. 6.3. Спектр нейтронов в тепловой области энергий: 1 – спектр Максвелла; 2 – спектр в среде с учетом поглощения и замедления из надтепловой области

В реальной среде в тепловой области всегда присутствует поглощение нейтронов и источник замедлившихся из надтепловой области энергий (эпитепловых) нейтронов. Эти процессы приводят к отклонению спектра нейтронов от идеального спектра Максвелла. Поскольку микроскопическое эффективное сечение поглощения нейтронов в тепловой области энергий для большинства изотопов

имеет зависимость, пропорциональную $1/\sqrt{E}$, то учет поглощения нейтронов приводит к тому, что относительная доля нейтронов с малыми энергиями уменьшается, а следовательно, относительная доля нейтронов с более высокими энергиями возрастает. Поскольку источник замедлившихся нейтронов формируется за счет рассеяния нейтронов на ядрах среды в надтепловой области энергий, где рассеяние еще идет по классическому закону упругого рассеяния, то величина этого источника максимальна в области около E_{th} и равна нулю ниже энергии αE_{th} (граница ступеньки замедления). Поэтому учет в тепловой области источника замедляющихся нейтронов приводит к возрастанию в спектре доли нейтронов с относительно высокой энергией. Можно показать, что в случае учета перечисленных выше факторов спектр нейтронов в тепловой области энергий можно описать функцией, аналогичной (6.7), если вместо температуры среды T в формуле (6.7) использовать величину T_n – *эффективную температуру нейтронного газа*, которая всегда по описанным выше причинам выше температуры среды и зависит от температуры и свойств среды. Эффективную температуру нейтронного газа можно оценить по формуле:

$$T_n = T \left(1 + a \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} \right), \quad (6.9)$$

где макроскопические сечения рассчитываются при энергии, соответствующей температуре среды; a – параметр, лежащий в интервале от единицы до двух, который находится из экспериментальных данных и известен для всех замедлителей. Очевидно, что чем больше сечение поглощения нейтронов, тем меньше в спектре относительная доля нейтронов с низкими энергиями и, следовательно, тем выше эффективная температура нейтронного газа. В сильнопоглощающих средах (например, в топливе) эффективная температура нейтронного газа может отличаться от температуры среды более чем на порядок. На рис. 6.3 кривая 2 изображает спектр нейтронов в тепловой области энергий, который учитывает поглощения нейтронов и их замедление из надтепловой области энергий. Этот спектр в области ниже 0,2 эВ (кривая 2 на рис. 6.3) может быть описан формулой (6.7) с использованием эффективной темпе-

ратуры нейтронного газа вместо температуры среды. Часть кривой 2 выше области примерно 0,3 эВ описывается уже не спектром Максвелла, а спектром Ферми, т.е. пропорциональна $1/E$, поскольку практически полностью определяется источником рассеянных в надтепловой области нейтронов. Область 0,2 – 0,3 эВ (кривая 2 на рис. 6.3) является переходной между спектром замедляющихся нейтронов (спектром Ферми) и спектром тепловых нейтронов (спектром Максвелла).

Если рассматривается не бесконечная среда, а среда конечных размеров, то существует эффект утечки нейтронов через внешнюю границу среды в вакуум. Утечка нейтронов из среды наиболее эффективно происходит из приграничного слоя размером 2–3 длины свободного пробега. Поскольку для нейтронов с более высокой энергией эффективное макроскопическое сечение поглощения, а следовательно, и полное эффективное сечение имеют более низкое значение, то длина пробега таких нейтронов в среде больше, чем длина пробега в среде нейтронов с более низкими нейтронами. Это приводит к тому, что вероятность нейтронам с более высокими энергиями вылететь из среды выше, чем соответствующая вероятность для нейтронов с более низкими энергиями. Таким образом, в спектре нейтронов, который устанавливается в области размером 2–3 длины свободного пробега около границы «среда–вакуум» для среды конечных размеров, относительная доля нейтронов с более высокими энергиями меньше, чем в спектре нейтронов, который устанавливается в этой среде вне области около границы. Этот эффект называется *диффузионным охлаждением* среды и приводит к понижению эффективной температуры нейтронного газа в области около границы «среда–вакуум» по отношению к эффективной температуре нейтронного газа во внутренних областях среды. При этом спектр нейтронов во внутренних областях большой среды может быть описан формулой (6.7) с соответствующей эффективной температурой нейтронного газа.

6.3. Диффузия тепловых нейтронов

В общем случае описание диффузии нейтронов в тепловой области энергий – сложная задача, требующая усреднение сечений по

реальному спектру нейтронов. Ограничим рассмотрение случаем спектра Максвелла.

Рассмотрим уравнение замедления в диффузионном приближении (4.1), в котором интегральный член запишем, исходя из того, что рассматривается тепловая область энергий:

$$D(E)\Delta\Phi_M(\vec{r}, E) - \Sigma_{tot}(E)\Phi_M(\vec{r}, E) + \int_0^{E_{th}} dE' \Sigma_S(E')\Phi_M(\vec{r}, E')p(E' \rightarrow E) + S(\vec{r}, E) = 0.$$

Преобразуем интегральный член в этом уравнении, воспользовавшись соотношением детального баланса нейтронов (6.8):

$$\begin{aligned} \int_0^{E_{th}} dE' \Sigma_S(E')\Phi_M(\vec{r}, E')p(E' \rightarrow E) &= \int_0^{E_{th}} dE' \Sigma_S(E)\Phi_M(\vec{r}, E)p(E \rightarrow E') = \\ &= \Sigma_S(E)\Phi_M(\vec{r}, E). \end{aligned}$$

С учетом этого факта уравнение замедления в диффузионном приближении в тепловой области энергий в случае установления в ней спектра Максвелла запишется в виде

$$D(E)\Delta\Phi_M(\vec{r}, E) - \Sigma_a(E)\Phi_M(\vec{r}, E) + S(\vec{r}, E) = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение по тепловой области энергий:

$$\int_0^{E_{th}} dE D(E)\Delta\Phi_M(\vec{r}, E) - \int_0^{E_{th}} dE \Sigma_a(E)\Phi_M(\vec{r}, E) + \int_0^{E_{th}} dE S(\vec{r}, E) = 0.$$

Последний член в этом уравнении представляет собой число нейтронов, которые в единицу времени появляются в тепловой области энергий за счет замедления из надтепловой области. Очевидно, что он представляет собой плотность замедления через энергию E_{th} , т.е. $j(\vec{r}, E_{th})$, которая может быть найдена из решения уравнения возраста за счет замедления. Введем в рассмотрение средние сечения в тепловой области энергий. Если считать, что функция плот-

ности потока нейтронов допускает разделение переменных: $\Phi_M(\vec{r}, E) = f(\vec{r})\Phi_M(E)$, то, используя многогрупповой подход, средние сечения в тепловой области определяются выражениями:

$$\overline{\Sigma}_a = \frac{\int_0^{E_{th}} dE \Sigma_a(E) \Phi_M(E)}{\Phi_T}, \quad \overline{D} = \frac{\int_0^{E_{th}} dE D(E) \Phi_M(E)}{\Phi_T}, \quad (6.10)$$

где $\Phi_T = \int_0^{E_{th}} dE \Phi_M(E)$.

С учетом определенных выше средних сечений уравнение диффузии в тепловой области записывается в виде

$$\overline{D} \Delta \Phi(\vec{r}) - \overline{\Sigma}_a \Phi(\vec{r}) + j(\vec{r}, E_{th}) = 0, \quad (6.11)$$

где $\Phi(\vec{r}) = \int_0^{E_{th}} dE \Phi_M(\vec{r}, E)$ – интегральный по тепловой области поток нейтронов, который часто называют *тепловым потоком нейтронов*.

Уравнение (6.11) обычно записывают в виде

$$\Delta \Phi(\vec{r}) - \frac{1}{L_T^2} \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{\overline{D}} j(\vec{r}, E_{th}) = 0, \quad (6.12)$$

где введено обозначение: $L_T^2 \equiv \frac{\overline{D}}{\overline{\Sigma}_a}$ [см²]. Величина L_T^2 называется *квадратом длины диффузии тепловых нейтронов* и характеризует средний квадрат смещения нейтрона от точки, где он стал «тепловым», т.е. его энергия стала меньше E_{th} , до точки его поглощения в процессе диффузии.

В физике ядерных реакторов используется величина, которая называется *квадратом длины миграции нейтрона* и определяется выражением: $M = L_T^2 + \tau_{th}$ [см²]. Эта величина характеризует средний квадрат смещения нейтрона от точки рождения источником

(быстрый нейтрон) до его точки поглощения в тепловой области энергий с учетом того, что сначала нейтрон перемещался в пространстве, замедляясь при столкновении с ядрами среды (область замедления), а затем перемещался в пространстве в процессе диффузии в тепловой области энергий (рис. 6.4).

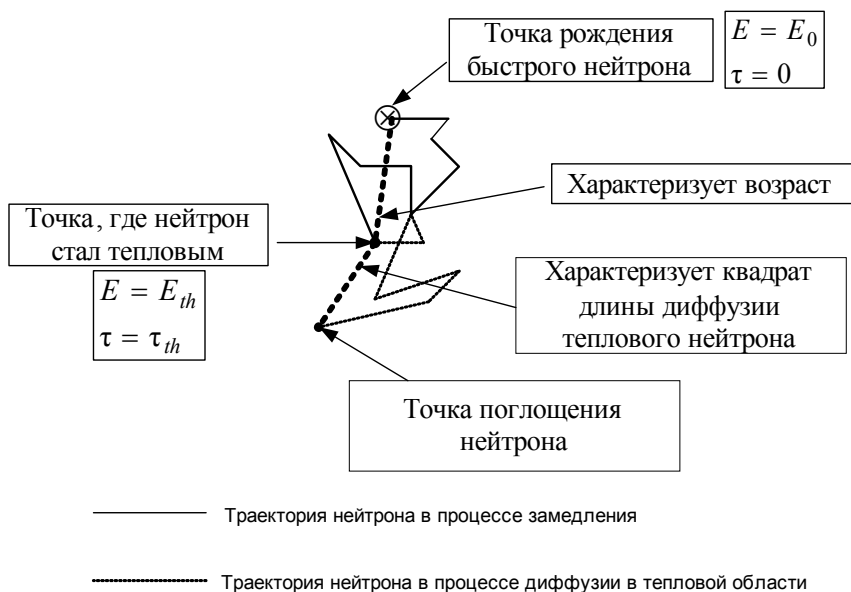


Рис. 6.4. Схема движения нейтрона в среде

6.4. Расчет средних сечений в тепловой области

Для решения уравнения диффузии тепловых нейтронов (6.11) необходимо уметь определять средние сечения в тепловой области энергий, которые определены выражениями (6.10). Скорость ядерной реакции типа i взаимодействия нейтрона с ядрами среды в единичном пространственном объеме в тепловой области энергии определяется выражением:

$$R_i = \int_0^{E_{th}} dE \Sigma_i(E) \Phi_M(E). \quad (6.13)$$

При расчете этой величины в рамках модели одноатомного газа в тепловой области энергий необходимо учитывать тепловое движение ядер среды. Обозначим через \vec{v} – скорость движения нейтрона, \vec{V} – скорость движения ядра в момент их взаимодействия, а v_r – модуль относительной скорости нейтрона и ядра в момент взаимодействия, который зависит от \vec{v} и \vec{V} (рис. 6.5).

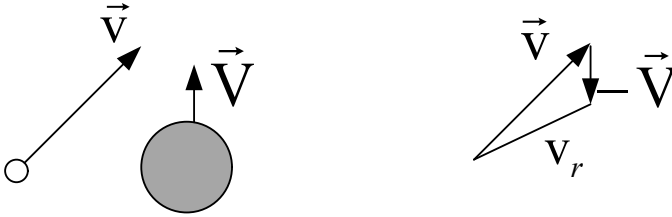


Рис. 6.5. Схема скоростей

Тогда $n(\vec{v})d\vec{v}$ – количество нейтронов, скорость которых лежит в интервале $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$; $v_r n(\vec{v})d\vec{v}$ – плотность потока нейтронов с относительной скоростью v_r , скорость которых лежит в интервале $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$; $N(\vec{V})d\vec{V}$ – количество ядер среды, скорость которых лежит в интервале $[\vec{V}, \vec{V} + d\vec{V}]$; $\sigma_i(v_r)$ – эффективное микроскопическое сечение процесса i взаимодействия нейтронов и ядер среды, которые имеют относительную скорость v_r .

С учетом вышесказанного, формула (6.13) для расчета скоростей ядерных реакций в тепловой области энергий запишется в виде:

$$R_i = \int d\vec{v} \int d\vec{V} N(\vec{V}) \sigma_i(v_r) n(\vec{v}) v_r. \quad (6.14)$$

В случае, если в тепловой области энергий зависимость микроскопического эффективного сечения пропорциональна $1/v_r$, а это характерно для сечения поглощения большинства нуклидов, то эта зависимость может быть представлена в виде

$$\sigma_a(v_r) = \sigma_a(v_0) \frac{v_0}{v_r}, \quad (6.15)$$

где индексом «0» обозначены значения функций в так называемой тепловой точке, которая характеризуется следующими значениями: $v_0 = 2200$ м/с, $E_0 = 0,0253$ эВ, $T_0 = 20,46$ °С. Именно в тепловой точке принято измерять или рассчитывать эффективные микроскопические сечения в тепловой области энергий, если их зависимость от энергии может быть описана формулой (6.15). Подставив выражение (6.15) в формулу (6.14), получим следующее выражение для расчета скорости реакции поглощения в тепловой области энергий:

$$\begin{aligned} R_a &= \int d\vec{v} \int d\vec{V} N(\vec{V}) \sigma_a(v_0) \frac{v_0}{v_r} n(\vec{v}) v_r = v_0 \sigma_a(v_0) \int d\vec{v} n(\vec{v}) \int d\vec{V} N(\vec{V}) = \\ &= v_0 n \sigma_a(v_0) N = \Sigma_a(v_0) \Phi_0, \end{aligned}$$

где $\Sigma_a(v_0)$ – эффективное макроскопическое сечение поглощения, а Φ_0 – плотность потока нейтронов, определенных в тепловой точке. С другой стороны, скорость реакции поглощения в тепловой области энергий можно определить через среднее по тепловой области энергии сечение поглощения и тепловой поток нейтронов из формулы (6.10):

$$R_a = \int_0^{E_{th}} dE \Sigma_a(E) \Phi_M(E) = \overline{\Sigma_a} \Phi_T.$$

Из последних двух выражений следует, что среднее по тепловой области энергии сечение поглощения может быть определено из выражения $\overline{\Sigma_a} = \Sigma_a(v_0) \frac{\Phi_0}{\Phi_T}$. Согласно (6.10) $\Phi_T = \int_0^{E_{th}} dE \Phi_M(E)$.

Подставим в это выражение спектр Максвелла (6.7) с эффективной для данной среды температурой нейтронного газа и вычислим интеграл, воспользовавшись тем фактом, что на верхнем пределе интегрирования при $E = E_{th} \sim 5 kT_n$ значение функции, стоящей под интегралом практически равно нулю из-за множителя $\exp\{-E/kT_n\}$, поэтому возможно заменить верхний предел интегрирования бесконечностью:

$$\begin{aligned}\Phi_T &= \int_0^{E_{th}} dE \Phi_M(E) \approx \int_0^{\infty} dE \frac{2\pi n}{(\pi k T_n)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{m}} E \exp\left[-\frac{E}{k T_n}\right] = \\ &= \frac{2\pi n}{(\pi k T_n)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{\infty} dE E \exp\left[-\frac{E}{k T_n}\right] = \frac{2\pi n}{(\pi k T_n)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{m}} (k T_n)^2 = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2k T_n}{m}}.\end{aligned}$$

Используя полученное выражение и соотношение $\Phi_0 = n v_0 = n \sqrt{\frac{2k T_0}{m}}$, запишем выражение для расчета среднего по тепловой области сечения поглощения:

$$\overline{\Sigma_a} = \Sigma_a(v_0) \frac{\Phi_0}{\Phi_T} = \Sigma_a(v_0) \frac{n \sqrt{\frac{2k T_0}{m}}}{\frac{2n}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2k T_n}{m}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Sigma_a(v_0) \sqrt{\frac{T_0}{T_n}}.$$

Таким образом, получено выражение для расчета среднего по тепловой области сечения поглощения (или любого другого сечения) в случае, если в тепловой области энергий зависимость микроскопического эффективного сечения пропорциональна $1/v_r$:

$$\overline{\Sigma_a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Sigma_a(v_0) \sqrt{\frac{T_0}{T_n}}. \quad (6.16)$$

В случае, если зависимость эффективного микроскопического сечения в тепловой области отличается от $1/v_r$, а это имеет место

для ряда тяжелых ядер, первый резонанс в сечении которых полностью или частично расположен в тепловой области энергий, для расчета средних по тепловой области сечений можно применять следующую формулу:

$$\overline{\Sigma}_i = g_i(T_H) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Sigma_a(v_0) \sqrt{\frac{T_0}{T_H}}, \quad (6.17)$$

аналогичную (6.16), за исключением множителя $g_i(T_H)$, который называется *фактором Вескотта* и учитывает как отклонение зависимости эффективного микроскопического сечения в тепловой области от $1/v_r$, так и отклонение реального спектра нейтронов в области термализации от спектра Максвелла, который использовался для получения выражения (6.16). Естественно, что ввиду наличия эффекта Доплера факторы Вескотта зависят от температуры среды, а следовательно, и от эффективной температуры нейтронного газа. Эти факторы рассчитаны для разных процессов i и для различных нуклидов (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Факторы Вескотта

$T_n, ^\circ\text{C}$	^{235}U		^{239}Pu	
	g_a	g_f	g_a	g_f
20	0,9780	0,9759	1,0723	1,0487
100	0,9610	0,9581	1,1611	1,1150
400	0,9294	0,9208	1,8905	1,6904
1000	0,9118	0,8956	3,5353	3,0079

Подробно теория термализации нейтронов рассмотрена в монографии [6].

Глава 7

ГАЗОКИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ В НЕРАЗМНОЖАЮЩИХ СРЕДАХ

В данной главе будет рассмотрена самая общая модель переноса нейтронов в неразмножающихся средах. Рассмотрим конечную неразмножающую среду с внешними источниками нейтронов и получим уравнение, описывающее стационарное нейтронное поле в этой среде в фазовом пространстве $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$. Уравнение будет записано относительно функции плотности потока нейтронов

$\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \left[\frac{1}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{эВ} \cdot \text{стер}} \right]$, которая, по определению, представ-

ляет собой среднестатистическое число нейтронов с энергией в единичном интервале около энергии E и направлением скорости в единичном телесном угле около направления $\vec{\Omega}$, которые пересекают в единицу времени единичную площадку, расположенную в точке \vec{r} таким образом, что вектор нормали к этой площадке совпадает с вектором $\vec{\Omega}$. При выводе уравнения будут использованы только самые общие положения, принятые для описания нейтронного поля:

- 1) нейтрон рассматривается как точечная частица;
- 2) нейтрон рассматривается как стабильная частица;
- 3) взаимодействие нейтронов с нейтронами не учитывается;
- 4) все величины, описывающие нейтронное поле носят статистический характер.

7.1. Уравнение Больцмана

Рассмотрим баланс нейтронов в элементарном фазовом объеме $dVdEd\Omega$ для стационарной задачи в неразмножающейся среде с внешними источниками нейтронов. Скорость убыли нейтронов из рассматриваемого фазового объема определяется двумя процессами:

$L(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – скоростью утечки нейтронов через границу фазового объема;

$AP(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – скоростью убыли нейтронов за счет процессов взаимодействия с ядрами среды.

Отметим, что процесс утечки связан с пересечением нейтронами, энергия и направление полета которых лежат внутри dE и $d\Omega$ соответственно, границы пространственного объема dV . Значение утечки представляет собой разность числа нейтронов, которые в единицу времени вытекают из объема dV , и числа нейтронов, которые за этот же промежуток времени втекают в объем dV в соответствующем угловом и энергетическом диапазонах. Если утечка имеет положительный знак, то она присутствует в уравнении в качестве члена, описывающего убыль нейтронов в фазовом объеме. В противном случае член утечки будет описывать поверхностный источник нейтронов и войдет в уравнение со знаком плюс.

Любое столкновение с ядром среды нейтрона, который находится внутри пространственного объема dV , энергия и направление полета которого лежат внутри dE и $d\Omega$ соответственно, приводит или к процессу поглощения нейтрона, или к его рассеянию. Очевидно, что поглощение приводит к исчезновению нейтрона. В результате процесса рассеяния меняется энергия нейтрона E и направление полета $\vec{\Omega}$, а новые значения энергии и направления полета будут лежать вне рассматриваемых элементарных интервалов dE и $d\Omega$. Следовательно, и любое рассеяние нейтрона приводит к его исчезновению из рассматриваемого фазового объема.

Скорость генерации нейтронов в фазовом объеме может происходить за счет двух процессов:

$R(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – скорости генерации нейтронов за счет рассеяния при других значениях энергии и с другими направлениями полета;

$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – скорости генерации нейтронов внешними источниками нейтронов.

Таким образом, уравнение баланса нейтронов в элементарном фазовом объеме $dVdEd\Omega$ для стационарной задачи будет иметь вид:

$$-L(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) - AP(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + R(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = 0.$$

Выразим каждый из членов в этом уравнении через известные величины (параметры среды и внешний источник) и плотность потока нейтронов. $L(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – число нейтронов с энергией, лежащей в интервале dE около E и направлением полета в угловом диапазоне $d\Omega$ около $\vec{\Omega}$, которые в единицу времени пересекают границу объема dV . Рассмотрим площадку dS поверхности объема dV , расположенную в точке \vec{r}_S . \vec{n}_S – вектор внешней нормали к площадке dS . По определению функция проекции вектора тока на нормаль к площадке $i_n(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega})$ описывает среднестатистическое число нейтронов, энергия которых лежит в единичном интервале около энергии E , направление полета – в единичном телесном угле около направления $\vec{\Omega}$, которые в единицу времени пересекают единичную площадку с нормалью \vec{n}_S , расположенную в точке \vec{r}_S . Тогда площадку размером dS в единицу времени будет пересекать $i_n(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega})dSdEd\Omega$ нейтронов, энергия которых лежит в интервале dE около E , и направлением полета в угловом диапазоне $d\Omega$ около $\vec{\Omega}$. Если последнее выражение проинтегрировать по всей поверхности объема dV – S , то это и будет искомое выражение для утечки нейтронов:

$$\begin{aligned}
 L(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) &= \oint_S dS i_n(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) dEd\Omega = dEd\Omega \oint_S dS i_n(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = \\
 &= dEd\Omega \oint_S dS (\vec{n}_S \vec{i}(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega})) = dEd\Omega \oint_S dS (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) \Phi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = \\
 &= dEd\Omega \left[\vec{\Omega} \cdot \oint_S dS \vec{n}_S \Phi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) \right] = dEd\Omega \left[\vec{\Omega} \cdot \oint_S d\vec{S} \Phi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) \right] = \\
 &= dEd\Omega \left[\vec{\Omega} \cdot \int_V dV \nabla \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \right] \approx \vec{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV dEd\Omega.
 \end{aligned}$$

В ходе вышеприведенного тождественного преобразования использовали следующие тождества:

$$\begin{aligned}
\vec{i}_n(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) &\equiv (\vec{n}_S \cdot \vec{i}(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega})); \\
\vec{i}(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) &\equiv \vec{\Omega} \Phi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}); \\
dS \vec{n}_S &\equiv d\vec{S}; \\
\oint_S d\vec{S} f(\vec{r}_S) &\equiv \int_V dV \nabla f(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Скорость взаимодействия нейтронов с ядрами среды в фазовом объеме рассчитывается как

$$AP(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV dE d\Omega.$$

Если известно распределение мощности внешних источников $S(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$, то скорость генерации нейтронов в фазовом объеме рассчитывается как

$$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV dE d\Omega.$$

Чтобы найти член $R(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$, рассмотрим фазовый объем $dV dE' d\Omega'$. В этом фазовом объеме в единицу времени происходит $\Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') dV dE' d\Omega'$ процессов рассеяния нейтронов. Из них в фазовый объем $dV dE d\Omega$ попадут $\Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\Omega' dV \cdot W(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) \cdot dE d\Omega$ нейтронов, где функция $W(\vec{r}, E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega})$ – *индикатриса рассеяния*: плотность вероятности нейтрону с энергией E' и направлением полета $\vec{\Omega}'$ после рассеяния в точке \vec{r} иметь энергию E и направление полета $\vec{\Omega}$. Тогда выражение $W(\vec{r}, E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) \cdot dE d\Omega$ представляет собой вероятность того, что после рассеяния в точке \vec{r} нейтрона с энергией E' и направлением полета $\vec{\Omega}'$ его энергия будет лежать в интервале dE около энергии E , а направление полета – в угловом диапазоне $d\vec{\Omega}$ около направления полета $\vec{\Omega}$.

Естественно, что выполняется нормировка:

$$\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} W(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) = 1.$$

Проинтегрировав выражение

$$\Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\Omega' \cdot W(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) \cdot dV dE d\Omega$$

по всем возможным значениям энергии до рассеяния E' и всем возможным направления полета нейтрона до рассеяния $\vec{\Omega}'$, получим выражение для члена, описывающего скорость генерации нейтронов в фазовом объеме за счет процессов рассеяния при других значениях энергии и направлениях полета:

$$R(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = dV dE d\Omega \int_0^{\infty} dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') W(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}).$$

Подставим найденные скорости процессов в уравнение баланса нейтронов в фазовом объеме, сократим на величину $dV dE d\Omega$ и получим уравнение баланса нейтронов в единичном фазовом объеме:

$$\boxed{\begin{aligned} & \vec{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \\ & = \int_0^{\infty} dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') W(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) + S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}). \end{aligned}} \quad (7.1)$$

Формула (7.1) называется *уравнением Больцмана*. Оно представляет собой интегродифференциальное уравнение. Название этого уравнения пришло в теорию переноса нейтронов из теории газов, в которой подобное уравнение было получено Больцманом задолго до открытия нейтрона.

Отметим, что в рамках положений, отмеченных в начале данной главы, это уравнение точное. Хотя в данном уравнении и не учтены (n, f) -, (n, α) -, (n, p) -, $(n, 2n)$ -реакции, но это легко можно сделать путем добавления соответствующих членов в уравнение. Уравнение Больцмана – наиболее общая форма уравнения переноса ней-

тронов, поскольку при его выводе не было сделано никаких дополнительных предположений. Из уравнения Больцмана путем математических преобразований возможно получить любое из рассмотренных ранее приближенных уравнений (моделей), описывающих нейтронное поле в среде. В качестве примера в прил. 6 из уравнения Больцмана получено уравнение модели диффузии моноэнергетических нейтронов.

Поскольку применение уравнения Больцмана неограничено никакими дополнительными предположениями, то его решение выступает в качестве эталонных значений при решении задач переноса нейтронов. Другими словами, сравнение решения задачи переноса нейтронов, полученного в каком-либо из рассмотренных выше приближений, с решением уравнения Больцмана позволяет сделать вывод о применимости той или иной модели описания нейтронного поля для конкретной физической задачи. В качестве примера в табл. 7.1 приведено значение критического параметра $C = (\Sigma_s + v\Sigma_f)/\Sigma_{tot}$ гомогенной пластины толщиной H (в длинах свободного пробега нейтронов) для различных значений H , рассчитанное в диффузионном приближении и путем решения уравнения Больцмана. Отметим, что в данной постановке задачи существуют полуаналитические методы решения уравнения Больцмана. Приведенные значения параметра C соответствуют критическому состоянию пластины.

Таблица 7.1

Значение критического параметра C гомогенной пластины толщиной H

Длина H свободного пробега нейтрона	Уравнение Больцмана	Диффузионное приближение
1	1,6154	4,8381
2	1,2771	1,4826
6	1,0583	1,0658

Из приведенных значений с очевидностью следует, что диффузионное приближение неприменимо для расчета систем размерами меньше шести длин свободного пробега нейтрона, поскольку в противном случае не выполняется предположение о слабой зависимости плотности потока от пространственной координаты, заложенное в диффузионное приближение.

7.2. Условия однозначного выбора решения уравнения Больцмана в физических задачах

1. **Условие конечности и неотрицательности функции плотности потока нейтронов** следует из определения $\Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ и имеет вид $0 \leq \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) < \infty$.

2. **Условие для плотности потока нейтронов на внешней границе «среда – вакуум».** Рассмотрим невогнутую границу среды и вакуума (рис. 7.1). Невогнутая граница означает, что нейтроны, вылетевшие из среды, не могут в нее вернуться.

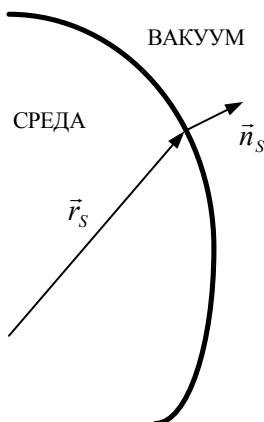


Рис. 7.1. Невогнутая граница среды и вакуума

Поскольку в вакууме отсутствует рассеяние нейтронов, то односторонний ток нейтронов из вакуума в среду равен нулю:

$i_{n_s}^-(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = 0$. Это равенство можно переписать в виде: $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_s) \Phi(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = 0$ для всех $\vec{\Omega}$, таких, что $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_s) < 0$ (любое направление движения нейтрона из вакуума в среду). Из последнего равенства следует искомое условие: $\Phi(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = 0$ для всех $\vec{\Omega}$, таких, что $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_s) < 0$. Таким образом, плотность потока нейтронов

на границе «среда – вакуум» равна нулю для всех направлений полета нейтронов из вакуума в среду.

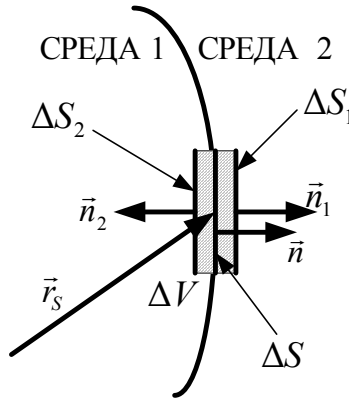


Рис. 7.2. Граница двух сред с разными свойствами

3. Условие для плотности потока нейтронов на границе раздела двух сред. Рассмотрим границу раздела двух сред с разными свойствами (рис. 7.2), на которой отсутствуют локальные источники нейтронов. Определим объем ΔV (заштрихованная область на рис. 7.2) и проинтегрируем уравнение Больцмана по этому объему:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta V} (\vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})) d\vec{r} + \int_{\Delta V} \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{r} - \\ & - \int_{\Delta V} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') W(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) - \\ & - \int_{\Delta V} S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{r} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим предел записанного выражения при стремлении области интегрирования (объема ΔV) к нулю таким образом, что поверхности ΔS_1 и ΔS_2 стремятся к поверхности ΔS . Тогда все слагаемые, кроме первого, будут равны нулю, поскольку они представляют собой интегралы от ограниченных функций по области

интегрирования, стремящейся к нулю. Преобразуем первое слагаемое, используя теорему Остроградского – Гаусса при переходе от объемного интеграла к поверхностному в первом равенстве:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} (\vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})) d\vec{r} &= \lim_{\substack{\Delta S_1 \rightarrow \Delta S \\ \Delta S_2 \rightarrow \Delta S}} \oint (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) \Phi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) dS = \\
 &= \lim_{\Delta S_1 \rightarrow \Delta S} \int_{\Delta S_1} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1) \Phi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) dS + \lim_{\Delta S_2 \rightarrow \Delta S} \int_{\Delta S_2} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2) \Phi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) dS = \\
 &= \int_{\Delta S} ((\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1) \Phi_1(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) + (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2) \Phi_2(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega})) dS = 0.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1) = -(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2) \equiv (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})$, где \vec{n} – внешняя нормаль к ΔS , из последнего равенства получим:

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \Phi_1(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \Phi_2(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}),$$

или окончательно:

$$\Phi_1(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = \Phi_2(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}).$$

Таким образом, плотность потока нейтронов непрерывна на границе сред с разными свойствами.

4. Условие локализованного источника. Рассмотрим среду, в которой в точке \vec{r}_0 расположен локализованный точечный источник нейтронов мощностью $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$. Тогда в уравнении Больцмана (7.1) источник будет иметь вид: $S(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Окружим точечный источник сферой радиусом R (рис. 7.3). Проинтегрируем уравнение Больцмана по объему сферы ΔV_R и возьмем предел получившегося выражения при «стягивании» сферы к точке источника. При этом предел от второго и третьего членов будет равен нулю, поскольку они представляют собой интеграл от ограниченной функции при стремлении области интегрирования к нулю. Из оставшегося равенства

$$\lim_{\Delta V_R \rightarrow 0} \oint_{V_R} \vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV = \lim_{\Delta V_R \rightarrow 0} \oint_{V_R} q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV,$$

после проведения интегрирования в правой части и тождественных преобразований левой части получим искомое условие локализованного источника:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \oint_{S_R} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_S) \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dS = q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}).$$

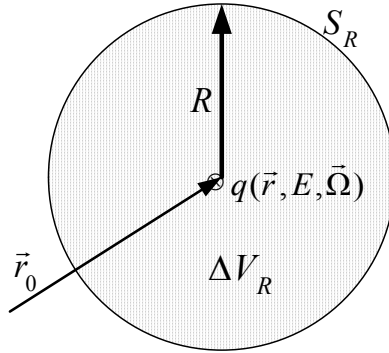


Рис. 7.3. Локализованный источник

Физический смысл этого условия заключается в том, что число нейтронов с энергией E , которые пересекают в направлении $\vec{\Omega}$ в единицу времени поверхность сферы бесконечно малого радиуса, окружающую источник нейтронов, равно числу нейтронов с энергией E , которые испускает источник нейтронов в направлении $\vec{\Omega}$ в единицу времени.

7.3. Интегральная форма уравнения переноса нейтронов

Рассмотрим ограниченную неразмножающую среду, помещенную в вакуум, с распределенными внешними источниками нейтро-

нов. $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – мощность внешних источников нейтронов. Выберем внутри среды точку \vec{r}_0 и направление скорости нейтронов $\vec{\Omega}$ (рис. 7.4). Расположим в точке \vec{r}_0 площадку dS таким образом, чтобы вектор нормали к площадке \vec{n} совпадал с вектором направления скорости нейтронов $\vec{\Omega}$. В единицу времени площадку dS пересекает $\Phi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) dS dE d\vec{\Omega}$ нейтронов, энергия которых лежит в интервале dE около энергии E , а направление вектора скорости – в интервале $d\vec{\Omega}$ около направления, определенного вектором $\vec{\Omega}$. Это следует из определения функции плотности потока нейтронов. Найдем это число нейтронов другим способом, а именно «соберем» все нейтроны с энергией $E \in dE$ и $\vec{\Omega} \in d\vec{\Omega}$, которые появились в среде в результате действия внешнего источника или процесса рассеяния нейтронов на ядрах среды, полетели в направлении площадки dS , прошли путь до нее без взаимодействия, а следовательно, пересекли площадку dS .

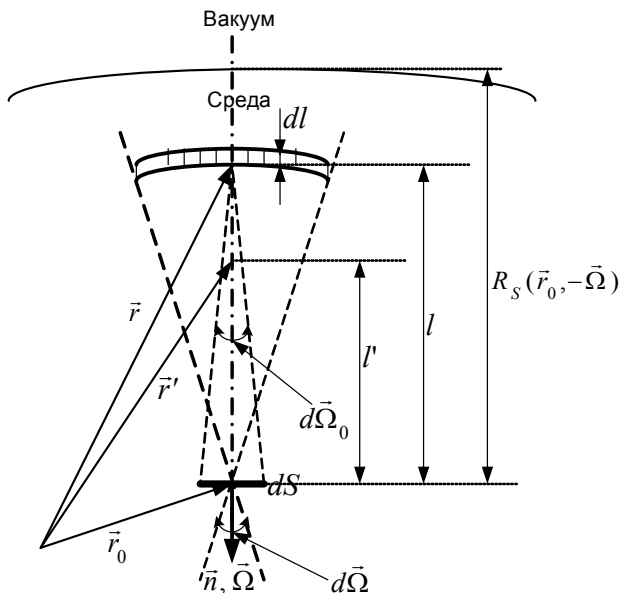


Рис. 7.4. Схема к выводу интегрального уравнения

Решим поставленную задачу, используя сферическую геометрию. На расстоянии l от площадки dS выделим элементарный сферический слой толщиной dl (см. рис. 7.4). В слое dl нейтроны появляются за счет действия внешних источников и рассеяния на ядрах среды. Только нейтроны, родившиеся в области слоя dV (заштрихованной на рис. 7.4), и только в случае, если направление их скорости лежит в угловом диапазоне $d\vec{\Omega}_0$ (телесный угол, под которым видна площадка dS из точки \vec{r}), полетят в направлении площадки dS и, в случае избежания столкновений с ядрами среды, пересекут эту площадку в угловом диапазоне $d\vec{\Omega}$. Объем заштрихованной части сферического слоя dV равен $4\pi l^2 dl d\vec{\Omega}$. Если $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – мощность внешних источников нейтронов, то из заштрихованной области сферического слоя в направлении dS в диапазоне энергий dE полетит $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dV dE d\vec{\Omega}_0$ нейтронов, где $d\vec{\Omega}_0 = \frac{dS}{4\pi l^2}$. Аналогично, в результате рассеяния нейтронов на ядрах среды в объеме dV в направлении площадки dS полетит

$$\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega \Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') W_S(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) dV dE d\vec{\Omega}_0$$

нейтронов, энергия которых лежит в интервале dE . Однако площадку dS пересекут не все нейтроны, которые после рождения имеют соответствующее направление скорости, а только те, которые на пути к площадке не столкнулись с ядрами среды. Вероятность нейтронам пройти в гетерогенной среде путь l без взаимо-

действия равна $\exp\left\{-\int_0^l \Sigma_{tot}(\vec{r}', E) dl'\right\}$. Умножим полное количество

нейтронов, которые в результате рождения в элементарном сферическом слое имеют энергию в интервале dE и такое направление вектора скорости, что они полетели в направлении площадки dS в угловом диапазоне $d\vec{\Omega}$, на вероятность нейтронам пройти в гетерогенной среде путь l до площадки dS без взаимодействия и просуммируем по всем возможным значениям l от $l=0$ до

$l = R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})$, где $R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})$ – расстояние от рассматриваемой точки \vec{r}_0 до границы среды в направлении, противоположном направлению вектора $\vec{\Omega}$. В результате получим искомую функцию: среднестатистическое количество нейтронов, энергия которых лежит в интервале dE около энергии E , а направление вектора скорости – в интервале $d\vec{\Omega}$ около направления, определенного вектором $\vec{\Omega}$, и которые в единицу времени пересекают площадку dS , расположенную в точке \vec{r}_0 таким образом, что вектор нормали к площадке \vec{n} совпадает с вектором направления скорости нейтронов $\vec{\Omega}$.

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) dS dE d\vec{\Omega} &\equiv \int_0^{R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} dl \cdot \exp\left\{-\int_0^l \Sigma_{tot}(\vec{r}', E) dl'\right\} \times \\ &\times \left[q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') W_S(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) \right] \times \\ &\times 4\pi l^2 d\vec{\Omega} \cdot dE \cdot \frac{dS}{4\pi l^2}. \end{aligned}$$

В последнем выражении учтено, что $dV = 4\pi l^2 dl d\vec{\Omega}$ и $d\vec{\Omega}_0 = \frac{dS}{4\pi l^2}$.

Таким образом, после сокращения $dS dE d\vec{\Omega}$ и учитывая, что $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{\Omega} \cdot l$ и $\vec{r}' = \vec{r}_0 - \vec{\Omega} \cdot l'$, окончательно получим:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) &= \int_0^{R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} dl \cdot \exp\left\{-\int_0^l \Sigma_{tot}(\vec{r}_0 - \vec{\Omega} \cdot l', E) dl'\right\} \times \\ &\times \left[q(\vec{r}_0 - \vec{\Omega} \cdot l, E, \vec{\Omega}) + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} \Sigma_S(\vec{r}_0 - \vec{\Omega} \cdot l, E') \times \right. \\ &\times \left. \Phi(\vec{r}_0 - \vec{\Omega} \cdot l, E', \vec{\Omega}') W_S(\vec{r}_0 - \vec{\Omega} \cdot l; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

Эта формула называется *уравнением переноса нейтронов в интегральной форме*. Граничное условие для этого уравнения имеет очевидный вид: $\Phi(\vec{r}_0 - \vec{\Omega} \cdot R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega}), E, \vec{\Omega}) = 0$. Интегродифференциальное уравнение Больцмана и интегральная форма уравнения переноса полностью эквивалентны, т.е. одно уравнение может быть получено из другого путем тождественных математических преобразований (прил. 7).

7.4. Интегральное уравнение Пайерлса

Интегральное уравнение Пайерлса – частный случай интегрального уравнения переноса нейтронов и получается из последнего, если выполняются следующие условия.

1. *Среда – однородная*. В этом случае макроскопические сечения не зависят от пространственной координаты: $\Sigma(\vec{r}, E) = \Sigma(E)$, а следовательно, $\int_0^l \Sigma(\vec{r}', E) dl' = \Sigma(E) \cdot l$.

2. *Внешние источники изотропны*, т.е. функция, описывающая мощность внешних источников не зависит от угловой переменной: $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = q(\vec{r}, E)$.

3. *Рассеяние изотропно в лабораторной системе* (среда состоит из тяжелых ядер). В этом случае, с учетом однородности среды, индикатриса рассеяния принимает вид

$$W_S(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) = W_S(E' \rightarrow E).$$

С учетом этих предположений интегральное уравнение переноса нейтронов (7.2) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) = & \int_0^{R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} dl \cdot \exp\{-\Sigma_{tot}(E)l\} \times \\ & \times \left[q(\vec{r}, E) + \int_0^\infty dE' \Sigma_S(E') W_S(E' \rightarrow E) \int_{4\pi} \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \right]. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее уравнение по переменной $\vec{\Omega}$, т.е. сформулируем уравнение относительно интегральной по углу функции плотности потока нейтронов:

$$\int_{4\pi} \Phi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \int_0^{R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} dl \cdot \exp\{-\Sigma_{tot}(E)l\} \times \\ \times \left[q(\vec{r}, E) + \int dE' \cdot \Sigma_s(\vec{r}, E') W_s(\vec{r}; E' \rightarrow E) \int_{4\pi} \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \right].$$

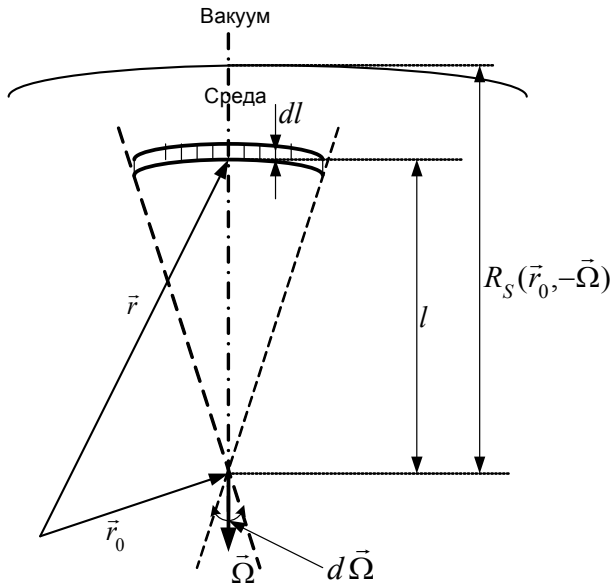


Рис. 7.5. Схема к выводу уравнение Пайерлса

Введем обозначение: $\int_{4\pi} \Phi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \Phi(\vec{r}_0, E)$ – интегральная по угловой переменной плотность потока нейтронов (полная плотность потока нейтронов). С учетом равенства $d\vec{r} = 4\pi l^2 dl d\vec{\Omega}$, где

$l = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ (рис. 7.5), перейдем в последнем уравнении от интегрирования по переменным $d\vec{\Omega}$ и dl к интегрированию по объему среды, воспользовавшись равенством $\int_{4\pi} d\vec{\Omega} \int_0^{R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} dl = \int_V \frac{d\vec{r}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$, и получим:

$$\Phi(\vec{r}_0, E) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{r} \exp\{-\Sigma_{tot}(E)|\vec{r} - \vec{r}_0|\}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \times$$

$$\times \left[q(\vec{r}, E) + \int_0^\infty dE' \Sigma_S(E') W_S(E' \rightarrow E) \Phi(\vec{r}, E') \right]. \quad (7.3)$$

Формула (7.3) называется *уравнением Пайерлса*. Это – интегральное уравнение с источником, стоящим в квадратных скобках, и ядром (множитель впереди квадратных скобок).

Подробно газокинетическая теория переноса нейтронов рассмотрена, например, в монографии [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.
2. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979.
3. Блатт Д.Ж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
4. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
5. Фейнберг С.М., Шихов С.Б., Троянский В.Б. Теория ядерных реакторов. – Ч.1. Элементарная теория. – М.: Атомиздат, 1978.
5. Николаев М.Н., Рязанов Б.Г., Савоськин М.М., Цибуля А.М. Многогрупповое приближение в теории переноса нейтронов. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
6. Беркурц К., Виртц К. Нейтронная физика. – М.: Атомиздат, 1968.
7. Шихов С.Б., Троянский В.Б. Теория ядерных реакторов. – Ч.2. Газокинетическая теория. – М.: Энергоатомиздат, 1983.

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ИЗОТОПОВ, ВАЖНЫХ ДЛЯ ФИЗИКИ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Атомный номер	Изотоп	Содержание изотопа в нуклиде, %	Период полураспада	$\sigma_{\text{б}}^{(k)}$	$\sigma_{\text{б}}^{(k)}$
1	^1H	99,985		0,332	
	^2H	0,015		0,053	
	^3H		12,33 года		
3	^6Li	7,42		940	
	^7Li	92,58		0,037	
5	^{10}B	19,6		3837	
	^{11}B	80,4		0,0055	
6	^{12}C	98,89		0,0034	
	^{13}C	1,11		0,0009	
	^{14}C		5730 лет		
7	^{14}N	99,63		1,88	
	^{15}N	0,37		0,000024	
8	^{16}O	99,759		0,000178	
	^{17}O	0,037		0,235	
	^{18}O	0,204		0,00016	
53	^{135}I		6,7 ч		
54	^{135}Xe		9,17 ч	2 650 000	
61	^{149}Pm		53,1 ч		
62	^{149}Sm	13,83		41,000	
90	^{232}Th	100	$1,41 \times 10^{10}$ лет	7,40	
	^{233}Th		22,2 мин	1515	15
92	^{233}U		$1,55 \times 10^5$ лет	578,8	531,1
	^{234}U	0,0057	$2,47 \times 10^5$ лет	100,2	
	^{235}U	0,72	$7,13 \times 10^8$ лет	680,8	582,2
	^{236}U		$2,34 \times 10^7$ лет	5,2	
	^{238}U	99,27	$4,51 \times 10^9$ лет	2,70	
	^{239}U		23,5 мин.	36	14
94	^{239}Pu		24390 лет	1011,3	742,5
	^{240}Pu		6540 лет	289,5	0,030
	^{241}Pu		15 лет	1377	1009
	^{242}Pu		$3,87 \times 10^5$ лет	18,5	< 0,2

(*) Сечение в тепловой точке.

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ НУКЛИДОВ И ВЕЩЕСТВ

Нуклид или вещество	Символ	Атомный номер	Атомная или молекуляр- ная масса, а.е.м.	Плотность, г/см ³	Атомов (молекул) в см ³ , ×10 ⁻²⁴	σ_{a_0} б ^(*)	σ_{s_2} б ^(*)	Σ_{a_0} см ⁻¹	Σ_{s_2} см ⁻¹
Водород	H	1	1,00797	Газ		0,332			
Дейтерий	D	1	2,01410	Газ		0,00053			
Гелий	He	2	4,0026	Газ		< 0,05			
Литий	Li	3	6,942	0,53	0,04600	70,7		3,252	
Бериллий	Be	4	9,0122	1,85	0,1236	0,0092	6,14	0,001137	0,7589
Графит	C	6	12,01115	1,6	0,08023	0,0034	4,75	0,0002728	0,3811
Азот	N	7	14,0067	Газ		1,85	10,6		
Кислород	O	8	15,9994	Газ		0,00027	3,76		
Фтор	F	9	18,994	Газ		0,0095	4,0		
Неон	Ne	10	20,183	Газ		0,038	2,42		
Натрий	Na	11	22,9898	0,97	0,02541	0,530	3,2	0,01347	0,08131
Магний	Mg	12	24,312	1,74	0,04310	0,063	3,42	0,002715	0,1474
Алюминий	Al	13	26,9815	2,699	0,06024	0,230	1,49	0,01386	0,08976
Кремний	Si	14	28,086	2,33	0,04996	0,16	2,2	0,007994	0,1099
Фосфор	P	15	30,9738	1,82	0,03539	0,180		0,006370	
Сера	S	16	32,064	2,07	0,03888	0,520	0,975	0,02022	0,03791
Кальций	Ca	20	40,08	1,55	0,02329	0,43		0,01001	
Титан	Ti	22	47,90	4,51	0,05670	6,1	4,0	0,3459	0,2268
Ванадий	V	23	50,942	6,1	0,07212	5,04	4,93	0,3635	0,3556
Хром	Cr	24	51,996	7,19	0,08328	3,1	3,8	0,2582	0,3165
Марганец	Mn	25	54,9380	7,43	0,08145	13,3	2,1	1,083	0,1710

Нуклид или вещество	Символ	Атомный номер	Атомная или молекуляр- ная масса, а.е.м.	Плотность, г/см ³	Атомов (молекул) в см ³ , $\times 10^{24}$	σ_{as} $\bar{\sigma}^{(*)}$	σ_{s2} $\bar{\sigma}^{(*)}$	Σ_{as} см ⁻¹	Σ_{s2} см ⁻¹
Железо	Fe	26	55,847	7,87	0,08487	2,55	10,9	0,2164	0,9251
Кобальт	Co	27	58,9332	8,8	0,08993	37,2	6,7	3,345	0,6025
Никель	Ni	28	58,71	8,90	0,09130	4,43	17,3	0,4045	1,579
Медь	Cu	29	63,54	8,96	0,08493	3,79	7,9	0,3219	0,6709
Цинк	Zn	30	65,37	7,133	0,06572	1,10	4,2	0,07230	0,2760
Галлий	Ga	31	69,72	5,91	0,05105	2,9	6,5	0,1480	0,3318
Германий	Ge	32	72,59	5,36	0,04447	2,3	7,5	0,1023	0,3335
Мышьяк	As	33	74,9216	5,73	0,04606	4,3	7	0,1981	0,3224
Селен	Se	34	78,96	4,81	0,03669	11,7	9,7	0,4293	0,3559
Бром	Br	35	79,909	3,12	0,02351	6,8	6,1	0,1599	0,1434
Криптон	Kr	36	83,8	Газ		25,0	7,50		
Рубидий	Rb	37	85,47	1,53	0,01078	0,37	6,2	0,003989	0,06684
Стронций	Sr	38	87,62	2,6	0,01787	1,21	10	0,2162	0,1787
Итрий	Y	39	88,906	5,51	0,03733	1,28	7,60	0,04778	0,2837
Цирконий	Zr	40	91,22	6,5	0,04291	0,185	6,40	0,007938	0,2746
Ниобий	Nb	41	92,906	8,57	0,05555	1,15		0,06388	
Молибден	Mo	42	95,94	10,2	0,06403	2,65	5,8	0,1697	0,3714
Технеций	Tc	43	99			19			
Рутений	Ru	44	101,07	12,2	0,07270	2,56		0,1861	
Родий	Rh	45	102,905	12,41	0,07263	150		10,89	
Палладий	Pd	46	106,4	12,0	0,06792	6,9	5,0	0,4686	0,3396
Серебро	Ag	47	107,870	10,49	0,05857	63,6		3,725	

Нуклид или вещество	Символ	Атомный номер	Атомная или молекулярная масса, а.е.м.	Плотность, г/см ³	Атомов (молекул) в см ³ , ×10 ²⁴	$\sigma_{as}^{(*)}$ б	$\sigma_{s2}^{(*)}$ б	Σ_{as} см ⁻¹	Σ_{s2} см ⁻¹
Кадмий	Cd	48	112,40	8,65	0,04635	2450	5,6	113,56	0,2596
Индий	In	49	114,82	7,31	0,03834	193,5		7,419	
Олово	Sn	50	118,69	7,298	0,03703	0,63		0,02333	
Сурьма	Sb	51	121,75	6,62	0,03275	5,4	4,2	0,1769	0,1376
Теллур	Te	52	127,60	6,24	0,02945	4,7		0,1384	
Йод	I	53	126,9044	4,93	0,02340	6,2		0,1451	
Ксенон	Xe	54	131,30	Газ		24,5	4,30		
Цезий	Cs	55	132,905	1,9	0,008610	29,0		0,2497	
Барий	Ba	56	137,34	3,5	0,01535	1,2		0,01842	
Лантан	La	57	138,91	6,19	0,02684	9,0	9,3	0,2416	0,2496
Церий	Ce	58	140,12	6,78	0,02914	0,63	4,7	0,01836	0,1370
Празеодим	Pr	59	140,907	6,78	0,02898	11,5	3,3	0,3333	0,09563
Неодим	Nd	60	144,24	6,98	0,02914	50,5	16	1,472	0,4662
Самарий	Sm	62	150,35	6,93	0,02776	5800		161,0	
Европий	Eu	63	151,96	5,22	0,02069	4600	8,0	95,17	0,1655
Гадолиний	Gd	64	157,25	7,95	0,03045	49000		1492	
Тербий	Tb	65	158,925	8,33	0,03157	25,5	20	0,8050	0,6314
Диспрозий	Dy	66	162,50	8,56	0,03172	930	100	29,50	3,173
Гольмий	Ho	67	164,930	8,76	0,03199	66,5	9,4	2,127	0,3007
Эрбий	Er	68	162,50	8,56	0,03172	930	100	29,50	3,172
Тулий	Tm	69	168,934	9,35	0,03314	103	12	3,413	0,3977
Иттербий	Yb	70	173,04	7,01	0,02440	36,6	25,0	0,8930	0,6100

Нуклид или вещество	Символ	Атомный номер	Атомная или молекулярная масса, а.е.м.	Плотность, г/см ³	Атомов (молекул) в см ³ , ×10 ²⁴	$\sigma_{\text{вс}}^{(*)}$ б ^(*)	$\sigma_{\text{вс}}^{(*)}$ б ^(*)	$\Sigma a_{\text{вс}}^{-1}$ см ⁻¹	$\Sigma s_{\text{вс}}^{-1}$ см ⁻¹
Лютеций	Lu	71	174,97	9,74	0,0353	77	8	2,581	0,2682
Гафний	Hf	72	178,49	13,36	0,04508	102	8	4,598	0,3606
Тантал	Ta	73	180,948	16,6	0,05525	21,0	6,2	1,160	0,3426
Вольфрам	W	74	183,85	19,2	0,06289	18,5		1,163	
Рений	Re	75	186,2	20	0,06596	88	11,3	5,804	0,7453
Осмий	Os	76	190,2	22,5	0,07124	15,3		1,090	
Иридий	Ir	77	192,2	22,5	0,07050	426	14	30,03	0,9870
Платина	Pt	78	195,09	21,45	0,06622	10,0	11,2	0,6622	0,7167
Золото	Au	79	196,967	19,32	0,05907	98,8		5,836	
Ртуть	Hg	80	200,59	13,55	0,04068	375		15,26	
Таллий	Tl	81	204,37	11,85	0,03492	3,4	9,7	0,1187	0,3387
Свинец	Pb	82	207,19	11,34	0,03296	0,170	11,4	0,005603	0,3757
Висмут	Bi	83	208,980	9,80	0,02824	0,033		0,0009319	
Полоний	Po	84	210	9,51	0,02727				
Радий	Ra	88	226,0254	5,0	0,01332	11,5		0,1532	
Активный	Ac	89	227			515			
Торий	Th	90	232,038	11,71	0,03039	7,4	12,67	0,2249	0,3850
Протактиний	Pa	91	231,0359			210			
Уран	U	92	238,03	19,1	0,04833	7,59	8,9	0,3668	0,4301
Плутоний	Pu	94	239,0522	19,6	0,04938	1011,3	7,7	49,93	0,3802
Вода	H ₂ O		18,0153	1,0	0,03343	0,664	103	0,02220	3,443
Тяжелая вода	D ₂ O		20,0276	1,105	0,03323	0,00133	13,6	4,42×10 ⁻⁵	0,4519

(*) Сечения в тепловой точке ($E = 0,0253$ эВ).

ДИФФУЗИОННЫЕ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрим задачу о нахождении функции плотности потока нейтронов в неразмножающей гомогенной пластине толщиной a с симметрично распределенным источником нейтронов мощностью $S(x)$: $S(-x) = S(x)$, таким, что $S(\pm a/2) = 0$.

Уравнение диффузии моноэнергетических нейтронов и граничное условие (считаем, что границы среды – экстраполированные) в данном случае имеют вид

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\Phi(x) = -\frac{S(x)}{D}, \quad \Phi\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0.$$

Ввиду симметрии задачи решение также должно быть симметрично, т.е. $\Phi(-x) = \Phi(x)$.

Найдем систему собственных функций $\{\varphi_n\}$ и собственных значений α_n оператора диффузии $\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{L^2}$ с соответствующими постановки задачи условиями. Для этого решим задачу на собственные функции и собственные значения оператора

$$\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\varphi_n(x) = \alpha_n\varphi_n(x)$$

с условием симметрии $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и граничным условием $\varphi_n\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0$.

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} - \left[\frac{1}{L^2} + \alpha_n \right] \varphi_n(x) = 0. \quad (\text{ПЗ.1})$$

Последнее уравнение имеет решения, удовлетворяющие граничному условию $\alpha_n \left(\pm \frac{a}{2} \right) = 0$, только в случае, если $\frac{1}{L^2} + \alpha_n = -B_n^2 < 0$.

Действительно, в противном случае решением уравнения будет суперпозиция двух экспонент, которая удовлетворяет граничному условию только при тривиальном решении, которое нас не интересует. В данном же случае решение уравнения будет иметь вид $\varphi_n(x) = A_n \cos\{B_n x\} + C_n \sin\{B_n x\}$. Поскольку нас интересуют только четные решения, константа $C_n = 0$. Использование граничного условия дает возможность определить константы B_n :

$$\varphi_n\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left\{B_n \frac{a}{2}\right\} = 0 \Rightarrow B_n = \frac{\pi}{a}(2n+1), n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, собственными функциями оператора диффузии в данной задаче являются функции $\varphi_n(x) = \cos\left\{\frac{\pi x}{a}(1+2m)\right\}$. Данная система собственных функций ортогональна на отрезке $[-a/2, a/2]$. Легко показать, что выполняется следующее равенство:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \varphi_n(x) \varphi_m(x) = \begin{cases} 0, n \neq m; \\ \frac{a}{2}, n = m. \end{cases}$$

Известно, что любую четную функцию $f(x)$, удовлетворяющую граничным условиям $f\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0$, можно на отрезке $[-a/2, a/2]$ разложить в ряд по системе ортогональных функций: $f(x) = \sum_n C_n \varphi_n(x)$, где коэффициенты разложения рассчитываются как

$$C_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' f(x') \varphi_n(x').$$

Разложим четные функции $\Phi(x)$ и $S(x)$, которые удовлетворяют необходимому краевому условию, по системе ортогональных функций $\{\varphi_n\}$:

$$\Phi(x) = \sum_n K_n \varphi_n(x), \quad (\text{ПЗ.2})$$

$$S(x) = \sum_n S_n \varphi_n(x),$$

где коэффициенты S_n рассчитываются по формуле:

$$S_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx S(x) \varphi_n(x). \quad (\text{ПЗ.3})$$

Подставим эти разложения в исходное уравнение:

$$\sum_n K_n \left[\frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \varphi_n(x) \right] = -\frac{1}{D} \sum_n S_n \varphi_n(x).$$

Так как функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют уравнению (ПЗ.1), то

$$\frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2} = -B_n^2 \varphi_n(x).$$

Учтя этот факт в последнем уравнении, получим:

$$\sum_n K_n \varphi_n(x) \left[B_n^2 + \frac{1}{L^2} \right] = \frac{1}{D} \sum_n S_n \varphi_n(x).$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\varphi_m(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[-a/2, a/2]$. Тогда, с учетом ортогональности системы функций $\{\varphi_n\}$, получим равенство:

$$K_m \left(B_m^2 + \frac{1}{L^2} \right) \frac{a}{2} = \frac{1}{D} S_m \frac{a}{2}.$$

Из этого равенства выразим коэффициенты K_m :

$$K_m = \frac{S_m / \Sigma_a}{1 + L^2 B_m^2}.$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (ПЗ.2) и учтя выражение для коэффициентов S_n (см. формулу (ПЗ.3)), получим окончательно:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\Sigma_a} \sum_n \frac{S_n}{1 + L^2 B_n^2} \varphi_n(x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' S(x') \left\{ \frac{2}{a \Sigma_a} \sum_n \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(x')}{1 + B_n^2 L^2} \right\}.$$

Вспомним, что согласно принципу суперпозиции источников:

$$\Phi(x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' S(x') G(x, x').$$

Сравнивая это выражение с полученным выражением для плотности потока легко определить функцию Грина для данной задачи:

$$G(x, x') = \left\{ \frac{2}{a \Sigma_a} \sum_n \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(x')}{1 + B_n^2 L^2} \right\}.$$

Видно, что в отличие от рассмотренных функций Грина для бесконечных однородных неразмножающих сред функция Грина для однородной неразмножающей пластины зависит от точки наблюдения x и точки, где расположен источник x' .

РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ ИЗБЕЖАТЬ ПОГЛОЩЕНИЯ НА РЕЗОНАНСЕ ПРИ ЗАМЕДЛЕНИИ НА ВОДОРОДЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ БЕСКОНЕЧНОЙ МАССЫ ПОГЛОТИТЕЛЯ. СЛУЧАЙ СИЛЬНОГО РАЗБАВЛЕНИЯ

Получим формулу для численных расчетов вероятности избежать поглощения на резонансе при замедлении на водороде в случае сильного разбавления и приближения бесконечной массы поглотителя. Преобразуем формулу Брейта – Вигнера (3.63) следующим образом:

$$\sigma(n, \gamma) = g\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = 4\pi g \lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{1}{1 + (E - E_r)^2 \left(\frac{2}{\Gamma}\right)^2}.$$

В резонансе (при $E = E_r$)

$$\sigma_\gamma(E_r) = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} 4\pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \sigma_r,$$

где $\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}$ – вероятность распада составного ядра по (γ) каналу;

$\sigma_r = 4\pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma}$ – значение сечения образования составного ядра в

максимуме резонанса (при $E = E_r$).

Таким образом, зависимость сечения радиационного захвата от энергии с учетом введенных выше обозначений можно описать формулой:

$$\sigma_\gamma(E) = \sigma_r \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{1}{1 + x^2}, \text{ где } x = \frac{2}{\Gamma}(E - E_r). \quad (\text{П4.1})$$

Рассмотрим величину $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_{tot}}$, которая входит в формулу (3.72) для $\varphi(E_0, E)$:

$$\frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} = \frac{N_{\Pi}\sigma_{\gamma\Pi}(E') + N_{\text{H}}\sigma_{a\text{H}}(E')}{N_{\text{H}}\sigma_{\text{SH}}(E') + N_{\text{H}}\sigma_{a\text{H}}(E') + N_{\Pi}\sigma_{\text{СП}}(E') + N_{\Pi}\sigma_{a\Pi}(E')}.$$

Водород – слабый поглотитель, поэтому $\Sigma_{a\text{H}} \ll \Sigma_{\text{SH}}$, и вторым членом в знаменателе последнего выражения можно пренебречь по отношению к первому члену. Поскольку микроскопическое сечение рассеяния водорода и поглотителя имеют один порядок величины, а концентрация ядер водорода существенно больше, чем поглотителя (случай сильного разбавления), то третьим членом в знаменателе последнего выражения можно пренебречь по отношению к первому. Необходимо отметить, что возможен случай резкого возрастания сечения рассеяния поглотителя в области резонанса, но приближение бесконечной массы поглотителя дает возможность этот случай не рассматривать. Рассматривается случай сильного разбавления, т.е. концентрация ядер поглотителя много меньше, чем концентрация ядер водорода. Пусть соотношение концентрации ядер такое, что выполняются условия: $\Sigma_{a\text{H}} \ll \Sigma_{a\Pi}$ и $\Sigma_{a\Pi} \ll \Sigma_{\text{SH}}$, т.е. требуется, чтобы выполнялось соотношение: $\Sigma_{a\text{H}} \ll \Sigma_{a\Pi} \ll \Sigma_{\text{SH}}$. Найдём диапазон отношения концентраций ядер поглотителя и водорода, при котором последнее соотношение выполняется. Для этого учтём порядок величин для микроскопических эффективных сечений в области замедления: $\sigma_{a\text{H}} \sim 10^{-3}$ б, $\sigma_{\text{SH}} \sim 10$ б, $\sigma_{a\Pi} \sim 10^4$ б в резонансе. С учетом этого легко найти искомый диапазон изменений N_{Π}/N_{H} :

$$\begin{aligned} N_{\text{H}}\sigma_{a\text{H}} &\ll N_{\Pi}\sigma_{a\Pi} \ll N_{\text{H}}\sigma_{\text{SH}}; \\ \frac{\sigma_{a\text{H}}}{\sigma_{a\Pi}} &\ll \frac{N_{\Pi}}{N_{\text{H}}} \ll \frac{\sigma_{\text{SH}}}{\sigma_{a\text{H}}}; \\ 10^{-7} &= \frac{10^{-3}}{10^4} \ll \frac{N_{\Pi}}{N_{\text{H}}} \ll \frac{10}{10^4} = 10^{-3}. \end{aligned}$$

Таким образом, случай сильного разбавления соответствует $\frac{N_{\Pi}}{N_H} \in [10^{-6}, 10^{-4}]$. При этом выполняется условие $\Sigma_{aH} \ll \Sigma_{a\Pi} \ll \Sigma_{SH}$, и в числителе анализируемого выражения вторым членом можно пренебречь по отношению к первому, а в знаменателе – четвертым по отношению к первому. Таким образом, в рассматриваемом случае:

$$\frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} \approx \frac{N_{\Pi} \sigma_{\gamma\Pi}(E')}{N_H \sigma_{SH}(E')}. \quad (\text{П4.2})$$

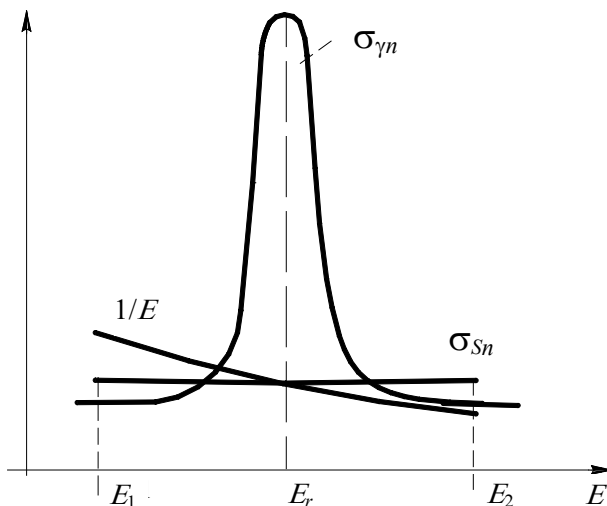


Рис. П4.1. Пояснения к расчету вероятности избежать поглощения при замедлении

Подставим (П4.2) в (3.72) и преобразуем получившееся выражение:

$$\begin{aligned}
\varphi(E_1, E_2) &= \exp \left\{ -\frac{N_{\Pi}}{N_H} \int_{E_2}^{E_1} dE' \frac{\sigma_{\gamma\Pi}(E')}{\sigma_{SH}(E')} \frac{1}{E'} \right\} = \\
&= \left[\text{так как } \sigma_{SH}(E) = \text{const во всей области замедления} \right] \approx \\
&\approx \exp \left\{ -\frac{N_{\Pi}}{N_H \sigma_{SH}} \int_{E_2}^{E_1} dE' \frac{\sigma_{\gamma\Pi}(E')}{E'} \right\} \approx \\
&\approx \left[\frac{1}{E} \text{ слабо меняется в } [E_2, E_1] \text{ по сравнению с } \sigma_{\gamma\Pi}(E) - \text{рис. П4.1} \right] \approx \\
&\approx \exp \left\{ -\frac{N_{\Pi}}{N_H \sigma_{SH} E_r} \int_{E_2}^{E_1} dE' \sigma_{\gamma\Pi}(E') \right\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно интеграл в последнем выражении, воспользовавшись (П4.1):

$$\begin{aligned}
\int_{E_1}^{E_2} dE' \sigma_{\gamma\Pi}(E') &= \int_{E_1}^{E_2} \frac{dE'}{1 + \left[\frac{2}{\Gamma} (E' - E_r) \right]^2} \sigma_r \frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma} = \\
&= \left[x = \frac{2}{\Gamma} (E' - E_r) \right] = \sigma_r \frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma} \int_{\frac{2}{\Gamma}(E_1 - E_r)}^{\frac{2}{\Gamma}(E_2 - E_r)} \frac{dx}{1 + x^2} \cdot \frac{\Gamma}{2} = \\
&= \frac{\sigma_r \Gamma_{\gamma}}{2} \int_{\frac{2}{\Gamma}(E_1 - E_r)}^{\frac{2}{\Gamma}(E_2 - E_r)} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\sigma_r \Gamma_{\gamma}}{2} \operatorname{arctg}(x) \Big|_{a_1}^{a_2},
\end{aligned}$$

$$\text{где } a_1 = \frac{2}{\Gamma} (E_1 - E_r), \quad a_2 = \frac{2}{\Gamma} (E_2 - E_r).$$

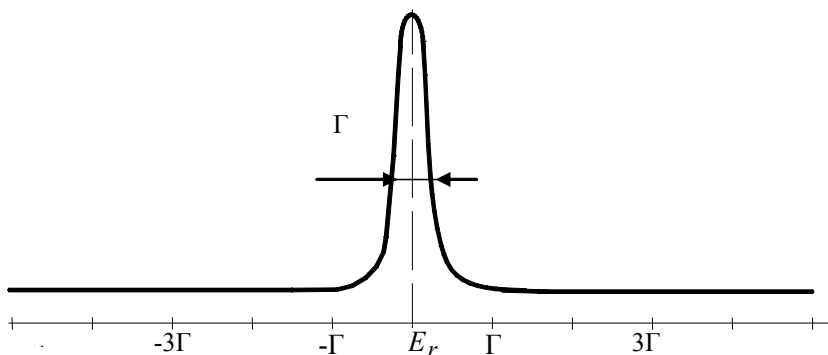


Рис. П4.2. Выбор пределов интегрирования

Учитывая, что основной вклад в интеграл от функции $\frac{1}{1+x^2}$ вносит область около $x = 0$ (рис. П4.2), т.е. около $E = E_r$, выберем $E_1 = E_r - 3\Gamma$ и $E_2 = E_r + 3\Gamma$. В этом случае $a_1 = -6$, а $a_2 = 6$ и с хорошей точностью $\arctg(6) \approx \pi/2$, а $\arctg(-6) \approx -\pi/2$. Тогда для вероятности избежать поглощения на резонансе поглотителя при замедлении на водороде получим выражение:

$$\varphi(E_1, E_2) \approx \exp \left\{ -\frac{N_{\Pi} \sigma_r \Gamma_{\gamma} \pi}{2 N_{\text{H}} \sigma_{\text{SH}}(E_r) E_r} \right\}.$$

Оценим $\varphi(E_1, E_2)$ для первого резонанса ^{238}U , который имеет следующие параметры: $E_r = 6,7$ эВ, $\Gamma_{\text{H}} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ эВ, $\Gamma_{\gamma} = 25 \cdot 10^{-3}$ эВ, $\Gamma = 26,5 \cdot 10^{-3}$ эВ. Видно, что поскольку на ядре ^{238}U при энергии 6,7 эВ идут только процессы резонансного рассеяния и поглощения, то $\Gamma = \Gamma_{\text{H}} + \Gamma_{\gamma}$. При этом вероятность распада составного ядра по каналу реакции радиационного захвата $\left(\frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma_{\text{H}}} \right)$ примерно в 16,5 раз больше, чем по каналу резонансного рассеяния. Рассчитаем значе-

ние сечения образования составного ядра в максимуме резонанса:

$$\sigma_r = 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_H}{\Gamma}.$$

Длину волны де Бройля нейтрона можно рассчитать по формуле:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{4,55 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{E}} \text{ [см]},$$

где E – кинетическая энергия нейтрона, эВ;

$$\lambda(E_r) = \frac{4,55 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{6,7}} = 1,76 \cdot 10^{-10} \text{ см}.$$

Тогда

$$\sigma_r = 4\pi \cdot (1,76)^2 \cdot 10^{-20} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{26,5 \cdot 10^{-3}} \cong 2,2 \cdot 10^{-20} \text{ см} = 2,2 \cdot 10^4 \text{ б}.$$

Таким образом, видно, что в максимуме резонанса сечение достигает десятков тысяч барн.

Возьмем для определенности $\frac{N_{\Pi}}{N_H} = 10^{-4}$, $\sigma_{\text{сн}} \approx 30 \text{ б}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} \Phi(E_1, E_2) &= \exp \left\{ - \frac{10^{-4} \cdot 2,2 \cdot 10^4 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot \pi}{2 \cdot 30 \cdot 6,7} \right\} \approx \\ &\approx \exp \{ -0,43 \cdot 10^{-3} \} = 0,99957. \end{aligned}$$

Видно, что вероятность избежать резонансного поглощения практически равна единице. Это следствие того, что ширина резонанса Γ много меньше ступеньки замедления на водороде. Поэтому, хотя в максимуме резонанса сечение достигает нескольких десятков тысяч барн, но в эту область энергий попадает только $\sim \frac{\Gamma}{E_0}$ от полного числа нейтронов.

РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ ИЗБЕЖАТЬ ПОГЛОЩЕНИЯ НА УЗКОМ ИЗОЛИРОВАННОМ РЕЗОНАНСЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ БЕСКОНЕЧНОЙ МАССЫ ПОГЛОТИТЕЛЯ

Получим формулу для расчета вероятности избежать поглощения на узком изолированном резонансе в приближении бесконечной массы поглотителя. Рассмотрим выражение:

$$\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_{tot}(E)} = \frac{\Sigma_{a\Pi}(E) + \Sigma_{a3}}{\Sigma_{a\Pi}(E) + \Sigma_{s\Pi}(E) + \Sigma_{s3} + \Sigma_{a3}}.$$

В числителе этого выражения можно пренебречь макроскопическим сечением поглощения замедлителя по сравнению с макроскопическим сечением поглощения поглотителя, поскольку микроскопическое сечение поглощения замедлителя (10^{-3} и менее барн) меньше микроскопического сечения поглощения поглотителя в максимуме резонанса (порядка 10^4 б) на 6 – 7 порядков, а концентрация ядер поглотителя в реальных средах меньше концентрации ядер замедлителя всего на один-два порядка. В знаменателе рассматриваемого выражения можно пренебречь сечением поглощения замедлителя по отношению к сечению рассеяния замедлителя (разница в сечениях составляет более трех порядков), а также сечением рассеяния поглотителя по отношению к сечению поглощения поглотителя, поскольку рассматривается приближение бесконечной массы поглотителя.

С учетом вышесказанного подставим в формулу (3.80) выражения для сечений. Согласно (П4.1)

$$\Sigma_{a\Pi}(E) = \Sigma_r \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{1}{1+x^2}, \text{ где } x = \frac{2}{\Gamma}(E - E_r).$$

Тогда

$$\Sigma_{tot}(E) = \Sigma_{s3} + \Sigma_{a\Pi}(E) = \Sigma_{s3} + \Sigma_r \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{1}{1+x^2}$$

и

$$\int_{E_1}^{E_2} dE \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_{tot}(E')} = \int_{E_1}^{E_2} dE' \frac{\Sigma_r \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\Gamma} (E' - E_r)^2 \right)}}{\Sigma_{S3} + \Sigma_r \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\Gamma} (E' - E_r)^2 \right)}} = \left| x = \frac{2}{\Gamma} (E' - E_r) \right| =$$

$$= \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{2}{\Gamma} (E_2 - E_r)}{\frac{\Gamma}{2} (E_1 - E_r)} \int dx \frac{\Sigma_r \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{1}{1 + x^2}}{\Sigma_{S3} + \Sigma_r \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{1}{1 + x^2}} \approx \frac{\Sigma_r \Gamma_\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Sigma_{S3} + \Sigma_{S3} x^2 + \Sigma_r},$$

при выполнении последнего равенства учтено, что $\Gamma_\gamma \approx \Gamma$, далее получаем:

$$\frac{\Gamma_\gamma \Sigma_r}{2 \cdot \Sigma_{S3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \left[\sqrt{1 + \frac{\Sigma_r}{\Sigma_{S3}}} \right]^2} = \frac{\Gamma_\gamma \Sigma_r}{2 \cdot \Sigma_{S3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma_r}{\Sigma_{S3}}}} \Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{\Gamma_\gamma \Sigma_r \pi}{2 \cdot \Sigma_S} \sqrt{\frac{\Sigma_{S3}}{\Sigma_{S3} + \Sigma_r}}.$$

В ходе последних преобразований была проведена замена пределов интегрирования по соображениям, аналогичным обсужденным в прил. 4. Кроме того, в знаменателе было использовано приближенное равенство $\Gamma_\gamma \approx \Gamma$, которое становится точным в случае отсутствия резонансного рассеяния (приближение бесконечной массы поглотителя). Вероятность избежать поглощения на узком изолированном резонансе в приближении бесконечной массы поглотителя получается после подстановки найденного выражения в

$$(3.80): \quad \varphi \approx 1 - \frac{\pi \Gamma_{\gamma} \Sigma_r}{2\xi \Sigma_{S3} E_r} \sqrt{\frac{\Sigma_{S3}}{\Sigma_{S3} + \Sigma_r}}, \quad \text{где } \Sigma_r = N_{\Pi} \sigma_r; \quad \Sigma_{S3} = N_3 \cdot \sigma_{S3};$$

$\sigma_r = 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\Gamma}$. Коэффициент $k = \sqrt{\frac{\Sigma_{S3}}{\Sigma_{S3} + \Sigma_r}}$ называется *коэффициентом самоэкранировки резонанса*. Он связан с эффектом резонансной самоэкранировки.

Если $\Sigma_r \ll \Sigma_{S3}$ (слабый резонанс), то $k \approx 1$. Этот случай соответствует бесконечному разбавлению.

Если $\Sigma_r \gg \Sigma_{S3}$ (сильный резонанс), то $k \ll 1$ и $k \approx \sqrt{\frac{\Sigma_{S3}}{\Sigma_r}} = \sqrt{\frac{\Sigma_{S3}/N_{\Pi}}{\sigma_r}}$. Используя полученную формулу и результаты расчетов, проведенных в прил. 4, выполним численную оценку $\varphi(E_1, E_2)$ для первого резонанса ^{238}U при замедлении на $^{12}_6\text{C}$ и $\frac{N_{\Pi}}{N_3} = 10^{-4}$. Сечение рассеяния для углерода примем равным 5 б, а $\xi = 0,158$:

$$\begin{aligned} \varphi(E_1, E_2) &= 1 - \frac{\pi \Gamma_{\gamma} N_{\Pi} \sigma_r}{2\xi N_3 \sigma_{S3} E_r} \sqrt{\frac{N_3 \sigma_{S3}}{N_3 \sigma_{S3} + N_{\Pi} \sigma_r}} = \\ &= 1 - \frac{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 2,2 \cdot 10^4}{2 \cdot 0,158 \cdot 5 \cdot 6,7} \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{5}{5 + 10^{-4} \cdot 2,2 \cdot 10^4}} \approx 0,986. \end{aligned}$$

Коэффициент самоэкранировки резонанса в этом случае составляет 0,883. Таким образом, вероятность избежать поглощения равна 98,6 %, вероятность поглотиться – 1,4 %. Заметим, что действительно величина, вычитаемая из единицы (в данном случае – 0,014), значительно меньше единицы, поэтому правомерно использованное ранее при выводе формулы (3.80) разложение экспоненциальной функции вблизи нуля.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕЙТРОНОВ ИЗ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Уравнение Больцмана в случае, если все нейтроны имеют одну и ту же энергию, принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} \operatorname{grad} \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}) + \Sigma_{tot}(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}) = q(\vec{r}, \bar{\Omega}) + \\ + \int_{4\pi} \Sigma_S(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}') W_S(\vec{r}, \bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}) d\bar{\Omega}'. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это уравнение по $\bar{\Omega}$, учитывая в первом члене равенство $\bar{\Omega} \operatorname{grad} \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}) = \operatorname{div} \bar{\Omega} \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \int_{4\pi} \bar{\Omega} \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega} + \Sigma_{tot}(\vec{r}) \int_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega} = \int_{4\pi} q(\vec{r}, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega} + \\ + \int_{4\pi} \Sigma_S(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}') d\bar{\Omega}' \cdot \int_{4\pi} W_S(\vec{r}, \bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}) d\bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Введя в рассмотрение вектор тока нейтронов $\vec{i}(\vec{r}) = \int_{4\pi} \bar{\Omega} \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega}$, глобальную плотность потока нейтронов $\Phi(\vec{r}) = \int_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega}$, интегральный источник $q(\vec{r}) = \int_{4\pi} q(\vec{r}, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega}$ и учитывая, что интеграл от индикатрисы рассеяния равен единицы, из последнего уравнения получим:

$$\operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}) + \Sigma_{tot}(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) = q(\vec{r}) + \Sigma_S(\vec{r}) \Phi(\vec{r}).$$

Принимая во внимание, что $\Sigma_a = \Sigma_{tot} - \Sigma_S$, окончательно получаем уравнение баланса нейтронов в единичном пространственном объеме:

$$\operatorname{div} \vec{i}(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) = q(\vec{r}). \quad (\text{П6.1})$$

Получим закон Фика, т.е. найдем связь между вектором тока нейтронов $\vec{i}(\vec{r})$ и плотностью потока нейтронов $\Phi(\vec{r})$. Для этого разложим функцию $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ в ряд по переменной $\vec{\Omega}$ и ограничимся двумя слагаемыми, т.е. рассмотрим случай почти изотропного потока:

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = A(\vec{r}) + \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{\Omega}. \quad (\text{П6.2})$$

Проинтегрируем уравнение (П5.2) по $\vec{\Omega}$:

$$\int_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = A(\vec{r}) \int_{4\pi} d\vec{\Omega} + \int_{4\pi} (\vec{\Omega} \cdot \vec{B}(\vec{r})) d\vec{\Omega}.$$

Левая часть этого уравнения равна глобальной плотности потока нейтронов $\int_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \Phi(\vec{r})$, первый член в правой части урав-

нения легко вычисляется: $A(\vec{r}) \int_{4\pi} d\vec{\Omega} = 4\pi A(\vec{r})$, а второй член в пра-

вой части уравнения равен нулю: $\int_{4\pi} (\vec{\Omega} \cdot \vec{B}) d\vec{\Omega} = 0$. Для того, чтобы

это проверить, распишем скалярное произведение под интегралом: $(\vec{\Omega} \cdot \vec{B}(\vec{r})) = \Omega_x \cdot B_x(\vec{r}) + \Omega_y \cdot B_y(\vec{r}) + \Omega_z \cdot B_z(\vec{r})$. Тогда с учетом соотношений (рис. П6.1)

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \cos \Theta; \quad \Omega_x = \sin \Theta \cos \varphi; \\ \Omega_y &= \sin \Theta \sin \varphi; \quad d\vec{\Omega} = \sin \Theta d\Theta d\varphi \end{aligned} \quad (\text{П6.3})$$

легко показать, что выполняются следующие равенства:

$$\int_{4\pi} \Omega_x d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_y d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} = 0,$$

а следовательно, $\int_{4\pi} (\vec{\Omega} \cdot \vec{B}) d\vec{\Omega} = 0$.

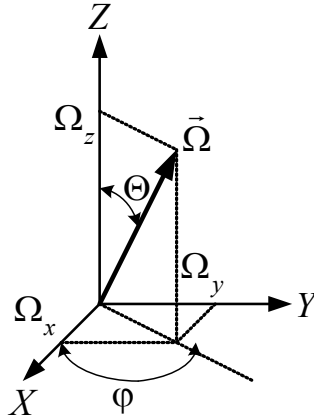


Рис. П6.1. Система пространственных и угловых координат

Таким образом, из уравнения (П6.2) после его интегрирования по $\vec{\Omega}$, получаем, что коэффициент $A(\vec{r})$ определяется выражением: $A(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \Phi(\vec{r})$, а следовательно, разложение (П6.2) имеет вид

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \Phi(\vec{r}) + \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{\Omega}. \quad (\text{П6.4})$$

Для нахождения коэффициента $B(\vec{r})$ умножим уравнение (П6.4) на Ω_z и проинтегрируем полученное уравнение по переменной $\vec{\Omega}$:

$$\int_{4\pi} \Omega_z \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \Phi(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} + \vec{B}(\vec{r}) \cdot \int_{4\pi} \Omega_z \vec{\Omega} d\vec{\Omega}. \quad (\text{П6.5})$$

Для вычисления интегралов в последнем равенстве воспользуемся соотношениями (П6.3). Тогда интеграл в первом слагаемом в правой части (П6.3) примет вид

$$\int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} = \int_0^\pi \sin \Theta \cos \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 0,$$

Рассмотрим в уравнении (П6.5) второе слагаемое

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot \int_{4\pi} \Omega_z \vec{\Omega} d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_z (\vec{\Omega} \cdot \vec{B}(\vec{r})) d\vec{\Omega}.$$

Скалярное произведение под интегралом можно расписать как

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = (\Omega_x \vec{e}_x + \Omega_y \vec{e}_y + \Omega_z \vec{e}_z) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \Omega_x B_x(\vec{r}) + \Omega_y B_y(\vec{r}) + \Omega_z B_z(\vec{r}).$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} \Omega_z (\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} &= B_x(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z \Omega_x d\vec{\Omega} + \\ &+ B_y(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z \Omega_y d\vec{\Omega} + B_z(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z \Omega_z d\vec{\Omega}. \end{aligned}$$

Рассчитаем интегралы в правой части последнего выражения, учитывая (П6.3):

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} \Omega_z \Omega_x d\vec{\Omega} &= \int_0^\pi d\Theta \cos \Theta \sin^2 \Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi = 0, \\ \int_{4\pi} \Omega_z \Omega_y d\vec{\Omega} &= \int_0^\pi d\Theta \cos \Theta \sin^2 \Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi = 0, \\ \int_{4\pi} \Omega_z^2 d\vec{\Omega} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \Theta \cos^2 \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \left[-\frac{\cos^3 \Theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot \int_{4\pi} \Omega_z \vec{\Omega} d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3} B_z(\vec{r}).$$

Рассмотрим правую часть уравнения (П6.3):

$$\int_{4\pi} \Omega_z \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = i_z(\vec{r}),$$

так как по определению $\vec{i}(\vec{r}) = \int_{4\pi} \vec{\Omega} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$.

Таким образом, после умножения уравнения (П5.4) на Ω_z и соответствующих математических преобразований получили:

$$J_z(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} B_z(\vec{r}).$$

Совершенно аналогично, умножив уравнение (П5.4) на Ω_y , можно получить:

$$i_y(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} B_y(\vec{r}),$$

а после умножения на Ω_x

$$i_x(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} B_x(\vec{r}).$$

Таким образом, получено следующее соотношение: $\vec{i}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} \vec{B}(\vec{r})$, а следовательно, коэффициент $B(\vec{r})$ определяется соотношением:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi} \vec{i}(\vec{r}).$$

Таким образом, с учетом найденных коэффициентов разложение (П6.2) принимает вид

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \Phi(\vec{r}) + \frac{3}{4\pi} \vec{i}(\vec{r}) \vec{\Omega}. \quad (\text{П6.6})$$

Подставим разложение (П5.6) в уравнение Больцмана для моно-энергетических нейтронов с изотропным источником:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \vec{\Omega} \nabla [\Phi(\vec{r}) + 3\vec{\Omega} \vec{i}(\vec{r})] + \frac{1}{4\pi} \Sigma_{tot}(\vec{r}) [\Phi(\vec{r}) + 3\vec{\Omega} \vec{i}(\vec{r})] = \\ & = \frac{1}{4\pi} q(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_S}(\vec{r}) W_S(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) [\Phi(\vec{r}) + 3\vec{\Omega}' \vec{i}(\vec{r})] d\vec{\Omega}'. \end{aligned} \quad (\text{П6.7})$$

Рассмотрим интеграл рассеяний:

$$\begin{aligned} & \int_{4\pi} \Sigma_S(\vec{r}) W_S(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) [\Phi(\vec{r}) + 3\vec{\Omega}' \vec{i}(\vec{r})] d\vec{\Omega}' = \\ & = \Sigma_S(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \int_{4\pi} W_S(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' + \Sigma_S(\vec{r}) \int_{4\pi} 3\vec{\Omega}' \vec{i}(\vec{r}) W_S(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}'. \end{aligned}$$

В последнем выражении $\int_{4\pi} W_S(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' = 1$ по определению индикатрисы рассеяния.

С учетом преобразованного интеграла рассеяния умножим (П6.7) на Ω_z и проинтегрируем по переменной $\vec{\Omega}$:

$$\begin{aligned} & \int_{4\pi} \vec{\Omega} \Omega_z \nabla \Phi(\vec{r}) d\vec{\Omega} + 3 \int_{4\pi} \vec{\Omega} \Omega_z \nabla (\vec{\Omega} \cdot \vec{i}(\vec{r})) d\vec{\Omega} + \Sigma_{tot}(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} + \\ & + 3 \Sigma_{tot}(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z (\vec{\Omega} \cdot \vec{i}(\vec{r})) d\vec{\Omega} = q(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} + \Sigma_S(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} + \\ & + 3 \Sigma_S(\vec{r}) \int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} \int_{4\pi} \vec{\Omega}' \vec{i}(\vec{r}) W_S(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}'. \end{aligned} \quad (\text{П6.8})$$

Рассмотрим интегралы в последнем уравнении. Уже было получено, что $\int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} = 0$.

Теперь разберем интеграл во втором слагаемом в левой части (П6.8) $I_1 = \int_{4\pi} \vec{\Omega} \Omega_z \nabla (\vec{\Omega} \cdot \vec{i}(\vec{r})) d\vec{\Omega}$. Скалярное произведение под интегралом можно представить следующим образом:

$(\vec{\Omega} \cdot \vec{i}) = \Omega_x i_x(\vec{r}) + \Omega_y i_y(\vec{r}) + \Omega_z i_z(\vec{r})$. Тогда градиент от этого выражения имеет вид

$$\nabla(\vec{\Omega} \cdot \vec{i}(\vec{r})) = \vec{e}_x \Omega_x \frac{\partial i_x}{\partial x} + \vec{e}_y \Omega_y \frac{\partial i_y}{\partial y} + \vec{e}_z \Omega_z \frac{\partial i_z}{\partial z},$$

поскольку оператор градиента действует только на пространственную переменную. Таким образом, с учетом того, что вектор $\vec{\Omega}$ может быть представлен как $\vec{\Omega} = \vec{e}_x \Omega_x + \vec{e}_y \Omega_y + \vec{e}_z \Omega_z$, рассматриваемый интеграл принимает вид

$$I_1 = \frac{\partial i_x}{\partial x} \int_{4\pi} \Omega_z \Omega_x^2 d\vec{\Omega} + \frac{\partial i_y}{\partial y} \int_{4\pi} \Omega_z \Omega_y^2 d\vec{\Omega} + \frac{\partial i_z}{\partial z} \int_{4\pi} \Omega_z^3 d\vec{\Omega}.$$

Используя равенства (П5.3), можно вычислить I_1 :

$$I_1 = \frac{\partial i_x}{\partial x} \int_0^\pi d\Theta \cos\Theta \sin^3\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi + \frac{\partial i_y}{\partial y} \int_0^\pi d\Theta \cos\Theta \sin^3\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi + \\ + \frac{\partial i_z}{\partial z} \int_0^\pi d\Theta \cos^3\Theta \sin\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 0,$$

поскольку

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} \sin^n \varphi \\ \cos^n \varphi \end{matrix} \right\} d\varphi = 0, \text{ а } \int_0^\pi \sin\Theta \cos^3\Theta d\Theta = -\frac{\cos^4\Theta}{4} \Big|_0^\pi = 0.$$

Рассмотрим интеграл в первом слагаемом в левой части (П6.8):

$$I_2 = \int_{4\pi} \Omega_z \vec{\Omega} \nabla \Phi d\vec{\Omega}.$$

Используя уже полученные результаты, этот интеграл находится как

$$I_2 = \int_{4\pi} \Omega_z \vec{\Omega} \nabla \Phi d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_z \left[\Omega_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] d\vec{\Omega} =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \int_{4\pi} \Omega_z^2 d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Вычислим интеграл в четвертом члене в правой части уравнения (П6.8), используя полученные ранее результаты:

$$I_3 = \int_{4\pi} \Omega_z (\vec{\Omega} \cdot \vec{i}) d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_z (\Omega_x i_x + \Omega_y i_y + \Omega_z i_z) d\vec{\Omega} = i_z \int_{4\pi} \Omega_z^2 d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3} i_z.$$

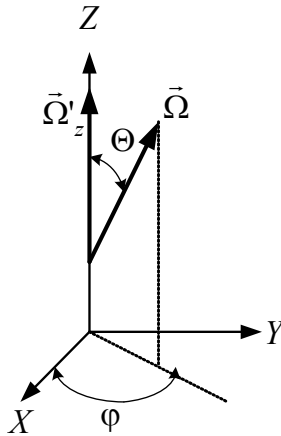


Рис. П6.2. Схема рассеяния нейтрона

Рассмотрим интеграл в последнем члене в правой части уравнения (П6.8) $\int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} \int_{4\pi} \vec{\Omega}' \vec{i}(\vec{r}) W_S(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}'$ и преобразуем его, учитывая, что индикатриса рассеяния в случае практически изотропного в ЛС рассеяния зависит не от конкретных значений направления скорости нейтрона до столкновения с ядром – $\vec{\Omega}'$ и направления скорости нейтрона после столкновения с ядром – $\vec{\Omega}$, а только от косинуса угла между этими двумя направлениями (угла Θ на рис. П6.2), который обозначим μ_0 .

$$\int_{4\pi} \Omega_z d\vec{\Omega} \int_{4\pi} \vec{\Omega}' \vec{i}(\vec{r}) W_S(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' = \int_{4\pi} \vec{\Omega}' \vec{i}(\vec{r}) d\vec{\Omega}' \int_{4\pi} \Omega_z W_S(\vec{r}; \mu_0) d\vec{\Omega}.$$

Интеграл по $\vec{\Omega}$ может быть преобразован, используя тригонометрические тождества и тождества поворотов к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} \Omega_z W_S(\vec{r}, \mu_0) d\vec{\Omega} &= 2\pi \int_0^\pi \sin \Theta \cos \Theta W_S(\vec{r}, \mu_0) d\Theta = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \mu_0 W_S(\vec{r}, \mu_0) \Omega'_z d\mu_0 = \Omega'_z 2\pi \int_{-1}^1 \mu_0 W_S(\vec{r}, \mu_0) d\mu_0 \equiv \bar{\mu} \Omega'_z. \end{aligned}$$

В последнем равенстве введено обозначение $\bar{\mu}$ – средний косинус угла рассеяния. Подставив последнее равенство в выражение для интеграла по $\vec{\Omega}'$, получим, учитывая результаты, полученные при вычислении I_3 :

$$\int_{4\pi} \vec{\Omega}' \vec{i}(\vec{r}) d\vec{\Omega}' \int_{4\pi} \Omega_z W_S(\vec{r}; \mu_0) d\vec{\Omega} = \bar{\mu} \int_{4\pi} \Omega'_z (\vec{\Omega}' \cdot \vec{i}(\vec{r})) d\vec{\Omega}' = \bar{\mu} \frac{4\pi}{3} i_z.$$

Таким образом, после вычисления всех интегралов (Пб.8) принимает вид

$$\frac{4\pi}{3} \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial z} + 3 \frac{4\pi}{3} \Sigma_{tot}(\vec{r}) i_z = 3 \Sigma_S \frac{4\pi}{3} \bar{\mu},$$

или после тождественных математических преобразований –

$$3 i_z (\Sigma_{tot}(\vec{r}) - \bar{\mu} \Sigma_S(\vec{r})) = - \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial z}.$$

Совершенно аналогично можно выполнить преобразования после умножения (Пб.7) на Ω_x или Ω_y и интегрирования по переменной $\vec{\Omega}$. В результате получим следующие равенства соответственно:

$$3i_x(\Sigma_{tot}(\vec{r}) - \bar{\mu}\Sigma_S(\vec{r})) = -\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x}$$

и

$$3i_y(\Sigma_{tot}(\vec{r}) - \bar{\mu}\Sigma_S(\vec{r})) = -\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial y}.$$

Последние три равенства можно записать в векторной форме:

$$3\vec{i}(\Sigma_{tot}(\vec{r}) - \bar{\mu}\Sigma_S(\vec{r})) = -\nabla\Phi(\vec{r}),$$

или в виде закона Фика:

$$\vec{i}(\vec{r}) = -D(\vec{r})\nabla\Phi(\vec{r}),$$

где введен коэффициент диффузии $D(\vec{r}) \equiv \frac{1}{3\Sigma_{tr}(\vec{r})}$ и транспортное сечение $\Sigma_{tr}(\vec{r}) \equiv \Sigma_{tot}(\vec{r}) - \bar{\mu}\Sigma_S(\vec{r})$.

Полученное ранее уравнение (П6.1) вместе с законом Фика представляют собой систему уравнений модели диффузии моноэнергетических нейтронов. В данном случае она была найдена в приближении почти изотропного потока нейтронов, практически изотропного рассеяния и относительно интегральных по угловой переменной функций. Требование наличия лишь слабой анизотропии функции плотности потока нейтронов эквивалентно одновременному требованию слабого поглощения, практической неизменности сечения рассеяния от пространственной координаты в рассматриваемой области и удаленности рассматриваемой области от локальных неоднородностей. Ограничение случаем практически изотропного рассеяния в ЛС эквивалентно требованию того, чтобы среда состояла из тяжелых ядер.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение Больцмана (6.1):

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_{tot}(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \\ & = \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} \Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') W_S(\vec{r}; E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}). \end{aligned}$$

Выберем в среде точку O , характеризующуюся радиусом-вектором \vec{r}_0 , и точку A , характеризующуюся радиусом-вектором \vec{r} (рис. П7.1).

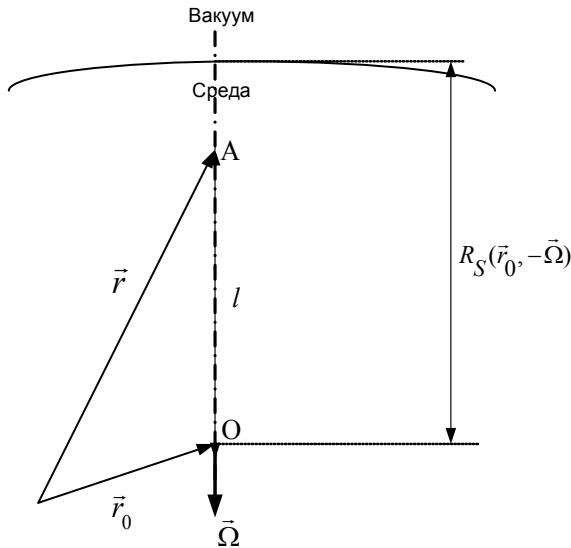


Рис. П7.1. Схема для преобразования уравнения Больцмана

Перепишем уравнение Больцмана для отрезка $[0, A]$ в декартовых координатах, имея ввиду следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 - \vec{\Omega}l; \quad x = x_0 - \Omega_x l; \quad y = y_0 - \Omega_y l; \quad z = z_0 - \Omega_z l; \\ \vec{\Omega} \nabla \Phi &= \Omega_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial l}; \\ -\frac{\partial \Phi(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l, E, \vec{\Omega})}{\partial l} &+ \Sigma_{tot}(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l, E) \Phi(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l, E, \vec{\Omega}) = q(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l, E, \vec{\Omega}) + \\ &+ \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l, E') \Phi(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l, E', \vec{\Omega}') W_s(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}'.\end{aligned}\quad (\text{П7.1})$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение типа:

$$\frac{dy(x)}{dx} - \Sigma(x)y(x) = -f(x) \quad (\text{П7.2})$$

на интервале $[x_0, x]$ с начальным условием $y(x)|_{x=x_0} = y(x_0)$.

Известно, что решение подобного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = y(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \Sigma(x') dx' \right\} - \int_{x_0}^x f(x') \exp \left\{ \int_{x'}^x \Sigma(x'') dx'' \right\} dx'. \quad (\text{П7.3})$$

Проверим это. Действительно при $x = x_0$ из уравнения (П7.3) с очевидностью следует начальное условие $y(x)|_{x=x_0} = y(x_0)$. Рассчитаем производную функции (П7.3):

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x_0) \cdot \frac{d}{dx} \left[\exp \left\{ \int_{x_0}^x \Sigma(x') dx' \right\} \right] - \frac{d}{dx} \left[\int_{x_0}^x f(x') \exp \left\{ \int_{x'}^x \Sigma(x'') dx'' \right\} dx' \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= y(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \Sigma(x') dx' \right\} \cdot \frac{d}{dx} \left[\int_{x_0}^x \Sigma(x') dx' \right] - f(x) \exp \left\{ \int_x^x \Sigma(x'') dx'' \right\} - \\
&- \int_{x_0}^x f(x') dx' \cdot \frac{d}{dx} \left[\exp \left\{ \int_{x'}^x \Sigma(x'') dx'' \right\} \right] = y(x_0) \cdot \Sigma(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \Sigma(x') dx' \right\} - f(x) - \\
&- \Sigma(x) \cdot \int_{x_0}^x f(x') \exp \left\{ \int_{x'}^x \Sigma(x'') dx'' \right\} dx' = \Sigma(x) \cdot y(x) - f(x).
\end{aligned}$$

Полученное равенство подтверждает, что на функциях (П7.3) уравнение (П7.2) обращается в тождество.

Используя решение этого уравнения на интервале $[x_0, x]$ запишем решение уравнения (П7.1) по лучу на интервале $[l_0, l]$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l, E, \vec{\Omega}) &= \Phi(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l_0, E, \vec{\Omega}) \exp \int_{l_0}^l \Sigma(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l', E) dl' - \\
&- \int_{l_0}^l \exp \left\{ \int_{l'}^l \Sigma(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l'', E) dl'' \right\} dl' \cdot [q(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l', E, \vec{\Omega}) + \\
&+ \int dE' \int \Sigma_S(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l', E) \Phi(\vec{r}_0 - \vec{\Omega}l', E, \vec{\Omega}) W_S(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}'].
\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае $l = 0$, $l_0 = R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})$ и граничное условие $\Phi(\vec{r}_0 - R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega}) \cdot \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) = 0$, так как R_S — граница «среда — вакуум». Таким образом, с учетом вышесказанного окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) &= \int_0^{R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} dl \cdot \exp \left\{ - \int_0^l \Sigma_{tot}(\vec{r}', E) dl' \right\} \times \\
&\times \left[q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \int_{4\pi} dE' \int \Sigma_S(\vec{r}, E') \Phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') W_S(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' \right],
\end{aligned}$$

где $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{\Omega}l$; $\vec{r}' = \vec{r}_0 - \vec{\Omega}l'$.

Последнее уравнение представляет собой интегральную форму уравнения переноса нейтронов (см. формулу (П7.2)).

Эдуард Феликсович Крючков
Лидия Николаевна Юрова

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Учебное пособие

Редактор М.В. Макарова
Компьютерная верстка Г.А. Бобровой

Подписано в печать 15.11.2007 Формат 60х84 1/16
Печ.л. 17,0 Уч.-изд.л. 17,0 Тираж 200 экз. Изд. № 1/21
Заказ № 0-624

*Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
115409, Москва, Каширское ш., 31*

*Типография издательства «Тровант»
г. Троицк Московской области*