

В.В.МИГУЛИН, В.И.МЕДВЕДЕВ
Е.Р.МУСТЕЛЬ, В.Н.ПАРЫГИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ



В.В.МИГУЛИН, В.И.МЕДВЕДЕВ
Е.Р.МУСТЕЛЬ, В.Н.ПАРЫГИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

под редакцией В. В. МИГУЛИНА

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физических специальностей высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1978

Основы теории колебаний. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Под ред. В. В. Мигулина. — М.: Наука, 1978.

Книга знакомит читателя с общими свойствами колебательных процессов, происходящих в радиотехнических, оптических, механических и других системах, а также с различными качественными и количественными методами их изучения. Значительное внимание уделено рассмотрению параметрических, автоколебательных и других нелинейных колебательных систем.

Изучение описанных в книге колебательных систем и процессов в них приведено известными методами теории колебаний без подробного изложения и обоснования самих методов. Главное внимание уделено выяснению принципиальных особенностей изучаемых колебательных процессов на основе рассмотрения физически обоснованных моделей реальных систем с использованием наиболее адекватных методов анализа.

Рис. 249, библи. 19 назв.

*Владимир Васильевич Мигулин, Владлен Иосифович Медведев,
Елена Рудольфовна Мустель, Владимир Николаевич Парыгин*

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

под редакцией В. В. Мигулина

М., 1978 г., 392 стр. с илл.

Редактор Н. А. Райская.

Технич. редактор С. Я. Шкляр. Корректоры: О. А. Сигал, Т. С. Вайсберг.

ИБ № 2173

Сдано в набор 10.03.78. Подписано к печати 28.09.78. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 24,5. Уч.-изд. л. 24,18. Тираж 17 000 экз. Заказ № 1946 Цена книги 1 р. 10 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26, в типографии № 2 изд-ва «Наука», Москва, Шубинский пер., 10. Зак. 1052

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9

Г Л А В А 1

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 1.1. Консервативные колебательные системы и общее рассмотрение свободных колебаний при консервативной идеализации	14
§ 1.2. Качественное рассмотрение колебаний маятника	23
§ 1.3. Применение метода последовательных приближений	25
§ 1.4. Свободные колебания в электрическом контуре без затухания с нелинейной емкостью	29
§ 1.5. Свободные колебания в контуре с нелинейной индуктивностью	35

Г Л А В А 2

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИССИПАТИВНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 2.1. Основные особенности колебательных процессов в диссипативных системах и методы их рассмотрения	41
§ 2.2. Качественное рассмотрение свободных колебаний в диссипативных системах при различных законах трения	47
§ 2.3. Построение фазовых траекторий свободных колебаний методом Ляпуна	55
§ 2.4. Исследование свободных колебаний в нелинейных диссипативных системах с одной степенью свободы методом поэтапного рассмотрения	60
§ 2.5. Метод медленно меняющихся амплитуд и его применение к расчету колебаний в слабо нелинейных системах с малым затуханием	70

Г Л А В А 3

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ

§ 3.1. Вынужденные колебания в линейной системе при гармоническом силе воздействия	80
§ 3.2. Элементы теории амортизации и регистрирующих приборов	87

§ 3.3. Вынужденные колебания в нелинейной консервативной системе при гармоническом силовом воздействии	98
§ 3.4. Приближенное рассмотрение работы умножителя частоты с нелинейной емкостью	106
§ 3.5. Рассмотрение вынужденных колебаний в слабо нелинейных диссипативных системах при гармоническом силовом воздействии методом гармонического приближения	112
§ 3.6. Применение метода медленно меняющихся амплитуд к анализу поведения слабо нелинейных систем с малыми потерями при гармоническом силовом воздействии	119

Г Л А В А 4

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

§ 4.1. Параметрическое воздействие на колебательные системы	129
§ 4.2. Общие замечания о резонансных явлениях в колебательных системах	139
§ 4.3. Свойства активных систем и параметрическая регенерация	144
§ 4.4. Основные особенности одноконтурных параметрических усилителей	151
§ 4.5. Параметрическая генерация электрических колебаний (параметрические генераторы)	160
§ 4.6. Параметрические преобразователи (параметрические генераторы второго рода)	172

Г Л А В А 5

АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 5.1. Основные физические определения и классификация автоколебательных систем	186
§ 5.2. Вырожденные автоколебательные системы	191
§ 5.3. Общее рассмотрение автоколебательных систем	196
§ 5.4. Автоколебательные системы томсоновского типа	201
§ 5.5. Особенности поведения автоколебательных систем, содержащих инерционные элементы	210
§ 5.6. Поведение автоколебательных систем при внешнем гармоническом воздействии	215
§ 5.7. Автоколебательные системы с запаздывающими силами	224

Г Л А В А 6

КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 6.1. Собственные колебания системы с двумя степенями свободы	238
§ 6.2. Связь и связанность	244
§ 6.3. Вынужденные колебания в системах с двумя степенями свободы	248

ГЛАВА 7

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 7.1. Двухконтурный параметрический усилитель	254
§ 7.2. Параметрический двухконтурный генератор с некрatными частотами	261
§ 7.3. Параметрическое деление частоты	266
§ 7.4. Общее рассмотрение автоколебательной системы с дополнительным контуром	269
§ 7.5. Явление затягивания	274
§ 7.6. Взаимная синхронизация двух связанных генераторов	278

ГЛАВА 8

КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 8.1. Собственные колебания в консервативных системах	281
§ 8.2. Ортогональность нормальных колебаний и экстремальные свойства собственных частот	285
§ 8.3. Колебания n -атомной молекулы	290
§ 8.4. Вынужденные колебания в системах с n степенями свободы	295
§ 8.5. Колебания в диссипативных системах с степенями свободы	297
§ 8.6. Колебания в однородных цепочках	298

ГЛАВА 9

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 9.1. Параметрические системы с n степенями свободы. Соотношения Мэнли—Роу	307
§ 9.2. Автоколебательные системы с тремя степенями свободы	311
§ 9.3. RC -генераторы почти гармонических колебаний	316

ГЛАВА 10

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

§ 10.1. Основы теории распределенных систем	319
§ 10.2. Собственные колебания в системах конечной длины	328
§ 10.3. Вынужденные колебания распределенных систем	334
§ 10.4. Обратная реакция системы на генератор	341

Г Л А В А 11

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 11.1. Автоколебательная система с неэквидистантным спектром собственных частот	346
§ 11.2. Стационарные автоколебания	351
§ 11.3. Распределенная автоколебательная система с эквидистантным спектром собственных частот	355
§ 11.4. Лазер как распределенная автоколебательная система	360

Г Л А В А 12

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕОДНОРОДНЫХ И В НЕЛИНЕЙНЫХ
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

§ 12.1. Волновые процессы в неоднородных линиях	370
§ 12.2. Волновые процессы в нелинейной системе при отсутствии дисперсии	375
§ 12.3. Нелинейная система с дисперсией. Генерация второй гармоники	382
§ 12.4. Взаимодействие трех волн в нелинейной системе. Высокочастотная накачка	386
§ 12.5. Взаимодействие трех волн в нелинейной системе. Низкочастотная накачка	390
Список основной литературы	392

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время можно с полной уверенностью говорить о теории колебаний как о вполне определившейся дисциплине, посвященной изучению общих закономерностей колебательных процессов в различных системах. Имеется обширная литература по вопросам теории колебаний, и на русском языке издано немало отличных книг по различным отдельным ее разделам. Однако, по нашему мнению, большинство из них посвящено рассмотрению методов теории колебаний, а изучение колебательных процессов и их специфики в конкретных системах проводится лишь для иллюстрации тех или иных приемов. С другой стороны, есть ряд интересных монографий, посвященных рассмотрению отдельных типов колебательных процессов в частном классе систем. Вместе с тем, по нашему мнению, в основе теории колебаний для физиков и специалистов инженерных специальностей должно лежать рассмотрение колебательных процессов в различных динамических системах, встречающихся в технике и физике, с использованием в каждом случае наиболее адекватных методов анализа и расчета. Поэтому наибольшее внимание должно быть уделено рассмотрению нелинейных систем с использованием соответствующих методов анализа.

Эти соображения определяли выбор материала и характер изложения курса «Теория колебаний», который многие годы читается студентам третьего и четвертого курсов отделения радиофизики и электроники физического факультета МГУ.

В предлагаемой читателю книге сделана попытка систематически и в краткой форме изложить содержание этого курса в том виде, в каком он сложился к настоящему времени. Авторы считают, что данное учебное пособие может быть полезным для слушателей ряда высших учебных заведений при подготовке специалистов радиофизического и радиотехнического профиля, а также для инженеров и научных работников других специальностей, сталкивающихся в своей деятельности с колебательными и волновыми процессами в других областях.

Главное внимание в книге уделяется рассмотрению колебательных процессов в различных, наиболее распространенных

колебательных системах от простейшего колебательного контура до лазера как колебательной системы. При этом в каждом отдельном случае использовались те из известных методов и приемов анализа расчета, которые наиболее адекватны данной задаче. Рассмотрению же и обоснованию применяемых методов и приемов уделяется минимально необходимое внимание и место, чтобы сосредоточить изучающего курс теории колебаний на самих колебательных процессах и научить использовать конкретные методы и общий подход к рассмотрению колебаний и связанных с ними волновых процессов в различных динамических системах. Во всех рассмотренных случаях теоретический анализ сопровождается качественным физическим толкованием особенностей колебательных процессов.

Введение написано В. В. Мигулиным и им совместно с В. И. Медведевым написана первая часть книги (главы 1—5). Вторая часть книги (главы 6—12) написана Е. Р. Мустель и В. Н. Парыгиным.

В. В. Мигулин

Колебания — это повторяющиеся ограниченные движения относительно некоего среднего состояния, которое в частном случае может быть состоянием равновесия. Такое определение объединяет весьма широкий круг явлений, встречающихся в природе, изучаемых физиками и находящих многочисленные применения в технике.

Предметом теории колебаний является рассмотрение общих закономерностей колебательных процессов в различных динамических системах.

Колебательные процессы в системах с постоянными параметрами (в линейных системах) изучены уже сравнительно давно, и математическая их теория развита с большой полнотой. Однако изучение общих закономерностей колебаний в системах с параметрами, зависящими от состояния системы (в нелинейных системах), началось значительно позднее и долгое время рассматривались лишь отдельные частные задачи без обобщения полученных результатов на широкие классы динамических колебательных систем и протекающие в них процессы.

Общий подход к изучению колебательных процессов был впервые сформулирован в трудах Л. И. Мандельштама, который в 1931 г. создал в Московском университете кафедру колебаний и тогда же начал читать курс теории колебаний.

В теории колебаний изучаются колебательные процессы с целью выяснения общих особенностей и закономерностей протекания этих процессов в различных динамических системах и условий их существования, т. е. проводится рассмотрение специфического типа движений, присущего определенному классу систем. Подобные динамические системы, в которых могут существовать колебательные процессы, принято называть *колебательными системами*.

Современная теория колебаний, естественно, в большой степени основывается на тех работах, в которых был развит соответствующий подход к колебательным процессам и разработаны методы их рассмотрения.

В этой связи представляется необходимым упомянуть ряд имен ученых, внесших наиболее фундаментальный вклад в учение о колебаниях.

Дж. В. Стрэтт (лорд Рэлей, 1842—1919) в своем труде «Теория звука» впервые изложил расчеты ряда колебательных процессов с последовательным учетом нелинейных свойств колебательных систем. В современной теории колебаний используются также математические методы, развитые А. Пуанкаре (1854—1912) в его работах по небесной механике; нашли применение и исследования А. М. Ляпунова (1857—1918) по устойчивости движений и методы расчета колебательных движений, развитые А. Н. Крыловым (1863—1945). Очень большое значение для формирования теории колебаний имели основополагающие работы Ван дер Поля (1889—1959) по колебаниям в некоторых нелинейных системах и общие исследования колебательных процессов в нелинейных системах, проведенные А. А. Андроновым (1901—1952), развившим учение о самоподдерживающихся колебательных процессах, названных им *автоколебаниями*. Этот термин в настоящее время является общепринятым.

При развитии теории колебаний весьма большое внимание уделялось разработке эффективных методов анализа и расчета различных колебательных процессов, и в настоящее время накоплен богатый арсенал приемов и путей рассмотрения широкого круга задач.

Однако следует иметь в виду, что для физиков и специалистов технических направлений теория колебаний — это не совокупность методов анализа и расчета, а изучение закономерностей протекания колебательных процессов в реальных системах с использованием в каждом случае наиболее адекватных методов рассмотрения. При этом чрезвычайное многообразие колебательных систем и их свойств требует при изучении протекающих в них колебательных процессов нахождения общих черт у различных колебательных систем и объединения их по наиболее характерным признакам в определенные классы и типы.

Однако последовательная классификация различных колебательных систем при их изучении возможна лишь при условии замены конкретных реальных систем с их неизбежным чрезвычайным многообразием свойств моделями, в которых отражается только ограниченное число основных черт, существенных для изучаемых колебательных процессов.

Выбор модели, передающей наиболее важные, основные и определяющие свойства изучаемой реальной системы и вместе с тем достаточно простой для применения известных методов анализа и расчета — первый и очень важный этап всякой теории и в том числе теории колебаний. Такой выбор — первое упрощение рассматриваемой задачи, и от его правильности решающим образом зависит реальность и достоверность результатов последующего исследования, а также оправданность выбора метода дальнейшего анализа. Избыточно точный расчет чрезмерно грубой модели ли-

шен смысла, так же как и использование очень сложной и учитывающей весьма многие детали реальной системы модели при ее дальнейшем грубом и упрощенном анализе. Во всех случаях весьма важно правильно выбрать соответствие между степенью идеализации при переходе к модели, точностью аналитической аппроксимации реальных физических зависимостей и точностью применяемых математических методов.

Заменяя реальные динамические системы их соответственно выбранными моделями, мы можем провести последовательную классификацию систем и протекающих в них колебательных процессов по различным признакам. Кинематические признаки — основа классификации *колебательных движений*. Основа классификации *колебательных систем* — их динамические свойства.

Кинематическими признаками колебательного движения являются его периодичность и форма (амплитуда). Для строго периодических процессов выполняется соотношение $F(t) - F(t+T) \equiv 0$, справедливое для любого момента времени t , где T — период данного колебательного движения; $1/T = \nu$ — число периодов в единицу времени, или частота. Широко используется так называемая угловая, или круговая, частота $\omega = 2\pi\nu$.

Особое значение имеет простейший вид колебательного процесса — гармоническое колебание

$$F(t) = a \cos(2\pi\nu t + \varphi_0) = a \cos(\omega t + \varphi_0);$$

здесь a — амплитуда колебания, $\omega t + \varphi_0$ — мгновенная фаза, φ_0 — начальная фаза колебания. Гармонические колебания представляют особый интерес не только в силу простоты их аналитического представления, но в первую очередь потому, что эта форма движений наиболее обычна для колебательных процессов в системах с постоянными параметрами и чрезвычайно часто встречается в реальных процессах, изучаемых в физике и в технических дисциплинах.

В зависимости от природы изучаемых колебательных движений встречаются периоды, имеющие самые различные значения. Так, например, периоды обращения планет Солнечной системы составляют величины порядка 10^8 с, период вращения Земли, периоды приливных процессов — величины порядка 10^5 с, периоды колебаний маятников в часах — порядка 10^0 с. Периоды колебаний, изучаемых в акустике, — от 10^{-1} до 10^{-4} с; в радиотехнике имеют дело с колебаниями с периодами от 10^{-4} до 10^{-12} с. Колебания молекул, связанные с инфракрасным излучением, имеют периоды порядка 10^{-12} — 10^{-14} с. Оптический диапазон соответствует периодам колебаний 10^{-14} — 10^{-15} с, связанных с атомными процессами, а периоды колебаний, соответствующих рентгеновскому излучению, составляют 10^{-17} — 10^{-19} с. Из приведенных примеров видно, насколько различаются величины периодов колебательных про-

цессов, изучаемых в астрономии, физике, технике, с которыми приходится сталкиваться исследователям. Однако у всех этих процессов, имеющих самую различную природу, есть ряд общих свойств и особенностей, которыми занимается теория колебаний.

Следует отметить, что строгой периодичности реальных процессов в природе нет и строгая периодичность — это тоже идеализация. В реальных колебательных системах всегда существуют возмущающие силы, случайные смещения (например, флуктуационные) и нестабильность параметров, исключающие возможность идеальной периодичности. Поэтому более последовательным было бы изучение колебательных процессов, в которых условие периодичности выполняется приближенно, т. е. положить в основу рассмотрения почти периодические колебания, для которых $|F(t) - F(t + T(\epsilon))| \leq \epsilon$, где ϵ — любая наперед заданная малая величина и $T(\epsilon)$ — почти период. Примером такого процесса может служить процесс затухающих колебаний

$$F(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

при достаточно малом δ . Здесь $T = 2\pi/\omega$ — почти период.

Процесс, представляющий собой сумму двух периодических колебаний с несоизмеримыми частотами, также служит примером почти периодического движения

$$F(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t.$$

Если, кроме того, можно указать такие m и n , что $|mT_1 - nT_2| \leq \mu$, то mT_1 или nT_2 также являются почти периодами этого процесса при достаточно малом значении μ .

Однако теория почти периодических процессов сложна и во многих случаях мало разработана. Поэтому в основу рассмотрения большинства колебательных задач можно положить допущение о периодичности наряду с существованием заведомо непериодических колебательных процессов.

Помимо периодичности, колебательные движения характеризуются формой и амплитудой, и эти кинематические признаки позволяют определенным образом классифицировать разнообразные процессы колебаний.

В теории колебаний, как уже упоминалось, главной задачей является изучение колебательных процессов в определенных динамических системах — в колебательных системах. Поэтому необходима классификация колебательных систем по их динамическим свойствам. Подобная классификация, естественно, будет полностью последовательной лишь для соответствующих моделей с ограниченным числом свойств. Классификацию колебательных систем можно провести по ряду признаков: во-первых, по числу степеней свободы, во-вторых, по энергетическим признакам, разделяя системы на активные (с внутренним источником энергии) и пас-

сивные, в-третьих, по свойствам параметров системы, выделяя системы с параметрами, не зависящими от ее состояния (линейные системы), и с параметрами, зависящими от состояния системы (нелинейные системы), в-четвертых, по условиям действия, разделяя системы на автономные и неавтономные.

Очевидно, что простейшими колебательными системами являются системы с одной степенью свободы, с которых и начинается рассмотрение колебательных процессов в идеализированных динамических системах (гл. 1—5). Далее рассматриваются автономные и неавтономные системы с двумя и большим числом степеней свободы (гл. 6—9), а также колебательные и некоторые волновые процессы в системах с распределенными параметрами (гл. 10—12).

Следует иметь в виду, что системы с одной степенью свободы представляют собой объект, наиболее доступный для исследования возможных колебательных движений при самых разных их нелинейных свойствах. Нелинейные же системы с двумя и большим числом степеней свободы и распределенные системы поддаются последовательному анализу лишь в отдельных частных случаях. Их рассмотрение даже в линейном приближении значительно более сложно, громоздко и не допускает ряда качественных и наглядных приемов, которые возможны для систем с одной степенью свободы. Поэтому изложение материала в гл. 6—12 имеет несколько другой характер, чем в первых главах: оно несколько более конспективно, в целях выделения основных физических результатов опускается ряд промежуточных выкладок, особенно при применении изложенных ранее методов анализа. Однако эти различия в изложении отдельных разделов, по нашему мнению, вполне оправдываются спецификой рассматриваемых вопросов, тем более, что значительная часть материала, приведенного в книге, ранее не излагалась в учебных пособиях по теории колебаний.

При написании этой книги авторы считали своей главной задачей наиболее полное, последовательное и обоснованное рассмотрение колебательных процессов в различных динамических системах, имеющих значение в физике и технике, с использованием в каждом отдельном случае наиболее адекватных данной задаче методов анализа и расчета.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 1.1. Консервативные колебательные системы и общее рассмотрение свободных колебаний при консервативной идеализации

При рассмотрении колебательных систем мы должны уделить особое внимание системам с малым затуханием, в которых величина энергии, рассеиваемой за период (или почти период) колебаний, мала по сравнению с общим запасом энергии, связанным с исследуемым движением. В подобных системах наиболее ярко проявляются их колебательные свойства. В большом числе практических применений мы встречаемся с высокодобротными колебательными системами. Можно упомянуть резонансные элементы входных цепей радиоприемных устройств, колебательные контуры, входящие в состав полосовых фильтров, маятник или баланс в часовых механизмах, колебательные элементы в частотомерах и спектр-анализаторах и др.

Многие колебательные свойства подобных систем весьма мало зависят от величины и характера затухания, если оно при этом остается достаточно малым. Поэтому, ограничиваясь не слишком большими по сравнению с периодом колебаний интервалами времени, мы при изучении многих важных особенностей колебательных процессов можем вообще пренебречь затуханием и рассматривать изучаемую систему как консервативную. Очевидно, что при этом имеет место существенная идеализация и применение выводов, полученных при рассмотрении подобной идеальной системы, к реальной должно проводиться с учетом тех особенностей, которые вносятся затуханием, всегда наблюдаемым в реальных физических устройствах.

Консервативные колебательные системы — это идеализированные системы, в которых запас механической или электромагнитной энергии, или и той и другой в совокупности, в процессе совершения колебаний остается постоянным.

Существует также целый класс колебательных систем, в которых потери за период колебаний пополняются за счет внутреннего источника энергии и, таким образом, запас энергии не меняется от периода к периоду колебаний. Такие системы носят название *автоколебательных* и будут рассмотрены в другом разделе книги.

Несмотря на отсутствие в природе консервативных колебательных систем, их изучение позволяет получить много данных, помогающих исследованию систем, отличных от консервативных, особенно систем, близких к ним.

Число степеней свободы системы определяется числом независимых переменных, которое необходимо для полного описания движения системы. Ограничивая свое рассмотрение системами с одной степенью свободы, мы в общем случае должны для описания движений в консервативных системах рассматривать дифференциальные уравнения второго порядка *)

$$\ddot{x} = \Phi(x, \dot{x}). \quad (1.1.1)$$

Однако подобное уравнение будет описывать движение в консервативной системе не при любом виде функции $\Phi(x, \dot{x})$. Для упрощения рассмотрения начнем с изучения случая, когда уравнение, описывающее движение в исследуемой системе, не содержит $\dot{x}$, т. е. возвращающая сила не зависит от скорости. Тогда общим видом подобного дифференциального уравнения второго порядка будет уравнение

$$\ddot{x} = f(x), \quad (1.1.2)$$

причем считается, что от вида $F(\ddot{x}, x) = 0$ всегда можно перейти к виду (1.1.2), разрешив это уравнение относительно $\ddot{x}$.

Для механических систем в описывающих их уравнениях типа (1.1.2) можно считать, что вторая производная x представляет приведенную силу инерции, а правая часть — возникающую в системе силу, связанную только с положением рассматриваемой массы (например, упругую силу), и обе они отнесены к единице массы. В электрических системах, для которых принимается, что основная переменная x — заряд, левая часть уравнения (1.1.2) зависит от э. д. с., возникающей на индуктивности, а правая часть — от э. д. с. на емкости системы.

К уравнению типа (1.1.2) приводится, например, уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.1.3)$$

Для идеального математического маятника (рис. 1.1) с длиной подвеса l и массой m , находящегося в поле тяготения с ускорением g , дифференциальное уравнение движения для угловой координаты φ имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (1.1.3a)$$

где $\omega_0^2 = g/l$.

*) Здесь, как и далее, дифференцирование по времени мы часто будем обозначать точками над соответствующей переменной.

В случае электрического колебательного контура без потерь (рис. 1.2) уравнение движения, найденное из уравнения Кирхгофа, принимает вид

$$L\ddot{q} + q/C = 0;$$

если в нем положить $x = q$ и обозначить $\omega_0^2 = 1/LC$, то вновь получим уравнение (1.1.3).

Оба уравнения (1.1.3а) и (1.1.3) описывают процессы колебаний в консервативных системах, но уравнение (1.1.3) линейно относительно координаты x и, следовательно, описывает движение в линейной колебательной системе. Напротив, уравнение (1.1.3а) нелинейно



Рис. 1.1. Математический маятник.

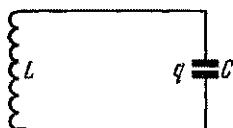


Рис. 1.2. Электрический контур без потерь.

относительно координаты φ (возвращающая сила пропорциональна $\sin \varphi$), и поэтому колебательная система, описываемая этим уравнением, нелинейна.

Вернемся к рассмотрению уравнения (1.1.2). Считая, что функция $f(x)$ является голоморфной, интегрируемой и, в общем случае, нелинейной функцией координаты x , введем новую переменную $y = \dot{x}$, которая позволяет исключить из уравнений движений время в явном виде, хотя по-прежнему $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда можно записать

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} y.$$

В новых координатах уравнение (1.1.2) принимает следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)/y. \quad (1.1.4)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{2}y^2 - \int f(x) dx = h, \quad (1.1.5)$$

где $h = \text{const.}$

Выражение $-\int f(x) dx \equiv V(x)$ есть потенциальная функция, пропорциональная потенциальной энергии системы; величина $\frac{1}{2}y^2$ представляет кинетическую энергию, отнесенную к единичной массе. Поэтому соотношение

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = h \quad (1.1.6)$$

является естественной записью условия консервативности системы, выражающегося в постоянстве общего запаса энергии.

Для более общего случая, когда возвращающая сила зависит от скорости, уравнение (1.1.1) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Phi(x, y)}{y}. \quad (1.1.7)$$

В этом случае (1.1.1) будет описывать консервативную систему при условии существования однозначного интеграла этого уравнения вида

$$F(x, y) = \text{const.}$$

При замене $y = \dot{x}$ можно использовать известный метод рассмотрения поведения исследуемой системы с помощью фазовой плоскости — плоскости переменных x и y .

Каждому состоянию системы соответствует пара значений x и y , т. е. точка на фазовой плоскости. Будем называть подобную точку, координаты которой однозначно определяют мгновенное состояние системы, *описывающей* или *изображающей* точкой. Очевидно, что при движении, совершаемом системой, будут происходить изменения величин x и y , а следовательно, описывающая точка будет перемещаться по некой кривой, которую принято называть *фазовой траекторией движения*.

Для исследуемой системы переменные x и y связаны системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad (1.1.8a)$$

$$\dot{y} = f(x) \quad (1.1.8b)$$

или одним уравнением $dy/dx = f(x)/y$ (см. (1.1.4)), интеграл которого дает уравнение фазовых траекторий *). Из общих свойств дифференциальных уравнений следует, что через каждую точку фазовой плоскости должна проходить одна и только одна фазовая траектория, за исключением тех точек, в которых $f(x)$ и y одновременно обращаются в нуль. В этих особых точках направление и число фазовых траекторий становятся неопределенными и свойства системы при таких значениях координат нуждаются в специальном изучении.

Заметим, что, получая уравнение фазовых траекторий, мы исключили время в явном виде. Форма фазовой траектории дает только некоторое указание о временном ходе изучаемого

*) В общем случае интегральные кривые, описываемые интегралом уравнения (1.1.4), не однозначно соответствуют фазовым траекториям, однако мы в дальнейшем, интересуясь в первую очередь формой этих кривых, будем считать, что уравнение (1.1.4) дает семейство фазовых траекторий, однозначное определение которых требует некоторого дополнительного рассмотрения с учетом начальных условий и свойств изучаемой системы.

процесса и без дополнительных исследований не позволяет количественно получить основную переменную x в функции t .

Рассмотрим условия, при которых в системе возникают состояния равновесия. В равновесном состоянии скорость движения обращается в нуль, и в системе должны отсутствовать силы, вызывающие движение, т. е.

$$\dot{y} = \dot{x} = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{y} = \ddot{x} = 0. \quad (1.1.8)$$

Отсюда следует, что в точках, соответствующих положениям равновесия ($y=0$, $x=x_i$),

$$f(x_i) = 0, \quad (1.1.9)$$

и потенциальная функция $V(x)$ при $x=x_i$ имеет экстремум, так как $\dot{y} = f(x) = -\frac{d}{dx} V(x)$, а при $x=x_i$

$$f(x_i) = \frac{d}{dx} V(x) \Big|_{x=x_i} = 0. \quad (1.1.10)$$

Особые точки, в которых выполняется условие (1.1.10), называются *особыми точками первого порядка*. Если

$$\frac{d^n}{dx^n} V(x) \Big|_{x=x_i} = 0, \quad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} V(x) \Big|_{x=x_i} \neq 0,$$

где $n=1, 2, \dots$, то мы имеем дело с особыми точками порядка n .

Таким образом, мы видим, что положения равновесия системы соответствуют $y_i=0$, $f(x_i)=0$, т. е., как указывалось, особым точкам на фазовой плоскости.

Пусть координаты особой точки на фазовой плоскости будут $x=x_i$, $y=0$. Обозначим $V(x_i)=h_i$. Если $V(x)$ при $x=x_i$ имеет минимум, то

$$\frac{d}{dx} V(x) \Big|_{x=x_i} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} V(x) \Big|_{x=x_i} > 0. \quad (1.1.11)$$

В окрестностях точки $x=x_i$ потенциальную функцию $V(x)$ можно разложить в ряд по степеням $\xi = x - x_i$

$$V(x) = V(x_i) + \frac{dV}{dx} \Big|_{x=x_i} \xi + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \xi^2 + \dots \quad (1.1.12)$$

Для малых вариаций x и y вблизи положения равновесия можно написать уравнение фазовых траекторий (1.1.6) в виде

$$\frac{1}{2} \eta^2 + V(x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} V(x) \Big|_{x=x_i} \xi^2 = h, \quad (1.1.13)$$

или

$$\eta^2 + \alpha \xi^2 = 2(h - h_i), \quad (1.1.14)$$

где $\eta = y$, $\alpha = d^2 V(x)/dx^2 \Big|_{x=x_i} > 0$.

Таким образом, с точностью до высших степеней ξ мы получили в качестве уравнений фазовых траекторий вблизи положения равновесия, соответствующего минимуму потенциальной функции (а следовательно, и потенциальной энергии), уравнения эллипсов. Эти эллипсы различаются между собой величиной полуосей, определяемой значением $h - h_1$. Выбирая различные значения h , мы получаем различные эллипсы, которые по мере приближения h к h_1 уменьшаются, стягиваясь в точку $(x_1, 0)$ при $h = h_1$.

Наличие на фазовой плоскости замкнутых фазовых траекторий (например, эллипсов в окрестностях рассмотренной особой точки) указывает на существование периодических движений. Из нашего анализа следует, что в окрестностях особой точки, отвечающей минимуму потенциальной энергии, происходят периодические движения с эллиптическими фазовыми траекториями, соответствующими гармоническим колебаниям. Реальное движение тем ближе к гармоническому, чем меньше превышение запаса энергии системы над запасом энергии в точке равновесия, т. е. чем меньше величина $h - h_1$. В системах, в которых потенциальная функция представляет собой квадратичную функцию координаты x , $\frac{d^n}{dx^n} V(x)$ всегда равно нулю при $n > 2$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$y^2 + \alpha x^2 = \text{const} \quad (1.1.15)$$

для любых значений $h - h_1$. Можно лишь указать, что этот случай относится к тривиальному случаю линейной системы, так как, если $V(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, то $f(x) = -\alpha_1 - 2\alpha_2 x$, и уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\alpha_2 x = -\alpha_1$. Последнее уравнение представляет собой известное уравнение гармонического осциллятора.

Таким образом, исследованное положение равновесия (минимум потенциальной функции) соответствует на фазовой плоскости особой точке, называемой особой точкой типа *центр*, и отвечает положению равновесия, относительно которого система может совершать колебания, близкие к гармоническим или точно гармонические. Для представления на фазовой плоскости таких движений характерно наличие семейства замкнутых фазовых траекторий, окружающих центр, причем они (за исключением специальных случаев зависимости потенциальной функции от координаты в окрестностях данной особой точки) всегда стремятся к эллипсам при уменьшении амплитуды колебаний. Для рассматриваемого случая можно из уравнения (1.1.6) получить после ряда простых выкладок выражение для периода колебаний

$$y = \pm \sqrt{2[h - V(x)]}. \quad (1.1.16)$$

Так как $y = dx/dt$, то $dt = dx/[\pm \sqrt{2} \sqrt{h - V(x)}]$, и

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x_f} \frac{dx}{\sqrt{h - V(x)}}. \quad (1.1.17)$$

Рассматривая движение в положительном направлении оси времени и учитывая симметрию семейства фазовых траекторий относительно оси x , получим при заданной амплитуде колебаний выражение для периода колебаний вида

$$T = \sqrt{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{h - V(x)}}. \quad (1.1.18)$$

Здесь a_1 и a_2 — отклонения системы в моменты прохождения $y = dx/dt$ через нулевые значения. Соответственно $a_2 - a_1$ представляет собой полный размах колебаний при данном, но произвольном запасе энергии h .

В общем случае полученное выражение для T будет функцией a_1 и a_2 , так что для нелинейной системы имеет место зависимость периода колебаний от общего запаса энергии или размаха совершаемых колебаний (*неизохронность* колебаний в нелинейных системах). Лишь для линейной системы, когда потенциальная функция представляет собой квадратичную функцию координат $V(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ для колебаний вокруг положения равновесия имеем $T = 2\pi/\sqrt{2\alpha_2} = \pi \sqrt{2/\alpha_2}$, т. е. период равен величине, не зависящей от амплитуды совершаемых колебаний. В этом случае колебания становятся изохронными, и период свободных колебаний в линейной системе не зависит от сообщенного ей начального запаса энергии.

Рассмотрим случай, когда положение равновесия системы, а следовательно, и особая точка на фазовой плоскости соответствуют максимуму потенциальной функции $V(x)$. Тогда, проводя те же выкладки, мы получим аналогичное уравнение для малых вариаций y и x , но

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x) \Big|_{x=x_R} = -\alpha < 0, \quad (1.1.19)$$

и уравнение (1.1.14) примет вид

$$\eta^2 - \alpha \xi^2 = 2(h - h_R). \quad (1.1.20)$$

Это уравнение фазовых траекторий для окрестности исследуемой особой точки задает гиперболы с асимптотами

$$\eta = \pm \sqrt{\alpha} \xi. \quad (1.1.21)$$

Таким образом, особая точка на фазовой плоскости, соответствующая максимуму потенциальной функции, представляет собой такую особую точку, через которую проходят только две фазовые траектории и в ее окрестности все остальные фазовые траектории имеют вид гипербол. Подобные точки соответствуют неустойчивому положению равновесия, так как любое сколь угодно малое отклонение системы от положения равновесия приводит к дальнейшему росту вариаций координат системы, т. е. к дальнейшему удалению от точки равновесия. На фазовой плоскости это соответствует выходу описываемой точки из особой точки и ее дальнейшему движению по одной из уходящих фазовых траекторий.

Проиллюстрируем приведенные рассуждения графическими изображениями двух описанных типичных случаев, сделав одно очевидное замечание. По самому определению величины $y = \dot{x}$ значения $y > 0$ соответствуют росту x , а $y < 0$ — убыванию x . Поэтому движения описываемой точки по фазовым траекториям всегда происходят в верхней полуплоскости фазовой плоскости в сторону возрастания x , а в нижней — в сторону убывания x .

Если изобразить графически функцию $V(x)$ и построить фазовые траектории на основании уравнения $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = h$ или его решения $y = \pm \sqrt{2[h - V(x)]}$, то, задаваясь различными значениями h , мы получим два характерных случая (рис. 1.3, точки A и B). Значение $x = x_A$ соответствует минимуму потенциальной функции $V(x)$, и точка $A(x_A, 0)$ является особой точкой типа *центр*. Точка $B(x_B, 0)$, соответствующая максимуму функции $V(x)$, представляет собой особую точку типа *седло* и отвечает на фазовой плоскости неустойчивому положению равновесия.

Совокупность семейства фазовых траекторий и особых точек на фазовой плоскости принято называть *фазовым портретом* системы — он графически изображает ее динамические свойства.

К этим двум основным элементам фазового портрета консервативной системы следует добавить еще фазовые траектории, пограничные между областями фазовой плоскости, соответствующими движениям различного характера. Эти линии (например, линия C на рис. 1.3) носят название *разделительных* линий или *сепаратрис*. Их расположение очень наглядно показывает области возможных движений разного типа и те значения фазовых координат x и

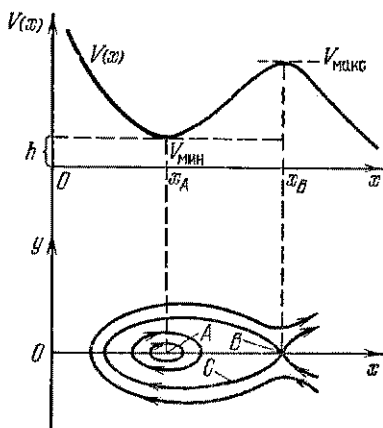


Рис. 1.3. Построение фазовых траекторий по заданной функции $V(x)$.

$y = \dot{x}$, при которых одно движение переходит в другое. Например, на рис. 1.3 мы видим, как кривая C выделяет вокруг точки A область, внутри которой существуют колебательные движения вокруг устойчивого положения равновесия. Вне нее эти движения отсутствуют и характер движения системы, т. е. вид фазовых траекторий, может быть определен только при задании вида потенциальной функции $V(x)$ для большей области изменений x .

Вообще, в большинстве случаев возможность хотя бы приближенного построения фазового портрета системы чрезвычайно облегчает рассмотрение общих свойств системы, и вид фазового портрета сразу показывает ряд наиболее характерных свойств изучаемой системы. Поэтому метод фазовой плоскости является исключительно полезным при качественном рассмотрении различных колебательных систем, особенно нелинейных.

Мы здесь не будем излагать дальнейшего материала по методам качественного рассмотрения динамических систем с помощью фазовой плоскости и по более подробному рассмотрению возможных типов особых точек и фазовых траекторий консервативных систем. Все это можно найти в [1 — 3]. Приведенные здесь основные сведения и определения следует рассматривать лишь как напоминание об основах метода фазовой плоскости, которым (с соответствующими пояснениями) мы в ряде случаев будем пользоваться в дальнейшем.

Не распространяя качественное рассмотрение нелинейных консервативных систем с одной степенью свободы на более сложные системы, для которых уравнение движения имеет не столь простой вид, напомним лишь ряд общих положений.

Во многих случаях анализа более сложных систем целесообразно пользоваться уравнением движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (1.1.22)$$

где $L(x, y)$ — функция Лагранжа, которая для простых систем, подобных рассмотренной выше, представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий. Как известно, для систем со многими степенями свободы получается система уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_l} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_l} \right) = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Для консервативных электрических систем (даже во многих простых случаях) уравнение движения не приводится к виду $\ddot{x} = f(x)$, а имеет более сложный вид $\psi(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0$, что дает $\ddot{x} = f(\dot{x}, x)$, $\dot{y} = f(x, y)$ и уравнение фазовых траекторий запишется следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}. \quad (1.1.23)$$

В этом случае не всегда просто найти его интеграл и получить уравнение для построения фазовых траекторий.

Для консервативных систем существует так называемый интеграл энергии

$$y \frac{\partial L}{\partial y} - L = h. \quad (1.1.24)$$

Иными словами, для таких систем существует интеграл уравнения движения вида $F(x, y) = h$. Геометрически это сводится к тому, что интегралами уравнения движения являются функции, соответствующие фазовым траекториям (кривым равного уровня), получающимся при сечении поверхности $z = F(x, y)$ плоскостями $z = h$.

Отсюда следует обязательность существования замкнутых фазовых траекторий, окружающих изолированные особые точки, или убегающих траекторий для ограниченных интервалов изменения x и y и невозможность для систем данного типа существования особых точек, в которые стягиваются все фазовые траектории из прилегающей области, называемых *фокусом* или *узлом*.

Заметим, что при рассмотрении электрических систем легко столкнуться со случаем, когда в консервативной системе кинетическая энергия не выражается однородной квадратичной функцией $\dot{x}$. Напомним, что в механике для большого числа задач инертная масса может считаться постоянной ($m = \text{const}$), и для соответственным образом выбранных координат кинетическая энергия есть однородная квадратичная функция, тогда как при использовании ферромагнетиков электрический эквивалент массы — индуктивность — часто становится функцией тока (скорости).

Но независимо от того, встречаемся ли мы с простейшим случаем или с упомянутыми здесь более сложными, все равно уравнение фазовых траекторий позволяет нам получить фазовый портрет и произвести качественное рассмотрение изучаемой системы на фазовой плоскости. Разумеется не всегда может быть получено простое выражение вида $y = \pm \sqrt{2[h - V(x)]}$, и тогда для построения фазового портрета системы необходимо применять более общие приемы, как, например, метод построения фазовых траекторий с помощью изоклин.

§ 1.2. Качественное рассмотрение колебаний маятника

Для иллюстрации путей качественного исследования колебательных движений весьма полезно рассмотрение некоторых типичных примеров механических систем. В качестве одной из простейших механических нелинейных консервативных систем рассмотрим идеальный маятник.

Уравнение движения маятника (идеального)

$$I m \ddot{x} + mg \sin x = 0, \quad \ddot{x} = - \frac{g}{l} \sin x. \quad (1.2.1)$$

Вводя $\omega_0^2 = g/l$, получаем (см. (1.1.2)) $f(x) = -\omega_0^2 \sin x$. Обозначая $\dot{x} = y$, имеем $\dot{y} = f(x)$ или $dy/dx = -(\omega_0^2 \sin x)/y$. Тогда с точностью до постоянной находим $V(x) = -\omega_0^2 \cos x$, и можно записать

$$\frac{1}{2}y^2 = h + \omega_0^2 \cos x. \quad (1.2.2)$$

Используя это выражение, легко построить фазовые траектории движения данной системы и нарисовать на фазовой плоскости общий фазовый портрет системы (рис. 1.4).

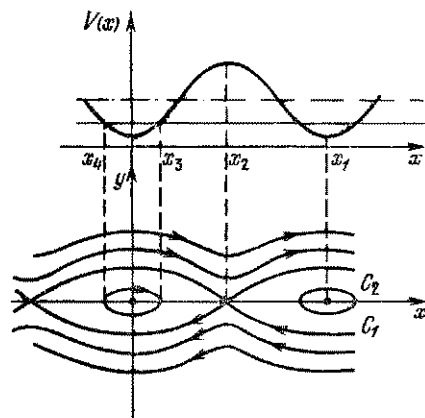


Рис. 1.4. Фазовый портрет маятника.

Два типа фазовых траекторий соответствуют двум типам движения. Замкнутые траектории, окружающие особые точки типа центр с координатами $y = 0$, $x = 2n\pi$ (n — любое целое число), соответствуют колебательным движениям маятника вокруг устойчивого нижнего положения равновесия, отвечающего минимуму потенциальной энергии. Особые точки $y = 0$, $x = (2n - 1)\pi$ представляют особые точки типа седло, соответствующие верхнему положению равновесия маятника — максимуму потенциальной энергии.

Убегающие траектории, которые получаются при $h > \omega_0^2$, соответствуют вращательным движениям маятника, возникающим при сообщении ему начального количества движения, которое обеспечивает проход через верхнее положение со скоростью, отличной от нуля. На фазовой плоскости это будет соответствовать выходу описывающей точки за пределы области, ограничиваемой кривыми C_1 , C_2 . Эти кривые, проходящие через седла и служащие в окрестностях данных точек асимптотами гиперболических фазовых траекторий, являются сепаратрисами. Они разделяют топологически различные области на фазовой плоскости: область траекторий, приходящих из $-\infty$ и уходящих в $+\infty$, и область замкнутых траекторий.

Возвращаясь к нашему примеру, напомним, что $y = dx/dt = \sqrt{2[h - V(x)]}$, откуда

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2[h - V(x)]}}.$$

Если при $x = \pm a$ $y = 0$, то $h = V(a) = -\omega_0^2 \cos a$, и мы получим

для полупериода колебаний выражение

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{\omega_0^2 \cos x - \omega_0^2 \cos a}},$$

или

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{2 \cos a}} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{\cos x / \cos a - 1}}. \quad (1.2.3)$$

Отсюда следует, что в разобранным примере мы встречаемся с зависимостью периода колебаний от их амплитуды, т. е. колебания в рассматриваемой системе будут *неизохронными*. Если бы система была линейной, то описывающее ее уравнение имело бы вид $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, и тогда $dy/dx = -\omega_0^2 (x/y)$. В этом случае — случае линейного осциллятора

$$\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} h \quad \text{и} \quad y = \pm \sqrt{h - x^2} \omega_0.$$

Для колебаний с амплитудой a при $x = \pm a$, $y = 0$ получаем $h = a^2$, и тогда $y = dx/dt = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \omega_0$. Для полупериода колебаний при x , изменяющемся от $-a$ до $+a$, имеем

$$\frac{T}{2} = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\omega_0 \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{\omega_0},$$

откуда получается характерное для линейной системы выражение $T = 2\pi/\omega_0$, показывающее независимость периода колебаний от их амплитуды — *изохронность* колебаний в линейных системах.

§ 1.3. Применение метода последовательных приближений

Оставляя пока в стороне другие примеры качественного рассмотрения систем с одной степенью свободы с помощью фазовой плоскости, познакомимся с весьма распространенным методом приближенного количественного расчета интересующих нас систем, а именно с методом последовательных приближений. Не занимаясь применением этого известного метода в общем виде, разберем тот же случай маятника.

Записывая уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0, \quad (1.3.1)$$

где $\omega_0^2 = g/l$, выразим $\sin x$ в виде ряда

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \dots \quad (1.3.2)$$

Ограничиваясь рассмотрением значений $x \ll 1$, остановимся на члене с x^3 . Тогда

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2}{6} x^3 = 0. \quad (1.3.3)$$

Представляя это уравнение в форме

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \omega_0^2 x^3 = 0, \quad (1.3.4)$$

будем сначала, как обычно, искать решение в виде ряда по степеням α

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots \quad (1.3.5)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1.3.4), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1 + \alpha^2 \ddot{x}_2 + \dots + \omega_0^2 x_0 + \alpha \omega_0^2 x_1 + \alpha^2 \omega_0^2 x_2 + \dots \\ \dots + \alpha \omega_0^2 x_0^3 + \alpha^4 \omega_0^2 x_1^3 + \alpha^7 \omega_0^2 x_2^3 + \dots = 0. \end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ $x = x_0$ — решение в нулевом приближении, а $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$ — уравнение нулевого приближения.

Уравнение первого приближения мы получим из общего уравнения, учитывая члены, содержащие α в степени не выше первой,

$$\ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_0 + \alpha \omega_0^2 x_1 + \alpha \omega_0^2 x_0^3 = 0$$

и, учитывая уравнение нулевого приближения для x_0 , получим окончательное уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0^3. \quad (1.3.6)$$

В нашем случае, выбирая начальные условия в виде $t=0$, $x=a$, $\dot{x}=0$, находим решение уравнения нулевого приближения

$$x_0 = a \cos \omega_0 t.$$

Уравнение первого приближения соответственно будет

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 a^3 \cos^3 \omega_0 t. \quad (1.3.7)$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим преобразованием, мы можем записать

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 \frac{a^3}{4} \cos 3\omega_0 t - \frac{3}{4} \omega_0^2 a^3 \cos \omega_0 t. \quad (1.3.8)$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения содержит секулярный член, вызванный наличием в правой части уравнения члена с резонансной частотой.

Вынужденное решение имеет вид

$$x_1 = \frac{a^3}{32} \cos 3\omega_0 t - \frac{3}{8} a^3 t \sin \omega_0 t. \quad (1.3.9)$$

Ясно, что подобное решение не соответствует реальному движению системы.

Спрашивается, в чем же состоит порочность подобного способа нахождения решений для рассматриваемого случая? Ответ на этот вопрос мы находим в уже отмеченном свойстве неизотропности колебаний системы. В самом деле, выбранная нами форма решения предусматривает существование движения с постоянным периодом $2\pi/\omega_0$, т. е. периодом колебания в нулевом приближении. В действительности же период движения с конечной амплитудой принципиально отличен от периода колебаний системы с бесконечно малой амплитудой. Поэтому и получается указанное нами противоречие, которое может быть ликвидировано только посредством отыскания решения с периодом, отличающимся от периода колебаний в нулевом приближении.

Так как величина этого отклонения периода от $T_0 = 2\pi/\omega_0$ должна существенно зависеть от степени нелинейности системы, вполне естественно ввести в рассмотрение новую частоту — частоту колебания с заданной амплитудой в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha g + \alpha^2 g_1 + \dots \quad (1.3.10)$$

Если при расчете ограничиться первым приближением, то можно положить $\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha g$, где g — некоторая пока еще неизвестная величина. Учитывая это добавление, можно написать с точностью до первой степени по α (см. (1.3.4))

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \alpha g x + \omega^2 \alpha x^3 = 0.$$

Уравнение нулевого приближения имеет вид

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0;$$

при тех же начальных условиях $t=0$, $x=a$, $\dot{x}=0$ его решением будет $x_0 = a \cos \omega t$.

Уравнение первого приближения имеет вид

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = g x_0 - \omega^2 x_0^3, \quad (1.3.11)$$

или

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = a g \cos \omega t - \frac{1}{4} \omega^2 a^3 \cos 3\omega t - \frac{3}{4} \omega^2 a^3 \cos \omega t. \quad (1.3.12)$$

В этом уравнении мы можем избавиться от секулярного члена, если выберем величину g так, чтобы

$$a g - \frac{3}{4} \omega^2 a^3 = 0. \quad (1.3.13)$$

Тогда уравнение первого приближения примет вид

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{1}{4} \omega^2 a^3 \cos 3\omega t, \quad (1.3.14)$$

из соотношения (1.3.13) находим $g = \frac{3}{4} \omega^2 a^2$, а из (1.3.10)

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{3}{4} \alpha a^2}. \quad (1.3.15)$$

Решение уравнения первого приближения будет иметь вид

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{a^3}{32} \cos 3\omega t,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Тогда полное решение (1.3.4) в первом приближении запишется следующим образом:

$$x = a \cos \omega t + \alpha C_1 \cos \omega t + \alpha C_2 \sin \omega t + \alpha \frac{a^3}{32} \cos 3\omega t. \quad (1.3.16)$$

Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 можно найти, требуя от этого решения, чтобы оно удовлетворяло тем же начальным условиям. Проведав соответствующие выкладки, получим окончательно

$$x = a \left(1 - \alpha \frac{a^2}{32} \right) \cos \omega t + \alpha \frac{a^3}{32} \cos 3\omega t, \quad (1.3.17)$$

где, как указывалось, $\omega^2 = \omega_0^2 (1 - \frac{3}{4} \alpha a^2)$.

Используя это приближенное решение уравнения (1.3.4), найденное с точностью до первой степени α , получим для маятника ($\alpha = -\frac{1}{6}$)

$$x = a \left(1 + \frac{a^2}{192} \right) \cos \omega t - \frac{a^3}{192} \cos 3\omega t; \quad \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{1}{8} \alpha a^2}. \quad (1.3.18)$$

В найденном нами решении, которое, как мы отмечали, годится для не слишком больших отклонений (когда с достаточной для нас точностью $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$) и является приближенным для идеализированного уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x - \frac{1}{6}x^3) = 0, \quad (1.3.19)$$

следует отметить две особенности. Во-первых, колебания неизохронны (ω — функция a) и, во-вторых, колебания не чисто синусоидальны — в них присутствуют гармоники (в нашем случае третья гармоника). Неизохронность колебаний можно наглядно представить, построив график зависимости ω от a . В дан-

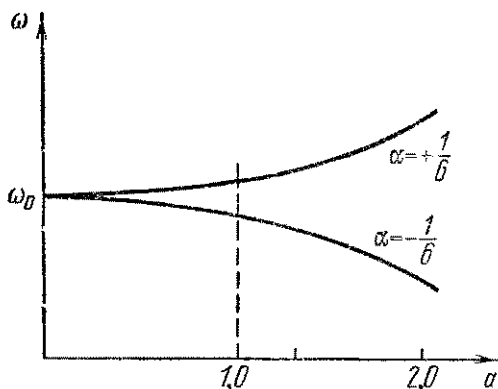


Рис. 1.5. График зависимости собственной частоты от амплитуды для маятника при аппроксимации $\sin x$ выражением $x - \frac{1}{6}x^3$.

ном примере график будет иметь вид, показанный на рис. 1.5, причем его можно использовать до $a \approx 1$, так как при больших амплитудах колебаний теряет свою справедливость сделанное ранее упрощение $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3$.

§ 1.4. Свободные колебания в электрическом контуре без затухания с нелинейной емкостью

В качестве примера нелинейной консервативной колебательной системы с одной степенью свободы рассмотрим электрический колебательный контур без затухания с конденсатором, в котором нет линейной зависимости напряжения от заряда. Подобными нелинейными свойствами обладают конденсаторы, в которых в качестве диэлектрика используются материалы, имеющие сегнетоэлектрические свойства, и емкости, возникающие в $p-n$ -переходах (например, в полупроводниковых диодах) при обратном напряжении смещения.

Как известно, для конденсаторов с сегнетоэлектриком характерно отсутствие прямой пропорциональности между зарядом и напряжением на его обкладках. Пренебрегая гистерезисом, можно качественно изобразить эту зависимость в виде графика рис. 1.6. Для каждого конкретного случая ее легко получить экспериментально, и она представляет собой характеристику нелинейного элемента колебательной системы. Здесь следует иметь в виду, что свойства конденсатора с сегнетоэлектриком существенно зависят от типа применяемого сегнетоэлектрика, который обладает определенной инерционностью, связанной со скоростью изменения заряда, что приводит к частотной зависимости емкости конденсатора. Поэтому нелинейные характеристики таких конденсаторов могут существенно изменяться при значительном увеличении частоты электрических колебаний в контуре, содержащем нелинейный элемент.

Если ввести привычное понятие емкости, определяемое $C = q/u_C$, то, считая $u_C = \varphi(q)$, можно записать

$$C(q) = q/\varphi(q). \quad (1.4.1)$$

Примерный вид функции $C(q)$ для типичного сегнетоэлектрика показан на рис. 1.7. В случае запертого $p-n$ -перехода известна зависимость C_d от напряжения, где $C_d = dq/du_C$ — дифференциальная емкость данного устройства. Эта зависимость имеет вид, изображенный на рис. 1.8, и аналитически может быть представлена формулой

$$C_d = \frac{A}{(u_0 - u_C)^k}, \quad (1.4.2)$$

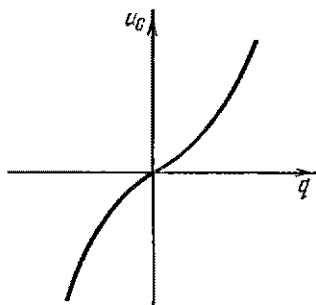


Рис. 1.6. Вольт-кулоновая характеристика конденсатора с сегнетоэлектриком.

где A — некоторая константа, u_0 — контактная разность потенциалов для данного перехода, u_c — напряжение на емкости, k — показатель степени, принимающий значение для различных типов переходов (плавный, резкий и др.) от $1/2$ до 3 и выше. Зададимся

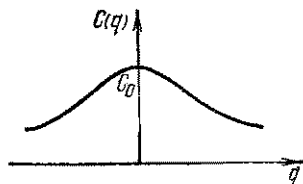


Рис. 1.7. График зависимости емкости от заряда для конденсатора с сегнетоэлектриком.

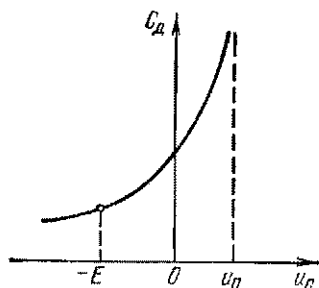


Рис. 1.8. График зависимости дифференциальной емкости запертого p — n -перехода от напряжения.

E — напряжение смещения

наиболее часто встречающейся зависимостью дифференциальной емкости от напряжения для узких германиевых переходов

$$C_x = \frac{dq}{du_c} = \frac{A}{(u_0 - u_c)^{1/2}}. \quad (1.4.3)$$

Отсюда

$$q = -2A(u_0 - u_c)^{1/2} + D, \quad (1.4.4)$$

где D — постоянная интегрирования, которую следует определить из начальных условий. Пусть $u_c = v - E$. Примем, что при $u_c = -E$ ($v = 0$), где $-E$ — начальное отрицательное напряжение смещения, v — внешнее напряжение, приложенное к p — n -переходу, $q = 0$. Иными словами, мы учитываем лишь тот заряд на емкости, который связан с отклонением напряжения на ней от исходного постоянного смещения $-E$. При этих предположениях $D = 2A(u_0 + E)^{1/2}$. Считая, что при $v = 0$, $C_d = C_0$, получаем $A = C_0(u_0 + E)^{1/2}$, откуда $D = 2C_0(u_0 + E)$.

Разрешая выражение (1.4.4) относительно u_c , получим

$$u_c = u_0 - \frac{1}{4A^2}(q - D)^2 = -E + \frac{1}{C_0}q - \frac{1}{4C_0^2(u_0 + E)}q^2, \quad (1.4.5)$$

откуда

$$v = \frac{1}{C_0}q - \frac{1}{4C_0^2(u_0 + E)}q^2, \quad (1.4.6)$$

т. е. выражение типа

$$v = \frac{1}{C_v}(q - \beta q^2), \quad (1.4.7)$$

соответствующее графической зависимости, изображенной на рис. 1.9. Указанное соотношение справедливо лишь для $v < u_0 + E$, так как для напряжений на $p-n$ -переходе $u_c \geq u_0$ использованные соотношения теряют смысл и будет иметь место прямая проводимость. Заметим, что для других видов исходной зависимости $C_x(u_c)$, например при $k \neq 1/2$, и при учете неизбежных параллельных постоянных емкостей, мы встретимся с более сложными зависимостями типа $v = (1/C_0)(q + \beta_1 q^2 + \beta_2 q^3 + \dots)$.

Учитывая приведенное соотношение, рассмотрим сначала колебательные процессы, происходящие в консервативном колебательном контуре, в котором в качестве емкости использован конденсатор с сегнетоэлектриком без потерь. Исследуем контур (рис. 1.10),

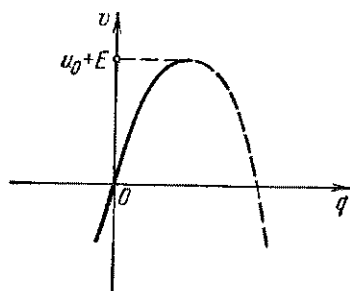


Рис. 1.9. Вольт-кулоновая характеристика для емкости запертого $p-n$ -перехода.

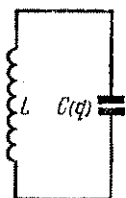


Рис. 1.10. Схема контура без затухания с сегнетоэлектрическим конденсатором.

в котором отсутствует затухание, индуктивность L имеет постоянную величину, независящую от токов и напряжений в системе, а характеристика конденсатора C подобна характеристике, изображенной на рис. 1.6.

Согласно закону Кирхгофа

$$L \frac{di}{dt} + u_c = 0,$$

где $i = dq/dt$, $u_c = \varphi(q)$. Тогда

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \varphi(q) = 0. \quad (1.4.8)$$

Для качественного рассмотрения движений в такой системе на фазовой плоскости образуем уравнение $\dot{y} = -(1/L)\varphi(x)$ (напомним, что $y = \dot{x}$), или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi(x)}{Ly}, \quad (1.4.9)$$

где $x = q$.

Для данной системы можно найти потенциальную функцию

$$V(x) = \frac{1}{L} \int \varphi(x) dx, \quad (1.4.10)$$

которая для $\varphi(x) \equiv u_c$, соответствующей кривой на рис. 1.6, имеет характер, показанный на рис. 1.11. В согласии с этим в точке $x=0$ потенциальная функция имеет единственный минимум, отвечающий устойчивому положению равновесия, относительно которого система совершает колебательные движения.

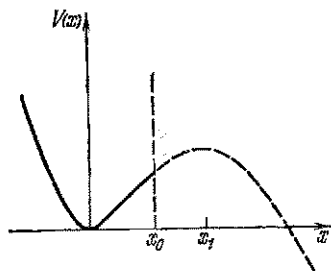


Рис. 1.11. График потенциальной функции для контура с сегнетоэлектрическим конденсатором.

Таким образом, на фазовой плоскости мы получим единственную особую точку $x=0, y=0$ типа центр, вокруг которой располагаются замкнутые фазовые траектории, отвечающие колебательным процессам с различными амплитудами. Уравнение фазовых траекторий имеет вид $1/2 y^2 = h - V(x)$.

Построим методом изоклин фазовый портрет рассматриваемой нелинейной консервативной системы. Этот метод применим для систем с нелинейностью любого типа. *Изоклинами* на фазовой плоскости называются линии, на которых наклон интегральных кривых $dy/dx = \text{const}$. Уравнения семейства изоклин для данного случая запишутся как $dy/dx = k_i$, где k_i — произвольные числа. Тогда, учитывая (1.4.9), находим уравнение семейства изоклин

$$k_i y = (1/L) \varphi(x). \quad (1.4.11)$$

Теперь для построения фазового портрета данной колебательной системы необходимо аппроксимировать нелинейную вольт-кулоновую характеристику (см. рис. 1.6) определенной аналитической зависимостью. Для множества самых разнообразных сегнетоэлектрических материалов вольт-кулоновые характеристики конденсаторов имеют вид кубической параболы с разными коэффициентами нелинейности, т. е.

$$\varphi(q) = u_c = (q/C_0) (1 + \gamma_0 q^2), \quad (1.4.12)$$

где γ_0 — коэффициент нелинейности. Если в (1.4.8) ввести безразмерный заряд $x = q/q_0$, круговую частоту $\omega_0^2 = 1/LC_0$ и безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, то с учетом (1.4.12) уравнение фазовых траекторий (1.4.9) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x + \gamma x^3)}{y}, \quad (1.4.13)$$

где $\gamma = \gamma_0 q_0^2$, а соответствующие ему уравнения семейства изоклин запишутся следующим образом:

$$y = \frac{-(x + \gamma x^3)}{k_i}. \quad (1.4.14)$$

Как мы видим, для нелинейной системы изоклинами на фазовой плоскости являются кубические параболы с различными коэффициентами k_i . Исключение составляют только изоклина бесконечности ($k_i = \infty$), совпадающая с осью координат x ($y = 0$), и нулевая изоклина ($k_i = 0$), совпадающая с осью координат y ($x = 0$). На рис. 1.12 показано построение фазовых траекторий методом изоклин для электрического колебательного контура с нелинейным диэлектриком. Замкнутость фазовых траекторий подтверждает, что мы имеем дело с консервативной системой. Из фазового портрета видно, что при малых амплитудах колебаний, как и в случае идеального маятника, фазовые траектории близки к эллипсам, т. е. малые движения в нелинейной системе близки к гармоническим колебаниям в линейной системе. Это связано с тем, что при малых значениях x влиянием нелинейного члена γx^3 по сравнению с линейным членом x на колебательный процесс в системе можно пренебречь.

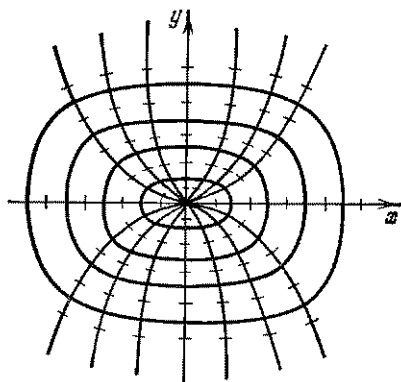


Рис. 1.12. Построение фазовых траекторий методом изоклин для контура без затухания с сегнетоэлектрическим конденсатором.

Полученный фазовый портрет системы, естественно, существенно зависит от вида исходной характеристики нелинейности системы, и позволяет нам качественно судить о процессах, которые могут протекать в подобной системе. Если характеристика нелинейности имеет вид, показанный на рис. 1.6, мы из фазового портрета можем сделать следующие заключения. Во-первых, в системе возможны симметричные колебания вокруг единственного положения равновесия $x = q = 0$, $y = \dot{q} = i = 0$. Во-вторых, форма этих колебаний отлична от синусоидальной и их различие тем больше, чем больше амплитуда колебаний. В третьих, в силу специфики указанных нелинейных свойств конденсатора с сегнетоэлектриком с ростом начального толчка (или начального запаса энергии) амплитуда колебаний $y = \dot{q}$, т. е. амплитуда тока в контуре, растет быстрее, чем амплитуда заряда.

Итак, с учетом сделанных допущений мы сводим решение нашей задачи к нахождению приближенного решения уравнения

$$L\ddot{x} + \frac{1}{C_0}(x + \gamma x^3) = 0, \quad (1.4.15)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \omega_0^2 x^3 = 0, \quad (1.4.16)$$

где $\omega_0^2 = 1/LC_0$. Это уравнение принадлежит к тому же типу, что и рассмотренное нами приближенное уравнение маятника, и мы можем сразу же написать его решение

$$x = a \left(1 - \gamma \frac{a^2}{32} \right) \cos \omega t + \gamma \frac{a^3}{32} \cos 3\omega t, \quad (1.4.17)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{3}{4}\gamma a^2}, \quad (1.4.18)$$

a — амплитуда колебаний, а начальные условия суть: $x = a$, $\dot{x} = 0$ в момент времени $t = 0$.

Для заданных свойств сегнетоэлектрика и выбранных масштабов мы всегда можем найти численные значения γ и получить приближенное решение, годное в той области значений x ($-a \leq x \leq +a$), внутри которой, во-первых, можно ограничиться выбранной нами аппроксимацией и, во-вторых, достаточно приближение с точностью до γ в первой степени. В этом случае мы встречаемся с неизохронностью колебаний и обнаруживаем отход от строгой синусоидальности, выражающийся в появлении компоненты с тройной частотой. Строя график зависимости частоты ω от амплитуды, мы получим график типа показанного на рис. 1.5. Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Из (1.4.18) следует, что ω обращается в бесконечность при $a^2 = = 4/3\gamma$, а для больших значений a выражение для ω становится мнимым. Этот результат является следствием недостаточности использованного нами первого приближения при подобных амплитудах.

Если аппроксимация типа (1.4.12) точно передает зависимость напряжения на емкости от заряда, решение (1.4.17) в первом приближении верно лишь постольку, поскольку можно пренебречь последующими членами. То же относится и к выражению для частоты (1.4.18). Поэтому при больших амплитудах колебаний приближенное решение становится непригодным независимо от точности аппроксимации. Таким образом, здесь сказывается сама ограниченность метода последовательных приближений, не дающего точных выражений для реальных движений в системе в случае больших амплитуд. В дальнейшем мы познакомимся с другим приемом определения частоты колебаний в подобных системах для случая приближенного гармонического закона колебаний.

Несколько иначе будут протекать явления, если в качестве емкости в контуре использовать емкость запертого $p-n$ -перехода полупроводникового диода. Тогда вид функции $\varphi(q)$ будет другим. Если принять, что график $V(q)$, задаваемый функцией $\varphi(q)$, будет таким же, как на рис. 1.9, а аналитическая зависимость передается выражением $\varphi(x) = (1/C_0)(x - \beta x^2)$, то потенциальная функция

$$V(x) = \frac{1}{L} \int \varphi(x) dx = \frac{1}{2LC_0} x^2 - \frac{\beta}{3LC_0} x^3 \quad (1.4.19)$$

будет изображаться кривой, показанной на рис. 1.11. Хотя потенциальная функция, кроме минимума при $x=0$, имеет еще и максимум при $x=x_1$, этот максимум лежит за пределами применимости принятой аппроксимации, пригодной лишь для $x < x_0$, где x_0 соответствует заряду при напряжении на емкости, равном контактной разности потенциалов. Поэтому на фазовом портрете следует считать отвечающей реальным процессам только часть, лежащую в области $x < x_0$. Рассмотрение фазовых траекторий показывает возможность существования незатухающих колебаний вокруг единственного состояния равновесия — состояния покоя с положительным отклонением, меньшим x_0 . Если при заданном начальном условии описывающая точка выходит на траекторию, заходящую за пределы указанных значений x_0 , то проведенный анализ непригоден, и для рассмотрения действительных процессов в подобной системе следует учитывать появление существенной проводимости $p-n$ -перехода. При выполнении указанного ограничения в системе будет происходить колебательный процесс с формой колебаний, отличной от гармонической.

§ 1.5. Свободные колебания в контуре с нелинейной индуктивностью

Рассмотрим теперь другой пример электрической нелинейной консервативной системы, а именно — контур с индуктивностью, зависящей от протекающего по нему тока. Этот случай не имеет наглядного и простого нерелятивистского механического аналога, так как зависимость самоиндукции от тока эквивалентна для механики случаю зависимости массы от скорости.

С электрическими системами подобного типа мы встречаемся тогда, когда в индуктивностях используются сердечники из ферромагнитного материала. В таких случаях для каждого данного сердечника можно получить зависимость между намагничивающим полем и потоком магнитной индукции. Кривая, изображающая эту зависимость, называется *кривой намагничивания*. Если пренебречь явлением гистерезиса, то примерный ее ход можно представить графиком, изображенным на рис. 1.13. Так как величина поля

H пропорциональна току, текущему в катушке, то по оси абсцисс можно прямо в соответствующем масштабе откладывать ток.

Для контура, показанного на рис. 1.14, можно написать уравнение Кирхгофа

$$n \frac{d\Phi}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

где n — число витков катушки, пронизываемых магнитным пото-

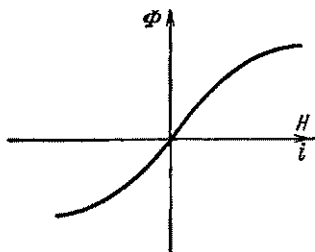


Рис. 1.13. Кривая зависимости магнитного потока Φ от поля H или тока i в случае ферромагнетика.

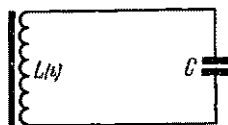


Рис. 1.14. Колебательный контур без потерь с индуктивностью с ферромагнитным сердечником.

ком Φ , или (выбирая масштаб Φ и i в соответствующих единицах) в виде

$$\frac{d}{dt} \Phi(i) + \frac{q}{C} = 0, \quad \frac{d}{dt} \Phi(\dot{q}) + \frac{q}{C} = 0. \quad (1.5.1)$$

Тогда

$$\frac{d\Phi}{d\dot{q}} \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (1.5.2)$$

или

$$\ddot{q} = \psi(q, \dot{q}), \quad (1.5.3)$$

где $\psi = -q \left/ \left(C \frac{d\Phi}{d\dot{q}} \right) \right.$.

На фазовой плоскости ($x = q$, $y = \dot{x} = \dot{q}$) будем иметь фазовые траектории, описываемые уравнениями

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \psi(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x, y)}{y}. \quad (1.5.4)$$

Умножая уравнение (1.5.2) на dq и производя интегрирование, получим интеграл энергии

$$\int \frac{d\Phi}{d\dot{q}} \dot{q} d\dot{q} + \frac{1}{2C} q^2 = h. \quad (1.5.5)$$

Здесь $(1/2C) q^2$ — электростатическая (потенциальная) энергия, $\int \frac{d\Phi}{d\dot{q}} \dot{q} d\dot{q}$ — магнитная (кинетическая) энергия. В частности, для $d\Phi/d\dot{q} = L = \text{const}$, т. е. для линейного случая, получается известное выражение для магнитной энергии $1/2 L \dot{q}^2$ или $1/2 L i^2$.

По своей физической природе $\Phi(\dot{q})$ — нечетная функция, и, следовательно, $\int \frac{d\Phi}{d\dot{q}} \dot{q} d\dot{q}$ всегда больше нуля и обращается в нуль при $\dot{q}=0$. Таким образом, точка $q=0, \dot{q}=0$ есть особая точка на фазовой плоскости, соответствующая минимуму потенциальной энергии

$$\frac{q^2}{2C} = h - \int \frac{d\Phi}{d\dot{q}} \dot{q} d\dot{q}. \quad (1.5.6)$$

Вид фазовых траекторий мы сможем установить, если нам будет задана зависимость Φ от $i = \dot{q}$. Задаваясь по Дрейфусу выражением

$$\Phi(i) = A \operatorname{arctg} \bar{a}i + B\bar{a}i, \quad (1.5.7)$$

где A , B и $\bar{a}$ — соответствующие константы ($\bar{a} = n/S$, n — число витков тока, пронизываемых магнитным потоком Φ при сечении витков, равном S), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{di} &= \frac{A\bar{a}}{1+\bar{a}^2i^2} + B\bar{a}, \\ \int \frac{d\Phi}{di} i di &= A\bar{a} \frac{i di}{1+\bar{a}^2i^2} + B\bar{a} \int i di, \\ \int \frac{d\Phi}{di} i di &= \frac{A}{2\bar{a}} \ln(1+\bar{a}^2i^2) + \frac{B\bar{a}}{2} i^2. \end{aligned}$$

Отсюда находим уравнение фазовых траекторий в виде

$$\frac{A}{2\bar{a}} \ln(1+\bar{a}^2i^2) + \frac{B\bar{a}}{2} i^2 + \frac{1}{2C} q^2 = h. \quad (1.5.8)$$

Оно описывает семейство кривых, окружающих особую точку типа центр, причем сами кривые близки к эллипсам при малых h (малых значениях $x \equiv q$ и $y \equiv \dot{q} \equiv i$) (рис. 1.15).

Для ограниченного интервала значений $i = \dot{q}$ можно аппроксимировать кривую намагничения полиномом, содержащим нечетные степени $\dot{q}$. Если в процессе изучаемых движений величина тока не заходит далеко в область насыщения, то допустимо в качестве простейшей аппроксимации использовать выражение

$$\Phi(i) = L_0(i - \gamma i^3), \quad (1.5.9)$$

где $\gamma \ll 1$, L_0 — коэффициент самоиндукции.

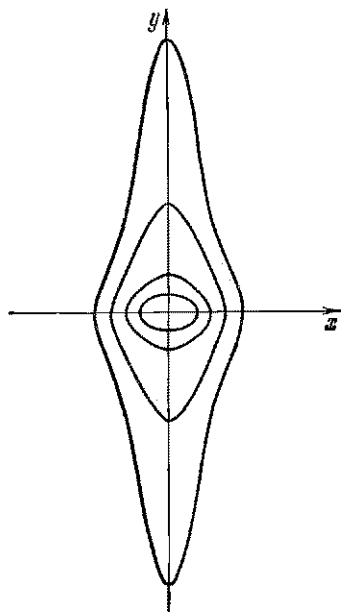


Рис. 1.15. Фазовый портрет контура без затухания с индуктивностью с ферромагнитным сердечником при аппроксимации зависимости магнитного потока от тока по Дрейфусу.

В данном случае (в пределах выбранного интервала значений i) $d\Phi/di = L_0 - 3L_0\gamma i^2$, и эта величина называется *мгновенным значением коэффициента самоиндукции*. Тогда

$$\int \frac{d\Phi}{di} i di = \int L_0 i di - \int L_0 3\gamma i^3 di = \frac{1}{2} L_0 i^2 - \frac{3}{4} L_0 \gamma i^4.$$

Уравнение семейства интегральных кривых имеет вид

$$L_0 \dot{q}^2 - \frac{3}{2} \gamma \dot{q}^4 + \frac{1}{C} q^2 = h, \quad (1.5.10)$$

оно представляет собой также уравнение семейства кривых, близких к эллипсам (особенно в области малых значений h , т. е. в области малых q и $\dot{q}$).

Для приближенного количественного рассмотрения задачи воспользуемся методом последовательных приближений. Уравнение (1.5.2) при выбранной простейшей полиномиальной аппроксимации кривой намагничения записывается следующим образом:

$$\ddot{q} (L_0 - 3\gamma L_0 \dot{q}^2) + \frac{1}{C} q = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{q} - 3\gamma \dot{q}^2 \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.5.11)$$

где $\omega_0^2 = 1/L_0 C$.

Пусть

$$q = x = x_0 + \gamma x_1 + \gamma^2 x_2 + \dots; \quad (1.5.12)$$

ограничиваясь первым приближением, положим $q = x = x_0 + \gamma x_1$. Вводя поправку к частоте, обусловленную нелинейностью, в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \gamma p, \quad (1.5.13)$$

перепишем уравнение (1.5.11):

$$\ddot{x}_0 + \gamma \ddot{x}_1 - 3\gamma (\dot{x}_0 + \gamma \dot{x}_1)^2 (\ddot{x}_0 + \gamma \ddot{x}_1) + (\omega^2 - \gamma p) (x_0 + \gamma x_1) = 0.$$

Пренебрегая членами, содержащими γ в степени выше первой, получим

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 + \gamma (\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - p x_0 - 3\dot{x}_0^2 \ddot{x}_0) = 0.$$

Уравнение нулевого приближения имеет вид

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0.$$

Его решением x_0 при начальных условиях $t=0$, $x=a$, $\dot{x}=0$ служит $x_0 = a \cos \omega t$. Уравнение первого приближения записывается следующим образом:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = p a \cos \omega t - a^3 3\omega^4 \sin^2 \omega t \cos \omega t,$$

или после тригонометрических преобразований

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (p a - \frac{3}{4} a^3 \omega^4) \cos \omega t + \frac{3}{4} a^3 \omega^4 \cos 3\omega t.$$

Отсюда из условия равенства нулю секулярного члена находим

частотную поправку $pa - \frac{3}{4}a^3\omega^4 = 0$, а для частоты колебаний ω получаем уравнение $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma a^2\omega^4$. С точностью до членов порядка γ имеем для искомой частоты выражение

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \frac{3}{4}\gamma a^2\omega_0^2). \quad (1.5.14)$$

С учетом этой поправки получаем уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{3}{4}\gamma a^3\omega^4 \cos 3\omega t.$$

Его решением служит

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - (3\gamma a^3\omega^2/32) \cos 3\omega t.$$

Полное решение системы записывается в виде

$$x = a \cos \omega t + \gamma C_1 \cos \omega t + \gamma C_2 \sin \omega t - (3\gamma a^3\omega^2/32) \cos 3\omega t.$$

Применяя те же начальные условия, получим $C_1 = (3/32)a^3\omega^2$, $C_2 = 0$ и окончательно для искомого решения находим

$$q = x = a \left(1 + \frac{3}{32} \gamma \omega^2 a^2 \right) \cos \omega t - \frac{3}{32} \gamma a^3 \omega^2 \cos 3\omega t. \quad (1.5.15)$$

Таким образом, и здесь мы получаем качественно те же особенности движения, что и в случаях, разобранных выше. Различие проявляется лишь в соотношениях между амплитудами кратных гармонических компонент, их зависимости от параметров системы и в другой частотной поправке, причем здесь частота найденного решения, так же как и для контура с сегнетоэлектриком, увеличивается с ростом амплитуды. Это связано с тем, что значение эффективного коэффициента самоиндукции в данном примере, так же как и эффективное значение емкости конденсатора с сегнетоэлектриком, для больших амплитуд меньше, чем для малых амплитуд.

Укажем еще на другой способ трактовки той же задачи. Зная реальную кривую намагничивания $\Phi(i)$, можно проанализировать поведение системы, исходя из соответствующей той же кривой зависимости

$$i = \varphi(\Phi). \quad (1.5.16)$$

Уравнение системы

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0$$

в данном случае можно записать так:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{C} \varphi(\Phi) = 0. \quad (1.5.17)$$

Иными словами, эта задача по отношению к магнитному потоку как основной переменной оказывается совершенно аналогичной разобранной выше задаче о простейшей консервативной системе

с нелинейной возвращающей силой (контур с сегнетоэлектриком). В этом случае нелинейную зависимость тока i от потока Φ также можно изобразить в виде кубической параболы

$$i = \frac{1}{L_0} (\Phi + \gamma_0 \Phi^3). \quad (1.5.18)$$

Такое преобразование легко представить себе графически, если на графике рис. 1.13 поменять местами оси координат. Тогда уравнение свободных колебаний в рассматриваемом электрическом контуре с нелинейной индуктивностью запишется так:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{L_0 C} (\Phi + \gamma_0 \Phi^3) = 0. \quad (1.5.19)$$

Вводя $x = \Phi/\Phi_0$, $\omega_0^2 = 1/L_0 C$, $\tau = \omega_0 t$, получим

$$\ddot{x} + x + \gamma x^3 = 0, \quad (1.5.20)$$

где $\gamma = \gamma_0 \Phi_0^2$. Отсюда находим уравнение фазовых траекторий для переменных $y = \dot{x}$ и x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x + \gamma x^3)}{y}. \quad (1.5.21)$$

Замечаем, что особая точка типа центр находится в начале координат, т. е. при $x = 0$, $y = 0$. Семейство изоклин запишется в виде

$$y = -\frac{1}{k_I} (x + \gamma x^3). \quad (1.5.22)$$

Мы видим, что это уравнение семейства изоклин качественно совпадает (с точностью до значения коэффициента γ) с уравнением изоклин (1.4.14) для электрического колебательного контура с нелинейным конденсатором с сегнетоэлектриком. Поэтому фазовый портрет свободных колебаний магнитного потока в контуре с нелинейной индуктивностью аналогичен фазовому портрету свободных колебаний заряда в контуре с нелинейным конденсатором, показанному на рис. 1.12, а при равенстве коэффициентов нелинейности оба портрета совпадают друг с другом.

Аппроксимация зависимости i от Φ производится с помощью полинома с большей точностью и в большем интервале значений i и Φ при той же высшей степени полинома, чем в случае зависимости Φ от i .

Такой прием получения более удобных соотношений для описания той же системы посредством соответствующего выбора основной переменной мы используем и в дальнейшем при анализе вынужденных колебаний, и его следует иметь в виду при составлении уравнений, описывающих исследуемые системы.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИССИПАТИВНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 2.1. Основные особенности колебательных процессов в диссипативных системах и методы их рассмотрения

Как мы уже отмечали (см. § 1.1), в реальных системах всегда происходит рассеяние энергии, ее потери, ее уход из системы и, как следствие этого, уменьшение общего запаса колебательной энергии. Процесс рассеяния — диссипации энергии и уменьшения ее общего запаса присущ всем реальным системам, не содержащим устройств, пополняющих эту убыль энергии. Поэтому мы вправе ожидать, что учет процесса уменьшения исходного запаса колебательной энергии позволит нам получить решения, полнее описывающие реальные движения, чем при рассмотрении консервативных систем. Можно указать на множество характеристик колебательных процессов, которые обусловлены наличием в системе потерь энергии, происходящих по определенному закону и являющихся существенными как для линейных, так и для нелинейных систем. К числу проблем, требующих для своего решения учета диссипации, относятся, например, оценка резонансной амплитуды в линейной системе или в системе с малой нелинейностью, общий вид установившегося движения при наличии вынуждающей силы, закон изменения во времени амплитуды свободных колебаний, устойчивость различных состояний и пр.

На перечисленные выше вопросы и ряд других теория консервативных колебательных систем принципиально не может дать ответа. Учитывая это, в каждом случае следует заранее оценить, пригодна ли в данной конкретной задаче консервативная идеализация. Совершенно естественно, что учет диссипации неизбежно серьезно усложняет анализ и если можно получить ответы на интересующие нас вопросы в рамках консервативной трактовки, то целесообразно этим воспользоваться. Что же касается ряда общих свойств системы, обладающей затуханием, то выводы, сделанные из анализа идеализированных консервативных систем, могут оказаться принципиально неверными, так как между консервативными и диссипативными системами имеется принципиальное физическое различие, вытекающее из различного поведения энергии в тех и других системах. И если на достаточно малом интервале времени эти различия могут проявляться весьма

слабо, то всегда по истечении достаточно большого промежутка времени от начала процесса движение в реальной диссипативной системе будет уже и количественно, и качественно отличаться от движения в идеализированной консервативной системе.

Так, свободные колебания в системе без затухания должны существовать неограниченно долго и их амплитуда должна целиком определяться начальными условиями, тогда как в диссипативной системе всегда можно указать такой конечный интервал времени, по истечении которого амплитуда движения при любых реальных начальных условиях будет меньше любой наперед заданной величины.

С этим связано то обстоятельство, что сами по себе диссипативные колебательные системы, не содержащие источников энергии, имеют только одно стационарное состояние: покой. В самом деле, любые начальные условия, любой исходный запас энергии служит исходной причиной, вызывающей начало *затухания* свободных колебаний, которые через достаточно большой промежуток времени в реальных системах прекратятся или (в случае идеализированных законов диссипации, например, линейное трение) их амплитуды станут меньше любых наперед заданных малых величин.

В математическом описании автономных консервативных систем мы встречаемся с интегралом типа

$$\Phi(x, y) = h, \quad y \equiv \dot{x},$$

служащим математическим выражением условия постоянства запаса энергии движения системы с одной степенью свободы. В простейшем случае $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = h$, где, как указывалось выше, $V(x)$ — потенциальная функция, выражающая в определенном масштабе потенциальную энергию системы.

В неконсервативной системе $\Phi(x, y) = W(t)$, где $dW/dt \neq 0$. Здесь функция $W(t)$ характеризует мгновенное значение запаса колебательной энергии в системе. В подобном виде мы можем записать общее условие неконсервативности системы; следует добавить, что если хотя бы для сколь угодно малого промежутка времени Δt в рассматриваемом интервале времени $dW/dt \neq 0$, то, значит, для данного интервала времени система не консервативна, причем может оказаться, что на отдельных интервалах времени $dW/dt = 0$, и в этих временных пределах систему можно трактовать как консервативную, для которой $dW/dt \equiv 0$.

В диссипативной системе всегда $dW/dt < 0$, что физически соответствует наличию потерь, приводящих к непрерывному уменьшению запаса энергии, связанной с изучаемым движением.

Обозначим скорость диссипации новой функцией $F(x, y) = -dW/dt$. В диссипативных системах всегда выполняется условие $F(x, y) > 0$. В реальных случаях эта функция выражает величину

мощности потерь, мощности, рассеиваемой на диссипативных элементах колебательной системы.

Для простейшей системы, в которой движение описывается энергетическим уравнением $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = W(t)$, легко получить уравнение для действующих в ней сил

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\left[\frac{1}{2}y^2 + V(x)\right] = -F(x, y), \quad \dot{y} - f(x) + \frac{1}{y}F(x, y) = 0;$$

здесь, как и раньше,

$$V(x) = -\int_0^x f(x) dx,$$

где $-f(x)$ — возвращающая сила. Выражение $(1/y)F(x, y) = -(1/y)dW/dt$ дает величину силы трения, которая в различных системах характеризуется той или иной зависимостью от состояния движения системы.

Заметим, что выражение для силы трения $(1/y)F(x, y)$ должно обращаться в нуль при $y=0$, т. е. в отсутствие движения. Это следует из физических соображений, а именно, из того, что сила трения и потери могут иметь место лишь при наличии движения в системе ($y \neq 0$). Отсюда следует, что в функцию $F(x, y)$ переменная y должна входить в степени, большей первой.

Учитывая обязательное для диссипативных систем условие $F(x, y) > 0$, мы приходим к выводу, что выражение $(1/y)F(x, y)$ должно быть знакопеременным и принимать знак, совпадающий со знаком y , т. е. со знаком скорости движения в системе или тока в электрическом контуре.

Для многих диссипативных систем сила трения зависит только от скорости (или силы тока) и не зависит от координаты (заряда), однако характер этой зависимости может быть различным в зависимости от свойств системы и условий, в которых совершается изучаемое движение.

Сила трения, не зависящая от величины скорости и связанная лишь с ее знаком, носит название *сухого трения*. Этот идеализированный тип трения позволяет понять существенные особенности процессов, происходящих в ряде реальных механических систем, но ему нельзя найти аналога среди процессов, реализующихся в простых электрических колебательных цепях. Идеализированная характеристика сухого трения имеет вид, изображенный на рис. 2.1, причем $(1/y)F(x, y) = a$, где $a > 0$ при $y > 0$, $a < 0$ при $y < 0$.

Здесь характерно наличие разрыва непрерывности в выражении для силы трения в точке $y=0$; в аппроксимацию реальной физической зависимости силы трения от скорости необходимо вводить конечный разрыв непрерывности, или скачок, для аппроксимируемой величины. Естественно, удобно рассматривать отдель-

ные этапы движения в системе, на которых выполняются разные законы диссипации.

С необходимостью отдельного рассмотрения этапов движения мы столкнемся также и в тех случаях, когда сила трения (сопротивления) выражается степенной функцией скорости с чет-

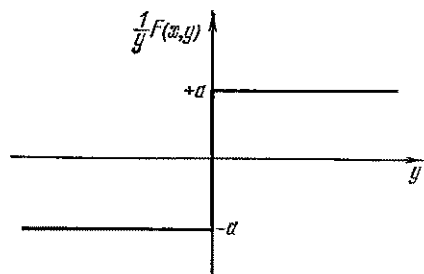


Рис. 2.1. Характеристика сухого трения.

ным показателем степени, например в случае так называемого «квадратичного» трения $(1/y)F(x, y) = \delta y^2$, где $\delta > 0$ при $y > 0$, $\delta < 0$ при $y < 0$. Заметим, что величина силы трения при $y = 0$ скачка не испытывает.

При наличии скачкообразного изменения силы трения в точке $y = 0$ удобно разбить всю задачу о собственных колебаниях в диссипативной системе на два этапа: первый соответствует

одному знаку трения, второй — другому. Эти этапы при свободных колебаниях поочередно сменяют один другого, и изучение всего движения в целом требует отдельного анализа обоих этапов с соответствующим сшиванием полученных решений.

Линейная зависимость силы трения от скорости наиболее распространена в механических системах и описывает вязкое трение в механике при небольших скоростях.

В этом случае сила трения равна $(1/y)F(x, y) = \delta y$, т. е. $F(x, y) = \delta y^2$ и $\delta > 0$ при любых y . В электрических цепях сила трения соответствует обратной э. д. с., возникающей на обычном линейном сопротивлении, и поэтому она выражается в виде Ri , т. е. в наших обозначениях δy . Соответственно Ri^2 равно мощности таких потерь (мощности, выделяемой на сопротивлении).

Для «кубического» трения имеем $(1/y)F(x, y) = \delta_2 y^3$. Этот закон трения, встречающийся в механике больших скоростей, справедлив также для электрических систем с нелинейным диссипативным элементом, причем часто встречается комбинация линейного и кубического трения.

В случаях, когда степенная функция, аппроксимирующая зависимость силы трения от скорости, содержит лишь нечетные степени, весь диапазон возможных изменений исследуемых величин описывается одним выражением с коэффициентами, общими для всей области значений переменных, и поэтому решение для свободных колебаний годится без модификации для всех значений x и y .

Для исследования движений в нелинейных диссипативных системах, а также в консервативных системах, можно применять

различные качественные и количественные методы. Однако не все они, пригодные для анализа движений в консервативных системах, можно без дополнительных оговорок или модификаций использовать для анализа диссипативных систем. При рассмотрении свободных колебаний метод фазовой плоскости остается полностью пригодным и для этого класса задач, приводя лишь к большему разнообразию типов особых точек и фазовых траекторий. Так, например, в фазовых портретах колебаний в диссипативных системах мы уже не встретимся с особыми точками типа центр, но зато могут появиться особые точки типа фокус или узел, в которые стягиваются все фазовые траектории, расположенные в определенной области вокруг этих особых точек. В фазовых портретах диссипативных колебательных систем мы встречаемся также со сходящимися траекториями колебательных систем вместо совокупности замкнутых траекторий, окружающих особые точки, соответствующие устойчивым положениям равновесия. Так же как и при рассмотрении поведения консервативных колебательных систем с помощью фазовой плоскости, построение самих фазовых траекторий для диссипативных систем может производиться или посредством построения аналитически найденного решения уравнений фазовых траекторий или с использованием известных приближенных графических и аналитических методов.

Отмеченные выше существенные особенности диссипативных систем, заключающиеся в том, что любые свободные колебания в системе, предоставленной самой себе, неизбежно затухают, приводят к тому, что для количественного рассмотрения свободных колебаний с учетом потерь нельзя без существенных оговорок пользоваться методом последовательных приближений, в котором за нулевое приближение принимается гармоническое движение. Данный метод может применяться лишь для ограниченных временных интервалов в случае достаточной малости затухания, и поэтому его использование с подобными оговорками существенно снижает его практическую ценность. Это заставляет нас в тех случаях, когда не удастся найти прямое и точное решение дифференциального уравнения, описывающего систему, искать другие пути нахождения приближенного решения, учитывающего специфику нелинейных диссипативных систем и пригодного для любого интервала времени. Из возможных методов нахождения приближенного решения следует в первую очередь указать на метод поэтапного рассмотрения и, в частности, на кусочно-линейный метод, а также на метод медленно меняющихся амплитуд. Кусочно-линейный метод, пригодный для любых типов трения и нелинейности, основывается на замене общего рассмотрения движения всей системы в целом решением ряда линейных задач — уравнений, приближенно описывающих различные этапы движения системы, на которых ее можно считать более или менее

линейной. Так как любую нелинейную характеристику с требуемой степенью точности можно представить как совокупность прямолинейных отрезков, а решение линейной задачи всегда можно довести до аналитического конца, то в результате мы получим точные решения серии идеализированных линейаризованных задач. Эти решения далее надо сшить для приближенного описания всего процесса в системе в целом при заданных начальных условиях.

Этот метод принципиально прост и дает хорошие результаты, но обычно громоздок и страдает отсутствием общности, так как требует последовательного сшивания решения для каждого этапа с последующим, начиная с этапа, характеризующегося выбранными начальными условиями. Безусловное его преимущество состоит в том, что он пригоден для любых систем с любыми характеристиками трения и нелинейности консервативных элементов и не требует аналитической аппроксимации этих зависимостей, а может с успехом применяться при наличии графического изображения соответствующих характеристик.

Метод медленно меняющихся амплитуд является весьма мощным средством анализа движений в исследуемых системах, обладает большой общностью, может давать непрерывное решение для любых временных интервалов и позволяет изучать общие свойства движений, процессы установления и стационарные режимы, но в полной мере применим лишь к ограниченному (правда широкому и весьма важному) классу колебательных систем, а именно, к системам с малой диссипацией и малой нелинейностью, в которых колебания мало отличаются от гармонических.

В дальнейшем мы на ряде примеров разберем особенности этого метода и познакомимся с путями его применения к решению конкретных колебательных задач, а также выясним возможность и целесообразность использования в различных случаях и других методов.

Следует отметить, что уравнения, описывающие поведение системы с малой диссипацией, но с существенной нелинейностью реактивного элемента, можно привести к уравнениям, мало отличающимся от уравнений линейных консервативных систем, путем перехода к новым переменным, для которых отклик сильно нелинейного реактивного элемента будет описываться линейным соотношением.

При этом исходное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = \mu F\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

где $f(x)$ — существенно нелинейная функция, а μ — малая величина, переходит в уравнение

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = \mu F_1\left(x_1, \frac{dx_1}{d\tau}\right),$$

причем между t и τ и x и x_1 можно установить однозначное соответствие и найти аналитические выражения, связывающие x с x_1 и t с τ .

К преобразованному уравнению применим метод медленно меняющихся амплитуд (ММА). Таким образом, формально этим методом можно воспользоваться и для анализа систем с большой нелинейностью (при малой диссипации) при соответствующем нелинейном преобразовании переменных *).

При анализе конкретной задачи необходимо задаваться какой-либо аналитической или графической аппроксимацией реальных нелинейных зависимостей, т. е. переходить к рассмотрению системы, приближенно передающей свойства реальной системы, а затем искать точное или приближенное, качественное или количественное решение соответствующей математически сформулированной задачи.

От искусства выбора вида аппроксимации реальных нелинейных зависимостей, от пути идеализации и метода решения зависит сложным или простым путем будет найдено решение задачи, будет ли это решение содержать ответ на все поставленные вопросы о свойствах исследуемой реальной системы, не приведет ли нас анализ неудачно идеализированной системы к неправильным выводам о свойствах реальной системы, и, наконец, в каких пределах полученное решение будет правильно описывать действительные процессы.

§ 2.2. Качественное рассмотрение свободных колебаний в диссипативных системах при различных законах трения

Рассмотрим с помощью представления движения на фазовой плоскости несколько характерных примеров диссипативных нелинейных колебательных систем с одной степенью свободы с различными законами трения.

1. Начнем со случая, когда в системе, обладающей линейными реактивными элементами, трение описывается идеализованным законом сухого трения. В этом случае, как указывалось выше, функция диссипации имеет вид $F(y) = ay$; $a > 0$ при $y > 0$ и $a < 0$ при $y < 0$. Зависимость силы трения от скорости была показана на рис. 2.1. Для простейшей системы с одной степенью свободы при линейности инерционных и упругих сил мы можем записать уравнение, описывающее движение в подобной системе, в виде

$$\ddot{x} + a + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.2.1)$$

*) Этот метод описан детально в монографии К. А. Самойло, Метод анализа колебательных систем второго порядка, М., «Сов. радио», 1976.

Это линейное уравнение справедливо для всех значений $x, \dot{x}$, при которых a остается постоянным, т. е. в областях постоянства знака $\dot{x} = y$.

Для всей совокупности отрицательных и положительных значений y уравнение (2.2.1) нелинейно, так как при проходе $\dot{x} = y$ через значение $y = 0$, a изменяется скачком от $+a_0$ до $-a_0$ и обратно. Поэтому для изображения соответствующих движений на фазовой плоскости необходимо отдельно построить фазовые траектории для $y > 0$ и для $y < 0$, а затем сшить их в точках $y = 0$ для получения непрерывных фазовых траекторий на всей фазовой плоскости. В самом деле, система изучаемого типа при наличии инерционных и упругих сил, т. е. с резервуарами кинетической и потенциальной энергий, может совершать лишь непрерывные движения, допускает лишь непрерывные изменения координаты и скорости, а, следовательно, ее фазовый портрет обладает только непрерывными фазовыми траекториями. Разрывы непрерывности в значениях координаты или скорости и наличие конеч-

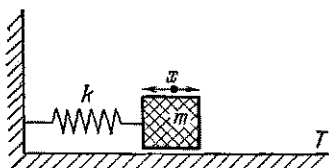


Рис. 2.2. Модель механической колебательной системы с сухим трением.

ных скачкообразных изменений этих величин означали бы скачкообразное изменение потенциальной или кинетической энергий, что соответствовало бы физически бессмысленному мгновенному выделению или поглощению бесконечной мощности.

Простейшая механическая модель подобной системы с сухим трением может иметь вид, изображенный на рис. 2.2, где масса m скользит по сухой поверхности T , совершая колебания за счет инерции самой массы и упругости пружины. Для электрической системы создать простой аналог сухого трения не представляется возможным, и мы в данном случае, характерном для применения метода линейного поэтапного рассмотрения, ограничимся указанным механическим примером.

Для различных этапов движения получим уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -a_0 \quad \text{для } y > 0, \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= +a_0 \quad \text{для } y < 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Простыми подстановками $x = x_1 - a_0/\omega_0^2$ для $y > 0$ и $x = x_2 + a_0/\omega_0^2$ для $y < 0$ находим уравнение, общее для обоих знаков y :

$$\ddot{x}_{1,2} + \omega_0^2 x_{1,2} = 0. \quad (2.2.3)$$

Фазовые траектории, соответствующие этому уравнению, представляют собой эллипсы с центрами соответственно при $x_{1,2} = 0$.

Для построения фазовых траекторий, описываемых уравнением

$$\frac{dy_{1,2}}{dx_{1,2}} = -\omega_0^2 \frac{x_{1,2}}{y_{1,2}}, \quad (2.2.4)$$

можно либо использовать прямое интегрирование уравнения (2.2.3) и получить интегральные траектории, либо применить, например, метод изоклин. Семейство изоклин в верхней полуплоскости ($y > 0$) представляет собой прямые $y = -(1/k_1)(a_0 + \omega_0^2 x)$, проходящие через особую точку типа центр с координатами $y = 0$, $x = -a_0/\omega_0^2$. В нижней полуплоскости ($y < 0$) семейство изоклин описывается уравнением

$$y = +\frac{1}{k_1}(a_0 - \omega_0^2 x), \quad (2.2.5)$$

а соответствующие этому уравнению прямые проходят через особую точку типа центр с координатами $y = 0$, $x = a_0/\omega_0^2$. При построении полного фазового портрета системы мы должны выполнить соответствующее построение для x_1 ($y > 0$) и для x_2 ($y < 0$), сомкнув при $y = 0$ фазовые траектории верхней и нижней полуплоскостей. В результате получаются фазовые траектории, имеющие вид, показанный на рис. 2.3, на котором изображен фазовый портрет идеализированной системы.

Из этого фазового портрета сразу виден основной характер колебательных движений в данной системе, а именно затухание колебаний и прекращение движения после конечного числа колебаний (при заданных начальных условиях — отклонении и начальной скорости). Например, одно такое движение от начальных условий $x = x_0$, $y = y_0$ (точка P на фазовом портрете системы) изображено более жирной фазовой траекторией. Фазовый портрет (см. рис. 2.3) показывает нам также одно характерное свойство колебательных систем с сухим трением, а именно наличие зоны застоя; в самом деле, прекращение движения ($y = 0$) может происходить при любых значениях x в области $-a_0/\omega_0^2 \leq x \leq +a_0/\omega_0^2$, откуда следует, что при каких-то начальных условиях система, будучи представлена самой себе, не обязательно придет к состоянию покоя в точке $x = 0$, $y = 0$. Зона застоя тем больше, чем больше трение в системе.

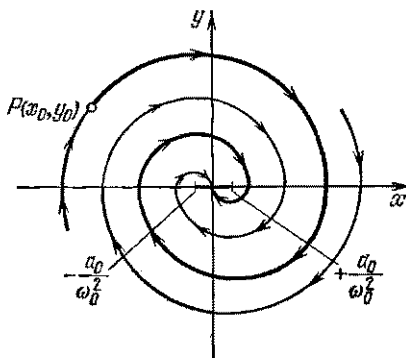


Рис. 2.3. Фазовый портрет системы с сухим трением.

Подобное явление хорошо известно в механических системах и с ним часто встречаются в измерительных приборах, где колебательным элементом служит подвижная система прибора с определенной массой, находящаяся под воздействием возвращающей пружины и вращающаяся на оси с подпятником без смазки. Заметим еще, что смыкание (сшивание) фазовых траекторий при $y=0$ обеспечивает также непрерывность производной dy/dx , т. е. отсутствие изломов фазовой траектории, так как для $y=0$ и в нижней, и в верхней полуплоскости $dy/dx=\infty$, как следует из способа получения уравнения фазовых траекторий

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{y}, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{y=0} = \infty$$

независимо от вида функции $Q(x, y)$, если только она сама не обращается в нуль в этой точке.

2. Случай линейного трения, соответствующий для электрических систем наличию постоянного омического сопротивления при линейности консервативных параметров, хорошо изучен и, как известно, приводит к линейному дифференциальному уравнению типа

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.2.6)$$

откуда при $y = \dot{x}$

$$\dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2\delta y + \omega_0^2 x}{y}. \quad (2.2.7)$$

Подстановкой $z = y/x$ последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z^2 + 2\delta z + \omega_0^2}{zx};$$

его интеграл легко найти, и мы можем написать

$$\ln x^2 (z^2 + 2\delta z + \omega_0^2) = \frac{2\delta}{\omega} \operatorname{arctg} \left(\frac{z + \delta}{\omega} \right) + \ln C,$$

где C — произвольная постоянная; $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Возвращаясь к переменным x и y , перепишем это решение в виде

$$y^2 + 2\delta xy + \omega_0^2 x^2 = C \exp \left[\frac{2\delta}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y + \delta x}{\omega x} \right]; \quad (2.2.8)$$

при $\omega_0^2 > \delta^2$ оно соответствует спиральям на фазовой плоскости, описываемым уравнением

$$\rho^2 = C_1 \exp \left[\frac{2\delta}{\omega} \theta \right]. \quad (2.2.9)$$

При выводе (2.2.9) из (2.2.8) мы воспользовались обозначениями $y + \delta x = u$, $u = \rho \sin \theta$, $\omega x = v$, $v = \rho \cos \theta$. При $\omega_0^2 < \delta^2$ получаем кривые, описываемые уравнением

$$y^2 + 2\delta xy + \omega_0^2 x^2 = C \left[\frac{y + (\delta + q)x}{y + (\delta - q)x} \right]^{\delta/q}, \quad (2.2.9a)$$

где $q^2 = \delta^2 - \omega_0^2$. Соответствующие этим двум случаям интегральные кривые изображены на рис. 2.4 и 2.5.

При $\delta^2 < \omega_0^2$ мы имеем дело с затухающими колебаниями линейного осциллятора, фазовый портрет которых представляет собой совокупность логарифмических спиралей, стягивающихся в особую точку типа фокус. Для $\delta^2 > \omega_0^2$ система становится апериодической, и на фазовой плоскости движения изображаются фазовыми траекториями, имеющими вид кривых, сходящихся в особую точку типа узел без обходов вокруг нее. В обоих

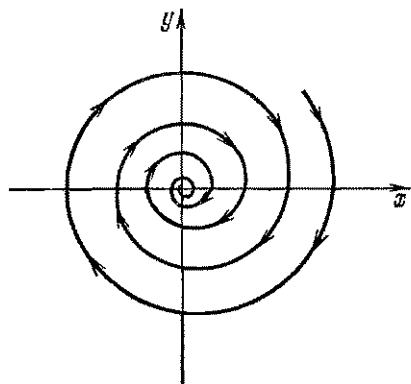


Рис. 2.4. Фазовый портрет линейной системы с затуханием меньше критического.

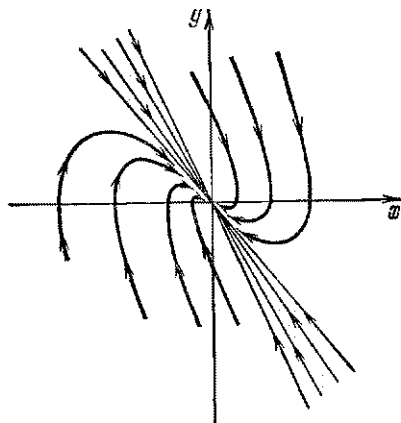


Рис. 2.5. Фазовый портрет линейной системы с затуханием больше критического.

случаях в диссипативных системах особые точки (фокус и узел) устойчивы и соответствуют единственному положению равновесия системы — состоянию покоя, к которому система приходит из любых начальных условий, при любом начальном смещении или скорости.

Случай $\omega_0^2 < 0$ может реализоваться, если вместо возвращающей силы действует отталкивающая. В этом случае уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$[y + (\delta + \omega)x]^{\omega/\delta+1} [y + (\delta - \omega)x]^{\omega/\delta-1} = C, \quad (2.2.10)$$

где $\omega^2 = |\omega_0^2| + \delta^2$.

Уравнение (2.2.10) соответствует семейству гипербол с асимптотами при $C=0$,

$$y = -(\delta \pm \omega)x, \quad (2.2.11)$$

и мы имеем дело с особой точкой типа седло.

Отметим, что разобранные нами уравнения фазовых траекторий для линейной системы остаются справедливыми и для нели-

нейных систем в ближней окрестности особых точек, так как для такой системы в окрестности особой точки первого порядка можно записать разложение нелинейной функции в ряд по степеням малых вариаций ξ и η по отношению к значениям, соответствующим координатам особой точки $x = x_1$, $y = 0$. Тогда для уравнения $\dot{x} = f(x, y)$ в окрестности особой точки имеем

$$f(x_1 + \xi; 0 + \eta) = f(x_1, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_1} \xi + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} \eta + \dots$$

Пренебрегая высшими степенями малых вариаций ξ и η и учитывая, что $f(x_1, 0) = 0$, получим уравнение фазовых траекторий в окрестности особой точки

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta}{\eta},$$

рассмотренное нами выше (см. стр. 50).

В системе, нелинейной за счет одного из консервативных параметров, наличие линейного трения также приводит к качественному изменению фазового портрета системы по сравнению с фазовым портретом подобной же системы в пренебрежении затуханием (трением). При этом исчезают существовавшие в случае консервативных систем особые точки типа центр и на их месте появляются особые точки типа устойчивого фокуса или устойчивого узла, а вместо континуума замкнутых фазовых траекторий возникают свертывающиеся траектории, приводящие из любого места фазовой плоскости (при любом начальном состоянии) к устойчивой особой точке — состоянию покоя. Наличие нелинейного консервативного параметра в колебательной системе в первую очередь сказывается на форме фазовых траекторий, которые в этом случае не являются логарифмическими спиралями на всей фазовой плоскости, а переходят в них в окрестностях особой точки типа фокуса. Для иллюстрации можно привести фазовый портрет маятника при учете линейного трения (рис. 2.6). Описывающее его дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0. \quad (2.2.12)$$

В отличие от фазового портрета маятника без учета трения, который был изображен ранее на рис. 1.4, здесь не появляются убегающие траектории, нет замкнутых траекторий и нет замкнутых разделительных линий — сепаратрис. Все траектории из любой точки фазовой плоскости стягиваются к одной из точек устойчивого положения равновесия — устойчивым фокусам ($x = 2\pi n$, $y = 0$). Это означает, что при наличии потерь система в общем случае после конечного числа оборотов (вращений) колебательным путем придет к устойчивому состоянию равно-

веса — покою, соответствующему нижнему положению массы маятника относительно точки подвеса.

Введение затухания, обусловленного линейным трением, не вносит в фазовые портреты новых особых точек, а лишь меняет

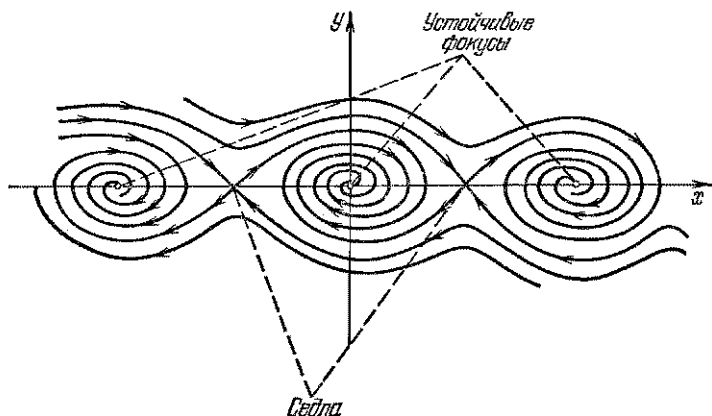


Рис. 2.6. Фазовый портрет маятника с затуханием.

характер уже существующих и исключает возможность появления новых точек типа центр в фазовых портретах диссипативных систем.

3. Наличие квадратичного трения при линейности консервативных параметров колебательной системы с одной степенью свободы приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x}^2 + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.2.13)$$

где $\delta > 0$ при $y > 0$, $\delta < 0$ при $y < 0$.

Этот случай соответствует электрическому колебательному контуру, содержащему постоянные самоиндукцию и емкость, а также сопротивление, величина которого пропорциональна протекающему по нему току.

Уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\delta y^2 + \omega_0^2 x}{y}. \quad (2.2.14)$$

Вводя замену $y^2 = z$, проинтегрируем это уравнение и тогда для фазовых траекторий получим уравнение

$$y^2 = \left[C \exp(-2\delta x) + \frac{\omega_0^2}{2\delta^2} \right] - \frac{\omega_0^2}{\delta} x, \quad (2.2.15)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая, как обычно, из начальных условий.

Величина δ скачкообразно меняется при прохождении значения y через нуль, и поэтому в данной задаче, как и для случая

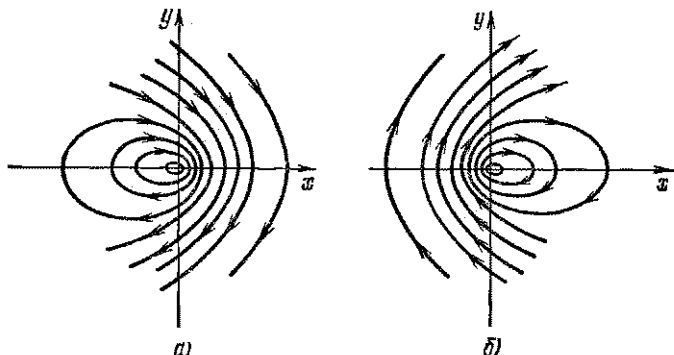


Рис. 2.7. Интегральные кривые системы с квадратичным трением для $\delta > 0$ (а) и для $\delta < 0$ (б).

сухого трения, надо рассматривать решения для $y > 0$ и $y < 0$ и строить отдельно фазовые траектории для верхней и нижней половин фазовой плоскости.

Для $\delta > 0$ интегральные кривые описываются уравнением

$$y^2 = \left[C \exp(-2\delta x) + \frac{\omega_0^2}{2\delta^2} \right] - \frac{\omega_0^2}{\delta} x. \quad (2.2.15a)$$

Кривые, построенные для различных C , имеют вид, показанный на рис. 2.7, а. Для $\delta < 0$

$$y^2 = \left[C \exp(2\delta x) + \frac{\omega_0^2}{2\delta^2} \right] + \frac{\omega_0^2}{\delta} x \quad (2.2.15b)$$

Рис. 2.8. Фазовый портрет системы с квадратичным трением.

и соответствующие кривые изображены на рис. 2.7, б. Так как $\delta > 0$ при $y > 0$, а $\delta < 0$ при $y < 0$, то для получения фазового портрета системы необходимо использовать верхнюю половину рис. 2.7, а и нижнюю половину рис. 2.7, б, которые в совокупности дадут фазовые траектории движения в исследуемой системе для всех возможных значений y . Этот фазовый портрет показан на рис. 2.8; из его рассмотрения мы опять можем сделать вывод о затухающем характере происходящих в системе колебательных движений, приводящих независимо от начального состояния

к устойчивой особой точке — состоянию покоя системы ($x=0$, $y=0$).

Ограничивая качественное рассмотрение свободных колебаний в линейных и нелинейных диссипативных системах разобранными примерами, отметим, что в более сложных случаях, особенно для нелинейных задач, целесообразно пользоваться методом изоклин, построение которых позволяет составить представление об основных чертах фазового портрета исследуемой системы и, тем самым, о характере совершаемых ею движений. При этом, как уже указывалось, в диссипативных системах мы должны получить независимо от начальных условий такие движения, которые приводят систему к устойчивой особой точке — состоянию покоя, т. е. к диссипации *всей* энергии, связанной с изучаемым движением.

§ 2.3. Построение фазовых траекторий свободных колебаний методом Льенара

Познакомимся с возможностью приближенного графического построения фазовых траекторий диссипативной системы с одной степенью свободы при помощи приема, развитого Льенаром. Этот метод предложен для случая, когда нелинейные свойства системы определяются исключительно законом зависимости силы трения (или сопротивления) от скорости (или силы тока), причем сама сила не зависит от величины независимой переменной (координата или заряд). В таком случае уравнение движения имеет вид

$$\dot{y} + \frac{1}{y} F(y) + \omega_0^2 x = 0; \quad (2.3.1)$$

здесь возвращающая сила линейно связана с отклонением — $f(x) = \omega_0^2 x$.

К уравнению аналогичного типа мы придем, рассматривая электрический контур с постоянными L и C и с сопротивлением, зависящим от тока. Уравнение Кирхгофа для подобного контура (рис. 2.9) можно записать в виде



Рис. 2.9. Схема электрического контура с $R(i)$.

$$L \frac{di}{dt} + u_R(i) + \frac{1}{C} q = 0; \quad (2.3.2)$$

так как $i = \dot{q}$, то, вводя $\omega_0^2 = 1/LC$, получим

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{L} u_R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.3.3)$$

Выберем соответствующий масштаб времени, т. е. введем безразмерное время

$$\tau = \omega_0 t. \quad (2.3.4)$$

Тогда в этом новом масштабе

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2},$$

уравнение движения может быть записано в виде

$$\ddot{q} + \psi(\dot{q}) + q = 0, \quad (2.3.5)$$

или

$$\dot{y} + \psi(y) + x = 0, \quad (2.3.6)$$

где $q = x$, $\dot{q} = y$. Отсюда получаем

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} y = -\psi(y) - x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\psi(y) + x}{y}. \quad (2.3.7)$$

Пусть нам задан вид функции $\psi(y)$, изображенной графически на рис. 2.10 (там же пунктиром показан вид этой функции для случая постоянного сопротивления). Рассмотрим плоскость переменных x, y — фазовую плоскость нашей задачи. Построим график зависимости $-\psi(y)$ от y . Для любой точки фазовой плоскости

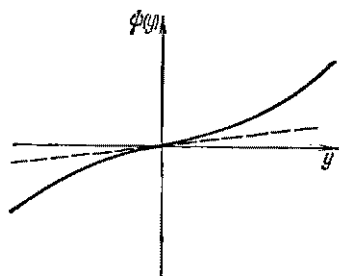


Рис. 2.10. График $\psi(y)$, т. е. э. д. с., возникающей на сопротивлении в приведенном масштабе.

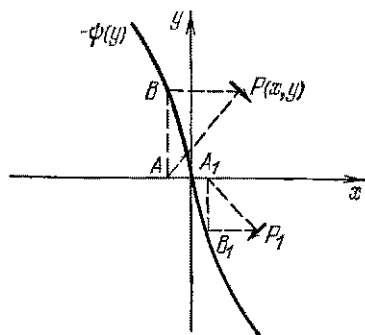


Рис. 2.11. Построение Льенара на фазовой плоскости.

$P(x, y)$ можно получить направление касательной к фазовой траектории, проводя перпендикуляр к прямой AP через точку $P(x, y)$ (рис. 2.11). Наклон этой касательной равен dy/dx , и так как $PB = \psi(y) + x$, $AB = y$, то выражение (2.3.7) показывает, что прямая AP перпендикулярна к касательной к фазовой траектории в точке $P(x, y)$.

Производя подобное построение для последовательности интересующих нас точек (начиная с точки, характеризующей исходное состояние системы) и образуя на плоскости x, y достаточно густую сетку (поле) направлений касательных к фазовым траекториям, нетрудно построить искомую фазовую траекторию с желаемой точностью.

При приближенном построении фазовой траектории по этому методу можно поступать следующим образом. Определим с помощью описанного построения направление фазовой траектории в исходной точке $P(x_0, y_0)$, соответствующей заданным начальным условиям (x_0, y_0) . Заменяя на небольшом интервале фазовую траекторию отрезком дуги окружности с центром в точке A и повторяя ту же операцию для конца этого отрезка дуги с новым мгновенным центром, определим новое направление касательной к траектории. Продолжив подобные операции необходимое число раз, получим ломаную кривую линию, с необходимой точностью воспроизводящую ход действительной фазовой траектории.

Для диссипативных систем, у которых знак $\psi(y)$ обязательно совпадает со знаком y , наклоны фазовых траекторий во всех точках фазовой плоскости таковы, что сами траектории проходят внутрь окружности, которую можно провести через данную точку с центром в начале координат. Это справедливо для любой формы функции $\psi(y)$, определяющей характер зависимости потерь от состояния системы, при условии, что система остается диссипативной. Такая окружность являлась бы фазовой траекторией нашей системы для $\psi(y) \equiv 0$, т. е. в отсутствие затухания. Эти соображения подтверждают заключение о том, что в случае диссипативной системы фазовые траектории соответствуют более или менее быстрому уменьшению амплитуды колебаний и имеют вид спиралей или сходных с ними кривых, стягивающихся в начало координат (состояние покоя).

Следует подчеркнуть, что в изложенном методе Льенара, учитывающем нелинейную зависимость силы трения от скорости (или обратной э. д. с. на сопротивлении от силы тока) нужно знать лишь ее графическое изображение, которое может быть получено и экспериментально. При этом построении, очевидно, нет никаких существенных ограничений на вид функции потерь $\psi(y)$ и ее мгновенное значение, так что данный метод с одинаковым успехом применим как к случаю малых, так и к случаю больших потерь, а также к системам с большой и малой нелинейностью в диссипативном элементе. Последнее обстоятельство придает методу Льенара большую общность и позволяет с его помощью изучать колебательные свойства систем при изменении затухания от малых до весьма больших значений и с учетом различных законов трения (как линейного, так и существенно нелинейных законов). Заметим, что метод Льенара широко используется для построений фазовых портретов автоколебательных систем с разными законами нелинейности, а именно для нахождения устойчивых предельных циклов — замкнутых фазовых траекторий.

С помощью небольшого усложнения методики Льенара представляется возможным производить также построение фазовых

траекторий для системы, в которой кроме потерь, зависящих произвольным, в том числе нелинейным, образом от скорости (силы тока), имеется еще и нелинейная жесткость (нелинейная емкость). Пусть мы имеем электрический колебательный контур с нелинейным сопротивлением и конденсатором с сегнетоэлектриком. Уравнение, описывающее колебания в подобной системе, имеет вид

$$\ddot{x} + \psi(\dot{x}) + \varphi(x) = 0, \quad (2.3.8)$$

где $x = q$ — заряд на конденсаторе. Время измеряется в новом масштабе $\tau = \omega_0 t$, где $\omega_0^2 = 1/LC_0$, а напряжение на емкости, возникающее при сообщении этой емкости заряда q , равно

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C_0} \varphi(q), \quad (2.3.9)$$

а $\psi(\dot{q})$ — по-прежнему функция, характеризующая силу трения.

В системе координат x и $y = \dot{x}$ построим функции $\varphi(x)$ и $-\psi(y)$ (рис. 2.12). Для произвольной точки $P(x, y)$ найдем соответствующее значение $\varphi(x)$ (точка B) и отложим его на оси абсцисс в направлении к началу координат от точки A до точки C , точки пересечения прямой BC с осью абсцисс под углом в 45° . Тогда отрезок AC будет равен отрезку AB и, следовательно, $\varphi(x)$. Соединив далее точку C с точкой E , проведем прямую FD , параллельную CE , и, тем самым, перенесем отрезок, равный $\psi(y)$, на ось абсцисс и прибавим его к отрезку AC , равному $\varphi(x)$. Отрезок AD будет равен $\varphi(x) + \psi(y)$. Тогда очевидно, что прямая DP будет перпендикулярна к касательной к фазовой траектории в точке $P(x, y)$, так как

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\psi(y) + \varphi(x)}{y} \quad (2.3.10)$$

Проводя подобное построение для интересующей нас последовательности точек, мы можем построить с требуемой точностью и саму фазовую траекторию, так же как и в предыдущем случае. Заметим, что это построение переходит в предыдущее для случая линейной емкости, когда $C = C_0$ и $\varphi(x) = x$.

В рассматриваемом случае нелинейной диссипативной системы при нелинейной емкости фазовые траектории не обязательно во всех точках направлены внутрь окружности, проходящей через данную точку, с центром в начале координат. Но это не лишает справедливости утверждения, что фазовые траектории для исследуемой системы при наличии потерь всегда направлены внутрь тех замкнутых фазовых траекторий, которые имели бы место для данной системы с данным видом нелинейности при исключении из нее потерь (при $\psi(y) \equiv 0$, т. е. для консервативного случая).

Окружности же с центром в начале координат просто перестают быть фазовыми траекториями для консервативной системы

при наличии в ней нелинейности. Это соответствует графическому воспроизведению на фазовой плоскости процесса, отличающегося от гармонического.

Приведенный выше способ приближенного построения фазовых траекторий остается в силе и для нелинейной системы без потерь. Можно также графически найти направление касательной к фазовой траектории в любой ее регулярной точке, если известен график функции $\varphi(x)$, характеризующей нелинейность

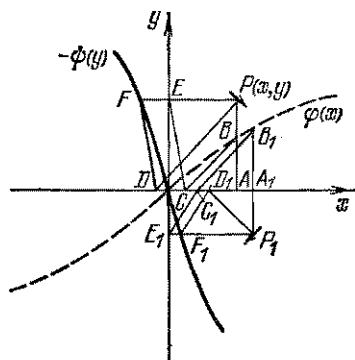


Рис. 2.12. Модифицированное построение Лье́нара в случае нелинейных R и C .

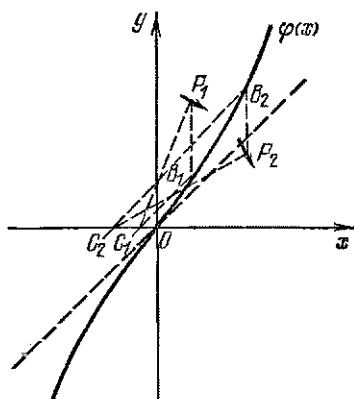


Рис. 2.13. Модифицированное построение Лье́нара для системы без потерь.

консервативного элемента в системе. В таком консервативном случае на фазовой плоскости надо построить в качестве вспомогательной кривую $\varphi(x)$ и, как указывалось выше, проведя из точки B линию под углом 45° к оси абсцисс B_1C_1 , найти точку C_1 (рис. 2.13). Линия C_1P_1 будет перпендикулярна к касательной к фазовой траектории в точке $P_1(x, y)$. Это по-прежнему следует из основного уравнения для такой системы

$$\ddot{x} + \varphi(x) = 0, \quad \text{или} \quad \dot{y} + \varphi(x) = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi(x)}{y}. \quad (2.3.11)$$

Проводя подобные построения указанным выше способом для последовательности точек, можно получить ломаную линию, которая сколь угодно близко будет воспроизводить искомую фазовую траекторию движения в нашей нелинейной консервативной системе.

§ 2.4. Исследование свободных колебаний в нелинейных диссипативных системах с одной степенью свободы методом поэтапного рассмотрения

Точное решение задачи о свободных колебаниях в нелинейных диссипативных системах в подавляющем большинстве случаев наталкивается на весьма большие и очень часто неразрешимые трудности. Поэтому (как и в случае консервативных систем) приходится искать методы приближенного расчета, которые с заданной степенью точности позволили бы найти количественные соотношения, определяющие движения в исследуемой системе при заданных начальных условиях. Из ряда возможных приближенных методов рассмотрим в первую очередь метод поэтапного рассмотрения. Мы уже указывали, что этот метод заключается в том, что в соответствии со свойствами системы все движение в ней заранее разбивается на ряд этапов, каждый из которых соответствует такой области изменения переменных, где исследуемая система с достаточной точностью описывается или линейным дифференциальным уравнением, или нелинейным, но заведомо интегрируемым уравнением. Записав решения для всех выбранных этапов, мы для заданных начальных условий находим уравнение движения для первого этапа, начинающегося с заданных начальных значений. Значения переменных $(t, x, y = \dot{x})$ конца первого этапа считаем начальными условиями для следующего этапа. Повторяя эту операцию продолжения решения от этапа к этапу со сшиванием поэтапных решений на основе условия непрерывности переменных x и $y = \dot{x}$, мы можем получить значения исследуемых величин в любой момент времени. Если разбиение всего движения системы на этапы основано на замене общей нелинейной характеристики ломаной линией с большим или меньшим числом прямолинейных участков, то подобный путь обычно называется кусочно-линейным методом. В этом случае на каждом этапе система описывается линейным дифференциальным уравнением. Условие сшивания решений на смежных этапах — непрерывность x и $y = \dot{x}$ — необходимо и достаточно для системы с одной степенью свободы при наличии в ней двух резервуаров энергии и двух форм запасенной энергии (потенциальной и кинетической, электрической и магнитной). Существование двух видов резервуаров энергии является также необходимым условием для возможности осуществления в системе свободных колебательных движений, хотя для диссипативных систем оно недостаточно. При большом затухании система и с двумя резервуарами энергии может оказаться неколебательной — аperiodической.

Применение метода поэтапного расчета нелинейных диссипативных систем мы проиллюстрируем несколькими примерами и начнем рассмотрение со случая системы с сухим трением, кото-

рая уже подвергалась качественному исследованию с помощью построения ее фазового портрета.

1. Уравнение, описывающее движение в колебательной системе с сухим трением, как мы уже видели, имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a,$$

где $a = -a_0$ при $\dot{x} > 0$ и $a = +a_0$ при $\dot{x} < 0$. Подстановками $x = x_1 - a_0/\omega_0^2$ для $\dot{x} > 0$ и $x = x_2 + a_0/\omega_0^2$ для $\dot{x} < 0$ получим уравнение, одинаковое и для x_1 , и для x_2

$$\ddot{x}_{1,2} + \omega_0^2 x_{1,2} = 0;$$

его решение

$$x_{1,2} = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (2.4.1)$$

Задаемся начальными условиями

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = 0. \quad (2.4.2)$$

Для первого этапа, соответствующего $\dot{x} = y < 0$, $0 \leq t \leq \pi/\omega_0$, имеем

$$x = A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t + a_0/\omega_0^2,$$

или с учетом начальных условий

$$x = (x_0 - a_0/\omega_0^2) \cos \omega_0 t + a_0/\omega_0^2. \quad (2.4.3)$$

В конце этапа $t = \pi/\omega_0$, $x_{\pi/\omega_0} = -x_0 + 2a_0/\omega_0^2$. Это значение x_{π/ω_0} следует считать начальным для второго этапа.

Второй этап соответствует $\dot{x} = y > 0$; $\pi/\omega_0 \leq t \leq 2\pi/\omega_0$. Так как при $t = \pi/\omega_0$, $x = -x_0 + 2a_0/\omega_0^2$, то

$$x = (x_0 - 3a_0/\omega_0^2) \cos \omega_0 t - a_0/\omega_0^2. \quad (2.4.4)$$

К концу этого этапа при $t = 2\pi/\omega_0$ получаем $x_{2\pi/\omega_0} = x_0 - 4a_0/\omega_0^2$. Для рассмотрения второго периода колебаний надо продолжить рассмотрение по этапам.

Третий этап соответствует $\dot{x} = y < 0$, $2\pi/\omega_0 \leq t \leq 3\pi/\omega_0$ и

$$x = A_3 \cos \omega_0 t + B_3 \sin \omega_0 t + a_0/\omega_0^2.$$

Для $t = 2\pi/\omega_0$, $x = x_0 - 4a_0/\omega_0^2$, $y = 0$ имеем

$$x = (x_0 - 5a_0/\omega_0^2) \cos \omega_0 t + a_0/\omega_0^2. \quad (2.4.5)$$

К концу этапа при $t = 3\pi/\omega_0$ получаем $x_{3\pi/\omega_0} = -x_0 + 6a_0/\omega_0^2$. Аналогично для следующего этапа при $y > 0$ и $3\pi/\omega_0 \leq t \leq 4\pi/\omega_0$ находим

$$x = (x_0 - 7a_0/\omega_0^2) \cos \omega_0 t - a_0/\omega_0^2, \quad (2.4.6)$$

и в конце этапа $x_{4\pi/\omega_0} = x_0 - 8a_0/\omega_0^2$.

Полученное решение представлено графически в координатах t, x на рис. 2.14.

В соответствии с основными особенностями системы с сухим трением подобные расчеты имеют смысл лишь до тех пор, пока при $y=0$ $|x| > a_0/\omega_0^2$, т. е. пока система не пришла в зону застоя. Если в момент наибольшего отклонения возвращающая сила окажется меньше силы трения, то система не будет продолжать свое движение и останется в зоне застоя. За каждый период колебания амплитуда уменьшается на величину $4a_0/\omega_0^2$. Таким образом, через n целых периодов отклонение будет равно

$$|x| = x_0 - 4na_0/\omega_0^2. \quad (2.4.7)$$

Отсюда следует, что система совершит только конечное число колебаний, определяемое из условия $0 < x_0 - 4na_0/\omega_0^2 < a_0/\omega_0^2$. Из этого условия вытекает, что n удовлетворяет неравенству

$$\frac{x_0}{4a_0/\omega_0^2} > n > \frac{x_0}{4a_0/\omega_0^2} - 1/4. \quad (2.4.8)$$

2. В качестве другого примера поэтапного рассмотрения сильно нелинейной колебательной системы обратимся к движениям, которые могут происходить в контуре, состоящем из емкости, сопротивления и индуктивности с легко насыщаемым ферромагнитным сердечником. Для

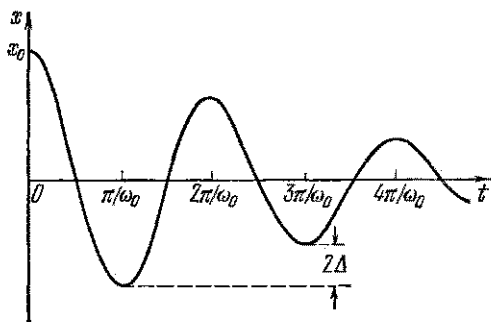


Рис. 2.14. График движения в системе с сухим трением, полученный методом поэтапного рассмотрения.

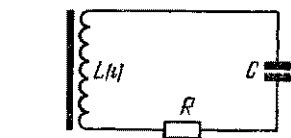


Рис. 2.15. Схема контура, содержащего индуктивность с ферромагнитным сердечником.

такого контура, изображенного на рис. 2.15, уравнение Кирхгофа запишем в виде

$$n \frac{d\Phi}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = 0. \quad (2.4.9)$$

Здесь Φ — магнитный поток, пронизывающий n витков обмотки. Запишем это уравнение иначе:

$$n \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = 0. \quad (2.4.10)$$

Примем, что кривая намагничивания сердечника имеет идеализированный вид, показанный на рис. 2.16. Тогда, пренебрегая изменением магнитного потока при насыщении сердечника (что допу-

стимо при малом числе витков обмотки и высокой магнитной проницаемости сердечника достаточно большого сечения), мы можем считать, что зависимость Φ от тока изображается графиком, приведенным на рис. 2.17. Подобная идеализация позволяет нам

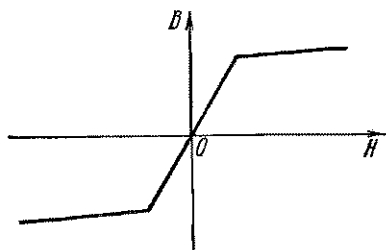


Рис. 2.16. Идеализированная кривая намагничивания сердечника.

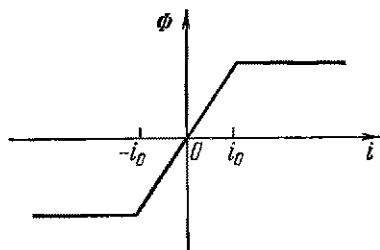


Рис. 2.17. Идеализированная кривая зависимости магнитного потока Φ от тока i с полным насыщением.

разбить процессы в системе на этапы, в которых $|i| \leq i_0$ или $|i| \geq i_0$. Для $|i| \leq i_0$ справедливо уравнение

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0, \quad (2.4.11)$$

где $L = n \frac{d\Phi}{di}$.

Для $|i| \geq i_0$ получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (2.4.12)$$

Более строгое рассмотрение с учетом изменения Φ в областях насыщения магнитного поля привело бы нас к уравнению с малым параметром λ типа

$$\lambda \ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (2.4.13)$$

Решение этого уравнения для малого λ , взятое для достаточно большого интервала времени, близко к решению написанного выше уравнения первого порядка.

Рассмотрим теперь движения в исследуемой системе для заданных начальных условий. Пусть при $t=0$, $q=q_0$ и $\dot{q}=i=0$. Тогда в качестве первого этапа необходимо рассматривать процесс при $|i| < i_0$, и мы получим

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (2.4.14)$$

где $2\delta = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$q = e^{-\delta t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t], \quad (2.4.15)$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Из начальных условий находим

$$q = e^{-\delta t} \left[q_0 \cos \omega t + \frac{\delta q_0}{\omega} \sin \omega t \right], \quad i = \dot{q} = -\frac{\omega_0^2}{\omega} q_0 e^{-\delta t} \sin \omega t. \quad (2.4.16)$$

Если начальный заряд q_0 достаточно велик и через время $t_1 < \pi/2\omega$ значение $i = \dot{q}$ стало равным $-i_0$, то процесс переходит из первого этапа во второй. Конечные значения q и $i = \dot{q}$ в момент времени t_1 равны

$$q_{t_1} = e^{-\delta t_1} \left[\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t_1 \right]; \quad i_{t_1} = -i_0 = -\frac{\omega_0^2}{\omega} q e^{-\delta t_1} \sin \omega t_1.$$

Решение идеализированного уравнения второго этапа имеет вид

$$q = D e^{-t/\tau}, \quad i = \dot{q} = -\frac{D}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad (2.4.17)$$

где D — начальная амплитуда заряда, $\tau = RC$ — постоянная времени. Отсюда вытекает однозначная связь между q и i , даваемая соотношением $i = -(1/\tau) q$.

Это условие может оказаться в противоречии с полученными нами значениями q_{t_1} и $-i_0$, явившимися результатом движения системы от исходного состояния $q = q_0$, $i = 0$ к границе первого этапа. Значения q_{t_1} и $-i_0$ должны служить начальными условиями для движения во время второго этапа. Однако здесь получается одно лишнее начальное условие, так как для определения исходного движения записанное нами идеализированное уравнение первого порядка требует только одного начального условия. Этот «конфликт» между идеализированным законом движения системы и начальными условиями требует введения дополнительных условий, если мы хотим остаться в рамках сделанной идеализации ($\Phi = \text{const}$ при $|i| > i_0$) и не хотим исследовать решений уравнения (2.4.13), т. е. уравнения второго порядка.

Таким дополнительным условием является *допущение бесконечно быстрого изменения той переменной*, изменение которой не связано с изменением запаса энергии системы.

В нашей задаче в рамках второго этапа возможно произвольное мгновенное изменение $i = \dot{q}$ до значений, определяемых выражением (2.4.16), так как при постоянстве Φ изменение i не связано с изменением магнитной энергии системы. Величина же q определяет электрическую энергию заряженного конденсатора и ее скачкообразное изменение означало бы расход или потребление бесконечной мощности, что физически бессмысленно.

Естественно, в реальной системе не может быть бесконечно быстрого изменения тока, но весьма слабая зависимость магнит-

ного потока от величины тока при $|i| > i_0$ эквивалентна исчезающе малому значению коэффициента самоиндукции, и в подобной системе вполне допустимы очень быстрые изменения силы тока. Таким образом, в нашей идеализированной системе, вырожденной по отношению к полной системе с двумя резервуарами энергии, мы вводим скачок i , ликвидирующий «конфликт» между возможными движениями системы и заданными начальными условиями и приводящий значение i от значения $-i_0$ к величине $i_{t_1} = -q_{t_1}/\tau$. При этом q не претерпевает разрывов непрерывности, так как на всех этапах движения величина q определяет запас электростатической энергии $N_E = q^2/2C$.

Дальнейший процесс в системе будет протекать в соответствии с решением уравнения второго этапа. Величина заряда будет изменяться по закону $q = q_{t_1} \exp[-(t-t_1)/\tau]$, а ток — согласно выражению $i = -(q_{t_1}/\tau) \exp[-(t-t_1)/\tau]$. Этот экспоненциальный процесс будет продолжаться до тех пор, пока значение i не станет вновь равным $-i_0$.

Если в момент времени $t = t_2$ мы приходим к концу второго этапа, то

$$i_{t_2} = -i_0 = -(q_{t_1}/\tau) \exp[-(t_2-t_1)/\tau],$$

$$q_{t_2} = q_{t_1} \exp[-(t_2-t_1)/\tau] = \tau i_0,$$

откуда можно определить t_2 .

С этого момента начнется движение, отвечающее этапу изменения Φ , и для третьего этапа мы вновь должны воспользоваться решением вида

$$q = \exp[-\delta(t-t_2)][A \cos \omega(t-t_2) + B \sin \omega(t-t_2)], \quad (2.4.18)$$

причем A и B находят обычным способом.

Как нетрудно показать, указанные значения q_{t_2} и $i_{t_2} = -i_0$ соответствуют экстремуму функции

$$\dot{q} = -\exp[-\delta(t-t_2)][(B\omega - \delta A) \cos \omega(t-t_2) - (A\omega + \delta B) \sin \omega(t-t_2)]. \quad (2.4.19)$$

Вследствие потерь дальнейшее движение уже не будет выводить значения i за пределы $\pm i_0$, и вплоть до полного затухания движение в системе будет описываться уравнением (2.4.14) и его решением (2.4.15) с определенными обычным образом коэффициентами.

Для начала этого третьего (и последнего) этапа при $t = t_2$ получаем

$$q = q_{t_2} = A_{t_2}, \quad \dot{q} = i_{t_2} = i_0 = B_{t_2} \omega - \delta A_{t_2},$$

откуда

$$B_{t_2} = \frac{\delta}{\omega} A_{t_2} + \frac{i_0}{\omega} = \frac{\delta}{\omega} q_{t_2} + \frac{i_0}{\omega}.$$

Таким образом, окончательные выражения для q и i для третьего этапа будут иметь вид

$$\begin{aligned} q &= \exp[-\delta(t-t_2)] \times \\ &\quad \times \left[q_{t_2} \cos \omega(t-t_2) + \frac{1}{\omega} (\delta q_{t_2} + i_0) \sin \omega(t-t_2) \right], \\ i &= \exp[-\delta(t-t_2)] \times \\ &\quad \times \left[i_0 \cos \omega(t-t_2) + \frac{1}{\omega} (\omega_0^2 q_{t_2} + \delta i_0) \sin \omega(t-t_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Так как, согласно закону изменения q , во втором этапе $q_{t_2} = \tau i_0$, то окончательно для третьего этапа мы можем записать выражения

$$\begin{aligned} q &= i_0 \exp[-\delta(t-t_2)] \left[\tau \cos \omega(t-t_2) + \frac{1}{\omega} (\delta \tau + 1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \omega(t-t_2) \right], \\ i &= i_0 \exp[-\delta(t-t_2)] \left[\cos \omega(t-t_2) + \frac{1}{\omega} (\omega_0^2 \tau + \delta) \sin \omega(t-t_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Этот затухающий процесс имеет один и тот же характер при любых начальных значениях q_0 . Каков бы ни был начальный заряд емкости, система после апериодического процесса в области $\Phi = \text{const}$ придет к затухающему движению в области $|i| \leq i_0$ с одними и теми же значениями q и i , т. е. $q = \tau i_0$, $i = -i_0$.

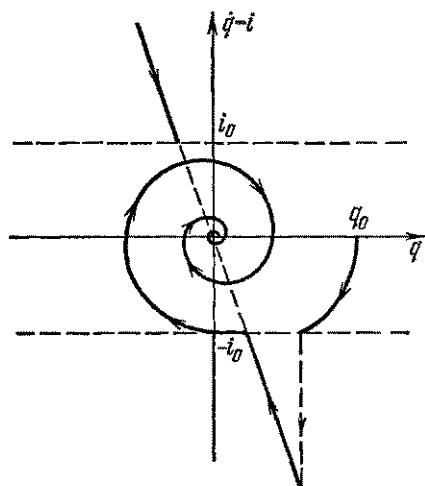


Рис. 2.18. Фазовая траектория движения в контуре с насыщающимся сердечником.

Рассмотренный процесс будет соответствовать фазовой траектории на фазовой плоскости q , $\dot{q} = i$, показанной на рис. 2.18. Все другие фазовые траектории, отвечающие другим начальным условиям, должны иметь тот же характер, что и на рис. 2.18. В областях $|i| > i_0$ принятая идеализация допускает только одно движение, соответствующее единственной фазовой траектории $i = -q/\tau$. Из любой другой точки фазовой плоскости в этих областях система должна скачком с бесконечно быстрыми изме-

нениями i перейти или на границу области с дальнейшим движением по одной из спиралей, или на единственную траекторию, соответствующую экспоненциальному разряду емкости.

Если построить графики изменения q и i в функции времени, то для выбранных нами начальных условий они будут иметь вид, показанный на рис. 2.19. и 2.20.

При других начальных условиях может появиться и два скачка (например, если в начальный момент $t=0$, $q=q_0$ и $i > i_0$); тогда сразу же движение начнется с первого скачка тока до величины i_0 , а затем после прохождения по первому этапу произойдет второй

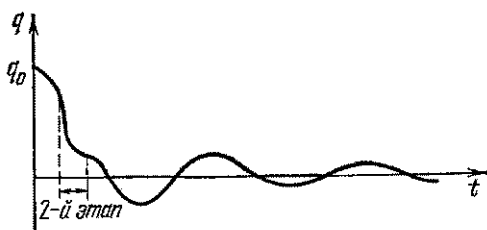


Рис. 2.19. График изменения q в функции времени для колебательного контура с насыщающимся сердечником.

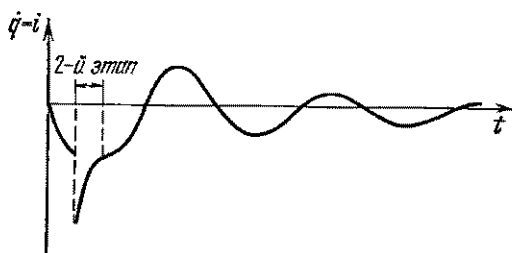


Рис. 2.20. График изменения i в функции времени для колебательного контура с насыщающимся сердечником.

скачок, приводящий систему в режим аperiodического разряда емкости, как наблюдалось в разобранным примере.

Учет слабого изменения Φ в областях насыщения и, следовательно, рассмотрение уравнения второго порядка во всех этапах процесса избавляет от необходимости допускать скачки и дает возможность найти непрерывное решение задачи для всех возможных значений q и i . Но такое уточнение связано с большими трудностями и не дает интересующих нас принципиально новых качественных результатов, так что для общего рассмотрения хода процесса свободных колебаний в изучаемой системе сделанная идеализация вполне оправдана. Если же нас будет интересовать сама форма быстрого процесса перехода от одного типа движения к другому, тогда, конечно, необходим более последовательный и строгий анализ. При этом следует иметь в виду, что

изучение более тонких деталей схематически рассмотренных процессов требует также использования более точной аппроксимации реальных кривых намагничивания.

В действительности нет скачкообразных изменений хода кривых намагничивания, а магнитные свойства сердечников могут изменяться лишь непрерывно, хотя и достаточно быстро в определенные фазы процесса.

3. Разберем еще один пример колебаний в диссипативной системе посредством поэтапного рассмотрения. Проанализируем колебания в уже описанном электрическом колебательном контуре с катушкой индуктивности, содержащей ферромагнитный сердечник, но в отличие от ранее принятой идеализации не будем вводить в рассмотрение насыщение, а учтем наличие нестационарной петли в кривой намагничивания. Будем считать, что петли гистерезиса можно приближенно представлять так, как показано на рис. 2.21 для разных амплитуд периодически изменяющегося H .

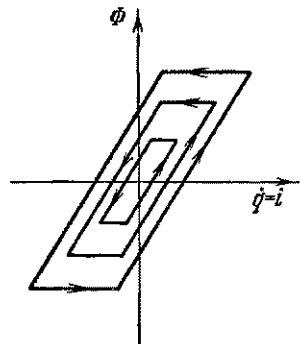


Рис. 2.21. Идеализированные кривые гистерезиса.

Уравнение колебаний в контуре (см. рис. 2.15) имеет вид

$$n \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0, \text{ где } q = \int i dt; \quad (2.4.22)$$

как и раньше, Φ — полный магнитный поток, пронизывающий все n витков обмотки катушки.

Рассматривая движение по этапам, получаем следующие уравнения.

Для этапов, где $n \frac{d\Phi}{di} = L$, имеем

$$\ddot{q} + 2\theta \dot{q} + q = 0; \quad (2.4.23)$$

здесь q — заряд на емкости, в качестве масштаба времени взято $\tau = \omega_0 t$ ($\omega_0^2 = 1/LC$), $2\theta = R/\omega_0 L$.

Для этапов, где $\Phi = \text{const}$, находим

$$\dot{q} = -\frac{1}{R\omega_0 C} q. \quad (2.4.24)$$

Рассмотрим сначала этап возрастания i и $\Phi(i)$ от начальных условий $q_{\tau=0} = -q_0$, $\dot{q}_{\tau=0} = 0$ до максимального значения $\dot{q}$ (и соответственно Φ); потом проанализируем процесс, описываемый уравнением (2.4.24), далее возьмем этап убывания $\Phi(i)$, когда вновь вступает в силу уравнение (2.4.23), вплоть до достижения наи-

большого отрицательного значения $i = i_3$ и $\Phi(i_3)$. Затем опять следует этап постоянства Φ и, начиная от значения $i = i_4$, движение описывается уравнением (2.4.24) вплоть до наступления нового возрастания $\Phi(i)$.

При этом происходит постепенный переход от одной петли гистерезиса к другой, соответствующей меньшим значениям тока и магнитного потока. Строго говоря, здесь происходит некоторое отклонение хода зависимости $\Phi(i)$ от выбранного нами идеализированного закона, но при не слишком широкой петле гистерезиса оно достаточно мало, и учет поправки при данном приближенном рассмотрении не представляется оправданным.

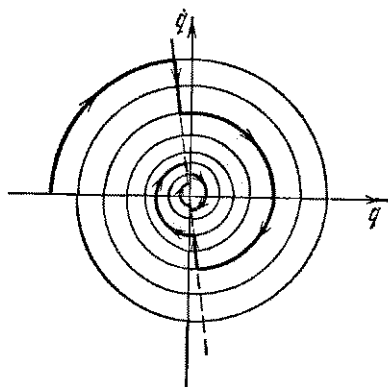


Рис. 2.22. Фазовый портрет колебательной системы с потерями и сердечником, обладающим гистерезисом.

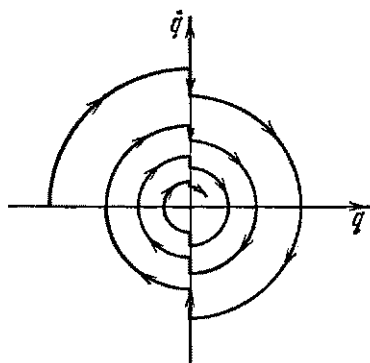


Рис. 2.23. Фазовый портрет идеального контура без потерь с индуктивностью и сердечником, обладающим гистерезисом.

Повторяя последовательно подобное исследование по этапам, можно получить выражение для изменения q и $\dot{q}$ во времени. На фазовой плоскости соответствующий фазовый портрет системы имеет вид, изображенный на рис. 2.22. Фазовые траектории будут представлять отрезки спиралей, соединенные отрезками прямой $\dot{q} = -q/\omega_0 RC$ в точках $i = \dot{q}$, соответствующих началам и концам этапов $\Phi = \text{const}$. Таким образом, мы видим, что при учете гистерезисных явлений должно происходить более быстрое уменьшение амплитуды свободных колебаний исследуемого контура. Это обусловлено тем, что существование гистерезисной петли приводит к потерям в материале сердечника за счет работы на его перемагничивание, вызванным взаимодействием элементарных областей намагничивания с остальной массой вещества сердечника, и в конечном счете — к переходу магнитной энергии в тепловую за счет работы, расходуемой на переориентацию указанных областей, или доменов.

По этой причине наличие ферромагнитного сердечника с гистерезисными свойствами в индуктивности колебательного контура даже при отсутствии в нем активного сопротивления приводит к появлению потерь, и такая система оказывается принципиально диссипативной.

На рис. 2.23 показан фазовый портрет подобного идеального контура, не обладающего активным сопротивлением, но содержащего индуктивность с сердечником, имеющим гистерезисные свойства. Здесь фазовая траектория составляется из полуокружностей, радиус которых уменьшается в зависимости от ширины петель гистерезиса. В этом процессе этап движения, соответствующий $\Phi = \text{const}$, происходит мгновенно, что связано с отсутствием в изучаемом контуре активного сопротивления, которое ограничивало бы скорость изменения $\dot{q}$.

§ 2.5. Метод медленно меняющихся амплитуд и его применение к расчету колебаний в слабо нелинейных системах с малым затуханием

Изложенный в предыдущем параграфе метод поэтапного рассмотрения, как указывалось, не накладывает никаких ограничений на нелинейность исследуемой колебательной системы и пригоден для любых законов затухания. Однако этот метод обычно приводит к громоздким вычислениям или сложным графическим построениям, причем полученные результаты относятся только к одному виду движения при заданных начальных условиях и не позволяют наглядно представлять общие особенности движений системы при различных условиях и разных значениях ее параметров. Поэтому весьма важно рассмотреть те приближенные методы, которые хотя бы для ограниченного класса колебательных систем могли бы дать единое решение для любого момента колебательного процесса при произвольных начальных условиях. Такого рода приближенный метод был в свое время предложен Ван дер Полем и получил в дальнейшем название *метода медленно меняющихся амплитуд*. Он позволяет весьма успешно исследовать класс колебательных систем с малой нелинейностью и малым затуханием. Электрические контуры с ферромагнитным сердечником при малых потерях на гистерезис в области значений амплитуд магнитного поля, далеких от насыщения, контуры с нелинейными емкостями при аналогичных ограничениях, линейные контуры с постоянными L и C при малых затуханиях (независимо от их линейности или нелинейности), многочисленные механические аналоги указанных выше высокочастотных линейных и нелинейных систем составляют тот класс систем, в которых движения можно приближенно рассчитывать методом медленно меняющихся амплитуд. Условия малой нелинейности подобных систем

и малого затухания в силу непрерывности изменения свойств системы и решения описывающего ее дифференциального уравнения приводят к тому, что движение в данном случае будет близко к точно гармоническому, соответствующему линейной консервативной системе.

Для линейной консервативной системы с одной степенью свободы уравнение, описывающее колебания в ней при соответственно выбранном масштабе времени, нам уже известно: $\ddot{x} + x = 0$. В этом случае масштаб времени τ определяется соотношением $\tau = \omega_0 t$, где ω_0 — круговая частота свободных колебаний системы, t — обычное время.

Для системы, близкой к линейной консервативной,

$$\ddot{x} + x = f_*(x, \dot{x}), \quad (2.5.1)$$

где $f_*(x, \dot{x})$ — произвольная регулярная в общем случае нелинейная функция координаты x и скорости ее изменения, значения которой остаются малыми по сравнению со значениями членов, стоящих в левой части уравнения (2.5.1) (в силу слабой нелинейности параметров и малых потерь в системе).

Если соответствующим выбором масштаба координаты x рассматривать такие изменения переменной x , при которых она порядка 1, то правая часть уравнения (2.5.1) будет мала по сравнению с единицей. Поэтому это уравнение целесообразно записать в виде

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (2.5.2)$$

где $f(x, \dot{x})$ — заданная ограниченная регулярная функция, не связанная условиями малости, а μ — малый параметр ($\mu \ll 1$), величина которого характеризует степень близости данной системы к линейной консервативной. Исследуемая система переходит в последнюю при $\mu \rightarrow 0$. При $\mu = 0$ решением уравнения (2.5.2) будет $x = a \cos \tau + b \sin \tau$, где a и b — постоянные, задаваемые начальными условиями, т. е. начальным запасом колебательной энергии в системе.

Следуя Ван дер Полю, считаем, что для $\mu \neq 0$, но $\mu \ll 1$ решение может быть записано в виде

$$x = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad (2.5.3)$$

где $u(\tau)$ и $v(\tau)$ — медленно меняющиеся функции (медленно меняющиеся амплитуды)*), так что $\dot{u} \ll u$ и $\dot{v} \ll v$. Перейдем от переменных x и $\dot{x}$ к переменным u и v посредством соотношений

$$x = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad \dot{x} = -u \sin \tau + v \cos \tau, \quad (2.5.4)$$

*) В дальнейшем изложении метода медленно меняющихся амплитуд (ММА) мы будем следовать Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси, которые в своей работе (ЖЭТФ 4, 1934) впервые дали математическое обоснование метода ММА и областей его применимости.

что эквивалентно введению дополнительного условия, связывающего $\dot{u}$ и $\dot{v}$:

$$\dot{u} \cos \tau + \dot{v} \sin \tau = 0. \quad (2.5.5)$$

Используя (2.5.4) и (2.5.5), можно от уравнения (2.5.2) перейти к системе

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\mu f(u \cos \tau + v \sin \tau; -u \sin \tau + v \cos \tau) \sin \tau, \\ \dot{v} &= \mu f(u \cos \tau + v \sin \tau; -u \sin \tau + v \cos \tau) \cos \tau. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Эта система двух уравнений первого порядка точно соответствует исходному уравнению (2.5.2) второго порядка. Она не дает никаких преимуществ в смысле упрощения решения задачи. Однако из этой системы следует, что производные $\dot{u}$ и $\dot{v}$ имеют порядок малости $\mu \ll 1$, что подтверждает справедливость выбранных условий $\dot{u} \ll u$, $\dot{v} \ll v$. Существенный шаг в сторону нахождения приближенного решения можно сделать, если заменить мгновенное значение u и v их средними величинами за каждый период колебательного процесса, равный 2π . Производя усреднение по периоду от 0 до 2π , мы приходим к системе так называемых «укороченных» уравнений

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(u, v, \tau) \sin \tau d\tau, \quad \dot{v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(u, v, \tau) \cos \tau d\tau. \quad (2.5.7)$$

Эта система вида

$$\dot{u} = \varphi(u, v), \quad \dot{v} = \psi(u, v) \quad (2.5.8)$$

уже не содержит в правых частях в явном виде времени τ и во многих случаях ее можно проинтегрировать, получая временной ход медленно меняющихся функций $u(\tau)$ и $v(\tau)$, являющихся «амплитудами» искомого решения.

Систему уравнений (2.5.8) можно получить из системы (2.5.6), если правые ее части разложить в ряд Фурье как периодические функции с периодом 2π и отбросить все осциллирующие члены. В этом отбрасывании осциллирующих членов и заключается «укорочение», приводящее от системы уравнений, точно соответствующей исходному уравнению, к приближенным укороченным уравнениям.

Переход от переменных $x, \dot{x}$ к переменным u, v эквивалентен переходу от одной декартовой системы координат $x, \dot{x}$ к другой, также прямоугольной с общим началом координат, повернутой на угол τ по часовой стрелке (рис. 2.24). Это означает, что система координат u, v в координатной плоскости $x, \dot{x}$ вращается с угловой частотой, равной единице. Поэтому в случае линейной консервативной системы изображающая точка P описывает окружность в фазовой плоскости координат $x, \dot{x}$, вращаясь с перио-

дом 2π , а в плоскости переменных u, v остается неподвижной. Это соответствует гармоническому колебанию с амплитудой $A = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Полученная система укороченных уравнений позволяет отыскивать состояния равновесия для переменных u и v , что соответствует стационарным движениям.

Для стационарных движений (состояний) $u = a_1, v = b_1, \dot{u} = \dot{v} = 0$, и тогда

$$\varphi(a_1, b_1) = 0, \quad \psi(a_1, b_1) = 0, \quad (2.5.9)$$

так как $\dot{u} = \dot{v} = 0$.

Решения системы (2.5.9) должны дать возможные стационарные амплитуды гармонических движений, приближенно отражающих реальный стационарный процесс.

Устойчивость стационарных движений можно определить известным методом возмущений, заключающимся в составлении уравнений для малых вариаций вокруг найденных стационарных значений $u = a_1, v = b_1$, соответствующих равновесию вспомогательной системы, описываемой укороченными уравнениями.

Если задать $u = a_1 + \eta, v = b_1 + \zeta$, то для вариаций η и ζ имеем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \varphi(a_1 + \eta; b_1 + \zeta), \\ \dot{\zeta} &= \psi(a_1 + \eta; b_1 + \zeta). \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Разлагая правые части этой системы в ряд в окрестности стационарных значений a_1, b_1 и пренебрегая степенями малых величин η и ζ выше первой, получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha_{11}\eta + \alpha_{12}\zeta, \\ \dot{\zeta} &= \alpha_{21}\eta + \alpha_{22}\zeta. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Вводя зависимость вариаций от времени $\eta = \eta_0 e^{\lambda t}$ и $\zeta = \zeta_0 e^{\lambda t}$ и подставляя эти выражения в (2.5.11), находим два линейных уравнения для амплитуд вариаций η_0 и ζ_0

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - \lambda)\eta_0 + \alpha_{12}\zeta_0 &= 0, \\ \alpha_{21}\eta_0 + (\alpha_{22} - \lambda)\zeta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Как обычно, поведение вариаций будет определяться характером решений характеристического уравнения, которое получается из условия нетривиальности решения системы (2.5.12)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.5.13)$$

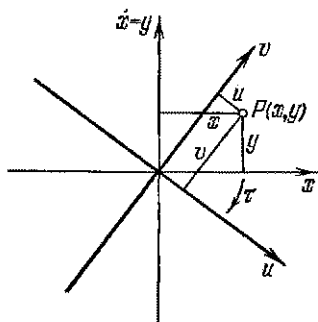


Рис. 2.24. Системы координат $x, \dot{x}$ и u, v .

Отсюда $\lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$ и

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}}. \quad (2.5.14)$$

Если оба корня имеют знак минус у вещественной части λ , то соответствующее стационарное решение ($u = a_1$, $v = b_1$) устойчиво. Если хотя бы одно из значений λ имеет знак плюс у вещественной части, то исследуемое решение неустойчиво. Наличие или отсутствие мнимой части в λ определяет характер устойчивости или неустойчивости стационарного решения.

Мы не будем сейчас углубляться в детали вопроса об исследовании устойчивости стационарных движений, а вернемся к нему позднее при рассмотрении параметрических и активных систем, в которых возможны различные типы стационарных движений. Для диссипативных же систем ясно, что может существовать лишь одно стационарное состояние — состояние покоя, которое всегда устойчиво.

Рассмотрим теперь другой вариант метода медленно меняющихся амплитуд с переходом от исходных координат x и $\dot{x}$ к новым переменным — амплитуде A и фазе θ , которые также являются медленными переменными в масштабе времени τ .

Очевидно, что $u = A \cos \theta$; $v = -A \sin \theta$ и $A^2 = u^2 + v^2$; $\operatorname{tg} \theta = -v/u$, где u и v — медленно меняющиеся амплитуды. A и θ представляют собой соответственно полярные координаты описывающей точки на плоскости переменных u и v . Поскольку переменные u и v — медленные функции времени τ , то и амплитуда A , и фаза θ также медленно меняются со временем τ .

Будем теперь искать решение исходного уравнения (2.5.2) в виде

$$x = A \cos[\tau + \theta(\tau)]. \quad (2.5.15)$$

Введем замену переменной $\dot{x}$:

$$\dot{x} = -A \sin[\tau + \theta(\tau)]. \quad (2.5.16)$$

Следует обратить внимание на то, что последнее выражение для $\dot{x}$ не есть результат дифференцирования x по времени τ , ибо производная x по τ имеет вид

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(\tau + \theta) - A \sin(\tau + \theta) - A \sin(\tau + \theta) \cdot \dot{\theta}.$$

Из (2.5.15) и (2.5.16) следует условие

$$\dot{A} \cos(\tau + \theta) - A \dot{\theta} \sin(\tau + \theta) = 0. \quad (2.5.17)$$

Если переменную $\dot{x}$ продифференцировать по времени τ и подставить x , $\dot{x}$ и $\ddot{x}$, выраженные в новых переменных A и θ , в исходное дифференциальное уравнение (2.5.2), то с учетом (2.5.17)

получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{A} \sin(\tau + \theta) + A\dot{\theta} \cos(\tau + \theta) &= -\mu f(A, \theta, \tau), \\ \dot{A} \cos(\tau + \theta) - A\dot{\theta} \sin(\tau + \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Отсюда находим точную систему дифференциальных уравнений, описывающих процессы в системе,

$$\dot{A} = -\mu f(A, \theta, \tau) \sin(\tau + \theta), \quad A\dot{\theta} = -\mu f(A, \theta, \tau) \cos(\tau + \theta). \quad (2.5.19)$$

Здесь $A(\tau)$ и $\theta(\tau)$ являются медленными функциями времени τ , что позволяет усреднить правые части (2.5.19) за период, считая, что за это время A и θ не меняются. Указанная процедура усреднения приводит к системе двух укороченных уравнений вида

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(A, \theta, \tau) \sin \tau_1 d\tau_1, \quad A\dot{\theta} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(A, \theta, \tau) \cos \tau_1 d\tau_1, \quad (2.5.20)$$

где $\tau_1 = \tau + \theta$.

Из системы укороченных уравнений (2.5.20) можно определить стационарные значения амплитуды и фазы колебаний в конкретной системе, исследовать процессы установления (переходные процессы) этих величин, а также определить устойчивость найденных решений.

Применение такого варианта метода медленно меняющихся амплитуд иногда упрощает нахождение стационарных решений, особенно в задачах, где отсутствует опорное колебание (вызванное, например, внешней силой, модуляцией параметра, синхронизирующим сигналом), фазовый сдвиг (фаза) которого относительно искомого колебания естественно вошел бы в решение. К подобным системам относятся, в частности, пассивные линейные и нелинейные колебательные системы, автоколебательные системы и др. Некоторое облегчение решения задач этот вариант метода ММА дает также в тех случаях, когда нелинейные характеристики каких-либо параметров колебательной системы аппроксимируются высокими степенями разложения в ряд.

Проиллюстрируем теперь метод медленно меняющихся амплитуд примерами его применения к расчету колебаний в простейших системах.

Линейный контур с постоянным затуханием (линейный осциллятор с затуханием). Эта задача легко решается прямым интегрированием дифференциального уравнения (2.2.6), но для иллюстрации метода сделаем соответствующие расчеты для свободных колебаний методом медленно меняющихся амплитуд.

Колебания в рассматриваемом контуре описываются уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Если положить $\tau = \omega_0 t$, то $\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}$ и $\ddot{x} + 2\vartheta \dot{x} + x = 0$, где $2\vartheta = 2\delta/\omega_0$. Тогда можно записать, что $\ddot{x} + x = -2\vartheta \dot{x}$, т. е. $\mu f(x, \dot{x}) = -2\vartheta \dot{x}$. Условием применимости метода ММА в данной задаче будет требование $\vartheta = \mu \ll 1$.

Применим вариант метода с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Укороченные уравнения для исследуемого линейного осциллятора с трением будут

$$A = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\vartheta A \sin^2 \tau_1 d\tau_1,$$

$$A\vartheta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\vartheta A \sin \tau_1 \cos \tau_1 d\tau_1,$$

где $\tau_1 = \tau + \vartheta$. Отсюда

$$\dot{A} = -\vartheta A, \quad A\dot{\vartheta} = 0.$$

Эти укороченные уравнения легко интегрируются, и мы получаем

$$A = A_0 e^{-\vartheta \tau}, \quad \vartheta = \vartheta_0,$$

откуда

$$x = A_0 e^{-\vartheta \tau} \cos(\tau + \vartheta_0).$$

Заметим, что найденное приближенное решение несколько отличается от точного решения исходного линейного уравнения. В точном решении

$$x = A_0 \exp\left(-\frac{R}{2L} t\right) \cos(\omega t + \vartheta_0), \quad \text{где} \quad \frac{R}{2L} t = \vartheta \tau;$$

поэтому скорость уменьшения амплитуды одна и та же и в точном, и в приближенном решениях. Частота же колебаний в точном решении $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, что отличается от ω_0 , принимаемой за угловую частоту приближенного решения, найденного из укороченных уравнений.

Нелинейный контур без затухания. Рассмотрим контур с конденсатором с сегнетоэлектриком в пренебрежении затуханием. В этом случае $L\ddot{q} + u(q) = 0$. Введем $x = q/q_0$, где q_0 — некоторый заряд, соответствующий ожидаемой максимальной амплитуде колебаний в контуре, и зададимся для нелинейной зависимости $u(q)$ выражением вида $u(q) = (q/C_0)(1 + \gamma_0 q^2)$. Тогда наше уравнение примет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x + \gamma_0 q_0^2 x^3) = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = 1/LC_0.$$

Введем новый масштаб времени $\tau = \omega t$, где ω не обязательно совпадает с ω_0 . С учетом этой подстановки

$$\ddot{x} + (\omega_0^2/\omega^2) (x + \gamma_0 q_0^2 x^3) = 0.$$

Вводя обозначения $\omega_0^2/\omega^2 = 1 - \xi$; $\gamma = \gamma_0 q_0^2$, получим

$$\ddot{x} + x = \xi x - (1 - \xi) \gamma x^3.$$

Учитывая, что мы ограничиваемся случаем $\xi \ll 1$ и $\gamma \ll 1$, можно, отбрасывая член второго порядка малости, приближенно записать

$$\ddot{x} + x = \xi x - \gamma x^3.$$

Это уравнение принадлежит к типу $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$, и к нему можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. Используем вариант с медленно меняющимися амплитудами u и v . Укороченные уравнения будут иметь вид

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi x - \gamma x^3) \sin \tau \, d\tau,$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi x - \gamma x^3) \cos \tau \, d\tau,$$

где $x = u \cos \tau + v \sin \tau$.

После усреднения получаем

$$\dot{u} = -\frac{1}{2}\xi v + \frac{3}{8}\gamma(u^2 + v^2)v, \quad \dot{v} = \frac{1}{2}\xi u - \frac{3}{8}\gamma(u^2 + v^2)u,$$

или иначе

$$\dot{u} = \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\gamma z - \xi)v, \quad \dot{v} = -\frac{1}{2}(\frac{3}{4}\gamma z - \xi)u.$$

Здесь $z = u^2 + v^2$ — квадрат амплитуды искомого колебания.

Не занимаясь решением полученной системы укороченных уравнений, сделаем некоторые заключения о характере возможных движений в системе. Стационарный процесс в системе требует удовлетворения системы уравнений

$$(\frac{3}{4}\gamma z_0 - \xi)v_0 = 0, \quad (\frac{3}{4}\gamma z_0 - \xi)u_0 = 0.$$

Это возможно при $u_0 = v_0 = 0$ или $\frac{3}{4}\gamma z_0 - \xi = 0$. Первая возможность соответствует состоянию покоя, вторая — стационарному колебанию с постоянной амплитудой $A_0 = \sqrt{z_0}$. Наличие стационарной ненулевой амплитуды в этой задаче вытекает из условия консервативности системы. Однако при этом расстройка ξ должна иметь определенное значение $\xi = \frac{3}{4}\gamma z_0$. Так как $\xi = (\omega^2 - \omega_0^2)/\omega^2$, то мы получаем для частоты стационарных колебаний выражение

$$\omega^2 = \omega_0^2 / (1 - \frac{3}{4}\gamma z_0),$$

где z_0 — задается начальными условиями, создающими в системе

определенный исходный запас колебательной энергии. Эта зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды, уже полученная нами раньше другими методами (см. (1.3.15)), отражает неизохронность данной нелинейной системы.

Электрический контур с малым нелинейным затуханием. Рассмотрим колебания в контуре с постоянными L и C , но с сопротивлением $R(i)$, зависящим от тока по закону $R = R_0(1 + \gamma_0 i^2)$. Это соотношение качественно передает зависимость омического сопротивления проводников от протекающего через них тока за счет их нагрева.

Составим уравнение движения в этом контуре

$$L\ddot{q} + R_0[1 + \gamma_0 \dot{q}^2] \dot{q} + q/C = 0.$$

Вводя, как обычно, новые переменные $x = q/q_0$ и $\tau = \omega_0 t$, где $\omega_0^2 = 1/LC$, получим уравнение

$$\ddot{x} + 2\vartheta_0[1 + \gamma \dot{x}^2] \dot{x} + x = 0.$$

Здесь $2\vartheta_0 = R_0/L\omega_0$; $\gamma = \gamma_0 q_0^2 \omega_0^2$. При малом затухании, когда $2\vartheta_0[1 + \gamma \dot{x}^2] \ll 1$, для приближенного решения задачи можно применить метод ММА. Тогда исходное уравнение удобно записать в виде

$$\ddot{x} + x = -2\vartheta_0 \dot{x} - 2\vartheta_0 \gamma \dot{x}^3 = \mu f(x, \dot{x}).$$

Положим $x = A \cos(\tau + \theta)$; $\dot{x} = -A \sin(\tau + \theta)$; тогда для A и θ имеем укороченные уравнения

$$A = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [2\vartheta_0 A \sin \tau_1 + 2\vartheta_0 \gamma A^3 \sin^3 \tau_1] \sin \tau_1 d\tau_1,$$

$$A\dot{\theta} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [2\vartheta_0 A \sin \tau_1 + 2\vartheta_0 \gamma A^3 \sin^3 \tau_1] \cos \tau_1 d\tau_1,$$

где $\tau_1 = \tau + \theta$. Производя интегрирование, получим

$$\dot{A} = -\vartheta_0 A (1 + \frac{3}{4} \gamma A^2), \quad \dot{\theta} = 0.$$

Из уравнения для фазы θ находим $\theta = \theta_0$. Уравнение для амплитуды мы можем записать в виде $\dot{z} = -2\vartheta_0(1 + \frac{3}{4} \gamma z) z$, где $z = A^2$. Интегрируя это уравнение, получим

$$z = \frac{1}{(D \exp(2\vartheta_0 \tau) - \frac{3}{4} \gamma \tau)},$$

где D — постоянная, определяемая из начальных условий. Если в начальный момент при $\tau = 0$ $z = z_0$, то $D = 1/z_0 + \frac{3}{4} \gamma$, и мы можем записать

$$z = \frac{z_0}{(1 + \frac{3}{4} \gamma z_0) \exp(2\vartheta_0 \tau) - \frac{3}{4} \gamma z_0}.$$

Полученное соотношение для z выражает закон уменьшения квадрата амплитуды колебаний в исследуемом нелинейном контуре, начиная от исходного значения $z = z_0$. Этот закон переходит в обычный экспоненциальный при $\gamma = 0$, т. е. при переходе к линейному случаю (линейному осциллятору с постоянным затуханием). На рис. 2.25 в условном масштабе показано спадание квадрата амплитуды z для некоторого значения γ . На том же рисунке приведен закон убывания z , соответствующий $\gamma = 0$.

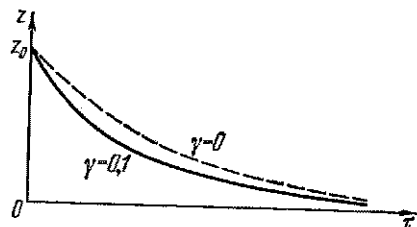


Рис. 2.25. Графики уменьшения амплитуды свободных колебаний в контуре с нелинейным и линейным затуханием.

Отметим также, что, как следует из проведенного рассмотрения, величиной, определяющей ход процесса, является амплитуда колебания (z или

$\sqrt{z}$), а фаза колебания не играет никакой роли. Это обстоятельство вполне понятно, так как характер движения задается исходным запасом колебательной энергии, сообщенной контуру в начале процесса, а фаза колебания никак не определяет ход колебания — соответствующим выбором произвольного для автономной системы начала отсчета времени фазу можно сделать любой.

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ

§ 3.1. Вынужденные колебания в линейной системе при гармоническом силовом воздействии

До сих пор мы рассматривали колебания в изолированных от внешних воздействий системах. В них могут происходить только собственные колебания. Однако необходимо отметить, что даже в изолированных колебательных системах затухающие или нарастающие колебания возникают только после некоторого внешнего воздействия. Внешнее воздействие задает начальное отклонение и начальную скорость, которые в свою очередь определяют начальную амплитуду и начальную фазу колебаний. Частота колебаний ω и коэффициент затухания δ определяются только свойствами самой системы.

Если же рассматривать колебания в системе под действием внешней периодической силы — так называемые *вынужденные колебания*, то их свойства зависят не только от параметров систем (ω , δ), но и от амплитуды и частоты внешней силы.

При изучении внешнего воздействия на колебательные системы необходимо различать силовое и параметрическое воздействия. Силовым воздействием называется такое воздействие, при котором не изменяются параметры (ω , δ) колебательной системы. Параметрическое воздействие, напротив, изменяет только эти параметры.

Как будет показано в следующих разделах, силовое воздействие на колебательную систему практически всегда сопровождается появлением вынужденных колебаний, тогда как при параметрическом воздействии колебания в системах могут не возникать.

Очевидно, что чисто силовое воздействие на колебательные системы может иметь место только при определенной их идеализации, а именно, при допущении линейности системы. Если же происходит параметрическое воздействие, то колебательная система должна иметь по крайней мере один параметр, величина которого зависит от мгновенного значения действующей на нее внешней силы.

Однако в случае реальных систем, которые принципиально нелинейны, нельзя строго разделить силовое и параметрическое воздействия. Это можно пояснить простым примером. Представим

себе, что мы воздействуем на какую-либо реальную колебательную систему внешней силой. Тогда при некоторых небольших амплитудах внешнего воздействия колебательная система останется линейной и, следовательно, имеет место силовое воздействие на систему. По мере увеличения амплитуды внешней силы или увеличения амплитуды вынужденных колебаний в системе появляется нелинейная зависимость какого-либо параметра системы от мгновенного значения внешней силы, и тогда такое воздействие следует считать смешанным, т. е. и силовым, и параметрическим.

Наиболее интересны и важны такие внешние воздействия, которые изменяют запас колебательной энергии в системе.

В случае механических колебательных систем решение задачи о действии периодической внешней силы наталкивается на известные трудности, ибо, согласно законам механики, источник такой силы будет испытывать обратное воздействие со стороны колебательной системы.

Одним из наиболее простых способов механического внешнего воздействия на механическую колебательную систему является

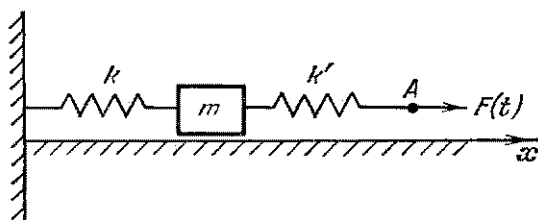


Рис. 3.1. Способ задания силового воздействия на механическую колебательную систему.

задание смещения некоторой определенной точки A системы (рис. 3.1). Если через x обозначить отклонение массы m от положения равновесия, то уравнение движения без учета сил трения запишется в виде

$$m\ddot{x} + kx = k'(F(t) - x), \quad \text{или} \quad m\ddot{x} + (k + k')x = F(t)k'.$$

На систему действует внешняя сила $k'F(t)$, а собственная частота системы равна $\omega_0 = \sqrt{(k + k')/m}$.

Если мы теперь потребуем, чтобы сила воздействовала на колебательную систему, собственное движение в которой описывается дифференциальным уравнением $m\ddot{x} + kx = 0$ ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$), то для реализации этого нужно, чтобы $k' \ll k$, но величина внешней силы $k'F(t)$ была достаточной для получения необходимого вынужденного процесса.

Анализ вынужденных колебаний в линейных системах облегчается благодаря возможности применения принципа суперпозиции. Если внешняя сила $F_1(t)$ вызывает вынужденное колебание $x_1(t)$, а сила $F_2(t)$ — колебание $x_2(t)$, то сила $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ создаст вынужденное колебание $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Колебания, вызываемые различными внешними силами, складываются друг с другом так же, как и внешние силы, если они действуют одновременно на линейную систему с трением, характеризуемым коэффициентом h , т. е. если

$$m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \quad \text{и} \quad m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t),$$

то

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + h(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t).$$

Если теперь через $x(t)$ обозначить $x_1(t) + x_2(t)$, а через $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, то получим уравнение

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F(t).$$

Принцип суперпозиции, справедливый только для линейных систем, означает, что в них отсутствует нелинейное взаимодействие колебаний, вызванных различными одновременно действующими внешними силами.

Необходимо также иметь в виду, что в колебательной системе, наряду с вынужденными колебаниями под действием внешней силы, возникают также собственные колебания при изменении величины внешней силы, при ее включении, выключении и других изменениях. Однако в диссипативных системах собственные колебания затухают с постоянной времени переходного процесса. Через время $t \gg 1/\delta$ переходный процесс в диссипативной колебательной системе можно считать закончившимся.

Рассмотрим вынужденные колебания в диссипативной системе под действием внешней синусоидальной силы. В случае механической колебательной системы с трением (рис. 3.2) уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos pt,$$

где p — частота внешней силы, F_0 — ее амплитуда, а в случае электрической системы (рис. 3.3) — вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = \mathcal{E}_0 \cos pt.$$

Если обозначить q через x , то оба дифференциальных уравнения с точностью до коэффициентов совпадут:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = P_0 \cos pt, \quad (3.1.1)$$

где $2\delta = h/m = R/L$; $\omega_0^2 = k/m = 1/LC$; $P_0 = F_0/m = \mathcal{E}_0/L$. Решение дифференциального уравнения (3.1.1), как известно из соответ-

ствующего раздела математики, можно записать в виде

$$x(t) = x_1(t) + Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi) = X_0 \cos(pt + \varphi) + Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi); \quad (3.1.2)$$

здесь

$$x_1(t) = \frac{P_0 \cos pt}{[(\omega_0^2 - p^2) \cos \varphi - 2\delta p \sin \varphi]},$$

$$X_0 = \frac{P_0}{V(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2} = \frac{P_0/\omega_0^2}{V(1 - \gamma^2)^2 + \gamma^2/Q^2},$$

где $\gamma = p/\omega_0$; $Q = \omega_0 L/R$; $\operatorname{tg} \varphi = 2\delta p/(p^2 - \omega_0^2)$, A и ψ — начальные амплитуда и фаза собственных колебаний. Первое слагаемое решения $x_1(t)$ характеризует вынужденное колебание в системе под действием внешней силы. Второе слагаемое через время $t \gg 1/\delta$ затухает и характеризует собственное колебание в системе.

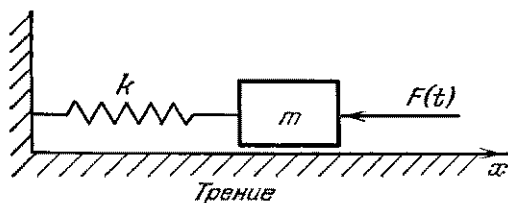


Рис. 3.2. Механическая колебательная система с затуханием при внешнем силовом воздействии.

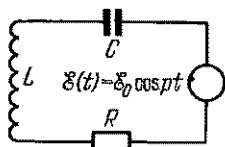


Рис. 3.3. Электрическая колебательная система с вынуждающей электродвижущей силой.

Из выражения для X_0 видно, что при определенных соотношениях между ω_0 и p достигается максимум амплитуды вынужденных колебаний $X_{\text{макс}}$. Получив выражение для $X_{\text{макс}} = X_{\text{рез}}$ можно построить различные семейства нормированных резонансных кривых, например $\Phi(p) = X(p)/X_{\text{рез}}$. В этом случае переменным параметром считается частота внешней силы p . Однако возможно нахождение и построение резонансных характеристик другого вида, при которых фиксируется частота внешней силы p , а переменным параметром является или C , или L , т. е. в конечном счете ω_0 . Тогда получаются семейства нормированных резонансных кривых $\Phi(C)$, $\Phi(L)$, $\Phi(\omega_0)$.

Очень удобен для изучения вынужденных колебаний в линейных системах метод комплексных амплитуд. По определению комплексная амплитуда $X = X_0 e^{i\varphi}$, где X_0 — модуль комплексной амплитуды, φ — аргумент (фаза) колебания.

Для решения уравнения движения (3.1.1) методом комплексных амплитуд нужно обратиться к уравнению с теми же параметрами,

но с комплексной вынуждающей силой $P_0 e^{jpt}$, т. е.

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = P_0 e^{jpt}. \quad (3.1.3)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $y = X e^{jpt}$. В силу линейности (3.1.3) решение $y = u + jv$ содержит реальную часть, которая относится к уравнению (3.1.1). Тогда

$$(-p^2 + 2\delta jp + \omega_0^2) X = P_0 \text{ или } X = P_0 / (\omega_0^2 - p^2 + 2\delta jp).$$

Обычным способом находим модуль X_0 комплексной амплитуды X и аргумент (фазу) φ :

$$X_0 = \frac{P_0}{V(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}, \quad (3.1.4)$$

$$\varphi = \arctg \frac{2\delta p}{p^2 - \omega_0^2}. \quad (3.1.5)$$

Следовательно, частное решение (вынужденное колебание) имеет вид

$$x = \operatorname{Re}(X \exp(jpt)) = \operatorname{Re}[X_0 \exp[j(pt + \varphi)]] = X_0 \cos(pt + \varphi).$$

Применим этот метод решения для случая последовательного электрического колебательного контура (см. рис. 3.3), для которого

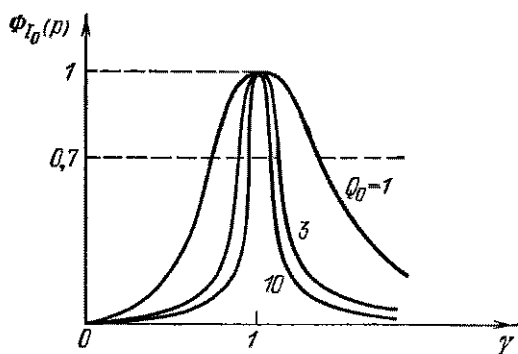


Рис. 3.4. Семейство нормированных резонансных кривых $\Phi_{I_0}(\omega_0)$ для разных значений добротности Q .

уравнение движения, как нам уже известно (см. стр. 82), можно записать в виде

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E}_0 e^{jpt}. \quad (3.1.6)$$

Решая это уравнение методом комплексных амплитуд ($i = I e^{jpt}$), получаем $I = \mathcal{E}_0 / Z$, где $Z = R + j(pL - 1/pC)$. Для модуля тока имеем

$$I_0 = |I| = \mathcal{E}_0 / |Z| = \mathcal{E}_0 / \sqrt{R^2 + (pL - 1/pC)^2}. \quad (3.1.7)$$

Теперь нетрудно найти максимальную амплитуду тока $I_{0 \text{ макс}}$. Для этого необходимо найти экстремум (минимум) знаменателя выражения для модуля тока; тогда $I_{0 \text{ макс}} = \mathcal{E}_0/R$, что справедливо при $pL = 1/pC$, т. е. при $p = \omega_0$.

Семейство нормированных резонансных кривых для тока в последовательном электрическом колебательном контуре (рис. 3.4) может быть записано в виде

$$\Phi_{I_0}(p) = \frac{I_0}{I_{0 \text{ макс}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (pL - 1/pC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 Q_0^2 (1 - 1/\gamma^2)^2}}, \quad (3.1.8)$$

где $Q_0 = \omega_0 L/R$, $\gamma = p/\omega_0$.

Заметим, что операции с комплексными амплитудами производятся так же, как при операционном исчислении, т. е. если $i = Ie^{jpt}$, то $\frac{di}{dt} = jpIe^{jpt}$ и $\int i dt = \frac{1}{jp} Ie^{jpt}$. Исходя из этого, легко получить выражения для напряжений на всех элементах рассматриваемого колебательного контура:

$$|u_R| = |I|R, \quad |u_L| = pL|I|, \quad |u_C| = \frac{1}{pC}|I|.$$

Отсюда путем нахождения экстремумов можно также найти максимальные (резонансные) значения напряжений на элементах контура R , L и C . Читателю нетрудно убедиться в том, что резонанс напряжения при $p = \omega_0$ наступает только для напряжения на сопротивлении R .

Резонанс напряжения на емкости $|u_C|_{\text{макс}} \approx Q\mathcal{E}_0$ получается при $\gamma^2 = 1 - 1/2Q^2$, т. е. при более низкой чем ω_0 частоте p , а резонанс напряжения на индуктивности $|u_L|_{\text{макс}} \approx Q\mathcal{E}_0$ — при $\gamma^2 = 1/(1 - 1/2Q^2)$, т. е. на более высокой чем ω_0 частоте p . Все три максимума совпадают только при $Q_0 \rightarrow \infty$ (практически при $Q_0 > 10^2$). На этом примере легко убедиться в том, что при небольших величинах добротности электрических колебательных контуров ($Q_0 = 2 - 5$) резонансные максимумы u_L , u_C , u_R отличаются друг от друга по частоте на несколько процентов, что может быть весьма существенно при использовании таких систем в радиоизмерительных устройствах.

В приведенных выше рассуждениях мы считали, что $L = \text{const}$, $C = \text{const}$, $R = \text{const}$ ($\omega_0 = \text{const}$), а меняется только частота внешнего воздействия p . Однако на практике часто интересуются резонансными зависимостями, при которых частота внешнего воздействия $p = \text{const}$, а меняется один из энергоемких параметров L или C (или m или k в случае механической колебательной системы). Особенность этого случая состоит в том, что одновременно с изменением собственной частоты ω_0 (из-за изменения параметров колебательной системы) меняется также добротность системы $Q = \omega_0 L/R = (1/R)\sqrt{L/C}$ (в случае механического аналога

$Q_{\text{мех}} = \omega_0 m / h = \sqrt{km/h}$). Поэтому резонансные зависимости в таком случае (рис. 3.5) отличаются от рассмотренных выше.

Следует отметить, что в последовательном электрическом колебательном контуре при постоянной p и переменной ω_0 экстремальные значения напряжения на конденсаторе и на индуктивности могут достигаться для каждого из этих напряжений при

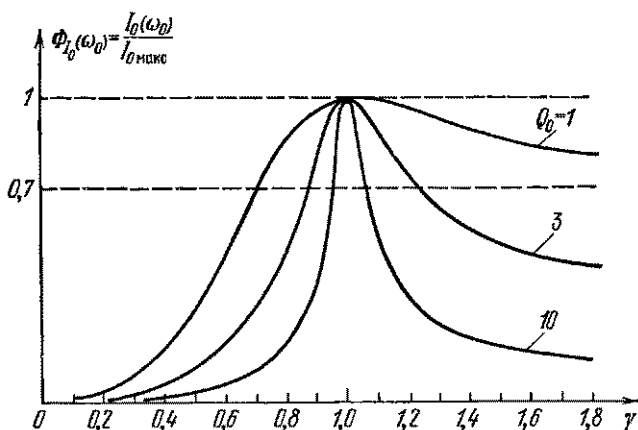


Рис. 3.5. Семейство нормированных резонансных кривых $\Phi_{I_0}(\omega_0)$ при изменении собственной частоты ω_0 контура для разных значений добротности.

$$\Phi_{I_0}(\omega_0) = \frac{I_0(\omega_0)}{I_{0\text{макс}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2(1/\gamma^2 - 1)^2}}, \quad Q_0 = \frac{pL}{R}, \quad p = \text{const.}$$

различных значениях ω_0 в зависимости от того, какой из параметров L или C является переменным в данной системе и ответственным за изменение ω_0 . Для амплитуд колебаний напряжения на конденсаторе, равных $|I|/pC_0$ при переменной индуктивности в системе, и для амплитуд колебаний напряжения на индуктивности, равных $|I|pL_0$ при переменной емкости, форма резонансных кривых одинакова, а экстремальных значений они достигают при одних и тех же собственных частотах $\omega_0 = p$.

Итак, в такой колебательной системе при одном переменном реактивном параметре всегда совпадают по частоте два экстремума: резонансное значение напряжения на сопротивлении и резонансное значение напряжения на другом постоянном реактивном элементе.

С помощью метода комплексных амплитуд (для тока, напряжения, импеданса) можно построить различные семейства резонансных кривых: амплитуды смещений (амплитуды заряда на конденсаторе, напряжения на конденсаторе), амплитуды скорости

(амплитуды тока), амплитуды ускорений (амплитуды напряжения на индуктивности).

Для каждого из перечисленных семейств резонансных кривых можно построить свое семейство фазовых характеристик, определяющее сдвиг фазы вынужденных колебаний относительно фазы внешней силы, которую мы считаем начальной и для простоты полагаем равной нулю.

§ 3.2. Элементы теории амортизации и регистрирующих приборов

Амортизирующее устройство. На основе поведения колебательных систем, находящихся под внешним воздействием, можно проанализировать действие амортизирующих колебательных устройств. Обычно основное назначение амортизаторов состоит в том, чтобы уменьшить силу давления на фундамент или другую опору со стороны некоторой периодической силы (например, вибрирующих машин, станков, двигателей внутреннего сгорания и т. д.).

На рис. 3.6 изображена простейшая колебательная система, которую можно при определенных условиях рассматривать как амортизирующее устройство. Уравнение движения в ней можно записать в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t) = P_0 \cos pt, \quad (3.2.1)$$

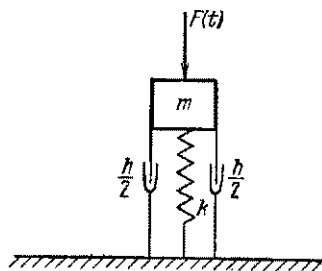


Рис. 3.6. Схема амортизирующего устройства.

где m — масса вибрирующего тела, h — коэффициент трения, k — коэффициент упругости пружины амортизатора, x — отклонение массы от положения равновесия; внешнюю силу $F(t)$ для простоты будем считать изменяющей по гармоническому закону. Записывая силу в комплексной форме $P_0 e^{ipt}$, можно благодаря линейности уравнения движения (3.2.1) искать решение методом комплексных амплитуд в виде $x = X e^{ipt}$. Тогда нетрудно получить выражение для модуля амплитуды колебаний

$$X_0 = |X| = \frac{P_0}{\sqrt{(k - mp^2)^2 + h^2 p^2}}. \quad (3.2.2)$$

На фундамент (опору) в этом случае действует со стороны вибрирующего устройства сила $F_1 = kx + h\dot{x}$, откуда для величины силы находим

$$|F_1| = F_0 = X_0 \sqrt{k^2 + h^2 p^2}. \quad (3.2.3)$$

Если ввести коэффициент амортизации

$$\alpha = F_0/P_0, \quad (3.2.4)$$

который, естественно, должен быть меньше единицы (что вытекает из нормальных требований к работе амортизирующего устройства), и выразить его через параметры колебательной системы и частоту внешней силы, то получим следующее выражение:

$$\alpha = \sqrt{\frac{k^2 + h^2 p^2}{(k - mp^2)^2 + h^2 p^2}} = \sqrt{\frac{1 + \gamma^2/Q_0^2}{(1 - \gamma^2)^2 + \gamma^2/Q_0^2}} = \sqrt{\frac{Q_0^2 + \gamma^2}{Q_0^2 (1 - \gamma^2)^2 + \gamma^2}}, \quad (3.2.5)$$

где $\gamma = p/\omega_0$; $Q_0 = k/\omega_0 h$.

Легко показать (см. (3.2.5)), что α меньше единицы при $(1 - \gamma^2)^2 > 1$, т. е. при $\gamma > \sqrt{2}$.

На рис. 3.7 приведены кривые для коэффициента амортизации при нескольких значениях добротности.

Из рассмотрения семейства кривых для α в интересующей нас области ($\gamma > \sqrt{2}$, $\alpha < 1$) можно заключить, что для эффективной амортизации амортизирующая колебательная система долж-

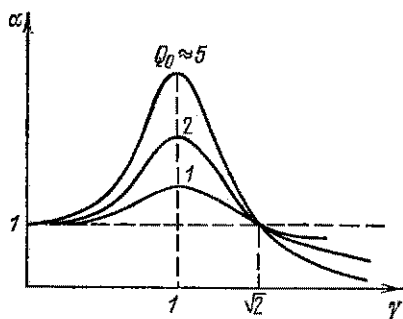


Рис. 3.7. Графики зависимости коэффициента амортизации от γ при некоторых значениях добротности Q_0 .

жна иметь как можно большую добротность Q и как можно меньшую собственную частоту ω_0 . (При фиксированной частоте внешнего воздействия p это приводит к повышению γ и, следовательно, к снижению α .)

Однако не следует применять амортизирующую систему с очень высокой добротностью, ибо такой выбор может привести к опасным последствиям. При высокой добротности амортизаторов в них могут при некоторых условиях возникать опасные вибрации за счет воз-

буждения паразитных резонансных колебаний. Это обстоятельство хорошо известно из практики работы мощных турбогенераторов и других подобных механизмов.

Если вибрирующее тело является источником колебаний не одной частоты p , а нескольких частот $\sum_{n=1}^N p_n$, то в предположении о линейности системы к ней можно применить принцип суперпозиции колебаний. Тогда результирующее действие колебаний тела m с разными частотами приведет к воздействию на опору (фундамент) совокупности нескольких сил, каждая из

которых соответствует определенной частоте, т. е.

$$F = \sum_{n=1}^N F_{0n} = \sum_{n=1}^N X_{0n} \sqrt{k^2 + h^2 p_n^2}. \quad (3.2.6)$$

Однако, как нетрудно сообразить, наибольший вклад в совокупность сил, действующих на фундамент, вносят силы с самыми низкими частотами p_n , что следует из рассмотренных выше графиков для $\alpha(\gamma, Q_0)$. Поэтому во многих практических случаях вполне достаточно рассчитать и выполнить амортизатор для наименьшей из совокупности возбуждающихся в вибрирующем устройстве частот.

Регистрирующие приборы. На основе рассмотренных ранее явлений можно построить некоторые типы приборов для регистрации быстропеременных во времени величин. Такие приборы будем в дальнейшем называть *регистрирующими приборами*.

Во всех типах приборов, которые мы здесь будем рассматривать, имеется определенная закономерная связь между измеряемой величиной и силой (часто моментом силы). Например, в магнитоэлектрических приборах момент магнитных сил поворачивает катушку с закрепленной на ней стрелкой до тех пор, пока он не станет равным моменту силы, действующей на катушку со стороны «восстанавливающей» пружины.

Если x — показания стрелки прибора под действием измеряемой величины $z(t)$, то можно записать следующее очевидное соотношение: $x = f(z)$, или $x(t) = f[z(t)]$, которое позволяет сформулировать основные характеристики регистрирующих приборов.

Чувствительность прибора характеризуется отношением $\Delta x / \Delta z$, показывающим, насколько сильно отклоняется стрелка прибора при действии на прибор единицы измеряемой величины.

Погрешностью, даваемой прибором, называется отношение минимально регистрируемой измеряемой величины Δz к величине всей измеряемой величины z , т. е. $\Delta z / z$. Идеальным является прибор, с помощью которого можно измерить $z(t) = Bx(t)$, где $B = \text{const}$, т. е. не зависит ни от величины z , ни от x . Немаловажная характеристика регистрирующего прибора — постоянство его показаний во времени или, иными словами, воспроизводимость результатов измерений.

Приборы, одинаково пригодные для регистрации совершенно произвольных процессов, не существуют и существовать никогда не будут. Каждый прибор вносит в измерения свои искажения, которые можно определенным образом свести к минимуму только для определенного класса физических или технических процессов.

Более подробно рассмотрим основные характеристики и особенности следующих четырех классов приборов, предназначенных для регистрации определенных типов процессов: квазистатические, сейсмические, резонансные, баллистические.

Квазистатические приборы. Квазистатические приборы используются для регистрации больших и малых сил как переменных во времени, так и от времени не зависящих (статических). На рис. 3.8 показана схема такого регистрирующего прибора.

Идеальным квазистатическим прибором является прибор, в котором имеется пружина со стрелкой и отсутствует масса m и трение h , т. е. выполняются условия

$$|m\ddot{x}|=0 \quad \text{и} \quad |h\dot{x}|=0.$$

Если, кроме того, мы выберем для работы упругого элемента (пружины) линейный участок, то, поскольку выполняются условия квазистатичности, можно учитывать только упругие силы системы. Отметим попутно, что в настоящее

Рис. 3.8. Схема квазистатического прибора.

время имеются надежные радиотехнические методы регистрации очень малых смещений (до величин порядка $2-3 \cdot 10^{-14}$ см) в макроскопических механических системах.

В действительности же, при действии переменных во времени сил на такую измерительную систему с одной степенью свободы нельзя пренебрегать силами инерции и трения, как было сделано выше. Рассмотрим факторы, которые способствуют или препятствуют выполнению условия квазистатичности нашего измерительного прибора.

Заметим, что статическая чувствительность прибора для регистрации силы равна $\Delta x / \Delta F = 1/k$. Пусть на прибор действует гармонический сигнал с частотой p . Тогда переменные процессы прибор регистрирует как статические только при выполнении условий

$$|m\ddot{x}| \ll |kx|, \quad |h\dot{x}| \ll |kx|. \quad (3.2.7)$$

Здесь, как обычно, можно ввести $\omega_0^2 = k/m$ и $Q_0 = m\omega_0/h = k/\omega_0 h$. Эти два условия в предположении о гармоническом воздействии принимают вид

$$mp^2 \ll k, \quad \text{или} \quad p^2 \ll \omega_0^2, \quad \text{или} \quad \gamma^2 \ll 1; \quad (3.2.8) \\ hp \ll k, \quad \text{или} \quad \gamma \ll Q_0.$$

Таким образом, для того чтобы измерительный прибор работал как квазистатический необходимо выполнение двух требований: $\gamma^2 \ll 1$ и $\gamma \ll Q_0$. Однако нетрудно заметить, что требование $\gamma^2 \ll 1$ выполняется для заданной частоты внешнего воздействия p тем лучше, чем больше ω_0 , но с ростом ω_0 будет уменьшаться чувствительность, ибо она обратно пропорциональна k . Следовательно, для квазистатических приборов характерно противоречие

между условием квазистатичности (неискажаемости, или точности) и чувствительностью.

Если на регистрирующий прибор действует многокомпонентная сила с частотами $p_1, p_2, \dots, p_n$, то не все частотные компоненты будут «передаваться» правильно, так как не для всех компонент будет выполняться условие квазистатичности. Оценим верхнюю границу частот тех компонент, которые квазистатический прибор может регистрировать без заметных искажений. Для неискажаемости необходимо, чтобы все частотные компоненты воспроизводились с ошибкой, не превосходящей определенной наперед заданной величины.

Пусть на прибор действует сложная сила

$$F(t) = \sum_{n=1}^N F_n \cos(p_n t + \varepsilon_n), \quad (3.2.9)$$

где ε_n — начальная фаза частотных компонент силы.

Тогда при условии линейности системы используем принцип суперпозиции и найдем собственные и вынужденные колебания под действием этой сложной силы

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi) + \sum_{n=1}^N \frac{F_n/k}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + \gamma_n^2/Q_0^2}} \cos(p_n t + \varphi_n + \varepsilon_n), \quad (3.2.10)$$

где A — начальная амплитуда, ψ — начальная фаза собственных колебаний, а $\gamma_n = p_n/\omega_0$; $\varphi_n = \arctg \gamma_n/[Q_0(1-\gamma_n^2)]$. Естественно, что начальный участок регистрации воздействия искажен собственными колебаниями прибора. Однако по прошествии небольшого времени (например, $t = r/8$, $r = 5$) амплитуда собственных колебаний упадет до 1% (e^{-5}) от начальной.

Для неискаженной регистрации воздействия необходимо, чтобы для всех компонент p_n значения

$$a_n = (1 - \gamma_n^2)^2 + \frac{\gamma_n^2}{Q_0^2} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{\gamma_n}{Q_0(1 - \gamma_n^2)}$$

были примерно одинаковы. Так как обязательно выполнение условия квазистатичности $\gamma \ll 1$, то с уменьшением γ до нуля величина a_n стремится к единице, а b_n — к нулю. Поэтому следует выбирать величину Q_0 такой, чтобы при возможных больших значениях γ_n величина a_n мало отличалась от единицы, а величина b_n — от нуля. Разумеется, это требование можно выполнить только с некоторой конечной точностью для ограниченного диапазона частот p_n .

На рис. 3.9 показана зависимость $1/\sqrt{a}$ от γ для $Q_0 = 0,9$. Анализируя зависимости a_n и b_n от γ , мы видим, что для

достижения мало искаженной квазистатической регистрации воздействия необходимо работать с приборами, у которых собственная частота по крайней мере в 10 раз выше частоты p_n ($\gamma_n < 0,1$). Действительно, при $\gamma_n = 1$ $\varphi_n = 90^\circ$, что заведомо недопустимо; даже при $\gamma_n \approx 1/2$ $\varphi_n = 35-40^\circ$, что также означает сильное искажение регистрируемой силы.

В области звуковых частот в качестве квазистатического механического прибора могут быть использованы пьезодатчики, имеющие очень высокую собственную частоту ($\omega_0 \approx 10^5-10^7$ рад/с, $Q_0 < 10$; при этом $\gamma_n \ll 1$), а также емкостные датчики давления.

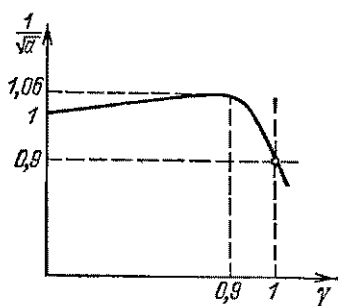


Рис. 3.9. Кривая зависимости амплитуды частотных компонент от частоты воздействия.

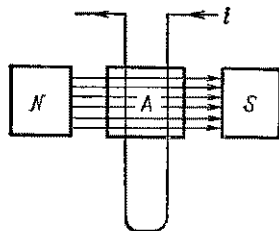


Рис. 3.10. Схема шлейфового осциллографа.

Высокие значения добротности квазистатических приборов нежелательны, так как это приводит к увеличению длительности переходных процессов.

В качестве квазистатического прибора можно также использовать шлейфовый осциллограф, схематически показанный на рис. 3.10. Прибор предназначен для оптической записи колебаний тока, пропускаемого по проводнику, изогнутому в виде рамки и помещенному в поле постоянного магнита. При пропускании тока через рамку последняя поворачивается на угол, пропорциональный изменению тока в цепи, и отклонение луча света, отраженного от поворачивающегося вместе с рамкой зеркала А, регистрируется на проградуированной шкале (в шлейфовых приборах $\omega_0/2\pi = 10^3$ Гц, $Q_0 = 1-2$).

Для процессов, закон изменения которых во времени не может быть представлен гармонической функцией, в общем случае нельзя оценить воспроизводимость исследуемого процесса данным прибором. В этих случаях для анализа качества прибора используют кривую записи скачкообразного изменения измеряемой величины (например, силы), т. е. исследуют так называемую *функцию отклика* $p(t)$.

В нашем случае

$$\rho(t) = \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \right], \quad (3.2.11)$$

где φ — начальная фаза осциллирующей части функции отклика, $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, $\operatorname{tg} \varphi = -\delta/\omega$, $\delta = h/2m$.

На рис. 3.11 показан характер нормированных функций отклика регистрирующего прибора при разных значениях добротности Q_0 колебательной системы, рассчитанных на единичный толчок внешней силы. Из рисунка видно, что в отсутствие трения ($Q_0 = \infty$) прибор будет периодически показывать удвоенную амплитуду действующей силы с периодом $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. При наличии потерь

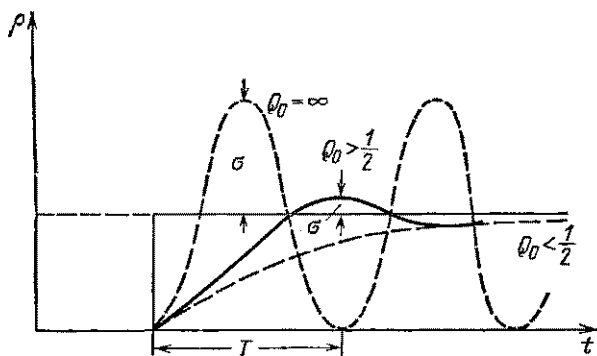


Рис. 3.11. Графики функции отклика при внешнем воздействии в виде единичного скачка для различных добротностей.

максимальное превышение амплитуды над статическим отклонением (в процентах) равно $\sigma = 100 \exp(-\pi\delta/\omega) = 100 \exp(-\pi/\sqrt{4Q_0^2 - 1})$. На границе колебательного и апериодического режимов работы ($Q_0 = 1/2$) $\sigma = 0$, но зато $T \rightarrow \infty$, ибо $\omega \rightarrow 0$. Поэтому в данном, как и во многих других случаях, необходимо оптимизировать измерительную систему в соответствии с тем, для какого класса измерений она предназначена. Если интересуются в первую очередь точностью измерений действующей силы, то необходимо использовать систему с $Q_0 \ll 1$ и проводить измерения через большие промежутки времени. Наоборот, если первоочередным требованием к измерительной системе является ее быстроедействие, то нужно использовать системы с $Q_0 \gg 1$, проигрывая при этом в точности.

Сейсмические приборы. Сейсмические приборы используются для регистрации смещений. Для определения уровня вибраций в автобусах, железнодорожных вагонах, на кораблях, самолетах и аналогичных системах необходимы особые приборы, которые называются сейсмическими по той причине, что все они построены по

тому же принципу, что и сейсмограф, регистрирующий колебания почвы. В них измеряются колебания точки вибрирующего тела относительно неподвижной системы координат. Следовательно, необходимо подобрать такую механическую колебательную систему, которая покоилась бы относительно неподвижной системы координат, а затем измерять смещения вибрирующего тела относительно этой «неподвижной» системы.

На рис. 3.12 схематически показан принцип устройства и работы приборов сейсмического типа. Основу прибора составляет колебательная система, состоящая из массы, соединенной через пружину с колеблющейся опорой (основанием, почвой и т. д.).

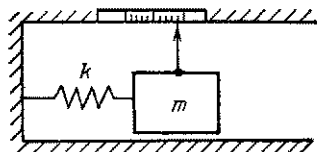


Рис. 3.12. Схема действия сейсмических приборов.

Если через x_1 обозначить координату смещения массы относительно вибрирующего тела, а через x — координату смещения всей опоры (основания) относительно неподвижной системы координат, то уравнение движения массы

массы m прибора относительно системы отсчета, связанной с x , запишется как

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + h \frac{dx_1}{dt} + kx_1 = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

где $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ — сила инерции.

Как и раньше, предположим, что опора совершает колебание по гармоническому закону $x = ze^{jpt}$; тогда и масса m колебательной системы после окончания переходного процесса будет колебаться (x_1) по гармоническому закону с частотой p (вынужденный процесс).

Для того чтобы колебание x_1 наиболее «правильно» передавало колебание x опоры (почвы), необходимо чтобы $x_1 \rightarrow x$. Рассмотрим условия, при которых можно выполнить это требование. Оно выполняется при максимальном увеличении массы m регистрирующего прибора и максимальном уменьшении коэффициента упругости k пружины, а также при уменьшении трения в колебательной системе, т. е. при $\gamma \gg 1$ ($\gamma = p/\omega_0$) и малых h ($Q_0 > 1$). Действительно, если искать x_1 и x в виде

$$x_1 = X_1 e^{jpt}, \quad x = ze^{jpt},$$

то к линейной системе можно применить метод комплексных амплитуд, и тогда $(-p^2 + (h/m)jp + \omega_0^2) X_1 = -p^2 z$, или для модуля амплитуды

$$|X_1| = \frac{zp^2\gamma^2}{V(\omega_0^2 - p^2)^2 - h^2(p^2/m^2)} = z \frac{\gamma^2}{V(1 - \gamma^2)^2 + \gamma^2/Q_0^2} = z\Phi_x(\gamma), \quad (3.2.12)$$

для фазы имеем

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{Q_0(1-\gamma^2)}. \quad (3.2.13)$$

Из выражения (3.2.12) видно, что условие $|X_1| = z$ достигается при $\Phi_x(\gamma) \rightarrow 1$. Фаза вынужденного колебания x_1 при $\gamma \gg 1$, как следует из (3.2.13), близка к π . Добротность системы Q_0 должна быть небольшой ($Q_0 \approx 1$) (рис. 3.13), что необходимо для быстрого гашения собственных колебаний в системе (уменьшения длительности переходного процесса).

Для регистрирующих приборов этого класса требование неискажения величины внешней силы при ее регистрации совпадает с требованием максимальной чувствительности при $\gamma \gg 1$ и, следовательно, для сейсмических приборов не возникает противоречия между чувствительностью и неискажаемостью (точностью) при увеличении γ , что имеет место для квазистатических приборов.

Таким образом, если частота колебаний вибрирующей опоры p много больше собственной частоты ω_0 регистрирующего прибора, то колебание x_1 (с точностью до знака) сообщает нам информацию о колебаниях вибрирующей опоры, к которой прикреплена регистрирующая колебательная система.

Физически работу прибора сейсмического типа можно себе представить следующим образом. Благодаря очень высокой частоте p вибрации опоры по сравнению с собственной частотой ω_0 масса колебательной системы (см. рис. 3.12) остается практически неподвижной и образует, таким образом, неподвижную систему координат. При этом опора (почва) будет двигаться (колебаться) относительно массы m , и это относительное движение можно зарегистрировать тем точнее, чем больше p по сравнению с ω_0 .

Резонансные приборы. Работа резонансных приборов основана на особенностях резонансных законов в линейных цепях. Обычно они используются для определения амплитуды и (или) частоты одного гармонического колебания или для определения амплитуд и частот нескольких гармонических компонент, входящих в состав сложного колебания.

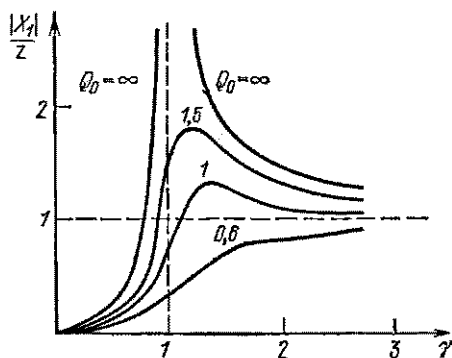


Рис. 3.13. Кривые зависимости безразмерных амплитуд вынужденных колебаний от γ при разных значениях добротности.

Поскольку ширина резонансной кривой колебательного контура обратно пропорциональна его добротности Q_0 , а амплитуда вынужденных колебаний при резонансе почти в Q_0 раз превосходит амплитуду внешней силы, то, увеличивая добротность резонансного прибора, можно одновременно повысить его чувствительность и избирательность. При высокой добротности ($Q_0 = 10^2 - 10^4$ и выше) резонансный прибор практически реагирует только на ту частоту, на которую он настроен.

Резонансные приборы пригодны только для индикации установившихся процессов в системе. Наиболее типичными их примерами являются волномеры, спектральные анализаторы, куметры и тому подобные устройства.

Однако если прибор предназначен для регистрации процессов с меняющейся частотой, то в нем могут использоваться резонансные системы с различными собственными частотами при не слишком высокой добротности, чтобы затухание колебаний в каждом резонаторе происходило достаточно быстро по сравнению с временем изменения регистрируемой частоты. Подобные частотомеры с набором механических резонаторов, возбуждаемых магнитным полем переменного тока, широко используются в электротехнике для контроля частоты технического переменного тока.

Баллистические приборы. Баллистические приборы служат для регистрации кратковременных импульсов сил или связанных с ними

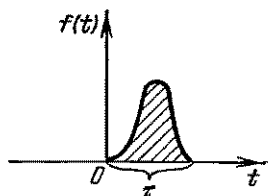


Рис. 3.14. График импульса силы.

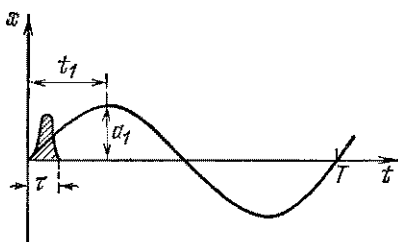


Рис. 3.15. Действие импульса силы на колебательную систему.

величин. Если на механическую колебательную систему с одной степенью свободы и с собственной частотой ω_0 действует сила $f(t)$ в течение времени τ (рис. 3.14), то импульс силы, или количество движения, которое сообщается телу массы m , равно

$$mv(\tau) = \int_0^{\tau} f(t) dt. \quad (3.2.14)$$

Пусть на массу m действует импульс силы, но мы не учитываем действия на ту же массу упругой силы пружины и силы трения;

тогда скорость v_0 , которую импульс сообщает массе m , с точностью до малых поправок, равняется

$$v_0 = \frac{1}{m} \int_0^{\tau} f(t) dt. \quad (3.2.15)$$

Если время действия τ импульса силы $f(t)$ мало по сравнению с периодом T колебательной системы (рис. 3.15), т. е. $T \gg \tau$, или $2\pi/\omega \gg \tau$, и если принять, что τ много меньше собственного времени установления колебаний в системе $t_0 = 1/\delta$, т. е. $\tau \ll t_0$, то с достаточной точностью можно считать, что в момент $t = \tau$ смещение x массы m равно нулю ($x \approx 0$), а $v_0 \neq 0$ и определяется выражением (3.2.15).

При указанных выше условиях после окончания действия импульса силы система колеблется как свободная с заданной начальной скоростью v_0 и со своими характерными параметрами: затуханием δ и собственной частотой $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Наблюдая и измеряя эти колебания, можно определить скорость v_0 . Скорость v_0 определим из соотношения

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t. \quad (3.2.16)$$

Время t_1 (четверть периода затухающих колебаний), необходимое системе для достижения амплитудного значения колебаний $x(t_1) = a_1$, вычисляется из соотношения

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\delta} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \sqrt{4Q_0^2 - 1}.$$

Теперь уже с учетом написанных выше соотношений можно определить количество движения (величину импульса)

$$mv_0 = \beta ma_1, \quad (3.2.17)$$

где β — коэффициент баллистической постоянной прибора, равный

$$\beta = \frac{\omega}{\sin \omega t_1} e^{\delta t_1}.$$

В зависимости от назначения баллистического прибора величина m , а следовательно и T , может выбираться в некоторых пределах. Хотя точность прибора повышается с увеличением m вследствие лучшего выполнения неравенства $T \gg \tau$, при этом, однако, уменьшается чувствительность (пропорциональная β), и поэтому в приборах такого типа наблюдается противоречие между точностью и чувствительностью.

Если оценить максимальную погрешность в определении импульса, возникающую из-за неучета действия упругой силы

и силы трения на массу m во время воздействия импульса силы на колебательную систему, то окажется, что суммарная ошибка не превышает 1%, если сила $f(t)$ имеет прямоугольную форму, $T = 100\tau$ и $Q_0 = 10$.

§ 3.3. Вынужденные колебания в нелинейной консервативной системе при гармоническом силовом воздействии

При воздействии гармонической силы на линейную систему в ней, как хорошо известно, возникает гармонический вынужденный процесс с частотой вынуждающей силы и с амплитудой, определяемой параметрами системы, частотой и величиной внешней силы. В частности, при совпадении частоты воздействующей силы с частотой свободных колебаний системы в ней при отсутствии потерь (т. е. в случае консервативной системы) возбуждается бесконечно нарастающий вынужденный колебательный процесс, соответствующий наступлению резонанса. Однако если по-прежнему рассматривать консервативную, но нелинейную систему, то вследствие возможной неизохронности при возникновении в ней колебаний условие резонанса с изменением амплитуды колебаний может измениться, и в этом случае мыслимо установление конечной амплитуды вынужденного колебания при любой частоте воздействия.

Как и исследование линейных систем, изучение вынужденных колебаний в идеализированных консервативных системах дает нам очень много ценных сведений о протекании самого явления в реальных диссипативных системах. Для нелинейных систем это, вероятно, еще более справедливо, так как для большого класса явлений в таких системах основным фактором, определяющим характер вынужденных процессов, служат именно нелинейные свойства элементов, а не наличие затухания, как было в линейных системах.

В данном параграфе нас будут интересовать исключительно вынужденные процессы, и поэтому мы не будем рассматривать вопросы, связанные с установлением вынужденных движений, в особенности учитывая, что в консервативных системах они протекают принципиально иначе, чем в реальных диссипативных. Укажем лишь, что в реальных системах всегда можно выбрать такой интервал времени после начала воздействия, по истечении которого в системе будет существовать практически только чисто вынужденное движение, не зависящее от начального состояния системы, тогда как в консервативных системах это принципиально невозможно.

Даже при анализе наиболее простого случая гармонического воздействия на нелинейную консервативную систему, вообще говоря, приходится сталкиваться со значительными трудностями,

и нет возможности указать удобные аналитические методы рассмотрения подобной задачи.

Нахождение вынужденного решения нелинейного уравнения второго порядка, описывающего консервативную нелинейную колебательную систему с одной степенью свободы при периодической вынуждающей силы, можно осуществить, отыскивая это решение в виде ряда Фурье с основной частотой, равной частоте воздействующей силы

$$x = \sum_{n=1}^N (a_n \cos npt + b_n \sin npt),$$

где p — частота воздействия.

Тогда после подстановки ряда с достаточно большим числом членов в исходное уравнение принципиально возможно, произведя соответствующие тригонометрические преобразования, получить систему алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов a_n и b_n . Таким путем в принципе можно находить значения a_n и b_n и определять их зависимость от параметров системы и характера воздействующей силы, которая может быть представлена в виде ряда Фурье с компонентами частоты $p, 2p, 3p, \dots$

Однако такой путь весьма громоздок и сложен и в редких случаях с его помощью удастся решить задачу достаточно полно, а многие существенные особенности поведения нелинейных консервативных систем, находящихся под внешним периодическим воздействием, не выявляются достаточно отчетливо. Поэтому мы ограничимся лишь некоторыми частными случаями и отдельными приемами, позволяющими выяснить наиболее характерные стороны рассматриваемого явления.

Рассмотрим простейшую нелинейную консервативную систему, описываемую уравнением $\ddot{x} = f(x)$. При воздействии на нее гармонической силы $P \cos pt$ уравнение, описывающее ее поведение, необходимо записать в виде

$$\ddot{x} - f(x) = P \cos pt. \quad (3.3.1)$$

Из общих соображений вытекает, что вынужденное решение должно иметь тот же период, что и вынуждающая сила, и содержать компоненту $a \cos pt$.

Принимая, что система не слишком далека от линейной и эта компонента с частотой, совпадающей с частотой вынуждающей силы, является доминирующей в общем выражении для вынужденного процесса, мы в качестве основного (первого) приближения будем рассматривать решение $x = a \cos pt$.

При этом, разумеется, наиболее интересными будут выводы об амплитуде этого процесса a , так как вполне очевидно, что особенности формы действительного процесса здесь просто опускаются.

Если искать вынужденное решение в форме $x = a \cos pt$, то уравнение (3.3.1) будет иметь вид

$$-p^2 a \cos pt - f(a \cos pt) = P \cos pt. \quad (3.3.2)$$

Так как оно должно удовлетворяться при любых значениях аргументов, то необходимо потребовать, чтобы

$$-f(a) = P + p^2 a. \quad (3.3.3)$$

Решение этого уравнения удобно получить графически (рис. 3.16). Строя заданную функцию $z = -f(a)$ и прямую $z = P + p^2 a$, мы в точке их пересечения получим искомое решение a , т. е. найдем амплитуду приближенного гармонического решения. Для разных P и p^2 , т. е. для различных амплитуд и частот воздействия можно найти значения a

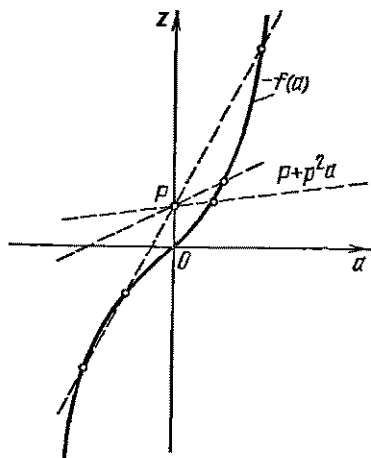


Рис. 3.16. Графическое определение амплитуды вынужденных колебаний в нелинейной системе.

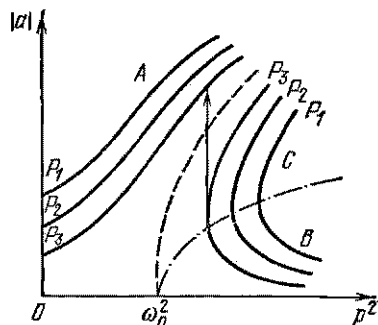


Рис. 3.17. Зависимость амплитуд вынужденных колебаний от частоты воздействия в системе с «жесткой» нелинейной возвращающей силой.

построить соответствующие кривые $a(p)$ для различных P , т. е. построить некоторый аналог резонансным кривым для резонанса в линейных системах. Изображенный на рис. 3.16 график функции $f(a)$ характерен для «жесткой» упругой силы. При этом, как обычно, принято, во-первых, что $f(0) = 0$; во-вторых, упругая сила всегда антисимметрична, т. е. $f(-a) = -f(a)$, в третьих, для малых амплитуд a система близка к линейной, и в четвертых, $-f(a) > 0$, ибо сила возвращающая.

Для $f(a)$, имеющей характер, показанный на рис. 3.16, эти кривые $a(p)$ имеют вид, изображенный на рис. 3.17, где показаны три такие кривые, соответствующие трем значениям P ($P_1 < P_2 < P_3$). При $P = 0$ получим кривую, изображенную пунктиром; она соответствует собственной частоте свободных колебаний ω

изучаемой системы при различных амплитудах и называется скелетной кривой. Рассматривая характер полученных резонансных кривых, мы замечаем следующее: при частоте воздействия p , меньшей частоты свободных колебаний ω_0 , в системе всегда происходит однозначно определяемое колебательное движение с амплитудой, зависящей от величин P и p . Когда в процессе своего изменения p становится больше ω_0 , то, начиная со значения $p > \omega_0$, в системе, кроме существовавшего ранее движения, оказываются возможными еще два колебательных процесса с различными амплитудами. При этом амплитуда исходного вынужденного процесса с ростом p продолжает расти (область A), амплитуды же двух вновь появившихся решений изменяются так, что одна из них растет с ростом p (область C), другая уменьшается (область B). Линия раздела этих областей показана на рис. 3.17 штрих-пунктиром и она проходит через точки амплитудных кривых с вертикальными касательными. Таким образом, если для заданной амплитуды P воздействующей силы ее частота p изменяется, начиная с малых значений до любых сколь угодно больших значений и обратно, мы получим однозначное решение, соответствующее одной из ветвей резонансной кривой в области A . Заметим, что здесь нас интересовала лишь величина a , ее абсолютное значение, а знак амплитуды, связанный с возможным изменением фазы на π не учитывается. Отметим лишь, что колебания в областях A и B для одной и той же амплитуды внешней силы P отличаются друг от друга по фазе на π .

Если же рассматривать поведение амплитуды вынужденного движения, начиная с больших значений p , то мы будем двигаться по ветви резонансной кривой в области B в сторону уменьшения p и роста a до той точки, где касательная к резонансной кривой станет вертикальной. Дальнейшее уменьшение p может сопровождаться лишь скачком амплитуды вынужденного колебания a на ветвь кривой в области A и дальнейшим изменением a в соответствии с формой этой части резонансной кривой. Таким образом, мы не обнаружили естественного хода процесса, при котором система оказалась бы на ветви резонансной кривой в области C . Это согласуется с тем, что строгий анализ особенностей всех трех типов решений показывает неустойчивость движений, соответствующих области C , в отношении любых сколь угодно малых вариаций параметров.

Правда, не следует придавать слишком большого значения сделанным выводам о вынужденных колебаниях при больших a и сильных отклонениях p от ω_0 , так как в этих условиях действительное движение может значительно отличаться от гармонического, и допущения, положенные в основу построения рассмотренной картины резонансных кривых, станут несправедливыми, не говоря уже о расхождениях, связанных с заменой

реальной системы консервативной. Однако если оставить в стороне вопрос о поведении реальной системы при увеличении p , сопровождаемом ростом амплитуды a до больших значений в области A , то мы можем выяснить весьма характерные особенности резонансных явлений в нелинейных системах.

Изобразив резонансную кривую для некоторой заданной амплитуды воздействия $P = \text{const}$ на отдельном чертеже (рис. 3.18), отметим следующие особенности. Во-первых, отсутствие бесконечно нарастающей амплитуды a при совпадении p с ω_0 , что является следствием неизохронности колебаний в нелинейных системах. Во-вторых, неоднозначность протекания явлений в зависимости от направления изменения частоты воздействия.

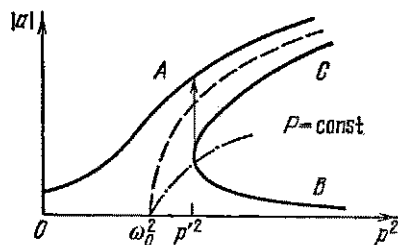


Рис. 3.18. Резонансная кривая для консервативной нелинейной системы с жесткой нелинейностью.

С ростом p , начинающимся от малых значений, амплитуда a растет монотонно. При уменьшении p от больших значений в сторону ω_0 , сначала a растет монотонно, затем в точке p' совершает скачок и далее уменьшается, а при увеличении p амплитуда монотонно растет.

В дальнейшем мы увидим, что более полное рассмотрение задачи указывает на наличие второго скачка a , который соответствует перебросу a с ростом p с ветви A на ветвь B , но в области значений p , превышающих величины, характерные для скачка с B на A .

Рассмотрим теперь ту же задачу приближенным аналитическим способом, методом гармонического баланса.

Уравнение исследуемой системы, находящейся под гармоническим воздействием, возьмем тем же (см. (3.3.1)). Задавшемся гармоническим решением

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (3.3.4)$$

получаем для $P = 0$

$$-a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t - f(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = 0, \quad (3.3.5)$$

где $f(a \cos \omega t + b \sin \omega t)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\omega$.

Если разложить $-f(x)$ в ряд Фурье, то очевидно, что только члены с $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ будут в сочетании с $\ddot{x}$ давать тождественно нуль, как того требует уравнение (3.3.5). Члены же с высшими гармоническими составляющими не будут скомпенсированы, и это является естественным следствием сделанного допущения о гармоничности искомого решения.

Таким образом, если представить функцию в виде ряда

$$-f(a \cos \omega t + b \sin \omega t) =$$

$$= \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cos \omega_n t + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \sin \omega_n t, \quad (3.3.6)$$

то, пренебрегая α_n и β_n для $n \geq 2$, можно записать

$$(\alpha_1 - a\omega^2) \cos \omega t + (\beta_1 - b\omega^2) \sin \omega t = 0. \quad (3.3.7)$$

Заметим, что постоянный член в фурье-разложении функции $-f(x)$ должен равняться нулю, как следует из самого существа задачи.

Из уравнения (3.3.7) получаем два условия

$$a\omega^2 = \alpha_1, \quad b\omega^2 = \beta_1. \quad (3.3.8)$$

Для свободных колебаний оба уравнения совершенно идентичны, так как ввиду произвольности выбора начала отсчета времени x может быть с равным успехом выражено через $\cos \omega t$ или $\sin \omega t$ и их комбинацию. Коэффициенты α_1 и β_1 определяются из соотношений для нахождения коэффициентов Фурье

$$\alpha_1 = -\frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(a \cos \omega t + b \sin \omega t) \cos \omega t \, dt,$$

$$\beta_1 = -\frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(a \cos \omega t + b \sin \omega t) \sin \omega t \, dt,$$

или иначе

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau) \cos \tau \, d\tau,$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau) \sin \tau \, d\tau, \quad (3.3.9)$$

где $\tau = \omega t$.

Используя соотношение (3.3.8), определим частоту свободных колебаний

$$\omega^2 = -\frac{1}{a\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau) \cos \tau \, d\tau,$$

или

$$\omega^2 = -\frac{1}{b\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau) \sin \tau \, d\tau. \quad (3.3.10)$$

Для заданного вида функции $f(x)$ можно, произведя соответствующее интегрирование, найти величину ω в функции амплитуды.

Например, при начальных условиях $t=0$, $x=a$, $\dot{x}=0$ получаем $x=a \cos \omega t$, $b=0$ и тогда используем первое из выражений (3.3.9).

Пусть для примера $-f(x) = \omega_0^2 x + \varepsilon \omega_0^2 x^3$. Тогда

$$-f(a \cos \tau) = \omega_0^2 a \cos \tau + \varepsilon \omega_0^2 a^3 \cos^3 \tau,$$

или

$$\begin{aligned} -f(a \cos \tau) \cos \tau &= \omega_0^2 a \cos^2 \tau + \varepsilon \omega_0^2 a^3 \cos^4 \tau = \\ &= (1/2 \omega_0^2 a + 3/8 \varepsilon \omega_0^2 a^3) + (1/2 \omega_0^2 a + 1/2 \varepsilon \omega_0^2 a^3) \cos 2\tau + 1/8 \varepsilon \omega_0^2 a^3 \cos 4\tau. \end{aligned}$$

При этом интеграл равен

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos \tau) \cos \tau d\tau = (1/2 \omega_0^2 a + 3/8 \varepsilon \omega_0^2 a^3) 2\pi,$$

а выражение для неизохронной частоты приобретает вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 [1 + 3/4 \varepsilon a^2]. \quad (3.3.11)$$

Найденное выражение для частоты свободных колебаний несколько отличается от выражения (1.4.18), полученного при использовании метода последовательных приближений для контура с нелинейной емкостью. Однако с точностью до членов с более высокими степенями $3/4 \varepsilon a^2$ эти два выражения приводятся одно к другому, а различие, существенное при не слишком малых значениях εa^2 , связано с тем, что в методе последовательных приближений мы используем не чисто гармоническое решение, а учитываем наличие высших (например, третьей) гармонических составляющих.

Для других типов нелинейностей мы, естественно, получили бы другие выражения для частоты свободных колебаний нелинейной системы при конечных амплитудах колебаний. Эти соотношения, характеризующие зависимость частоты свободных колебаний от их амплитуды, дают нам приближенное математическое выражение свойства неизохронности данной системы. Разобранные примеры с нелинейной емкостью показывают, что с ростом амплитуды колебаний возрастает действующее значение ее «жесткости», т. е. уменьшается действующее значение емкости. Подобная «жесткая» система в согласии с полученными выражениями характеризуется возрастанием частоты колебаний с ростом их амплитуды, т. е. с увеличением сообщенного системе запаса колебательной энергии.

Очевидно, что для обратной зависимости жесткости системы от амплитуды колебаний, т. е. при уменьшении этой величины (росте действующего значения емкости электрической колебательной системы) с возрастанием амплитуды колебаний, мы будем иметь уменьшение частоты свободных колебаний при увеличении их амплитуды. Подобную закономерность нетрудно получить, например, если в выражениях, аппроксимирующих нелинейные

свойства системы, считать $\varepsilon < 0$. Тогда соответствующие соотношения, передающие свойства неизохронности системы, дадут закон уменьшения частоты ω с ростом амплитуды, т. е. с увеличением сообщенного системе общего запаса колебательной энергии (рис. 3.19).

Следует еще раз подчеркнуть, что найденные выражения, равно как и использованный метод расчета, являются приближенными, пригодными лишь для достаточно малых значений ε , причем чем меньше ε , тем до больших значений амплитуд можно применить как расчеты, так и полученные соотношения. Критерием для подобной оценки может служить неравенство

$$|\varepsilon a^2| \ll 1. \quad (3.3.12)$$

Возвращаясь к анализируемой задаче, рассмотрим теперь случай действия внешней силы на систему, т. е. $P \neq 0$. Тогда, отыскивая решение с частотой внешней силы в нашем приближении, положим

$$x = a \cos pt + b \sin pt \quad (3.3.13)$$

и введем обозначение $pt = \tau$. Из уравнения (3.3.1) следует, что

$$-ap^2 \cos \tau - bp^2 \sin \tau - f(a \cos \tau + b \sin \tau) = P \cos \tau.$$

Пренебрегая высшими гармониками фурье-разложения, получим два уравнения

$$\alpha_1 - ap^2 = P, \quad \beta_1 - bp^2 = 0. \quad (3.3.14)$$

Здесь, как и раньше,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau) \cos \tau \, d\tau,$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau) \sin \tau \, d\tau.$$

Используя соотношение (3.3.8), находим

$$a\omega^2 - ap^2 = P, \quad b\omega^2 - bp^2 = 0, \quad (3.3.15)$$

где, как и раньше, ω — частота свободных колебаний в системе при данной амплитуде. Так как соотношения (3.8.15) должны быть справедливы при любых p и ω , то второе из этих уравнений

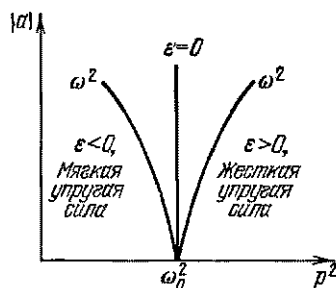


Рис. 3.19. Графики изменения частоты собственных колебаний с ростом амплитуды для мягких и жестких систем.

может удовлетворяться лишь при $b=0$. Тогда из первого уравнения (3.3.15) получаем

$$a = \frac{P}{\omega^2 - p^2},$$

где, как указывалось, ω^2 есть функция a . Изменение знака знаменателя соответствует изменению фазы колебания $x = a \cos \tau$ на π , т. е. на 180° .

В таком виде исследование резонансных свойств достаточно затруднительно. Поэтому рассмотрим зависимость p^2 от a .

Имея для данной системы определенную, уже подсчитанную зависимость ω от a , можно построить кривую $\omega^2(a)$ и затем, задаваясь различными значениями $\pm a$, найти соответствующие им значения p^2 и по полученным точкам построить резонансные кривые для различных P . Таким образом,

можно построить и изучить поведение резонансных кривых исследуемой системы и вновь получить те же особенности протекания вынужденных колебаний, которые уже отмечались выше (рис. 3.20).

§ 3.4. Приближенное рассмотрение работы умножителя частоты с нелинейной емкостью

В предыдущем параграфе мы рассмотрели вынужденные колебания, возбуждаемые в слабо нелинейной консервативной системе гармоническим внешним воздействием. Определение слабой нелинейности в нашем толковании основано на близости исследуемого колебательного процесса к соответствующему колебательному процессу, происходившему в линейной системе. Поэтому, как указывалось ранее, даже для существенно нелинейных консервативных систем в большинстве случаев *) можно найти такую область амплитуд свободных или вынужденных колебаний, оставаясь внутри которой, нам удастся с требуемой точностью описывать

*) Исключением, конечно, будут те случаи, когда функция, описывающая нелинейные свойства системы, имеет особенность в точке $a=0$ и в окрестностях этой точки не может быть разложена в степенной ряд с конечным числом членов. К числу таких систем, например, относятся механические системы с люфтами.

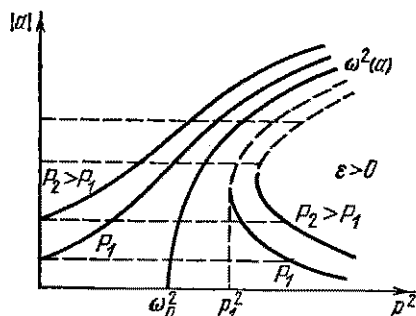


Рис. 3.20. Построение резонансных кривых для системы с нелинейной возвращающей силой: $p^2 = \omega^2(a) \pm \pm P/|a|$.

процессы методом гармонического приближения. Однако подобное ограничение исключает из нашего рассмотрения ряд особенностей протекания колебательных процессов в нелинейных системах.

В самом деле, из общих качественных соображений ясно, что в нелинейной системе при гармоническом воздействии вынужденный процесс не чисто гармонический и содержит гармонические компоненты высших частот, кратные частоте воздействия.

Эти высшие гармонические компоненты достаточно малы пока система для данной амплитуды колебаний слабо нелинейна, но возрастают по мере роста амплитуды вынужденных колебаний. Если частота одной из возникших за счет нелинейности системы гармонических компонент близка к собственной частоте колебаний системы, то амплитуда этой компоненты может существенно возрасти. В итоге при исходной гармонической вынуждающей силе результирующий колебательный процесс может иметь характер весьма далекий от гармонического с резким увеличением амплитуды тех компонент, частоты которых лежат в резонансной области. При этом, естественно, от вида нелинейных зависимостей (тип нелинейности) существенно зависит возможный характер результирующего процесса.

Это свойство нелинейных систем используется в умножителях частоты, в которых за счет соответственно подобранной нелинейности системы при гармоническом (или близком к нему) воздействии возникают колебания значительной амплитуды с частотами, кратными частоте воздействия. Подобные умножители частоты с катушками индуктивности с ферромагнитными сердечниками, конденсаторами с сегнетоэлектрическими диэлектриками или другими нелинейными элементами позволяют производить энергетически эффективное умножение частоты в 3, 5 и более раз в одном элементе. Из нечетности функций, аппроксимирующих нелинейные характеристики соответствующих катушек и конденсаторов, следует, что в указанных устройствах эффективное умножение частоты возможно лишь в нечетное число раз.

Для соответствующего приближенного расчета подобных процессов целесообразно пользоваться следующими элементарными приемами. Исходя из известной (например, полученной экспериментально) определяющей свойства системы нелинейной зависимости, необходимо выбрать ее математическую аппроксимацию. Наиболее удобна полиномиальная аппроксимация. Наивысшую степень аппроксимирующего полинома следует выбирать, исходя из условий желаемой точности аппроксимации реальной физической зависимости в используемом интервале значений переменных и, что самое важное, из ожидаемой кратности умножения частоты. Можно просто выбрать высшую степень полинома равной номеру интересующей нас гармоники гармонического воздействия. Считаем, что собственная частота системы близка к частоте этой

гармоники и составляем уравнение системы. Решение ищем в виде суммы компонент с частотами p ; $3p$; $5p$; np , где n — кратность умножения. Подставляя предполагаемое решение в уравнение движения (см. (3.3.1)), разлагаем нелинейную функцию $f(x)$ в ряд Фурье по частоте p , начиная с основной частоты и до членов с номером n . Из полученных выражений можно составить систему n уравнений для нахождения амплитуд. Как уже указывалось выше, этот прием, обладая общностью, приводит к весьма громоздким вычислениям и может эффективно применяться лишь для отдельных случаев.

Рассмотрим, например, колебания в нелинейной консервативной системе с конденсатором с сегнетоэлектриком при достаточно большой амплитуде гармонического воздействия, причем собственная частота малых свободных колебаний системы близка к утроенной частоте воздействия (утроитель частоты). Уравнение в такой системе запишется в виде

$$L \frac{di}{dt} + u_C = P_0 \cos pt, \quad (3.4.1)$$

где $P_0 \cos pt$ — внешнее воздействие.

Пусть $u_C = (1/C_0)(q + \epsilon q^3)$, что достаточно хорошо согласуется с экспериментальными зависимостями для конденсаторов с сегнетоэлектриками разных типов. Тогда, вводя обозначения $1/LC_0 = \omega_0^2$ и $P_0/L = P$, получаем

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 (q + \epsilon q^3) = (P_0/L) \cos pt. \quad (3.4.2)$$

Вводя новый масштаб времени $\tau = pt$, преобразуем это нелинейное уравнение к виду

$$p^2 \ddot{q} + \omega_0^2 (q + \epsilon q^3) = P \cos \tau. \quad (3.4.3)$$

Таким образом, мы вновь получили уже известное уравнение типа $\ddot{q} + f(q) = P \cos(\tau)$ (см. (3.3.1)). Однако в этом случае в соответствии со спецификой задачи ищем решение в виде суммы двух компонент

$$q = a_1 \cos \tau + a_3 \cos 3\tau \quad (3.4.4)$$

и тогда имеем

$$\ddot{q} = -a_1 \cos \tau - 9a_3 \cos 3\tau.$$

Оставляя в разложении $f(q)$ в ряд Фурье только члены с $\cos \tau$ и $\cos 3\tau$ и приближенно положив $-f(q) = \alpha_1 \cos \tau + \alpha_3 \cos 3\tau$, получим систему двух уравнений

$$-p^2 a_1 + \alpha_1 = P; \quad -9p^2 a_3 + \alpha_3 = 0, \quad (3.4.5)$$

где $\alpha_1 = \omega_0^2 \psi_1(a_1, a_3)$; $\alpha_3 = \omega_0^2 \psi_2(a_1, a_3)$.

Для выбранного вида нелинейности $f(q) = \omega_0^2 \varphi(q) = \omega_0^2 (q + \epsilon q^3)$ имеем

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \omega_0^2 (a_1 + \frac{3}{2} \epsilon a_1 a_3^2 + \frac{3}{4} \epsilon a_1^3 a_3 + \frac{3}{4} \epsilon a_1^3), \\ \alpha_3 &= \omega_0^2 (a_3 + \frac{1}{4} \epsilon a_1^4 + \frac{3}{2} \epsilon a_1^2 a_3 + \frac{3}{4} \epsilon a_3^3).\end{aligned}\quad (3.4.6)$$

Для свободных колебаний системы с нелинейностью ($P=0$) получим уравнения

$$-\omega^2 a_1 + \alpha_1 = 0; \quad -9\omega^2 a_3 + \alpha_3 = 0. \quad (3.4.7)$$

Здесь ω — основная частота свободных колебаний нелинейной системы, заменив частоту p , которая задавалась внешним воздействием. Последняя система дает два соотношения $\omega^2 = \alpha_1/a_1$, $\omega^2 = \alpha_3/9a_3$, из которых определяется соотношение между a_1 и a_3

$$\alpha_1/a_1 = \alpha_3/9a_3, \quad (3.4.8)$$

а для заданных начальных условий — форма колебаний, т. е. относительные амплитуды свободных колебаний основной частоты и третьей гармоники; частота этих колебаний задается соотношением $\omega^2 = \alpha_1/a_1$ или $\omega^2 = \alpha_3/9a_3$. Нетрудно убедиться, что частота таких свободных колебаний будет равна

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \frac{3}{2} \epsilon a_1^2 + \frac{3}{4} \epsilon a_1 a_3 + \frac{3}{4} \epsilon a_1^3). \quad (3.4.9)$$

Как мы видим, ω^2 отличается от ω_0^2 лишь на величину порядка ϵ .

Иначе обстоит дело при наличии воздействия ($P \neq 0$). Тогда частота возбуждаемого колебания будет задаваться внешним воздействием. В рассматриваемом случае частота ω_0 близка к $3p$. В результате соотношение между амплитудами основного колебания и его третьей гармоники должно быть совсем иным.

Для определения a_1 и a_3 имеем систему

$$-p^2 a_1 + \alpha_1 = P, \quad -9p^2 a_3 + \alpha_3 = 0. \quad (3.4.10)$$

Заменяя в первом уравнении α_1 на $\omega^2 a_1$, где по-прежнему ω^2 — квадрат частоты свободных колебаний нелинейной системы, получаем $-p^2 a_1 + \omega^2 a_1 = P$, откуда $a_1 = P/(\omega^2 - p^2)$.

Так как $\omega \approx \omega_0$ (с точностью до величины порядка ϵ), а $\omega_0 \approx 3p$, то можно, не делая существенной ошибки, заменить ω^2 на ω_0^2 и получить выражение

$$a_1 = P/(\omega_0^2 - p^2), \quad (3.4.11)$$

откуда с той же степенью приближения $a_1 = P/8p^2$.

Для определения a_3 воспользуемся соотношением $-9p^2 a_3 + \alpha_3 = 0$; тогда

$$-9p^2 a_3 + \omega_0^2 (a_3 + \frac{1}{4} \epsilon a_1^4 + \frac{3}{2} \epsilon a_1^2 a_3 + \frac{3}{4} \epsilon a_3^3) = 0. \quad (3.4.12)$$

Вводя относительную расстройку ξ , определяемую как

$$9p^2/\omega_0^2 = 1 + \xi, \quad (3.4.13)$$

получим из соотношения (3.4.12) уравнение третьей степени относительно a_3

$$\frac{3}{4}\varepsilon a_3^3 + (\frac{3}{2}\varepsilon a_1^2 - \xi) a_3 + \frac{1}{4}\varepsilon a_1^3 = 0.$$

Положив $\xi = \varepsilon \Delta$, имеем

$$a_3^3 + D a_3 + \mathcal{E} = 0, \quad (3.4.14)$$

где $D = 2a_1^2 - \frac{4}{3}\Delta$, $\mathcal{E} = \frac{1}{3}a_1^3$.

Графическое рассмотрение полученного уравнения позволяет найти качественные особенности амплитуды колебания утроенной частоты a_3 . Перепишем уравнение (3.4.14) в виде $a_3^3 = -D a_3 - \mathcal{E}$, и построим график левой и правой частей этого уравнения в функции a_3 .

$\mathcal{E} = \frac{1}{3}a_1^3 > 0$, так как a_1 всегда больше нуля при $\omega \approx 3p$. В зависимости от величины Δ меняется наклон прямой $z = -D a_3 - \mathcal{E}$, и соответственно получаются различные (одна, две

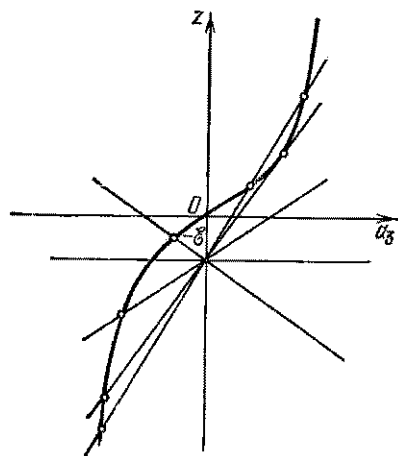


Рис. 3.21. Графическое построение для определения амплитуды колебания утроенной частоты.

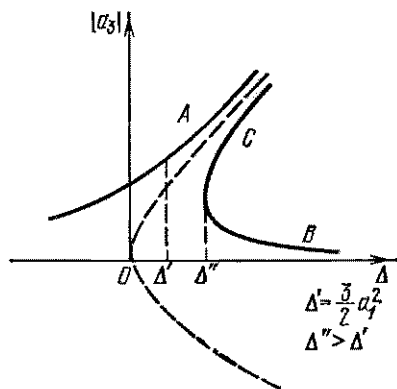


Рис. 3.22. График амплитуды колебания утроенной частоты в системе с жесткой нелинейностью.

или три) точки пересечения этой прямой с кубической параболой $z = a_3^3$ (рис. 3.21), соответствующие решениям исследуемого уравнения. Примерный вид кривых, изображающих зависимость абсолютного значения амплитуды $|a_3|$ от Δ , показан на рис. 3.22. При $\Delta' = \frac{3}{2}a_1^2 = \Delta$ имеем $D = 0$ и амплитуда $|a_3| = a_1/\sqrt[3]{3}$.

Эти кривые нелинейного резонанса для жесткой системы, показывают, что значительная амплитуда утроенной частоты $3p$, т. е. эффективность умножения частоты, требует вывода рабочего режима

системы в область достаточных расстройек (ξ или Δ). Лишь в этом случае при режиме колебаний, отвечающих ветви A (см. рис. 3.22), амплитуда колебаний тройной частоты может стать достаточно большой. Вывод системы на данный режим достигается либо соответствующим выбором начальных условий, либо постепенным изменением расстройки (начиная, например, от начального значения $\xi = \Delta = 0$, т. е. от условия $\omega_0 = 3p$).

Отметим весьма характерное обстоятельство, а именно то, что эффективная работа умножителя частоты данного типа при возрастающей с амплитудой жесткостью системы требует наличия определенной расстройки соответствующей $3p > \omega_0$.

Из исследования данной задачи в консервативной идеализации получаются также весьма важные выводы — возможность существования различных режимов колебаний тройной частоты (ветви A и B на рис. 3.22) и зависимость установившегося режима от начальных условий и «истории» системы. Эта особенность аналогична соответствующим свойствам рассмотренного в предыдущем параграфе резонансного процесса в нелинейной системе при воздействии с частотой, близкой к собственной частоте колебаний системы, но в разбираемом примере она проявляется по отношению к третьему обертому воздействующей гармонической силы.

Принятое нами пренебрежение затуханием системы привело к возможности неограниченного роста a_3 с ростом Δ (см. рис. 3.22). Очевидно, что этот вывод несправедлив, и учет потерь должен изменить картину процесса, в особенности в области больших Δ . Увеличение Δ от малых значений приводит к переходу устойчивого состояния системы с ветви A на ветвь B резонансной кривой (см. рис. 3.22), а возможность увеличения $|a_3|$ за счет выбора достаточно большого значения расстройки Δ ограничена определенным оптимальным значением этой величины ($\Delta_{\text{опт}}$).

Увеличение амплитуды воздействия P дает рост значения $|a_3|$ при данной расстройке. Это следует из анализа корней кубического уравнения (3.4.14) и из его графического рассмотрения, так как величина a_1 с большой степенью точности просто пропорциональна P .

Интересно отметить, что в нашем рассмотрении значение $|a_3|$ при заданных P , p и ω_0 растет с уменьшением ϵ , т. е. параметра, характеризующего нелинейность системы. Это можно объяснить следующим образом. Уменьшение ϵ при заданных p и ω_0 приводит к увеличению Δ и, следовательно, к дальнейшему уходу системы по ветви A в сторону возрастания $|a_3|$, причем уменьшение ϵ приводит вместе с тем к увеличению крутизны ветви A , что еще более ускоряет рост $|a_3|$.

Этот результат физически вполне понятен, так как уменьшение ϵ хотя и сопровождается соответствующим уменьшением «удельного веса» гармонических компонент в процессе вынужден-

ных колебаний системы в области, далекой от каких-либо резонансов, но зато уменьшение нелинейности системы приводит к более сильному возрастанию амплитуды третьей гармоники, частота которой лежит вблизи собственной частоты системы. Мы рассматриваем консервативную идеализацию, и поэтому амплитуда любой сколь угодно малой гармонической составляющей, возникающей за счет нелинейности системы, может достичь большой величины при надлежащей близости частоты этой компоненты к собственной частоте системы.

Следует лишь отметить, что в данном случае будет возрастать время установления стационарного колебания умноженной частоты. Влиянием же роста амплитуды третьей гармоники на величину a_1 мы с самого начала пренебрегаем. Очевидно, что учет потерь должен принципиально изменить указанные выше особенности. В самом деле, уменьшение амплитуды третьей гармоники при уменьшении нелинейности соответствует уменьшению соответствующей доли энергии, тогда как потери считаются независимыми от нелинейных свойств системы. Последнее обстоятельство существенно изменит характер зависимости амплитуды третьей гармоники воздействия от степени нелинейности системы.

Однако выводы, которые не нуждаются в существенной корректировке при учете затухания и были получены нами при консервативной идеализации, весьма принципиальны и дают много ценных сведений о работе практически важных систем умножителей частоты без активных элементов.

§ 3.5. Рассмотрение вынужденных колебаний в слабо нелинейных диссипативных системах при гармоническом силовом воздействии методом гармонического приближения

Как указывалось ранее, не представляется возможным выбрать единый эффективный метод для анализа вынужденных колебаний в нелинейной диссипативной системе с произвольной нелинейностью и любой диссипацией при наличии внешнего силового воздействия произвольной формы. Поэтому в первую очередь необходимо сузить наше рассмотрение рамками определенных типов воздействий.

Обратимся к особо важному случаю гармонического воздействия и из всего многообразия нелинейных диссипативных систем с одной степенью свободы выберем слабо нелинейные системы, в которых вынужденные колебания при таком воздействии также близки к гармоническим. Требование малости диссипации не столь уж принципиально, но поскольку нас интересуют в основном системы с отчетливо выраженными колебательными свойствами, а не апериодические, то мы в нашем рассмотрении ограничимся случаями небольшого затухания (малой диссипации).

С учетом всех этих оговорок можно сформулировать задачу следующим образом: требуется найти параметры (амплитуду и фазу) приближенно гармонического колебания, возбуждаемого в слабо нелинейной колебательной системе с малым затуханием, при заданной гармонической внешней силе. С подобной задачей мы встречаемся не только при рассмотрении механических систем, но и при анализе различных колебательных цепей в радиотехнических устройствах при наличии нелинейных диссипативных элементов (полупроводниковые приборы, радиолампы), а также при использовании ферромагнитных или сегнетоэлектрических материалов в катушках индуктивности и конденсаторах этих цепей.

Заметим также, что введение силы, действующей по заданному временному закону, например гармонической силы, весьма непринужденно осуществляемое в электрических системах, довольно затруднительно реализовать в системах механических. В самом деле, с помощью соответствующих устройств (например, с помощью индуктивной связи) в электрические системы легко ввести э. д. с. с заданной временной зависимостью при любом мгновенном состоянии самой системы. В механической же системе легко задать определенное смещение, а задание силы, меняющейся по заданному закону, требует использования достаточно сложных устройств, например тех или иных электромеханических приспособлений.

Итак, рассмотрим колебательную систему, описываемую уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + P \cos pt \quad (3.5.1)$$

при малых значениях функции $F(x, dx/dt)$.

Подобным уравнением, например, описывается электрический контур с нелинейной нагрузкой и нелинейным конденсатором при гармонической внешней силе (рис. 3.23), для которого уравнение примет вид

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \left(\frac{dq}{dt} \right) \frac{dq}{dt} + u_C(q) = U_0 \cos pt.$$

Если считать, что вольт-кулоновая зависимость такого контура выражается как $u_C(q) = (1/C_0)[1 + \varphi(q)]q$, то можно записать

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = -2\delta(\dot{q}) \frac{dq}{dt} - \omega_0^2 \varphi(q) + \frac{U_0}{L} \cos pt, \quad (3.5.2)$$

где $\omega_0^2 = 1/LC_0$; $2\delta = R(i)/L$, $i = dq/dt$.

Полученное уравнение имеет тот же вид, что и (3.5.1), причем

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -2\delta(\dot{q}) \frac{dq}{dt} - \omega_0^2 \varphi(q), \quad P = U_0/Lq_0.$$

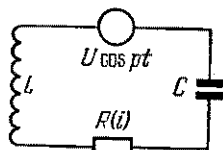


Рис. 3.23. Схема контура с нелинейными конденсатором $C(q)$ и сопротивлением при гармоническом внешнем воздействии.

и если нелинейность и диссипация в системе малы, то выражение

$$[-2\delta(\dot{q}) dq/dt - \omega_0^2 \varphi(q)]$$

также мало по сравнению с членами, стоящими в левой части уравнения (3.5.2). Это позволяет нам искать приближенное решение уравнения (3.5.2) в виде

$$x = a \cos pt + b \sin pt + a_0, \quad (3.5.3)$$

где $x = q/q_0$ — безразмерный заряд.

В отличие от случая вынужденных колебаний в консервативной нелинейной системе (см. § 3.4), здесь необходимо учитывать постоянный член a_0 . Нелинейные свойства диссипативного члена $R(i)$ могут привести к несимметрии вынужденных колебаний, которые учитываются в решении при помощи постоянной составляющей — члена a_0 .

В примере с электрическим контуром (см. рис. 3.23) этот случай соответствует нелинейному сопротивлению $R(i)$, и следовательно, на конденсаторе возникает постоянный заряд q_0 , величина которого связана с амплитудой переменной составляющей вынужденного процесса. Очевидно, что в установившемся режиме постоянная составляющая тока в подобном контуре существовать не может, и для установившихся колебаний ток определяется выражением

$$\frac{dx}{dt} = -ap \sin pt + bp \cos pt, \quad (3.5.4)$$

причем переходные процессы методом гармонического приближения рассматривать нельзя.

Подставляя (3.5.3) и (3.5.4) в исходное уравнение (3.5.2) и сравнивая коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$, получаем систему уравнений, справедливую с точностью до членов, содержащих компоненты с частотами $2p$, $3p$, ... и т. д. в разложении функции $F(x, \dot{x})$ в ряд Фурье,

$$a(\omega_0^2 - p^2) = \alpha_1 + P, \quad b(\omega_0^2 - p^2) = \beta_1, \quad \omega_0^2 a_0 = \alpha_1, \quad (3.5.5)$$

причем

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos pt + \beta_1 \sin pt + \dots,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) d\tau, \quad x = a \cos pt + b \sin pt,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cos \tau d\tau, \quad \frac{dx}{dt} = -ap \sin pt + bp \cos pt,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \sin \tau d\tau, \quad \tau = pt.$$

Система (3.5.5) должна позволить найти величины a_0 , a , b в зависимости от P и соотношения между ω_0 и p для заданного вида функции $F(x, dx/dt)$, аппроксимирующей в общем случае функцию, описывающую нелинейные реактивные и диссипативные свойства системы.

Рассмотрим этим методом два примера.

Контура с нелинейной емкостью и постоянным сопротивлением. Уравнение, описывающее систему, изображенную на рис. 3.24, имеет вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{L} u_C(q) = -2\delta \frac{dq}{dt} + \frac{U_0}{L} \cos pt. \quad (3.5.6)$$

Как указывалось ранее (см. стр. 76), для аппроксимации реальной зависимости $u_C(q)$ для конденсатора с сегнетоэлектриком можно с хорошим приближением воспользоваться выражением $u_C(q) = (1/C_0)(q + \gamma_0 q^3)$. Вводя безразмерную переменную $x = q/q_0$, получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 \gamma x^3 - 2\delta \frac{dx}{dt} + P \cos pt; \quad (3.5.7)$$

здесь $\omega_0^2 = 1/LC_0$, $\gamma = \gamma_0 q_0^2$, $2\delta = R/L$, $P = U_0/Lq_0$. Решение для x ищем в виде $x = a \cos pt + b \sin pt$; тогда

$$\frac{dx}{dt} = -ap \sin pt + bp \cos pt.$$

Постоянную составляющую в решении для x мы опустим, так как 2δ , согласно условию задачи, является постоянной величиной, и правая часть уравнения (3.5.7) с учетом искомого решения представляет собой нечетную функцию $\cos pt$ и $\sin pt$, и, значит, $a_0 = 0$ (см. (3.5.3)). Производя вычисления коэффициентов α_1 и β_1 фурье-разложения нелинейной функции $F(x, \dot{x})$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-\gamma \omega_0^2 (a \cos \tau + b \sin \tau)^3 + 2\delta (ap \sin \tau - bp \cos \tau)] \cos \tau d\tau,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-\gamma \omega_0^2 (a \cos \tau + b \sin \tau)^3 + 2\delta (ap \sin \tau - bp \cos \tau)] \sin \tau d\tau,$$

где $\tau = pt$, получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -2\delta pb - \frac{3}{4} \omega_0^2 \gamma (a^2 + b^2) a, \\ \beta_1 &= 2\delta pa - \frac{3}{4} \omega_0^2 \gamma (a^2 + b^2) b. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

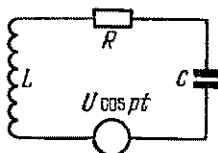


Рис. 3.24. Схема контура с нелинейной емкостью $C(q)$ и гармонической возмущающей силой.

ризуются однозначным ходом амплитуды вынужденного колебания A в зависимости от частоты действующей силы (тип 1). Все они расположены ниже кривой для $P = P_{кр}$. Резонансные кривые такого типа представляют собой несколько деформированные кривые резонансной амплитуды для обычного линейного контура с затуханием. Максимум у них смещен в сторону больших частот в соответствии с возрастанием частоты свободных колебаний с ростом амплитуды, обусловленным неизохронностью.

При значениях P , больших определенного критического значения $P_{кр}$, в резонансных кривых появляются участки с вертикальной касательной, и для определенной области значений p^2 возникает неоднозначная зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты воздействия (тип 2). На рис. 3.25 заштрихована область, где резонансные кривые имеют обратный наклон, а ее границы соответствуют вертикальным касательным к резонансным кривым. Амплитуды резонансных кривых, лежащие в заштрихованной области, неустойчивы, и при непрерывном изменении частоты воздействия p для достаточно больших амплитуд внешней силы $P > P_{кр}$ появляются скачки амплитуды при достижении границы неустойчивой области.

Неустойчивость этих решений не следует прямо из приведенных расчетов. Метод гармонического приближения не дает возможности определить устойчивость найденных решений. Для этого необходимы дополнительные исследования полученных значений амплитуды.

Как видно из формулы (3.5.11) при $\delta = 0$, мы приходим к соотношению, аналогичному (3.3.15) и связывающему частоту воздействия и амплитуду вынужденного колебания в консервативной нелинейной колебательной системе $p^2 = \omega^2 \pm P/A$. В соответствии с этим и семейство резонансных кривых рис. 3.25 при $\delta \rightarrow 0$ переходит в семейство изолированных кривых, разделенных скелетной кривой $\omega^2(A)$.

Очевидно, что в случае обратного закона зависимости u_c от q или, говоря языком механики, обратной зависимости жесткости от отклонения при аналогичной аппроксимации необходимо считать $\gamma < 0$, и соответствующие резонансные кривые будут иметь наклон в обратную сторону, что схематически показано на рис. 3.26 (случай мягкой возвращающей силы).

Контур с постоянными L и C и с нелинейным затуханием (рис. 3.27). Пусть

$$R(i) = R_0(1 + \beta_0 i + \gamma_0 i^2). \quad (3.5.12)$$

Тогда уравнение, описывающее поведение данного контура, можно записать в виде

$$\ddot{x} + 2\delta_0(\dot{x} + \beta\dot{x}^2 + \gamma\dot{x}^3) + \omega_0^2 x = P \cos pt, \quad (3.5.13)$$

где $x = q/q_0$; $2\delta_0 = R_0/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $P = U_0/Lq_0$, $\beta = \beta_0 q_0$, $\gamma = \gamma_0 q_0^2$. Ищем решение в гармоническом приближении в виде

$$x = a \cos pt + b \sin pt + a_0, \quad \dot{x} = -ap \sin pt + bp \cos pt.$$

Для определения a_0 , a , b получаем из (3.5.5) систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega_0^2 a_0 &= -\delta_0 \beta p^2 A^2, \\ (\omega_0^2 - p^2) a &= -2\delta_0 p (1 + \frac{3}{4} \gamma p^2 A^2) b + P, \\ (\omega_0^2 - p^2) b &= 2\delta_0 p (1 + \frac{3}{4} \gamma p^2 A^2) a. \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Из первого уравнения следует, что

$$a_0 = -(p^2/\omega_0^2) \beta \delta_0 A^2. \quad (3.5.15)$$

Найденное выражение дает величину постоянного напряжения смещения, образующегося на емкости за счет несимметрии нелинейного сопротивления. Появление этого напряжения на радиотехническом языке называется *детектированием воздействующего гармонического сигнала*. Отметим, что величина постоянного напряжения смещения для заданной амплитуды воздействия связана лишь с коэффициентом β ,

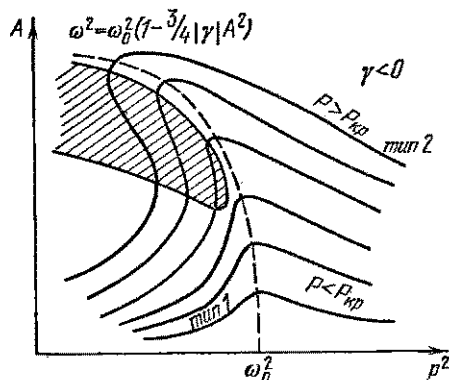


Рис. 3.26. Семейство резонансных кривых для мягкой нелинейности в контуре с постоянным затуханием.

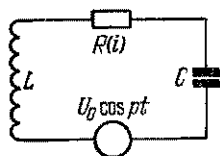


Рис. 3.27. Схема контура с постоянными L и C и с нелинейным затуханием при гармоническом внешнем воздействии.

т. е. с коэффициентом при квадратичном члене функции, аппроксимирующей нелинейность системы. Члены разложения нелинейной функции с нечетными степенями не приводят к возникновению постоянной составляющей. В нашем примере, как и в более сложных случаях, ответственны за детектирование члены с четными степенями полинома, аппроксимирующего нелинейность, которые и приводят к несимметрии характеристики последней.

Для определения амплитуды вынужденного колебания нужно рассмотреть систему уравнений

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - p^2) a + 2\delta_0 p (1 + \frac{3}{4} \gamma p^2 A^2) b &= P, \\ (\omega_0^2 - p^2) b - 2\delta_0 p (1 + \frac{3}{4} \gamma p^2 A^2) a &= 0, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta_0^2 p^2 (1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2)^2 = P^2/A^2. \quad (3.5.16)$$

Примем, что нам заданы параметры воздействия: его амплитуда $P = \text{const}$ и частота $p = \text{const}$. Будем менять в системе собственную частоту контура ω_0^2 . Для нахождения аналитического выражения ω_0^2 запишем следующее биквадратное уравнение:

$$\omega_0^4 - 2p^2\omega_0^2 + p^4 + 4\delta_0^2 (1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2)^2 - P^2/A^2 = 0, \quad (3.5.17)$$

откуда

$$\omega_0^2 = p^2 \pm \sqrt{P^2/A^2 - 4\delta_0^2 p^2 (1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2)^2}. \quad (3.5.18)$$

Если изобразить передаваемую этим соотношением связь между A и ω_0 , то получится семейство резонансных кривых (рис. 3.28).

Дифференцируя уравнение (3.5.16) по ω_0^2 и находя производную $dA^2/d\omega_0^2$, нетрудно показать, что в пределах выбранного приближения она обращается в нуль при $\omega_0^2 = p^2$ независимо от величины амплитуды колебаний A^2 .

Для контуров с нелинейным затуханием резонансные кривые при малых величинах γ и при небольших амплитудах внешней силы незначительно отличаются от обычных резонансных кривых для линейного контура, и лишь для больших амплитуд наблюдается уплощение их вершин. Это связано с ростом эффективного затухания системы с возрастанием амплитуды колебаний по закону $\delta_1 = \delta (1 + \frac{3}{4}\gamma p^2 A^2)$.

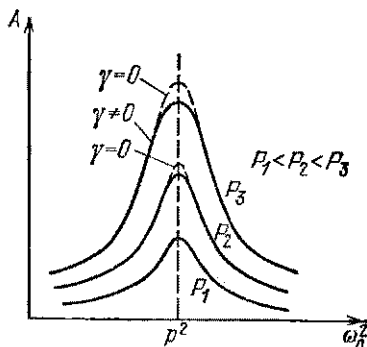


Рис. 3.28. Семейство резонансных кривых для контура с нелинейным затуханием.

§ 3.6. Применение метода медленно меняющихся амплитуд к анализу поведения слабо нелинейных систем с малыми потерями при гармоническом силовом воздействии

В § 2.5 были описаны основы метода медленно меняющихся амплитуд применительно к анализу автономных слабо нелинейных систем с малым затуханием. Там же были даны примеры применения этого метода для исследования свободных колебаний в некоторых нелинейных системах. Однако исходные положения, на которых основана возможность получения упрощающих задачу укороченных уравнений, допускают также применение этого метода к случаю систем, находящихся под внешним воздействием.

Если на колебательную систему, близкую к линейной консервативной, действует периодическая сила с частотой, существенно отличной от собственной частоты колебаний системы, то эта сила вызовет вынужденное колебание с частотой внешней силы и с амплитудой, в основном определяемой различием между частотой воздействия и собственной частотой системы.

При гармоническом воздействии на слабо нелинейную систему с малым затуханием необходимо рассматривать уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + P \cos pt, \quad (3.6.1)$$

причем в рассматриваемом случае p достаточно сильно отличается от ω_0 , а $\mu \ll 1$.

Пусть

$$x = x_1 + a \cos pt, \quad (3.6.2)$$

где $a = P/(\omega_0^2 - p^2)$ — амплитуда вынужденного колебания для подсистемы $\ddot{x} + \omega_0^2 x = P \cos pt$, в которую переходит (3.6.1) при $\mu = 0$. Тогда x_1 будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = \mu f\left(x_1 + a \cos pt; \frac{dx_1}{dt} - pa \sin pt\right). \quad (3.6.3)$$

Это уравнение при $P=0$ допускает только одно стационарное решение $x_1=0$, так как при этом исходная система должна находиться в покое. При $P \neq 0$ уравнение (3.6.3) можно рассматривать как уравнение, описывающее колебательную систему с вынужденными колебаниями и амплитудами порядка μ и периодом $2\pi/p$, взаимодействующими с собственными колебаниями вследствие нелинейности системы. Вопрос же о существовании стационарных собственных колебаний требует дополнительного исследования, так как в этом случае система, вообще говоря, претерпевает периодическое (с частотой, кратной p) изменение энергоемких параметров, что может при выполнении определенных частотных соотношений привести к эффектам параметрического вложения энергии. При этом предполагается, что амплитуда воздействующей силы P не ограничена условием малости подобно силам сопротивления и силам, связанным с нелинейными свойствами системы, которые имеют порядок малости μ .

Если частотные и энергетические соотношения, обуславливающие параметрическое вложение энергии в систему, не выполняются, то для p , достаточно отличающегося от ω_0 , движение в рассматриваемой системе будет в основном зависеть от вынужденных процессов, описываемых вторым членом соотношения (3.6.2).

Если частота воздействия близка к собственной частоте колебаний слабо диссипативной системы, то соответствующие резонансные колебания (x_1) приобретут значительную амплитуду, которая

будет возрастать до величины порядка $1/\mu$ при приближении частоты воздействия к собственной частоте системы. Это обстоятельство не позволяет в подобном случае использовать указанную подстановку и заставляет при рассмотрении данной задачи ввести ограничения на амплитуду воздействия. Для возможности применения метода медленно меняющихся амплитуд необходимо потребовать, чтобы внешняя сила была мала по амплитуде и имела бы тот же порядок малости, что и малые силы, связанные с нелинейными и диссипативными свойствами системы и возникающие при конечных амплитудах колебаний в ней. В таком случае воздействующую силу можно объединить с этими малыми силами и свести рассмотрение задачи к приближенному исследованию уравнения типа

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f_1(x, \dot{x}, t),$$

которое отличается от рассмотренного ранее (см. (2.5.2)) тем, что функция f_1 зависит не только от переменной x и ее производной $\dot{x}$, но и явно от времени.

Решение этого уравнения будем искать в виде $x = u \cos pt + v \sin pt$, где, как и раньше, u и v — медленно меняющиеся функции. Вводя в исходное уравнение новый масштаб времени $\tau = pt$, получим

$$\ddot{x} + (\omega_0^2/p^2)x = \mu \tilde{f}(x, \dot{x}, \tau). \quad (3.6.4)$$

Вводя обозначение

$$\omega_0^2/p^2 = 1 - \xi \quad (3.6.5)$$

и требуя, чтобы расстройка ξ была величиной порядка малости μ , запишем уравнение (3.6.4) окончательно в виде

$$\ddot{x} + x = \mu \tilde{f}(x, \dot{x}, \tau). \quad (3.6.6)$$

Тогда в соответствии с изложенным методом медленно меняющихся амплитуд имеем

$$x = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad \dot{x} = -u \sin \tau + v \cos \tau$$

и можно перейти к укороченным уравнениям для определения функций u и v :

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \tilde{f}(x, \dot{x}, \tau) \sin \tau d\tau, \quad \dot{v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \tilde{f}(x, \dot{x}, \tau) \cos \tau d\tau. \quad (3.6.7)$$

Если $x = A \cos(\tau + \theta)$, $\dot{x} = -A \sin(\tau + \theta)$, то укороченные уравнения для определения амплитуды и фазы будут иметь вид

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(A, \theta, \tau) \sin \tau_1 d\tau_1, \quad A\dot{\theta} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(A, \theta, \tau) \cos \tau_1 d\tau_1, \quad (3.6.8)$$

где $\tau_1 = \tau + \theta$.

В отличие от описанного пути нахождения методом медленно меняющихся амплитуд приближенного решения уравнения (3.3.1), мы для упомянутого ранее случая существенного различия между p и ω_0 (т. е. области, далекой от резонанса) должны поступить несколько иначе.

Вводя через подстановку (3.6.2) новую переменную x_1 , соответствующую колебанию с частотой, близкой к собственной частоте системы ($\omega \approx \omega_0$), мы, применяя метод медленно меняющихся амплитуд, должны искать для x_1 решение с частотой p/n (случай $p = n\omega$) или mp (случай $p = \omega/m$) и соответственно вводить новый масштаб времени $\tau = (p/n)t = \omega t$ или $\tau = mpt = \omega t$.

При этом расстройка будет определяться из соотношений

$$\omega_0^2/\omega^2 = \omega_0^2/m^2p^2 = 1 - \xi \quad \text{или} \quad n^2\omega_0^2/p^2 = 1 - \xi,$$

а для основной подстановки (см. (2.5.3)) имеем по-прежнему

$$x_1 = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad \dot{x}_1 = -u \sin \tau + v \cos \tau.$$

Когда ω_0 близко к mp , мы будем определять амплитуду колебания с частотой, соответствующей m -му обертому воздействию силы, а когда $\omega_0 \approx p/n$, речь будет идти об отыскании возможных унтертонов, или субгармоник. Если же не представляется возможным подобрать такое m или n , чтобы расстройка ξ удовлетворяла выбранному критерию малости, то тогда описываемый путь решения теряет смысл. В этом случае наиболее вероятно, что искомое установившееся решение будет с большой степенью точности описываться вторым членом в правой части (3.6.2).

Исследование укороченных уравнений для описанных случаев проводится теми же приемами, что и для автономных систем.

В качестве простейшего примера рассмотрим методом ММА вынужденные колебания в контуре с нелинейным затуханием, которые были рассчитаны в § 3.5 методом гармонического баланса (гармонического приближения). Для подобного контура (см. рис. 3.27) мы можем записать уравнение Кирхгофа в виде

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0 \cos pt.$$

Если считать, что нелинейная зависимость сопротивления R от тока i имеет квадратичный характер, а собственная частота

контура ω_0 близка к частоте внешней силы p , то вводя обозначения

$$\omega_0^2 = 1/LC, \quad 2\vartheta = R/Lp, \quad x = q/q_0, \\ \omega_0^2/p^2 = 1 - \xi, \quad \tau = pt, \quad R = R_0(1 + \gamma_0 i^2),$$

приходим к уравнению

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\vartheta \dot{x} - 2\vartheta \gamma \dot{x}^3 + P \cos \tau, \quad (3.6.9)$$

где $P = U_0/Lq_0p^2$, $\gamma = \gamma_0 q_0^3 p^2$, а $\gamma_0 > 0$. Для применимости метода медленно меняющихся амплитуд к решению этого уравнения необходимо потребовать, чтобы выполнялись неравенства: расстройка $\xi \ll 1$, затухание в системе $2\vartheta \ll 1$, амплитуда внешнего воздействия $P \ll 1$, т. е. чтобы все члены в правой части уравнения были малы по сравнению с членами в левой его части.

Решение ищем в виде $x = A \cos(\tau + \theta)$, $\dot{x} = -A \sin(\tau + \theta)$. Тогда, вводя $\tau_1 = \tau + \theta$, получаем следующие укороченные уравнения:

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\xi A \cos \tau_1 + 2\vartheta A \sin \tau_1 + 2\vartheta \gamma A^3 \sin^3 \tau_1 + \\ + P \cos(\tau_1 - \theta)] \sin \tau_1 d\tau_1, \\ A\dot{\theta} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\xi A \cos \tau_1 + 2\vartheta A \sin \tau_1 + 2\vartheta \gamma A^3 \sin \tau_1 + \\ + P \cos(\tau_1 - \theta)] \cos \tau_1 d\tau_1,$$

а после выполнения интегрирования имеем

$$\dot{A} = -\vartheta A - \frac{1}{2}P \sin \theta - \frac{3}{4}\vartheta \gamma A^3, \quad A\dot{\theta} = -\frac{1}{2}\xi A - \frac{1}{2}P \cos \theta. \quad (3.6.10)$$

Стационарные решения находят из укороченных уравнений при условии $\dot{A} = \dot{\theta} = 0$, т. е. из системы уравнений

$$2\vartheta(1 + \frac{3}{4}\gamma A_0^2) A_0 = -P \sin \theta_0, \quad \xi A_0 = -P \cos \theta_0.$$

Возводя правые и левые части этих уравнений в квадрат и складывая их, получаем

$$A_0^2 = P^2/[\xi^2 + 4\vartheta^2(1 + \frac{3}{4}\gamma A_0^2)];$$

оно представляет уравнение резонансной кривой для добротного колебательного контура с нелинейным сопротивлением.

В случае линейного контура ($\gamma_0 = 0$) получается известное уже нам выражение (см. (3.5.10)) для резонансной кривой

$$A_0^2 = P^2/(\xi^2 + 4\vartheta^2).$$

Соответствующие семейства резонансных кривых показаны на рис. 3.28 пунктирными линиями. Как мы видим, резонансные кривые для контура с нелинейным затуханием уплотняются в области расстройек, близких к нулю. Это изменение тем больше, чем больше резонансная амплитуда. Вдали от области малых расстройек резонансные кривые линейного и нелинейного контуров практически совпадают. Однако следует иметь в виду, что эти кривые нигде не пересекаются и резонансная кривая нелинейного контура при $\gamma > 0$ даже вдали от резонансной частоты всегда расположена ниже резонансной кривой линейного контура.

Однако полученные выше укороченные уравнения позволяют найти не только стационарную амплитуду и фазу вынужденного колебания, но в принципе и закон установления стационарного процесса путем интегрирования системы укороченных уравнений (3.6.10). В этом, в частности, заключается большая эффективность метода ММА по сравнению с методом гармонического приближения, дающего в принципе только стационарные значения амплитуд.

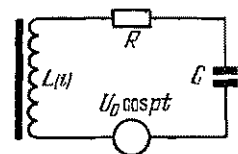


Рис. 3.29. Схема контура с нелинейной индуктивностью при воздействии гармонической силы.

В качестве другого примера применения метода ММА рассмотрим вынужденные колебания в контуре с нелинейной индуктивностью (рис. 3.29). Будем считать однозначной связь между магнитным потоком Φ_0 и током i , т. е. пренебрежем гистерезисом. R и C принимаются постоянными. При соответствующем выборе масштаба для функции Φ , пропорциональной величине магнитного потока Φ_0 , мы можем записать уравнение, описывающее процессы в контуре, в виде

$$\frac{d\Phi(i)}{dt} + Ri + q/C = U_0 \cos pt, \quad (3.6.11)$$

или

$$\frac{d}{dt} \Phi \left(\frac{dq}{dt} \right) + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U_0 \cos pt.$$

Зададимся выражением для аппроксимации зависимости $\Phi(i)$ в форме

$$\Phi(i) = L_0 (i - \gamma_0 i^3), \quad (3.6.12)$$

где $i \equiv dq/dt$.

Подобная простейшая полиномиальная аппроксимация кривой намагничения, естественно, может удовлетворительно передавать ее реальный ход лишь в определенном ограниченном интервале значений i . Поэтому, прежде чем обсуждать полученные результаты, необходимо убедиться, что найденные значения амплитуды тока не выходят за те пределы, в которых применима выбранная аппроксимация.

Дифференцируя (3.6.12)

$$\frac{d\Phi(i)}{dt} = (L_0 - 3L_0\gamma_0 i^2) \frac{di}{dt} = L_0 \left[1 - 3\gamma_0 \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \right] \frac{d^2q}{dt^2},$$

и подставляя найденное соотношение в (3.6.11), имеем

$$L_0 \ddot{q} - 3L_0\gamma_0 \dot{q}^2 \dot{q} + R\dot{q} + q/C = U_0 \cos pt.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$L_0 \ddot{q} + q/C = 3L_0\gamma_0 \dot{q}^2 \dot{q} - R\dot{q} + U_0 \cos pt. \quad (3.6.13)$$

Так как мы рассматриваем случай малого затухания и малой нелинейности, то первые два слагаемых в правой части (3.6.13) малы по сравнению с членами, стоящими в левой части, и мы приходим к уравнению вида

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \mu F_*(q, \dot{q}, \ddot{q}) + P_0 \cos pt,$$

которое допускает применение метода медленно меняющихся амплитуд для произвольного P_0 при частоте p , сильно отличающейся от ω_0 , и для P_0 порядка μ при p , близкой к ω_0 .

Рассмотрим сначала случай частоты p , далекой от ω_0 . Уравнение (3.6.13) запишем в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \gamma \dot{x}^2 \ddot{x} - 2\delta \dot{x} + P_0 \cos pt; \quad (3.6.14)$$

здесь $\omega_0^2 = 1/L_0 C$, $\gamma = 3\gamma_0 q_0^2$, $2\delta = R/L_0$, $P_0 = U_0/Lq_0$, $x = q/q_0$.

Положим $x = x_1 + \frac{P_0}{\omega_0^2 - p^2} \cos pt$. Тогда для x_1 получим из (3.6.14)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = \gamma \left(\frac{dx_1}{dt} - pP \sin pt \right)^2 \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} - p^2 P \cos pt \right) - \\ - 2\delta \left(\frac{dx_1}{dt} - pP \sin pt \right), \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

где $P = P_0/(\omega_0^2 - p^2)$.

Правая часть этого уравнения периодична с периодом $2\pi/p$ и мала по сравнению с членами, стоящими в левой его части. Поэтому при частоте p , далекой от ω_0 , вынужденное колебание в решении уравнения (3.6.10) будет иметь амплитуду по крайней мере того же порядка малости, что и члены с γ и 2δ . Исключения соответствуют случаям, когда $mp \approx \omega_0$. Тогда высшие гармонические компоненты в правой части уравнения (3.6.15) могут вызвать резонансные эффекты. В этих случаях можно ожидать появления вынужденных колебаний с конечными амплитудами на частотах mp , т. е. работы подобной системы как умножителя частоты.

Довольно очевидно, что относительная интенсивность этих гармонических компонент будет определяться видом нелинейной характеристики системы и для выбранной аппроксимации будет прямо задаваться видом аппроксимирующей функции.

При кубической аппроксимации появится лишь третий обер-тон, и резонансные эффекты могут возникать лишь при ω_0 , близкой к $3p$, т. е. в этом случае исследуемая система будет работать в качестве утроителя частоты.

Использование больших участков нелинейной характеристики привело бы к необходимости введения в аппроксимирующий полином членов с более высокими степенями, и тогда имели бы место отчетливо выраженные резонансные эффекты для $m=5, 7$ и т. д. При этом антисимметрия характеристики намагничивания соответствует присутствию в аппроксимирующем полиноме лишь нечетных степеней i , следовательно, возможны резонансные процессы только на нечетных гармониках воздействующей силы. Эти же свойства нелинейной характеристики приводят к тому, что в результате появления в системе вынужденных колебаний с частотой p возникает периодическое изменение ее индуктивности с частотой $2p$.

Как указывалось, случай $\omega_0 \approx 3p$ соответствует работе системы в качестве утроителя частоты с использованием гармоники воздействующей силы, возникающей на нелинейной реактивности контура. Случай $\omega_0 \approx 2p$ соответствует появлению возможных параметрических эффектов (параметрическая генерация, параметрическое усиление (см. гл. 4)), а случай $\omega_0 \approx p$ — известному явлению возбуждения резонансных вынужденных колебаний в нелинейной системе.

Случай $p \approx \omega_0$. Для возможности применения метода ММА примем, что амплитуда внешней силы P_0 имеет величину порядка малости 2δ и γ . Тогда уравнение (3.6.14) переходит в

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\theta \dot{x} + \gamma' \dot{x}^2 \ddot{x} + P \cos \tau, \quad (3.6.16)$$

где $\tau = pt$, $\omega_0^2/p^2 = 1 - \xi$, $2\theta = 2\delta/p$, $\gamma' = \gamma\omega_0^2/p^2$, $P = P_0/p^2$.

Для решения задачи, вновь используя вариант метода ММА, изложенный в § 2.5 с применением медленно меняющихся амплитуды $A(\tau)$ и фазы $\theta(\tau)$, находим

$$x = A \cos(\tau + \theta), \quad \dot{x} = -A \sin(\tau + \theta).$$

В правой части уравнения (3.6.16) следует ограничиться членами первого порядка малости относительно единицы, и поэтому член $\gamma' \dot{x}^2 \ddot{x}$ нужно записать в виде $\gamma' \dot{x}^2 \ddot{x} = -\gamma' A^3 \sin^2(\tau + \theta) \cos(\tau + \theta)$, пренебрегая членами, содержащими $\dot{A}$ и $\dot{\theta}$, так как в силу «медленности» $A(\tau)$ и $\theta(\tau)$ справедливы условия $\dot{A} \ll A$, $\dot{\theta} \ll \theta$.

Укороченные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\xi A \cos \tau_1 + 2\vartheta A \sin \tau_1 - \gamma' A^3/4 \cos \tau_1 + \\ & + \gamma'^{1/4} A^3 \cos 3\tau_1 + P \cos (\tau_1 - \theta)] \sin \tau_1 d\tau_1, \\ \dot{\theta} = & -\frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} [\xi A \cos \tau_1 + 2\vartheta \sin \tau_1 - \gamma' A^3/4 \cos \tau_1 + \\ & + \gamma'^{1/4} A^3 \cos 3\tau_1 + P \cos (\tau_1 - \theta)] \cos \tau_1 d\tau_1, \end{aligned}$$

где $\tau_1 = \tau + \theta$. После выполнения интегрирования получаем следующие укороченные уравнения:

$$\dot{A} = -\vartheta A - \frac{1}{2}P \sin \theta, \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{2A} [\xi A - \frac{1}{4}\gamma' A^3 + P \cos \theta]. \quad (3.6.17)$$

Стационарную амплитуду вынужденных колебаний A_0 можно найти из решения системы (3.6.17) при условии, что $\dot{A} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, т. е.

$$2\vartheta A_0 + P \sin \theta_0 = 0, \quad \xi A_0 - \frac{1}{4}\gamma' A_0^3 + P \cos \theta_0 = 0. \quad (3.6.18)$$

Решая эту систему относительно ξ , получаем выражение, удобное для расчетов и графического построения при заданных значениях γ' , ϑ и P

$$\xi = \frac{1}{4}\gamma' A_0^2 \pm \sqrt{P^2/A_0^2 - 4\vartheta^2}. \quad (3.6.19)$$

На рис. 3.30 приведено типичное семейство соответствующих резонансных кривых для различных значений амплитуды вынуждающей силы. Как видно из этого рисунка, здесь вследствие затухания в системе мы не встречаемся с бесконечным нарастанием амплитуды вынужденных колебаний с ростом расстройки,

как было в консервативном случае (см. § 3.3). Здесь для каждой амплитуды воздействующей силы существует своя максимальная амплитуда установившихся вынужденных колебаний на частоте воздействия. Дальнейшее изменение частоты воздействия (или собственной частоты контура), приводящее к увеличению расстройки ξ до величины, превышающей значение, соответствующее максимальной амплитуде вынужденных колебаний, приводит к скачкообраз-

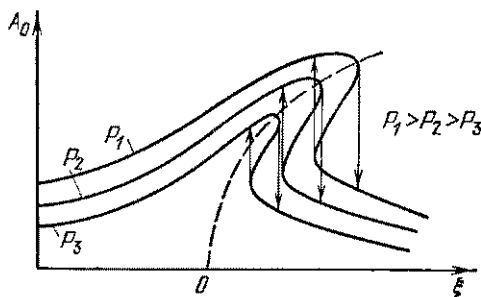


Рис. 3.30. Семейство резонансных кривых для контура с нелинейной индуктивностью.

ному уменьшению этой амплитуды до значений, отвечающих монотонно спадающей ветви резонансной кривой. Уменьшение ξ приводит к возрастанию A_0 в соответствии с устойчивой ветвью кривой вплоть до того значения ξ , при котором касательная к резонансной кривой станет вертикальной. Тогда произойдет «обратный» скачок амплитуды A_0 вверх до выхода на верхнюю устойчивую ветвь резонансной кривой.

Очевидно, что при достаточно малой амплитуде внешнего воздействия и других соотношениях между параметрами γ' и ϑ многозначности может и не быть, и тогда возникает лишь некоторая несимметрия резонансной кривой за счет нелинейных свойств системы, что уже было показано в § 3.5 (см. рис. 3.25).

Возможность получения трех значений стационарных, отличных от нуля амплитуд, из которых два устойчивы, а одно неустойчиво, является следствием того, что для определения стационарных амплитуд необходимо решать уравнение третьей степени относительно A_0 .

Устойчивость найденных решений можно определить методом возмущений; тогда, задаваясь вариациями амплитуды и фазы вблизи стационарных значений A_0 и θ_0 в виде

$$A = A_0 + \xi \quad \text{и} \quad \theta = \theta_0 + \eta,$$

получаем систему укороченных уравнений для вариаций

$$\dot{\xi} = -\vartheta \xi - \frac{1}{2} P \cos \theta_0 \eta, \quad \dot{\eta} = -\frac{1}{2A_0} (\xi - \frac{3}{4} \gamma' A_0^2) \xi - P \frac{\sin \theta_0}{2A_0} \eta. \quad (3.6.20)$$

Если задаться временной зависимостью вариаций в виде

$$\xi = \xi_0 e^{\lambda \tau}, \quad \eta = \eta_0 e^{\lambda \tau},$$

где λ — характеристический показатель (в общем случае комплексный), и учесть, что $P \sin \theta_0 = -2\vartheta A_0$ и $P \cos \theta_0 = A_0 (\frac{1}{4} \gamma' A_0^2 - \xi)$, то получим систему однородных уравнений относительно ξ_0 и η_0

$$\begin{aligned} -(\vartheta + \lambda) \xi_0 - \frac{1}{2} A_0 (\frac{1}{4} \gamma' A_0^2 - \xi) \eta_0 &= 0, \\ -\frac{1}{2A_0} (\xi - \frac{3}{4} \gamma' A_0^2) \xi_0 - (\vartheta + \lambda) \eta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

Составляя определитель для этой системы и требуя для нетривильности решения равенства его нулю, получаем для характеристического показателя λ следующее выражение:

$$\lambda = -\vartheta \sqrt{(\xi - \frac{3}{4} \gamma' A_0^2) (\frac{1}{4} \gamma' A_0^2 - \xi)}. \quad (3.6.22)$$

Для некоторой совокупности параметров колебательной системы действительная часть λ может быть положительной, и тогда система уйдет из этого стационарного состояния; для другой совокупности параметров она может быть отрицательной, и тогда вынужденное колебание с такой амплитудой A_0 будет устойчивым.

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ
ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

§ 4.1. Параметрическое воздействие на колебательные системы

До сих пор мы рассматривали колебательные системы, в которых происходили либо свободные колебания, определяемые начальными условиями, либо чисто вынужденные, возникающие под действием внешней силы, приложенной к колебательной системе. Для электрических систем это соответствовало введению в изучаемый контур вынуждающей э. д. с. или введению заданного тока в какой-либо элемент цепи.

Однако, как известно, существует еще один важный вид воздействия на колебательные системы, который заключается в том, что внешней силой производится изменение одного из параметров системы. Такой вид воздействия мы называем *параметрическим*. В этой главе будут рассмотрены колебательные системы, в которых один из параметров меняется во времени.

Исследуя только системы с одной степенью свободы, мы ограничим свою задачу рассмотрением лишь периодических изменений или, как часто говорят, случаем периодической модуляции параметра. Для выяснения специфических особенностей процессов, вызываемых периодическим параметрическим воздействием, рассмотрим простейшую модель.

Возьмем линейный колебательный контур (рис. 4.1), состоящий из последовательно соединенных L , R и C . Пусть емкость конденсатора контура меняется во времени с помощью какого-то внешнего устройства по изображенному на графике закону (рис. 4.2, а). Предположим кроме того, что заряд на конденсаторе меняется по закону, близкому к гармоническому.

Если при наличии колебаний заряда на конденсаторе $q(t)$ изменять указанным образом его емкость C_0 во времени $C(t)$, то каждый раз при ее уменьшении на $2\Delta C$ энергия конденсатора соответственно увеличивается. Заряд q при скачкообразном изменении емкости не меняется, ибо является инерционной величиной. Пусть частотные и фазовые соотношения между $q(t)$ и $C(t)$ таковы, что

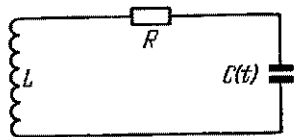


Рис. 4.1. Колебательный контур с меняющейся во времени емкостью.

емкость конденсатора уменьшается каждый раз точно в те моменты времени, когда заряд на емкости проходит через экстремум (рис. 4.2, б). При этом вложение энергии в систему будет максимальным, так как при раздвижении обкладок конденсатора для уменьшения C

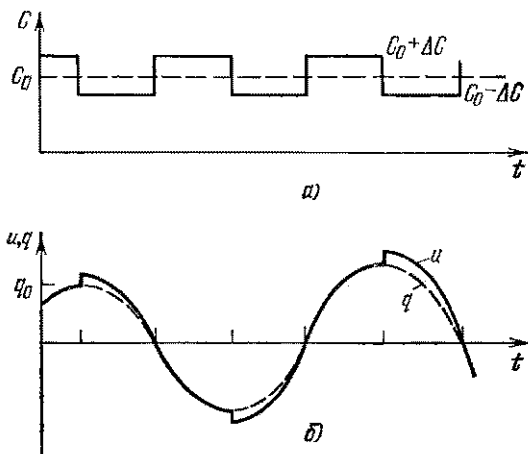


Рис. 4.2. Графики периодического изменения C (а) и u (б) при параметрическом воздействии.

совершается максимальная работа против электростатических сил притяжения между его пластинами. Частота изменения параметра (емкости) в этом случае в два раза выше частоты колебаний в контуре.

Рассчитаем приращение электростатической энергии конденсатора ΔN , которое получается в момент скачка емкости:

$$\Delta N = \frac{q_0^2}{2} \left[\frac{1}{C_0 - \Delta C} - \frac{1}{C_0 + \Delta C} \right] = \frac{q_0^2}{2} \frac{2\Delta C}{C_0^2 - (\Delta C)^2}. \quad (4.1.1)$$

Считая, что $\Delta C \ll C_0$, можно записать

$$\Delta N \approx (q_0^2/2C_0) 2\Delta C/C_0 = N_0 2\Delta C/C_0, \quad (4.1.2)$$

где $N_0 = q_0^2/2C_0$ характеризует энергию, запасенную в конденсаторе до скачка емкости. Если ввести коэффициент m , называемый *глубиной модуляции параметра*:

$$m = \frac{C_{\text{макс}} - C_{\text{мин}}}{C_{\text{макс}} + C_{\text{мин}}} = \frac{\Delta C}{C_0}, \quad (4.1.3)$$

то приращение колебательной энергии в контуре после одного скачкообразного уменьшения емкости равняется $\Delta N = N_0 2m$. Важно отметить, что величина изменения колебательной энергии ΔN в контуре при параметрическом воздействии или, как часто гово-

рят, при параметрической «накачке», пропорциональна самой энергии N_0 , запасенной в системе.

В соответствии с выбранным фазовым соотношением между накачкой и колебанием, действующим в контуре, следующее скачкообразное увеличение емкости не вызовет изменения энергии в системе, ибо в соответствующие моменты времени начальная энергия равна нулю ($q=0$), как показано на рис. 4.2. За один период колебания энергия вкладывается два раза, строго говоря, неодинаковыми порциями, однако в силу условия $\Delta C \ll C_0$ их можно считать одинаковыми, и тогда общее приращение энергии в системе за период равно

$$2\Delta N = N_0 4m = (q_0^2/2C_0) 4m. \quad (4.1.4)$$

Теперь необходимо определить потери в контуре. Если считать колебания заряда приближенно гармоническими, т. е. $q = q_0 \sin \omega t$, то $\dot{q} = \omega q_0 \cos \omega t$, и, следовательно, мощность потерь $W = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 = \frac{1}{2} R \omega^2 q_0^2$.

Энергия, теряемая системой за период T , равна

$$\frac{1}{2} R \omega^2 q_0^2 T = \pi R \omega q_0^2. \quad (4.1.5)$$

Сравнивая (4.1.4) и (4.1.5), получим условие, при выполнении которого вкладываемая энергия превосходит потери, и в системе происходит нарастание колебаний:

$$(q_0^2/2C_0) 4m > \pi R \omega q_0^2, \quad \text{т. е.} \quad m > \frac{1}{2} \pi R C_0 \omega \quad (4.1.6)$$

или

$$m > m_{\text{порог}} = \frac{1}{2} \pi R \sqrt{C_0/L} = \frac{1}{2} d,$$

где $d = \pi R \sqrt{C_0/L}$ — логарифмический декремент затухания контура. Этот процесс возбуждения колебаний за счет периодического изменения энергоемкого параметра колебательной системы мы будем называть *параметрическим возбуждением колебаний* или *параметрическим резонансом*.

Если емкость меняется с той же периодичностью, но по другому закону, то качественно получится тот же результат, хотя коэффициент в соотношении (4.1.6) будет не $\pi/2$, а меньше, так как выбранный нами скачкообразный закон изменения C оптимален для вложения энергии. Нарастание амплитуды возбуждаемого колебания, а следовательно, и увеличение энергии системы происходят за счет работы внешних сил, изменяющих параметр.

В рассмотренном примере параметр изменялся дважды за период возбуждаемых колебаний. Однако можно производить вложение энергии за счет изменения параметра один раз за период, два раза за три периода и вообще при выполнении условия

$$p = 2\omega/n, \quad (4.1.7)$$

где $n = 1, 2, \dots, p$ — частота изменения параметра, ω — частота возбуждаемых колебаний. При этом, конечно, энергозатраты в возбуждаемую систему за период будут тем меньше, чем больше n .

Аналогичные соотношения мы получим, если скачком меняется индуктивность L . При этом $N_L = \frac{1}{2}Li^2$. Однако поскольку при изменении L изменяется также и ток i , то для расчета вложения энергии удобнее пользоваться выражением $N_L = \Phi^2/2L$, где Φ — величина магнитного потока, который является инвариантом при скачкообразном изменении L . Поэтому при изменении L на величину $2\Delta L$

$$\Delta N = \frac{\Phi_0^2}{2} \left[\frac{1}{L_0 - \Delta L} - \frac{1}{L_0 + \Delta L} \right],$$

или при $\Delta L \ll L_0$

$$\Delta N \approx N_0 2\Delta L/L_0 = N_0 2m, \quad (4.1.8)$$

где $m = \frac{L_{\text{макс}} - L_{\text{мин}}}{L_{\text{макс}} + L_{\text{мин}}}$.

Отметим, что в линейной колебательной системе при выполнении условия параметрического возбуждения колебаний (условия параметрического резонанса) происходит неограниченное нарастание амплитуды возбужденных колебаний. Это связано с тем, что и потери, и вложение энергии в данном случае пропорциональны квадрату амплитуды колебаний (пропорциональны колебательной энергии системы). Для вынужденных колебаний в линейных системах при силовом воздействии вложение энергии пропорционально первой степени амплитуды колебаний, а потери по-прежнему пропорциональны квадрату амплитуды, что приводит к образованию конечной амплитуды вынужденных колебаний.

Очевидно, что параметрическое возбуждение колебаний возможно лишь при изменении одного из энергоемких параметров L или C . Изменение R может привести лишь к изменению закона диссипации — затухания имеющихся колебаний, но система останется диссипативной.

Мы уже говорили, что явление, состоящее в возникновении в контуре нарастающего колебательного процесса с частотой, жестко связанной с частотой внешнего параметрического воздействия, и вызываемое именно этим воздействием, принято называть *параметрическим возбуждением колебаний* или *параметрическим резонансом*. Параметрический резонанс имеет место при выполнении определенных соотношений между частотой изменения параметра p и частотой возбуждаемых колебаний ω , близкой или совпадающей с собственной частотой возбуждаемой системы ω_0 ($p = 2\omega/n$), а также при выполнении условий, определяющих изменение параметра m ($m > m_{\text{порог}}$) для данного соотношения частот.

Математическое описание параметрического резонанса в линейных системах производится с помощью линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\ddot{x} + \varphi_1(t) \dot{x} + \varphi_2(t) x = 0,$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — периодические функции времени. Подстановкой $x = z \exp \{ -\frac{1}{2} \int \varphi_1(t) dt \}$ это уравнение преобразуется к уравнению Хилла вида

$$\ddot{z} + \psi(t) z = 0, \quad (4.1.9)$$

где $\psi(t) = [\varphi_2(t) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}_1(t) - \frac{1}{4} \varphi_1^2(t)]$ — периодическая функция.

Частным случаем уравнения Хилла является уравнение Матьё

$$\ddot{y} + \omega_0^2 (1 + m \cos pt) y = 0. \quad (4.1.10)$$

Теория этих уравнений разработана с большой полнотой, известны и все существенные свойства их решений, обычно записываемых в виде

$$x = c_1 \chi(t) e^{\lambda t} + c_2 \chi(-t) e^{-\lambda t}, \quad (4.1.11)$$

где $\chi(t)$ — ограниченные функции с периодом, равным периоду изменения параметра или половине этого периода, и λ — комплексная величина, называемая *характеристическим показателем*, вещественная часть которой определяет, имеет ли решение возрастающий характер или нет. Полный анализ решений математически довольно сложен и для линейных случаев и, тем более, для нелинейных задач. Поэтому он сводится к нахождению таких областей значений соотношения частот $2\omega_0/p$ и глубин модуляции m , для которых имеются комплексные значения λ_1 и λ_2 . Тогда в системе могут происходить нарастающие колебания, т. е. возникает параметрический резонанс.

В 1927 г. А. А. Андронов и М. А. Леонтович рассчитали эти области значений для систем без затухания и с затуханием, описываемых уравнениями

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + m \cos pt) x = 0$$

и

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 (1 + m \cos pt) y = 0.$$

Результаты их расчетов в виде графиков показаны на рис. 4.3. Из них видно, что при наличии потерь в системе вершины областей параметрической неустойчивости поднимаются; они лежат на прямой, которая составляет угол $\varphi = \arctg 2\delta$ с осью абсцисс. Заштрихованные области соответствуют нарастающему процессу с частотой $\omega = n p / 2 \approx \omega_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Вне этих областей в случае консервативной системы получается сложный незату-

хающий процесс, а в случае диссипативной — затухающий процесс колебаний. На границе областей имеет место баланс энергии.

Из графиков видно также, что для заданного значения m_0 ширина областей параметрического возбуждения для разных

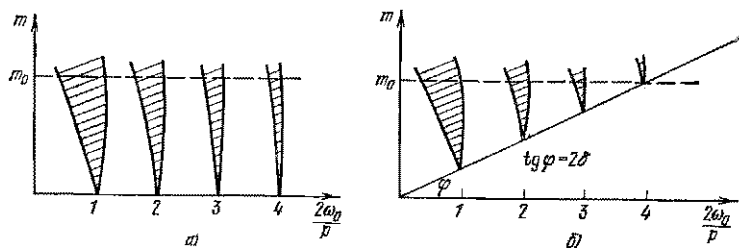


Рис. 4.3. Области параметрического возбуждения для системы без затухания (а) и с затуханием (б).

номеров n различна для консервативной и неконсервативной систем. Ширина области неустойчивости с одним и тем же номером области всегда меньше у диссипативной колебательной системы, чем у консервативной. С ростом этого номера из-за более редкого вложения энергии в систему ($p = 2\omega/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$) необходимо увеличить глубину модуляции реактивного параметра для получения той же ширины области параметрического возбуждения.

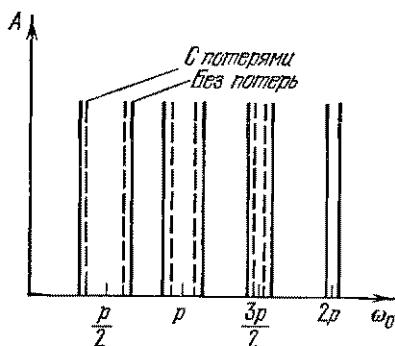


Рис. 4.4. Амплитудно-частотные характеристики параметрически возбуждаемой линейной системы.

(полосы, ограниченные пунктиром). Из рис. 4.4 видно также, что для выбранного значения глубины модуляции (параметра m) и при данном конкретном значении затухания 2δ в системе возбудить параметрические колебания в четвертой области неустойчивости не представляется возможным.

Теперь необходимо рассмотреть, что нового вносит в протекание параметрического резонанса наличие нелинейности. Даже без дальнейшего анализа ясно, что наличие нелинейности, вызы-

вая неизохронность, будет приводить с ростом амплитуды колебаний к изменению частоты собственных колебаний системы, а следовательно, к нарушению условий резонанса и к ограничению амплитуды параметрически возбужденных колебаний.

Мы уже познакомились с тем, как неизохронность проявляется при обыкновенном силовом резонансе (см. рис. 3.25), и теперь следует рассмотреть ее для случая параметрического резонанса. Постараемся выяснить некоторые наиболее существенные особенности поведения интересующих нас систем при допущениях и предположениях, весьма далеких от строгости, но позволяющих правильно оценить характер параметрического резонанса в ряде нелинейных систем. Для простоты рассмотрим консервативную систему, состоящую из индуктивности и конденсатора с сегнетоэлектриком (рис. 4.5). Пусть в этой системе происходит такое периодическое изменение индуктивности, что

$$L(t) = \frac{L_0}{1 + m \cos pt}. \quad (4.1.12)$$

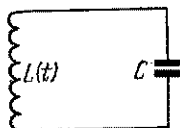


Рис. 4.5. Схема контура с меняющейся во времени индуктивностью и конденсатором с сегнетоэлектриком $C(q)$.

Тогда уравнение, описывающее колебания в системе при $p = 2\omega$, будет

$$\ddot{q} + (1 + m \cos 2\omega t) (1/L_0) u_C(q) = 0.$$

Выразив зависимость $u_C(q)$ в виде $u_C(q) = (1/C_0) f(q)$, получим

$$\ddot{q} + \omega_0^2 (1 + m \cos 2\omega t) f(q) = 0, \quad (4.1.13)$$

где $\omega_0^2 = 1/L_0 C_0$ — собственная частота колебаний при достаточно малых амплитудах, $f(q)$ — функция, описывающая нелинейную характеристику конденсатора.

Заметим, что точно такое же уравнение было бы получено при постоянстве индуктивности, но при периодическом изменении значения емкости с глубиной модуляции m по закону $C(t) = C_0/(1 + m \cos 2\omega t)$.

Для случая контура с нелинейной индуктивностью при периодическом изменении L или C описывающее его уравнение не удастся привести к такому простому виду. Однако общий характер явлений, происходящих в подобном контуре, остается тем же, так что для простоты ограничимся приближенным исследованием решений уравнения (4.1.13).

Будем искать приближенное решение вида $q = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, т. е. вида установившегося колебания ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$) с частотой, равной половине частоты параметрического воздействия, что соответствует первой области параметрического возбуждения. Подставляя это решение в уравнение (4.1.13), имеем

$$-a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 (1 + m \cos 2\omega t) f(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = 0.$$

Разлагая $f(q)$ в ряд Фурье и сохраняя лишь члены с $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ (постоянный член в силу свойств нелинейного конденсатора равен нулю), находим уравнение, из которого, группируя коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, получим систему двух уравнений

$$\omega_0^2 \alpha_1 (1 + m/2) - a\omega^2 = 0, \quad \omega_0^2 \beta_1 (1 - m/2) - b\omega^2 = 0. \quad (4.1.14)$$

Здесь, как и раньше при замене ωt на τ , имеем

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau) \cos \tau \, d\tau,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a \cos \tau + b \sin \tau) \sin \tau \, d\tau.$$

Отсюда можно найти амплитуду возможного стационарного решения $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ и его фазу $\varphi = \arctg(a/b)$. Правда, приближенное решение $q = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ следует еще исследовать на устойчивость для определения того, насколько оно физически реально; должны быть изучены и пути установления процесса.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда нелинейная характеристика емкости задана выражением

$$f(q) = q + \gamma q^3. \quad (4.1.15)$$

В этом случае

$$\alpha_1 = a + \frac{3}{4}\gamma a^3 + \frac{3}{4}\gamma ab^2, \quad \beta_1 = b + \frac{3}{4}\gamma b^3 + \frac{3}{4}\gamma a^2 b,$$

и мы приходим к уравнениям

$$\omega_0^2 (a + \frac{3}{4}\gamma a^3 + \frac{3}{4}\gamma ab^2) (1 + \frac{1}{2}m) - a\omega^2 = 0,$$

$$\omega_0^2 (b + \frac{3}{4}\gamma b^3 + \frac{3}{4}\gamma a^2 b) (1 - \frac{1}{2}m) - b\omega^2 = 0,$$

или

$$\omega_0^2 a (1 + \frac{3}{4}\gamma A^2) (1 + \frac{1}{2}m) - a\omega^2 = 0,$$

$$\omega_0^2 b (1 + \frac{3}{4}\gamma A^2) (1 - \frac{1}{2}m) - b\omega^2 = 0, \quad (4.1.16)$$

где $A^2 = a^2 + b^2$.

Эта система допускает следующие решения: $a = b = A = 0$, что соответствует отсутствию в системе установившегося периодического движения (состояние покоя). Такое состояние является возможным равновесным состоянием системы, и вопрос о его осуществимости при данных значениях параметров системы и характере внешнего воздействия можно решить только на основе рассмотрения вопроса об устойчивости данного состояния. Анализ устойчивости системы по отношению к малым отклонениям от состояния покоя приводит к линейному уравнению с периодически изменяющимся коэффициентом (типа уравнения Маттье). Для этого уравнения, как мы

уже указывали (см. рис. 4.3), вблизи значений $\omega_0/\omega = 1, 2, 3, \dots, n$ при данном m_0 — глубине модуляции параметра — существуют определенные области значений ω , в которых состояние покоя становится неустойчивым, и в системе должен возникать и нарастать колебательный процесс с частотами $\omega, 2\omega, 3\omega$ и т. д.

Мы в нашем приближенном рассмотрении ограничимся сначала лишь решением с частотой ω , соответствующим нарушению условий устойчивости состояния покоя ($a=b=0$), в первой области неустойчивости в окрестности $\omega_0 = \omega$.

В рассматриваемой системе возможны также решения $a \neq 0, b=0$ или $a=0, b \neq 0$. Случай $a \neq 0, b \neq 0$ невозможен, так как он приводит к несовместным уравнениям. Принимая $a \neq 0, b=0$, получаем

$$\omega_0^2 (1 + \frac{3}{4}\gamma A^2) (1 + m/2) = \omega^2,$$

откуда

$$A^2 = \frac{4}{3\gamma} \left[\frac{\omega^2}{\omega_0^2 (1 + m/2)} - 1 \right]. \quad (4.1.17)$$

Значение A тем больше, чем меньше γ — коэффициент, характеризующий степень нелинейности системы.

Этот результат вполне очевиден и из качественных соображений. В самом деле, чем меньше γ , тем при большей амплитуде колебаний средняя частота собственных колебаний системы за счет ее неизохронности изменится на величину, достаточную для выведения системы из области параметрического резонанса.

Амплитуда A реальна ($A^2 > 0$) при $\gamma > 0$ только в случае

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2 (1 + m/2)} - 1 > 0,$$

т. е. при $\omega/\omega_0 > \sqrt{1 + m/2}$, $\omega > \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + m/2}$. Если $a=0, b \neq 0$, то из второго уравнения (4.1.16) находим решение

$$A^2 = \frac{4}{3\gamma} \left[\frac{\omega^2}{\omega_0^2 (1 - m/2)} - 1 \right], \quad (4.1.18)$$

откуда получим условие существования реального решения

$$\omega/\omega_0 > \sqrt{1 - m/2}, \quad \omega > \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - m/2}.$$

Если в системе нелинейность имеет другой характер, при котором $\gamma < 0$ и, следовательно, средняя частота свободных колебаний уменьшается с ростом амплитуды, то для вынужденных колебаний при параметрическом воздействии получим два выражения

$$A^2 = \frac{4}{3|\gamma|} \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 (1 + m/2)} \right], \quad A^2 = \frac{4}{3|\gamma|} \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 (1 - m/2)} \right]. \quad (4.1.19)$$

Изобразим полученные результаты графически. На рис. 4.6 в координатных осях ω^2 и A^2 показаны зависимости, описываемые (4.1.17), (4.1.18).

Характер процессов в изучаемой системе при параметрическом воздействии с данной глубиной модуляции m можно себе представить следующим образом.

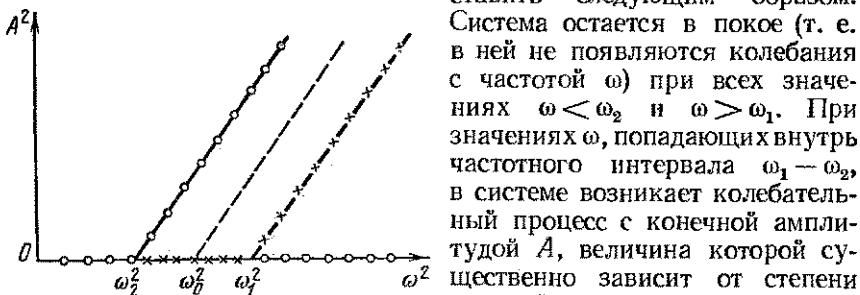


Рис. 4.6. Кривые параметрического резонанса $A^2(\omega^2)$ для консервативной нелинейной системы.

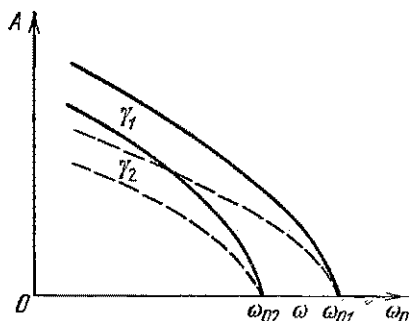


Рис. 4.7. Кривые параметрического резонанса $A(\omega_0)$ для нелинейной консервативной системы при двух значениях коэффициента нелинейности ($\gamma_2 > \gamma_1$) и при $m=0,2$.

Неизохронность системы приводит к тому, что при возникновении параметрически возбужденных колебаний собственная ее частота с ростом амплитуды изменяется, и сама система выводится на границу соответствующей области параметрического возбуждения. Это приводит к уменьшению энергии, вкладываемой в систему устройством, изменяющим параметр, и, тем самым, ограничивает нарастание амплитуды.

Система остается в покое (т. е. в ней не появляются колебания с частотой ω) при всех значениях $\omega < \omega_2$ и $\omega > \omega_1$. При значениях ω , попадающих внутрь частотного интервала $\omega_1 - \omega_2$, в системе возникает колебательный процесс с конечной амплитудой A , величина которой существенно зависит от степени нелинейности системы (величины γ). В зависимости от характера нелинейности (знак γ) колебания при дальнейшем изменении ω за пределы указанной области (первой области параметрического возбуждения $2\omega_0/p = \omega_0/\omega \approx 1$) или спадают до нуля, или нарастают, тогда как состояние покоя на этих частотах ω вновь становится устойчивым. Таким образом, здесь на примере проведенного расчета мы видим ограничивающую роль нелинейного элемента системы, позволяющего получить конечные (ограниченные) амплитуды параметрически возбужденных колебаний в консервативной системе, подобно тому, как это имело место в нелинейной консервативной системе при непосредственном силовом воздействии.

Если считать, что нам задана частота воздействия $p = 2\omega$, и принять, что в изучаемом случае регулируемой величиной является ω_0 — собственная частота системы (для малых амплитуд), то полученные нами соотношения будут изображаться графически в координатах ω_0 и A так, как показано на рис. 4.7. Изображенные на нем области параметрического возбуждения для $\gamma > 0$ (кривые параметрического резонанса) для исследованного частотного соотношения, соответствующего первой области неустойчивости линейного уравнения Матье, переходят при $\gamma \rightarrow 0$ в соответствующую область, изображенную на рис. 4.4. Здесь, как и в случае резонанса при силовом воздействии, получается деформация резонансной кривой для линейной консервативной системы и ее наклон в сторону больших или меньших частот в зависимости от знака нелинейной поправки, т. е. в зависимости от типа неизохронной системы.

§ 4.2. Общие замечания о резонансных явлениях в колебательных системах

Выше уже указывалось, что характер протекания резонансных явлений в колебательных системах с одной степенью свободы существенно меняется в зависимости от того, является ли изучаемая система линейной или обладает определенными нелинейными свойствами, а также от характера рассматриваемого воздействия. Даже ограничиваясь случаем гармонической формы воздействия, мы встречаемся с весьма различными особенностями резонансных явлений при прямом (силовом) или параметрическом воздействиях. В предыдущих параграфах рассматривались процессы, протекающие при простейших видах воздействия в линейных и нелинейных системах.

Консервативная идеализация, существенно упрощая рассмотрение, в ряде случаев приводила к выводам, не оправдывающимся в реальных системах. Но вместе с тем ряд принципиально важных особенностей вынужденных процессов в нелинейных системах мало зависит от наличия или отсутствия потерь (разумеется, если они не слишком велики), и выводы о резонансных явлениях в консервативных системах лишь с небольшими количественными поправками можно распространить на неконсервативные системы. С учетом этих замечаний рассмотрим некоторые уже установленные особенности резонансных процессов в нелинейных системах при воздействиях различного типа. В нелинейных системах (в отличие от линейных) при прямом гармоническом воздействии резонансные явления наблюдаются при ряде частотных соотношений, а не только при совпадении частоты воздействия с собственной частотой системы.

В линейной системе с одной степенью свободы резонанс (единственный) наступает при

$$p = \omega_0,$$

где p — частота силового воздействия, ω_0 — собственная частота.

В нелинейной системе резонансные явления возможны при

$$\omega_0 = n p,$$

где n может принимать любое целое положительное значение 1, 2, ... Возможность возникновения резонансных процессов при различных значениях n определяется видом нелинейности системы.

Далее, следует отметить, что в нелинейной системе (в отличие от линейной) даже при консервативной идеализации всегда имеет место ограничение амплитуды вынужденных колебаний. Это ограничение обязано своим существованием свойству неизохронности колебаний в нелинейных системах.

Такие специфические особенности резонансных явлений (а также форма резонансных кривых) привели к тому, что подобные процессы в нелинейных системах часто выделяют в особую категорию и называют их *феррорезонансом*. Это связано с тем, что чаще всего такие процессы наблюдаются в системах, содержащих индуктивности с ферромагнитными сердечниками или конденсаторы с сегнетоэлектриками. В зависимости от типа нелинейности форма резонансных кривых при феррорезонансе может иметь тот или иной специфический вид, но всегда сохраняется одна основная особенность, обусловленная отсутствием такого значения частоты воздействия, при котором даже в консервативной системе наблюдалось бы бесконечное возрастание амплитуды.

При силовом воздействии вынужденные колебания существуют при любых соотношениях между частотой воздействия p и собственной частотой системы ω_0 и возбуждаются при любой амплитуде воздействующей силы. При наступлении резонанса происходит лишь соответствующее увеличение амплитуды вынужденных колебаний.

Переходя к резонансным явлениям при параметрическом воздействии — параметрическому резонансу, можно также отметить ряд их особенностей. Прежде всего следует обратить внимание на то, что при параметрическом воздействии существует другой, чем при прямом, ряд частотных соотношений, при которых наблюдаются резонансные явления. При чисто параметрическом воздействии даже в линейной системе резонансные эффекты возникают при $\omega_0 \approx n p / 2$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, существуют дискретные области параметрического возбуждения колебаний, или параметрического резонанса.

Нелинейный случай отличается от линейного случая только деформацией границ этих областей при конечных амплитудах

возбуждившихся колебаний. Поэтому для нелинейных систем (в отличие от линейных) мы всегда имеем конечную амплитуду параметрически возбужденных колебаний опять-таки за счет неизохронности колебаний. В линейных же системах при осуществлении условия параметрического резонанса в любой из частотных областей резонанса будет происходить неограниченное нарастание амплитуды. При этом для возникновения параметрического резонанса в диссипативной системе необходимо, чтобы амплитуда воздействия (глубина модуляции параметра m) была больше некоторого порогового значения, различного для разных частотных областей.

Для резонансных явлений в нелинейных консервативных системах как при силовом, так и при параметрическом воздействии характерна и принципиальна несимметрия резонансных кривых, связанная с законом неизохронности колебаний рассматриваемой системы. Это общее свойство присуще также и неконсервативным системам, но лишь при условии, что по крайней мере один из их консервативных (энергоемких) параметров зависит от основной переменной, т. е. по введенной терминологии нелинейен (например, нелинейная емкость, нелинейная индуктивность, нелинейная жесткость и т. п.).

Для нелинейных систем (в отличие от линейных) неприменим принцип суперпозиции, и поэтому не представляется возможным разделить в результирующем процессе компоненты, вызванные отдельными составляющими внешнего воздействия. Это обстоятельство чрезвычайно усложняет анализ вынужденных процессов в нелинейных системах даже в консервативном приближении и делает не вполне корректным рассмотрение случая прямого силового воздействия без учета одновременного воздействия на параметры системы. В самом деле, если учесть, что вынужденный периодический процесс, обязанный своим происхождением прямому воздействию, вызывает в свою очередь периодическое изменение параметров нелинейной системы, то становится ясным, что результирующие резонансные явления могут иметь весьма сложный характер. Частотные соотношения, при которых происходят резонансные явления, также будут задаваться условиями нелинейных прямого или параметрического резонансов. Эти обстоятельства не позволяют для нелинейных систем полное разделение двух упомянутых типов резонансных явлений. Поэтому представляется разумным, выделяя случай чисто параметрического резонанса, не противопоставлять ему случай силового, или прямого, резонанса для нелинейной системы. Можно лишь классифицировать виды воздействия, связанные с различными способами внесения энергии в систему, что является определяющим для протекания резонансных явлений.

В консервативной системе при прямом воздействии внешняя сила в каждый данный момент уравнивается упругими и

инерциальными силами системы, и, следовательно, внешняя сила производит работу и, тем самым, увеличивает запас колебательной энергии системы лишь во время нестационарных процессов. Это происходит при амплитуде вынужденного процесса, меньшей стационарного ее значения, определяемого данными частотными соотношениями и параметрами системы. В таком случае интеграл работы внешней силы за период не равен нулю. По достижении стационарного значения амплитуды работа внешней силы за период становится равной нулю, и в консервативной системе дальнейший процесс не сопровождается изменением запаса ее колебательной энергии.

Лишь в случае линейности системы при $\omega_0 = p$ не существует конечной амплитуды стационарного вынужденного движения, а будет иметь место непрерывное возрастание амплитуды вынужденного колебания и соответствующий рост запаса колебательной энергии системы за счет работы, производимой силой внешнего воздействия. Это и есть то явление, которое мы называем *линейным резонансом в консервативной системе*. Очевидно, что характер его протекания принципиально изменится при введении в рассмотрение любого сколь угодно малого затухания. При невыполнении условий резонанса учет малого затухания должен вносить лишь небольшие количественные поправки.

Таким образом, при прямом воздействии энергия вынужденных колебаний образуется за счет непосредственной работы внешней силы при движении системы. При параметрическом воздействии увеличение запаса колебательной энергии происходит с преобразованием энергии из одного типа в другой. Так, например, механическая работа, производимая при соответствующем изменении емкости конденсатора (при модуляции его емкости посредством периодического раздвигания или сближения пластин), приведет к изменению запаса электростатической и общей энергии электрических колебаний в электрическом колебательном контуре. Интеграл этой работы при периодическом воздействии не равен нулю (больше нуля) при частотах воздействия вблизи точного выполнения условий

$$\omega_0 = np/2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

что соответствует наличию при таких частотах нарастающего вынужденного процесса. Это и есть параметрический резонанс, а области частот, внутри которых работа внешних сил, расходуемая на периодическое изменение параметра, создает увеличение запаса колебательной энергии системы, являются областями параметрического резонанса.

В линейной системе нарастание амплитуды параметрически возбужденных колебаний неограниченно для всех частотных соот-

ношений, лежащих внутри областей параметрического резонанса. Скорость нарастания амплитуды колебаний различна для различных областей, а внутри каждой области изменяется от максимального значения при точном выполнении частотного соотношения

$$\omega_0 = nr/2$$

до нуля на границе областей. Вне пределов этих областей работа внешнего воздействия за период равна нулю, и наличие воздействия вызывает лишь соответствующее изменение формы собственных колебаний, если они существуют в рассматриваемой консервативной системе при данных начальных условиях.

В нелинейных системах, как было показано на отдельных примерах (см. рис. 4.6 и 4.7), даже в консервативном приближении неограниченного нарастания параметрически возбужденных колебаний не происходит, ибо присущая нелинейным системам неизохронность приводит с ростом амплитуды колебания к нарушению требуемых частотных и фазовых соотношений и к прекращению вложения энергии в систему со стороны механизма, изменяющего параметр, а следовательно, к установлению определенной амплитуды вынужденных колебаний.

Сопоставим основные свойства силового и параметрического резонансов.

1. Силовой резонанс возникает при $p \approx \omega_0$ или $nr \approx \omega_0$ (в нелинейной системе), но вынужденные колебания существуют при любой частоте воздействия p . В случае параметрического резонанса существуют лишь ограниченные частотные интервалы вблизи точного выполнения соотношения $p = 2\omega_0/n$, внутри которых возникают параметрически возбужденные колебания.

2. Любая по величине внешняя сила может вызвать силовой резонанс. Для возникновения параметрического резонанса в неконсервативной системе величина воздействия должна быть больше некоторой пороговой величины.

3. В силу существования порогового значения амплитуды параметрического воздействия в неконсервативной системе существует ограниченное число частотных интервалов, внутри которых осуществляется параметрический резонанс.

4. Для линейной неконсервативной системы при силовом резонансе всегда характерна ограниченная амплитуда колебаний, так как потери растут быстрее вложения энергии.

5. В линейной неконсервативной системе при параметрическом резонансе происходит неограниченный рост амплитуды, так как и вложение, и потери энергии пропорциональны квадрату амплитуды и только в нелинейной системе происходит ограничение колебаний.

§ 4.3. Свойства активных систем и параметрическая регенерация

Уже из общей теории параметрического резонанса следует, что путем периодического изменения реактивного (энергоемкого) параметра при определенных соотношениях между частотой воздействия на параметр и собственной частотой системы можно реализовать нарастающий по амплитуде процесс, т. е. обеспечить увеличение энергии колебаний системы. Поэтому колебательные системы, испытывающие определенное параметрическое воздействие, можно отнести к классу активных колебательных систем.

Активными колебательными системами называются системы, в которых постоянно или в определенные интервалы времени (например, в течение части периода колебаний) происходит увеличение энергии колебаний за счет источника энергии, входящего в состав рассматриваемой системы.

Вложение колебательной энергии в систему за счет энергии источника можно представить себе как процесс частичной или полной компенсации потерь в системе. Этот процесс для данного типа движения (например, для колебаний данной частоты и формы или для определенного широкого класса типов колебаний) за счет внутренних свойств системы называется *регенерацией*.

Для того чтобы обеспечить компенсацию потерь или пополнение запаса колебательной энергии в системе должен содержаться внутренний источник в сочетании с устройством, преобразующим энергию этого источника в требуемую форму (батарея с электронной лампой, батарея с туннельным диодом, источник тока с газоразрядным прибором, генератор напряжения или тока определенной частоты, вызывающий изменение энергоемкого параметра во времени и т. д.).

Для физического и математического описания активных систем широко используется понятие «отрицательное сопротивление». Если ограничиться случаем гармонических колебаний, то мощность потерь (рассеиваемая мощность) для линейной неконсервативной системы можно записать в виде $W = \frac{1}{2} R i^2$, где $R > 0$. Точно так же можно обозначить вводимую в систему мощность, компенсирующую потери, только тогда необходимо считать, что сопротивление R_- меньше нуля. В этом случае R_- отражает действие одного из возможных конкретных механизмов, подкачивающего энергию в исследуемую систему.

Таким образом, отрицательное сопротивление уменьшает общее сопротивление цепи. Если представить себе цепь, состоящую из последовательно соединенных R и R_- , то общее сопротивление цепи будет

$$R_{\Sigma} = R - R_-.$$

Как в колебательных системах можно создать отрицательное сопротивление путем периодического воздействия на какой-либо

реактивный параметр системы? В § 4.1 мы, рассматривая случай скачкообразного изменения емкости в колебательном контуре с L , R , C , нашли, что при изменении емкости с соответствующей фазой дважды за период колебаний в контуре вложение энергии за период равно $(\frac{1}{2}q_0^2/C_0)4m$, где q_0 — амплитуда заряда на емкости, C_0 — среднее значение емкости, m — глубина модуляции емкости.

Параметрическое вложение энергии в систему можно формально приравнять «отрицательным» потерям энергии в контуре за период колебаний; тогда получаем

$$\frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_0} 4m = \pi R_- q_0^2 \omega,$$

откуда определим отрицательное сопротивление

$$R_- = \frac{2m}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C_0}} = \frac{2m}{\pi} \rho, \quad (4.3.1)$$

где $\rho = \sqrt{L/C_0}$.

Таким образом, в колебательном контуре с периодически изменяющимся реактивным параметром при указанных частотных

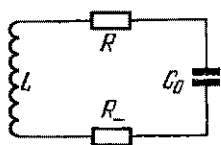


Рис. 4.8. Эквивалентная схема контура с регенерацией.

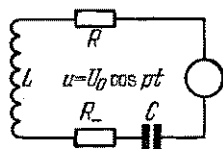


Рис. 4.9. Эквивалентная схема регенерированного контура с внешним воздействием.

и фазовых соотношениях происходит регенерация, формально описываемая введением отрицательного сопротивления R_- ; тогда колебательный контур, изображенный на рис. 4.1, можно представить эквивалентной схемой, показанной на рис. 4.8. При этом энергия, вкладываемая в систему, черпается из механизма, производящего периодическое изменение реактивного параметра. Подобный тип регенерации обычно называют *параметрической регенерацией*.

С помощью параметрического воздействия можно влиять на вынужденные колебания в колебательном контуре. В частности, при параметрической регенерации реализуется работа системы либо в качестве параметрического усилителя, либо в качестве параметрического генератора, что определяется соотношением между омическим R и отрицательным R_- сопротивлениями. При параметрическом усилении $R > R_-$, при параметрическом возбуждении (генерации) $R < R_-$.

Рассмотрим линейный последовательный колебательный контур (рис. 4.9), в котором, кроме обычного омического сопротивления R , имеется отрицательное сопротивление R_- , обусловленное параметрической регенерацией; кроме того, в контур вводится внешняя сила $u = U_0 \cos pt$. Будем считать, что собственные колебания, вызванные начальными воздействиями внешней силы и механизма изменения реактивного параметра, через определенное время затухнут, и в системе останутся только регенерированные вынужденные колебания с частотой внешней силы. При резонансе амплитуда тока, как известно, равна

$$I_0 = \frac{U_0}{R - R_-}.$$

Отсюда следует, что введение регенерации действительно приводит к возрастанию резонансной амплитуды тока в контуре. В этом и заключается принцип работы регенеративных усилителей различных классов, в том числе параметрических усилителей.

Мощность, выделяемая на сопротивлении $W = \frac{1}{2} R I_0^2$, в регенерированном контуре увеличивается, ибо $W_1 = \frac{1}{2} R [U_0 / (R - R_-)]^2$, тогда как без регенерации она равнялась $W_0 = \frac{1}{2} R (U_0 / R)^2$. Таким образом, получаем

$$\frac{W_1}{W_0} = \left(\frac{R}{R - R_-} \right)^2 \quad (4.3.2)$$

и, следовательно, $W_1 / W_0 > 1$. Итак, в линейном, частично регенерированном ($R > R_-$) контуре происходит усиление введенных в него извне колебаний. Введение отрицательного сопротивления приводит к увеличению отбираемой от источника колебаний энергии.

Для осуществления параметрической регенерации в колебательном контуре можно изменять во времени не емкость C , а второй реактивный параметр — индуктивность L . Выражение для отрицательного сопротивления в этом случае получается таким же, как и при изменении емкости, т. е.

$$R_- = \frac{2m}{\pi} \sqrt{\frac{L_0}{C}} = \frac{2m}{\pi} \rho,$$

где $m = \Delta L / L_0$.

Приведенные выше выражения для отрицательного сопротивления при параметрической регенерации были получены в предположении об оптимальной фазе изменения параметра при двукратном его изменении за период колебаний, т. е. в первой области параметрического возбуждения. Очевидно, что фазовые соотношения между колебаниями, существующими в регенерируемой системе, и силой, изменяющей реактивный (реактивные) параметр системы, существенно влияют на ход процессов и характер параметрической регенерации.

Для иллюстрации указанных выше особенностей параметрической регенерации рассмотрим линейную систему, представляющую собой последовательный колебательный контур с периодически изменяющейся емкостью $C(t)$, в который включена внешняя сила $u(t)$ (рис. 4.10). Пусть емкость конденсатора меняется по закону

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \cos 2\omega t},$$

а выражение для внешней силы запишем в виде

$$u(t) = P_0 \cos pt + \tilde{Q}_0 \sin pt,$$

чтобы можно было учесть фазовый сдвиг между внешней силой и накачкой — механизмом, изменяющим емкость конденсатора во времени. Уравнение движения в такой колебательной системе можно записать в виде

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = u(t).$$

Вводя безразмерный заряд $x = q/q_0$ и безразмерное время $\tau = \omega t$, получим

$$\ddot{x} + 2\vartheta \dot{x} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + m \cos 2\tau) x = P \cos \frac{p}{\omega} \tau + \tilde{Q} \sin \frac{p}{\omega} \tau, \quad (4.3.3)$$

где $2\vartheta = R/L\omega$, $P = P_0/Lq_0\omega^2$, $\tilde{Q} = \tilde{Q}_0/Lq_0\omega^2$.

Если ограничиться исследованием колебательных процессов в первой области неустойчивости, то необходимо считать, что частота внешней силы p близка к половине частоты изменения параметра 2ω , т. е. $p \approx \omega$, и что в свою очередь собственная частота ω_0 близка к ω , т. е. $\omega \approx \omega_0$; тогда можно записать, что $p/\omega = 1 + \Delta$, где Δ — малая величина.

Для упрощения решения задачи и анализа результатов допустим, что $\omega = \omega_0$; тогда уравнение примет вид

$$\ddot{x} + 2\vartheta \dot{x} + (1 + m \cos 2\tau) x = P \cos (1 + \Delta) \tau + \tilde{Q} \sin (1 + \Delta) \tau. \quad (4.3.4)$$

Если не рассматривать процессы установления, а интересоваться только стационарными (установившимися) состояниями, то решение полученного уравнения можно искать методом гармонического баланса, причем будем считать, что $x = u \cos \tau + v \sin \tau$, где $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Тогда, беря первую и вторую производные

$$\dot{x} = -u \sin \tau + v \cos \tau, \quad \ddot{x} = -u \cos \tau - v \sin \tau,$$

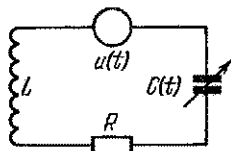


Рис. 4.10. Схема линейного колебательного контура с периодически меняющейся емкостью и внешним воздействием.

и подставляя их вместе с решением $x = u \cos \tau + v \sin \tau$ в дифференциальное уравнение (4.3.4), получим выражение для квадрата амплитуды колебаний в контуре с частотой ω в зависимости от параметров системы и фазового сдвига между внешней силой и модуляцией реактивного параметра. При этом мы пренебрегаем членами, содержащими утроенную частоту решения.

Дальнейший анализ проведем для двух качественно отличных друг от друга случаев. Первый из них называется *когерентным* и относится к ситуации, когда между частотой внешней силы и половиной частоты изменения параметра имеет место точное равенство, т. е. $p = \omega$ ($\Delta = 0$). Разумеется, такое соотношение частот отвечает только первой области неустойчивости; для других областей неустойчивости в соответствии с их номером требуются другие соотношения частоты внешней силы p и частоты изменения параметра. Итак, в гармоническом приближении в когерентном случае для первой области неустойчивости имеем

$$A^2 = u^2 + v^2 = \rho^2 \frac{16\vartheta^2 + m^2 + 8m\vartheta \sin 2\varphi}{4(4\vartheta^2 - m^2/4)^2}, \quad (4.3.5)$$

где $\rho^2 = P^2 + \tilde{Q}^2$, $\varphi = \arctg(P/\tilde{Q})$. Здесь через ρ обозначена амплитуда внешней силы, действующей на колебательную систему.

Из полученного выражения для квадрата амплитуды вынужденных колебаний в контуре при наличии когерентного параметрического воздействия ясно видна роль фазовых соотношений между внешней силой и силой, изменяющей реактивный параметр системы.

Действительно, при $\varphi = \pi/4$ максимальная амплитуда вынужденных колебаний в контуре равна

$$A_{\max} = \frac{\rho}{2\vartheta - m/2} = \frac{\sqrt{P^2 + \tilde{Q}^2}}{2\vartheta - m/2}, \quad (4.3.6)$$

т. е. амплитуда вынужденных колебаний ($m > 0$) увеличивается по сравнению с амплитудой, которая была в отсутствие модуляции параметра ($m = 0$). Это эквивалентно внесению в систему отрицательного сопротивления и называется случаем «сильного» параметрического резонанса.

При $\varphi = -\pi/4$ получаем минимальную амплитуду вынужденных колебаний в контуре

$$A_{\min} = \frac{\rho}{2\vartheta + m/2} = \frac{\sqrt{P^2 + \tilde{Q}^2}}{2\vartheta + m/2}. \quad (4.3.7)$$

Так как величина 2ϑ здесь характеризует потери в системе, то увеличение знаменателя на положительную величину $m/2$ приводит к уменьшению амплитуды вынужденных колебаний по сравнению с амплитудой, которая была в отсутствие модуляции параметра

($m=0$). При таком фазовом соотношении часть энергии вынужденных колебаний отбирается от источника внешнего сигнала и передается в механизм накачки. Это эквивалентно внесению в колебательный контур дополнительного положительного сопротивления, уменьшающего амплитуду заряда (тока) в контуре, что можно описать введением $2\theta_{\text{эки}} = 2\theta + m/2$.

Таким образом, в зависимости от соотношения между фазой воздействия на параметр и фазой усиливаемого сигнала в системе получаем параметрическую регенерацию или параметрическую дегенерацию системы. На этом принципе можно создать системы фазовой селекции.

Рассмотрим *некогерентный* случай параметрического усиления. При этом расстройка Δ не равна нулю, и поэтому в правой части дифференциального уравнения (4.3.4) следует записать внешнюю силу в виде

$$P \cos(1 + \Delta)\tau + \tilde{Q} \sin(1 + \Delta)\tau = P(\cos \tau \cos \Delta\tau - \sin \Delta\tau \sin \tau) + + \tilde{Q}(\sin \tau \cos \Delta\tau + \sin \Delta\tau \cos \tau) = P'(\tau) \cos \tau + \tilde{Q}'(\tau) \sin \tau. \quad (4.3.8)$$

Из-за малости расстройки ($\Delta \ll 1$) амплитуды $P'(\tau)$ и $\tilde{Q}'(\tau)$ мало изменяются за период основного колебания. Поэтому в каждый момент времени процесс параметрического воздействия на вынужденные колебания можно приближенно считать установившимся и применять для расчетов амплитуд выражения, полученные ранее для стационарного случая. Поэтому, несмотря на то, что $P'(\tau)$ и $\tilde{Q}'(\tau)$ медленно изменяются во времени, фазовый сдвиг между внешней силой и накачкой можно по-прежнему рассчитывать для каждого момента времени по формуле

$$\varphi(\tau) = \arctg(P'(\tau)/\tilde{Q}'(\tau)). \quad (4.3.9)$$

Отсюда видно, что $\varphi(\tau)$ также является переменной во времени величиной, причем медленно меняющейся. Поэтому исследуемая система будет проходить через все возможные значения разности фаз между усиливаемым сигналом и накачкой, в том числе и через значения, при которых достигается максимальная и минимальная амплитуды, т. е. система попеременно будет переходить от сильного резонанса к слабому, затем снова к сильному и т. д. Следствием этого является амплитудная модуляция вынужденного колебания с частотой $2\Delta\omega$. За один период в системе два раза реализуется сильный и два раза слабый параметрический резонанс. Такое амплитудно-модулированное колебание можно представить как биения двух гармонических компонент с близкими частотами и постоянными амплитудами.

На диаграмме частот это выглядит следующим образом (рис. 4.11). Здесь в полосе пропускания исследуемого контура оказывается сумма двух компонент с частотами внешней силы p

и разностью между частотой накачки и частотой внешней силы $2\omega - p$. Из рис. 4.11 также видно, что частота накачки 2ω лежит далеко за пределами прозрачности рассматриваемого контура.

Таким образом, в некогерентном случае в системе возникают две близкие гармонические компоненты, в сумме дающие биения.

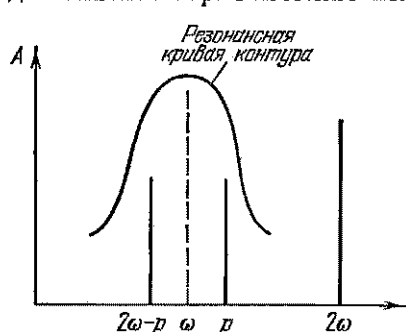


Рис. 4.11. Диаграмма распределения частот в некогерентном параметрическом усилителе.

Если общая энергия этих сложных колебаний больше, чем энергия простых вынужденных колебаний при $m=0$, то на основе таких систем можно создать регенеративные усилители. При помощи элементарных численных расчетов нетрудно убедиться в том, что при сильном параметрическом резонансе в систему вкладывается большая энергия, чем отбирается при слабом параметрическом резонансе.

Такой тип параметрических усилителей наиболее распространен, так как слабый принимаемый сигнал, подлежащий параметрическому усилению, принципиально некогерентен сигналу местного генератора накачки.

Регенеративный параметрический усилитель, работающий по принципу компенсации потерь в системе за счет внесения в систему некоторого отрицательного сопротивления, в принципе может давать неограниченное по величине усиление. Действительно, при сильном резонансе за счет вложения энергии происходит частичная компенсация потерь в системе и при $\sqrt{P_0^2 + \tilde{Q}_0^2} = \text{const}$ увеличивается амплитуда тока I_0 , так что мощность, выделяющаяся на нагрузке, $W = \frac{1}{2} R_n I_0^2$ растет. Источник внешней силы при этом должен вкладывать в систему неограниченно возрастающую мощность (идеальный генератор напряжения).

В более реальном случае ограниченной мощности источника сигнала (внутреннее сопротивление источника больше нуля), усиление можно получить за счет увеличения сопротивления нагрузки R_n при соответствующей параметрической регенерации системы, когда

$$2\vartheta_{\text{экр}} = 2\vartheta - m/2.$$

Дополнительная мощность в этом случае получается только за счет изменения реактивного параметра (накачки).

Итак, при работе нашей системы в качестве параметрического усилителя (т. е. в недовозбужденном режиме, когда $m < m_{\text{порог}}$) для когерентного случая исходная форма гармонического сигнала

сохраняется и он лишь увеличивает свою мощность. В некогерентном случае также происходит усиление мощности, но форма сигнала не сохраняется и вместо гармонического колебания с одной спектральной компонентой получается сложный сигнал, состоящий из двух гармонических компонент, наблюдаемый как квазигармонический сигнал с периодически изменяющейся амплитудой. Этот процесс усиления в некогерентном случае можно формально описать с помощью представления о периодически изменяющемся отрицательном сопротивлении (от некоторой величины отрицательного сопротивления до значения, близкого к омическому сопротивлению колебательного контура).

§ 4.4. Основные особенности одноконтурных параметрических усилителей

В предыдущем параграфе было показано, что, используя параметрическую регенерацию электрического контура, можно создать усилитель электрических колебаний.

Достоинство подобных параметрических усилителей состоит в том, что они позволяют усиливать сигналы, внося в тракт усиления лишь небольшие собственные шумы. Типичным параметрическим усилителем является охлаждаемый до низких температур колебательный контур, в котором реактивный параметр, например емкость конденсатора, периодически меняется во времени. Уровень тепловых шумов в такой системе можно сделать минимальным.

Первые опыты по параметрическому резонансу производились в 30-е годы путем механического перемещения ферромагнитного сердечника внутрь катушки индуктивности колебательного контура. Используя нелинейную зависимость намагничивания сердечника от проходящего по вспомогательной обмотке тока, можно было и электрическим путем менять реактивный параметр контура. На этих принципах были построены тогда первые в мире параметрические машины (генераторы) Мандельштама и Папалекси. Однако из-за неизбежных больших потерь за счет петли гистерезиса и низких механических частот перемещения сердечника реализовать в те годы параметрическую регенерацию в диапазоне радиочастот для практических целей оказалось невозможным.

Значительный прогресс в этой области и в теории параметрических явлений, которым мы обязаны школе Мандельштама и Папалекси, был достигнут в 50-е годы после появления высококачественных магнитных материалов (ферритов) и параметрических полупроводниковых диодов. Вольт-амперная и вольт-фарадная характеристики полупроводникового диода показаны на рис. 4.12. Как мы видим, в запертом ($u < 0$) направлении ток через диод практически отсутствует, а емкость легко меняется

в зависимости от величины напряжения, приложенного к $p-n$ -переходу. Это обстоятельство позволяет весьма просто управлять емкостью последнего путем приложения к нему постоянного и переменного напряжений. При приближении напряжения

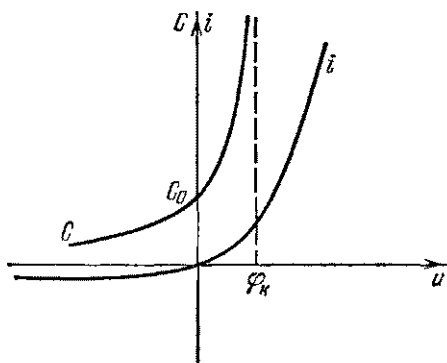


Рис. 4.12. Характеристики полупроводниковых диодов.

к контактной разности потенциалов φ_K , толщина $p-n$ -перехода становится равной нулю, а емкость диода — бесконечной. Таким образом, получается некоторая нелинейная зависимость емкости диода от напряжения, а следовательно, и заряда на конденсаторе $q_c(u)$.

Пусть на нелинейную емкость подано напряжение накачки u_n и напряжение подлежащего усилению сигнала u_c , причем напряжение сигнала $u_c \ll u_n$. Тогда функция $q = f(u)$ (заряд),

где $u = u_n + u_c$, можно разложить в ряд в окрестности u_n

$$q = f(u) = f(u_n) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=u_n} u_c + \dots$$

Если нас интересуют периодические колебания с частотой, отличной от частоты накачки, т. е. с частотой сигнала, то

$$q_c = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=u_n} u_c = C_d u_c. \quad (4.4.1)$$

Величина $C_d = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=u_n}$ имеет характер и размерность емкости, однако, в отличие от обычной емкости, она называется *дифференциальной емкостью* и зависит от выбора рабочей точки на вольт-фарадной характеристике, т. е.

$$C_d = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=u_n} = \frac{\partial q}{\partial u}, \quad (4.4.2)$$

тогда как обычная емкость $C = q/u$. Это обстоятельство необходимо учитывать в расчетах при составлении уравнений Кирхгофа для цепей с переменными реактивными параметрами, где величина заряд выражается как

$$q = \int_0^u C_d du.$$

Параметрические диоды (ПД) отличаются исключительно малой инерционностью: дисперсия в них отсутствует до частот порядка 10^{11} Гц. При расчетах параметрических усилителей (генераторов) параметрический диод заменяется эквивалентной схемой, показанной на рис. 4.13 и справедливой для большинства типов ПД в любых рабочих диапазонах частот, включая СВЧ. Здесь через R обозначено сопротивление потерь, C_n — емкость монтажного патрона, L — паразитная индуктивность вводов. В диапазоне СВЧ типовые параметры ПД следующие: C_d от 1 до 0,1 пФ, R от 10 до 1 Ом, $L \approx 0,1$ нГн, C_n от 1 до 0,5 пФ (вторые значения относятся к ПД высокого качества).

Для узких германиевых $p-n$ -переходов функцию $C_d(u)$ можно аппроксимировать выражением

$$C_d = \frac{C_0}{(1 - u/\varphi_K)^{1/k}}, \quad (4.4.3)$$

где $k \approx 2$ и зависит от типа полупроводника и технологии его изготовления.

При расчетах параметрических усилителей необходимо задать зависимости $q(u)$ или $u(q)$. Первую зависимость можно получить, используя выражение заряда через дифференциальную емкость, т. е.

$$q = \int_0^u C_d du = C_0 \int_0^u \frac{du}{(1 - u/\varphi_K)^{1/2}} = 2C_0\varphi_K [1 - (1 - u/\varphi_K)^{1/2}]. \quad (4.4.4)$$

Отсюда путем простых алгебраических преобразований нетрудно получить выражение для $u = u(q)$:

$$u = (q/C_0)(1 - \beta q), \quad (4.4.5)$$

где коэффициент нелинейности $\beta = 1/(4C_0\varphi_K)$.

Задавая напряжение накачки u_n относительно большим, а напряжение сигнала u_c малым, можно осуществить нелинейное изменение емкости C_d с u_n . Допущение, что $u_c \ll u_n$ оправдано использованием в качестве элементов параметрических усилителей колебательных систем с большой добротностью. При этом контур настраивается на частоту, близкую к частоте малого (усиливаемого) сигнала, и он практически не реагирует на колебание с частотой накачки. Тогда в нулевом приближении можно считать, что напряжение накачки меняет (модулирует) в контуре только реактивный параметр, и поэтому усиливается только вынужденное колебание, на частоту которого настроен контур параметрического усилителя. В полосе пропускания (прозрачности) контура в общем

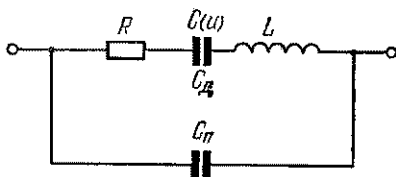


Рис. 4.13. Эквивалентная схема параметрического диода.

случае оказываются два близких гармонических колебания, одно с частотой внешней силы p , другое с разностной частотой ω_n — $p = 2\omega - p \approx p$.

Одноконтурные параметрические усилители обладают усилением в 20—30 дБ на каскад; эквивалентную шумовую температуру можно довести до нескольких десятков градусов по шкале Кельвина, ширина полосы пропускания усилителя может достигать 10—15% от «сигнальной» частоты. Очевидно, что такие параметрические усилители не могут усиливать сигналы сложной формы, спектр которых содержит набор частот от нулевой (близкой к нулевой) до некоторой высокой частоты.

Для усиления подобных сигналов (видеосигналов) необходимо использовать другую разновидность параметрического усилителя. Принцип действия параметрического усилителя видеосигналов (ПУВ) основан на возможности модуляции с частотой сигнала реактивного параметра колебательного контура, в котором существуют колебания, задаваемые внешним генератором. Рассмотрим работу параметрического усилителя видеосигналов на примере ПУВ с магнитным (ферритовым) сердечником в катушке индуктивности параллельного колебательного контура.

Если магнитное поле создается током, протекающим через обмотку, размещенную на ферромагнитном сердечнике, то его магнитная проницаемость является функцией этого тока. Тогда дифференциальная магнитная проницаемость $\mu_d = \partial B / \partial H$ сердечника при действии на него дополнительного магнитного поля H (подмагничивание) имеет вид, показанный на рис. 4.14. Как мы видим, от величины тока (дополнительного магнитного поля) зависит индуктивность обмотки L , что приводит к перестройке колебательного контура по частоте. Такая перестройка контура, в котором поддерживаются вынужденные колебания высокой частоты, приводит к модуляции сигналом амплитуды этих вынужденных колебаний (рис. 4.15) и после их демодуляции позволяет получить усиленный сигнал.

Действительно, пусть на одном и том же ферромагнитном сердечнике размещены две обмотки — контурная и сигнальная, и пусть по параллельному колебательному контуру протекает гармонический ток (ток накачки), задаваемый внешним генератором. Частота последнего может изменяться вблизи резонансной частоты контура и значительно (в 5—10 раз) превышать частоту сигнала. В результате модуляции индуктивности сигналом настройка контура изменяется (контур «перестраивается»), что приводит как к изменению уровня накачки в нем (амплитудная модуляция) так и к изменению со временем разности фаз контурного тока и тока внешнего генератора (фазовая модуляция). Амплитудную и фазовую модуляции, несущие информацию о сигнале, можно выделить с помощью амплитудного и фазового детекторов. Ампли-

тудно-фазовая модуляция тока накачки будет тем эффективнее, чем больше добротность контура и чем значительнее глубина модуляции индуктивности сигналом (т. е. чем больше чувствительность устройства). Кроме того, глубина и характер модуляции

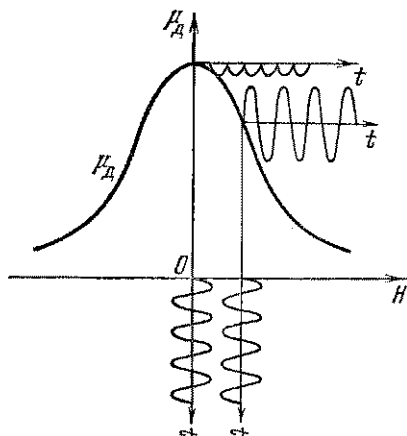


Рис. 4.14. Кривая изменения дифференциальной магнитной проницаемости ферромагнитного сердечника в зависимости от поля.

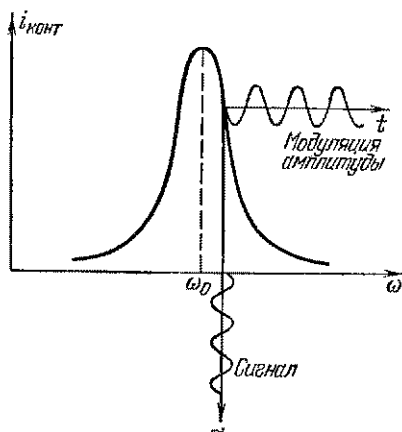


Рис. 4.15. Принцип действия параметрического усилителя с модуляцией и демодуляцией.

высокочастотных колебаний зависят от расстройки контура относительно частоты внешнего генератора. Мощность продетектированного тем или иным образом сигнала может превысить мощность входного сигнала.

Для неискаженного воспроизведения сигнала необходимо следующее: устранить симметрию кривой μ_d (i_c) путем постоянного подмагничивания ферритового сердечника; выполнить требование линейной зависимости $L = f(i_c)$ в пределах изменения тока сигнала: при работе с амплитудной модуляцией следует изменить настройку контура относительно частоты накачки.

Блок-схема одноконтурного параметрического усилителя видеосигналов с нелинейной индуктивностью показана на рис. 4.16. Ширина полосы такого усилителя уменьшается с увеличением добротности Q (коэффициент усиления при этом растет) и зависит

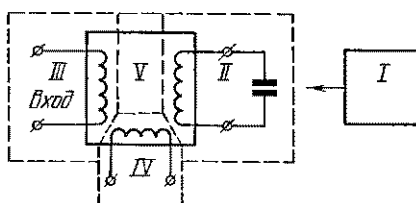


Рис. 4.16. Блок-схема одноконтурного параметрического усилителя видеосигналов.

I — генератор гармонической накачки, II — параллельный колебательный контур, III — входная цепь, IV — цепь подмагничивания, V — ферритовый сердечник.

от расстройки, так как ею определяется уровень боковых полос. Увеличение частоты накачки приводит к расширению полосы пропускания контура, если Q неизменно, и, следовательно, к уширению полосы пропускания усилителя.

Для получения достаточного усиления необходимо, чтобы ферритовый модулятор обладал достаточной чувствительностью (сильная зависимость μ_d феррита от магнитного поля сигнала). Для того чтобы напряжение с частотой накачки не проникло в сигнальную цепь, применяется, например, модулятор со взаимно перпендикулярной ориентацией взаимодействующих полей.

Эквивалентная схема усилителя приведена на рис. 4.17. Здесь генератор гармонической накачки заменен генератором тока с внутренним сопротивлением R_i , амплитудой тока I_0 и частотой ω ; $L = L_0 - \Delta L$ (при увеличении тока сигнала индуктивность падает), L_0 — индуктивность без действия сигнала, r_1 и r_2 — потери в контуре.

Коэффициент s показывает долю включения L в левую ветвь резонансного контура.

Система уравнений Кирхгофа для этой системы имеет вид

$$(1-s)L \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = sL \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2,$$

$$sL \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 = R_i i_3, \quad i = i_1 + i_2 + i_3.$$

Разрешая систему относительно i_1 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{(1-s)sL^2}{R_i} \frac{d^3 i_1}{dt^3} + \left[1 + \frac{sr_1 + r_2(1-s)}{R_i} \right] L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \\ + \left(r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{R_i} + \frac{sL}{C_1 R_i} \right) \frac{di_1}{dt} + \\ + \frac{1}{C_1} \left(1 + \frac{r_2}{R_i} \right) i_1 = sL \frac{d^2 i}{dt^2} + r_2 \frac{di}{dt}, \end{aligned}$$

Рис. 4.17. Эквивалентная схема параметрического усилителя видеосигналов.

где $i = I_0 \cos \omega t$.

Вводя, как обычно, безразмерные величины $\tau = \omega t$ и $x = i_1/X_0$ (X_0 — ток в стационарном режиме) и обозначения $\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C_1}$, $m = \Delta L/L_0$ (глубина модуляции параметра сигналом), $2\xi = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ (расстройка), $\delta = (r_1 + r_2)/2\omega L_0 \approx 1/2Q_0$ (затухание ненагруженного контура), $\varepsilon = (r_1 + r_2)/R_i$, $A = -sI_0/X_0$, $B = -r_2 I_0/\omega L_0 X_0$, $q = r_2/(r_1 + r_2)$, считая, что $|m| \ll 1$, $\xi \ll 1$, $\delta \ll 1$, $s\varepsilon/\delta \ll 1$ (добротности ненагруженного и шунтированного контуров велики), $\varepsilon \ll 1$ (внутреннее сопротивление источника питания велико), $|(1-s)s\varepsilon/\delta| \ll 1$, и пренебрегая величинами высших порядков малости, получим

$$\frac{s\varepsilon}{2\delta} (1-s) \ddot{x} + \ddot{x} + 2\delta \left(1 + \frac{s\varepsilon}{4\delta^2} \right) \dot{x} + (1+m-2\xi)x = A \cos \tau + B \sin \tau,$$

где $|A| \approx \delta \ll 1$, так как ток в контуре вблизи резонанса порядка sQI_0 , $|B| \approx \frac{1}{s} \delta^2 \frac{r_2}{r_1 + r_2} \ll 1$. Итак, окончательно получаем

$$\ddot{x} + x = -k\ddot{x} - D\dot{x} + (2\xi - m)x + A \cos \tau + B \sin \tau = \mu f(\ddot{x}, \dot{x}, x, \tau),$$

где $k = \frac{s(1-s)}{2\delta} \epsilon$ и $D = 2\delta \left(1 + \frac{s\epsilon}{4\delta^2}\right)$ характеризуют затухание в нагруженном контуре.

Решение ищем в виде

$$x = C \cos(\tau + \varphi),$$

$$\dot{x} = -C \sin(\tau + \varphi),$$

$$\ddot{x} = C \sin(\tau + \varphi),$$

где $C = C(\tau)$, $\varphi = \varphi(\tau)$.

Укороченные уравнения для этой системы записываются следующим образом:

$$\dot{C} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(\ddot{x}, \dot{x}, x, \tau) \sin(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi),$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{2\pi C} \int_0^{2\pi} \mu f(\ddot{x}, \dot{x}, x, \tau) \cos(\tau + \varphi) d(\tau + \varphi).$$

С учетом того, что

$$\sin \tau = \sin(\tau + \varphi) \cos \varphi - \sin \varphi \cos(\tau + \varphi),$$

$$\cos \tau = \cos(\tau + \varphi) \cos \varphi + \sin(\tau + \varphi) \sin \varphi,$$

получаем

$$\dot{C} = -\frac{1}{2} [(D - k)C + A \sin \varphi + B \cos \varphi],$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{2C} [(2\xi - \alpha)C + A \cos \varphi - B \sin \varphi].$$

В отсутствие сигнала ($m=0$) стационарные амплитуды C_0 и φ_0 находятся из системы уравнений ($\dot{C} = \dot{\varphi} = 0$)

$$(D - k)C_0 + A \sin \varphi_0 + B \cos \varphi_0 = 0,$$

$$2\xi C_0 + A \cos \varphi_0 - B \sin \varphi_0 = 0.$$

В режиме усиления ($m \neq 0$) при малом сигнале амплитуду и фазу можно представить в виде $C = C_0 + c$, $\varphi = \varphi_0 + \eta$. При $c \ll C_0$, $\eta \ll \varphi_0$ можно считать, что

$$\sin \varphi \approx \sin \varphi_0 + \eta \cos \varphi_0,$$

$$\cos \varphi \approx \cos \varphi_0 - \eta \sin \varphi_0,$$

и тогда укороченные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \frac{1}{2} [2\eta \xi C_0 - c(D - k)], \\ \dot{\eta} &= \frac{1}{2} [m - 2\xi c/C_0 - \eta(D - k)].\end{aligned}$$

Исключая из этой системы η и $\dot{\eta}$, получаем уравнение для огибающей высокочастотного колебания

$$\ddot{c} + (D - k)\dot{c} + [1/4(D - k) + \xi^2]c = 1/2 m \xi C_0.$$

Считаем, что сигнал гармонический, т. е. $m = m_0 \exp \left[j \frac{\Omega}{\omega} \tau \right]$ (частота сигнала $\Omega \ll \omega$), и нелинейные искажения отсутствуют. Нетрудно показать, что модуль коэффициента усиления такой системы по току $|K_{I_0}|$ равен

$$\begin{aligned}|K_{I_0}| &= \\ &= \frac{2\beta_0 |\xi|}{L_0} \frac{\sqrt{s^2 + 4\delta^2 q^2}}{V[4\xi^2 + (D - k)^2] \{[(D - k)^2 + 4\xi^2 - 4(\Omega/\omega)^2]^2 + 16(D - k)^2(\Omega/\omega)^2\}},\end{aligned}$$

где $\beta_0 = \Delta L / \Delta i_c \approx \Delta L / i_c$ (при малых сигналах).

Из выражения для $|K_{I_0}|$ можно определить оптимальный коэффициент включения s (дифференцированием по s). При $s = 1$ имеем

$$|K_{I_0}| = \frac{\beta_0 I_0 Q^2 |a|}{L_0} \frac{1}{V(1 + a^2) \{[1 + a^2 - 4(\Omega/\omega)^2 Q^2]^2 + 16(\Omega/\omega)^2 Q^2\}},$$

где $Q = Q_0 / \sqrt{1 + Q_0^2 r / R_i}$ — добротность шунтированного контура, $a = 2\xi Q$ — обобщенная расстройка.

Из выражения для $|K_{I_0}|$ видно влияние параметров контура на величину коэффициента усиления системы. В частности, обратная пропорциональность $|K_{I_0}| \sim 1/L_0$ означает увеличение чувствительности системы (глубины модуляции) при уменьшении L_0 и прочих неизменных параметров.

Из выражения для $|K_{I_0}|$ можно определить: 1) оптимальную расстройку a_x , при которой для данной частоты сигнала усиление максимально; оно определяется соотношением

$$[1 + 4(\Omega_x/\omega)^2 Q^2] = a_x^2 \{2a_x^2 + (3 - 8Q^2(\Omega_x/\omega)^2)\},$$

2) частоту сигнала Ω_0 , при которой усиление при фиксированной расстройке a_0 превышает усиление на всех остальных частотах; оно определяется соотношением

$$4\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)^2 Q^2 = a_0^2 - 1.$$

Из последнего выражения видно, что частотная характеристика (коэффициент усиления) имеет максимум на частотах сигнала, отличных от нуля, только при $|a_0| > 1$, так как при $|a_0| < 1$

Ω_0 — мнимая величина. При $|a_0| \leq 1$ $|K_{I_0}|$ монотонно падает с ростом частоты сигнала от некоторого максимального значения при $\Omega = 0$. Величина максимумов коэффициента усиления для разных частотных характеристик (при $|a_0| > 1$) падает с увеличением $|a_0|$ по закону

$$|K_{I_0}|_{\Omega_0} = \frac{\beta_0 I_0 Q^2}{2L_0} \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}}.$$

Отношение усиления на постоянном токе к усилению на оптимальной частоте равно

$$\frac{|K_{I_0}|_{\Omega=0}}{|K_{I_0}|_{\Omega=\Omega_0}} = 2 \frac{a_0}{1+a_0^2}.$$

При $|a_0| \approx 1$ максимумы частотных характеристик $|K_{I_0}|$ выражены слабо. Ширину полосы пропускания находят из уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |K_{I_0}|_{\Omega=0} = |K_{I_0}|_{\Omega=\Omega_{гр}} \quad \text{при } |a_0| \leq 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |K_{I_0}|_{\Omega=\Omega_0} = |K_{I_0}|_{\Omega=\Omega_{гр}} \quad \text{при } |a_0| \geq 1;$$

тогда ширина полосы пропускания Δf (в герцах) равняется

$$\Delta f = (f_n/2Q) \sqrt{\sqrt{2(1+a_0^4)} - (1-a_0^2)} \quad \text{при } |a_0| \leq 1,$$

$$\Delta f = (f_n/2Q) \sqrt{a_0^2 + 2|a_0| - 1} \quad \text{при } 1 \leq |a_0| \leq 1 + \sqrt{2},$$

$$\Delta f = (f_n/2Q) [\sqrt{a_0^2 + 2|a_0| - 1} - \sqrt{a_0^2 - 2|a_0| - 1}] \quad \text{при } |a_0| \geq 1 + \sqrt{2},$$

где $f_n = \omega/2\pi$.

При $|a_0| \leq 1 + \sqrt{2}$ полоса пропускания содержит нулевую частоту (постоянный ток), при $|a_0| > 1 + \sqrt{2}$ левая граничная частота полосы сдвинута вправо относительно нуля (постоянного тока). Максимальное значение произведения $|K_{I_0}|$ на ширину полосы пропускания соответствует $|a_0| = 1 + \sqrt{2}$ (при этом $f_{\text{опт.с}} = \sqrt{2(1+\sqrt{2})} f_n/2Q \approx (1,1/Q) f_n$, где $f_{\text{опт.с}} = \omega/2\pi$) и равно

$$(|K_{I_0}| \Delta f)_{\text{макс}} = \frac{\beta_0 I_0 Q f_n}{2 \sqrt{2} \sqrt{2} L_0} \approx 0,3 \frac{\beta_0 I_0 Q f_n}{L_0}.$$

Это максимальное значение $(|K_{I_0}| \Delta f)_{\text{макс}}$ получается при $|K_{I_0}|$, равном $1/\sqrt{2}$ от максимального усиления, приходящегося на постоянный ток. Увеличение $(|K_{I_0}| \Delta f)$ может быть достигнуто: а) улучшением чувствительности ферритового модулятора, б) выбором более высокой частоты накачки, в) увеличением уровня тока накачки в контуре и повышением добротности контура.

§ 4.5. Параметрическая генерация электрических колебаний (параметрические генераторы)

Выше уже упоминалось, что для нелинейных систем не представляется возможным провести четкое разграничение между силовым и параметрическим воздействиями. При силовом воздействии вынужденный колебательный процесс, вызванный внешней силой, будет за счет нелинейных свойств системы приводить к периодическому изменению соответствующих параметров. Поэтому в конечном счете результирующий вынужденный процесс может иметь некоторое сходство с параметрически возбуждаемым колебательным процессом; может нарушаться монотонность изменения амплитуды при изменении соотношения частот и могут наблюдаться интенсивные колебания при частотных соотношениях, типичных для параметрических резонансов.

В связи с этими особенностями поведения нелинейных систем представляется разумным собственно параметрическим воздействием на такую систему считать воздействие, при котором принудительное изменение реактивных (энергетических) параметров системы не

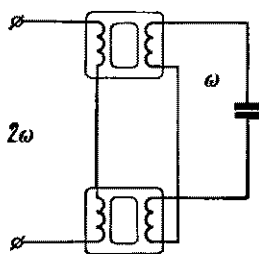


Рис. 4.18. Схема балансного модулятора индуктивности.

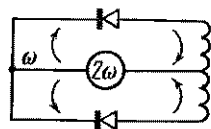


Рис. 4.19. Схема балансного модулятора емкости.

сопровождается введением в систему соответствующих периодических сил, способных вызвать обычным путем вынужденные колебания. Это, например, может быть реализовано при механическом изменении емкости или индуктивности.

Возможно также осуществление балансных схем (рис. 4.18, 4.19), в которых подбором соответствующих элементов можно добиться практически полной компенсации э.д.с., наводимых на частоте накачки 2ω в системы, и рассматривать последние как колебательные цепи с периодически изменяющимися параметрами. В первой схеме (см. рис. 4.18) происходит периодическое изменение индуктивности с частотой 2ω ; во второй (см. рис. 4.19) — периодическое изменение емкости, образованной двумя запертыми $p-n$ -переходами в полупроводниковых диодах, также с частотой внешнего воздействия (накачки) 2ω . Предположим теперь, что условия параметрического возбуждения выполнены, и тогда амплитуда любого малого колебания с частотой, удовлетворяющей соот-

ношению $\omega = 1/2 n p$, где n — номер соответствующей области возбуждения, будет нарастать за счет вложения в систему энергии со стороны устройства, периодически изменяющего параметр с частотой p . Вследствие нелинейности системы нарастание амплитуды можно ограничить, и при некотором значении амплитуды подобных параметрически возбужденных колебаний возможно установление энергетического баланса между потерями и вложением энергии.

Как отмечалось в § 4.1, в консервативной нелинейной системе установление стационарной амплитуды характеризуется уменьшением до нуля величины вкладываемой энергии и реализуется за счет изменения средних значений нелинейных реактивных параметров (емкости или индуктивности). В диссипативной же системе достижение энергетического баланса и соответственно установление стационарной амплитуды происходит при отличных от нуля вложениях энергии и может осуществляться не только за счет эффективной расстройки системы, связанной с изменением среднего значения одного из реактивных параметров системы, но при наличии в возбуждаемой системе нелинейного затухания и путем изменения величины потерь. Если в возбуждаемой системе значения L и C не зависят от величин тока и напряжения, а эффективные потери растут с увеличением амплитуд колебаний быстрее, чем квадрат последней, что соответствует возрастанию величины R или нагрузки с увеличением тока (это весьма легко реализовать, например, за счет термических эффектов), то можно ввести в рассмотрение медленно меняющееся затухание и представить дело так, как будто с ростом амплитуды возбужденных колебаний увеличивается наклон прямой, проходящей через вершины областей неустойчивости, и области неустойчивости поднимаются вверх (см. рис. 4.3, б). Это будет происходить до тех пор, пока изображающая точка, ранее находившаяся внутри одной из областей неустойчивости, не окажется на ее границе, что будет свидетельствовать о наступлении энергетического баланса.

При ограничении же амплитуды за счет нелинейности реактивных параметров процесс установления равновесного режима можно связывать с соответствующим перемещением изображающей точки и некоторой деформацией самих областей неустойчивости, происходящими до тех пор, пока изображающая точка также не окажется на границе области параметрического возбуждения. В зависимости от механизма ограничения нарастания амплитуд параметрически возбуждаемых колебаний процесс установления стационарной амплитуды идет либо монотонно, либо имеет осцилляторный характер.

При изучении кривых параметрического резонанса, т. е. кривых, изображающих зависимость амплитуды установившихся колебаний при параметрическом возбуждении от соотношения между частотой изменения параметра и собственной частотой колебаний

возбуждаемого контура, можно наблюдать различные типы кривых при различных видах нелинейности в диссипативных системах.

Если в нелинейной системе затухание постоянно и не зависит от тока или напряжения в системе, то различие между получающимися кривыми параметрического резонанса для диссипативных систем и консервативных (см. рис. 4.6) сводится к тому, что в первых происходит смыкание двух различных ветвей кривой и исключается возможность бесконечного возрастания амплитуды при увеличении расстройки системы (т. е. ухода ее собственной частоты от значения, определяемого точным выполнением соотношения $\omega_0 = 1/2 \, n p$). Примерный характер кривых для случая параметрического возбуждения контура с постоянным затуханием и с нелинейной емкостью при различных типах этой нелинейности

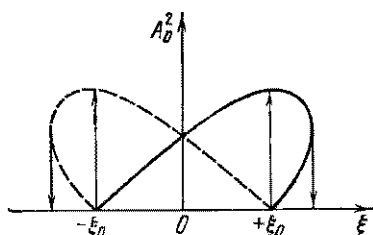


Рис. 4.20. Кривые параметрического резонанса в диссипативном контуре с нелинейной емкостью.

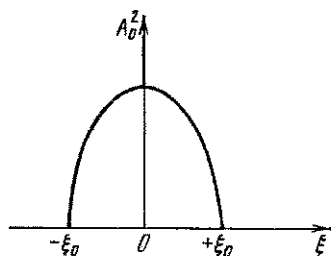


Рис. 4.21. Кривые параметрического резонанса в контуре с нелинейным затуханием.

показан на рис. 4.20. Сплошные и пунктирные кривые соответствуют двум типам нелинейности реактивного параметра (емкости). Сплошной кривой соответствует убывание среднего значения емкости, пунктирной — ее возрастание с ростом амплитуды колебаний. Видно также характерное для параметрического резонанса существование ограниченной области расстроек, т. е. ограниченного частотного интервала, внутри которого возможно параметрическое возбуждение, причем ширина этого интервала $2\xi_0$ зависит от глубины модуляции параметра m и обращается в нуль при m , равном критическому значению $m_{кр}$, соответствующему равенству энергии, вносимой в систему при изменении параметра, потерям в системе.

Когда ограничение амплитуды осуществляется за счет нелинейного сопротивления при постоянных средних значениях реактивных параметров, форма кривых параметрического резонанса имеет вид, показанный на рис. 4.21. Здесь характерна симметрия кривой параметрического резонанса и отсутствие неустойчивых ветвей и скачкообразных изменений амплитуды при монотонном изменении расстройки. По-прежнему в качестве основного признака параметрического резонанса остается существование конечного интервала

расстроек ($2\xi_0$), внутри которого возможно осуществление параметрического возбуждения.

Из всего изложенного выше вытекает, что для теоретического исследования явления параметрической генерации колебаний необходимо привлечь к рассмотрению нелинейные характеристики параметров системы. Их анализ позволяет получить как закон установления амплитуды параметрических колебаний, так и выражения для стационарных значений этих амплитуд.

Рассмотрим более подробно методом ММА процессы, происходящие в параметрическом генераторе при ограничении амплитуды колебаний в нем с помощью нелинейного элемента.

Одноконтурный параметрический генератор с нелинейным затуханием. Рассмотрим последовательный колебательный контур с элементами L , C , R и допустим, что во времени меняется только реактивный параметр $C(t)$, а активное (омическое) сопротивление зависит от проходящего через него тока $R(i)$. Тогда при параметрическом воздействии такая колебательная система с нелинейным сопротивлением (рис. 4.22) при определенных условиях, налагаемых на параметры системы, может стать одноконтурным параметрическим генератором.

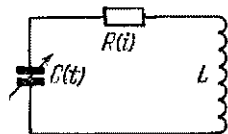


Рис. 4.22. Схема параметрического генератора с нелинейным сопротивлением.

Если омическое сопротивление увеличивается при увеличении проходящего через него тока, то повышается диссипация энергии в системе и, как следствие, наступает баланс между параметрически подкачиваемой энергией и энергией, рассеиваемой на сопротивлении, т. е. ограничение амплитуды колебаний. При этом необходимо такое сопротивление, которое увеличивается с возрастанием тока вне зависимости от его направления в цепи. Этому требованию можно удовлетворить, если выбрать закон падения напряжения на сопротивлении в виде

$$u_R = R_0 (i + \beta_0 i^3), \quad (4.5.1)$$

что равносильно выбору следующей характеристики сопротивления:

$$R = R_0 (1 + \beta_0 i^2),$$

причем β_0 должно быть больше нуля.

Пусть закон изменения емкости во времени, как обычно, выражается в виде

$$C = \frac{C_0}{1 + m \cos 2\omega t}.$$

Тогда уравнение Кирхгофа для рассматриваемой системы примет вид

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C_0} (1 + m \cos 2\omega t) q = 0.$$

Для обеспечения общности результатов введем безразмерную координату $x = q/q_0$ и безразмерное время $\tau = \omega t$; тогда это уравнение движения запишется в виде

$$\ddot{x} + \frac{R}{\omega L} \dot{x} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + m \cos 2\tau) x = 0,$$

где дифференцирование ведется по τ , $\omega_0^2 = 1/LC_0$ и $R = R_0(1 + \beta_0 q_0^2 \omega^2 x^2)$.

Если ввести обозначения $\omega_0^2/\omega^2 = 1 - \xi$, $2\theta_1 = R/\omega L$, $\beta = \beta_0 q^2 \omega^2$, то получим уравнение

$$\ddot{x} + 2\theta_1 \dot{x} + (1 - \xi)(1 + m \cos 2\tau) x = 0.$$

Будем считать, что колебательная система обладает малой диссипацией ($2\theta_1 \ll 1$), а ξ и m тоже малые величины ($\xi \ll 1$; $m \ll 1$). Тогда, обозначая $R_0/\omega L = 2\theta$, имеем

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\theta \dot{x} - 2\theta \beta \dot{x}^3 - m x \cos 2\tau, \quad (4.5.2)$$

где опущен член второго порядка малости с коэффициентом $m\xi$.

Применим к (4.5.2) приближенный метод решения — метод медленно меняющихся амплитуд. Тогда, как и для автономных систем, решение можно искать (для первой области неустойчивости) в виде

$$x = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad \dot{x} = -u \sin \tau + v \cos \tau,$$

где $u(\tau)$ и $v(\tau)$ — медленно меняющиеся функции времени τ . В соответствии с методикой получения решений методом ММА, изложенной в § 2.5, для рассматриваемого случая можно записать укороченные уравнения, которые после усреднения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi x - 2\theta \dot{x} - 2\theta \beta \dot{x}^3 - m x \cos 2\tau) \sin \tau \, d\tau = \\ &= -\theta [1 + 3/4 \beta A^2] u - 1/2 (m/2 + \xi) v, \\ \dot{v} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi x - 2\theta \dot{x} - 2\theta \beta \dot{x}^3 - m x \cos 2\tau) \cos \tau \, d\tau = \\ &= 1/2 (\xi - m/2) u - \theta [1 + 3/4 \beta A^2] v, \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

где через $A^2 = u^2 + v^2$ обозначен квадрат амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний в системе.

Решение системы укороченных уравнений позволяет в принципе получить полное решение задачи о возбуждении колебаний в исследуемой системе и о процессе установления стационарного режима. Однако в силу нелинейности дифференциальных уравнений (подобных (4.5.3)) их, как правило, не удастся проинтегрировать до конца. Тем не менее они очень удобны для исследо-

вания стационарных состояний системы (при этом анализе, естественно, переходные процессы не рассматриваются).

В стационарном состоянии $\dot{u} = \dot{v} = 0$. Тогда из рассмотрения системы однородных уравнений (4.5.3) вытекает, что в системе возможно состояние покоя ($u_0 = v_0 = 0$) — первое стационарное состояние системы.

Второе стационарное состояние системы с отличной от нуля амплитудой ($u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $A_0 \neq 0$) можно найти из (4.5.3), если ее записать в виде

$$\begin{aligned} \vartheta (1 + \frac{3}{4}\beta A_0^2) u_0 &= -\frac{1}{2}(\xi + m/2) v_0, \\ \vartheta (1 + \frac{3}{4}\beta A_0^2) v_0 &= \frac{1}{2}(\xi - m/2) u_0. \end{aligned}$$

Поскольку $u_0 \neq 0$ и $v_0 \neq 0$, то мы вправе перемножить обе левые и обе правые части уравнений и сократить на $u_0 v_0$. Тогда

$$\vartheta^2 (1 + \frac{3}{4}\beta A_0^2)^2 = -\frac{1}{4}(\xi^2 - m^2/4).$$

Извлечем квадратный корень из обеих частей равенства и найдем выражение для стационарной амплитуды колебаний:

$$A_0^2 = \frac{4}{3\beta} \left[-1 \pm \frac{1}{2\vartheta} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2} \right]. \quad (4.5.4)$$

Поскольку коэффициент нелинейности $\beta > 0$ и $2\vartheta > 0$, то знак минус перед корнем нужно опустить, так как по определению амплитуда должна быть больше нуля ($A_0 > 0$). Тогда из выражения (4.5.4) следует, что условием существования стационарной отличной от нуля амплитуды колебаний является следующее неравенство:

$$\frac{1}{2\vartheta} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2} > 1, \quad (4.5.5)$$

откуда получается, что расстройка в системе не может превосходить величины

$$\xi^2 = m^2/4 - 4\vartheta^2,$$

а на глубину модуляции параметра m должно быть наложено условие

$$m^2 > 16\vartheta^2 + 4\xi^2. \quad (4.5.6)$$

Эта связь между параметрами системы определяет возможность или (при противоположном знаке неравенства) невозможность возбуждения параметрических колебаний в системе.

Из выражения для A_0^2 ясно видна роль нелинейности сопротивления (β) системы. Если $\beta \rightarrow 0$, т. е. если уменьшать нелинейность системы, то амплитуда параметрических колебаний будет постепенно увеличиваться, и в пределе для линейной системы должна обратиться в бесконечность, что согласуется с теорией параметрического возбуждения линейных диссипативных систем.

Кривые параметрического возбуждения для разных величин коэффициента затухания системы и фиксированных значений m и β показаны на рис. 4.23. Из рассмотрения этих графиков и выражения для стационарной амплитуды можно сделать следующие заключения. При наличии нелинейного сопротивления амплитуда параметрических колебаний всегда ограничена; область возбуждения симметрична относительно нулевой расстройки и сужается при увеличении потерь ($\vartheta_3 > \vartheta_1$). Кроме того, ширина области параметрического возбуждения не зависит от нелинейности системы, а определяется исключительно соотношением параметров

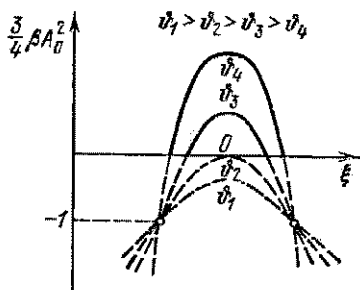


Рис. 4.23. Области параметрического резонанса для разных значений затухания.

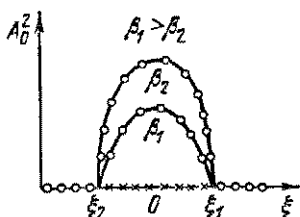


Рис. 4.24. Области параметрического резонанса для разных значений коэффициентов нелинейности β_1 и β_2 .

m , ξ , ϑ . В частности, при данном m и потерях в системе, больших или равных ϑ_2 (например, ϑ_1), параметрические колебания возбудить вообще невозможно.

Области параметрического возбуждения для разных коэффициентов нелинейности β_1 , β_2 и при фиксированных значениях m и ϑ показаны на рис. 4.24.

Амплитуда параметрических колебаний в системе максимальна при $\xi = 0$ и равна

$$A_0^2 \Big|_{\xi=0} = \frac{4}{3\beta} \left(\frac{m}{4\vartheta} - 1 \right). \quad (4.5.7)$$

Границы области возбуждения можно определить из выражения для стационарной амплитуды (4.5.4), приравнявая его нулю; имеем

$$\xi_1 = \sqrt{m^2/4 - 4\vartheta^2}, \quad \xi_2 = -\sqrt{m^2/4 - 4\vartheta^2}.$$

Исследуем найденные стационарные решения системы (4.5.3) на устойчивость методом малых возмущений (вариаций); тогда $u = u_0 + \eta$; $v = v_0 + \zeta$. Подставляя эти выражения в укороченные уравнения $\dot{u} = \varphi_1(u, v)$, $\dot{v} = \varphi_2(u, v)$ и разлагая их правые части

в ряд по малым вариациям, получим, ограничиваясь первыми членами разложения,

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \eta + \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \xi + \dots, \\ \dot{\xi} &= \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \eta + \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \xi + \dots,\end{aligned}$$

ибо в стационарном состоянии $\varphi_1(u_0, v_0) = 0$, $\varphi_2(u_0, v_0) = 0$.

Будем искать решение системы дифференциальных уравнений для η и ξ в виде $\eta = \eta_0 e^{\lambda \tau}$, $\xi = \xi_0 e^{\lambda \tau}$; тогда получается система линейных однородных алгебраических уравнений, детерминант которой для нетривиальности решения должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вводя обозначения

$$a_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \quad a_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \quad a_{21} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \quad a_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}$$

и разрешая приведенное выше уравнение второго порядка относительно λ , получим

$$\lambda = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}.$$

Применим ту же процедуру для исследования устойчивости состояния покоя системы (нулевой стационарной амплитуды, т. е. $u_0 = v_0 = A_0 = 0$). Тогда $\lambda = -\vartheta \pm \frac{1}{2} \sqrt{m^2/4 - \xi^2}$. Если потребовать, чтобы $\text{Re } \lambda > 0$, т. е. заинтересоваться соотношением параметров системы, при котором состояние покоя будет неустойчивым, то это требование означает, что

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{m^2/4 - \xi^2} > \vartheta, \quad \text{т. е. } \xi^2 < m^2/4 - 4\vartheta^2.$$

Последнее выражение в точности соответствует условию существования отличной от нуля стационарной амплитуды A_0 . Для области расстройек ξ , удовлетворяющих неравенству $\xi^2 < m^2/4 - 4\vartheta^2$, для которых существует стационарная отличная от нуля амплитуда A_0 , состояние покоя системы неустойчиво. Следовательно, оно неустойчиво внутри области параметрического резонанса (от ξ_1 до ξ_2). Состояние покоя устойчиво вне области параметрического резонанса, когда $\text{Re } \lambda < 0$ и для соотношения параметров системы получается неравенство вида $\xi^2 > m^2/4 - 4\vartheta^2$.

Аналогичным образом анализируется устойчивость состояния с отличной от нуля стационарной амплитудой ($A_0 \neq 0$). После довольно громоздких вычислений находим, что эта амплитуда устойчива ($\text{Re } \lambda < 0$) во всей области расстройек, где она

существует ($-\xi_2 \leq \xi \leq \xi_1$). Области устойчивых стационарных решений системы (4.5.3) на графиках рис. 4.24 отмечены кружочками, области неустойчивых стационарных решений — крестиками.

Роль нелинейного механизма ограничения и установления амплитуды параметрических колебаний выполняет в рассмотренной задаче нелинейное затухание (сопротивление). Нелинейным сопротивлением на частотах до сотен килогерц может служить обыкновенная лампа накаливания. Часто в качестве механизма ограничения амплитуды параметрических колебаний используется нелинейная реактивность, например нелинейная емкость.

Одноконтурный параметрический генератор с нелинейным реактивным элементом. Рассмотрим колебательную систему (рис. 4.25), в которой $L = \text{const}$, $R = \text{const}$, а емкость является функцией времени и нелинейно зависит от заряда q , т. е. $C = C(t) \psi(q)$. Пусть емкость по-прежнему меняется по закону

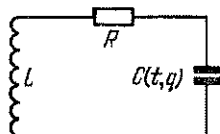


Рис. 4.25. Схема параметрически возбуждаемого контура с нелинейной емкостью.

$$C = C_0 / (1 + m \cos 2\omega t),$$

а напряжение на емкости — по закону $u_C = (q/C) (1 + \gamma_0 q^2)$, т. е. в отсутствие модуляции параметра напряжение на емкости изменяется по закону кубической параболы (конденсатор с сегнетоэлектриком, см. рис. 1.6), что реально наблюдается у большой группы сегнетоэлектриков, исследованных в ранних работах И. В. Курчатова. С увеличением заряда емкость такого конденсатора уменьшается.

Если в уравнении Кирхгофа для рассматриваемой системы

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + u_C(q, t) = 0$$

ввести прежние обозначения $x = q/q_0$, $\tau = \omega t$, $\omega_0^2 = 1/LC_0$, $\omega_0^2/\omega^2 = 1 - \xi$, $2\theta = R/\omega L$, $\gamma = \gamma_0 q_0^2$ и считать величины γ_0 , ξ , θ , m малыми по сравнению с единицей, то можно получить следующее нелинейное дифференциальное уравнение движения, допускающее применение метода ММА:

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\theta \dot{x} - \gamma x^3 - m x \cos 2\tau, \quad (4.5.8)$$

в котором отсутствуют члены второго порядка малости. Таким образом, метод ММА в данном случае применяется к слабо нелинейной системе с малой диссипацией.

Решение (4.5.8), как и прежде, ищем в виде $x = u \cos \tau + v \sin \tau$, $\dot{x} = -u \sin \tau + v \cos \tau$. Подставляя выражения для x и $\dot{x}$ в правые части укороченных уравнений и проводя их усреднение по периоду, получаем следующую систему укороченных

уравнений для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi x - 2\vartheta \dot{x} - \gamma x^3 - mx \cos 2\tau) \sin \tau \, d\tau = \\ &= -\vartheta u - \frac{1}{2} [(m/2 + \xi) - \frac{3}{4}\gamma A^2] v = \varphi_1(u, v), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi x - 2\vartheta \dot{x} - \gamma x^3 - mx \cos 2\tau) \cos \tau \, d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} [(m/2 - \xi) + \frac{3}{4}\gamma A^2] u - \vartheta v = \varphi_2(u, v),\end{aligned}\quad (4.5.9)$$

где $A^2 = u^2 + v^2$.

По-прежнему будем искать только стационарные решения этих уравнений. При $\dot{u} = \dot{v} = 0$ могут реализоваться два режима: состояние покоя системы $u_0 = v_0 = A_0 = 0$ и состояние с отличной от нуля амплитудой колебаний $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $A_0 \neq 0$. Рассмотрим условия существования этих режимов и исследуем устойчивость состояния покоя (анализ устойчивости стационарных решений, отличных от нуля, из-за громоздкости выкладок проводить не будем).

Исследование укороченных уравнений (4.5.9) показывает, что нулевые стационарные решения $u_0 = v_0 = A_0 = 0$ (состояние покоя) возможны в системе при любых величинах параметров m , ϑ , γ , ξ (разумеется, в пределах малости этих величин по сравнению с единицей, как требуется для применения метода ММА к данной задаче). Стационарное отличное от нуля решение системы ($u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$) определяется тем же путем, что и выше (см. стр. 163), имеем

$$\begin{aligned}\vartheta u_0 &= -\frac{1}{2} [(m/2 + \xi) - \frac{3}{4}\gamma A_0^2] v_0, \\ \vartheta v_0 &= -\frac{1}{2} [(m/2 - \xi) + \frac{3}{4}\gamma A_0^2] u_0.\end{aligned}\quad (4.5.10)$$

Тогда выражение для квадрата стационарной амплитуды принимает вид

$$A_0^2 = (4/3\gamma) (\xi \pm \sqrt{m^2/4 - 4\vartheta^2}). \quad (4.5.11)$$

Отсюда сразу виден физический смысл коэффициента нелинейности γ . Чем меньше коэффициент нелинейности γ , т. е. чем ближе нелинейная система к линейной, тем больше возможная в системе амплитуда параметрических колебаний.

Определим теперь условия существования действительных значений отличной от нуля стационарной амплитуды. Из формы кривой для $u_0(q)$ (см. рис. 1.6) видно, что $\gamma > 0$. Поэтому, чтобы не исключать из рассмотрения область отрицательных расстроек ξ , необходимо потребовать выполнения условия

$$m^2/4 > 4\vartheta^2 \quad \text{или} \quad m/2 > 1/Q.$$

Тогда для выполнения условия $A_0^2 > 0$ необходимо, чтобы

$$\xi^2 < m^2/4 - 4\vartheta^2,$$

или для глубины модуляции

$$m^2 > 4\xi^2 + 16\vartheta^2. \quad (4.5.12)$$

График кривых параметрического резонанса для одноконтурного параметрического генератора с ограничением амплитуды за счет нелинейной емкости показан на рис. 4.26, где для общности

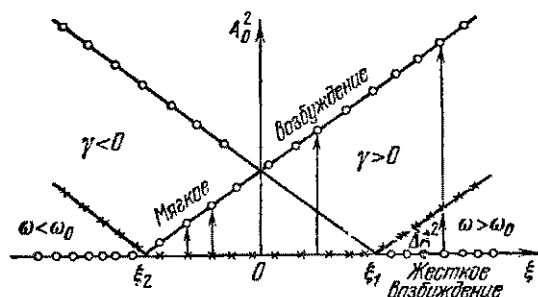


Рис. 4.26. Кривые параметрического резонанса в контуре с нелинейной емкостью.

Кружки — устойчивое состояние, крестики — неустойчивое.

картины изображена также область параметрического резонанса для случая конденсатора с $\gamma < 0$. Граничные расстройки ξ_1 и ξ_2 получаются из условия $A_0^2 = 0$ и равны соответственно

$$\xi_1 = \sqrt{m^2/4 - 4\vartheta^2} \quad \text{и} \quad \xi_2 = -\sqrt{m^2/4 - 4\vartheta^2}. \quad (4.5.13)$$

Исследование устойчивости стационарных решений можно, как и в предыдущей задаче, провести методом возмущений. Тогда для случая нулевой стационарной амплитуды нужно составить определитель для нахождения характеристического показателя λ . Если правые части укороченных уравнений (4.5.9) обозначить через $\varphi_1(u, v)$ и $\varphi_2(u, v)$, то для рассматриваемой задачи имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} -\vartheta - \lambda & -1/2 (m/2 + \xi) \\ -1/2 (m/2 - \xi) & -\vartheta - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решения этого квадратного уравнения относительно λ равны

$$\lambda_{1,2} = -\vartheta \pm 1/2 \sqrt{m^2/4 - \xi^2}.$$

Состояние покоя системы неустойчиво, если λ имеет положительную вещественную часть, т. е. $\text{Re } \lambda > 0$, тогда

$$\xi^2 < m^2/4 - 4\theta^2.$$

Итак, получено условие параметрического возбуждения системы. Нетрудно заметить, что состояние покоя неустойчиво именно в пределах области существования отличной от нуля амплитуды параметрических колебаний. Вне данной области, т. е. при $\xi^2 > m^2/4 - 4\theta^2$, существует устойчивое стационарное состояние покоя ($u_0 = v_0 = A_0 = 0$), так как при этом условии $\text{Re } \lambda < 0$.

Более подробный анализ устойчивости стационарных отличных от нуля решений показывает (см. рис. 4.26), что устойчивы обе прямые с кружками (при $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$) и неустойчивы — обе прямые с крестиками (при $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$). При движении (для $\gamma > 0$) из области отрицательных расстройек ξ ($\omega < \omega_0$) амплитуда A_0 , оставаясь сперва нулевой, затем, начиная со значения $\xi_2 = -\sqrt{m^2/4 - 4\theta^2}$, мягко (плавно) начинает увеличиваться. В области расстройек от ξ_2 до ξ_1 состояние покоя неустойчиво и малейшие флуктуации в системе нарастают до $A_0^2 \neq 0$.

При движении в обратном направлении — из области положительных расстройек ξ ($\omega > \omega_0$) — параметрические колебания можно возбудить при значениях, больших $\xi_1 = \sqrt{m^2/4 - 4\theta^2}$, но такое возбуждение может быть только жестким. Если системе, находящейся правее точки ξ_1 , сообщить толчок, больший амплитуды колебаний в нижнем (неустойчивом) стационарном состоянии, то колебания в системе раскачаются до значения $A_0^2 \neq 0$, соответствующего устойчивой стационарной амплитуде для данной расстройки. Если же такой системе, находящейся правее точки ξ_1 , сообщить толчок ΔA^2 , меньший амплитуды колебаний в системе в неустойчивом состоянии, то он не вызовет в системе устойчивой параметрической генерации. Это возмущение со временем затухнет и снова наступит состояние покоя.

Экспериментальное исследование работы одноконтурных параметрических генераторов показало, что кривые параметрического резонанса для них в действительности имеют вид, показанный на рис. 4.27. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, использованное нами математическое приближение при решении укороченных уравнений привело к тому, что в них отсутствовали

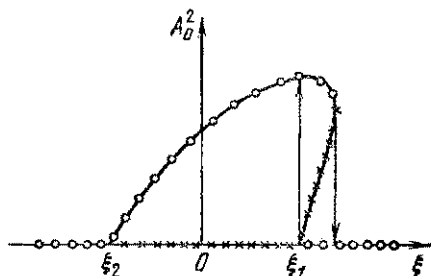


Рис. 4.27. Реальные кривые параметрического резонанса в диссипативной системе с нелинейной жесткостью.

члены порядка $\gamma\xi$ и $m\xi$, ибо были удержаны только члены порядка γ и m . Уже учет этих членов второго порядка малости приводит к согласию теории с экспериментом.

Во-вторых, в реальных колебательных системах с нелинейными реактивными элементами необходимо учитывать также нелинейную проводимость (сопротивление) последних, например сопротивление запертого полупроводникового диода или конденсатора с сегнето-электриком. Сопротивления нелинейных элементов увеличиваются с ростом амплитуды параметрических колебаний, в результате чего для областей параметрического возбуждения таких систем характерно сочетание специфических черт, присущих как системам с нелинейной реактивностью (наклон области возбуждения), так и системам с нелинейной диссипацией (замкнутость кривой, ограничивающей область возбуждения), при решении задачи с учетом членов только первого порядка малости.

При изучении одноконтурных параметрических генераторов мы не рассматривали конкретный механизм изменения реактивного параметра во времени, а задавались математическим законом модуляции параметра, например, в виде $C(t) = C_0/(1 + m \cos 2\omega t)$. Такие системы принято называть *параметрическими генераторами первого рода*, в отличие от *параметрических генераторов второго рода* (*параметрических преобразователей*), в которых изменение нелинейного реактивного параметра происходит в результате действия некоторой периодической силы, включенной в колебательную систему.

§ 4.6. Параметрические преобразователи (параметрические генераторы второго рода)

В подобных системах параметрический механизм возбуждения колебаний в колебательной системе реализуется за счет управления нелинейным параметром с помощью напряжения накачки, что можно осуществить включением генератора напряжения в последовательный колебательный контур, содержащий нелинейный реактивный элемент.

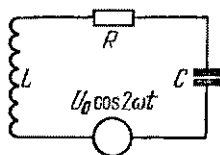


Рис. 4.28. Схема контура с нелинейной емкостью и генератором накачки.

На рис. 4.28 представлен нелинейный электрический колебательный контур, состоящий из элементов L , R , $C(q)$ и генератора напряжения $U_0 \cos 2\omega t$. Проанализируем процессы, происходящие в такой системе, рассмотрим условия и особенности возбуждения колебаний в ней, выясним вопрос о наличии стационарной отличной от нуля амплитуды параметрически возбужденных колебаний.

Для того чтобы не усложнять расчеты нелинейным параметром данной колебательной системы, будем считать по-прежнему только

емкость конденсатора, которую можно аппроксимировать выражением $u_c(q) = (q/C_0) \varphi(q)$, где $\varphi(q)$ — нелинейная функция. Если в качестве нелинейного параметра использовать емкость конденсатора с сегнетоэлектриком, то, исходя из вида нелинейности кривой $u_c(q)$ (см. рис. 1.7), можно ограничиться кубическим членом полинома (кубическая парабола), аппроксимирующего реальную вольт-кулоновую зависимость на конденсаторе. Тогда

$$u_c(q) = (q/C_0) \varphi(q) = (q/C_0) (1 + \gamma_0 q^2),$$

а уравнение Кирхгофа для рассматриваемой системы примет вид

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \left(\frac{q}{C_0} \right) (1 + \gamma_0 q^2) = U_0 \cos 2\omega t.$$

Если ввести обычные обозначения $x = q/q_0$, $\tau = \omega t$, $\omega_0^2 = 1/LC_0$, $\omega_0^2/\omega^2 = 1 - \xi$, $\gamma = \gamma_0 q_0^2$, $2\vartheta = \frac{R}{\omega L}$ и считать, что $2\vartheta \ll 1$, $\xi \ll 1$, $\gamma \ll 1$, то исходное уравнение запишется следующим образом:

$$\ddot{x} + x = \xi x - \gamma x^3 - 2\vartheta \dot{x} + \bar{U} \cos 2\tau, \quad (4.6.1)$$

где $\bar{U} = U_0/Lq_0\omega^2$. При этом, как и раньше, мы пренебрегли членом второго порядка малости $\sim \xi\gamma x^3$.

В правой части (4.6.1) первые три члена малы, однако последний член, представляющий напряжение генератора накачки, в общем случае, достаточно велик. Это обстоятельство не позволяет применять непосредственно к данному уравнению метод ММА.

Однако если ввести новую переменную y такую, что

$$x = y - (\bar{U}/3) \cos 2\tau, \quad (4.6.2)$$

где $(\bar{U}/3) \cos 2\tau = P \cos 2\tau$ — вынужденное решение уравнения

$$\ddot{x} + x = 3P \cos 2\tau = \bar{U} \cos 2\tau,$$

то, произведя в исходном уравнении замену переменной x на переменную y , получим

$$\ddot{y} + y = \xi(y - P \cos 2\tau) - 2\vartheta(\dot{y} - 2P \sin 2\tau) - \gamma(y - P \cos 2\tau)^3. \quad (4.6.3)$$

Теперь правая часть дифференциального уравнения движения содержит члены только первого порядка малости, поэтому к данному уравнению применим метод ММА.

В рассматриваемой системе происходят два процесса: один с собственной частотой ω_0 , другой — с частотой внешней силы 2ω . Общий результирующий процесс складывается из двух периодических процессов с соизмеримыми частотами ω_0 и 2ω и поэтому также является периодическим. В соответствии с методом ММА решение уравнения для первой области неустойчивости ищем в виде

$$y = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad \dot{y} = -u \sin \tau + v \cos \tau,$$

где u и v — медленные переменные времени τ . Используя стандартную процедуру нахождения усредненных по периоду укороченных уравнений, получим

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\vartheta u + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\gamma A^2 + \frac{3}{2}\gamma P^2 - \xi)v = \varphi_1(u, v), \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2}(\frac{3}{4}\gamma A^2 + \frac{3}{2}\gamma P^2 - \xi)u - \vartheta v = \varphi_2(u, v).\end{aligned}\quad (4.6.4)$$

Рассмотрим стационарные решения данной задачи ($\dot{u} = \dot{v} = 0$). Сразу видно, что нулевые стационарные решения ($u_0 = v_0 = A_0 = 0$) существуют при любых параметрах исследуемой системы во всей области расстройек ξ .

Для ненулевых стационарных амплитуд ($A_0 \neq 0$) находим описанным выше способом следующее выражение:

$$2\vartheta = \sqrt{-(\frac{3}{4}\gamma A_0^2 + \frac{3}{2}\gamma P^2 - \xi)^2},$$

которое, как видно, не имеет физического смысла, ибо затухание в системе всегда положительно и не может равняться мнимой величине. Это значит, что стационарных отличных от нуля решений системы (4.6.4) быть не может, а может существовать только состояние покоя ($u_0 = v_0 = A_0 = 0$).

Нетрудно убедиться в том, что если в системе не могут возбуждаться колебания на частоте ω с отличной от нуля амплитудой, то состояние покоя должно быть устойчивым. Для исследования устойчивости этого состояния используем известный метод возмущений, при котором необходимо потребовать равенства нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } \begin{vmatrix} -\vartheta - \lambda & -\frac{1}{2}(\frac{3}{2}\gamma P^2 - \xi) \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\gamma P^2 - \xi) & -\vartheta - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\vartheta \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{3}{2}\gamma P^2 - \xi)^2}.$$

Видно, что квадратный корень при любых γ , P , ξ является мнимой величиной, а вещественная часть характеристического показателя λ всегда отрицательна, ибо по определению потери в системе всегда больше нуля, т. е. $\vartheta > 0$. Следовательно, состояние покоя рассматриваемой системы всегда устойчиво, стационарной амплитуды $A_0 \neq 0$ в системе не существует ни при каких значениях параметров.

Объяснение невозможности возбуждения колебаний в системе на частоте, равной половине частоты напряжения накачки, следует искать в невыполнении некоторых условий возбуждения параметрических колебаний в первой области Матвея. Дело в том, что взятая в рассматриваемой задаче симметричная относительно начала координат вольт-кулоновая характеристика конденсатора

обуславливает двукратное за один период напряжения накачки увеличение емкости конденсатора и двукратное ее уменьшение. Поскольку частота напряжения накачки в два раза выше частоты искомых параметрических колебаний, то емкость колебательной системы меняется четыре раза за период собственной частоты системы, т. е. условия параметрического возбуждения в такой системе не выполняются, ибо максимальная частота изменения реактивного параметра за период искомых параметрических колебаний (первая область Маттье) равна двум. В областях неустойчивости с более высокими номерами она еще ниже, так как частота изменения параметра должна подчиняться условию

$$p \approx 2\omega_0/n, \quad \text{где } n = 2, 3, 4, \dots$$

Для того чтобы обеспечить выполнение условий параметрического возбуждения для колебательной системы с конденсатором с сегнетоэлектриком, необходимо придать вольт-кулоновой характеристике $u_C(q)$ несимметричный вид, что можно осуществить путем подачи на конденсатор постоянного напряжения смещения (например, $-u_0$). Тогда кривая $u_C(q)$ будет иметь вид, показанный на рис. 4.29. Можно для этой же цели использовать в качестве нелинейной емкости p — n -переход полупроводникового диода. Здесь кривая $C(u)$ всегда несимметрична и имеет вид, показанный на рис. 4.12.

Наличие несимметрии кривых $u_C(q)$ или $C(u)$ требует учета в их аппроксимирующих выражениях квадратичных членов; иными словами, для конденсатора с сегнетоэлектриком и с постоянным смещением необходимо пользоваться зависимостью

$$u_C(q) = (q/C_0) (1 + \beta_0 q + \gamma_0 q^2). \quad (4.6.5)$$

Тогда с учетом этого соотношения исходное уравнение движения в тех же обозначениях примет вид

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\theta \dot{x} - \beta x^2 - \gamma x^3 + \bar{U} \cos 2\tau, \quad (4.6.6)$$

где $\beta = \beta_0 q_0 \ll 1$.

Это уравнение получено в результате пренебрежения членами второго порядка малости, т. е. в предположении, что

$$(1 - \xi)\gamma \approx \gamma \quad \text{и} \quad (1 - \xi)\beta \approx \beta.$$

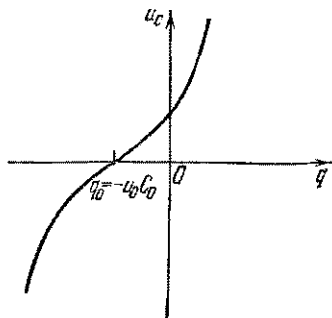


Рис. 4.29. Вольт-кулоновая характеристика нелинейного конденсатора со смещением.

Решение этого уравнения, как и прежде, ищем методом медленно меняющихся амплитуд с помощью следующих подстановок:

$$x = y - P \cos 2\tau, \quad y = u \cos \tau + v \sin \tau, \\ \dot{y} = -u \sin \tau + v \cos \tau.$$

Тогда получаются следующие укороченные уравнения:

$$\dot{u} = -\vartheta u + \frac{1}{2}(\beta P - \xi_*)v, \quad \dot{v} = \frac{1}{2}(\beta P + \xi_*)u - \vartheta v, \quad (4.6.7)$$

где $\xi_* = \xi - \frac{3}{4}\gamma A^2 - \frac{3}{2}\gamma P^2$.

Последнее обозначение оправдано физическими соображениями и еще раз подтверждает, что расстройка частоты в колебательном контуре с нелинейной реактивностью зависит от амплитуд действующих в нем напряжений. При увеличении амплитуды параметрических колебаний в системе изменяется среднее значение нелинейной емкости, что вводит некоторую дополнительную расстройку и ограничивает амплитуду колебаний на более низком уровне, чем при той же расстройке ξ и малых действующих амплитудах $A \approx 0$ и $P \approx 0$. В полученном решении присутствуют и вынужденные колебания, которые служат источником энергии для параметрических колебаний и способствуют увеличению их амплитуды. Поэтому расстройка ξ_* характеризует изменение собственной частоты контура ω_0 по отношению к половине частоты напряжения накачки от первоначального значения при $A = 0$, $P = 0$ до значений при $A \neq 0$, $P \neq 0$.

В полученных укороченных уравнениях член βP соответствует члену $m/2$ для случая параметрических генераторов первого рода и характеризует отрицательное сопротивление или степень регенерации, вносимых в нелинейный колебательный контур генератором накачки.

Из системы укороченных уравнений легко находятся стационарные решения для $A_0 = 0$ и $A_0 \neq 0$. Состояние покоя ($u_0 = v_0 = A_0 = 0$) возможно в системе при любой комбинации параметров.

Выражение для стационарной отличной от нуля амплитуды параметрических колебаний имеет вид

$$A_0^2 = (\frac{1}{3}\gamma) [\xi - \frac{3}{2}\gamma P^2 \pm \sqrt{\beta^2 P^2 - 4\vartheta^2}], \quad (4.6.8)$$

и показывает, что ограничение амплитуды параметрических колебаний здесь также происходит за счет кубического члена нелинейного реактивного параметра.

Для существования стационарного режима параметрических колебаний с амплитудой, отличной от нуля, необходимо выполнение двух очевидных требований: 1) величина $\sqrt{\beta^2 P^2 - 4\vartheta^2}$ должна быть вещественной и 2) должно выполняться неравенство

$$\sqrt{\beta^2 P^2 - 4\vartheta^2} > \xi - \frac{3}{2}\gamma P^2. \quad (4.6.9)$$

Кривая параметрического резонанса в этом случае несимметрична относительно оси ординат A_0^2 , что видно на графике рис. 4.30 и следует из выражения для стационарной отличной от нуля амплитуды параметрических колебаний.

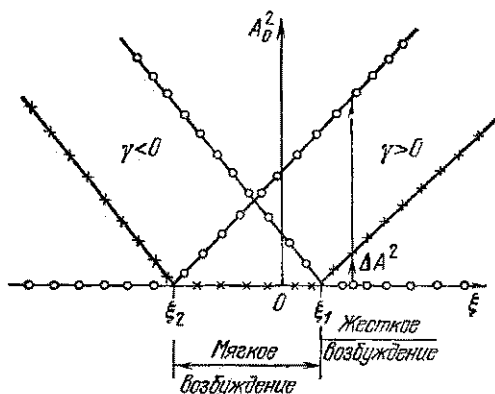


Рис. 4.30. Кривые параметрического резонанса для контура с нелинейной емкостью при электрической накачке.

Характеристическое уравнение для анализа устойчивости состояния покоя можно найти из следующего приравненного нулю детерминанта:

$$\begin{vmatrix} -\vartheta - \lambda & 1/2(\beta P - \xi_{*0}) \\ 1/2(\beta P + \xi_{*0}) & -\vartheta - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где ξ_{*0} означает расстройку при $A_0 = 0$ и $P \neq 0$. Решение характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\vartheta\lambda + \vartheta^2 - 1/4(\beta^2 P^2 - \xi_{*0}^2) = 0$$

приводит к

$$\lambda = -\vartheta \pm 1/2 \sqrt{\beta^2 P^2 - \xi_{*0}^2}.$$

Чтобы состояние покоя системы стало неустойчивым, необходимо потребовать выполнения неравенства $1/2 \sqrt{\beta^2 P^2 - \xi_{*0}^2} > \vartheta$, откуда следует условие параметрического возбуждения

$$\xi_{*0}^2 < \beta^2 P^2 - 4\vartheta^2. \quad (4.6.10)$$

Сравнивая условие параметрической неустойчивости состояния покоя (4.6.10) с условием существования стационарного решения для $A_0 \neq 0$ (4.6.9), нетрудно заметить, что эти условия совпадают. Из них легко получаются интервалы расстроек, в которых существуют неустойчивое состояние покоя и стационарные ненулевые амплитуды параметрически возбужденных колебаний; имеем

$$\xi_{*2} = -\sqrt{\beta^2 P^2 - 4\vartheta^2} - 3/2 \gamma P^2 \leq \xi \leq \sqrt{\beta^2 P^2 - 4\vartheta^2} - 3/2 \gamma P^2 = \xi_{*1}. \quad (4.6.11)$$

Из этого выражения отчетливо видна несимметрия области параметрического резонанса, о которой речь шла выше. Несимметрию области параметрического резонанса для колебательной системы с нелинейным реактивным параметром и генератором накачки можно объяснить также качественно. Дело в том, что в рассматриваемом нелинейном колебательном контуре при воздействии на него напряжения накачки возникают вынужденные колебания, которые изменяют среднее значение емкости системы, чем и объясняется начальная расстройка контура в отсутствие параметрически возбужденных колебаний (несимметрия ξ_1 и ξ_2 относительно оси ординат).

Анализ устойчивости показывает, что верхние кривые параметрического резонанса, как и прежде, устойчивы, нижние — неустойчивы.

Из выражений для ξ_1 и ξ_2 следует, что изменением амплитуды накачки P можно регулировать ширину области параметрического возбуждения. При этом амплитуда накачки должна превосходить некоторую минимальную величину — порог, определяемый из условия

$$P_{\text{порог}} = 2\theta/\beta \quad \text{при} \quad \xi_{*0} = 0. \quad (4.6.12)$$

Наличие порога для величины накачки, естественно, объясняется параметрической природой вложения энергии в рассматриваемой задаче, как и во всех других случаях параметрического возбуждения колебаний, когда вкладываемая за счет модуляции реактивного параметра энергия должна превосходить начальные потери.

В реальных колебательных системах, где в качестве нелинейного элемента используются p — n -переходы полупроводниковых (параметрических) диодов, одновременно фигурируют и оказывают ограничивающее действие и нелинейная реактивность, и нелинейное затухание. Поэтому кривые параметрического резонанса ограничивают наклонные замкнутые области параметрического возбуждения. Общий математический анализ реальных параметрических систем — сложная задача, которая обычно решается приближенными методами, в частности методами численных расчетов с использованием ЭВМ.

Таким образом, в рассмотренной системе при определенных условиях, накладываемых на параметры, и при несимметричности характеристики нелинейного реактивного элемента можно возбудить параметрические колебания, частота которых точно в два раза ниже частоты генератора накачки, а амплитуда напряжения накачки через нелинейный реактивный элемент влияет на амплитуду параметрических колебаний и ширину области возбуждения. Поэтому такой параметрический генератор второго рода называют также *параметрическим преобразователем*, т. е. устройством, пре-

образующим один периодический процесс в другой периодический процесс, причем оба процесса являются когерентными.

Как отмечалось выше, для задания определенного вида несимметрии вольт-кулоновой ($u_C(q)$) или вольт-фарадной ($C(u)$) характеристик пользуются источником постоянного напряжения. В случае реальных реактивных элементов таким путем можно одновременно задать рабочую точку как на характеристике нелинейной реактивности, так и на ее вольт-амперной характеристике.

Однако и в случае параметрических генераторов для этих целей часто используется автоматическое смещение. Схема такого одноконтурного параметрического генератора (параметрического преобразователя) с полупроводниковым диодом имеет вид, показанный на рис. 4.31. В полупроводниковых диодах с изображенной на рис. 4.12 зависимостью $C(u)$ напряжение на емкости с достаточной степенью точности можно аппроксимировать выражением

$$u_C(q) = (1/C_0)(q + \beta_0 q^2),$$

где для реальных диодов $\beta_0 < 0$.

Сопротивление диода в положительном (прямом) направлении, как видно из того же рис. 4.12, весьма мало, в обратном направлении сопротивление очень велико. Чтобы учесть влияние токов через диод и резкого изменения сопротивления при заходе в область положительных токов можно ввести разделительный конденсатор с емкостью C_p . Диод с последовательно включенным с ним конденсатором работает как пиковый детектор, и рабочая точка при этом сдвигается влево по характеристике (даже при минимальном заходе в область положительных смещений).

Если предположить, что напряжение на конденсаторе равно амплитуде колебаний, то решение можно искать в виде

$$x = y - P \cos 2\tau, \quad y = u \cos \tau + v \sin \tau - A, \quad \dot{y} = -u \sin \tau + v \cos \tau,$$

где по-прежнему $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$.

Уравнение движения в рассматриваемой колебательной системе при указанной для полупроводникового диода аппроксимации в принятых нами обозначениях имеет вид

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\theta \dot{x} - \beta x^2 + U \cos 2\tau. \quad (4.6.13)$$

Как видно, в нем в явном виде не фигурирует нелинейная проводимость, однако она скрыта в самом решении, точном в случае бесконечной проводимости диода в прямом направлении. Решение задачи методом ММА при указанной замене переменных приводит к следующей системе укороченных уравнений, аналогичной

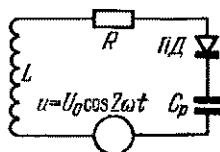


Рис. 4.31. Схема одноконтурного параметрического генератора с автоматическим смещением.

предыдущей и имеющей вид

$$\dot{u} = -\vartheta u + \frac{1}{2}(\beta P - \xi_*)v, \quad \dot{v} = \frac{1}{2}(\beta P + \xi_*)u - \vartheta v, \quad (4.6.14)$$

где $\xi_* = \xi + 2\beta A$.

Поскольку в колебательной системе имеются параметрически возбужденные колебания с амплитудой A , то существует дополнительное смещение (напряжение), которое смещает рабочую точку влево от нуля, изменяя тем самым нелинейную дифференциальную емкость диода. При этом, естественно, изменяется и расстройка системы ξ_* .

Выражение для стационарной, отличной от нуля амплитуды в рассматриваемом случае получается стандартным способом и имеет вид

$$A_0 = -\frac{1}{2\beta}(\xi \mp \sqrt{\beta^2 P^2 - 4\vartheta^2}) = \frac{1}{2|\beta|}(\xi \mp \sqrt{\beta^2 P^2 - 4\vartheta^2}), \quad (4.6.15)$$

ибо для реальных диодов $\beta < 0$.

Сравнивая выражения для стационарных амплитуд в случае одноконтурного параметрического генератора с нелинейной реактивностью и параметрического генератора на ПД с автосмещением, можно заметить их сходство; это, естественно, приводит к аналогии в положении и виде областей параметрического возбуждения. Поэтому в рассматриваемом случае можно использовать полученные ранее результаты исследования устойчивости стационарных решений.

Если в укороченных уравнениях сохранить член с коэффициентом $\beta\xi$, то выражение для стационарной амплитуды примет несколько иной вид, а именно,

$$A_0 = \frac{1}{2|\beta|}[\xi \mp \sqrt{\beta^2(1 - \xi)^2 P^2 - 4\vartheta^2}]. \quad (4.6.16)$$

Это выражение соответствует замкнутым кривым, ограничивающим

области параметрического возбуждения (рис. 4.32), что весьма хорошо согласуется с экспериментальными результатами по измерению ширины областей параметрического возбуждения.

Как и в рассмотренных ранее системах, наличие нелинейной реактивности приводит в данном случае к наклону области возбуждения, причем кроме сохраняющейся области мягкого возбуждения (при $\xi_2 < \xi < \xi_1$) появляется область жесткого возбуждения, лежащая между ξ_1 и ξ_3 . Для возбуждения в ней параметрических

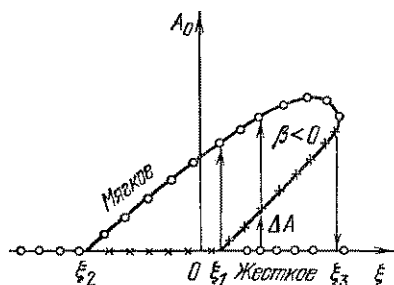


Рис. 4.32. Кривая параметрического возбуждения для системы с автосмещением.

колебаний системе необходимо сообщить определенный начальный толчок, величина которого зависит от расстройки ξ , что хорошо видно на рис. 4.32.

В случае одноконтурного параметрического генератора на ПД с автосмещением ограничение амплитуды колебаний происходит не за счет нелинейного затухания (ибо мы рассматривали идеальный пиковый детектор без потерь), а за счет расстроенного механизма ограничения ($\beta \neq 0$), при котором получается наклон области возбуждения, так как кривая зависимости дифференциальной емкости от заряда у полупроводникового диода имеет несимметричный вид. Этот механизм ограничения амплитуд параметрически возбужденных колебаний в таком генераторе называют иногда *ограничением за счет автосмещения*.

При анализе работы параметрических генераторов разного типа с разными механизмами ограничения амплитуды параметрических колебаний мы интересовались в основном стационарными решениями, которые можно получить из общего решения той или иной задачи (разумеется, если ее удастся решить аналитически), если время устремить в бесконечность. Однако значительный интерес представляет рассмотрение переходных процессов (процессов установления) в параметрических генераторах различных типов, т. е. исследование зависимости амплитуды возбуждающихся колебаний от времени.

В большинстве реальных случаев, когда действует одновременно несколько механизмов ограничения амплитуды, т. е. в системе имеется несколько нелинейных элементов, полное решение задачи удастся провести только численными методами с помощью ЭВМ. Однако характер переходного процесса можно качественно (а иногда и количественно) определить на основании исследования характеристического показателя λ .

Общий характер устойчивости стационарных решений для параметрических генераторов всех типов следует из анализа вещественной и мнимой частей характеристического показателя λ . Если вещественная часть для ненулевых решений отрицательна, то соответствующий стационарный режим является устойчивым по Ляпунову, причем наличие или отсутствие мнимой части характеристического показателя выявляет характер этой устойчивости.

Если $\operatorname{Re} \lambda < 0$ и отсутствует мнимая часть ($\operatorname{Im} \lambda = 0$), то возмущения в области устойчивости аperiodически затухают; если же характеристический показатель λ комплексен, то затухание происходит в осцилляторном режиме. Поэтому выход на стационарную амплитуду в случае диссипативного механизма ограничения (ограничение за счет нелинейного сопротивления) всегда имеет аperiodический характер (рис. 4.33, сплошная кривая). На том же рисунке пунктирной линией показан процесс установления стационарной амплитуды в ламповом генераторе. Осо-

бенность переходного процесса при параметрическом возбуждении колебаний связана с тем, что увеличение энергии параметрически возбуждаемых колебаний пропорционально самой их энергии. Вследствие малости запасенной начальной энергии (энергия тепловых флуктуаций) амплитуда параметрических колебаний вначале на участке $0-t_1$ растет медленно, затем на участке t_1-t_2 быстро увеличивается, а на участке $t > t_2$, когда вступает в действие механизм ограничения, амплитуда колебаний параметрического генератора асимптотически приближается к стационарной амплитуде A_0 (случай нелинейного затухания).

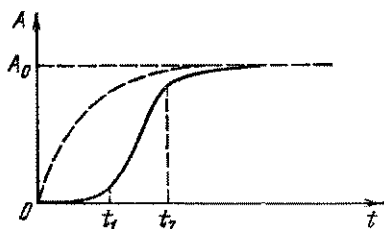


Рис. 4.33. График установления стационарной амплитуды в параметрическом генераторе при диссипативном механизме ограничения.

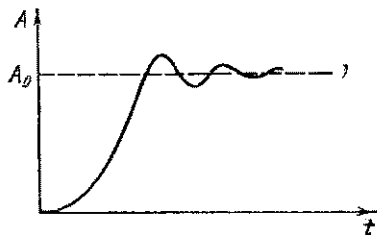


Рис. 4.34. График установления амплитуды колебаний в параметрическом генераторе при ограничении за счет нелинейности реактивного параметра.

При ограничении параметрических колебаний за счет нелинейной реактивности (расстроечный механизм ограничения) система приходит к своему стационарному состоянию осцилляторно (рис. 4.34). Колебательный процесс установления колебаний может возникать за счет инерционности реактивного параметра. В этом случае характеристический показатель λ является комплексной величиной, в которой действительная часть ($\text{Re } \lambda$) определяет скорость уменьшения амплитудных вариаций, а мнимая часть ($\text{Im } \lambda$) — частоту (период) осцилляций при выходе на стационарную амплитуду.

При наличии в параметрическом генераторе нелинейного сопротивления, нелинейной емкости и цепочки автосмещения в зависимости от соотношения нелинейных параметров, глубины модуляции, расстройки и от соотношения между постоянной времени цепи автосмещения и периода параметрических колебаний в системе можно реализовать как апериодический, так и осцилляторный процессы установления; можно также получить стационарный режим с синусоидальной или прерывистой автомодуляцией.

Физически процесс параметрического возбуждения колебаний в параметрическом генераторе можно представить себе следующим образом. Колебательный контур одноконтурного параметрического генератора представляет собой высокочастотную колебательную

систему; в ней еще до включения генератора накачки вследствие наличия тепловых флуктуаций существуют электрические колебания с широким спектром частот, причем колебание с одной из частот ω , на которую примерно настроен контур параметрического генератора, значительно превышает все остальные по среднеквадратичной амплитуде. Тогда включение генератора накачки с частотой 2ω приведет к возрастанию амплитуды шумовой компоненты с частотой, точно равной половине частоты накачки (для первой области параметрической неустойчивости); фаза этой компоненты по отношению к фазе колебаний накачки соответствует случаю «сильного» параметрического резонанса. Однако, как следует из особенностей «сильного» параметрического резонанса, при изменении фазы усиливаемого сигнала на π процесс его параметрического усиления абсолютно не изменится. Отсюда вытекает важное следствие, а именно, то, что параметрический генератор позволяет возбудить колебание либо в одной, либо в другой (противоположной) фазе.

Таким образом, одноконтурные параметрические генераторы обладают тем свойством, что фазы параметрически возбуждаемых в них колебаний зависят от начальных условий. Если начальные условия случайны (например, тепловой шум), то фаза возбужденных колебаний тоже будет случайной. При непрерывном действии генератора накачки подбором начальных условий можно возбудить колебание либо в одной, либо в другой (противоположной) фазе, условно обозначаемых 0 и π . Фаза этих колебаний относительно фазы напряжения накачки сохраняется в параметрическом генераторе сколь угодно долго.

На этом свойстве параметрических генераторов основана работа параметронов — малых по габаритам и по потребляемой мощности одноконтурных параметрических генераторов, которые используются в технике в качестве элементов памяти, в счетных и логических машинах и устройствах (сочетание большого количества параметронов в одной машине). В силу специфического характера переходных процессов при параметрическом возбуждении колебаний (наличие начального участка с медленным ростом амплитуды, в результате чего процесс установления стационарной амплитуды длится примерно 20—30 колебаний основной частоты) счетные и логические устройства на основе параметронов используются обычно в тех случаях, когда требуется не очень большое быстродействие, но высокая надежность, например, для управления механическими станками с программным управлением.

В колебательных системах с параметрическим воздействием возможно появление комбинационных явлений. В параметрических преобразователях, в которых преобразование частоты производится с помощью напряжения накачки с использованием нелинейных элементов, может возникнуть целый ряд комбинационных

частот. В частности, параметрические колебания могут возбуждаться при подаче на нелинейный реактивный элемент не одного, а, например, двух напряжений накачки с разными частотами. Схема такого одноконтурного параметрического генератора с двумя генераторами накачки с разными частотами показана на рис. 4.35. Здесь в качестве нелинейного реактивного элемента используется конденсатор с сегнетоэлектриком.

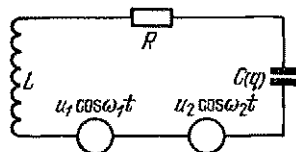


Рис. 4.35. Схема параметрического генератора с двумя генераторами накачки.

Уравнение, описывающее колебательный процесс в такой системе, имеет вид

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + u_C(q) = u_1 \cos \omega_1 t + u_2 \cos \omega_2 t.$$

Если вольт-кулоновую зависимость $u_C(q)$ на конденсаторе представить в виде полинома

$$u_C(q) = \frac{1}{C_0} (q + \beta_0 q^2 + \gamma_0 q^3 + \dots),$$

что соответствует изменению емкости нелинейного конденсатора по закону

$$1/C = \frac{1}{C_0} (1 + \beta_0 q + \gamma_0 q^2 + \dots),$$

и ограничиться записанными выше членами разложения, а также положить, что в рассматриваемом контуре существуют вынужденные колебания с несоизмеримыми частотами ω_1 и ω_2 , то эти колебания, воздействуя на нелинейный элемент, вызовут комбинационные колебания.

Первый нелинейный член разложения $\gamma_0 q^2$ обусловит появление компонент изменения обратной емкости с частотами вида $\omega_1 \pm \omega_2$ (т. е. с частотами, представляющими комбинацию исходных частот, отсюда и термин «комбинационные частоты»). Если учесть еще более высокие степени разложения обратной емкости по степеням заряда q , то комбинационных частот станет еще больше и они будут в общем случае иметь вид

$$m\omega_1 \pm n\omega_2,$$

где m и n — произвольные целые числа, причем сумма $m+n$ соответствует степени высшего члена в разложении обратной емкости.

Если колебание какой-либо комбинационной частоты ω удовлетворяет условиям параметрического возбуждения, то в контуре возникают колебания с частотой $\omega \approx \omega_0$, где ω_0 — собственная частота контура параметрического генератора. Для первой области

параметрической неустойчивости это может произойти в случае $\omega_1 = 2\omega$ ($\omega_2 = 0$), в случае $\omega_2 = 2\omega$ ($\omega_1 = 0$), в случае $\omega_1 \pm \omega_2 = 2\omega$ или в общем случае $m\omega_1 \pm n\omega_2 = 2\omega$. Таким образом, кроме возбуждения колебаний с частотой, равной половине частоты одного генератора накачки $\omega = \omega_1/2$ ($\omega_2 = 0$) и $\omega = \omega_2/2$ ($\omega_1 = 0$) в системе с двумя генераторами накачки могут возбуждаться также колебания с частотами $\omega = 1/2 (\omega_1 \pm \omega_2)$, или в общем случае с частотами $\omega = 1/2 (m\omega_1 \pm n\omega_2)$. (Для простоты мы рассматривали частотные условия возбуждения параметрических колебаний, соответствующих первой области Матъё. Разумеется, комбинационные колебания могут также возбуждаться в областях Матъё более высокого порядка.)

При рассмотрении комбинационных явлений в параметрических системах предполагалось, что ω_1 и ω_2 — несоизмеримые частоты, т. е. такие частоты, период повторения суммы которых на много порядков превосходит периоды колебаний ω_1 и ω_2 . Если бы частоты ω_1 и ω_2 были соизмеримы, то сумма напряжений

$$u_1 \cos \omega_1 t + u_2 \cos \omega_2 t$$

изменялась бы периодически. Тогда в правой части исходного уравнения стояла бы периодическая функция времени, и использование метода ММА с усреднением точных дифференциальных уравнений по периоду не представляло бы трудностей. Необходимо только учесть еще и фазовые соотношения между воздействующими частотами. При несоизмеримых значениях ω_1 и ω_2 применение метода ММА становится весьма неточным и для решения исходного уравнения необходимо прибегнуть к соответствующим приближениям.

АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 5.1. Основные физические определения и классификация автоколебательных систем

Автоколебательные системы относятся к классу активных колебательных систем, определение которых было дано в § 4.1. Однако, в отличие от активных систем, в которых вложение энергии можно однозначно описать с помощью отрицательного сопротивления и которые могут быть линейными и неконсервативными, автоколебательные системы принципиально нелинейны и неконсервативны. Это их свойство обуславливает возможность существования в автоколебательных системах стационарных по форме и величине колебаний, что в рамках представлений о фазовой плоскости означает наличие предельных циклов — асимптотических замкнутых фазовых траекторий.

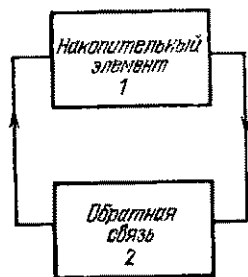


Рис. 5.1. Общая схема автоколебательной системы.

1 — накопительный элемент, например LCR-контур, 2 — канал обратной связи с источником постоянной энергии.

Схематически простейшую автоколебательную систему можно представить так, как на рис. 5.1. Если через N обозначить запас колебательной энергии в системе, то в стационарном режиме автоколебаний изменение колебательной энергии за период по определению равно нулю, т. е.

$$N_{t+T} - N_t = 0, \text{ или } (\overline{\Delta N})_T = 0.$$

Напомним, что для консервативных систем $dN/dt \equiv 0$, поскольку запас колебательной энергии $N = \text{const}$. В случае диссипативных систем $dN/dt = -F(t) < 0$, где $F(t)$ — функция, характеризующая диссипативные свойства системы, причем для диссипативных систем $F(t) > 0$. Функция диссипации характеризует мощность потерь в системе.

Действительно, если написать уравнение, описывающее поведение последовательного колебательного контура, т. е. диссипативной колебательной системы, в виде

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (5.1.1)$$

то отсюда легко находим

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2C} q^2 \right] = -R \left(\frac{dq}{dt} \right)^2. \quad (5.1.2)$$

Следовательно, изменение магнитной и электростатической энергий колебательного контура, т. е. изменение колебательной энергии системы, равно мощности потерь, или в обобщенной записи $dN/dt = -F(t)$. Обычно $F(t) > 0$, но в автоколебательных системах возможны интервалы времени при определенных амплитудах и скоростях, при которых $F(t) < 0$. Вполне очевидно, что условие $F(t) < 0$ присуще только активным системам. Из этих физических представлений вытекает основное уравнение энергетического баланса автоколебательных систем

$$\int_0^T F(t) dt = 0. \quad (5.1.3)$$

Совершенно ясно, что в линейной и нелинейной диссипативных системах невозможен автоколебательный процесс. Для осуществления автоколебательного процесса необходимо, чтобы функция диссипации $F(t)$ была знакопеременной. При этом в течение одной части периода происходит пополнение колебательной энергии (что можно описать с помощью известного нам понятия отрицательного сопротивления R_-), в течение другой его части — уменьшение колебательной энергии. Тогда можно обеспечить энергетический

баланс системы $\int_0^T F(t) dt = 0$, что означает наличие стационарных автоколебаний в колебательной системе. Если, к примеру, считать, что в колебательной системе сопротивление зависит от протекающего через него тока, т. е. $R = R(i)$, то для реализации автоколебаний необходимо потребовать, чтобы функция $F(t) = = R(i) i^2$ была знакопеременной. Только в этом случае можно выполнить условие (5.1.3). Как видно, для этого необходимо, чтобы знакопеременной была функция $R(i)$.

По поводу формы автоколебаний можно сделать некоторые предварительные физически обоснованные предположения. Если накопительный элемент L (см. рис. 5.1) представляет собой добротный колебательный контур и в системе происходят автоколебания, то эти колебания будут близки к гармоническим; свойства цепи обратной связи лишь в небольшой степени повлияют на форму колебаний и в основном она служит только для пополнения колебательной энергии в течение части периода автоколебаний. Если при наличии автоколебаний разорвать цепь обратной связи, то в накопительном элементе будут наблюдаться затухающие колебания. Автоколебательные системы, удовлетворяющие указанным выше условиям, мы будем называть *автоколебатель-*

ными системами осцилляторного типа. В осцилляторных системах потери энергии за период, а следовательно, и величина добавляемой энергии значительно меньше запаса энергии, накопленной в основной колебательной системе.

Если же элемент 1 (см. рис. 5.1) представляет собой апериодический контур, состоящий в основном из RL - или RC -элементов, то форма автоколебаний существенно зависит от свойств цепи обратной связи. Если в такой колебательной системе выполнены условия самовозбуждения, то форма генерируемых колебаний, как правило, далека от синусоидальной, а период колебаний связан с временем релаксации системы, хотя в некоторых случаях (см. ниже) подбором параметров автоколебательной системы можно заставить ее генерировать колебания, близкие к гармоническим. Эти автоколебательные системы принято называть *релаксационными*. Релаксационными системами считаются системы, в которых после разрыва канала, по которому восполняются потери в системе (элемент 2 на рис. 5.1), колебания в накопителе 1 апериодически затухают независимо от формы этих колебаний до разрыва цепи обратной связи. Отсюда сразу же вытекает, что в релаксационных автоколебательных системах может происходить 100%-ный обмен энергии (рассеиваемой на пополняемую) в течение каждого периода автоколебаний.

Как уже было отмечено выше, для получения автоколебаний в системе необходимо, чтобы функция диссипации была знакопеременной, для чего можно использовать различные по физической природе нелинейные двухполюсники с так называемыми

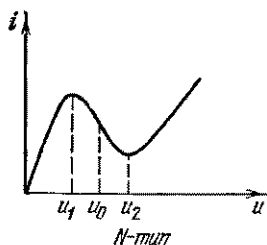


Рис. 5.2. Вольт-амперная характеристика туннельного диода.

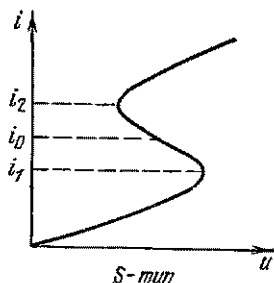


Рис. 5.3. Вольт-амперная характеристика газоразрядного прибора.

«падающими» участками на своих вольт-амперных характеристиках (рис. 5.2, 5.3). На этих участках путем принудительного поддержания определенных тока i_0 или напряжения u_0 в двухполюснике обеспечивается появление в системе отрицательного сопротивления и, следовательно, возможность возникновения автоколебаний. Такими падающими характеристиками обладают туннельные

диоды, газоразрядные приборы, многосеточные электронные лампы, тиристоры, диоды Ганна, джозефсоновские сверхпроводящие контакты и другие приборы. В случае параллельного подсоединения нелинейного двухполюсника с отрицательным дифференциальным сопротивлением к параллельному контуру необходимо использовать элемент с характеристикой N -типа, показанного на рис. 5.2, так как общим для всех элементов такой колебательной системы является напряжение u . Уравнение Кирхгофа для этой системы (рис. 5.4) имеет вид

$$\frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_0} + \varphi(u) = 0$$

или после однократного дифференцирования

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{C} \left[\frac{1}{R_0} + \varphi'(u) \right] \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0, \quad (5.1.4)$$

где $R_0 = 1/G$, $\varphi'(u)$ — дифференциальная проводимость нелинейного элемента с падающей характеристикой, называемая также крутизной характеристики и обозначаемая $S(u)$. Условие самовозбуждения системы (неустойчивость состояний покоя $u_0 = 0$) получается, если потребовать выполнения неравенства

$$[1/R_0 + \varphi'(u)] < 0. \quad (5.1.5)$$

Для этого необходимо, чтобы, во-первых, $\varphi'(u)|_{u=u_0} < 0$ и, во-вторых, $|\varphi'(u)| > 1/R_0$.

Иными словами, на нелинейный элемент нужно подать такое постоянное напряжение, чтобы попасть на падающий участок вольт-амперной характеристики и, кроме того, обеспечить, чтобы отрицательная дифференциальная крутизна $\varphi'(u)$ в рабочей точке была по модулю больше активной проводимости в системе. Данные требования отвечают выбору омического сопротивления R_0 в соответствии с неравенством $R_0 > 1/|\varphi'(u)|$.

При последовательном соединении элементов (рис. 5.5) общим для всех элементов является ток i , и поэтому уравнение движения в системе целесообразно записать в виде

$$L \frac{di}{dt} + R_0 i + \frac{1}{C} \int i dt + \psi(i) = 0, \quad (5.1.6)$$

или

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{L} [R_0 + \psi'(i)] \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (5.1.6a)$$

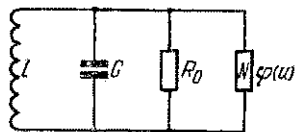


Рис. 5.4. Схема колебательной системы с нелинейным активным элементом с характеристикой N -типа.

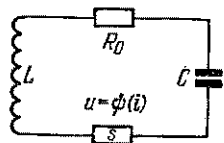


Рис. 5.5. Схема последовательного контура с нелинейным активным элементом с характеристикой S -типа.

В этом случае необходимо использовать элемент с вольт-амперной характеристикой S -типа (рис. 5.3). Условие самовозбуждения запишется следующим образом:

$$[R_0 + \psi'(i)] < 0, \quad (5.1.7)$$

что можно выполнить, если

$$\psi'(i)|_{i=i_0} < 0 \quad \text{и} \quad |\psi'(i)|_{i=i_0} > R_0.$$

Для удовлетворения условий (5.1.7) необходимо введение в нелинейный элемент дополнительного тока i_0 , обеспечивающего в рабочей точке падающую характеристику, и соответствующий выбор величины R_0 .

Заметим, что и для параллельного контура и для последовательной цепи создание неустойчивого состояния равновесия требует введения в систему дополнительных источников напряжения или тока. Это означает, что свойства активного элемента могут быть получены только при наличии источника энергии в системе.

Если в качестве независимой переменной выбрать напряжение на емкости с тем, чтобы эта переменная $x = u_C$ не могла меняться скачком (энергия, запасенная в конденсаторе, не может меняться скачком), то с учетом $i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{dx}{dt}$ и с введением безразмерного времени $\tau = \omega t$, где $\omega^2 = 1/LC$, получаем из (5.1.6а)

$$\ddot{x} + [R_0 C \omega \dot{x} + \psi(C \omega \dot{x})] + x = 0$$

или

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = 0, \quad (5.1.8)$$

где $f(\dot{x}) = R_0 C \omega \dot{x} + \psi(C \omega \dot{x})$.

Если при всех движениях в системе функция $f(\dot{x})$ мала, то это уравнение описывает систему, близкую к линейной консервативной. Подобные автоколебательные системы осцилляторного типа принято называть томсоновскими.

Если $x = x_0$ — положение равновесия исследуемой системы, то $f(\dot{x})|_{\dot{x}=0} = f(0) = -x_0$. Устойчивость этого положения равновесия определяется характером решения уравнения для малых вариаций (возмущений) η равновесного значения $x = x_0$, т. е. $x = x_0 + \eta$; тогда $f(\dot{x}) = f(\dot{\eta}) = f(0) + f'(0) \dot{\eta} + \dots$

Уравнение для вариаций будет иметь вид

$$\ddot{\eta} + f'(0) \dot{\eta} + \eta = 0. \quad (5.1.9)$$

Если $f'(0) < 0$, то любые сколь угодно малые возмущения η вблизи начального значения x_0 превратятся в нарастающие колебания. Параметры этих колебаний можно найти либо интегрированием исходного уравнения (5.1.8), либо путем исследования

системы качественно на фазовой плоскости методом изоклин или методом Льенара. Уравнение фазовых траекторий для рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(x + f(y))}{y}, \quad (5.1.10)$$

где, как и ранее, $y = \dot{x}$.

§ 5.2. Вырожденные автоколебательные системы

Вырожденной автоколебательной системой называется система, не содержащая полного набора реактивных элементов. Рассмотрим пример такой системы, которая, естественно, является системой релаксационного типа (рис. 5.6). Для нее можно записать:

$$Ri + u = E, \quad i = i_C + i^*; \quad i_C = C \frac{du}{dt}, \quad i^* = \varphi(u)$$

и, следовательно,

$$RC \frac{du}{dt} = E - u - R\varphi(u). \quad (5.2.1)$$

В стационарном состоянии $\frac{du}{dt} = 0$ и

$$\varphi(u) = (E - u)/R. \quad (5.2.2)$$

В качестве активного двухполюсника необходимо использовать элемент с падающей вольт-амперной характеристикой *S*-типа (см. рис. 5.3). Представим уравнение (5.2.2) графически для трех различных напряжений питания схемы E_1, E_2, E_3 , соответствующ-

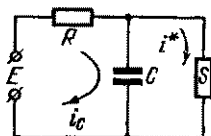


Рис. 5.6. Схема вырожденной автоколебательной системы с C и R .

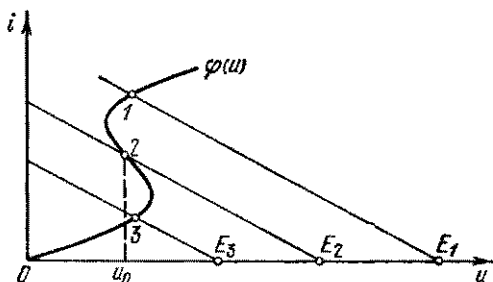


Рис. 5.7. Графическое определение положений равновесия для вырожденного RC -релаксационного генератора.

щих трем стационарным состояниям системы 1, 2, 3 (рис. 5.7). Исследуем на устойчивость стационарное состояние u_0 . Пусть $u = u_0 + \eta$. Линеаризуя по малой вариации η вольт-амперную характеристику $\varphi(u)$ вблизи стационарного состояния u_0 , имеем

$$\varphi(u) = \varphi(u_0 + \eta) = \varphi(u_0) + \eta \varphi'(u_0);$$

подставляя полученное выражение в исходное уравнение (5.2.1), находим

$$RC \frac{d\eta}{dt} = -[1 + R\varphi'(u_0)]\eta. \quad (5.2.3)$$

Если $[1 + R\varphi'(u_0)] > 0$, получаем затухающее решение, при $[1 + R\varphi'(u_0)] < 0$ — нарастающее решение. Следовательно, при $[1 + R\varphi'(u_0)] > 0$ система, описываемая основным уравнением движения (5.2.1), находится в устойчивом состоянии, а при $[1 + R\varphi'(u_0)] < 0$ состояние с $u = u_0$ неустойчиво. Отсюда сразу видно, что состояние 1 и 3 на рис. 5.7, устойчивы, а состояние 2 может быть неустойчивым, если $\varphi'(u_2) < -1/R$.

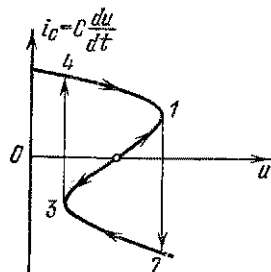


Рис. 5.8. Фазовый портрет колебаний в вырожденном RC-релаксационном генераторе.

Построим фазовый портрет исследуемой релаксационной системы, для чего на фазовой плоскости в координатах $i_C = C du/dt$ и u изобразим вид функции $C du/dt = (E - u)/R - \varphi(u)$ (рис. 5.8).

Рассмотрим положение равновесия ($du/dt = 0$), соответствующее точке 2 на рис. 5.7. Если система в силу флуктуаций в ней испытала толчок в сторону увеличения значения u , то напряжение будет увеличиваться ввиду положительности du/dt до того момента, когда

$\frac{di_C}{du} = \frac{d}{du} \left(C \frac{du}{dt} \right)$ не станет равным бесконечности. Дальнейшее увеличение u невозможно, но описывающая точка с $di_C/du = \infty$ не может быть равновесной. Таким образом, при анализе системы появилось внутреннее противоречие, возникшее вследствие того, что математическое описание системы с помощью дифференциального уравнения первого порядка не отражает всех ее существенных особенностей. Для последовательного рассмотрения необходимо учесть в системе малую паразитную индуктивность, которая всегда существует в схемах, содержащих соединительные проводники. Тогда систему описывает дифференциальное уравнение второго порядка, что позволяет получить периодическое решение и, следовательно, автоколебательный процесс.

Однако удастся обойти возникшее противоречие, предположив, что система в процессе движения может совершать скачки с одной устойчивой ветви кривой на другую, т. е. из точки 1 в точку 2, а из точки 3 в точку 4. Такое предположение основано на том, что во время скачка тока при $L = 0$ энергия в системе не меняется, т. е. $N_{t+0} = N_{t-0}$. Это условие непрерывности энергии, которое применительно к данной системе приводит к условию непрерывности напряжения на конденсаторе $(u_C)_{t+0} = (u_C)_{t-0}$. Допуская

возможность существования бесконечно быстрых скачков тока в рассматриваемой системе, получим для $u_C(t)$ и $i_C(t)$ стационарные автоколебательные процессы, показанные на рис. 5.9 и 5.10.

Такой упрощенный анализ движения не дает, естественно, исчерпывающей характеристики автоколебаний. Более точное



Рис. 5.9. График изменения напряжения на емкости выродженного RC-релаксационного генератора.

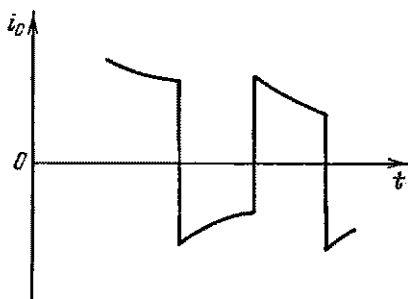


Рис. 5.10. График изменения тока в выродженном RC-релаксационном генераторе.

решение получается, если учитывать наличие реально существующей паразитной индуктивности, что приводит к конечной скорости скачков.

Аналогичные автоколебательные процессы возможны и в системах с неоднозначной зависимостью напряжения от тока (вольт-амперная характеристика N -типа), например в системе, изображенной на рис. 5.11. В этой системе возможно возбуждение и поддержание автоколебаний со скачками напряжения. Условием скачка в данном случае будет непрерывность тока, т. е. непрерывность изменения величины магнитного потока в индуктивности L , определяющей запас энергии в системе. В момент скачка $i_{t+0} = i_{t-0}$.

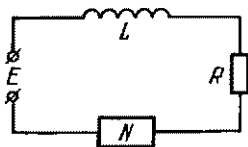


Рис. 5.11. Схема выродженной автоколебательной LR-системы.

Другим примером выродженной автоколебательной системы является *транзитронный генератор*, в котором используется падающий участок вольт-амперной характеристики зависимости тока второй сетки пентода от напряжения на антидинатронной сетке $i_{g_2} = \varphi(u_{g_3})$ (рис. 5.12). Схема транзитронного генератора, представляющего собой систему с двумя выродженными степенями свободы, показана на рис. 5.13. Для нее можно записать следующие уравнения:

$$RC \frac{du}{dt} + u + u_r = E_{g_2}, \quad (5.2.4)$$

$$u_r = r \left(C \frac{du}{dt} + i_{g_2} - C_1 \frac{du_r}{dt} \right). \quad (5.2.5)$$

Из (5.2.4) получаем выражение для u_r и подставляем его вместе с первой производной по времени $du_r/dt = -RC d^2u/dt^2 + du/dt$ в (5.2.5), что приводит к следующему уравнению:

$$RrCC_1 \frac{d^2u}{dt^2} + [RC + rC + rC_1] \frac{du}{dt} + ri_{g_2} + u = E_{g_2}. \quad (5.2.6)$$

Обозначим аргумент нелинейной транзитронной характеристики через $x = u_g = RC du/dt$; тогда уравнение (5.2.6) после однократного дифференцирования примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{1}{rC_1} + \frac{1}{RC_1} + \frac{1}{RC} + \frac{S(x)}{C_1} \right] \frac{dx}{dt} + \frac{1}{RrCC_1} x = 0, \quad (5.2.7)$$

где, как обычно, $S(x) = \varphi'(x)$. Нетрудно заметить, что $S(x)$ имеет размерность проводимости и, следовательно, падающий участок

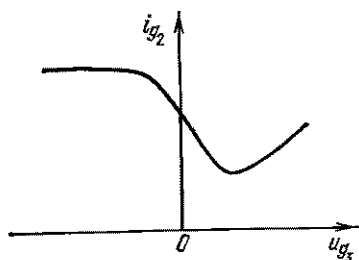


Рис. 5.12. Транзитронная характеристика пентода.

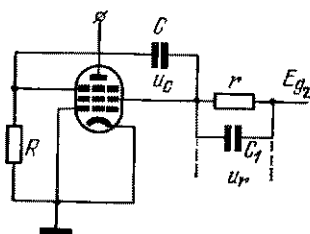


Рис. 5.13. Схема транзитронного генератора.

транзитронной характеристики представляет собой часть вольт-амперной характеристики N -типа (см. рис. 5.2).

Анализируя уравнение (5.2.7), можно сделать некоторые важные выводы. Если предположить, что коэффициент при первой производной dx/dt в состоянии покоя системы ($x=0$) можно подбором параметров r , R , C , C_1 , $S(0)$ сделать меньше нуля, то в системе могут возникнуть автоколебания. Их частота определяется произведением двух постоянных времени релаксации rC_1 и RC , т. е. $\omega_0^2 = (RrCC_1)^{-1}$. Условия самовозбуждения системы имеют вид

$$S(0) < 0, \quad |S(0)| > 1/r + 1/R + C_1/CR. \quad (5.2.8)$$

Если теперь предположить, что коэффициент при первой производной в уравнении (5.2.7) останется малым для всех возможных значений x в процессе колебаний, то такое уравнение описывает автоколебательный процесс, близкий к гармоническому. Условие малости этого коэффициента можно реализовать, если обеспечить на линейном участке падающей характеристики следующее слабое неравенство: $|S(0)| \gtrsim 1/r + 1/R + C_1/CR$.

Рассматривая поведение такой автоколебательной системы, следует обратить внимание на особую роль, которую играет в определении формы колебаний параметр C_1 . Если уравнение (5.2.7) записать в виде

$$C_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{R} + \frac{C_1}{CR} + S(x) \right] \frac{dx}{dt} + \frac{1}{RrC} x = 0,$$

и считать, что $C_1 \rightarrow 0$, то получаем дифференциальное уравнение с малым коэффициентом при высшей производной. Такой класс уравнений в теории колебаний имеет большое значение. Действительно, при $C_1 \rightarrow 0$ первый член уравнения влияет на характер движения только в тех областях изменения x , где dx/dt велико, т. е. наличие емкости C_1 позволяет учесть быстрые изменения тока ($C_1 d^2x/dt^2$). Когда изменение тока медленно, а C_1 близко к нулю (например, C_1 — только паразитная емкость схемы), то движение в системе описывается уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{r} + S(x) \right] + \frac{1}{RrC} x = 0, \quad (5.2.9)$$

из которого следует, что

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{x}{C[R+r+RrS(x)]}. \quad (5.2.10)$$

Поскольку выражение в квадратных скобках в (5.2.9) входит сомножителем в функцию диссипации колебательной системы и обязано быть знакопеременным в случае автоколебательных систем, то выражение в квадратных скобках в (5.2.10) при изменении x проходит через нуль в точках, определяемых соотношением

$$|S(x)| = \frac{R+r}{Rr}. \quad (5.2.11)$$

В этих точках в системе происходят очень быстрые изменения тока, и для определения конечного времени скачка необходимо учитывать член со второй производной $C_1 d^2x/dt^2$. Чем меньше C_1 , тем резче выражены быстрые этапы движения, т. е. автоколебания носят разрывный релаксационный характер.

Таким образом, изменяя в широких пределах C_1 , можно заставить релаксационную автоколебательную систему, какой является транзитронный генератор, генерировать колебания от типично разрывных до колебаний, близких к гармоническим. Наиболее близки к гармоническим колебания, получающиеся при приближении к нарушению условия самовозбуждения (5.2.8) в результате увеличения параметра C_1 . Эти особенности поведения транзитронного генератора как релаксационной автоколебательной системы в зависимости от параметра C_1 можно наблюдать на

фазовой плоскости путем построения фазовых портретов системы с учетом конкретного вида характеристики $S(x)$.

Если коэффициент при первой производной (5.2.7) записать в виде

$$\frac{1}{C_1} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{R} + \frac{C_1}{CR} + S(x) \right] = \varepsilon \psi_1(x),$$

то уравнение фазовых траекторий для этой системы примет вид

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(1/RrCC_1)x + \varepsilon \psi_1(x)y}{y},$$

а уравнение изоклин — вид

$$y = - \frac{1}{k_i} \left[\frac{x}{RrCC_1} + \varepsilon \psi_1(x) \right],$$

где $k_i = dy/dx$.

При малом ε , что соответствует большим C_1 , изоклины близки к прямым, и такую автоколебательную систему можно считать близкой к линейной консервативной с фазовыми траекториями, близкими к эллипсам. При большом ε (C_1 мало) изоклины сильно отличаются от прямых, и фазовые траектории содержат быстрые изменения производной от координаты. В пределе при $C_1 = 0$ процесс описывается уравнением первого порядка, и на фазовой плоскости останется одна-единственная фазовая траектория. В этом случае периодические движения возможны лишь при наличии скачков производной при сохранении непрерывности изменения x , т. е. напряжения на емкости, определяющего запас энергии системы.

Недостатком транзитронного генератора следует считать невозможность изменения частоты колебаний без изменения их формы и амплитуды, ибо все параметры, определяющие частоту колебаний, входят в условие самовозбуждения (5.2.8).

§ 5.3. Общее рассмотрение автоколебательных систем

На примерах релаксационных систем мы убедились в том, что для математического описания движения в реальных автоколебательных системах с одной степенью свободы необходимо пользоваться дифференциальными уравнениями второго порядка. Для систем, описываемых такими уравнениями, можно получить изображение соответствующего движения на фазовой плоскости. В некоторых случаях, когда уравнение нелинейно и не поддается аналитическому решению, построение фазового портрета движения в системе является существенной помощью в определении формы колебаний и динамики их установления. Следует отме-

тить, что для решения сложных нелинейных уравнений используются также численные методы с применением ЭВМ.

Если рассматривать автоколебательные системы с постоянными реактивными параметрами в предположении, что нелинейность системы проявляется только в свойствах диссипативного члена в уравнении движения, то в общем виде его можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \psi_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.3.1)$$

При соответствующем выборе функции $\psi_0(x, dx/dt)$ оно справедливо для любого вида автоколебательных систем (как осцилляторных, так и релаксационных). Вводя безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, получим

$$\ddot{x} + \psi(x, \dot{x}) + x = 0. \quad (5.3.2)$$

Если, как обычно, положить $\dot{x} = y$, то уравнение фазовых траекторий запишется в виде

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{[x + \psi(x, y)]}{y}. \quad (5.3.3)$$

Введение в уравнение (5.3.1) $\tau = \omega_0 t$ необходимо для получения одинакового масштаба для x и y .

Из физических определений известно, что если система является автоколебательной, то в ней должен существовать стационарный колебательный процесс, который на фазовой плоскости соответствует замкнутой фазовой траектории, так как автоколебательную систему можно рассматривать как квазиконсервативную. Если автоколебания в системе устойчивы, то и замкнутая фазовая траектория также должна быть устойчива, т. е. к ней должны сходиться все фазовые траектории в близкой ее окрестности. Подобные предельные фазовые траектории называют *предельными циклами*.

Для предельного цикла должен соблюдаться энергетический баланс, т. е. за период колебаний

$$\int_0^{2\pi} \psi(x, y) \dot{x} d\tau = 0.$$

Доказано, что при определенных условиях, накладываемых на вид диссипативной функции $\psi(x, y)$, такие предельные циклы существуют, и они описывают автоколебательные процессы. При представлении автоколебательных систем на фазовой плоскости наряду с предельными циклами необходимо рассматривать также особые точки, соответствующие состояниям равновесия.

Если положить, что $\psi(x, y) = f(y)$, что соответствует многим физическим колебательным системам, то уравнение фазовых траекторий примет вид

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{[x + f(y)]}{y}. \quad (5.3.4)$$

Приближенное графическое построение фазовых траекторий таких систем (см. § 2.3) удобно проводить методом Льенара. На рис. 5.14 показаны построения для нескольких точек (A, C, B) фазовой плоскости при заданной форме $f(y)$.

Если система диссипативная, то функция $f(y)$ должна иметь тот же знак, что и y . При введении в систему энергии знак $f(y)$ противоположен знаку y . Мгновенный центр для построения отрезков фазовой траектории лежит при этом справа от начала координат, и сама фазовая траектория раскручивается. В случае стационарных автоколебаний необходимо, чтобы вложение энергии балансировалось потерями в системе; иными словами, функция $f(y)$ должна быть такой, чтобы в зависимости от состояния системы менялся знак потерь. На рис. 5.14 это соответствует движению описываемой точки по фазовой траектории из точки A к точке C ; на этом участке траектория скручивается. На участке

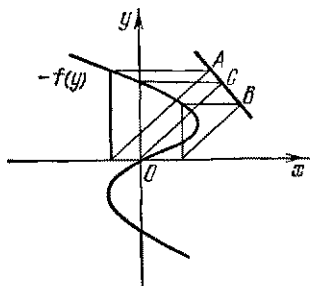


Рис. 5.14. Построение элемента фазовой траектории методом Льенара.

от точки C до точки B фазовая траектория раскручивается. Такая смена состояний системы на фазовой плоскости происходит четыре раза за период. Если уменьшения и увеличения амплитуды компенсируют друг друга, то наблюдается устойчивый предельный цикл, и имеет место энергетический баланс в системе.

Рассмотрим малые колебания вблизи положения равновесия. Приближенно можно считать, что для функции $f(y)$, характеризующей потери системы, мы вправе записать

$$f(y) \approx f'(0)y.$$

Как известно, для неустойчивости состояния покоя необходимо, чтобы $f'(0)$ и y имели разные знаки, т. е. чтобы $f'(0)y < 0$. В этом случае в системе происходит увеличение колебательной энергии. Если же $f'(0)y > 0$, то в системе имеет место диссипация энергии. Поэтому график $-f(y)$ для автоколебательной системы с малыми потерями должен иметь вид, показанный на фазовой плоскости рис. 5.15.

При малых $f(y)$ мгновенные центры для построения фазовых траекторий близки к началу координат, сами фазовые траектории

напоминают окружности, а колебания в системе близки к гармоническим. Подобные автоколебательные системы принадлежат к системам томсоновского типа. Следовательно, для томсоновских автоколебательных систем характерна малость $f(y)$, что физически означает малую убыль и малое пополнение энергии за период колебания в стационарном режиме.

Начало координат (см. рис. 5.15) является неустойчивой особой точкой типа фокус, и все траектории, выходящие из начала координат, через большее или меньшее число периодов колебаний (в зависимости от добротности накопительного элемента системы) приходят на предельный цикл.

В зависимости от знака $f(y)$ вся фазовая плоскость делится на следующие области: *I* — инкрементная область, в которой вложение колебательной энергии превосходит потери; *II* — декрементные области, в которых потери превосходят вложения энергии (см. рис. 5.15). В инкрементной области расстояние фазовой траектории от начала координат увеличивается, т. е. увеличивается энергия колебаний, в декрементной области фазовые траектории приближаются к началу координат, что соответствует уменьшению колебательной энергии системы. В такой системе в зависимости от начальных условий (x_0, y_0) фазовая траектория придет к предельному циклу либо изнутри, если $x_0 < x_{\text{стан}}$, $y_0 < y_{\text{стан}}$, либо снаружи, если $x_0 > x_{\text{стан}}$, $y_0 > y_{\text{стан}}$, где $x_{\text{стан}}$ и $y_{\text{стан}}$ лежат на предельном цикле.

Для автоколебательной системы, для которой функцию $f(y)$ нельзя считать малой, фазовый портрет системы имеет вид, показанный на рис. 5.16. В такой системе колебания заметно отличаются от гармонических, процесс установления стационарных автоколебаний происходит значительно быстрее, чем в случае, показанном на рис. 5.15. Энергообмен в системе значительно больше, чем в системах томсоновского типа. Автоколебательная система такого типа занимает промежуточное положение между системами томсоновского и релаксационного типов.

Если мы построим на фазовой плоскости фазовые траектории для системы, у которой функция $f(y)$ меняется в больших пределах, то получим для данного вида $f(y)$ фазовый портрет, показанный на рис. 5.17. Нелинейная функция $f(y)$ такого вида соответствует автоколебательной системе релаксационного типа, близкой

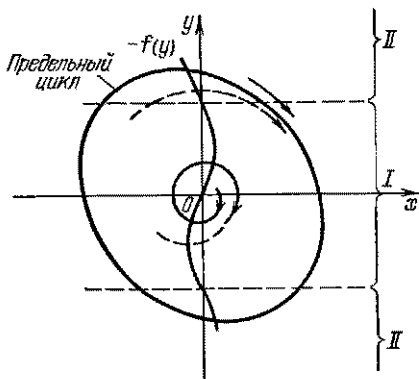


Рис. 5.15. Построение фазовых траекторий для томсоновской системы.

к вырожденной системе, для которой член с высшей производной необходимо учитывать только во время быстрых изменений координаты y (случай скачков). Установление стационарных колебаний

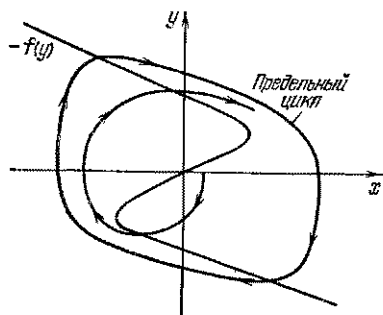


Рис. 5.16. Вид фазовых траекторий для системы промежуточного типа.

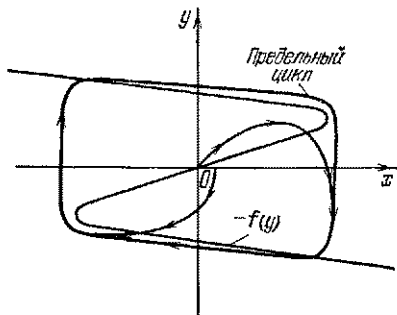


Рис. 5.17. Вид фазовых траекторий для системы релаксационного типа.

(выход на предельный цикл) в подобных системах происходит практически за доли периода колебаний. Энергообмен в системе в режиме автоколебаний близок к 100%. Фазовый портрет такой

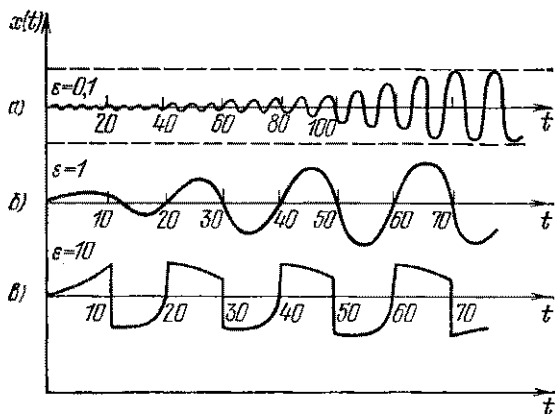


Рис. 5.18. Графики установления колебаний для различных типов автоколебательных систем.

системы показывает, что форма предельного цикла в сильной степени зависит от вида нелинейной функции $f(y)$.

Если, как это сделал Ван дер Поль, провести численное интегрирование уравнения

$$\ddot{x} + \epsilon(-1 + \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0, \quad (5.3.5)$$

в котором функция $f(y)$ имеет вид $f(y) = -\epsilon(1 - y^2)$, то при различных значениях безразмерного параметра ϵ получаются существенно разные картины процесса установления колебаний в системе, описываемой уравнением (5.3.5) (рис. 5.18). При $\epsilon = 0,1$ (рис. 5.18, а) установление колебаний происходит медленно, система добротна и представляет собой автоколебательную систему томсоновского типа. При $\epsilon = 10$ (рис. 5.18, в) стационарные колебания устанавливаются за доли периода колебаний, имеют четко выраженный разрывной характер и соответствуют автоколебательной системе релаксационного типа, близкой к вырожденной. При $\epsilon = 1$ (рис. 5.18, б) процесс установления происходит за несколько периодов колебаний; форма колебаний существенно отличается от гармонической; такая автоколебательная система является промежуточной между системами томсоновского и релаксационного типов.

Процессы установления в системах, описываемых уравнением Ван дер Поля с разными значениями коэффициентов при диссипативном члене, соответствуют фазовым портретам систем с разными величинами функции $f(y)$, рассмотренным ранее на фазовой плоскости методом Льенара.

§ 5.4. Автоколебательные системы томсоновского типа

Выше уже отмечалось, что для автоколебательных систем томсоновского типа характерны малое затухание и малое вложение энергии за период колебаний по сравнению с запасом колебательной энергии системы. Колебания в таких системах почти гармонические.

Элементарная теория часов. Простейшая система такого типа — обыкновенные часы с маятником или балансом в качестве накопителя энергии. Принцип работы часов заключается в том, что когда маятник (баланс) совершает колебания и проходит через свое положение равновесия, ему через механизм, связанный с заведенной пружиной, сообщается толчок, который немного увеличивает скорость движения маятника.

Если бы маятник (баланс) совершал колебания без подталкивания со стороны заведенной пружины, то уравнение его движения записывалось бы в виде

$$\ddot{x} + 2\theta\dot{x} + x = 0, \quad \text{причем } \theta > 0, \quad (5.4.1)$$

а фазовая траектория имела бы вид постепенно скручивающейся спирали.

Обозначив через d изменение скорости в момент прохождения маятника через $x = 0$, находим

$$y(t+0) - y(t-0) = d.$$

В этом случае в стационарном режиме колебаний при двух «подталкиваниях» за период предельный цикл на фазовой плоскости имеет вид, схематически показанный на рис. 5.19.

Для данной автоколебательной системы нетрудно определить стационарную амплитуду колебаний, используя то обстоятельство, что уменьшение амплитуды скорости за половину периода ($\tau = \pi$) в точности компенсируется увеличением скорости на d в результате одного толчка. Решение уравнения (5.4.1), как известно, имеет вид $x = Ae^{-\theta\tau} \sin \tau$; тогда

$$y = \dot{x} = -A\theta e^{-\theta\tau} \sin \tau + Ae^{-\theta\tau} \cos \tau = \\ = Ae^{-\theta\tau} [\cos \tau - \theta \sin \tau].$$

Рис. 5.19. Фазовая траектория установившихся автоколебаний в идеализированной модели часов.

При $\Delta y < d$ колебательная энергия системы возрастает; при $\Delta y > d$ колебательная энергия системы убывает; при $\Delta y = d$ имеет место стационарный автоколебательный режим, при котором баланс вкладываемой и рассеиваемой энергий равен нулю.

Если считать, что толчок происходит при $\tau = 0$, то можно записать условие баланса за половину периода колебаний

$$\Delta y = A - Ae^{-\theta\pi} = A[1 - e^{-\theta\pi}] = d,$$

откуда сразу определяется стационарная амплитуда колебаний

$$A_0 = d/(1 - e^{-\theta\pi}).$$

Автоколебательные системы с электронными лампами. Для генератора с колебательным контуром в цепи сетки (рис. 5.20)

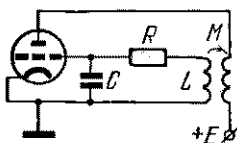


Рис. 5.20. Схема лампового генератора с контуром в цепи сетки.

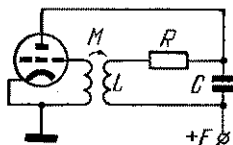


Рис. 5.21. Схема лампового генератора с контуром в анодной цепи.

в пренебрежении анодной реакцией легко выводится уравнение движения вида

$$\ddot{x} + 2\theta\dot{x} + x = \frac{M}{L\omega_0 q_0} \frac{di_a}{d\tau}, \quad (5.4.2)$$

где $x = q/q_0$, $2\vartheta = R/\omega_0 L$, $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0^2 = 1/LC$. Для генератора с контуром в анодной цепи (рис. 5.21) дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + 2\vartheta \dot{x} + x = i_a/i_0, \quad (5.4.3)$$

где $x = i/i_0$, $2\vartheta = R/\omega_0 L$, $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Поведение этих систем и методы анализа уравнений (5.4.2) и (5.4.3) зависят от типа системы и вида характеристик используемых ламп. В этом параграфе рассматриваются только автоколебательные системы томсоновского типа, уравнения движения которых можно привести к виду

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (5.4.4)$$

где $f(x, \dot{x})$ — ограниченная функция, а $\mu \ll 1$. Начнем со случая линейной характеристики $i_a = i_0 + S u_g$, где i_0 — постоянная составляющая тока, S — крутизна характеристики ($S = di_a/d u_g$ при напряжении на аноде $u_a = \text{const}$), u_g — сеточное напряжение. Этот вид зависимости i_a от u_g описывает поведение системы вблизи состояния покоя. Рассмотрим колебания в системе в случае генератора с контуром в цепи сетки. Из рис. 5.20 видно, что $u_g = q/C = q_0 x/C$. Так как $x = q/q_0$, то линейную аппроксимацию вольт-амперной характеристики лампы можно представить в виде $i_a = i_0 + S(q_0/C)x$ и уравнение (5.4.2) запишется следующим образом:

$$\ddot{x} + x = (-2\vartheta + SM\omega_0) \dot{x}. \quad (5.4.5)$$

Если $(-2\vartheta + SM\omega_0) > 0$, то система самовозбуждается. Аналогичное условие самовозбуждения получается для генератора с контуром в цепи анода, если записать очевидное соотношение $u_g = M di/dt = M\omega_0 i_0 \dot{x}$. Тогда без учета постоянной составляющей i_0 (5.4.3) примет вид

$$\ddot{x} + x = -2\vartheta \dot{x} + M\omega_0 S \dot{x}. \quad (5.4.6)$$

Таким образом, условием самовозбуждения обоих генераторов вблизи состояния покоя системы ($x=0$) является неравенство

$$M\omega_0 S > 2\vartheta.$$

Следует отметить, что при таком рассмотрении задачи выполнение условия самовозбуждения означает, что колебания в исследуемой системе нарастают неограниченно, что не происходит в реальных системах. Это обстоятельство связано с тем, что принятая нами линейная аппроксимация вольт-амперной характеристики лампы пригодна лишь для небольших пределов изменения x . Это означает также, что в таком режиме работы подобные системы не могут генерировать стационарные колебания, т. е. не имеют на фазовой плоскости замкнутой фазовой траектории — предельного цикла.

Метод колебательных характеристик. Для рассмотрения поведения автоколебательных систем при более сложных, нелинейных вольт-амперных характеристиках ламп применяется так называемый квазилинейный метод колебательных характеристик. В этом методе вводится усредненная крутизна, которая является переменной величиной, зависящей от амплитуды колебаний, т. е. $\bar{S} = f(A)$.

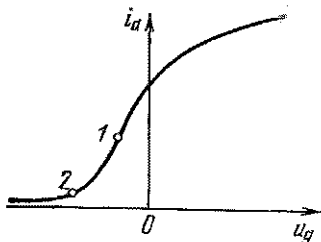


Рис. 5.22. Типичная характеристика триода $i_a = \varphi(u_g)$.

Сущность квазилинейного метода колебательных характеристик состоит в том, что ищется такая усредненная крутизна $\bar{S}$, которая обеспечивает равенство нулю коэффициента при диссипативном члене в среднем за период колебания, т. е. в стационарном режиме $(2\theta - \bar{S}(A)M\omega_0) = 0$. Отсюда сразу получается

$$\bar{S}(A) = 2\theta / M\omega_0 = RC/M. \quad (5.4.7)$$

Под величиной $\bar{S}(A)$ понимается отношение амплитуды первой гармоники анодного тока I_1 к амплитуде сеточного напряжения $\bar{u}_g$; $\bar{S}(A) = I_1/\bar{u}_g$. Рассматриваемый метод пригоден для гармонических и почти гармонических колебаний. Пусть $i_a = \varphi(u_g)$, где $u_g = \bar{u}_g \cos \omega_0 t$; тогда, разлагая i_a в ряд Фурье, получаем $i_a = I_0 + I_1 \cos \omega_0 t + I_2 \cos 2\omega_0 t + \dots$

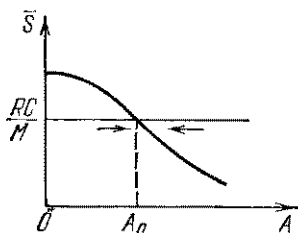


Рис. 5.23. Колебательная характеристика для мягкого режима возбуждения колебаний.

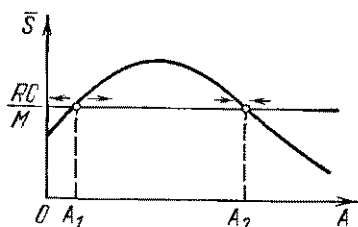


Рис. 5.24. Колебательная характеристика для жесткого режима возбуждения колебаний.

На рис. 5.22 показана типичная нелинейная характеристика $i_a = \varphi(u_g)$. Если выбрать начальные рабочие точки 1 и 2 так, как показано на рис. 5.22, т. е. точку 1 в середине участка характеристики с максимальной крутизной S , а точку 2 — где-то на изгибе характеристики $\varphi(u_g)$, то для этих начальных точек зависимости усредненной крутизны от амплитуды колебаний A на сетке лампы имеют существенно различный характер (рис. 5.23, 5.24).

Графическое решение уравнения (5.4.7) при выборе в качестве рабочей точки 1 имеет вид, изображенный на рис. 5.23. В этом

случае находим единственное решение — стационарную амплитуду колебаний A_0 , при которой в системе обеспечивается баланс вкладываемой и рассеиваемой энергий за период колебаний. Из того же рисунка следует, что полученное решение A_0 не только единственно возможно, но и устойчиво. Действительно, если амплитуда колебаний A станет больше A_0 , то потери в системе, пропорциональные RC/M , будут превышать вложение энергии, пропорциональное $\bar{S}$, и амплитуда A вернется в точку A_0 . И наоборот, если A станет меньше A_0 , то вложение энергии будет превосходить потери и, как следствие, амплитуда колебаний снова увеличится до значения A_0 .

Такой режим возбуждения с выходом на предельный цикл называется *мягким* и реализуется при выборе рабочей точки на участке характеристики с наибольшей крутизной; при этом начальные толчки (флуктуации) в системе могут быть сколь угодно малыми.

Графическое решение уравнения (5.4.7) при выборе рабочей точки на изгибе вольт-амперной характеристики (точка 2 на рис. 5.22) показано на рис. 5.24. Из его рассмотрения можно сделать несколько выводов. При таком режиме возбуждения в потенциально автоколебательной системе не происходит самовозбуждения; иными словами, если флуктуации (амплитуды толчков) в системе не превышают значения неустойчивой стационарной амплитуды A_1 , то эти флуктуации спадают до нуля. Поэтому для возбуждения автоколебательной системы с такой колебательной характеристикой $\bar{S}(A)$ необходимо сообщить ей толчок, величина которого A должна быть больше или равна A_1 (*жесткое* возбуждение).

Качественное определение устойчивости стационарных амплитуд A_1 и A_2 , аналогичное случаю мягкого режима, показывает, что решение A_1 неустойчиво, а решение A_2 устойчиво.

Следует отметить, что квазилинейный метод основан на априорном предположении о существовании в рассматриваемой системе стационарных гармонических колебаний, для которых можно вычислить усредненное значение крутизны и получить ее зависимость от амплитуды колебаний. Только введение допущения о достаточно медленном изменении амплитуды генерируемых колебаний позволяет изучать процессы возбуждения и установления стационарных колебаний с помощью усредненных уравнений, аналогичных получаемым в методе ММА.

Применение метода ММА к автоколебательным системам томсоновского типа. Уравнение, описывающее автоколебательные системы томсоновского типа с одной степенью свободы, всегда можно свести к обобщенному уравнению вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (5.4.8)$$

где $\mu \ll 1$. Такое же ограничение накладывалось на правую часть уравнения (2.5.1) с тем, чтобы для его решения можно было при-

менять метод медленно меняющихся амплитуд. Поэтому для исследования различных автоколебательных систем томсоновского типа очень часто используется метод ММА. На рис. 5.4 приведена обобщенная схема автоколебательной системы с активным элементом с характеристикой N -типа. К такой схеме можно привести ламповый генератор с контуром в цепи анода, генератор на туннельном диоде и многие другие генераторы томсоновского типа. Отметим, что характеристику N -типа с падающим участком можно получить с помощью электронной лампы или транзистора (которые представляют собой четырехполюсники или трехполюсники), используя системы обратной связи (как, например, в схеме рис. 5.21), тогда как соответствующие полупроводниковые и газоразрядные приборы вследствие специфического механизма прохождения тока через них могут служить активными двухполюсниками с требуемыми характеристиками без дополнительных цепей обратной связи.

Уравнение Кирхгофа для токов в контуре (рис. 5.4) имеет вид

$$\varphi(u) = i_L + i_R + i_C$$

и при полиномиальной аппроксимации тока активного элемента получим

$$i_a = \varphi(u) = i_0 + \alpha_0 u + \beta_0 u^2 + \gamma_0 u^3,$$

где учитываются члены до кубического включительно. Тогда для нашей системы можно записать следующее уравнение движения:

$$\ddot{x} + x = (k + \beta x + \gamma x^2) \dot{x}, \quad (5.4.9)$$

где $k = \alpha - 2\theta$, $\alpha = \alpha_0/C\omega_0$, $2\theta = 1/RC\omega_0$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $\beta = 2\beta_0 u_0/C\omega_0$, $\gamma = 3\gamma_0 u_0^2/C\omega_0$, $x = u/u_0$, $\tau = \omega_0 t$. Введенный таким способом коэффициент $k = \alpha - 2\theta$ называется *коэффициентом регенерации* и показывает соотношение между вложением и потерями энергии в колебательной системе при различных значениях ее параметров. Если считать, что коэффициент регенерации k и коэффициенты нелинейности β и γ удовлетворяют требованию $k \ll 1$, $\beta \ll 1$, $\gamma \ll 1$, то к такой системе применим метод ММА.

Вводим новые переменные *) $x = u \cos \tau + v \sin \tau$, $\dot{x} = -u \sin \tau + v \cos \tau$ и после усреднения уравнений

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [k + \beta x + \gamma x^2] \dot{x} \sin \tau \, d\tau,$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [k + \beta x + \gamma x^2] \dot{x} \cos \tau \, d\tau$$

*) Разумеется, здесь (как и много раз ранее) u — новая переменная, а не напряжение.

получаем систему укороченных уравнений

$$\dot{u} = \frac{1}{2} [k + \frac{1}{4}\gamma z] u, \quad \dot{v} = \frac{1}{2} [k + \frac{1}{4}\gamma z] v, \quad (5.4.10)$$

где $z = u^2 + v^2$. От двух укороченных уравнений для u и v можно перейти к одному уравнению для z :

$$\dot{z} = (k + \frac{1}{4}\gamma z) z. \quad (5.4.11)$$

В укороченных уравнениях (5.4.10), (5.4.11) отсутствуют члены с коэффициентом β , откуда следует, что квадратичные члены при усреднении не влияют на процессы установления и стационарные амплитуды в таких автономных автоколебательных режимах работы.

Для данной системы существует два стационарных решения ($\dot{z} = 0$). Одно из них является нулевым решением и соответствует состоянию покоя $u_0 = v_0 = z_0 = 0$, другое — с отличной от нуля амплитудой имеет вид $z_0 = -4k/\gamma$. Так как для самовозбуждения автоколебательной системы необходимо, чтобы коэффициент регенерации был больше нуля ($k > 0$), то, значит, стационарная отличная от нуля амплитуда автоколебаний в системе может быть только при $\gamma < 0$ (при выбранной аппроксимации нелинейной характеристики). Здесь мы встречаемся с обычным для автоколебательных систем условием, требующим, чтобы знак коэффициента при высшем члене в разложении вольт-амперной характеристики нелинейного элемента (γ_0) был обратен знаку члена, обеспечивающего вложение энергии, а члены (член), ответственные за вложение энергии в систему (α_0), были всегда более низкого порядка, чем высший член в разложении. В нашем примере $\alpha_0 > 0$, $\gamma_0 < 0$.

Исследуем устойчивость стационарных состояний системы. В случае состояния покоя системы $z = 0 + \eta$, и тогда уравнение для возмущений (малых вариаций) в первом приближении имеет вид

$$\dot{\eta} = k\eta. \quad (5.4.12)$$

Как мы видим, знак коэффициента регенерации k определяет устойчивость состояния покоя: при $k > 0$ ($\alpha > 2\theta$) состояние покоя неустойчиво, происходит самовозбуждение; при $k < 0$ ($\alpha < 2\theta$) состояние покоя устойчиво. В случае ненулевой стационарной амплитуды ($z_0 = -4k/\gamma$) ее значение при возмущении η запишется как $z = -4k/\gamma + \eta$; тогда уравнение для возмущения примет вид

$$\dot{\eta} = -k\eta. \quad (5.4.13)$$

При $k > 0$ ($\alpha > 2\theta$) ненулевая стационарная амплитуда устойчива, при $k < 0$ ($\alpha < 2\theta$) амплитуда неустойчива. На рис. 5.25 приведена зависимость величины стационарной ненулевой амплитуды от коэффициента регенерации, где кружочками обозначены

устойчивые стационарные состояния системы, крестиками — неустойчивые состояния. Показанный на этом рисунке жирной линией режим возбуждения называется *мягким режимом*.

Таким образом, каждому значению k_i соответствует одно-единственное отличное от нуля стационарное состояние системы, что соответствует на фазовой плоскости одному предельному циклу — замкнутой фазовой траектории (рис. 5.26). Снаружи предельного

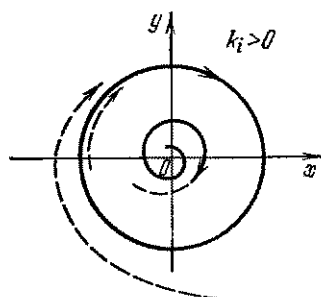
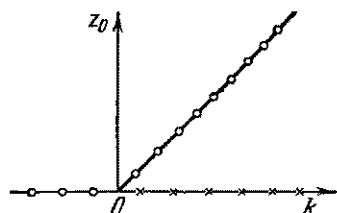


Рис. 5.25. Зависимость стационарной амплитуды от коэффициента регенерации для мягкого режима.

Рис. 5.26. Фазовый портрет автоколебательной системы томсоновского типа при мягком режиме возбуждения.

цикла фазовые траектории соответствуют затухающим колебаниям (скручивающиеся спирали), внутри предельного цикла фазовые траектории (раскручивающиеся спирали) соответствуют нарастающим колебаниям; в начале координат находится особая точка типа неустойчивого фокуса.

Если аппроксимировать $i_a = \varphi(u)$ полиномом пятой степени:

$$i_a = i_0 + \alpha_0 u + \gamma_0 u^3 + \varepsilon_0 u^5,$$

то уравнение движения (5.4.9) будет иметь вид

$$\ddot{x} + x = (k + \gamma x^2 + \varepsilon x^4) \dot{x}, \quad (5.4.14)$$

где $\varepsilon = 5\varepsilon_0 u_0^4 / C\omega_0$, а остальные обозначения те же, что и в (5.4.9). Укороченное уравнение в этом случае запишется как

$$\dot{z} = z[k + \gamma z/4 + \varepsilon z^2/8]. \quad (5.4.15)$$

Отсюда нетрудно определить стационарные состояния ($\dot{z} = 0$) системы, одно из которых является состоянием покоя ($z_0 = 0$) и возможно при любых параметрах системы. Второе отличное от нуля стационарное состояние системы определяется из решения уравнения

$$\varepsilon z_0^2/8 + \gamma z_0/4 + k = 0,$$

откуда

$$z_0 = -\gamma/\varepsilon \pm \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\gamma^2 - 8k\varepsilon}. \quad (5.4.16)$$

Поскольку коэффициент ε при старшем члене должен быть меньше нуля ($\varepsilon < 0$), то здесь возможны два случая: $\gamma < 0$ и $\gamma > 0$.

Случай $\gamma < 0$. Качественно он не отличается от ситуации, когда $\varepsilon_0 = 0$, т. е. соответствует мягкому режиму возбуждения. Тогда кривая второго порядка $z_0(k)$ проходит очень близко от прямой, описывающей решение для кубической аппроксимации ($\varepsilon_0 = 0$) (рис. 5.27).

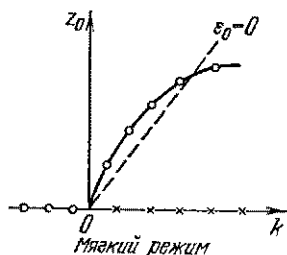


Рис. 5.27. Зависимость стационарной амплитуды от коэффициента регенерации при аппроксимации характеристики полиномом пятой степени для мягкого режима ($\gamma_0 < 0$; $\varepsilon_0 < 0$).

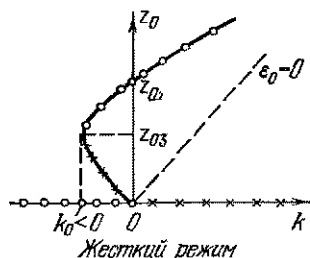


Рис. 5.28. Зависимость стационарной амплитуды от коэффициента регенерации при аппроксимации характеристики полиномом пятой степени для жесткого режима ($\gamma_0 > 0$; $\varepsilon_0 < 0$).

Случай $\gamma > 0$. Решение для стационарной амплитуды можно записать в виде

$$z_0 = \frac{\gamma}{|\varepsilon|} \pm \frac{1}{|\varepsilon|} \sqrt{\gamma^2 + 8k|\varepsilon|}.$$

При $k=0$ возможны два решения $z_0 = z_{01} = 2\gamma/|\varepsilon|$ и $z_0 = z_{02} = 0$. Однако оказывается, что и при некоторых отрицательных значениях коэффициента регенерации k можно получить отличную от нуля амплитуду автоколебаний. Предельное отрицательное значение k_0 определяется из условия $\sqrt{\gamma^2 + 8k_0|\varepsilon|} = 0$, откуда $k_0 = -\gamma^2/8|\varepsilon|$; при этом $z_0 = z_{03} = \gamma/|\varepsilon|$. Зависимость $z_0(k)$ показана на рис. 5.28. По-прежнему состояние покоя системы устойчиво при $k < 0$ и неустойчиво при $k > 0$. Однако на участке от $k_0 = -\gamma^2/8|\varepsilon|$ до $k=0$ состояние покоя лишь относительно устойчиво; если амплитуда возмущения η_0 будет такой, что она достигнет нижней неустойчивой ветви амплитудной кривой, то в системе возбудятся автоколебания с отличной от нуля устойчивой стационарной амплитудой. Такой режим возбуждения называется *жестким*. В области $-\gamma^2/8|\varepsilon| \leq k \leq 0$ система самовозбудиться не может. Физическое объяснение явления жесткого возбуждения заключается в том, что при некоторых достаточно больших возмущениях η_0 регенерация системы возможна и происходит за счет кубического члена зависимости $i_a = \varphi(u)$, несмотря на отрицательное значение коэффициента регенерации k .

На фазовой плоскости область жесткого возбуждения для фиксированного $k_{01} = \text{const} < 0$ представлена двумя предельными циклами — окружностями, один из которых (больший) устойчив и соответствует значениям амплитуд автоколебаний, лежащих в области от $z_{03} = \gamma/|\epsilon|$ до $z_{01} = 2\gamma/|\epsilon|$; другой (меньший) неустойчив и соответствует значениям амплитуд, лежащих в области от $z_{02} = 0$ до $z_{03} = \gamma/|\epsilon|$ (рис. 5.29). Начало координат на фазовой плоскости является особой точкой типа устойчивого фокуса. Все возмущения, меньшие амплитуды, соответствующей неустойчивому предельному циклу, осцилляторно затухают. Возмущения, большие амплитуды, отвечающей неустойчивому предельному циклу, осцилляторно увеличиваются и амплитуды этих колебаний стремятся к предельному устойчивому циклу изнутри.

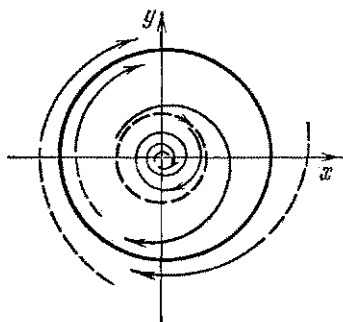


Рис. 5.29. Фазовый портрет автоколебательной системы томсоновского типа при жестком режиме возбуждения.

Замкнутая сплошная линия — устойчивый цикл, пунктирная — неустойчивый цикл.

Если амплитуда колебаний по какой-либо причине стала больше амплитуды, соответствующей устойчивому предельному циклу, то первая постепенно будет уменьшаться, стремясь в пределе снаружи «навиться» на предельный цикл. При изменении значения k происходит эволюция картины на фазовой плоскости.

При стремлении k к нулю слева радиус неустойчивого предельного цикла уменьшается и стремится к нулю. Начало координат на фазовой плоскости при этом обращается из особой точки типа устойчивого фокуса в особую точку типа неустойчивого фокуса. Одновременно радиус устойчивого цикла увеличивается.

При стремлении k к нулю справа радиус единственного устойчивого предельного цикла постепенно уменьшается, а неустойчивая особая точка типа фокус в начале координат приближается по характеру движения в ее окрестности к особой точке типа центр.

§ 5.5. Особенности поведения автоколебательных систем, содержащих инерционные элементы

До сих пор при рассмотрении колебательных, параметрических и автоколебательных систем мы считали, что все линейные и нелинейные элементы, составляющие эти системы, безынерционны, т. е. их вольт-амперные, вольт-кулоновые, вольт-фарадные и другие характеристики выражаются мгновенными функциями соответствующих координат. Например, токи туннельного диода, электронной

лампы, полупроводникового диода, тиристора, омического сопротивления и аналогичных элементов зависят от мгновенных значений переменных напряжений на них; напряжения на линейных и нелинейных конденсаторах и емкости таких конденсаторов определяются мгновенными значениями зарядов на них и т. д.

Однако в природе существуют и искусственно могут быть созданы элементы, параметры которых зависят не от мгновенных значений координат, а от амплитудных значений. Такие элементы (устройства) называются *инерционными нелинейностями*, ибо они принимают соответствующие значения не сразу, а через определенное время, называемое постоянной времени того или иного элемента. В § 4.5 описан одноконтурный параметрический генератор с автосмещением, в котором действующее значение емкости контура, содержащего полупроводниковый диод с цепочкой автосмещения, определяется не мгновенными значениями генерируемых колебаний интересующей нас величины, а ее амплитудой, и устанавливается это значение емкости через время, равное постоянной времени цепи автосмещения.

Другим примером инерционной нелинейности может служить обычное сопротивление, значение которого неизбежно зависит от величины протекающего по нему тока. В силу тепловой инерции температура, а следовательно, и сопротивление такого резисторного элемента не являются мгновенной функцией протекающего по нему тока. Эти инерционные нелинейные активные элементы называются термисторами, и их включение в те или иные автоколебательные системы приводит к ряду особенностей, которые будут рассмотрены ниже.

Уравнение теплового баланса для тонкого проводника, через который проходит переменный ток $I_0 \cos pt$, можно записать в виде

$$mc \frac{d\theta}{dt} + k\theta = RI_0^2 \cos^2 pt, \quad (5.5.1)$$

где m — масса проводника, c — удельная теплоемкость, k — коэффициент теплоотдачи, θ — температура проводника. В уравнении (5.5.1) член $mc d\theta$ характеризует изменение запаса тепла в системе, $k\theta dt$ — количество тепла, отдаваемое системой за время dt ; правая часть уравнения показывает количество тепла, получаемого системой извне.

Решение уравнения (5.5.1) имеет следующий вид:

$$\theta = \theta_0 e^{-t/\Delta} + \frac{RI_0^2}{2k} \left[1 - \frac{\sin(2pt + \varphi)}{\sqrt{1 + 4p^2 \Delta^2}} \right], \quad (5.5.2)$$

где $\Delta = mc/k$ называется постоянной времени термистора, φ — начальная фаза. При $t \rightarrow \infty$ в решении (5.5.2) останутся только члены, характеризующие постоянный нагрев θ_0 термистора и пульсации нагрева $\theta_{\sim}$ вокруг некоторой постоянной температуры.

Величина относительных пульсаций температуры определяется из соотношения

$$\frac{\theta_{\sim}}{\theta_{-}} = \frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2\Delta^2}}. \quad (5.5.3)$$

Этими вариациями температуры можно пренебречь, если $4\rho^2\Delta^2 \gg 1$, т. е. $\rho \gg 1/\Delta$. Если ввести период колебаний тока, протекающего через термистор $T = 2\pi/\rho$, то условием малости $\theta_{\sim}/\theta_{-}$ будет неравенство

$$\Delta \gg T. \quad (5.5.4)$$

Физически это условие означает, что в течение всего периода колебаний тока, протекающего через термистор, температура термистора остается постоянной с той же степенью точности, с какой выполняется условие (5.5.4). В таком случае можно считать, что сопротивление термистора равно $R(\theta)$ или $R(I_0)$, т. е. зависит от амплитуды тока, а не от мгновенных значений действующего тока. В этом и заключается принцип применения термисторов в различных радиотехнических и электротехнических устройствах.

Однако инерционность термистора не должна быть слишком большой. Она должна быть по возможности меньше времени переходных процессов t_1 в колебательных системах, в которых используется термистор для стабилизации тех или иных параметров системы. Поэтому для нормальной работы термистора необходимо выполнение неравенства

$$T \ll \Delta \ll t_1. \quad (5.5.5)$$

Рассмотрим поведение автоколебательной системы томсоновского типа с термистором в цепи последовательного резонансного контура с активным элементом с S-образной вольт-амперной характеристикой $\psi(x)$. Уравнение движения для такой системы имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [2\delta(a_0) + \psi'(x)] \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.5.6)$$

где a_0 — стационарная амплитуда колебаний.

Если $2\delta = \text{const}$, т. е. потери не являются инерционными, то реализация стационарного автоколебательного процесса в системе возможна только при условии $2\delta = \bar{\psi}'(x)$ ($\bar{\psi}'(x)$ — усредненная крутизна падающей вольт-амперной характеристики), что означает обязательный выход мгновенных значений тока x за пределы линейного участка падающей характеристики нелинейного элемента.

Другой режим работы в такой системе можно осуществить при наличии в системе термистора, когда $2\delta(a_0) \neq \text{const}$. В этом случае можно выбрать достаточно большой линейный участок вольт-амперной характеристики $u = \psi(x)$, на котором $\psi'(x) = S_0 = \text{const}$; при этом ограничение амплитуды колебаний будет осуществляться

с помощью термистора. Стационарную амплитуду a_0 для автоколебательной системы, описываемой уравнением (5.5.6), можно найти либо аналитически, либо графически, как показано на рис. 5.30. Физическим механизмом ограничения амплитуды колебаний является реакция термистора на процессы в системе.

Отметим некоторые принципиальные особенности данной автоколебательной системы. В этой системе $\psi'(x) = S_0 = \text{const}$, член $2\delta(a_0)$ в силу своей инерционности также постоянен в пределах всего периода колебаний. Поэтому коэффициент в квадратной скобке в уравнении (5.5.6) в силу автоколебательности системы равен нулю не в среднем за период, а для каждого момента времени в пределах любого периода колебаний. Следовательно, подобную систему можно с большой степенью точности считать консервативной системой, для которой характерна неизменность амплитуды и частоты колебаний.

Нетрудно убедиться в том, что в подобной системе невозможно отклонение амплитуды от своего стационарного значения a_0 . Действительно, пусть для определенности амплитуда колебаний в системе увеличится, тогда сопротивление термистора увеличится в течение конечного времени из-за своей инерционности. При этом потери в системе будут превышать вносимую в систему колебательную энергию $[2\delta(a_0) + S_0] > 0$ и амплитуда колебаний системы монотонно вернется к исходному состоянию. Однако даже такое кратковременное изменение амплитуды колебаний в системе с термистором невозможно, если выполняется неравенство (5.5.5), ибо переходные процессы во всей системе, определяющие возможность случайного изменения амплитуды a_0 , в силу этого неравенства имеют гораздо большую постоянную времени, чем процессы в термисторе. Поэтому всякие внешние попытки изменения a_0 будут немедленно компенсироваться соответствующим изменением сопротивления термистора, что означает стабилизацию амплитуды и частоты колебаний в системе.

Возможность получения в колебательных системах с термисторами автоколебаний, сколь угодно близких к гармоническим, позволяет использовать системы, содержащие добротные контуры, термисторы и активные элементы с линейными падающими участками вольт-амперных характеристик, в ряде эталонов частоты (времени).

Рассмотрим теперь возможность применения термисторов в релаксационных автоколебательных системах. Как было показано ранее (см. стр. 192), для того чтобы транзистронный генератор

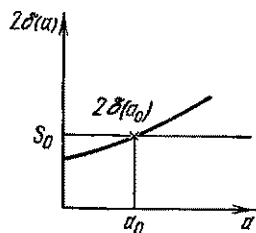


Рис. 5.30. Графическое определение стационарной амплитуды в автоколебательной системе с термистором.

с двумя вырожденными степенями свободы генерировал колебания, близкие к гармоническим, необходимо выполнение условия $|S| \geq 1/R + 1/r + C_1/RC$. Если положить в этой системе $S = S_0$, а ограничение амплитуды возложить на термистор, заменяющий резисторы с сопротивлениями R и (или) r , то ожидаемой стабилизации амплитуды автоколебаний не получится. Дело в том, что обычные термисторы увеличивают свое сопротивление с ростом амплитуды тока, и поэтому в рассмотренной схеме применение термисторов вместо постоянных резисторов с сопротивлениями R и r вызовет лишь улучшение условия возбуждения системы и дальнейшее увеличение амплитуды автоколебаний с обязательным ее выходом за пределы линейного участка падающей вольт-амперной характеристики.

Стабилизацию амплитуды автоколебаний в релаксационных генераторах, генерирующих колебания, близкие к гармоническим, можно осуществить, если использовать термистор в качестве элемента, образующего отрицательную обратную связь в системе. Действительно, если включить термистор с сопротивлением ρ в катодную цепь генератора, а режим работы усилительного элемента (лампы) выбрать линейным, т. е. считать, что $i = S_0 u$ для всех допустимых амплитуд автоколебаний, то тогда с учетом отрицательной обратной связи имеем $i = S_0(u - \rho i)$ и, следовательно,

$$i = \frac{S_0}{1 + \rho S_0} u. \quad (5.5.7)$$

Отсюда видно, что ток в системе зависит от новой действующей крутизны $S_0/(1 + \rho S_0)$, которая меньше S_0 . Так как ρ является функцией постоянной и переменной составляющих тока, то можно считать, что $\rho = \rho(a_0)$, если на термистор и систему, в которой он применяется, наложены требования (5.5.5). Тогда условие стабилизации амплитуды транзитронного генератора можно записать в виде

$$\frac{S_0}{1 + \rho(a_0) S_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r} + \frac{C_1}{CR}. \quad (5.5.8)$$

Соотношение (5.5.8) показывает, что в транзитронном генераторе с термистором увеличение амплитуды автоколебаний по сравнению с a_0 приводит к тому, что баланс (5.5.8) нарушается, и система из консервативной превращается в диссипативную с естественным уменьшением амплитуды колебаний до значения a_0 .

Если амплитуда автоколебаний стала меньше a_0 , то это означает, что в системе появилось отрицательное сопротивление, и, следовательно, происходит увеличение колебательной энергии до тех пор, пока амплитуда снова не станет равной a_0 . Таким образом, оставаясь в пределах линейного участка падающей вольт-амперной характеристики релаксационных систем, можно осуществ-

вить генерацию колебаний, сколь угодно близких к гармоническим, со стабилизацией амплитуды и частоты автоколебаний с помощью термистора. Аналогичным образом можно осуществить стабилизацию автоколебаний в RC -генераторе и других релаксационных автоколебательных системах. При этом следует учесть, что в таких системах с термисторами баланс энергии должен сохраняться постоянным в течение всего периода колебаний, что, естественно, накладывает ограничения на форму генерируемых колебаний.

§ 5.6. Поведение автоколебательных систем при внешнем гармоническом воздействии

Изучение поведения автоколебательных систем при внешнем гармоническом воздействии имеет большое значение для науки и техники, ибо его результаты позволяют осуществить синхронизацию колебаний нескольких маломощных источников, стабилизацию излучения (колебаний) мощного генератора с помощью стабилизированного маломощного источника колебаний, решить многие вопросы преобразования частоты и т. п.

В зависимости от вида нелинейной характеристики автоколебательной системы, уровня внешнего гармонического воздействия, соотношения частоты внешнего воздействия и частоты колебаний автоколебательной системы будут наблюдаться различные результирующие эффекты.

1. Рассмотрим внешнее воздействие на регенеративный приемник — томсоновский генератор с контуром в цепи сетки (рис. 5.31). Пусть внешнее воздействие $v(t) = P_0 \sin pt$; напряжение на сетке лампы выберем в качестве переменной $u_g = u$; тогда уравнение движения запишется в виде

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = P_0 \sin pt + M \frac{di_a}{dt}.$$

Вводя обычные обозначения $x = u/u_0$, $2\delta = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$, получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{P_0 \omega_0^2}{u_0} \sin pt + M \frac{\omega_0^2}{u_0} \frac{di_a}{dt}. \quad (5.6.1)$$

Если искать решение с частотой внешнего воздействия p , то безразмерное время необходимо определить как $\tau = pt$; тогда уравнение (5.6.1) примет вид

$$\ddot{x} + 2\vartheta \dot{x} + \frac{\omega_0^2}{p^2} x = \lambda \sin \tau + \frac{M \omega_0^2}{u_0 p} \frac{di_a}{d\tau}, \quad (5.6.2)$$

где $2\vartheta = R/pL$, $\lambda = P_0 \omega_0^2 / u_0 p^2$.

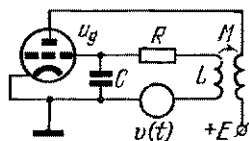


Рис. 5.31. Схема лампового генератора с контуром в цепи сетки при внешнем воздействии.

Рассмотрим регенеративный приемник при очень слабом внешнем сигнале. Так как исследуемая система является недо возбужденной (регенерированной), то в случае слабого сигнала анодно-сеточную характеристику лампы можно аппроксимировать на линейном участке характеристики линейной зависимостью $i_a = Su$, где S — крутизна характеристики. Тогда в резонансном случае ($p = \omega_0$) получаем уравнение

$$\ddot{x} + [2\theta - M\omega_0 S] \dot{x} + x = \lambda \sin \tau. \quad (5.6.3)$$

При $2\theta > M\omega_0 S$ система недо возбуждена (коэффициент регенерации $k < 0$), но регенерирована, т. е. затухание в контуре частично скомпенсировано положительной обратной связью. Поэтому за счет такой регенерации происходит усиление внешнего воздействия на

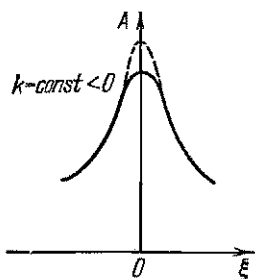


Рис. 5.32. Резонансная кривая регенеративного приемника для немалых сигналов.

частоте p . При увеличении амплитуды внешнего воздействия нелинейностью функции $i_a = f(u)$ пренебрегать уже нельзя, и использованная нами линейная аппроксимация $i_a = Su$ становится несправедливой. В этом случае резонанс имеет такой же характер, как и в контуре с нелинейным затуханием. Резонансные кривые по-прежнему симметричны, но имеют немного иную форму, а именно несколько «сплюснуты» сверху в окрестности резонансного максимума из-за увеличения потерь в системе с ростом амплитуды колебаний (рис. 5.32).

2. Если регенерация переходит в само-возбуждение ($M\omega_0 S > 2\theta$), то наряду с вынужденными колебаниями на частоте p в системе появляются автоколебания на частоте $\omega \approx \omega_0$. В режиме автоколебаний исследуемая система является квазиконсервативной, что автоматически регулируется величиной амплитуды автоколебаний.

За счет нелинейного взаимодействия (при нелинейной сеточной характеристике) в такой системе могут возникать как биения, т. е. колебания с частотой $\Omega = |p - \omega|$, так и комбинационные составляющие с частотами вида $|np \pm m\omega|$, где m и n — целые числа.

Рассмотрим приближенную теорию синхронизации для мягкого режима возбуждения на примере описанной выше автоколебательной системы. Уравнение (5.6.2) при произвольной сеточной характеристике можно записать в виде

$$\ddot{x} + x = f(x) \dot{x} + \xi x + \lambda \sin \tau, \quad \text{где} \quad \xi = 1 - \omega_0^2/p^2. \quad (5.6.4)$$

Если искать решение этого уравнения с частотой, точно равной частоте внешнего воздействия ($\tau = pt$), то, используя обычную за-

мену переменных в методе ММА $x = A \cos(\tau + \theta)$, $\dot{x} = -A \sin(\tau + \theta)$ и проводя стандартную процедуру усреднения, получаем следующие укороченные уравнения:

$$2\dot{A} = Ak(A) - \lambda \cos \theta; \quad 2\dot{\theta} = -\xi - (\lambda \sin \theta)/A. \quad (5.6.5)$$

Здесь функция $k(A)$ описывает баланс потерь и вложения энергии в автономном генераторе ($\lambda = 0$). В случае мягкого режима график $k(A)$ имеет вид, приведенный на рис. 5.33, где $k(0) = \alpha - 2\vartheta$. Если, например, $i_a = i_0 + \alpha_0 u + \beta_0 u^2 + \gamma_0 u^3$, то

$$k(A) = (\alpha - 2\vartheta) + \frac{1}{2}\gamma A^2,$$

где $\alpha = M\alpha_0\omega_0^2/p$, $\gamma = 3M\gamma_0 u_0^2\omega_0^2/p$. Проанализируем уравнения (5.6.5). При $\lambda = 0$ (автономный режим генератора) имеем

$$\dot{A} = Ak(A)/2, \quad \dot{\theta} = -\xi/2.$$

Эти уравнения имеют два стационарных решения ($\dot{A} = 0$, $\dot{\theta} = 0$): состояние покоя системы ($A_0 = 0$), устойчивое при $k(0) < 0$ и неустойчивое при $k(0) > 0$, а также ненулевое решение $A = A_0$ и $\theta = -\xi\tau/2 + \text{const}$, где A_0 определяется из приравнивания нулю функции $k(A_0) = 0$. Учитывая, что $\theta = -\xi\tau/2$, $\xi = 1 - \omega_0^2/p^2 \approx 2(p - \omega_0)/p$ и $\tau = pt$, получаем

$$x = A_0 \cos(\tau - \frac{1}{2}\xi\tau) = A_0 \cos \omega_0 t, \quad (5.6.6)$$

которое подтверждает, что в автономном генераторе колебания происходят с собственной частотой системы ω_0 , а не с частотой p , с которой мы искали решение. Таким образом, мы видим, что использованный нами метод ММА исправил ошибку в определении частоты генератора.

Теперь рассмотрим неавтономный режим работы генератора ($\lambda \neq 0$) в области синхронизации. При $k(0) < 0$ (потери в системе превышают вложение энергии) в генераторе не выполняется условие самовозбуждения, однако имеет место регенерация, т. е. регенеративный режим приемника. В этом случае получается несколько сплюснутая сверху резонансная кривая (см. рис. 5.32), аналитическое выражение которой определяется из системы укороченных уравнений (5.6.5) и имеет вид $A^2[k^2(A) + \xi^2] = \lambda^2$. Это уравнение при любых ξ имеет одно-единственное решение.

При выполнении условия самовозбуждения генератора ($k(0) > 0$) синхронный режим работы томсоновского генератора имеет место лишь при малых значениях ξ . Действительно, в стационарном синхронном режиме из системы уравнений (5.6.5) получаем систему

$$Ak(A) = \lambda \cos \theta; \quad A\xi = -\lambda \sin \theta,$$

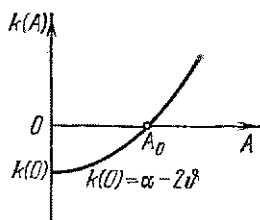


Рис. 5.33. График зависимости функции потерь от амплитуды автоколебаний.

или одно уравнение

$$A^2 [k^2(A) + \xi^2] = \lambda^2.$$

При произвольном $k(A)$ последнее уравнение аналитически не разрешается. Однако для очень малых значений λ можно считать, что амплитуда автоколебаний в автономном режиме и амплитуда автоколебаний при внешнем воздействии близки друг к другу, т. е. $A \approx A_0$; тогда из второго уравнения (5.6.5) получаем соотношение $\sin \theta = -\xi A_0 / \lambda$, которое с очевидностью имеет стационарное решение лишь при

$$|\xi| \leq \xi_0 = \lambda / A_0, \quad \text{т. е.} \quad |p - \omega_0| \leq \lambda p / 2 A_0. \quad (5.6.7)$$

Это неравенство и определяет ширину полосы синхронизации, которая пропорциональна отношению амплитуды внешнего воздействия

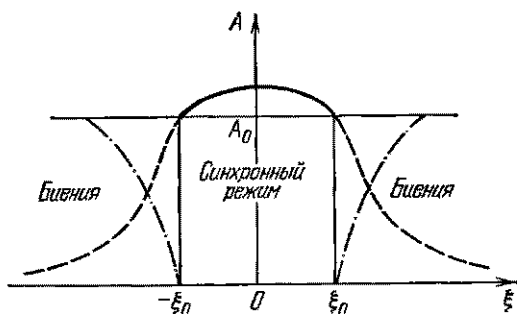


Рис. 5.34. Схематическое изображение поведения амплитуды автоколебаний при синхронизации.

Пунктир — амплитуда вынужденных колебаний, штрих-пунктир — амплитуда автоколебаний.

к амплитуде автоколебаний в автономном режиме. На рис. 5.34 схематически показаны области биений, синхронизма, а также графики для амплитуд вынужденных и автоколебаний томсоновского генератора с мягким режимом возбуждения при внешнем гармоническом воздействии.

В действительности синхронный режим возникает за счет совместного действия двух процессов. Во-первых, за счет подавления собственных автоколебательных движений в системе, причем внутри области синхронного режима сохраняется только чисто вынужденный колебательный процесс с частотой внешнего воздействия p . Во-вторых, при внешнем воздействии синхронный режим может возникать за счет принудительного изменения частоты автоколебаний путем воздействия вынужденных колебаний на форму генерируемых автоколебаний. В томсоновских автоколебательных системах, работающих в мягком режиме, главную роль играет первый процесс. При достаточно малых расстройках вынужденные коле-

бания за счет резонансных свойств системы приобретают большую амплитуду и, накладываясь на существующие автоколебания в генераторе, уменьшают среднюю действующую крутизну. Это приводит к нарушению условия поддержания автоколебаний, и в системе остаются лишь вынужденные колебания.

В колебательных системах, далеких от томсоновских, и особенно в релаксационных генераторах, где отсутствуют четко выраженные резонансные свойства, внешний сигнал вследствие нелинейности активного элемента существенно воздействует на форму автоколебаний и в некоторой области расстройек приводит к совпадению частоты автоколебаний с частотой внешнего сигнала, т. е. к возникновению синхронного режима.

3. Рассмотрим поведение генератора при внешнем воздействии с большой амплитудой и с частотой воздействия, примерно в n раз большей, чем частота генератора в автономном режиме ($p \approx n\omega_0$).

Для генератора с контуром в цепи сетки уравнение движения имеет вид (5.6.1). Для удобства введем в рассмотрение такую частоту ω , что $p = n\omega$. Из условий $p = n\omega$ и $p \approx n\omega_0$ следует, что $\omega \approx \omega_0$. Введем безразмерное время $\tau = \omega t$, нормированное по ω , т. е. будем искать решение системы (5.6.1) с частотой, точно в n раз меньшей частоты внешнего воздействия $p = n\omega$. Если ввести расстройку $\xi = 1 - \omega_0^2/\omega^2 = [p^2 - (n\omega)^2]/p^2$ и аппроксимировать ток $i_a = f(u)$ полиномом третьей степени $i_a = i_0 + \alpha_0 u + \beta_0 u^2 + \gamma_0 u^3$, то с учетом написанных выше соотношений уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} + x = (k + \beta x + \gamma x^2) \dot{x} + P \sin n\tau + \xi x, \quad (5.6.8)$$

где $k = \alpha - 2\theta$, $\alpha = M\alpha_0\omega_0^2/\omega$, $\beta = 2M\beta_0\mu_0\omega_0^2/\omega$, $\gamma = 3M\gamma_0\mu_0^2\omega_0^2/\omega$, $2\theta = R/\omega L$, $P = P_0\omega_0^2/\omega^2$. Применение метода медленно меняющихся амплитуд для решения уравнения (5.6.8) при $k \ll 1$, $\beta \ll 1$, $\gamma \ll 1$, $\xi \ll 1$ и большом P требует перехода к новой переменной y , определяемой соотношением

$$x = y + \tilde{Q} \sin n\tau, \quad (5.6.9)$$

где $\tilde{Q}$ — амплитуда вынужденных колебаний. Таким образом, решение уравнения (5.6.8) представляется в виде суперпозиции двух решений, причем член $\tilde{Q} \sin n\tau$ соответствует чисто вынужденному процессу колебаний с частотой внешнего воздействия, а член y — колебаниям с частотой, близкой к собственной. Амплитуда $\tilde{Q}$ определяется условием $\tilde{Q} = P/(1 - n^2)$. После подстановки (5.6.9) в уравнение (5.6.8) последнее приобретает вид

$$\ddot{y} + y = (k + \beta x + \gamma x^2) \dot{x} + \xi y. \quad (5.6.10)$$

Это уравнение уже допускает применение метода ММА, так как в правой части уравнения стоят малые члены.

Рассмотрим случай $n=2$; он представляет особый интерес, ибо при этом значении n возникает так называемый резонанс второго рода.

Применяя метод медленно меняющихся амплитуд, вводя новые переменные $y = u \cos \tau + v \sin \tau$, $\dot{y} = -u \sin \tau + v \cos \tau$ и учитывая, что $x = u \cos \tau + v \sin \tau + \tilde{Q} \sin n\tau$ и $\dot{x} = -u \sin \tau + v \cos \tau + n\tilde{Q} \cos n\tau$, получаем укороченные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2} [k + \frac{1}{4}\gamma(z + 2\tilde{Q}^2)] u + \frac{1}{2} (2\beta\tilde{Q} - \xi) v, \\ \dot{v} &= \frac{1}{2} [k + \frac{1}{4}\gamma(z + 2\tilde{Q}^2)] v + \frac{1}{2} (2\beta\tilde{Q} + \xi) u, \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

где $z = u^2 + v^2$, $\tilde{Q} = -P/3$.

Рассмотрим стационарные решения задачи ($\dot{u} = \dot{v} = 0$). 1) В системе возможны нулевые стационарные состояния (состояние покоя системы) $u_0 = v_0 = z_0 = 0$. 2) Отличные от нуля стационарные состояния ($u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$) легко получаются из системы (5.6.11) путем простых алгебраических преобразований:

$$z_0 = -\frac{4}{\gamma} \left[k + \frac{1}{2} \gamma \tilde{Q}^2 \pm \sqrt{4\beta^2 \tilde{Q}^2 - \xi^2} \right]. \quad (5.6.12)$$

В зависимости от параметров рассматриваемой системы в ней может реализоваться несколько различных режимов.

а) В автономном режиме ($P=0$, $\tilde{Q}=0$) стационарная амплитуда колебаний $z_0 = -4k/\gamma$ существует при коэффициенте регенерации $k > 0$ ($\gamma < 0$) и равна нулю ($z_0 = 0$) при $k < 0$. Это полностью соответствует рассмотренной ранее автоколебательной системе с мягким возбуждением (кубическая аппроксимация вольт-амперной характеристики). Генерация колебаний происходит на собственной частоте ω_0 системы.

б) В неавтономном режиме при внешнем воздействии ($P \neq 0$, $\tilde{Q} \neq 0$) на автоколебательную систему ($k > 0$, $\gamma < 0$) при упрощающем условии $\omega = \omega_0$ амплитуда автоколебательного процесса определяется из соотношения

$$z_0 = \frac{4}{|\gamma|} \left[k + \frac{1}{2} \gamma \tilde{Q}^2 \pm 2\beta\tilde{Q} \right], \quad (5.6.13)$$

график которого изображен на рис. 5.35.

Кривая AB характеризует зависимость амплитуды автоколебания z_0 от амплитуды внешнего воздействия $\tilde{Q}(P)$. При увеличении амплитуды внешнего воздействия до значения $\tilde{Q} \geq B$ в автоколебательной системе прекращаются автоколебания и заштрихованной области соответствует чисто вынужденный процесс с частотой p .

Таким образом, в определенной области амплитуд внешнего воздействия ($\tilde{Q} > B$) в системе будет существовать синхронный автоколебательный процесс с частотой, точно вдвое меньшей ча-

стоты внешнего воздействия. Заметим, что такая синхронизация автоколебательной системы на кратной частоте позволяет делить частоту и фазу внешнего сигнала в целое число раз, как это имеет место в параметрических генераторах, где можно осуществить деление частоты и фазы сигнала накачки в необходимое число раз.

Зависимость z_0 от ξ при синхронизации на кратной частоте похожа на эту зависимость при обычной синхронизации ($p = \omega$) (см. рис. 5.34).

в) Случай $k < 0$, $\gamma < 0$, $\omega \neq \omega_0$ ($\xi \neq 0$) соответствует недовозбужденной автоколебательной системе с внешним воздействием на кратной частоте. Тогда в интервале $-\xi_0 < \xi < \xi_0$ (вблизи точного совпадения значений ω и ω_0) при определенных $\tilde{Q}(P)$ возможен колебательный процесс с амплитудой, определяемой из соотношения

$$z_0 = \frac{4}{|\gamma|} \left(k + \frac{1}{2} \gamma \tilde{Q}^2 \pm \sqrt{4\beta^2 \tilde{Q}^2 - \xi^2} \right). \quad (5.6.14)$$

Отсюда нетрудно определить граничные расстройки, при которых могут возникать колебательные процессы с половинной частотой. Из условия $z_0 = 0$ получаем

$$\xi_{1,2} = \pm \sqrt{4\beta^2 \tilde{Q}^2 - (k + \frac{1}{2} \gamma \tilde{Q}^2)^2}. \quad (5.6.15)$$

Явление возбуждения колебаний с частотой, вдвое меньшей частоты воздействия в недовозбужденной автоколебательной (потенциально автоколебательной) системе, называется *резонансом второго рода*.

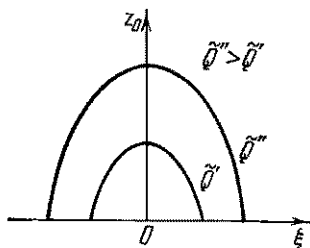


Рис. 5.36. Кривые резонанса второго рода.

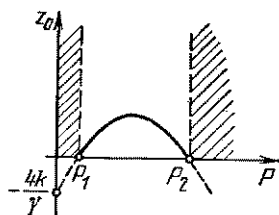


Рис. 5.37. Амплитудная кривая резонанса второго рода.

рода. Кривые резонанса второго рода $z_0(\xi)$ при разных значениях амплитуды внешнего воздействия показаны на рис. 5.36.

Зависимость z_0 от $P = 3|\tilde{Q}|$ имеет вид, изображенный на рис. 5.37; кривая $P_1 P_2$ показывает зависимость амплитуды вынуж-

денных колебаний в недовозбужденном генераторе от амплитуды внешнего воздействия на двойной частоте. В заштрихованной области имеет место вынужденный процесс с небольшой амплитудой из-за большого различия между собственной частотой системы ω_0 и частотой внешнего воздействия p (в нашем случае $p \approx 2\omega_0$). Значение амплитуды внешнего воздействия, равное P_1 , называется *порогом возбуждения*, а значение P_2 — *потолком возбуждения*. В области значений от P_1 до P_2 существует резонанс второго рода. Наличие порога возбуждения связано с параметрической природой резонанса второго рода, а наличие потолка возбуждения объясняется тушением (подавлением) автоколебаний.

Параметрическая природа резонанса второго рода связана с тем, что при наличии положительной обратной связи внешнее воздействие вызывает периодическое изменение параметров системы с частотой, вдвое большей собственной частоты системы. Это происходит за счет квадратичного члена ($\beta \neq 0$) аппроксимирующего полинома, ибо действующая крутизна меняется в системе с частотой воздействия.

В определенной области, если при этом обеспечивается достаточная глубина изменения параметра (порог для внешнего воздействия), происходит параметрическое возбуждение колебаний в недовозбужденной автоколебательной системе с частотой, точно в два раза меньшей частоты внешнего воздействия. Этим объясняется форма резонансных кривых второго рода, аналогичных кривым параметрического резонанса в параметрических генераторах с нелинейным затуханием.

Дальнейшее увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит к уменьшению средней крутизны вольт-амперной характеристики, росту эффективного затухания в системе и, как следствие, к нарушению условий параметрического возбуждения. Это явление сходно с явлением тушения автоколебаний при синхронном и асинхронном воздействиях и приводит к существованию потолка для амплитуды внешнего воздействия при резонансе второго рода.

4. В генераторах томсоновского типа с термисторами, находящихся под внешним воздействием с частотой, близкой к собственной частоте автономного генератора, процесс синхронизации в силу линейности выбранного участка вольт-амперной характеристики и наличия в контуре термистора происходит и может быть описан несколько иначе.

Введем в контур генератора с термистором источник внешней силы частоты p (рис. 5.38). Тогда уравнение движения в такой системе можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [2\delta(\bar{x}^2) - \omega_0^2 M S_0] \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = P \cos pt, \quad (5.6.16)$$

где $2\delta(\bar{x}^2)$ характеризует тепловой эффект разогрева термистора за счет суммарного действия автоколебаний с амплитудой A и вынужденных колебаний с амплитудой λ , т. е. $\bar{x}^2 = A^2 + \lambda^2$.

Если амплитуда автоколебаний автономного генератора с термистором была стабилизирована на уровне A_0 , то в присутствии вынужденных колебаний (после включения внешнего воздействия) амплитуда автоколебаний должна

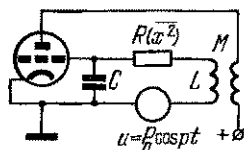


Рис. 5.38. Схема лампового генератора с термистором при воздействии гармонической силы.

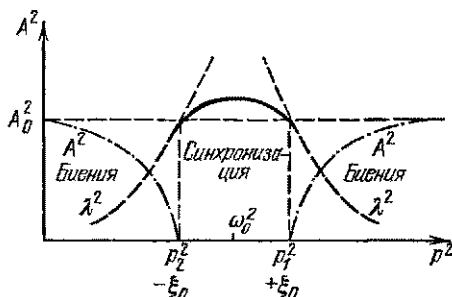


Рис. 5.39. Графики изменения амплитуд автоколебаний и вынужденных колебаний в томсоновском генераторе с термистором при внешнем воздействии.

уменьшиться до значения $A^2 = A_0^2 - \lambda^2$, где λ — амплитуда вынужденных колебаний, которая для квазиконсервативной системы, какой является генератор томсоновского типа с термистором, равна $\lambda = P/(\omega_0^2 - p^2)$. Дальнейший рост λ при стремлении p к ω_0 будет сопровождаться в таком генераторе уменьшением амплитуды автоколебаний A вплоть до полного их гашения. Тогда в некоторой области расстройек в автоколебательной системе наступит режим чисто вынужденных колебаний с частотой внешней силы, причем их амплитуда может стать больше амплитуды A_0 автономного генератора. Однако это сопровождается появлением нескомпенсированных потерь в системе, ибо до наступления синхронного режима автоколебательная система была квазиконсервативной, т. е. $[2\delta(A_0^2) - \omega_0^2 MS_0] = 0$, а в режиме синхронизации при $p^2 \approx \omega_0^2$ выражение в квадратных скобках, характеризующее функцию диссипации системы, становится положительным, т. е. $[2\delta(\lambda^2) - \omega_0^2 MS_0] > 0$, ибо $\lambda^2 > A_0^2$. Повышенный разогрев термистора при $\lambda^2 > A_0^2$ приводит к тому, что колебательная система из квазиконсервативной становится диссипативной, что сопровождается «притушением» резонансной кривой в полосе синхронизации генератора с активной инерционной нелинейностью (рис. 5.39).

Для определения полосы синхронизации обозначим граничные частоты, при которых она возникает, через $p_{1,2}^2 = \omega_0^2 \pm \xi_0$. Тогда в точках гашения автоколебаний можно записать, что амплитуда вынужденных колебаний в точности равна амплитуде автономного генератора, т. е. $\lambda = A_0 = P/(\omega_0^2 - p_{1,2}^2)$,

откуда

$$2\xi_0 = 2P/A_0. \quad (5.6.17)$$

Из (5.6.17) следует, что ширина области синхронизации (гашения автоколебаний) пропорциональна амплитуде внешней силы P . Это объясняется тем, что, чем больше амплитуда внешней силы, тем больше амплитуда вынужденного решения при той же расстройке $(\omega_0^2 - p^2)$ и, следовательно, тем раньше подавляются автоколебания в системе $(A^2 = A_0^2 - \lambda^2)$.

Несмотря на внешнее сходство явления синхронизации в томсоновских автоколебательных системах без термистора и с термистором (ср. рис. 5.34 и 5.39), между этими системами и в режиме синхронизации, и вблизи области синхронизации имеется существенное различие. Томсоновский генератор без термистора принципиально не может генерировать *гармонические колебания* в автономном, синхронном и промежуточном режимах из-за неизбежного «захода» колебаний в нелинейные области характеристики для снижения значения ее действующей крутизны $\bar{S}(x)$ до величины, обеспечивающей квазиконсервативность системы. В томсоновских генераторах с термисторами ограничение амплитуды колебаний происходит за счет термистора, а значение крутизны характеристики выбирается постоянным ($S_0 = \text{const}$), т. е. колебания в автономном, синхронном и промежуточном режимах не выходят за пределы линейного участка характеристики системы и в таких системах колебания при выходе на стационарный режим не обогащаются гармониками и комбинационными компонентами.

В заключение еще раз следует подчеркнуть, что в рассмотренных системах при внешнем воздействии происходит гашение, подавление автоколебаний и сохранение (в полосе синхронизации) только вынужденных колебаний. Поэтому общепринятый термин «синхронизация» не отражает физических процессов, происходящих в подобных автоколебательных системах с термисторами под действием внешней силы.

§ 5.7. Автоколебательные системы с запаздывающими силами

Здесь мы рассмотрим особенности поведения автоколебательных систем с запаздыванием сил, определяющих работу этих систем. Ранее мы считали, что состояние автоколебательной системы в каждый данный момент мгновенно и однозначно определяется действием сил на нее. В реальных системах действие сил в каждый данный момент времени зависит не от мгновенного ее состояния, а от всей предыстории последнего. Уже в случае активной инерционной нелинейности было установлено, что значение одного из параметров, например сопротивления термистора, зависящее

от температуры проводника, не является мгновенной функцией проходящего через термистор тока.

Необходимость учета запаздывания сказывается и в электронике СВЧ. Например, за счет конечного времени пролета электронов между электродами лампы, мгновенные значения анодного тока не являются мгновенной функцией значений напряжений на управляющей сетке лампы. Пролетные эффекты искажают форму анодного тока, когда период колебаний становится соизмеримым со временем пролета электронов в системе. Большую роль играет запаздывание в акустических системах из-за относительно небольшой скорости распространения звука в газообразных, жидких и твердых средах.

В теории колебаний существует множество задач, в которых, как мы видели, учитывать запаздывание не нужно. Но есть и

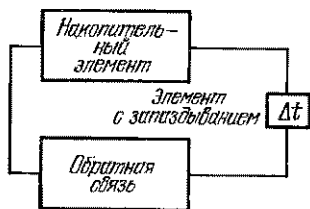


Рис. 5.40. Блок-схема автоколебательной системы с запаздыванием.

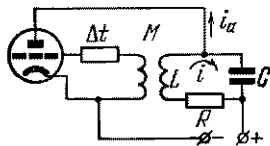


Рис. 5.41. Схема лампового генератора с запаздывающей обратной связью.

такие, в которых невозможно не учитывать явления запаздывания, так как оно приводит к качественно иным результатам.

Схематически автоколебательная система с запаздывающей обратной связью отличается, как это видно из рис. 5.40, от обычной автоколебательной системы наличием условного элемента с запаздыванием Δt . Термин «запаздывающие силы» предполагает, что в системе причина возникает в момент t , а вызванное ею действие сил вследствие конечной скорости передачи информации — спустя время Δt . Математически учет подобного идеального запаздывания осуществляется просто: время t в выражении для силы заменяется временем $t - \Delta t$.

В качестве примера систем с запаздывающими силами рассмотрим автоколебательную систему томсоновского типа с электронной лампой, в цепи обратной связи которой включен элемент с запаздыванием Δt (рис. 5.41). Такая схема в какой-то мере соответствует электронной лампе, работающей в СВЧ-диапазоне.

Если система генерирует колебания, близкие к гармоническим, то фазу колебания ωt при наличии запаздывания необходимо заменить на $\omega(t - \Delta t) = \omega t - \omega \Delta t = \omega t - \theta$. Всякое запаздывание Δt для гармонического процесса может быть записано в виде

некоторого фазового сдвига, поэтому вместо элемента Δt в схему можно включить фазовращатель, обеспечивающий соответствующий фазовый сдвиг.

Уравнение движения для схемы рис. 5.41 имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int (i - i_a) dt = 0. \quad (5.7.1)$$

Будем считать анодный ток $i_a = f(u_g)$ мгновенной функцией напряжения на сетке, а само напряжение u_g — функцией с запаздывающим действием, т. е. $i_a = f(M di_{\Delta t}/dt)$, где $i_{\Delta t}(t) = i(t - \Delta t)$.

Тогда, вводя, как обычно, обозначения $x = i/i_0$, $2\delta = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$, и дифференцируя (5.7.1), получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 i_a/i_0. \quad (5.7.2)$$

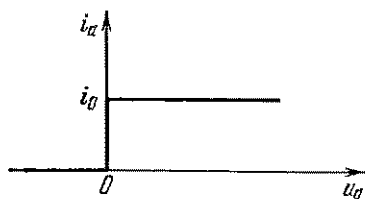


Рис. 5.42. Кусочно-линейная разрывная аппроксимация характеристики электронной лампы.

Для простоты положим, что анодный ток представлен кусочнолинейной характеристикой, показанной на рис. 5.42. Тогда при $u_g > 0$ в правой части уравнения (5.7.2) будет ω_0^2 , а при $u_g < 0$ правая его часть равна нулю. Далее, предполагая решение

достаточно близким к гармоническому, будем считать, что u_g изменяется по закону синуса:

$$u_g = M di_{\Delta t}/dt = B \sin(\omega t - \theta),$$

т. е. $i_{\Delta t} = A' \sin(\omega t - \theta)$.

Решение будем искать в виде $x = -A \cos \omega t$. Это с необходимостью следует из зависимости $u_g \sim \sin(\omega t - \theta)$. Разлагая правую часть уравнения (5.7.2) (единичную функцию) в ряд Фурье и ограничиваясь первой гармонической компонентой, получим $\frac{2}{\pi} \omega_0^2 \sin(\omega t - \theta)$. Тогда, подставляя в уравнение движения (5.7.2) значения x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и первый член разложения единичной функции в ряд Фурье, находим

$$\begin{aligned} A\omega^2 \cos \omega t + 2\delta A\omega \sin \omega t - A\omega_0^2 \cos \omega t &= \omega_0^2 \frac{2}{\pi} \sin(\omega t - \theta) = \\ &= \frac{2}{\pi} \omega_0^2 \cos \theta \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \omega_0^2 \sin \theta \cos \omega t. \end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая члены с синусами и косинусами, получим два соотношения

$$A(\omega^2 - \omega_0^2) = -\frac{2}{\pi} \omega_0^2 \sin \theta, \quad (5.7.3)$$

$$2\delta A\omega = \frac{2}{\pi} \omega_0^2 \cos \theta. \quad (5.7.4)$$

Из второго соотношения сразу получается выражение для амплитуды колебаний

$$A = \frac{\omega_0^2}{\omega \pi \delta} \cos \theta. \quad (5.7.5)$$

Для автоколебательных систем томсоновского типа можно считать, что $\omega \approx \omega_0$, и поэтому с достаточной степенью точности мы вправе записать

$$A \approx \frac{\omega_0}{\pi \delta} \cos \theta, \quad (5.7.6)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0). \quad (5.7.7)$$

Тогда из (5.7.3) с учетом (5.7.6) и (5.7.7) получается

$$\omega = \omega_0 - \delta \operatorname{tg} \theta. \quad (5.7.8)$$

На рис. 5.43 приведены графики зависимости амплитуды колебаний A и генерируемой частоты ω от запаздывания (фазового сдвига) θ . На этом рисунке видны различные области возбуждения (они заштрихованы) для различных сдвигов фазы.

Уменьшение амплитуды автоколебаний до $A=0$ получается при значениях $\theta_n = (2n+1)\pi/2$, $n=1, 2, 3, \dots$

Физически это объясняется тем, что по мере ввода дополнительного фазового сдвига анодный ток становится не в фазе с током в колебательном контуре. Из аналитического выражения для частоты генерируемых колебаний и соответствующего графика видно, что ω однозначно связана с фазовым сдвигом θ (с точностью до 2π).

При изменении фазы θ частота генерации ω сама несколько смещается (в соответствии с (5.7.8)) так, чтобы в пределах области генерации сохранить необходимый баланс фаз $\theta = (2n+1)\pi$.

Одна из существенных особенностей данной автоколебательной системы состоит в том, что при достаточно большом, т. е. определенном $\Delta t(\theta)$, при котором выполняются условия возбуждения, небольшое изменение рабочей частоты системы $\omega = \omega_0 - \delta \operatorname{tg} \theta$ может привести к смене области (или областей) возбуждения системы, ибо $\theta = \omega \Delta t$. Следовательно, в такой системе возможна целая серия рабочих частот, лежащих в полосе прозрачности контура автоколебательной системы, для которых выполняются

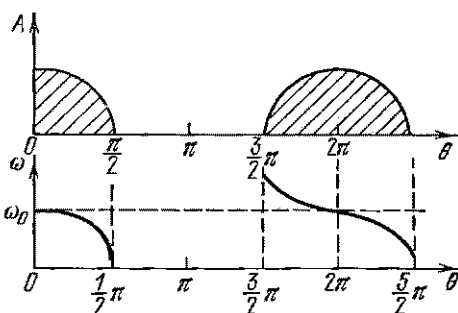


Рис. 5.43. Графики зависимости амплитуды и частоты генерируемых колебаний от величины запаздывания.

условия самовозбуждения. Установлено, что на возбуждение в такой автоколебательной системе колебаний с теми или иными частотами решающую роль оказывают начальные условия. Если начальные условия для одной из возможных частотных компонент будут преимущественными, то эта компонента может достигнуть стационарной амплитуды раньше других и подавить все остальные колебания. При этом система как бы «запомнит» ту частоту, которая соответствовала задаваемым начальным условиям.

Рассмотрим применимость метода медленно меняющихся амплитуд для анализа автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью. Для этого, как известно, необходимо, чтобы дифференциальное уравнение, описывающее добротную колебательную систему, можно было привести к виду

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, x_\theta, \dot{x}_\theta), \quad \text{где } \mu \ll 1.$$

В правой его части стоит функция, зависящая не только от x и $\dot{x}$, но и от запаздывающих координат x_θ и $\dot{x}_\theta$. Тогда решение уравнения методом ММА можно проводить путем подстановок

$$\begin{aligned} x &= u \cos \tau + v \sin \tau, & \dot{x} &= -u \sin \tau + v \cos \tau, \\ x_\theta &= u_\theta \cos(\tau - \theta) + v_\theta \sin(\tau - \theta), \\ \dot{x}_\theta &= -u_\theta \sin(\tau - \theta) + v_\theta \cos(\tau - \theta). \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

Теперь необходимо определить, при каких условиях $u \approx u_\theta$ и $v \approx v_\theta$. Естественно, что u и v отличаются от u_θ и v_θ на величину, на которую они изменяются за $\omega \Delta t = \theta$. Скорость изменения u , равная $\dot{u}$, имеет порядок μ и, значит $\Delta u = (u - u_\theta)$ имеет порядок $\mu\theta$. Поэтому, если потребовать, чтобы $\mu\theta \ll 1$, то можно считать, что $u_\theta \approx u$ и $v_\theta \approx v$ и применение метода ММА к таким системам значительно упрощается. Тем самым, мы вправе допустить, что за время запаздывания амплитуда изменяется достаточно мало. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} x_\theta &= u \cos \theta \cos \tau + u \sin \theta \sin \tau + v \cos \theta \sin \tau - v \sin \theta \cos \tau = \\ &= (u \cos \theta - v \sin \theta) \cos \tau + (u \sin \theta + v \cos \theta) \sin \tau, \\ \dot{x}_\theta &= -(u \cos \theta - v \sin \theta) \sin \tau + (u \sin \theta + v \cos \theta) \cos \tau. \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

Укороченные уравнения находят в данном случае по обычным правилам метода ММА; имеем

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(x, \dot{x}, x_\theta, \dot{x}_\theta) \sin \tau \, d\tau, \\ \dot{v} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu f(x, \dot{x}, x_\theta, \dot{x}_\theta) \cos \tau \, d\tau. \end{aligned} \quad (5.7.11)$$

Найдем этим методом условия самовозбуждения генератора с запаздывающей обратной связью (см. рис. 5.41) при аппроксимации вольт-амперной характеристики лампы полиномом третьей степени $i_a = i_0 + \alpha_0 u_g + \gamma_0 u_g^3$, где $u_g = M di_{\Delta t}/dt$. Тогда уравнение (5.7.2) при $\tau = \omega t$ и $\xi = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ примет вид

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\vartheta \dot{x} + \alpha \dot{x}_0 + \gamma \dot{x}_0^3.$$

Укороченные уравнения, пригодные для анализа этой системы на линейном участке характеристики (без учета члена $\gamma \dot{x}_0^3$, ответственного за ограничение амплитуды автоколебаний), запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2}(\alpha \cos \theta - 2\vartheta) u - \frac{1}{2}(\alpha \sin \theta + \xi) v = \varphi(u, v), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2}(\alpha \sin \theta + \xi) u + \frac{1}{2}(\alpha \cos \theta - 2\vartheta) v = \psi(u, v). \end{aligned} \quad (5.7.12)$$

Система укороченных уравнений (5.7.12) позволяет определить условия устойчивости и неустойчивости состояния покоя системы. Для этого, как известно, необходимо потребовать равенства нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \lambda & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем выражение для характеристического показателя

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(2\vartheta - \alpha \cos \theta) \pm j\frac{1}{2}(\alpha \sin \theta + \xi). \quad (5.7.13)$$

Состояние покоя системы неустойчиво (система возбудится) при условии, что вещественная часть λ положительна, т. е. $\operatorname{Re} \lambda = -\frac{1}{2}(2\vartheta - \alpha \cos \theta) > 0$, откуда следует, что условием самовозбуждения системы является

$$\alpha \cos \theta > 2\vartheta, \quad (5.7.14)$$

где $\alpha \cos \theta$ — некоторая приведенная крутизна с учетом запаздывания, 2ϑ — приведенные потери в системе.

Как видно, запаздывание в автоколебательных системах томсоновского типа приводит к уменьшению коэффициента регенерации по сравнению со случаем без запаздывания, т. е. всегда $[\alpha \cos \theta - 2\vartheta] < [\alpha - 2\vartheta]$. Если для конкретной системы заданы параметры α и 2ϑ , то допустимое запаздывание (фазовый сдвиг θ), при котором еще можно возбудить колебания в системе, определяется из условия $\theta < \arccos(2\vartheta/\alpha)$.

Подход и методы анализа, использованные при рассмотрении томсоновского генератора с запаздывающей обратной связью, справедливы и могут применяться для любых узкополосных систем такого типа.

Теперь рассмотрим другой крайний случай, когда в автоколебательной системе с запаздыванием вообще отсутствует колебательный контур, т. е. она является системой неосцилляторного типа с очень широкой полосой пропускания (рис. 5.44). Будем считать, что усилитель имеет неограниченную полосу пропускания и принципиально нелинеен, т. е. $u_2 = \psi(u_1)$. Элемент задержки (запаздывания) Δt является идеальным в том смысле, что $u_4 = \kappa u_3(t - \Delta t)$, где κ — постоянный коэффициент, не зависящий от спектрального состава сигнала. Физически это означает, что дисперсия в цепи обратной связи отсутствует. Заметим сразу, что используемые для создания запаздывания отрезки коаксиальных линий и искусственные линии (фильтры) неизбежно обладают дисперсией, и поэтому постоянство коэффициента κ может быть обеспечено практически только для ограниченной полосы частот.

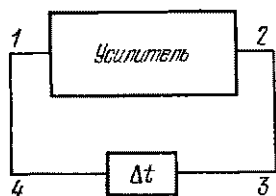


Рис. 5.44. Блок-схема без колебательной цепи (без накопительного элемента).

Для идеализированной схемы, показанной на рис. 5.44, можно записать следующие очевидные соотношения: $u_2 = \psi(u_1)$, $u_3 = u_2$, $u_4 = \kappa u_3(t - \Delta t)$; тогда

$$u_4 = u_1 = \psi[u_1(t - \Delta t)].$$

Таким образом, для анализа поставленной задачи необходимо решать нелинейное уравнение вида $z = \psi(z)$ с учетом запаздывания в системе. Подобные функциональные преобразования в математике рассматриваются методом итераций *).

Если задана функция $\psi(z)$, то процессом итерации называется следующий процесс: задается некоторое начальное значение z_0 , которое позволяет найти $\psi(z_0)$; затем $\psi(z_0) = z$ считается новым аргументом и подставляется вновь в функцию $\psi(z)$; при этом получается функция $\psi[\psi(z_0)]$, которая позволяет тем же способом получить $\psi\{\psi[\psi(z_0)]\}$ и т. д. В теории итерационного исчисления показывается, что если неограниченно продолжать итерационный процесс, то получится последовательность величин $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$, после которых вся последовательность итерационных значений z будет повторяться вновь и вновь. Иными словами, эта последовательность соответствует некоторому предельному циклу. Если в ней содержится m повторяющихся значений z , т. е. $z_1, z_2, \dots, z_m$, то эти значения по определению являются итерационными корнями индекса m .

Очень наглядно итерационный процесс можно представить графически по методу Лемерея (рис. 5.45). Если по оси абсцисс

*) Метод итераций и другие методы рассмотрения процессов установления колебаний в колебательных и автоколебательных системах в литературе иногда объединяются под общим названием *метода точечных преобразований*.

откладывать z , а по оси ординат $y = \varphi(z)$, и провести прямую $y = z$, то процесс нахождения итерационных корней сводится к следующему.

Пусть задано значение $\varphi(z)$, например, в точке $z_0 = 0$. Проведем горизонтальную прямую через точку $\varphi(z_0)$ до пересечения с прямой $y = z$. Из этой точки проведем вертикальную прямую до пересечения с $\varphi(z)$ — при этом получим $\varphi[\varphi(z_0)]$. Дальнейшее продолжение процесса даст $\varphi\{\varphi[\varphi(z_0)]\}$ и т. д. Этот процесс приведет к некоторому значению $z = z_1$ — единственному корню

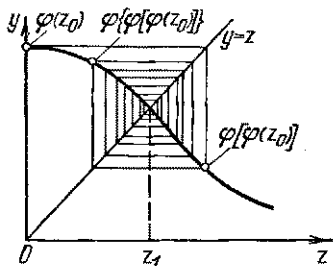


Рис. 5.45. Построение Лемерея.

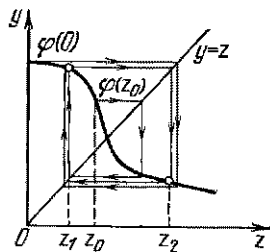


Рис. 5.46. Построение Лемерея для системы с двумя корнями индекса 2.

итерационного уравнения индекса 1 для данной системы. Устойчивость корня очевидна: где бы мы ни выбрали начальное значение z_0 , мы всегда придем в точку z_1 . Критерий устойчивости корня соответствует

$$|\varphi'(z_1)| < 1.$$

Если взять более крутую кривую $\varphi(z)$ (рис. 5.46) и провести методом Лемерея итерационный процесс, то получится стационарный предельный итерационный цикл. При этом, как видно, получаются два устойчивых значения функции $\varphi(z)$, т. е. корни индекса 2 (z_1 и z_2). Если бы функция $\varphi(z)$ имела более сложный вид, то итерационным способом можно было бы получить более сложный стационарный цикл с корнями индекса m .

Система с идеальным усилителем и идеальной линией задержки математически адекватна итерационной задаче. В такой задаче в зависимости от вида нелинейной функции можно найти набор напряжений $u_1, u_2, \dots, u_n$, набор корней, соответствующих определенному периоду колебаний.

Если считать, что для схемы рис. 5.44 выполнено условие самовозбуждения, а нелинейная функция $\varphi(z)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.46, то в такой автоколебательной системе периодически чередуются напряжения u_1 и u_2 , соответствующие двум корням итерационной задачи z_1 и z_2 . Это означает, что сигнал проходит по системе дважды: первое значение соответствует

началу прохождения сигнала через усилитель, второе — окончанию прохождения хвоста сигнала через систему задержки и снова через усилитель. Поэтому период итерации соответствует удвоенному времени задержки $T = 2\Delta t$. Таким образом, рассматриваемая система должна находиться либо в одном (u_1), либо в другом (u_2) состояниях, т. е. колебания в системе должны быть подобны последовательности прямоугольных импульсов.

Если задать системе (см. рис. 5.44) начальные толчки, то они без изменения своего спектрального состава должны усилиться (рис. 5.47). Со временем эти импульсы из-за нелинейности усилителя ограничатся, и система войдет в стационарный режим,

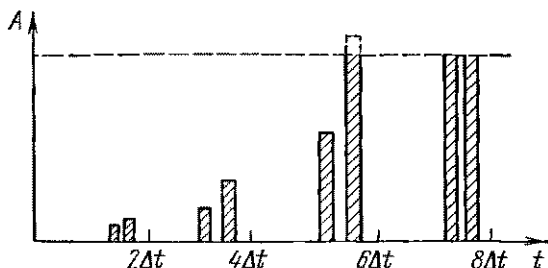


Рис. 5.47. Последовательное прохождение начальных импульсов через систему с усилением и задержкой.

повторяя периодичность начальных импульсов исходного (начального) режима. Такая последовательность импульсов должна получаться в случае идеальной системы. В реальных системах сохраняется только общий период колебаний, зависящий от времени задержки, но форма начальных импульсов претерпевает существенные изменения по мере циркуляции в автоколебательной системе с запаздывающей обратной связью.

Дело в том, что даже при однократном прохождении сигнала через реальную систему с задержкой последняя вносит из-за неизбежной дисперсии (т. е. зависимости времени запаздывания гармонических компонент сигнала от частоты) некие (пусть даже небольшие) искажения формы сигнала, которые вследствие многократного прохождения через усилитель и линию задержки приводят к установившемуся процессу, сильно отличающемуся по форме от исходного. Форма установившегося процесса будет при этом определяться конкретными свойствами реальных линий задержки и усилителей.

Таким образом, рассмотрение процессов в автоколебательных системах с запаздыванием с использованием аппарата метода итераций позволяет объяснить только периодичность и условия возбуждения колебаний в системах с запаздыванием. Уже из качественного анализа поведения реальных систем можно сделать

вывод о невозможности создания с помощью таких систем динамической системы памяти, которая была бы способна запоминать не только время воздействия сигнала, но и его сложную форму.

Для анализа автоколебательных систем неосцилляторного типа с запаздывающей обратной связью можно применить метод переходных характеристик. Этот метод основан на использовании функции отклика $\eta(\xi)$, физический смысл которой заключается в том, что если на вход линейной системы подать единичный скачок напряжения, то на ее выходе появится отклик $\eta(\xi)$. Функция отклика, представляющая реальное значение выходного напряжения, позволяет найти переходный процесс и напряжение на выходе четырехполюсника с помощью интегрального соотношения Дюамеля

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u_{\text{вх}}(t - \xi) \eta(\xi) d\xi, \quad (5.7.15)$$

где ξ — переменная интегрирования.

Применяя этот стандартный прием для расчета автоколебательной системы неосцилляторного типа с запаздывающей обратной связью (см. рис. 5.44), можно записать

$$u_1(t) - u_0 = \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi[u_1(t - \xi)] \eta(\xi) d\xi, \quad (5.7.16)$$

где Φ — функция потерь и других параметров, u_1 — напряжение на входе усилителя, u_0 — начальное значение напряжения. Поскольку функцию отклика можно интерпретировать как введение некоторой задержки, то мы имеем ситуацию, сходную с той, которая получается при применении метода итераций. Действительно, в системе без дисперсии функция отклика представляет «чистый» сдвиг во времени, т. е. $\eta(\xi) = \kappa(\xi - \Delta t)$. В этом случае решение интегрального уравнения Дюамеля для системы без дисперсии имеет вид

$$u_1(t) = \Phi_1[u_1(t - \Delta t)], \quad (5.7.17)$$

т. е. получается изложенная выше итерационная задача.

Итак, задача о движении в автоколебательной системе с запаздыванием сводится к исследованию интегрального уравнения, аналитическое решение которого представляет большие трудности; однако оно может быть решено численными методами с помощью ЭВМ.

Аналитическое решение задачи возможно лишь для начальной фазы процесса, когда характеристику усилителя можно считать

линейной $\Phi(u) = ku$ и не нужно рассматривать задачу о стационарном решении. Переходную характеристику удастся рассчитать только для искусственной линии (цепочки) без потерь и для коаксиального кабеля без потерь и с потерями.

В результате исследования удалось показать, что решение задачи о начальном этапе автоколебаний в рассматриваемой системе имеет вид

$$u_1(t) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(t) \cos \omega_m t + b_m(t) \sin \omega_m t], \quad (5.7.18)$$

где справа стоит не ряд Фурье, а сумма гармонических компонент напряжения, в общем случае, с несоизмеримыми неэквидистантными частотами. Здесь $a_m(t)$ и $b_m(t)$ — экспоненциальные функции времени; они возрастают, если коэффициент усиления усилителя $k > 1$ и достаточен для компенсации потерь в цепи обратной связи, или если эти потери отсутствуют.

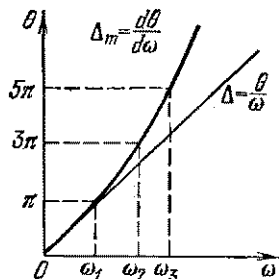


Рис. 5.48. График зависимости фазы от частоты (дисперсионная кривая) и определение генерируемых частот в системе с дисперсией.

Рассмотрим приближенно, как будет развиваться процесс колебаний в таких системах. Известно, что в автоколебательной системе с определенной фазочастотной характеристикой будут нарастать амплитуды тех колебаний, для которых выполняются условия баланса фаз в системе. Если принять, что усилитель изменяет фазу колебаний на π , то удовлетворяют условию фазового баланса компоненты, у которых результирующий сдвиг фаз равен $\theta = (2n + 1)\pi$. На рис. 5.48 приведена типичная дисперсионная кривая, т. е. нелинейная фазо-частотная характеристика системы.

В системе могут нарастать колебания с частотами ω_1 , ω_2 , ω_3 и т. д. Эти частоты, как мы видим, не эквидистантны. Если бы в системе не было дисперсии, то график представлял бы собой прямую $\Delta = \theta/\omega$. При наличии дисперсии следует ввести в рассмотрение и оперировать с дифференциальным временем задержки $\Delta_m = d\theta/d\omega$, значения которого для многих реальных систем всегда лежат выше прямой $\Delta = \theta/\omega$.

В линейном приближении, т. е. для начальной фазы процесса возбуждения автоколебаний в такой системе, можно рассчитать зависимость между дифференциальным временем задержки и скоростью нарастания амплитуд гармонических компонент, удовлетворяющих условию баланса фаз в системе.

Пусть коэффициент усиления k лишь ненамного превышает единицу, т. е. $(k - 1) \ll 1$, тогда $a_m(t)$ и $b_m(t)$ можно считать

медленно меняющимися величинами за период колебаний. Кроме того, для линейного участка развития процесса каждая колебательная компонента m -го порядка не взаимодействует с другими компонентами. Тогда, используя разложение в ряд Тейлора коэффициентов при $\sin$ и $\cos$ в (5.7.18), можно записать:

$$\begin{aligned} a_m(t) &= a_m(t - \Delta_m) + \frac{da_m}{dt} \Delta_m, \\ b_m(t) &= b_m(t - \Delta_m) + \frac{db_m}{dt} \Delta_m, \end{aligned} \quad (5.7.19)$$

где Δ_m — одинаково для величин a_m и b_m , ибо обе они характеризуют одну колебательную компоненту m -го номера.

Теперь рассмотрим, как будет развиваться процесс автоколебаний в своей начальной фазе для произвольной m -й компоненты в предположении о линейности усилителя ($u_2 = -ku_1$) и с учетом различного дифференциального времени задержки Δ_m для разных частотных компонент.

Выражение для m -й компоненты на входе усилителя имеет вид

$$u_{1m}(t) = a_m \cos \omega_m t + b_m \sin \omega_m t. \quad (5.7.20)$$

Кроме того, из схемы, приведенной на рис. 5.44, следует ряд очевидных соотношений

$$\begin{aligned} u_{3m}(t) &= u_{2m}(t), \quad u_{2m}(t) = -ku_{1m}(t), \\ u_{1m}(t) &= u_{3m}(t - \Delta_m) = -ku_{1m}(t - \Delta_m) = \\ &= -k[a_m(t - \Delta_m) \cos \omega_m(t - \Delta_m) + b_m(t - \Delta_m) \sin \omega_m(t - \Delta_m)]. \end{aligned} \quad (5.7.21)$$

Приравнявая друг другу (5.7.20) и (5.7.21) и заменяя в последнем $a_m(t - \Delta_m)$ и $b_m(t - \Delta_m)$ на соответствующие выражения из (5.7.19), получаем

$$\begin{aligned} a_m(t) \cos \omega_m t + b_m(t) \sin \omega_m t &= -k \left\{ \left[a_m(t) - \frac{da_m}{dt} \Delta_m \right] \times \right. \\ &\times \cos(\omega_m t - \pi) + \left[b_m(t) - \frac{db_m}{dt} \Delta_m \right] \sin(\omega_m t - \pi) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (5.7.22)$$

где, согласно необходимому балансу фаз мы потребовали, чтобы $\omega_m \Delta_m = \pi$ или, в общем случае, $\omega_m \Delta_m = (2n + 1)\pi$. Тогда, приравнявая коэффициенты при членах с синусами и косинусами, находим

$$a_m(t) = k \left[a_m(t) - \frac{da_m}{dt} \Delta_m \right], \quad b_m(t) = k \left[b_m(t) - \frac{db_m}{dt} \Delta_m \right],$$

откуда следует, что

$$\frac{da_m}{dt} = \frac{1}{\Delta_m} \left[1 - \frac{1}{k} \right] a_m, \quad \frac{db_m}{dt} = \frac{1}{\Delta_m} \left[1 - \frac{1}{k} \right] b_m. \quad (5.7.23)$$

Из этих выражений видно, что при $k > 1$ $\frac{da_m}{dt} > 0$, $\frac{db_m}{dt} > 0$. Таким образом, между скоростью нарастания амплитуд частотных компонент и дифференциальным временем задержки установлена связь

$$\begin{aligned} a_m(t) &= a_{m0} \exp \left[\frac{t}{\Delta_m} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right], \\ b_m(t) &= b_{m0} \exp \left[\frac{t}{\Delta_m} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.7.24)$$

которая показывает, что чем меньше дифференциальное время задержки Δ_m (более низкочастотная компонента), тем быстрее увеличивается амплитуда этой компоненты.

Учет дисперсии в автоколебательной системе неосцилляторного типа с запаздывающей обратной связью привел к двум принципиальным результатам:

1) колебания, развивающиеся в такой системе, даже при условии линейности усилителя образуют спектр колебаний неэквидистантных частот;

2) амплитуды этих колебаний нарастают по экспонентам неравномерно: чем выше частотная компонента, тем медленнее увеличивается ее амплитуда.

Из эксперимента известно, что в автоколебательной системе неосцилляторного типа с запаздывающей обратной связью в стационарном режиме генерируется одна или несколько самых низкочастотных компонент. Рассмотрим кратко возможное качественное объяснение этого явления.

В начальный период под влиянием различных флуктуационных процессов возбуждаются все возможные частотные компоненты. Затем низкочастотные компоненты в силу ускоренного развития опережают по амплитуде высокочастотные компоненты. При дальнейшем росте амплитуд низкочастотных компонент они первыми выходят за пределы линейного участка характеристики, что вызывает уменьшение эффективной крутизны усилителя и, как следствие, ухудшение условий для нарастания амплитуд высокочастотных компонент. Это в конечном счете приводит к «выживанию» только одной или нескольких самых низкочастотных компонент.

Однако процессы возбуждения в такой широкополосной системе могут существенно измениться, если создать в ней начальные условия, обеспечивающие преимущественное нарастание отдельной, например высокочастотной, колебательной компоненты. Для этого достаточно в момент включения автоколебательной системы

подать на нее высокочастотный (близкий по частоте к одной из возможных высокочастотных компонент системы) сигнал с амплитудой, значительно превышающей уровень флуктуационных шумов в системе.

В этом случае мы искусственно создаем большие начальные значения a_{m0} и b_{m0} высокочастотной компоненты (5.7.24), и, хотя скорость ее роста меньше, чем у низкочастотной, она первой выйдет за пределы линейного участка характеристики и может снизить действующую крутизну усилителя до значения, не обеспечивающего необходимой степени регенерации других (в том числе и низкочастотных) компонент. Опыт показал, что таким путем можно заставить широкополосную автоколебательную систему с задержкой генерировать (запоминать) колебания до, примерно, пятнадцатой частотной компоненты.

КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 6.1. Собственные колебания системы с двумя степенями свободы

Число степеней свободы определяется как минимальное число независимых переменных, необходимое для описания движений в системе. В механической системе его можно найти как минимальное число точек, которые необходимо закрепить для того, чтобы прекратить движение. Для электрической системы эквивалентом закрепления является разрыв цепи, если независимой переменной служит ток, и замыкание цепи, если в качестве независимой переменной выбрано напряжение.

Необходимо четко представлять себе, что в этом определении речь идет не о реальной системе, а об идеализированной модели реальной системы. Практически любая реальная система обладает бесконечным числом степеней свободы, если учесть все возможные в ней движения. Например, грузик, подвешенный на пружине, может рассматриваться как система с одной степенью свободы, если он совершает колебания только вдоль оси пружины. Но эта же система обладает тремя степенями свободы, если учесть еще и маятникообразные колебания груза в двух плоскостях. Если же принять во внимание возможность колебаний, связанных с изгибом пружины, то число степеней свободы становится бесконечным. А ведь можно еще учесть и упругие колебания самого груза и даже колебания молекул, из которых состоит груз.

Поэтому определение числа степеней свободы, которые должны быть учтены в идеализированной системе, зависит от характера движения реального объекта. Как правило, можно пренебречь теми степенями свободы реальной системы, которым соответствуют частоты, сильно отличающиеся от частот рассматриваемых колебаний.

Правильный выбор идеализированной системы, пригодной для теоретического исследования, т. е. достаточно простой и в то же время сохраняющей основные черты, присущие исходному реальному объекту, представляет наибольшую трудность при любом физическом исследовании. Главным критерием правильности выбора идеализированной системы является опыт.

Многие реальные механические и электрические устройства могут рассматриваться как системы с двумя степенями свободы. Примеры таких систем — связанные колебательные контуры, широко используемые в радиотехнике в качестве полосовых фильтров, в двухконтурных параметрических усилителях и т. д. Механической системой с двумя степенями свободы будем считать, например, балку, установленную на двух упругих опорах.

Систему с двумя степенями свободы можно представить как две отдельные системы с одной степенью свободы, связанные друг с другом. Связь между ними приводит к тому, что колебания в одной из них влияют на колебания в другой и наоборот. Системы с одной степенью свободы, на которые можно разбить сложную колебательную систему, называются *парциальными*.

Существует общее правило выделения парциальных систем. Парциальная система, поведение которой описывается данной обобщенной координатой, получается из полной системы, если положить равными нулю все остальные координаты. Частоты свободных колебаний отдельных парциальных систем называются *парциальными частотами* полной системы.

Разбиение полной системы на парциальные неоднозначно, поскольку независимые координаты могут быть выбраны различными способами. Так, напри-

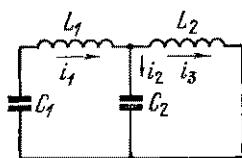


Рис. 6.1. Схема электрического колебательного контура с двумя степенями свободы.

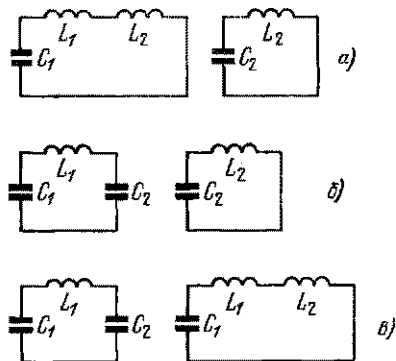


Рис. 6.2. Различные варианты разбиения системы, показанной на рис. 6.1, на парциальные системы.

мер, в колебательном контуре, изображенном на рис. 6.1, в качестве независимых координат можно выбрать любую пару токов i_1 и i_2 ; i_3 и i_1 или i_2 и i_3 , и тогда парциальные системы имеют вид, представленный на рис. 6.2. Соответственно изменяются и парциальные частоты.

Для независимых координат i_1 и i_2 они равны

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C_1}} \quad \text{и} \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}};$$

для i_3 и i_1 —

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 C_2 / (C_1 + C_2)}}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}};$$

для i_2 и i_3 —

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 C_2 / (C_1 + C_2)}}; \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{(L_2 + L_1) C_1}}.$$

Полную систему можно разбить на парциальные различными способами, и поэтому характер связи между парциальными системами зависит от их выбора. На рис. 6.2, а связь индуктивная, 6.2, б — емкостная и 6.2, в — смешанная.

Физически ясно, что движение в полной системе при заданных начальных условиях будет одним и тем же, но запись его в различных координатах различна.

Проведем изучение свободных колебаний в системе с двумя степенями свободы на классическом примере двух маятников, связанных пружиной и совершающих колебания в плоскости рисунка (рис. 6.3).

Если углы отклонения маятников от положения устойчивого равновесия достаточно малы ($\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$), то кинетическая и потенциальная энергия системы равны

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2, \quad (6.1.1)$$

$$V = \frac{1}{2} m_1 l_1 g \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 g \varphi_2^2 + \frac{1}{2} k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2, \quad (6.1.2)$$

где k — коэффициент жесткости, или коэффициент упругости, пружины. Последний член в выражении для потенциальной энергии представляет собой энергию сжатой пружины.

Зная выражение для кинетической и потенциальной энергий, запишем уравнения движения системы (уравнения Лагранжа):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_s} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_s} = 0, \quad s = 1, 2 \quad (6.1.3)$$

или

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 l_1 g \varphi_1 - k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \quad (6.1.4)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_2 g \varphi_2 + k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \quad (6.1.5)$$

Положив в (6.1.4) $\varphi_2 = 0$, получим уравнение колебаний первой парциальной системы с парциальной частотой v_1 , определяемой соотношением

$$v_1^2 = \frac{g}{l_1} + \frac{k a^2}{m_1 l_1^3}. \quad (6.1.6)$$

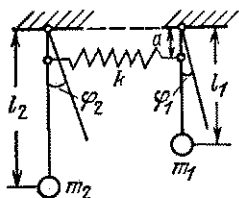


Рис. 6.3. Два связанных маятника.

Из (6.1.5) при $\varphi_1=0$ получим выражение для второй парциальной частоты ν_2

$$\nu_2^2 = \frac{g}{l_2} + \frac{ka^2}{m_2 l_2^2}. \quad (6.1.7)$$

Если ввести коэффициенты связи $\alpha_1 = \frac{ka^2}{m_1 l_1^2}$, $\alpha_2 = \frac{ka^2}{m_2 l_2^2}$, то уравнения колебаний принимают вид

$$\ddot{\varphi}_1 + \nu_1^2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2 = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 + \nu_2^2 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_1 = 0. \quad (6.1.8)$$

Мы получили систему двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Ее решение будем искать в виде

$$\varphi_1 = A \cos(\omega t + \psi), \quad \varphi_2 = B \cos(\omega t + \psi). \quad (6.1.9)$$

Подставляя (6.1.9) в (6.1.8), находим

$$-\omega^2 A + \nu_1^2 A - \alpha_1 B = 0, \quad -\omega^2 B + \nu_2^2 B - \alpha_2 A = 0. \quad (6.1.10)$$

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение только в том случае, если ее детерминант равен нулю, т. е. если

$$\begin{vmatrix} \nu_1^2 - \omega^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \nu_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получим уравнение для определения частоты ω

$$\omega^4 - \omega^2(\nu_1^2 + \nu_2^2) + \nu_1^2 \nu_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (6.1.11)$$

Решение этого биквадратного уравнения дает две возможные частоты колебаний системы ω_1 и ω_2 :

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} [\nu_1^2 + \nu_2^2 - \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}], \quad (6.1.12)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} [\nu_1^2 + \nu_2^2 + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}]. \quad (6.1.13)$$

Частоты ω_1 и ω_2 не равны парциальным частотам ν_1 и ν_2 и называются *собственными* или *нормальными* частотами системы. Нормальные частоты системы не зависят от выбора координат (и парциальных частот). Они определяются только свойствами системы.

Из уравнений (6.1.10) можно найти отношение амплитуд A и B . На частоте ω_1 отношение B/A равно

$$\left[\frac{B}{A} \right]_{\omega_1} = \frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{\alpha_1} = \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2 + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}}{2\alpha_1} = \kappa_1. \quad (6.1.14)$$

Величина κ_1 полностью определяется параметрами системы и не зависит от начальных условий. Она называется *коэффициентом распределения амплитуд на частоте ω_1* .

Таким образом, амплитуда колебаний одного из маятников на частоте ω_1 может быть произвольной (она определяется начальными условиями). Амплитуда колебаний второго маятника на

той же частоте всегда находится в определенном отношении к амплитуде колебаний первого маятника.

Найдем теперь κ_2 — коэффициент распределения амплитуд на частоте ω_2 :

$$\kappa_2 = \left[\frac{B}{A} \right]_{\omega_2} = \frac{v_1^2 - \omega_2^2}{\alpha_1} = \frac{v_1^2 - v_2^2 - \sqrt{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_1}. \quad (6.1.15)$$

Общее решение уравнений (6.1.8) запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2), \\ \varphi_2 &= \kappa_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \kappa_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2). \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Постоянные A_1 , A_2 , ψ_1 , ψ_2 определяются начальными условиями. Соотношения (6.1.16) показывают, что в общем случае колебания каждого маятника представляют сумму двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 . Если частоты ω_1 и ω_2 близки, то суммарные колебания носят характер биений.

Специальным подбором начальных условий можно получить чисто гармонические колебания системы на частоте ω_1 или ω_2 . Если, например, в начальный момент времени отклонить маятники так, чтобы отношение их амплитуд равнялось κ_1 , а скорости были равны нулю, то система начнет колебаться с частотой ω_1 .

Соотношения (6.1.16) можно рассматривать как формулы линейного преобразования координат φ_1 , φ_2 в координаты x и y , где

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2). \quad (6.1.17)$$

Тогда очевидно, что каждая из новых координат x и y совершает гармоническое колебание с частотой ω_1 (или ω_2) при любых начальных условиях. Координаты x и y называются *нормальными координатами* системы. Координаты φ_1 и φ_2 связаны с нормальными координатами x и y соотношениями

$$\varphi_1 = x + y, \quad \varphi_2 = \kappa_1 x + \kappa_2 y. \quad (6.1.18)$$

Нетрудно показать в общем виде, что для любой системы с двумя степенями свободы с помощью соответствующего линейного преобразования можно перейти к нормальным координатам, причем уравнения колебаний в этих координатах имеют вид

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0. \quad (6.1.19)$$

Особенностью уравнений движения, записанных в нормальных координатах, является отсутствие членов, описывающих связи между системами. Соответственно в выражениях для потенциальной и кинетической энергий, записанных в нормальных координатах, отсутствуют члены с произведениями координат.

Поскольку каждая из нормальных координат совершает гармоническое движение с одной из собственных частот, последние часто называют *нормальными частотами* системы.

Рассмотрим зависимость нормальных частот системы от соотношения парциальных частот маятников. Для определенности будем считать, что изменяется только одна из парциальных частот, например ν_2 . С помощью соотношений (6.1.12) и (6.1.13) можно построить график зависимости квадратов собственных частот системы от ν_2^2 (рис. 6.4), называемый *графиком Вина*. Как мы видим, при любом ν_2 парциальные частоты лежат между собственными частотами. Это свойство является общим для любых систем с двумя степенями свободы.

Проанализируем более подробно предельные случаи сильно различающихся парциальных частот $\nu_2^2 \ll \nu_1^2$, $\nu_2^2 \gg \nu_1^2$ и равных парциальных частот $\nu_1^2 = \nu_2^2$.

При $\nu_2^2 \ll \nu_1^2$ частоты собственных колебаний равны

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &\approx \nu_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 / \nu_1^2, \\ \omega_2^2 &\approx \nu_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 / \nu_1^2.\end{aligned}\quad (6.1.20)$$

Поскольку обычно $\alpha_1 \alpha_2 \ll \nu_1^2 \nu_2^2$ частота ω_1 близка к ν_2 , а частота ω_2 — к ν_1 .

При $\nu_2^2 \gg \nu_1^2$ нормальные частоты равны

$$\omega_1^2 \approx \nu_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 / \nu_2^2, \quad \omega_2^2 \approx \nu_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 / \nu_2^2. \quad (6.1.21)$$

При равенстве парциальных частот выражения для собственных частот принимают вид

$$\omega_1^2 = \nu^2 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \omega_2^2 = \nu^2 + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (6.1.22)$$

При равенстве масс маятников соотношения (6.1.22) упрощаются

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ka}{ml^2}. \quad (6.1.23)$$

Таким образом, при сильно различающихся парциальных частотах нормальные частоты близки к парциальным. По мере сближения парциальных частот нормальные частоты отходят от парциальных. Наибольшее отличие ω от ν наблюдается вблизи равенства парциальных частот.

Проследим теперь за поведением коэффициентов распределения κ_1 и κ_2 при изменении парциальной частоты ν_2 . Так как ν_1 всегда больше ω_1 и меньше ω_2 , то из соотношений (6.1.14) и (6.1.15) следует, что κ_1 всегда больше нуля, а κ_2 всегда меньше нуля. Поэтому колебания маятников на частоте ω_1 всегда происходят в фазе (синфазны), а колебания на частоте ω_2 всегда противофазны. На основании соотношений (6.1.14) и (6.1.15) на рис. 6.5 построена зависимость коэффициентов распределения амплитуд

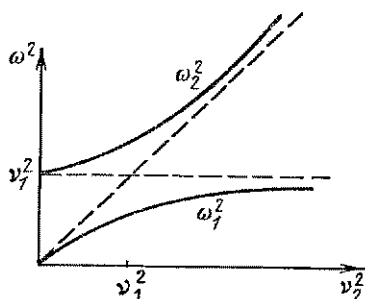


Рис. 6.4. График Вина.

по координатам κ_1 и κ_2 от v_2^2 для случая $m_1 = m_2$. Коэффициент распределения κ_1 , соответствующий синфазным колебаниям, при $v_2 \ll v_1$ примерно равен v_1^2/α_1 , т. е. много больше единицы. По мере увеличения v_2 коэффициент κ_1 уменьшается и при $v_2 \gg v_1$ $\kappa_1 \approx \alpha_2/v_2^2$, т. е. значительно меньше единицы. Будем считать, что

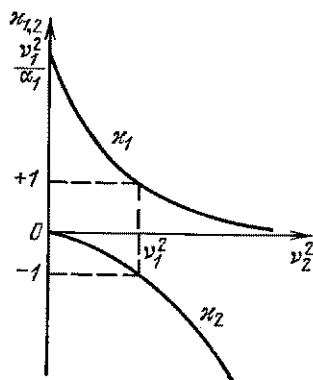


Рис. 6.5. Зависимость коэффициентов распределения от парциальных частот.

с большей амплитудой. В соответствии с этим $|\kappa_2| \ll 1$ при $v_1 \gg v_2$ и $|\kappa_2| \gg 1$ при $v_2 \gg v_1$.

При равенстве парциальных частот ($v_1 = v_2$) коэффициенты распределения оказываются равными по абсолютной величине

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{l_2}{l_1} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}, \quad \kappa_2 = -\kappa_1. \quad (6.1.24)$$

Если маятники идентичны ($l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$), то коэффициенты распределения равны по модулю единице. Это означает равенство амплитуд колебаний обоих маятников на обеих собственных частотах. При неидентичности систем ($m_1 \neq m_2$) амплитуды колебаний различны даже при одинаковых парциальных частотах. Однако энергии при равенстве парциальных частот распределены по координатам равномерно.

§ 6.2. Связь и связанность

Коэффициент распределения κ_1 характеризует относительную величину амплитуды первого колебания второго маятника, т. е. во второй координате. Поэтому условие $\kappa_1 \ll 1$ показывает, что первый маятник колеблется в основном с частотой ω_1 . Это означает, что физическая связь между системами (их взаимодействие)

мала. Случаю $\kappa_1 \ll 1$ всегда соответствует условие $|\kappa_2| \gg 1$, т. е. колебание частоты ω_2 преобладает во второй координате. Слабая физическая связь между системами дает основание рассматривать колебания в двух взаимодействующих системах как собственное колебание одной из парциальных систем с большой амплитудой, вынуждающей слабые колебания во второй системе. Л. И. Мандельштамом введено понятие связанности системы, определяющее степень физической связи между парциальными системами. *Связанностью* системы называется величина

$$\sigma = \frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{|\nu_1^2 - \nu_2^2|}. \quad (6.2.1)$$

Как видно из этого выражения, связанность определяется не только величинами коэффициентов связи, но и близостью парциальных частот. Связанность может быть малой только для системы с различающимися парциальными частотами. Если связанность мала, то собственные частоты близки к соответствующим парциальным частотам. Из формул (6.1.12) и (6.1.13) следует, что в случае слабой связанности $\omega_2 \approx \nu_1$, $\omega_1 \approx \nu_2$ при $\nu_1 \gg \nu_2$ и $\omega_2 \approx \nu_2$, $\omega_1 \approx \nu_1$ при $\nu_1 \ll \nu_2$.

Вводя величину σ в выражения для коэффициентов распределения (6.1.14) и (6.1.15), получим для $\nu_1 > \nu_2$

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 + \sqrt{1 + \sigma^2}}{\sigma}}, \quad |\kappa_2| = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \sqrt{1 + \sigma^2}}{\sigma}}. \quad (6.2.2)$$

Из (6.2.2) видно, что при малой связанности ($\sigma \rightarrow 0$) $\kappa_1 \rightarrow \infty$, $\kappa_2 \rightarrow 0$.

Таким образом, для каждого нормального колебания тот маятник имеет большую амплитуду, у которого парциальная частота близка к собственной частоте рассматриваемого колебания. При равенстве парциальных частот связанность системы велика даже при малых коэффициентах связи. В этом случае относительная величина амплитуды каждого колебания одинакова в обеих координатах.

Можно оценить также взаимодействие парциальных систем по степени передачи энергии от одного маятника к другому. Для этого рассмотрим процесс колебаний двух связанных маятников при начальных условиях $t=0$, $\varphi_1 = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$. Подставляя эти условия в (6.1.16), получим

$$A_1 + A_2 = \varphi_0, \quad A_1\kappa_1 + A_2\kappa_2 = 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0.$$

Колебания маятников будут описываться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi_0}{|\kappa_2| + \kappa_1} (|\kappa_2| \cos \omega_1 t + \kappa_1 \cos \omega_2 t), \\ \varphi_2 &= \frac{\varphi_0 \kappa_1 |\kappa_2|}{|\kappa_2| + \kappa_1} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Колебания первого маятника можно записать в виде

$$\varphi_1(t) = A(t) \cos[\omega_1 t - \psi(t)], \quad (6.2.4)$$

где

$$A^2(t) = \frac{\varphi_0^2}{(|\kappa_2| + \kappa_1)^2} [\kappa_2^2 + \kappa_1^2 + 2\kappa_1 |\kappa_2| \cos(\omega_2 - \omega_1)t],$$

$$\operatorname{tg} \psi(t) = - \frac{|\kappa_2| \sin(\omega_2 - \omega_1)t}{\kappa_1 + |\kappa_2| \cos(\omega_2 - \omega_1)t}.$$

Если частоты ω_1 и ω_2 не слишком далеки друг от друга, то $A(t)$ может рассматриваться как меняющаяся со временем амплитуда колебания. Период изменения амплитуды равен $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$.

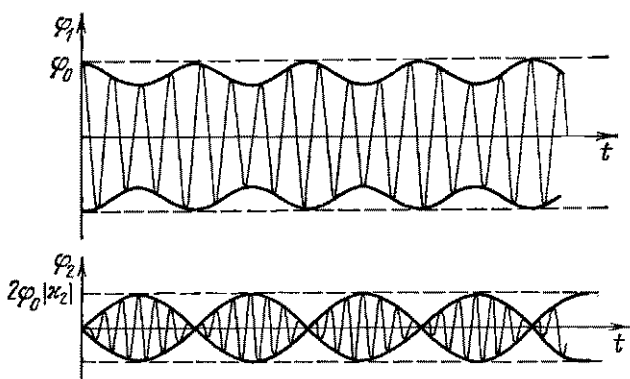


Рис. 6.6. Колебания связанных маятников при слабой связанности.

Максимальное значение амплитуды равно φ_0 , минимальное $\varphi_0(\kappa_1 - |\kappa_2|)/(|\kappa_2| + \kappa_1)$. Колебания второго маятника представляют собой биения следующего вида:

$$\varphi_2 = \frac{2\varphi_0\kappa_1|\kappa_2|}{|\kappa_2| + \kappa_1} \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t. \quad (6.2.5)$$

Если парциальные частоты маятников различаются сильно (малая связанность), то один из коэффициентов распределения много больше второго. Пусть, например, $\kappa_1 \gg |\kappa_2|$, тогда минимальное значение амплитуды первого маятника приблизительно равно $\varphi_0(1 - 2|\kappa_2|/\kappa_1)$, т. е. амплитуда первого маятника изменяется мало. Максимальная амплитуда второго маятника в этом случае равна $2\varphi_0|\kappa_2|$, т. е. много меньше амплитуды первого маятника (рис. 6.6).

Таким образом, при малой связанности обмен энергией между парциальными системами незначителен.

С приближением κ_1 к $|\kappa_2|$ минимальное значение $A(t)$ уменьшается, т. е. перекачка энергии от первого маятника ко второму увеличивается.

При равенстве парциальных частот $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ (т. е. $|\kappa_2| = \kappa_1 = \kappa$), колебания маятников принимают вид

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t, \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \kappa \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t.\end{aligned}\quad (6.2.6)$$

На рис. 6.7 представлены колебания маятников при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Оба маятника совершают биения, огибающая которых сдвинута по

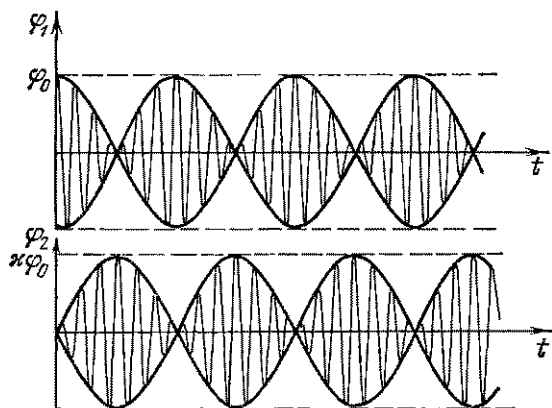


Рис. 6.7. Колебания связанных маятников при сильной связанности.

времени на $T/4$, т. е. периодически происходит перекачка энергии от одного из маятников к другому. В полной перекачке энергии и заключен физический смысл понятия сильной связанности системы. Обмен энергией происходит независимо от коэффициента связи между системами. Однако время τ передачи энергии от одного маятника к другому зависит от величины связи. Время τ равно

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\pi\nu}{\alpha}. \quad (6.2.7)$$

Следовательно, время перекачки энергии обратно пропорционально коэффициенту связи.

В любой реальной системе имеет место затухание с постоянной времени τ_0 . Наличие даже малого затухания может кардинально изменить картину колебаний в системе с малой связью и большой связанностью, потому что колебания в первом маятнике успеют затухнуть быстрее, чем раскачается второй маятник.

Таким образом, сильная связанность в системе проявляется только в том случае, если $\tau \ll \tau_0$. При известном затухании в системе это условие накладывает ограничение на величину минимальной связи, при которой происходит сильное взаимодействие двух систем.

Наличие силы трения изменяет картину собственных колебаний в системе с двумя степенями свободы. Если маятники совершают колебания с малыми амплитудами в среде, обладающей вязким трением, то уравнения колебания маятников имеют вид

$$\ddot{\varphi}_1 + 2\delta_1\dot{\varphi}_1 + \nu_1^2\varphi_1 - \alpha_1\varphi_2 = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 + 2\delta_2\dot{\varphi}_2 + \nu_2^2\varphi_2 - \alpha_2\varphi_1 = 0, \quad (6.2.8)$$

где δ_1, δ_2 — парциальные коэффициенты затухания, названные так по аналогии со случаем систем с одной степенью свободы.

Решая эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 e^{-\theta_1 t} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 e^{-\theta_2 t} \cos(\omega_2 t + \psi_2), \\ \varphi_2 &= \kappa_1 A_1 e^{-\theta_1 t} \cos(\omega_1 t + \psi_1 + \chi_1) + \kappa_2 A_2 e^{-\theta_2 t} \cos(\omega_2 t + \psi_2 + \chi_2). \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Колебание каждого маятника в этом случае представляет собой сумму двух затухающих колебаний, причем затухание каждого нормального колебания характеризуется определенным коэффициентом затухания θ_1 или θ_2 . Можно показать, что собственные частоты ω_1 и ω_2 и коэффициенты распределения κ_1 и κ_2 с точностью до членов порядка δ_i^2/ω_i^2 совпадают с собственными частотами и коэффициентами распределения в консервативной системе. Поэтому для систем с малыми потерями можно пользоваться значениями ω и κ , вычисленными по формулам (6.1.12) — (6.1.15).

Особенностью колебаний в системе с затуханием является сдвиг по фазе колебаний одной и той же частоты у разных маятников. Эти сдвиги (χ_1 и χ_2 в (6.2.9)) зависят от параметров системы. Они пропорциональны величинам затухания.

§ 6.3. Вынужденные колебания в системах с двумя степенями свободы

Рассмотрим вынужденные колебания в системе из двух индуктивно связанных контуров, в один из которых включена внешняя э. д. с. $\mathcal{E}(t)$ (рис. 6.8). Запишем уравнения колебаний для этих контуров, пренебрегая вначале затуханием:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} &= \mathcal{E} + M \frac{di_2}{dt}, \\ \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} &= M \frac{di_1}{dt}, \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

где i_1, i_2 — токи в контурах, L_1, L_2, C_1, C_2 — индуктивности и емкости контуров, M — коэффициент взаимной индукции. В линей-

ной системе справедлив принцип суперпозиции, и поэтому достаточно рассмотреть воздействие на систему гармонической внешней силы $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos pt$. Уравнения колебаний токов принимают в этом случае вид

$$\ddot{i}_1 + v_1^2 i_1 - \alpha_1 \ddot{i}_2 = -\frac{\mathcal{E}_0 p}{L_1} \sin pt, \quad \ddot{i}_2 + v_2^2 i_2 - \alpha_2 \ddot{i}_1 = 0, \quad (6.3.2)$$

где

$$v_1^2 = 1/L_1 C_1, \quad v_2^2 = 1/L_2 C_2, \quad \alpha_1 = M/L_1, \quad \alpha_2 = M/L_2. \quad (6.3.2a)$$

Колебания в системе будут состоять из собственных колебаний с частотами ω_1 и ω_2 и вынужденных колебаний с частотой внешней силы p . Так как собственные колебания в подобной системе мы уже рассматривали, то теперь ограничимся только вынужденными колебаниями. Поэтому будем искать решение уравнений (6.3.2) в виде

$$i_1 = I_1 \sin pt, \quad i_2 = I_2 \sin pt.$$

Подставляя искомый вид решения в (6.3.2), получим уравнения для определения амплитуд I_1, I_2

$$\begin{aligned} (v_1^2 - p^2) I_1 + \alpha_1 p^2 I_2 &= -\frac{\mathcal{E}_0 p}{L_1}, \\ (v_2^2 - p^2) I_2 + \alpha_2 p^2 I_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Отсюда $I_2 = -\alpha_2 p^2 I_1 / (v_2^2 - p^2)$. Полученное отношение амплитуд I_2 и I_1 на частоте $p = \omega_1$ совпадает с κ_1 — коэффициентом распределения амплитуд при собственном колебании с частотой ω_1 ; на частоте $p = \omega_2$ соотношение амплитуд равно κ_2 (здесь надо учесть равенство (6.1.11)). Таким образом, отношение амплитуд вынужденных колебаний в контурах совпадает с отношением амплитуд при собственных колебаниях (на соответствующей частоте). Подставляя найденное значение I_2 в первое из уравнений (6.3.3), получим выражения для амплитуд I_1 и I_2

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\mathcal{E}_0 p (v_2^2 - p^2)}{L_1 [(v_1^2 - p^2)(v_2^2 - p^2) - \alpha_1 \alpha_2 p^4]}; \\ I_2 &= \frac{\alpha_2 \mathcal{E}_0 p^3}{L_1 [(v_1^2 - p^2)(v_2^2 - p^2) - \alpha_1 \alpha_2 p^4]}. \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

На рис. 6.9 приведены зависимости I_1 и I_2 от частоты внешней силы p . В точках $p = \omega_1$ и $p = \omega_2$ амплитуды I_1 и I_2 обращаются в бесконечность. Таким образом, в системе с двумя степенями свободы резонансное увеличение амплитуды колебаний происходит на обеих собственных частотах системы. При $p < v_2$ i_1 и i_2 совершают противофазные колебания, а при $p > v_2$ — синфазные. Точка $p = v_2$ интересна тем, что в ней I_1 обращается в нуль, т. е.

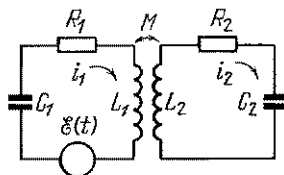


Рис. 6.8. Схема связанных контуров при внешнем воздействии.

происходит успокоение колебаний в том контуре, в котором действует внешняя сила. Во втором контуре колебания не обращаются в нуль ни при каком конечном p . Частота успокоения в общем случае зависит от того, в какую из ветвей сложного контура включена внешняя э. д. с. Она всегда равна парциальной частоте того контура, который получается при разрыве цепи в точке включения э. д. с.

Выясним физическую причину отсутствия колебания в первом контуре при $p = \nu_2$. Для этого рассчитаем э. д. с., наводимую в первом контуре на этой частоте колебаниями второго контура,

$$\mathcal{E}_{21} = M \frac{di_2}{dt} = M p I_2 \cos pt = -\mathcal{E}_0 \cos \nu_2 t. \quad (6.3.5)$$

Как мы видим, $\mathcal{E}_{21}$ в точности компенсирует внешнюю э. д. с. Поэтому вынужденные колебания в первом контуре на частоте ν_2 не происходят.

На практике широко применяется демпфирование нежелательных колебаний в контуре, на который действует внешняя сила определенной частоты, с помощью дополнительного контура, настроенного на эту частоту. Так устроены фильтры-пробки на промежуточную частоту в радиоприемниках, механические успокоители колебаний валов и т. д.

Учет затухания в контурах при вынужденных колебаниях приводит к тому, что амплитуды колебаний при резонансе становятся конечными. При $p = \nu_2$ амплитуда колебаний в первом контуре при учете затухания не обращается в нуль. Таким образом, демпфирование в системе с потерями никогда не бывает полным. Однако уменьшение амплитуды колебаний на частоте ν_2 при малом затухании весьма значительно. На рис. 6.10 приведена резонансная кривая в первом контуре при наличии потерь. Наличие потерь приводит к уменьшению амплитуды колебаний вблизи резонанса и к уширению резонансной кривой. При достаточной близости частот ω_1 и ω_2 потери могут превратить резонансную кривую в одногорбую, полностью сгладив провал между частотами.

Задачу о вынужденных колебаниях в диссипативной системе с двумя степенями свободы удобно решать методом комплексных амплитуд. Уравнения, связывающие комплексные амплитуды

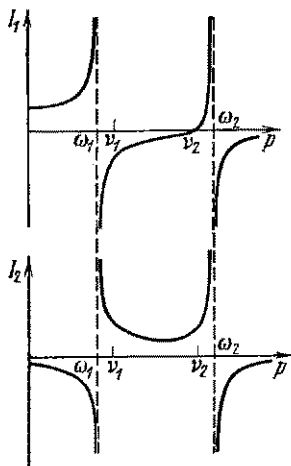


Рис. 6.9. Зависимости I_1 и I_2 для консервативной системы с двумя степенями свободы от частоты внешней силы.

токов I_1 и I_2 с параметрами контуров и амплитудой электродвижущей силы $\mathcal{E}_0$, имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= I_1 [R_1 + j(pL_1 - 1/pC_1)] + jpMI_2, \\ 0 &= I_2 [R_2 + j(pL_2 - 1/pC_2)] + jpMI_1,\end{aligned}\quad (6.3.6)$$

где R_1, R_2 — сопротивления контуров. Исключая из второго уравнения I_2 , получим

$$\mathcal{E}_0 = I_1 (R_{\text{экр}} + jX_{\text{экр}}), \quad (6.3.7)$$

где

$$\begin{aligned}R_{\text{экр}} &= R_1 + R_2 \frac{p^2 M^2}{R_2^2 + (pL_2 - 1/pC_2)^2}, \\ X_{\text{экр}} &= (pL_1 - 1/pC_1) - \frac{p^2 M^2}{R_2^2 + (pL_2 - 1/pC_2)^2} (pL_2 - 1/pC_2).\end{aligned}$$

Таким образом, система из двух индуктивно связанных контуров сведена к одиночному контуру, обладающему активным сопротивлением $R_{\text{экр}}$ и реактивным $X_{\text{экр}}$. На контур действует э. д. с. $\mathcal{E}_0$, в контуре течет ток амплитуды I_1 .

Условие резонанса в таком контуре сводится к равенству нулю $X_{\text{экр}}$, т. е.

$$X_{\text{экр}} = 0. \quad (6.3.8)$$

Введем относительные расстройки $\Delta_1 = 1 - v_1^2/p^2$, $\Delta_2 = 1 - v_2^2/p^2$ и парциальные декременты затухания $\vartheta_1 = R_1/pL_1$ и $\vartheta_2 = R_2/pL_2$. Тогда с учетом (6.3.2а) условие резонанса примет вид

$$\Delta_1 \vartheta_2^2 + \Delta_2^2 \Delta_1 - \alpha_1 \alpha_2 \Delta_2 = 0. \quad (6.3.9)$$

В случае одинаковых парциальных частот контуров $v_1 = v_2 = v$ расстройки равны, и мы получаем

$$\Delta (\Delta^2 + \vartheta_2^2 - \alpha_1 \alpha_2) = 0. \quad (6.3.10)$$

Этому уравнению удовлетворяют три значения Δ :

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_{II, III} = \pm \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 - \vartheta_2^2}. \quad (6.3.11)$$

Отсюда находим три значения частоты внешней силы, при которых $X_{\text{экр}} = 0$:

$$p_1 = v, \quad p_2 = \frac{v}{\sqrt{1 + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 - \vartheta_2^2}}}, \quad p_3 = \frac{v}{\sqrt{1 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 - \vartheta_2^2}}}. \quad (6.3.12)$$

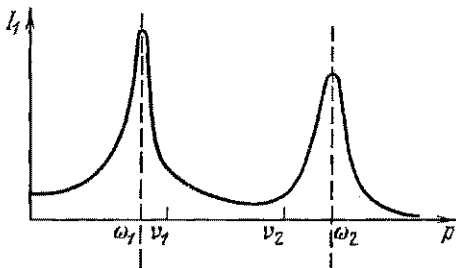


Рис. 6.10. Резонансная кривая диссипативной системы с двумя степенями свободы.

Если затухание второго контура достаточно велико, то существует единственная резонансная частота $p = \nu$. Система с двумя степенями свободы ведет себя в этом случае как система с одной степенью свободы. При $\alpha_1 \alpha_2 > \vartheta_2^2$ имеются три значения частоты p , при которых выполняется условие (6.3.8). На частотах p_2 и p_3 амплитуда тока достигает максимальных значений, на частоте $p_1 = \nu$ амплитуда минимальна. Этот минимум тем глубже, чем на большую величину коэффициент связи $\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ превышает декремент затухания второго контура (рис. 6.11). Коэффициент связи, при котором $\alpha_1 \alpha_2 = \vartheta_2^2$, называется *критическим*.

Рассмотрим теперь особенности вынужденных колебаний в двухконтурной системе без затухания при

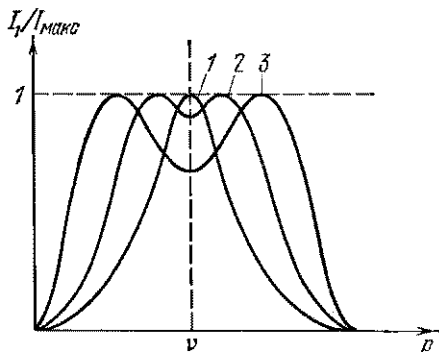


Рис. 6.11. Резонансные кривые двух связанных контуров с равными парциальными частотами при коэффициенте связи, меньшем критического (1), близком к критическому (2) и большем критического (3).

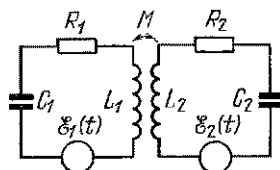


Рис. 6.12. Схема связанных контуров с внешними э. д. с. в обоих контурах.

одновременном действии внешних э. д. с. в обоих контурах (рис. 6.12). Уравнения колебаний для токов в таких контурах имеют вид

$$\ddot{i}_1 + \nu_1^2 i_1 - \alpha_1 \ddot{i}_2 = \dot{\mathcal{E}}_1 / L_1, \quad \ddot{i}_2 + \nu_2^2 i_2 - \alpha_2 \ddot{i}_1 = \dot{\mathcal{E}}_2 / L_2. \quad (6.3.13)$$

Если внешние э. д. с. действуют на одной и той же частоте и синфазны, т. е. $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} \cos pt$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{20} \cos pt$, то амплитуды токов I_1 и I_2 равны

$$I_1 = - \frac{L_2 \mathcal{E}_{10} p (\nu_2^2 - p^2) - M \mathcal{E}_{20} p^3}{L_1 L_2 [(\nu_1^2 - p^2)(\nu_2^2 - p^2) - \alpha_1 \alpha_2 p^4]}, \quad (6.3.14)$$

$$I_2 = - \frac{L_1 \mathcal{E}_{20} p (\nu_1^2 - p^2) - M \mathcal{E}_{10} p^3}{L_1 L_2 [(\nu_1^2 - p^2)(\nu_2^2 - p^2) - \alpha_1 \alpha_2 p^4]}.$$

Из соотношений (6.3.14) вытекают два интересных следствия. Это, во-первых, принцип взаимности, который в нашем случае гласит: амплитуда вынужденных колебаний во втором контуре при включении некоторой э. д. с. в первый равна амплитуде колебаний в первом контуре, если ту же э. д. с. включить во второй

контур. Принцип взаимности справедлив вследствие линейности системы. Одно из проявлений взаимности состоит в том — и это широко используется на практике, — что диаграммы направленности антенны, работающей на передачу и прием, одинаковы. Вторая особенность вынужденных колебаний в системе с двумя степенями свободы заключается в том, что при определенном соотношении между амплитудами внешних э. д. с. $\mathcal{E}_{10}$ и $\mathcal{E}_{20}$ в системе может отсутствовать резонанс даже в том случае, когда p равно ω_1 или ω_2 . Он отсутствует, если в выражениях (6.3.14) при $p = \omega_1$ или $p = \omega_2$ одновременно со знаменателями обращаются в нуль и числители.

Пусть, например, на частоте $p = \omega_1$ числитель I_1 обращается в нуль. Это возможно при следующем соотношении между $\mathcal{E}_{20}$ и $\mathcal{E}_{10}$

$$\mathcal{E}_{20}/\mathcal{E}_{10} = (v_2^2 - \omega_1^2)/\alpha_2 \omega_1^2. \quad (6.3.15)$$

Подставляя (6.3.15) в выражение для I_2 (6.3.14) и учитывая (6.1.11), получим, что и числитель этого выражения также равен нулю. Отсюда следует, что при выполнении условия (6.3.15) числители и знаменатели (6.3.14) представляют собой бесконечно малые одинакового порядка, и поэтому амплитуды колебаний в обоих контурах остаются конечными, несмотря на наличие внешних сил резонансной частоты. Правая часть соотношения (6.3.15) равна $-1/\kappa_1$, где κ_1 — коэффициент распределения амплитуд собственных колебаний на частоте ω_1 . Поэтому (6.3.15) можно записать в виде

$$A\mathcal{E}_{10} + B\mathcal{E}_{20} = 0, \quad (6.3.16)$$

где A и B — амплитуды собственных колебаний контуров на частоте ω_1 . Условие (6.3.16) называется условием ортогональности внешней силы собственному колебанию с частотой ω_1 . Ортогональность внешней силы собственному колебанию физически означает, что работа внешней силы в первой системе равна и противоположна по знаку работе силы во второй парциальной системе. Так как полная работа внешней силы оказывается равной нулю, то и не происходит увеличения амплитуды колебаний системы. Если, например, на два одинаковых связанных маятника действуют равные, но противофазные внешние силы с частотой ω_1 , соответствующей синфазным колебаниям системы, то резонансного раскачивания колебаний в системе не произойдет. Наоборот, две синфазные и равные внешние силы не смогут возбудить противофазных колебаний на частоте ω_2 . Ортогональность внешней силы и собственного колебания можно использовать для того, чтобы избежать нежелательного резонанса на одной из нормальных частот.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 7.1 Двухконтурный параметрический усилитель

Использование колебательных систем с двумя степенями свободы существенно улучшает характеристики параметрических устройств. На практике используются двухконтурные параметрические усилители, генераторы и делители частоты. Недостатком одноконтурного параметрического усилителя в когерентном режиме является необходимость выполнения определенных частотных и фазовых соотношений между сигналом накачки и усиливаемым сигналом. При некогерентном режиме усиления фазовые соотношения теряют смысл и становятся принципиально неизбежными искажения формы усиливаемого сигнала. Это связано с тем, что в полосу пропускания контура усилителя попадают две частоты: частота сигнала ω_1 и разностная частота $\omega_n - \omega_1$, где ω_n — частота накачки. Колебания в контуре представляют собой биения этих двух близких частот. Если ввести дополнительный контур, настроенный на частоту $\omega_2 = \omega_n - \omega_1$, то при достаточной добротности контуров в первом из них будут происходить гармонические колебания с частотой ω_1 , а в дополнительном — гармонические колебания на частоте $\omega_n - \omega_1$. Такая система из двух контуров, связанных переменной во времени емкостью, представляет собой двухконтурный параметрический усилитель (рис. 7.1).

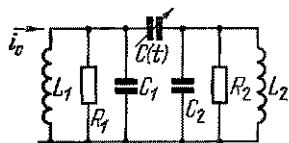


Рис. 7.1. Принципиальная схема двухконтурного параметрического усилителя.

В двухконтурном параметрическом усилителе фазовые соотношения между сигналом и накачкой не играют роли, так как частота и фаза колебаний во втором контуре автоматически устанавливаются такими, чтобы обеспечивалось максимальное усиление в системе. Автоматичность установления наиболее выгодных частоты и фазы дополнительного колебания служит важнейшим преимуществом двухконтурного параметрического усилителя.

Подобно одноконтурному параметрическому усилителю двухконтурный усилитель с частотой накачки ω_n , равной сумме частот ω_1 и ω_2 , является регенеративным, т. е. часть энергии

накачки преобразуется в колебательную энергию на частоте сигнала. При этом часть энергии генератора накачки поступает во второй контур.

Кроме параметрического усилителя с дополнительным контуром, настроенным на частоту $\omega_n - \omega_1$, можно создать усилитель с дополнительным контуром, настроенным на частоту $\omega_n + \omega_1$. Качественно возможность усиления в такой системе можно пояснить следующими рассуждениями. Если на переменную во времени емкость $C(t) = C_0(1 + m \cos \omega_n t)$ действует напряжение сигнала $u_c = u_0 \cos(\omega_1 t + \varphi)$, то ток через емкость равен

$$i = \frac{dq_C}{dt} = C_0 u_0 \frac{d}{dt} [(1 + m \cos \omega_n t) \cos(\omega_1 t + \varphi)] = \\ = -C_0 u_0 \{ \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{1}{2} m (\omega_n - \omega_1) \sin[(\omega_n - \omega_1)t + \varphi] + \\ + \frac{1}{2} m (\omega_n + \omega_1) \sin[(\omega_n + \omega_1)t + \varphi] \},$$

т. е. в спектре тока имеются компоненты с частотами ω_1 , $\omega_n + \omega_1$, $\omega_n - \omega_1$. Амплитуды токов всех компонент пропорциональны их частотам.

Таким образом, амплитуда колебаний тока в дополнительном контуре может превосходить ток в первом контуре. Такой усилитель не является регенеративным и, следовательно, не может самовозбудиться ни при каком напряжении накачки (глубине модуляции m реактивного параметра).

Принципиальная схема двухконтурного параметрического усилителя с генератором накачки и нелинейной емкостью изображена на рис. 7.2. Усилитель состоит из двух контуров (L_1, C_1, R_1') и (L_2, C_2, R_2) , связанных нелинейной емкостью C . В схему включен источник накачки с напряжением u_n и генератор сигнала, характеризуемый током i_c и внутренним сопротивлением R_1 . Полное активное сопротивление первого контура R_1 равно

$$R_1 = \frac{R_1' R_1}{R_1' + R_1}.$$

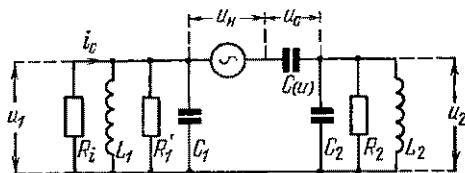


Рис. 7.2. Схема двухконтурного параметрического усилителя с генератором накачки и нелинейной емкостью.

Пусть частота усиливаемого сигнала равна ω_1 , а частота накачки ω_n . Для работы усилителя необходимо, чтобы его первый контур был настроен на частоту, близкую к частоте сигнала; второй контур настраивается на частоту, близкую к ω_2 и равную либо $\omega_n - \omega_1$, либо $\omega_n + \omega_1$. Режим работы параметрического усилителя в этих

двух случаях оказывается различным. Обычно в двухконтурных параметрических усилителях парциальные частоты контуров ν_1 и ν_2 далеки друг от друга, т. е. связанность системы мала. Поэтому собственные частоты системы близки к парциальным $\omega_1 \approx \nu_1$, $\omega_2 \approx \nu_2$. Коэффициенты распределения далеки от единицы.

При достаточно высокой добротности контуров сопротивления каждого контура для частот, далеких от его парциальной частоты, практически равны нулю (см. (3.1.7)). Таким образом, контур является активной нагрузкой лишь в небольшой области частот вблизи своей парциальной частоты. В рассматриваемой нами схеме в основном контуре активная мощность может выделяться только на частоте ω_1 , а в дополнительном — на одной из частот $\omega_2 = \omega_n \pm \omega_1$. Токи остальных комбинационных частот могут не приниматься во внимание. Таким образом, в изучаемой системе следует рассматривать лишь токи и напряжения с частотами ω_1 , ω_2 и ω_n . Для частот ω_1 и ω_2 запишем следующие уравнения колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1} \int u_1 dt + \frac{u_1}{R_1} + C_1 \frac{du_1}{dt} &= i_c - \frac{dq_C}{dt} \Big|_{\omega_1}, \\ \frac{1}{L_2} \int u_2 dt + \frac{u_2}{R_2} + C_2 \frac{du_2}{dt} &= \frac{dq_C}{dt} \Big|_{\omega_2}. \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

Здесь u_i — напряжения на первом и втором контурах, $q_C|_{\omega_i}$ — составляющая заряда на емкости C на частоте ω_i .

Пусть зависимость заряда q_C на нелинейной емкости от напряжения на ней имеет вид

$$q_C = C_0 u_C + \hat{\alpha} u_C^3, \quad (7.1.2)$$

где C_0 — постоянная составляющая емкости, а $\hat{\alpha}$ — коэффициент нелинейности. Напряжение u_C , очевидно, равно

$$u_C = u_1 + u_n - u_2, \quad (7.1.3)$$

где

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1), \quad u_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2), \quad u_n = A_n \cos \omega_n t.$$

Подставляя эти выражения в (7.1.2), получим для составляющих заряда на емкости C на частотах ω_1 и ω_2 соотношения

$$\begin{aligned} q_C|_{\omega_1} &= C_0 A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) - \hat{\alpha} A_2 A_n \cos(\omega_1 t \pm \psi_2), \\ q_C|_{\omega_2} &= -C_0 A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) + \hat{\alpha} A_1 A_n \cos(\omega_2 t \pm \psi_1). \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Здесь верхний знак соответствует случаю $\omega_2 = \omega_n + \omega_1$, а нижний $\omega_2 = \omega_n - \omega_1$.

Подставим полученные значения $q_c|_{\omega_i}$ в уравнения колебаний (7.1.1) и будем считать, что $i_c = I \cos(\omega_1 t + \varphi)$:

$$\left[\frac{1}{L_1 \omega_1} - (C_1 + C_0) \omega_1 \right] A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \frac{A_1}{R_1} \cos(\omega_1 t + \psi_1) = \\ = I \cos(\omega_1 t + \varphi) - \hat{\alpha} A_2 A_n \omega_1 \sin(\omega_1 t \mp \psi_2), \quad (7.1.5)$$

$$\left[\frac{1}{L_2 \omega_2} - (C_2 + C_0) \omega_2 \right] A_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) + \frac{A_2}{R_2} \cos(\omega_2 t + \psi_2) = \\ = -\hat{\alpha} A_1 A_n \omega_2 \sin(\omega_2 t \pm \psi_1). \quad (7.1.6)$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что первый контур настроен точно на частоту сигнала, а второй — точно на частоту ω_2 , т. е.

$$\nu_1 = 1/\sqrt{L_1(C_1 + C_0)} = \omega_1, \quad \nu_2 = 1/\sqrt{L_2(C_2 + C_0)} = \omega_2.$$

При таком рассмотрении мы, конечно, теряем информацию о ширине полосы усиления параметрического усилителя, однако все его энергетические характеристики сохраняются.

Производя простые тригонометрические преобразования, представим правую часть (7.1.5) в виде

$$I \cos(\varphi - \psi_1) \cos(\omega_1 t + \psi_1) - I \sin(\varphi - \psi_1) \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \\ + \hat{\alpha} A_2 A_n \omega_1 \sin(\psi_1 \mp \psi_2) \cos(\omega_1 t + \psi_1) - \\ - \hat{\alpha} A_2 A_n \omega_1 \cos(\psi_1 \mp \psi_2) \sin(\omega_1 t + \psi_1).$$

Тогда, приравнивая коэффициенты при $\cos(\omega_1 t + \psi_1)$ и $\sin(\omega_1 t + \psi_1)$ в правой и левой частях уравнения (7.1.5), получим

$$\frac{A_1}{R_1} = I \cos(\varphi - \psi_1) + \hat{\alpha} A_2 A_n \omega_1 \sin(\psi_1 \mp \psi_2), \quad (7.1.7)$$

$$0 = I \sin(\psi_1 - \varphi) - \hat{\alpha} A_2 A_n \omega_1 \cos(\psi_1 \mp \psi_2). \quad (7.1.8)$$

Аналогичным образом из (7.1.6) имеем

$$\frac{A_2}{R_2} = \hat{\alpha} A_1 A_n \omega_2 \sin(\psi_2 \mp \psi_1), \quad (7.1.9)$$

$$0 = \hat{\alpha} A_1 A_n \omega_2 \cos(\psi_2 \mp \psi_1). \quad (7.1.10)$$

Из соотношения (7.1.10) следует, что $\cos(\psi_2 \mp \psi_1) = 0$, поэтому $\sin(\psi_2 \mp \psi_1) = 1$ (минус единица противоречит соотношению 7.1.9). Далее из (7.1.8) следует, что $\sin(\psi_1 - \varphi) = 0$, $\cos(\psi_1 - \varphi) = 1$. Теперь легко найти амплитуды колебаний в каждом из контуров:

$$A_2 = \hat{\alpha} R_2 A_1 A_n \omega_2, \quad (7.1.11)$$

$$A_1 = \frac{I R_1}{1 \pm \hat{\alpha}^2 R_1 R_2 A_n^2 \omega_1 \omega_2}. \quad (7.1.12)$$

Полученные выражения показывают, что параметрические усилители с низкочастотной ($\omega_n = \omega_2 - \omega_1$) и с высокочастотной ($\omega_n = \omega_1 + \omega_2$) накачкой ведут себя существенно по-разному. Рассмотрим теперь отдельно каждый из этих типов усилителей.

Усилитель с низкочастотной накачкой. В случае низкочастотной накачки амплитуды колебаний в контурах следующим образом зависят от амплитуды накачки:

$$A_1 = \frac{IR_1}{1 + \hat{\alpha}^2 R_1 R_2 A_n^2 \omega_1 \omega_2}, \quad A_2 = \frac{I \hat{\alpha} R_1 R_2 A_n \omega_2}{1 + \hat{\alpha}^2 R_1 R_2 A_n^2 \omega_1 \omega_2}. \quad (7.1.13)$$

Из (7.1.13) видно, что амплитуда колебаний в первом контуре монотонно уменьшается по мере увеличения амплитуды накачки. Таким образом, в этом случае усиление сигнала в первом контуре не происходит. Однако при определенных условиях в системе возможно усиление, если использовать колебания в дополнительном контуре, амплитуда которых пропорциональна амплитуде входного сигнала. Такой усилитель является нерегенеративным параметрическим усилителем с преобразованием частоты вверх. Определим коэффициент его усиления по мощности. Под коэффициентом усиления по мощности будем понимать отношение мощности на выходе усилителя к мощности входного сигнала, выделяемой на согласованной нагрузке. Поскольку генератор входного сигнала дает ток с амплитудой I и имеет внутреннее сопротивление R_i , то на согласованную нагрузку он отдает мощность

$$P_c = I^2 R_i / 8. \quad (7.1.14)$$

Мощность на выходе усилителя (во втором контуре) равна

$$P_{\text{вых}} = \frac{A_2^2}{2R_2} = \frac{\hat{\alpha}^2 I^2 R_1^2 R_2 A_n^2 \omega_2^2}{2(1 + \hat{\alpha}^2 R_1 R_2 A_n^2 \omega_1 \omega_2)^2}. \quad (7.1.15)$$

Максимального значения $P_{\text{вых, макс}}$ эта величина достигает при оптимальной амплитуде напряжения накачки $A_{n, \text{опт}}^2 = 1/\hat{\alpha}^2 R_1 R_2 \omega_1 \omega_2$. В этом случае $P_{\text{вых, макс}} = I^2 R_1 \omega_2 / 8 \omega_1$. Поэтому коэффициент усиления по мощности усилителя запишется в виде $P_{\text{вых, макс}}/P_c = R_1 \omega_2 / R_i \omega_1$. Если потери первого контура достаточно малы и $R_i \ll R_1$, то $R_1 \approx R_i$ и максимальный коэффициент усиления нерегенеративного двухконтурного параметрического усилителя равен отношению выходной частоты ω_2 к частоте входного сигнала ω_1 :

$$\frac{P_{\text{вых, макс}}}{P_c} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (7.1.16)$$

Поясним физический смысл полученного соотношения. Поскольку мощность входного сигнала на частоте ω_1 равна $P_{\text{вх}}$, то полное число квантов энергии N , попадающих на вход усилителя, равно $N = P_{\text{вх}}/\hbar\omega_1$. Появление кванта частоты ω_2 происходит в результате сложения входного кванта и кванта накачки $\hbar\omega_2 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_n$.

Таким образом, число квантов на выходе системы $N_{\text{вых}}$ не может превышать числа квантов на входе. В оптимальном случае $N_{\text{вх}} = N_{\text{вых}}$, т. е. $P_{\text{вых}}/\omega_2 = P_{\text{вх}}/\omega_1$. Отсюда сразу получается соотношение (7.1.16).

Нерегенеративный усилитель — преобразователь частоты — обладает стабильным усилением и низким уровнем шумов. Это связано с тем, что усиление по мощности происходит в данном случае без изменения числа квантов, а лишь в результате изменения их частоты.

Усилитель с высокочастотной накачкой. Двухконтурный параметрический усилитель, для которого справедливо соотношение $\omega_n = \omega_1 + \omega_2$, является регенеративным усилителем, т. е. системой, в которой под действием напряжения накачки в оба контура вносится отрицательное сопротивление, зависящее от напряжения накачки. Это напряжение определяет глубину модуляции параметра. Как следует из соотношений (7.1.11) и (7.1.12), по мере увеличения A_n амплитуда колебаний в первом и втором контурах увеличивается. При $A_{n \text{ кр}}^2 = 1/\alpha^2 R_1 R_2 \omega_1 \omega_2$ амплитуда колебаний в контурах нарастает до бесконечности, что свидетельствует о равенстве вносимых отрицательных сопротивлений активным потерям в контурах. При этом значении амплитуды накачки двухконтурный параметрический усилитель с высокочастотной накачкой самовозбуждается и превращается в параметрический генератор.

При $A_n < A_{n \text{ кр}}$ амплитуды колебаний в первом и втором контурах пропорциональны амплитуде входного сигнала I , поэтому система может служить усилителем при отборе энергии как от первого, так и от второго контура.

Мощность колебаний на выходе первого контура равна

$$P_{\text{вых1}} = \frac{A_1^2}{2R_1} = \frac{I^2 R_1}{2(1 - \alpha^2 R_1 R_2 A_n^2 \omega_1 \omega_2)^2}; \quad (7.1.17)$$

мощность колебаний на выходе второго контура

$$P_{\text{вых2}} = \frac{A_2^2}{2R_2} = \frac{I^2 R_1^2 R_2 A_n^2 \omega_1^2}{2(1 - \alpha^2 R_1 R_2 A_n^2 \omega_1 \omega_2)^2}. \quad (7.1.18)$$

Если выходной сигнал усилителя снимается с первого контура, то система усиливает сигнал без изменения его частоты. При отборе энергии на выходе второго контура система одновременно с усилением производит преобразование частоты. В обоих случаях выходная мощность может быть сколь угодно большой, т. е. коэффициент усиления такого параметрического усилителя, как и всякого регенеративного усилителя, не ограничен. Конечно,

на практике величина коэффициента усиления регенеративного параметрического усилителя ограничена нестабильностью параметров системы. При A_n , очень близком к $A_{n\text{кр}}$, система становится неустойчивой и небольшие уходы параметров приводят к ее самовозбуждению.

Усиление в таком усилителе происходит в результате распада кванта накачки на два кванта $\hbar\omega_n = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$. Этот распад индуцируется входным сигналом, кванты с частотой ω_1 поступают во входной контур и регенерируют его. Кванты с частотой ω_2 возбуждают колебания во втором контуре. Так как мощность накачки считается неограниченной, то количество квантов, поступающих в контуры, может расти вплоть до достижения состояния самовозбуждения системы.

Недостатком рассматриваемого усилителя, как и любого регенеративного усилителя, работающего вблизи точки самовозбуждения системы, является его узкополосность. Действительно, внесение в контур отрицательного сопротивления, компенсирующего потери, приводит к увеличению добротности контура, что уменьшает ширину полосы усиливаемых частот.

Важной характеристикой усилителя являются пределы линейности его усиления, т. е. пределы изменения I , внутри которых выходной сигнал пропорционален входному. В проведенном нами рассмотрении выходной сигнал всегда был пропорционален входному (см. (7.1.12), (7.1.15), (7.1.17)). Это связано с видом характеристики нелинейного элемента (7.1.2). При больших амплитудах входного сигнала необходимо учитывать следующие члены разложения q_c по u_c , что и приводит к нелинейной зависимости выходного сигнала от входного. Кроме того, мы считали, что генератор накачки представляет собой источник с нулевым внутренним сопротивлением, т. е. генератор неограниченной мощности. Это позволяло перекачивать любую энергию в контуры с частотами ω_1 и ω_2 . При использовании реального генератора накачки линейность усиления нарушается, когда мощности колебаний на частотах ω_1 и ω_2 становятся сравнимыми с мощностью генератора накачки.

Основное достоинство параметрического усилителя заключается в низком уровне шумов. Малая величина шумов такого усилителя обусловлена тем, что нелинейный элемент усилителя реактивен. У ламповых, транзисторных и иных усилителей на нелинейном активном элементе основную часть шумов вносит активный нелинейный элемент. У параметрических же усилителей этот источник шума практически отсутствует. При этом наиболее слабы шумы нерегенеративных усилителей, так как их усиление связано только с преобразованием частоты и не сопровождается внесением отрицательного сопротивления в какие-либо контуры.

§ 7.2. Параметрический двухконтурный генератор с некрatными частотами

Регенеративный двухконтурный параметрический усилитель при достаточной амплитуде накачки самовозбуждается и превращается в параметрический генератор. Принципиальная схема такого генератора дана на рис. 7.3. Для работы генератора необходимо, чтобы сумма гармонических частот контуров была близка к частоте накачки. В этом случае в системе возбуждаются колебания на частотах $\omega_1 \approx \nu_1$ и $\omega_2 \approx \nu_2$, причем

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_n. \quad (7.2.1)$$

Аналогично тому, как делалось в предыдущем параграфе при исследовании параметрического усилителя (см. (7.1.1)), запишем уравнения колебаний параметрического генератора на частотах ω_1 и ω_2

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1} u_1 + \frac{\dot{u}_1}{R_1} + C_1 \ddot{u}_1 &= -\dot{q}c \Big|_{\omega_1}, \\ \frac{1}{L_2} u_2 + \frac{\dot{u}_2}{R_2} + C_2 \ddot{u}_2 &= \dot{q}c \Big|_{\omega_2}. \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Связь заряда с напряжением на нелинейной емкости выберем в виде

$$q c = C_0 u c + \hat{\alpha} u^2 c + \beta u^3 c. \quad (7.2.3)$$

Второй член в правой части (7.2.3) обеспечивает параметрическое вложение энергии, а третий — нелинейность системы, необходимую для ограничения амплитуды колебаний. Напряжение на нелинейной емкости равно

$$u c = u_1 + u_n - u_2,$$

где $u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1)$, $u_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$,

$$u_n = A_n \cos \omega_n t.$$

Считая амплитуды A_1 , A_2 и фазы ψ_1 , ψ_2 медленно меняющимися величинами, получим следующие укороченные уравнения (см. § 2.5):

$$\begin{aligned} \text{а) } \dot{A}_1 &= -\delta_1 A_1 + \alpha_1 A_2 A_n \sin \varphi, \\ \text{б) } \dot{\psi}_1 &= -\Delta_{1\beta} + \alpha_1 \frac{A_2 A_n}{A_1} \cos \varphi, \\ \text{в) } \dot{A}_2 &= -\delta_2 A_2 + \alpha_2 A_1 A_n \sin \varphi, \\ \text{г) } \dot{\psi}_2 &= -\Delta_{2\beta} + \alpha_2 \frac{A_1 A_n}{A_2} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

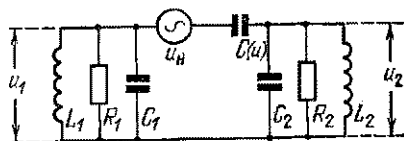


Рис. 7.3. Принципиальная схема двухконтурного параметрического генератора.

где $\delta_i = 1/2R_i(C_i + C_0)$ — коэффициент затухания колебаний в i -м контуре,

$$\alpha_i = \hat{\alpha}\omega_i/2(C_i + C_0); \quad \Delta_{1\beta} = \omega_1 - \nu_1 - \beta_1(2A_n^2 + 2A_1^2 + A_1^2);$$

$$\Delta_{2\beta} = \omega_2 - \nu_2 - \beta_2(2A_n^2 + 2A_1^2 + A_2^2);$$

$$\beta_i = 3\beta\omega_i/4(C_i + C_0); \quad \varphi = \psi_1 + \psi_2.$$

Величины $\nu_1 + \beta_1(2A_n^2 + 2A_1^2 + A_1^2)$ и $\nu_2 + \beta_2(2A_n^2 + 2A_1^2 + A_2^2)$ можно рассматривать как парциальные частоты, смещенные за счет нелинейной емкости.

В случае стационарного режима работы генератора ($\dot{A}_i = \dot{\psi}_i = 0$) получим из уравнений (7.2.4, а) и (7.2.4, в) отношение амплитуд в контурах

$$A_1/A_2 = \sqrt{\alpha_1\delta_2/\alpha_2\delta_1} = \sqrt{\omega_1 R_1/\omega_2 R_2}. \quad (7.2.5)$$

Из уравнений (7.2.4) можно найти $\text{ctg } \varphi$ и соотношение между расстройками $\Delta_{1\beta}$ и $\Delta_{2\beta}$

$$\text{ctg } \varphi = \Delta_{1\beta}/\delta_1 = \Delta_{2\beta}/\delta_2. \quad (7.2.6)$$

Таким образом, фаза φ определяется параметрами системы, фазы же ψ_1 и ψ_2 в отдельности произвольны, но сумма их фиксирована, т. е. $\psi_1 + \psi_2 = \varphi$.

Воспользовавшись соотношениями (7.2.5) и (7.2.6) и равенством $\omega_n = \omega_1 + \omega_2$, находим для частот генерации ω_1 и ω_2 :

$$\omega_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \omega_n + \frac{\nu_1\delta_2 - \nu_2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} + \frac{\delta_2\beta_1 - \delta_1\beta_2}{\delta_1 + \delta_2} \left[2A_n^2 + A_1^2 \left(1 + \frac{\beta_2\delta_1}{\beta_1\delta_2} \right) \right], \quad (7.2.7)$$

$$\omega_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \omega_n + \frac{\nu_2\delta_1 - \delta_2\nu_1}{\delta_1 + \delta_2} - \frac{\delta_2\beta_1 - \delta_1\beta_2}{\delta_1 + \delta_2} \left[2A_n^2 + A_1^2 \left(1 + \frac{\beta_2\delta_1}{\beta_1\delta_2} \right) \right].$$

Эти выражения показывают, что частоты генерации ω_1 и ω_2 остаются постоянными при медленных коррелированных флуктуациях $\Delta\nu_1$ и $\Delta\nu_2$ парциальных частот ν_1 и ν_2 , когда выполняется условие $\delta_1\Delta\nu_2 - \delta_2\Delta\nu_1 = 0$. Это позволяет получать стабильные частоты генерации подбором параметров колебательных контуров. Другая отличительная особенность двухконтурного генератора — его способность генерировать колебания со стабильностью частоты большей, чем у частоты накачки. Из (7.2.7) видно, что при $\delta_1 \ll \ll \delta_2$ нестабильность частоты ω_1 значительно меньше нестабильности ω_n , так как $\Delta\omega_1 \approx \delta_1 \Delta\omega_n/\delta_2$, а нестабильность частоты ω_2 примерно равна $\Delta\omega_n$.

Частоты генерации при определенном соотношении параметров системы не зависят от амплитуды накачки и амплитуд генерации. Из (7.2.7) следует условие их независимости вида

$$\delta_1 \beta_2 - \delta_2 \beta_1 = 0. \quad (7.2.8)$$

Найдем стационарные амплитуды генерации. Для этого исключим фазу φ из уравнений (7.2.4, а) и (7.2.4, б)

$$(\delta_1^2 + \Delta_1^2) A_1^2 = \alpha_1^2 A_2^2 A_n^2.$$

Учитывая соотношение (7.2.5) и раскрывая выражение $\Delta_{1в}$, получим отсюда амплитуду стационарного колебания A_1^2 :

$$A_1^2 = \frac{1}{\beta_1 (1 + 2\alpha_2 \delta_1 / \alpha_1 \delta_2)} \left[\Delta_1 - 2\beta_1 A_n^2 \pm \delta_1 \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\delta_1 \delta_2} A_n^2 - 1} \right], \quad (7.2.9)$$

где $\Delta_1 = \omega_1 - \nu_1$.

Аналогичный вид имеет выражение для амплитуды A_2^2 . На рис. 7.4 приведена зависимость A_1^2 от расстройки Δ_1 для $\beta > 0$.

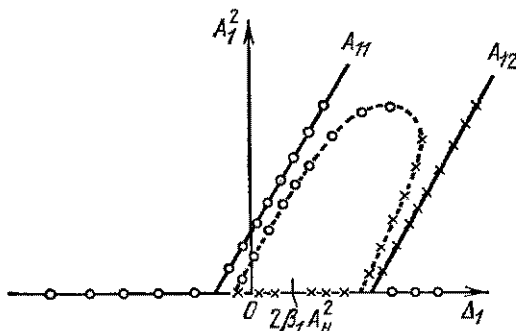


Рис. 7.4. Зависимость амплитуды двухконтурного параметрического генератора от расстройки.

Крестиками показаны неустойчивые состояния, кружочками — устойчивые.

Она представляет собой две прямые, наклоненные вправо. При $\beta < 0$ амплитудно-частотные характеристики наклонены влево.

Для существования колебаний необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$A_n^2 > \delta_1 \delta_2 / \alpha_1 \alpha_2. \quad (7.2.10)$$

Условие (7.2.10) можно рассматривать как условие параметрического возбуждения системы. Однако даже при его выполнении стационарная амплитуда существует лишь при расстройках

$$\Delta_1 > 2\beta_1 A_n^2 - \delta_1 \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\delta_1 \delta_2} A_n^2 - 1}. \quad (7.2.11)$$

В полосе расстройк

$$2\beta_1 A_n^2 + \delta_1 \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\delta_1 \delta_2} A_n^2 - 1} \geq \Delta_1 \geq 2\beta_1 A_n^2 - \delta_1 \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\delta_1 \delta_2} A_n^2 - 1} \quad (7.2.12)$$

существует одна стационарная амплитуда A_{11} . При

$$\Delta_1 > 2\beta_1 A_n^2 + \delta_1 \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\delta_1 \delta_2} A_n^2 - 1} \quad (7.2.13)$$

имеем две стационарные амплитуды A_{11} и A_{12} .

Можно показать, что амплитуда A_{11} всегда устойчива, а амплитуда A_{12} неустойчива. Внутри полосы (7.2.12) положение равнове-

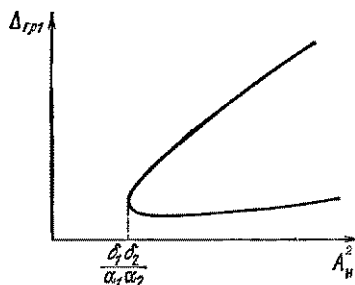


Рис. 7.5. Зависимость границы области возбуждения двухконтурного параметрического генератора от амплитуды накачки.

сия системы неустойчиво и происходит мягкое возбуждение колебаний. При расстройках, удовлетворяющих условию (7.2.13), имеет место жесткое возбуждение генератора. Колебательные процессы в двухконтурном параметрическом генераторе имеют много общего с процессами, происходящими в одноконтурном параметрическом генераторе и описанными в § 4.5. Увеличение амплитуды накачки смещает положение центра области возбуждения и расширяет ее границы. Зависимость границы области возбуждения системы $\Delta_{гр1}$ от A_n^2 приведена на рис. 7.5.

На рис. 7.6 изображены зависимости частоты ω_1 и амплитуды A_1^2 от амплитуды накачки для мягкого и жесткого режимов.

Как в мягком, так и в жестком режимах при выполнении условия (7.2.8) частота колебаний не зависит от амплитуды накачки. При невыполнении (7.2.8) появляется зависимость частоты генерации от амплитуды накачки. Область существования параметрической генерации ограничена как со стороны малых амплитуд накачки («порог»), так и со стороны больших амплитуд A_n («потолок»). Существование «порога» обусловлено необходимостью для генерации полной компенсации потерь в системе за счет параметрического вложения энергии. Наличие «потолка» связано с расстройкой парциальных частот при больших амплитудах накачки из-за нелинейной реактивности в системе. При жестком режиме возбуждения системы колебания возникают при наличии начального толчка, достаточного для перехода через нижнюю неустойчивую ветвь амплитудной характеристики (см. рис. 7.4). Из рис. 7.6 видно, что в жестком режиме параметрические коле-

бания возбуждаются при амплитуде накачки $A_{\text{возб}}$. Если уменьшать A_n , то «срыв» колебаний происходит при $A_{\text{срыва}} < A_{\text{возб}}$.

В рассмотренном нами случае ограничение амплитуды связано с наличием в системе нелинейного конденсатора. Это так называемый расстроечный механизм ограничения. Зависимость средней емкости конденсатора от амплитуды напряжения на нем приводит к расстройке между генерируемыми и парциальными частотами системы. В результате ухудшаются условия передачи энергии от генератора накачки к возбужденным колебаниям.

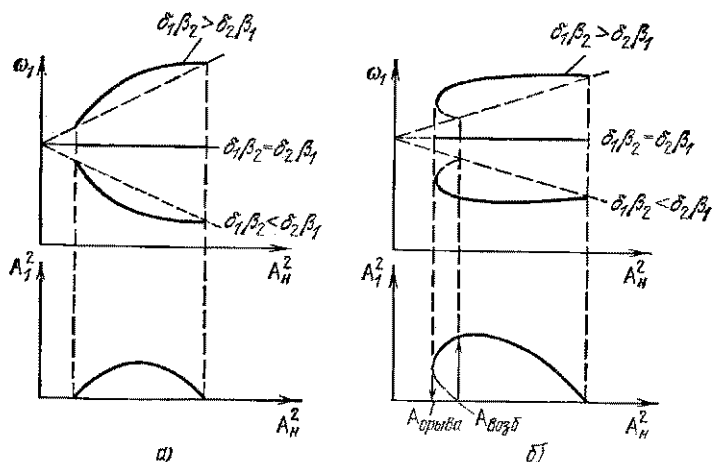


Рис. 7.6. Зависимость частоты и амплитуды колебаний в двухконтурном параметрическом генераторе от амплитуды накачки для мягкого (а) и для жесткого режима (б).

В параметрическом генераторе с цепью автосмещения ограничение амплитуды возникает из-за смещения рабочей точки, которое также приводит к расстройке системы. Однако в этом случае наклон амплитудных кривых противоположен наклону при расстроечном механизме ограничения.

Если в системе имеется элемент с нелинейной вольт-амперной характеристикой, то ограничение амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний происходит за счет нелинейной диссипации энергии (диссипативный механизм ограничения). На практике чаще всего наблюдается одновременное действие нескольких механизмов ограничения амплитуды.

Суммарное действие расстроечного и диссипативного механизмов приводит к зависимости амплитуды от расстройки, изображенной пунктирной кривой на рис. 7.4. Более подробно о механизмах ограничения амплитуды см. в §§ 4.5, 4.6.

Еще одной причиной, ограничивающей амплитуду параметрических колебаний, является обратная реакция на накачку. Энергия возбужденных колебаний возникает за счет энергии источника накачки. Если мощность параметрически возбужденных колебаний становится сравнимой с мощностью генератора накачки, то амплитуда колебаний ограничивается из-за уменьшения мощности накачки.

§ 7.3. Параметрическое деление частоты

В предыдущем параграфе был рассмотрен двухконтурный параметрический генератор, когда в первом контуре имеются колебания только частоты ω_1 , а во втором — ω_2 . Под действием напряжений с этими частотами через нелинейную емкость, в общем случае, протекает ток, который содержит комбинационные частоты вида: $m\omega_1 + n\omega_2$, где m и n равны 0, ± 1 , ± 2 , ... Максимальные значения $|m|$ и $|n|$ определяются видом нелинейной зависимости q_C от u_C . Если ни одна из этих частот не попа-

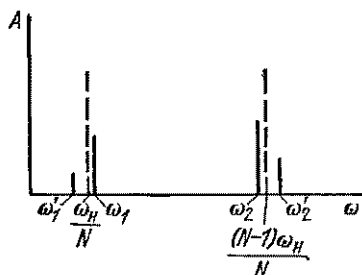


Рис. 7.7. Спектр колебаний в двухконтурном генераторе вблизи режима автозахватывания.

дает в полосы пропускания контуров, то мы имеем обычный параметрический генератор, описанный в § 7.2. Однако если какая-либо комбинационная частота попадет в полосу пропускания одного из контуров, то в этом контуре возникнут колебания двух близких частот, т. е. биения. Возникновение биений в одном из контуров генератора всегда сопровождается биениями в другом контуре

Пусть, например, комбинационная частота $\omega'_1 = m\omega_1 + n\omega_2$ примерно равна ω_1 . Легко показать, что комбинационная частота $\omega'_2 = (1 - m)\omega_1 + (1 - n)\omega_2$ близка к частоте ω_2 . Из-за наличия нелинейной емкости колебания комбинационных частот влияют на частоты генерации ω_1 и ω_2 . Эти частоты «подтягиваются» к комбинационным и при определенных условиях может произойти автозахватывание частот. Термин «автозахватывание» (автосинхронизация) подчеркивает то обстоятельство, что захват происходит не под действием внешней силы, а в результате действия колебания с комбинационной частотой, возникшего в самой системе. Наиболее легко автозахватывание происходит, когда $\omega_2 \approx \approx (N - 1)\omega_1$, т. е. частота ω_2 почти кратна ω_1 . Такая система в синхронном режиме является делителем частоты накачки в N раз. При этом частота ω_1 оказывается точно в N раз ниже частоты накачки, а частота ω_2 отличается от ω_H в $(N - 1)/N$ раз. В автосинхронном режиме колебания с частотами ω_1 , ω_2 и ω_H когерентны.

На рис. 7.7 приведен спектр колебаний двухконтурного генератора для случая, когда ω'_1 и ω'_2 попадают в полосы пропускания контуров (комбинационные тона, расположенные вдали от резонанса, на рисунке не изображены). Автосинхронный режим наступает, когда частота ω'_1 захватывает ω_1 , а частота ω'_2 захватывает ω_2 . Устанавливающиеся в автосинхронном режиме частоты ω_n/N и $\omega_n(N-1)/N$ показаны на рис. 7.7 пунктиром.

Рассмотрим более подробно работу делителя частоты в четыре раза. Будем считать, что связь заряда на нелинейной емкости с напряжением имеет вид (7.2.3). Напряжение на емкости в режиме деления (автосинхронный режим) равно

$$u_c = A_1 \cos(\omega t + \psi_1) + A_n \cos(4\omega t + \psi_n) - A_2 \cos(3\omega t + \psi_2).$$

Укороченные уравнения для амплитуд A_1 , A_2 и фаз ψ_1 , ψ_2 в этих предположениях примут вид

$$\dot{A}_1 = -\delta_1 A_1 + \alpha_1 A_2 A_n \sin \varphi + \beta_1 A_1^3 A_2 \sin \Phi,$$

$$\dot{\psi}_1 = -\Delta_1 + \alpha_1 \frac{A_n A_2}{A_1} \cos \varphi + \beta_1 A_1 A_2 \cos \Phi + \beta_1 (2A_n^2 + 2A_2^2 + A_1^2), \quad (7.3.1)$$

$$\dot{A}_2 = -\delta_2 A_2 + \alpha_2 A_1 A_n \sin \varphi - \beta_2 A_1^3 \sin \Phi,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\Delta_2 + \alpha_2 \frac{A_1 A_n}{A_2} \cos \varphi + \beta_2 \frac{A_1^3}{A_2} \cos \Phi + \beta_2 (2A_n^2 + 2A_1^2 + A_2^2),$$

где

$$\delta_i = 1/2 R_i (C_i + C_0), \quad \alpha_1 = \hat{\alpha} \omega / 2 (C_1 + C_0), \quad \alpha_2 = 3 \hat{\alpha} \omega / 2 (C_2 + C_0),$$

$$\beta_1 = 3 \beta \omega / 4 (C_1 + C_0), \quad \beta_2 = 9 \beta \omega / 4 (C_2 + C_0), \quad \Delta_1 = \omega - \nu_1,$$

$$\Delta_2 = 3\omega - \nu_2, \quad \varphi = \psi_1 + \psi_2, \quad \Phi = 3\psi_1 - \psi_2.$$

Полученная система укороченных уравнений достаточно сложна. Для ее решения воспользуемся методом вторичного упрощения укороченных уравнений, предложенным Р. В. Хохловым *). Для этого проведем сравнение относительной величины отдельных членов системы уравнений (7.3.1). При достаточно малых напряжениях u_c член βu_c^3 в выражении (7.2.3) много меньше члена $\hat{\alpha} u_c^2$. Поэтому можно ввести малый параметр μ , равный $\beta u_c / \hat{\alpha} \ll 1$.

В этом случае члены уравнений (7.3.1), содержащие коэффициенты β_i , малы по сравнению с остальными членами. Будем искать решение системы уравнений (7.3.1) с помощью разложения в ряд по малому параметру μ :

$$A_1 = A_{10} + \mu a_1 + \dots, \quad A_2 = A_{20} + \mu a_2 + \dots, \quad \varphi = \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \dots$$

*) Хохлов Р. В. — ДАН СССР, 1954, 97, 411.

В нулевом приближении по μ система уравнений (7.3.1) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{A}_{10} &= -\delta_1 A_{10} + \alpha_1 A_{20} A_n \sin \varphi_0, \\ \dot{A}_{20} &= -\delta_2 A_{20} + \alpha_2 A_{10} A_n \sin \varphi_0, \\ \dot{\varphi}_0 &= -\Delta_1 - \Delta_2 + (\alpha_1 A_{20}/A_{10} + \alpha_2 A_{10}/A_{20}) A_n \cos \varphi_0.\end{aligned}\quad (7.3.2)$$

Из этих уравнений определяется отношение стационарных амплитуд напряжений в контурах A_{10} , A_{20} и стационарная фаза φ_0 :

$$A_{10}/A_{20} = \sqrt{\alpha_1 \delta_2 / \alpha_2 \delta_1}, \quad \sin \varphi_0 = \sqrt{\delta_1 \delta_2 / \alpha_1 \alpha_2 A_n^2}.$$

Для получения стационарных амплитуд колебаний необходимо учесть какой-либо из рассмотренных в предыдущем параграфе механизмов ограничения. Пусть в данном случае действует диссипативный механизм, т. е. затухание системы зависит от амплитуды колебания. Если предположить, что затухание в первом контуре δ_1 зависит от амплитуды колебаний в нем A_{10} , то из уравнений (7.3.2) получим следующее соотношение:

$$\delta_1(A_{10}) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\delta_2} A_n^2 - \frac{\delta_1(A_{10}) \Delta^2}{[\delta_1(A_{10}) + \delta_2]^2}, \quad (7.3.3)$$

где $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$.

При заданной амплитуде накачки соотношение (7.3.3) представляет собой резонансную зависимость A_{10} от расстройки Δ . Так же как и для системы с одной степенью свободы, в случае диссипативного механизма ограничения резонансная кривая симметрична относительно расстройки $\Delta = 0$.

Рассмотрим теперь решение системы (7.3.1) в первом приближении (с точностью до членов порядка μ).

Укороченные уравнения в этом приближении имеют вид

$$\mu \dot{a}_1 = -\mu \left(\delta_1 + \frac{d\delta_1}{dA_{10}} A_{10} \right) a_1 + \mu \alpha_1 A_n (a_2 \sin \varphi_0 + A_{20} \varphi_1 \cos \varphi_0) + \beta_1 A_{10}^3 A_{20} \sin \Phi, \quad (7.3.4)$$

$$\mu \dot{a}_2 = -\mu \delta_2 a_2 + \mu \alpha_2 A_n (a_1 \sin \varphi_0 + A_{10} \varphi_1 \cos \varphi_0) - \beta_2 A_{10}^3 \sin \Phi,$$

$$\begin{aligned}\mu \dot{\varphi}_1 &= \mu A_n \left(\alpha_1 \frac{a_2 A_{10} - a_1 A_{20}}{A_{10}^2} \cos \varphi_0 - \alpha_1 \frac{A_{20}}{A_{10}} \varphi_1 \sin \varphi_0 \right) + \\ &+ \left(\beta_1 A_{20} + \beta_2 \frac{A_{10}^2}{A_{20}} \right) A_{10} \cos \Phi + \beta_1 (2A_n^2 + 2A_{20}^2 + A_{10}^2) + \\ &+ \beta_2 (2A_n^2 + 2A_{10}^2 + A_{20}^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= \frac{3\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \Delta - \mu \alpha_1 \left(3\alpha_1 \frac{A_{20}}{A_{10}^2} + \frac{\alpha_2}{A_{20}} \right) A_n \cos \varphi_0 + \\ &+ \mu \alpha_2 \left(\frac{3\alpha_1}{A_{10}} + \alpha_2 \frac{A_{10}}{A_{20}^2} \right) A_n \cos \varphi_0 - \mu \varphi_1 \left(3\alpha_1 \frac{A_{20}}{A_{10}} - \alpha_2 \frac{A_{10}}{A_{20}} \right) A_n \sin \varphi_0 + \\ &+ 3\beta_1 (2A_n^2 + 2A_{20}^2 + A_{10}^2) - \beta_2 (2A_n^2 + 2A_{10}^2 + A_{20}^2) + \\ &+ \left(3\beta_1 A_{20} - \beta_2 \frac{A_{10}^2}{A_{20}} \right) A_{10} \cos \Phi.\end{aligned}$$

В стационарном режиме деления частоты амплитуды должны быть постоянными, а фазы ψ_1 и ψ_2 жестко связаны между собой. Поэтому левые части уравнений (7.3.4) в стационарном режиме деления частоты равны нулю. Из первых трех уравнений этой системы можно найти поправки к амплитудам и фазе a_1 , a_2 и φ_1 . Ширина полосы деления частоты $\Delta_{гр}$ определяется последним уравнением системы (7.3.4). Поскольку все члены в правой части этого уравнения, кроме первого члена, имеют порядок малости μ , то при $\Phi = 0$ первый член также должен быть порядка μ . Это возможно в двух случаях, а именно, когда мала ширина полосы деления $\Delta_{гр}/(\delta_1 + \delta_2) \sim \mu$ или когда мала величина $(3\delta_1 - \delta_2)/(\delta_1 + \delta_2) \sim \mu$. Последнее соотношение означает близость добротностей первого и второго контуров делителя частоты, так как $Q_1 = \omega/\delta_1$, а $Q_2 = 3\omega/\delta_2$. Если $3\delta_1 \approx \delta_2$, то $Q_1 \approx Q_2$. Таким образом, для получения большой полосы деления необходимо использовать контуры с близкими добротностями.

Следует отметить, что вследствие зависимости $\delta_1(A_1)$ приближенное равенство $3\delta_1 \approx \delta_2$ может выполняться лишь при определенной амплитуде A_1 . В этом случае полоса деления ограничена областью, в которой A_1 меняется мало.

Полученные выше условия широкополосного деления частоты накачки в четыре раза справедливы и в общем случае деления частоты в N раз. Для такого деления необходимо выполнение следующих условий:

- 1) парциальные частоты контуров должны быть равны соответственно $\nu_1 = \omega_n/N$, $\nu_2 = \omega_n(N-1)/N$;
- 2) добротности контуров должны быть близки друг к другу;
- 3) нелинейная зависимость заряда q_c от u_c должна содержать член u_c^{N-1} .

Параметрические делители частоты широко применяются на практике в связи с их большой широкополосностью и высокой кратностью преобразования частоты.

§ 7.4. Общее рассмотрение автоколебательной системы с дополнительным контуром

Наиболее распространенными примерами автоколебательных систем с двумя степенями свободы являются генератор, нагруженный дополнительным контуром (рис. 7.8), и два связанных генератора. В генераторе, нагруженном дополнительным контуром, при слабой связанности парциальных систем может возбудиться только одна частота, близкая к парциальной частоте основного контура генератора. Вблизи равенства парциальных частот существует область расстройек, для которых условия самовозбуждения выполнены одновременно для колебаний двух частот, близких к собственной частоте системы. Эта область называется *областью затя-*

живания частоты. В области затягивания устанавливаются колебания с одной из двух допустимых частот, причем реализующаяся частота зависит от направления изменения парциальной частоты.

Рассмотрим работу генератора, индуктивно связанного с дополнительным контуром L_2C_2 (рис. 7.8). Уравнения для токов в первом и втором контурах имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 \dot{i}_1 + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + M_1 \dot{i}_2 &= M \dot{i}_{\text{ст}}, \\ L_2 \dot{i}_2 + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + M_1 \dot{i}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Обозначим через u_1 напряжение на конденсаторе первого контура, а через u_2 — напряжение на конденсаторе второго контура:

$$u_1 = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt, \quad u_2 = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt.$$

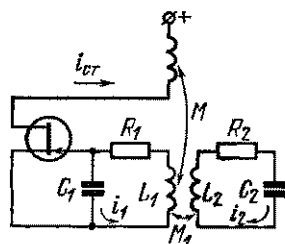
Кроме того, введем обозначения:

$$R_1/L_1 = 2\delta_1, \quad R_2/L_2 = 2\delta_2,$$

$$1/L_1 C_1 = \nu_1^2, \quad 1/L_2 C_2 = \nu_2^2,$$

$$\alpha_1 = M_1 C_2 / L_1 C_1, \quad \alpha_2 = M_1 C_1 / L_2 C_2.$$

Рис. 7.8. Генератор, нагруженный дополнительным контуром.



Будем считать, что генератор работает в мягком режиме и характеристику полевого транзистора можно аппроксимировать полиномом третьей степени

$$i_{\text{ст}} = S_0 u_1 - \frac{1}{3} S_2 u_1^3. \quad (7.4.2)$$

Вводя все эти обозначения, получим уравнения колебаний напряжений в контурах в виде

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 2\delta_1 \dot{u}_1 + \nu_1^2 u_1 + \alpha_1 \ddot{u}_2 &= \frac{M}{L_1 C_1} (S_0 - S_2 u_1^2) \dot{u}_1, \\ \ddot{u}_2 + 2\delta_2 \dot{u}_2 + \nu_2^2 u_2 + \alpha_2 \ddot{u}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Систему уравнений (7.4.3) будем решать квазилинейным методом. Для этого введем зависящую от амплитуды колебаний среднюю крутизну $\bar{S}$ (см. § 5.4). Ее введение позволяет перейти от нелинейных уравнений (7.4.3) к следующим квазилинейным уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 2\delta_1 \dot{u}_1 + \nu_1^2 u_1 + \alpha_1 \ddot{u}_2 &= M \bar{S} \nu_1^2 \dot{u}_1, \\ \ddot{u}_2 + 2\delta_2 \dot{u}_2 + \nu_2^2 u_2 + \alpha_2 \ddot{u}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$u_1 = A \cos \omega t, \quad u_2 = B \cos (\omega t + \varphi). \quad (7.4.5)$$

Подставляя его в (7.4.4) и учитывая, что оно должно быть справедливо для любого момента времени t , получим следующую систему уравнений, связывающих A , B , φ и ω :

$$\begin{aligned} (v_1^2 - \omega^2) A - \alpha_1 \omega^2 B \cos \varphi &= 0, \\ -2\delta_1 A + \alpha_1 \omega B \sin \varphi &= -M\bar{S} v_1^2 A, \\ (v_2^2 - \omega^2) B - \alpha_2 \omega^2 A \cos \varphi &= 0, \\ -2\delta_2 B - \alpha_2 \omega A \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Из последних двух уравнений системы (7.4.6) найдем отношение амплитуд B/A колебаний во втором и первом контурах генератора и сдвиг фаз между этими колебаниями φ

$$\frac{B}{A} = \frac{\alpha_2 \omega^2}{V(v_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\delta_2 \omega}{v_2^2 - \omega^2}.$$

Подставляя полученные выражения в первое и второе уравнения системы (7.4.6), имеем следующие уравнения для определения частоты генерации ω и амплитуды колебаний A :

$$v_1^2 - \omega^2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \omega^4 (v_2^2 - \omega^2)}{(v_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} = 0, \quad (7.4.7)$$

$$2\delta_1 + 2\delta_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \omega^4}{(v_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} = M\bar{S}(A) v_1^2. \quad (7.4.8)$$

Для определения средней крутизны $\bar{S}(A)$ подставим в (7.4.2) гармоническое решение (7.4.5) и выпишем только выражение для амплитуды первой гармоники тока стока. Отсюда находим среднюю крутизну $\bar{S}(A)$ в виде

$$\bar{S}(A) = S_0 - S_2 A^2/4. \quad (7.4.9)$$

Из (7.4.8) с учетом (7.4.9) получим следующее выражение для амплитуды стационарных колебаний:

$$A^2 = \frac{4}{S_2} \left[S_0 - \frac{2\delta_1}{Mv_1^2} - \frac{2\delta_2}{Mv_1^2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \omega^4}{(v_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} \right]. \quad (7.4.10)$$

Последний член в квадратных скобках показывает, что включение в схему второго контура приводит к появлению дополнительного затухания, величина которого зависит от частоты генерации.

Исследуем теперь более подробно частотное уравнение (7.4.7). Из него следует, что включение дополнительного контура эквивалентно изменению парциальной частоты контура генератора. При этом, если $v_2 > \omega$, то эквивалентная парциальная частота понижается, т. е. дополнительный контур влияет как подключенная к основному контуру шунтирующая емкость. Если $v_2 < \omega$, то добавка к парциальной частоте положительна, т. е. дополнительный контур эквивалентен подключению к основному контуру

шунтирующей индуктивности. При равенстве парциальных частот контуров $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ уравнение (7.4.7) принимает вид

$$(\omega^2 - \nu^2) [(\omega^2 - \nu^2)^2 - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4 + 4\delta_2^2 \omega^2] = 0. \quad (7.4.11)$$

Один из корней этого уравнения $\omega = \nu$, два других определяются из соотношения

$$(\omega^2 - \nu^2)^2 = (\alpha_1 \alpha_2 \omega^2 - 4\delta_2^2) \omega^2.$$

Последнее уравнение имеет действительные корни только в том случае, если $\alpha_1 \alpha_2 > 4\delta_2^2 / \omega^2$. Полученное неравенство определяет существование критической связи между контурами. Когда $k_{кр} = 4\delta_2^2 / \omega^2 > \alpha_1 \alpha_2$, частотное уравнение имеет при синхронизме только одно решение $\omega = \nu$. Если же $\alpha_1 \alpha_2 > k_{кр}$, то частотное уравнение имеет при синхронизме три действительных корня. Проведем исследование этих двух случаев отдельно.

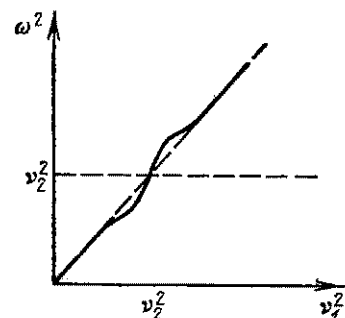


Рис. 7.9. Зависимость генерируемой частоты от парциальной частоты первого контура при слабой связи.

1. *Случай слабой связи между контурами* ($\alpha_1 \alpha_2 < k_{кр}$). Зависимость ω^2 от частоты ν_1^2 имеет вид, изображенный на рис. 7.9. Генерируемая частота однозначно связана с парциальными частотами контуров. Амплитуду автоколебаний можно найти из соотношения (7.4.10). Ее зависимость от парциальной частоты первого контура изображена на рис. 7.10. На-

ибольшее уменьшение амплитуды (отсос энергии из первого контура во второй) имеет место при равенстве парциальных частот $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Амплитуда колебаний при $\omega = \nu$ равна

$$A^2 = \frac{8}{MS_{\delta\nu}} \left(\frac{MS_{\delta\nu}}{2} - \frac{\delta_1}{\nu} - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \nu}{4\delta_2} \right). \quad (7.4.12)$$

Уменьшение амплитуды генерации при синхронизме тем больше, чем больше связь между контурами и меньше потери второго контура. При достаточно высокой добротности второго контура автоколебания в системе вблизи синхронизма контуров вообще могут быть подавлены. Условие такого гашения автоколебаний состоит в том, что инкремент первого контура $\vartheta_0 = MS_{\delta\nu}/2 - \vartheta_1$ ($\vartheta_1 = \delta_1/\nu$ — декремент первого контура) в некоторой области частот оказывается меньше величины $\alpha_1 \alpha_2 \delta_2 / k_{кр} \nu$, представляющей собой потери (декремент), вносимые дополнительным контуром в первый контур. Зависимость амплитуды колебаний A от частоты ν_1 при наличии области гашения изображена на рис. 7.11. Границы этой

области можно определить, приравняв в (7.4.10) амплитуду A нулю. При $\vartheta_0 = \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 / k_{\text{кр}}$ область гашения стягивается в точку.

2. *Случай сильной связи между контурами* ($\alpha_1 \alpha_2 > k_{\text{кр}}$). Зависимость частоты ω^2 от ν_1^2 для $\alpha_1 \alpha_2 > k_{\text{кр}}$ приведена на рис. 7.12.

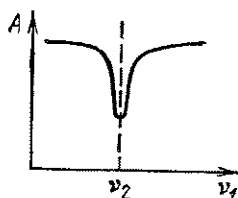


Рис. 7.10. Зависимость амплитуды генерируемых колебаний от парциальной частоты первого контура при слабой связи между контурами.

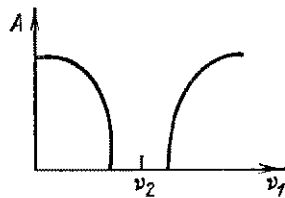


Рис. 7.11. Зависимость амплитуды от парциальной частоты вблизи области гашения.

Если поддерживать постоянной частоту ν_1 , а изменять ν_2 , то генерируемая частота изменяется так, как показано на рис. 7.13. Из графиков видно, что при $\nu_1 \gg \nu_2$ и при $\nu_1 \ll \nu_2$ система генерирует частоту, близкую к ν_1 , т. е. второй контур из-за малой связанности не влияет на частоту генерации. Вблизи синхронизма (при

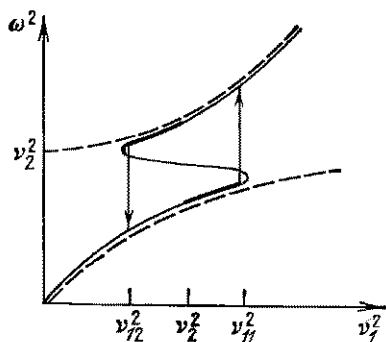


Рис. 7.12. Зависимость частоты генерируемых колебаний от парциальной частоты первого контура при сильной связи.

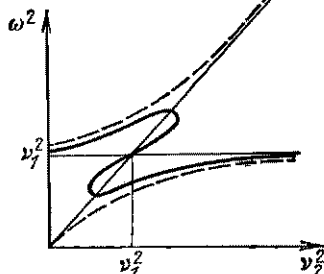


Рис. 7.13. Зависимость частоты генерируемых колебаний от парциальной частоты второго контура при сильной связи.

$\nu_1 \approx \nu_2$) зависимость частоты ω от ν_1 оказывается трехзначной. Исследование устойчивости колебаний показывает, что средняя ветвь частотной характеристики всегда неустойчива. Что касается наружных ветвей частотной характеристики, то их ход качественно совпадает с ходом нормальных частот линейной консервативной системы (на рис. 7.12 и 7.13 они изображены пунктиром). Однако

наличие в (7.4.7) не равной нулю δ_2 эквивалентно уменьшению связи между контурами, так что генерируемые частоты лежат несколько ближе к парциальным частотам, чем в консервативной системе.

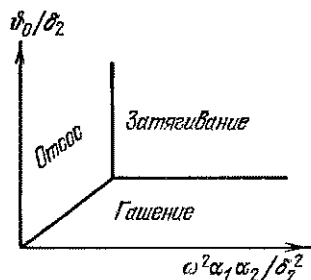


Рис. 7.14. Области отсоса энергии, гашения колебаний и затягивания.

На рис. 7.14 в плоскости переменных ϑ_0/δ_2 и $\omega^2\alpha_1\alpha_2/\delta_2^2$ показано расположение областей гашения, затягивания и отсоса энергии колебаний.

§ 7.5. Явление затягивания

Проведенный выше анализ базировался на предположении о том, что в системе в каждый момент времени существуют колебания только одной частоты. Между тем мы показали, что вблизи равенства парциальных частот в системе устойчивы колебания с частотами ω_1 и ω_2 .

Рассмотрим, теперь условия одновременной генерации двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 . Для этого представим напряжение затвор — исток u_1 в виде

$$u_1 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t. \quad (7.5.1)$$

Так как частоты колебаний ω_1 и ω_2 асинхронны, то относительные фазы не играют никакой роли и их можно опустить (это соответствует определенному выбору начального момента времени). В рассматриваемом случае каждому гармоническому колебанию соответствует своя средняя крутизна. При этом S_{ω_1} и S_{ω_2} зависят, в общем случае, от обеих амплитуд A_1 и A_2 .

Подставив (7.5.1) в (7.4.2), найдем компоненту тока стока с частотой ω_1 :

$$i_{ст \omega_1} = [S_0 A_1 - 1/4 S_2 (A_1^2 + 2 A_1 A_2^2)] \cos \omega_1 t.$$

Таким образом, средняя крутизна на частоте ω_1 равна

$$S_{\omega_1}(A_1, A_2) = S_0 - 1/4 S_2 (A_1^2 + 2 A_2^2). \quad (7.5.2)$$

Аналогичным способом получаем и $\bar{S}$ на частоте ω_2

$$\bar{S}_{\omega_2}(A_1, A_2) = S_0 - 1/4 S_2 (2A_1^2 + A_2^2). \quad (7.5.3)$$

Отсюда следует, что одновременное сосуществование двух частот при мягком режиме взаимно уменьшает значения средней крутизны. Для определения стационарных амплитуд колебаний подставим выражения для $\bar{S}$ (7.5.2) и (7.5.3) в соотношение (7.4.8). С учетом (7.4.7) получим следующие выражения, связывающие амплитуды колебаний A_1 и A_2 с параметрами контуров:

$$Mv_1^2 [S_0 - 1/4 S_2 (A_1^2 + 2A_2^2)] = 2\delta_1 + 2\delta_2 \frac{v_1^2 - \omega_1^2}{v_2^2 - \omega_1^2}, \quad (7.5.4)$$

$$Mv_1^2 [S_0 - 1/4 S_2 (2A_1^2 + A_2^2)] = 2\delta_1 + 2\delta_2 \frac{v_1^2 - \omega_2^2}{v_2^2 - \omega_2^2}. \quad (7.5.5)$$

Левые части уравнений (7.5.4) и (7.5.5) описывают вклад энергии в контуры, правые части — потери энергии. Если при $A_1 = A_2 = 0$ вклады энергии больше потерь в обоих случаях, то выполняются условия самовозбуждения системы. В системе возникают колебания с частотами ω_1 и ω_2 и начинают расти их амплитуды. Амплитуды A_1 и A_2 увеличиваются до тех пор, пока для какого-либо колебания вклад энергии не сравняется с потерями. Пусть, например, это произойдет сначала для колебания с частотой ω_2 . С этого момента амплитуда A_2 перестанет увеличиваться, а A_1 будет продолжать расти. Это приведет к тому, что на частоте ω_2 вклад энергии станет меньше потерь и A_2 начнет уменьшаться, что увеличит скорость возрастания A_1 . В итоге A_2 уменьшится до нуля, а A_1 возрастет до такой величины, что будут выполняться соотношения

$$Mv_1^2 (S_0 - 1/4 S_2 A_1^2) = 2\delta_1 + 2\delta_2 \frac{v_1^2 - \omega_1^2}{v_2^2 - \omega_1^2}, \quad (7.5.6)$$

$$Mv_1^2 (S_0 - 1/2 S_2 A_1^2) < 2\delta_1 + 2\delta_2 \frac{v_1^2 - \omega_2^2}{v_2^2 - \omega_2^2}. \quad (7.5.7)$$

Соотношение (7.5.6) — условие существования стационарного колебания с частотой ω_1 и амплитудой A_1 ; неравенство (7.5.7) показывает, что на частоте ω_2 вклад энергии меньше потерь.

Аналогичным образом можно получить условия существования колебания с частотой ω_2 и амплитудой A_2 . Они имеют вид

$$Mv_1^2 (S_0 - 1/4 S_2 A_2^2) = 2\delta_1 + 2\delta_2 \frac{v_1^2 - \omega_2^2}{v_2^2 - \omega_2^2}, \quad (7.5.8)$$

$$Mv_1^2 (S_0 - 1/2 S_2 A_2^2) < 2\delta_1 + 2\delta_2 \frac{v_1^2 - \omega_1^2}{v_2^2 - \omega_1^2}. \quad (7.5.9)$$

Простые соображения показывают, что гармонические колебания, описываемые соотношениями (7.5.6) и (7.5.7), устойчивы. Пусть, например, амплитуда A_1 немного возрастет; тогда левая часть

(7.5.6) станет меньше правой и A_1 вновь уменьшится. Если A_1 уменьшится по сравнению со своим стационарным значением, то вклад энергии на этой частоте станет больше потерь и A_1 вновь возрастет. Вместе с тем небольшие изменения A_1 слабо сказываются на неравенстве (7.5.7) и вклад энергии на частоте ω_2 не сможет превысить потерь. Аналогичные рассуждения доказывают устойчивость колебаний на частоте ω_2 при выполнении условий (7.5.8) и (7.5.9). Легко показать, что бигармонический режим, описываемый соотношениями (7.5.4) и (7.5.5) неустойчив. Действительно, при небольшом увеличении A_1 вклад энергии на частоте ω_2 уменьшается сильнее, чем вклад на частоте ω_1 ; это приводит к быстрому уменьшению A_2 , что увеличивает вклад энергии на частоте ω_1 . Поэтому небольшое увеличение A_1 по сравнению со стационарным значением ведет к резкому уменьшению A_2 и росту A_1 . Система переходит к гармоническим колебаниям с частотой ω_1 . Наоборот, небольшое уменьшение A_1 по сравнению со стационарным значением переводит систему в режим гармонических колебаний с частотой ω_2 .

Рассмотрим теперь поведение автоколебательной системы с двумя степенями свободы при изменении парциальной частоты первого контура. При частоте $\nu_1 \ll \nu_2$ в системе существует гармоническое колебание с частотой ω_1 , близкой к ν_1 . При увеличении ν_1 система входит в область, где возможно существование колебаний как частоты ω_1 , так и частоты ω_2 . Эта область носит название *области затягивания частоты*. В области затягивания режим генерации зависит от предыстории. Если система вошла в нее со стороны малых ν_1 (см. рис. 7.12), то в ней будут существовать колебания с частотой ω_1 и амплитудой A_1 . При дальнейшем увеличении ν_1 система при $\nu_1 = \nu_{11}$ скачком перейдет в режим генерации колебаний с частотой ω_2 и амплитудой A_2 . Если система входит в область затягивания со стороны больших ν_1 , то в ней происходят колебания с частотой ω_2 и амплитудой A_2 . Переход в режим (ω_1, A_1) наступает при ν_{12} , значительно меньшей ν_{11} . Частоты ν_{11} и ν_{12} , определяющие границы области затягивания, можно найти из условий нарушения устойчивости соответствующих колебаний. Различаются частотные и амплитудные условия устойчивости. Частотные условия устойчивости нарушаются при частотах, на которых кривая $\omega^2 = f(\nu_1^2)$ имеет вертикальную касательную. Амплитудная неустойчивость возникает при нарушении условий (7.5.7) или (7.5.9). Пусть при некоторой частоте ν_1 в системе выполняются условия (7.5.6) и (7.5.7). При увеличении ν_1 частота ω_1 также увеличивается и приближается к ν_2 . При этом правая часть (7.5.6) растет и A_1 уменьшается. Что касается правой части (7.5.7), то она уменьшается, а левая часть (7.5.7) растет. Наконец, при некотором ν_1 неравенство (7.5.7) изменит знак. Вклад энергии на частоте ω_2 станет больше потерь

и начнется увеличение амплитуды A_2 . Система перейдет в режим гармонических колебаний с частотой ω_2 . Обратный переход в режим колебаний с частотой ω_1 может произойти лишь при уменьшении ν_1 , когда нарушится условие (7.5.9), т. е. при частоте ν_{12} .

Зависимость амплитуд колебаний A_1 и A_2 от парциальной частоты ν_1 приведена на рис. 7.15. Соотношение амплитуд на границе области затягивания $\nu_1 = \nu_{11}$ можно найти из (7.5.7) и (7.5.8). Устанавливающаяся после скачка амплитуда A_1 в $\sqrt{2}$ раз больше амплитуды A_2 , существовавшей в системе до скачка. Соответственно при $\nu_1 = \nu_{12}$ получим $A_1^2 = \frac{1}{2}A_2^2$.

При связи, незначительно превышающей критическую, область затягивания ограничивается частотной неустойчивостью. При достаточно большой связи между контурами область затягивания ограничивается условиями амплитудной устойчивости. При самовозбуждении системы внутри области затягивания устанавливающийся режим зависит от начальных условий в системе.

Проведенный выше анализ показывает, что под влиянием резонансной нагрузки автоколебательная система может в определенной области частот изменить свою частоту и амплитуду, вообще прекратить колебания (режим гашения) или попасть в режим скачкообразного изменения амплитуды и частоты. Поэтому при использовании резонансной нагрузки необходимо принимать меры для уменьшения ее обратного влияния на автоколебательную систему. Одним из примеров системы с резонансной нагрузкой является генератор, связанный с контуром волномера. Для правильного измерения генерируемой частоты необходимо, чтобы связь между контурами генератора и волномера была достаточно мала (режим отсоса энергии). Явления затягивания и гашений, наступающие при сильной связи, в этом случае снижают точность определения частоты. Однако явление затягивания может быть использовано для стабилизации частоты автоколебаний. Для этого в качестве дополнительного контура в систему включают контур с высокой добротностью. В радиодиапазоне обычно применяется кварцевый резонатор, а в диапазоне СВЧ — высокодобротный объемный резонатор. При малом δ_2 область затягивания увеличивается. В этой области значительные вариации парциальной частоты контура генератора сопровождаются малыми изменениями генерируемой частоты. На рис. 7.12 жирными линиями изображены области стабилизации частоты при затягивании.

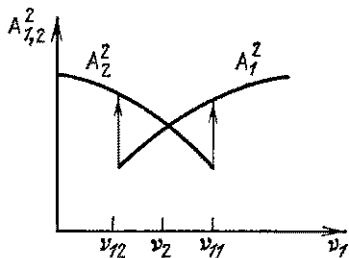


Рис. 7.15. Зависимость амплитуды генерируемого колебания от парциальной частоты первого контура в режиме затягивания.

При использовании явления затягивания для стабилизации частоты необходимо удовлетворить двум условиям, а именно:

а) диапазон изменения парциальной частоты генератора должен быть значительно меньше области стабилизации; б) после включения системы генератор должен быть настроен на соответствующую ветвь стабильной частоты.

§ 7.6. Взаимная синхронизация двух связанных генераторов

В случае двух связанных генераторов с сильно различающимися парциальными частотами автоколебательные системы работают практически независимо. Вблизи синхронизма парциальных частот

имеет место взаимная синхронизация генераторов. В полосе синхронизации в системе существуют колебания лишь одной частоты, амплитуда и фаза которых зависят от расстройки парциальных частот и от соотношения мощностей генераторов.

Процесс взаимной синхронизации двух генераторов рассмотрим на конкретном примере схемы, изображенной на рис. 7.16.

Для напряжений затвор — исток транзисторов u_1 и u_2 получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + v_1^2 u_1 - 2\delta_1(u_1) \dot{u}_1 - \alpha_1 \ddot{u}_2 &= 0, \\ \ddot{u}_2 + v_2^2 u_2 - 2\delta_2(u_2) \dot{u}_2 - \alpha_2 \ddot{u}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

Здесь v_1 и v_2 — парциальные частоты контуров, $2\delta_i = M_i v_i^2 S_i - R_i/L_i$, S_i — нелинейная крутизна, зависящая от напряжения затвор — исток, соответствующего генератора, α_1, α_2 — коэффициенты связи: $\alpha_i = C_3/v_i^2$, $i = 1, 2$, где C_3 — малая емкость связи. Для решения системы (7.6.1) методом медленно меняющихся амплитуд положим

$$u_1 = A(t) \cos[\omega_0 t - \psi(t)], \quad u_2 = B(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)], \quad (7.6.2)$$

где $\omega_0 = (v_1 + v_2)/2$, A , B , ψ и φ — медленно меняющиеся функции времени.

Представление решения в виде (7.6.2) справедливо внутри полосы синхронизации, когда генераторы работают на одной и той же частоте или вблизи синхронизации, когда разность генерируемых частот невелика. Частота колебаний первого генератора равна $\omega_1 = \omega_0 - \dot{\psi}(t)$, для частоты второго генератора имеем $\omega_2 = \omega_0 - \dot{\varphi}(t)$. Укороченные уравнения для A , B , ψ и φ

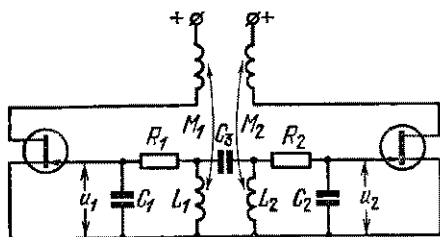


Рис. 7.16. Схема двух связанных генераторов.

записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \overline{\delta_1(A)} A + \frac{\alpha_1 \omega_0}{2} B \sin \Phi, & \dot{B} &= \overline{\delta_2(B)} B - \frac{\alpha_2 \omega_0}{2} A \sin \Phi, \\ \dot{\psi} &= \Delta_1 - \frac{\alpha_1 \omega_0}{2} \frac{B}{A} \cos \Phi, & \dot{\phi} &= \Delta_2 - \frac{\alpha_2 \omega_0}{2} \frac{A}{B} \cos \Phi, \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

где $\Phi = \varphi - \psi$ — разность фаз колебаний генераторов, $\Delta_1 = \omega_0 - \nu_1$, $\Delta_2 = \omega_0 - \nu_2$,

$$\overline{\delta_1(A)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\delta_1 [A \cos(\omega_0 t - \psi)] \sin \omega_0 t \, d(\omega_0 t),$$

$$\overline{\delta_2(B)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\delta_2 [B \cos(\omega_0 t - \phi)] \sin \omega_0 t \, d(\omega_0 t).$$

Разность фаз Φ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Phi} = \Delta - \frac{\omega_0}{2} \left(\alpha_2 \frac{A}{B} - \alpha_1 \frac{B}{A} \right) \cos \Phi, \quad (7.6.4)$$

где $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \nu_1 - \nu_2$ — расстройка контуров.

Уравнения (7.6.3) будем решать методом вторичного упрощения укороченных уравнений (см. § 7.3). Малым параметром μ будем считать величину $\alpha_1 \omega_0 / \delta_1 = \mu \ll 1$, т. е. отношение коэффициента связи к инкременту первого контура. Величина $\alpha_2 \omega_0 / \delta_2$ тоже примерно равна μ .

Представляя решение первых двух уравнений системы (7.6.3) в виде ряда по малому параметру μ и пренебрегая членами порядка μ^2 и выше, получим

$$A = A_0 + \mu a_1 \sin \Phi, \quad B = B_0 - \mu b_1 \sin \Phi, \quad (7.6.5)$$

где A_0 , B_0 — амплитуды свободных колебаний генераторов (при $\mu = 0$),

$$\mu a_1 = \alpha_1 \omega_0 B_0 / 2 \left| \frac{d\delta_1}{dA} \right|_{A_0} A_0, \quad \mu b_1 = \alpha_2 \omega_0 A_0 / 2 \left| \frac{d\delta_2}{dB} \right|_{B_0} B_0. \quad (7.6.6)$$

В режиме синхронных колебаний система генерирует одну частоту, равную $\omega = \omega_0 - \dot{\phi} = \omega_0 - \dot{\psi}$.

Эту частоту можно найти из второй пары уравнений (7.6.3)

$$\omega = \nu_2 + \frac{\alpha_2 \omega_0}{2} \frac{A_0}{B_0} \cos \Phi. \quad (7.6.7)$$

В синхронном режиме Φ — постоянная величина, т. е. $\dot{\Phi} = 0$. Тогда из (7.6.4) следует, что

$$\cos \Phi = \frac{2\Delta}{\omega_0 (\alpha_2 A_0 / B_0 - \alpha_1 B_0 / A_0)}. \quad (7.6.8)$$

Для заданной расстройки генераторов Δ при известных амплитудах несвязанных колебаний A_0, B_0 из (7.6.8) нетрудно найти фазу Φ . Подставляя ее в (7.6.5) и (7.6.7), определим амплитуды A и B и частоту ω синхронных колебаний.

Ширина полосы синхронного режима находится из условия $\cos \Phi = \pm 1$:

$$\Delta_{гр} = \frac{\omega_0}{2} \left(\alpha_2 \frac{A_0}{B_0} - \alpha_1 \frac{B_0}{A_0} \right). \quad (7.6.9)$$

На рис. 7.17 приведены зависимости A и B от расстройки Δ в полосе синхронизации для случая $A_0 < B_0$. Если $A_0 \ll B_0$, то

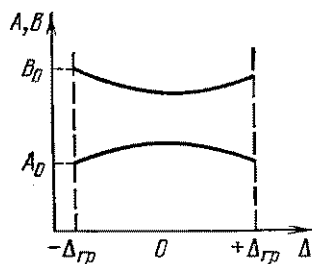


Рис. 7.17. Зависимость амплитуд колебаний двух связанных генераторов от расстройки в области синхронизации.

в соответствии с (7.6.5) и (7.6.6) амплитуда более мощного генератора почти не меняется. Этот генератор играет роль захватывающего (см. § 5.5). Зависимость частоты от расстройки в полосе синхронизации линейна. При $A_0 \ll B_0$ частота генерации близка к ν_2 — парциальной частоте более мощного генератора. В случае близких мощностей генераторов при синхронизации изменяются обе амплитуды A и B . При этом различие между захватываемым и захватывающим генераторами уменьшается и при $A_0 \approx B_0$ в системе возможны два устойчивых режима: режим, при котором генератор с амплитудой A является

захватывающим, а генератор с амплитудой B — захватываемым, и режим, в котором эти генераторы поменялись ролями. Внутри полосы синхронизации возможны переходы от одного режима к другому, сопровождаемые резким изменением амплитуды и частоты.

Взаимная синхронизация двух генераторов может быть использована для стабилизации частоты в том случае, если захватывающий генератор более стабилен, чем захватываемый.

КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 8.1. Собственные колебания в консервативных системах

Многие колебательные системы должны рассматриваться как системы с n степенями свободы. К числу таких систем относятся сложные электрические цепи, в частности фильтры. Эквивалентные схемы СВЧ-цепей, как правило, также являются системами с n степенями свободы. Примером механической системы с n степенями свободы может служить многоатомная молекула. Теория колебаний в системах со многими степенями свободы интересна также при изучении движения кристаллической решетки твердого тела.

Движение в системе с n степенями свободы описывается n независимыми координатами, выбор которых, так же как и в системе с двумя степенями свободы, произволен. Так, в электрических цепях в качестве переменных можно выбрать напряжения на элементах цепи или токи в соответствующих контурах. Число степеней свободы определяется минимальным числом переменных, необходимым для полного описания движения.

Так же как для систем с двумя степенями свободы, в рассматриваемых системах можно ввести нормальные координаты. Число нормальных координат равно числу степеней свободы системы. Движение каждой нормальной координаты происходит независимо от остальных. Поэтому каждая нормальная координата совершает гармоническое колебание с собственной, или нормальной, частотой. Любые свободные и вынужденные колебания можно представить в виде суперпозиции нормальных колебаний.

Для исследования собственных колебаний в системе с n степенями свободы воспользуемся уравнениями Лагранжа. Пусть движение в системе определяется n независимыми обобщенными координатами $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$.

В частном случае эти координаты могут представлять смещения некоторых точек механической системы или заряды на проводниках электрической системы. Потенциальная энергия системы является функцией обобщенных координат

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет

Введем матрицы массы $\hat{m}$ и упругости $\hat{k}$, равные

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8.1.6)$$

Обе матрицы квадратные и симметричные. Будем теперь считать координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ компонентами вектора колебаний $\mathbf{x}$, так что

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

В соответствии с правилами матричного исчисления уравнения (8.1.5) можно записать в матричной форме

$$\hat{m}\ddot{\mathbf{x}} + \hat{k}\mathbf{x} = 0. \quad (8.1.7)$$

Величина $\hat{m}\ddot{\mathbf{x}}$ является вектором (матрицей с одним столбцом) и называется *вектором силы инерции*. Соответственно $\hat{k}\mathbf{x}$ — *вектор силы упругости*, или *упругий вектор*. Решение матричного уравнения (8.1.7) естественно искать в виде вектора

$$\mathbf{x} = A e^{j\omega t}, \quad (8.1.8)$$

где амплитудный вектор A в общем случае может быть комплексным, т. е. его компоненты являются комплексными амплитудами колебаний соответствующих координат. Из (8.1.8) следует, что $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 A e^{j\omega t}$. Используя свойство ассоциативности матриц, можно записать вместо (8.1.7)

$$(-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}) A = 0. \quad (8.1.9)$$

Нетривиальное решение однородного матричного уравнения (8.1.9) существует только в случае равенства нулю детерминанта

$$|-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}| = 0. \quad (8.1.10)$$

(8.1.10) является уравнением n -й степени относительно ω^2 . Из него можно определить n собственных частот колебаний системы ω_s^2 , $s=1, 2, \dots, n$.

Поскольку все коэффициенты уравнения (8.1.9) — действительные числа, вектор $\mathbf{x}_s$, соответствующий собственной частоте ω_s , имеет вид

$$\mathbf{x}_s = A_s \exp(j\omega_s t) + A_s^* \exp(-j\omega_s t). \quad (8.1.11)$$

Амплитудный вектор A_s должен удовлетворять уравнению

$$(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}) A_s = 0. \quad (8.1.12)$$

Это матричное уравнение эквивалентно системе n однородных уравнений для амплитуд A_{sm} . Первый индекс у амплитуды соответствует номеру собственной частоты, второй индекс — номеру координаты. Из системы (8.1.12) можно найти отношение амплитуд $A_{sm}/A_{s1} = \kappa_{sm}$. Величины κ_{sm} образуют вектор $\mathbf{K}_s$, который называется *вектором коэффициентов распределения амплитуд на частоте ω_s или формой s -го собственного колебания системы*. Коэффициенты κ_{sm} для всех s образуют квадратную матрицу

$$\hat{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} & \dots & \kappa_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{1n} & \kappa_{2n} & \dots & \kappa_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8.1.13)$$

Амплитудный вектор $\mathbf{A}_s$ выражается через $\mathbf{K}_s$ следующим образом:

$$\mathbf{A}_s = A_{s1} \mathbf{K}_s. \quad (8.1.14)$$

В консервативной системе все коэффициенты κ_{sm} действительны, т. е. колебания всех координат на данной собственной частоте происходят в фазе или в противофазе. Для вектора $\mathbf{A}_s^*$ аналогичным образом получим

$$\mathbf{A}_s^* = A_{s1}^* \mathbf{K}_s. \quad (8.1.15)$$

Поэтому s -е собственное колебание можно представить в виде

$$\mathbf{x}_s = A_{s1} \mathbf{K}_s e^{i\omega_s t} + A_{s1}^* \mathbf{K}_s e^{-i\omega_s t}. \quad (8.1.16)$$

Общее решение матричного уравнения (8.1.7) представляет собой суперпозицию решений типа (8.1.16)

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{s=1}^n C_s \mathbf{K}_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (8.1.17)$$

где $C_s = 2|A_{s1}|$.

В этом выражении C_s и φ_s определяются начальными условиями, а формы собственных колебаний $\mathbf{K}_s$ и частоты ω_s зависят от параметров системы. Для выделения s -го собственного колебания необходимо задать в начальный момент времени отклонения от положения равновесия системы каждой из координат, пропорциональные $\mathbf{K}_s$. В этом случае все амплитуды C , кроме C_s , равны нулю.

Так же, как в случае системы с двумя степенями свободы, для системы с n степенями свободы можно ввести нормальные координаты, т. е. такие координаты, которые совершают гармонические колебания при любых начальных условиях. Их можно ввести следующим образом. Зададим n гармонических колебаний вида

$$\eta_s = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad s = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (8.1.18)$$

Каждое из колебаний η_s можно рассматривать как нормальное колебание. Действительно, сумма $\sum_{s=1}^n \eta_s$ представляет движение первой координаты $x_1(t)$. Движение остальных координат при заданных η_s также определено в соответствии с (8.1.17)

$$x_l(t) = \sum_{s=1}^n \kappa_{sl} \eta_s, \quad l=1, 2, \dots, n. \quad (8.1.19)$$

Соотношения (8.1.19) являются формулами преобразования от нормальных координат к координатам x_l . В матричной форме (8.1.19) имеет вид

$$\mathbf{x} = \hat{\kappa} \mathbf{H}, \quad (8.1.20)$$

где $\mathbf{H}$ — вектор, образованный нормальными координатами.

Переходя в уравнении (8.1.7) от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{H}$, получим

$$\ddot{\mathbf{H}} + \hat{\kappa}^{-1} \hat{m}^{-1} \hat{k} \hat{\kappa} \mathbf{H} = 0. \quad (8.1.21)$$

Так как каждая нормальная координата совершает гармоническое колебание, то для любого η_s справедливо равенство

$$\ddot{\eta}_s + \omega_s^2 \eta_s = 0. \quad (8.1.22)$$

Сопоставление (8.1.21) и (8.1.22) показывает, что $\hat{\kappa}^{-1} \hat{m}^{-1} \hat{k} \hat{\kappa}$ представляет собой диагональную матрицу. Ее диагональные элементы являются собственными частотами.

Таким образом, при собственных колебаниях системы каждая нормальная координата совершает гармоническое колебание с соответствующей собственной частотой. Любое собственное колебание представляет суперпозицию нормальных колебаний.

§ 8.2. Ортогональность нормальных колебаний и экстремальные свойства собственных частот

Каждому нормальному колебанию соответствует определенное распределение амплитуд по координатам, или определенная форма колебаний. Формы колебаний, соответствующие разным собственным частотам, ортогональны друг другу. Для того чтобы показать это, запишем уравнение (8.1.7) для s -й и r -й форм колебаний:

$$-\omega_s^2 \hat{m} \mathbf{K}_s + \hat{k} \mathbf{K}_s = 0, \quad -\omega_r^2 \hat{m} \mathbf{K}_r + \hat{k} \mathbf{K}_r = 0. \quad (8.2.1)$$

Умножим скалярно первое из уравнений (8.2.1) на $\mathbf{K}_r$, а второе на $\mathbf{K}_s$:

$$-\omega_s^2 \mathbf{K}_r \hat{m} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_r \hat{k} \mathbf{K}_s = 0, \quad (8.2.2)$$

$$-\omega_r^2 \mathbf{K}_s \hat{m} \mathbf{K}_r + \mathbf{K}_s \hat{k} \mathbf{K}_r = 0. \quad (8.2.3)$$

Поскольку матрицы $\hat{m}$ и $\hat{k}$ симметричны, то $K_r \hat{m} K_s = K_s \hat{m} K_r$ и $K_r \hat{k} K_s = K_s \hat{k} K_r$. Вычитая из (8.2.3) уравнение (8.2.2), получим

$$(\omega_s^2 - \omega_r^2) K_r \hat{m} K_s = 0. \quad (8.2.4)$$

Если $\omega_s \neq \omega_r$, то отсюда

$$K_r \hat{m} K_s = 0. \quad (8.2.5)$$

Следовательно, справедливо и соотношение

$$K_r \hat{k} K_s = 0. \quad (8.2.6)$$

Последние два соотношения являются условиями ортогональности s -й и r -й форм колебаний. Вектор $\hat{m} K_s$ называется *вектором силы инерции*, соответствующим s -му нормальному колебанию, а вектор $\hat{k} K_s$ — *вектором силы упругости*, соответствующим тому же колебанию. Поэтому соотношения (8.2.5) и (8.2.6) можно трактовать как условия ортогональности формы r -го нормального колебания к векторам силы инерции и силы упругости, соответствующим s -му нормальному колебанию. Использование условий ортогональности нормальных колебаний дает возможность получить некоторые соотношения, общие для любых систем с n степенями свободы. Покажем, например, что кинетическая энергия любого собственного колебания равна сумме кинетических энергий всех нормальных колебаний. Кинетическую энергию системы (8.1.4) в матричной форме можно записать в виде

$$T = \dot{x} (\hat{m} \dot{x}). \quad (8.2.7)$$

Переходя к нормальным координатам и учитывая условие ортогональности (8.2.5), получим

$$T = \sum_s K_s \dot{\eta}_s \left(\hat{m} \sum_r K_r \dot{\eta}_r \right) = \sum_{s, r} \dot{\eta}_s \dot{\eta}_r K_s \hat{m} K_r = \sum_s \dot{\eta}_s^2 K_s \hat{m} K_s. \quad (8.2.8)$$

Аналогично можно показать, что потенциальная энергия системы с n степенями свободы имеет вид

$$V = \sum_s \eta_s^2 K_s \hat{k} K_s. \quad (8.2.9)$$

Выражения (8.2.8) и (8.2.9) показывают, что систему с n степенями свободы можно представить в виде набора n невзаимодействующих систем с одной степенью свободы, каждая из которых обладает массой M_s и упругостью K_s , причем величины M_s и K_s соответственно равны

$$M_s = 2K_s \hat{m} K_s, \quad K_s = 2K_s \hat{k} K_s. \quad (8.2.10)$$

Условия ортогональности нормальных колебаний используются также для отыскания собственных частот системы. Расчет собственных частот с помощью соотношения (8.1.10) во многих случаях весьма сложен. Поэтому для их отыскания часто пользуются свойством экстремальности собственных частот. Можно показать, что собственные частоты являются экстремумами некоторых соотношений, вытекающих из закона сохранения энергии и условий ортогональности нормальных колебаний.

Зададим в момент времени $t=0$ произвольное отклонение от положения равновесия системы всех n координат x_0 . Пусть скорости изменения координат в тот же момент времени равны нулю, т. е. $\dot{x}_0=0$. Колебание в системе в любой момент времени $t>0$ можно записать в виде

$$x(t) = \sum_s C_s K_s \cos \omega_s t. \quad (8.2.11)$$

При этом амплитуды C_s должны удовлетворять начальному условию

$$x_0 = \sum_s C_s K_s. \quad (8.2.11a)$$

Потенциальная энергия системы в соответствии с (8.1.3) и (8.2.11) равна

$$V = x \hat{k} x = \sum_{s=1}^n C_s^2 K_s \hat{k} K_s \cos^2 \omega_s t.$$

Для кинетической энергии колебаний имеем (см. (8.1.4))

$$T = \dot{x} \hat{m} \dot{x} = \sum_{s=1}^n C_s^2 \omega_s^2 K_s \hat{m} K_s \sin^2 \omega_s t.$$

При колебаниях в консервативной системе среднее по времени значение потенциальной энергии равно среднему значению кинетической энергии, т. е.

$$\frac{\bar{V}}{\bar{T}} = \frac{\sum_s C_s^2 K_s \hat{k} K_s}{\sum_s C_s^2 \omega_s^2 K_s \hat{m} K_s} = 1. \quad (8.2.12)$$

Расположим собственные частоты в порядке их возрастания

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2.$$

Если заменить все ω_s^2 квадратом наименьшей частоты ω_1^2 , то (8.2.12) превращается в неравенство

$$\frac{\sum_s C_s^2 K_s \hat{k} K_s}{\sum_s C_s^2 K_s \hat{m} K_s} \geq \omega_1^2. \quad (8.2.13)$$

Левая часть неравенства (8.2.13) является функцией амплитуд C_s , т. е. функцией начального распределения отклонений координат x_0 . Величина ω_1^2 является минимумом левой части (8.2.13) как функции x_0 . Таким образом, используя соотношение (8.2.11), получим

$$\omega_1^2 = \min \frac{x_0 \hat{k} x_0}{x_0 \hat{m} x_0}. \quad (8.2.14)$$

Этот минимум достигается в том случае, когда все C_s , за исключением C_1 , равны нулю. Тогда $x_0 = C_1 K_1$, т. е. распределение амплитуд по координатам совпадает с первой собственной формой колебания. Для нахождения второй собственной частоты ω_2 следует выбрать начальное отклонение x_0 ортогональным первой собственной форме колебания, т. е.

$$x_0 \hat{m} K_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_0 \hat{k} K_1 = 0. \quad (8.2.15)$$

Тогда в выражении (8.2.12) суммирование начинается с $s=2$ и самой низкой частотой окажется частота ω_2 . Приводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, получим

$$\omega_2^2 = \min \frac{x_0 \hat{k} x_0}{x_0 \hat{m} x_0}. \quad (8.2.16)$$

Минимум этого выражения при дополнительном условии ортогональности (8.2.15) достигается, когда $x_0 = C_2 K_2$, т. е. когда начальное распределение колебаний совпадает со второй собственной формой. Аналогичным образом можно найти все собственные частоты колебаний ω_s и собственные формы K_s .

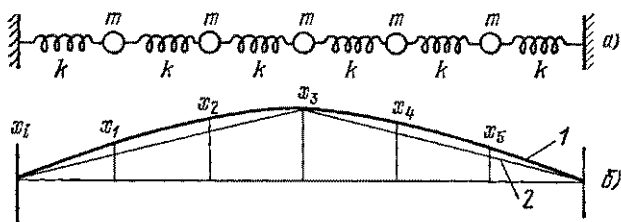


Рис. 8.1. Механическая колебательная система с пятью степенями свободы (а) и распределение амплитуд колебаний на наимизшей частоте (б).

1 — точное решение, 2 — кусочно-линейная аппроксимация.

Тот факт, что величины квадратов собственных частот являются экстремумами определенных выражений, позволяет приближенно находить собственные частоты, не зная точно собственных форм колебаний. Если в правую часть (8.2.14) в качестве x_0 подставить распределение амплитуд, близкое к $K_1 C_1$, то ошибка в определении ω_1 будет очень мала, так как функция вблизи минимума

слабо зависит от аргумента. В качестве примера рассчитаем наименьшую частоту собственных колебаний механической системы, состоящей из пяти одинаковых масс m , связанных пружинками с коэффициентом упругости k (рис. 8.1). Точное решение задачи приведено в § 8.6. Из решения следует, что распределение амплитуд на самой низкой частоте является синусоидальным (см. кривую 1 на рис. 8.1, б), т. е. форма собственного колебания K_1 имеет вид

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частота данного колебания равна

$$\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{3})k/m}.$$

Покажем, что достаточно близкое значение собственной частоты можно получить из соотношения (8.2.14), если в качестве x_0 подставить кусочно-линейное распределение амплитуд, соответствующее кривой 2 на рис. 8.1, б:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\hat{m}$ и $\hat{k}$ для рассматриваемой системы можно записать в виде

$$\hat{m} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Производя матричное перемножение, получим

$$x_0 \hat{k} x_0 = 8/3 k, \quad x_0 \hat{m} x_0 = 8^4/3 m.$$

Подставляя найденные выражения в (8.2.14), определим приближенно собственную частоту системы ω_1^2 :

$$\omega_1^2 = 6k/19m.$$

Это приближенное значение частоты отличается от точного не более чем на 8%. Если x_0 считать параболическим распределением

амплитуд, то ошибка в определении собственной частоты будет менее 1%.

Приведенный пример наглядно иллюстрирует то обстоятельство, что даже приближенное знание формы собственных колебаний позволяет точно определить соответствующую собственную частоту.

§ 8.3. Колебания n -атомной молекулы

Многоатомная молекула представляет собой систему взаимодействующих атомов. Если общее число атомов, входящих в молекулу, равно n , то молекула имеет $3n$ степеней свободы. Однако не все эти степени свободы являются колебательными. При произвольном расположении атомов молекула имеет три поступательных степени свободы, соответствующих ее смещению как целого, и три вращательных степени свободы, соответствующих вращению молекулы вокруг трех ортогональных осей. Таким образом, полное число колебательных степеней свободы n -атомной молекулы равно $3n - 6$.

В одном важном частном случае, а именно, при расположении всех атомов данной молекулы вдоль одной прямой, молекула называется линейной. Число колебательных степеней свободы линейной молекулы равно $3n - 5$, так как вращение вокруг данной оси молекулы нельзя рассматривать как самостоятельную степень свободы. Вдоль оси линейной молекулы расположены n атомов, поэтому возможны n независимых движений вдоль этой оси. Из них одно движение является поступательным, а $n - 1$ — колебательными. Таким образом, для колебательных движений, выводящих атомы с оси молекулы, остается $3n - 5 - (n - 1) = 2(n - 2)$ степеней свободы. Поскольку обе ортогональные плоскости, проходящие через ось молекулы равноправны, то все колебания, выводящие атомы с оси молекулы, дважды вырождены. Таким образом, линейная молекула из n атомов имеет $2n - 3$ различные частоты собственных колебаний. При $n = 2$ имеется лишь одна собственная частота, при $n = 3$ — три собственные частоты и т. д. Примером линейной трехатомной молекулы может служить молекула углекислого газа CO_2 . Эта молекула имеет четыре колебательные степени свободы. Два нормальных колебания молекулы происходят вдоль ее оси. Третье и четвертое колебания выводят атомы с оси молекулы. Рассчитаем собственные частоты и коэффициенты распределения амплитуд по координатам для этой молекулы. Пусть атомы расположены по оси OX и имеют координаты x_1, x_2, x_3 . Запишем кинетическую и потенциальную энергии для колебаний атомов вдоль оси молекулы

$$T = \frac{1}{2}m_O(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_C\dot{x}_2^2, \quad V = \frac{1}{2}k[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2],$$

(8.3.1)

где k — коэффициенты упругости, соответствующие продольным колебаниям молекулы. Исключим поступательное движение молекулы, закрепив ее центр масс

$$m_O x_1 + m_C x_2 + m_O x_3 = 0. \quad (8.3.2)$$

Исключая из соотношения (8.3.2) координату атома углерода

$$x_2 = -\frac{m_O}{m_C} (x_1 + x_3), \text{ получим}$$

$$V = \frac{k}{2} \left\{ \left[x_1 \left(1 + \frac{m_O}{m_C} \right) + x_3 \frac{m_O}{m_C} \right]^2 + \left[x_3 \left(1 + \frac{m_O}{m_C} \right) + x_1 \frac{m_O}{m_C} \right]^2 \right\}, \quad (8.3.3)$$

$$T = \frac{m_O}{2} \left(1 + \frac{m_O}{m_C} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{m_O}{2} \left(1 + \frac{m_O}{m_C} \right) \dot{x}_3^2 + \frac{m_O^2}{m_C} \dot{x}_1 \dot{x}_3.$$

Используя эти выражения для кинетической и потенциальной энергий, запишем уравнения Лагранжа для движения атомов молекулы вдоль оси OX

$$\begin{aligned} m_O \chi \ddot{x}_1 + \frac{m_O^2}{m_C} \ddot{x}_3 + \left(k \chi^2 + k \frac{m_O^2}{m_C^2} \right) x_1 + 2k \chi \frac{m_O}{m_C} x_3 &= 0, \\ \frac{m_O^2}{m_C} \ddot{x}_1 + m_O \chi \ddot{x}_3 + 2k \chi \frac{m_O}{m_C} x_1 + k \left(\chi^2 + \frac{m_O^2}{m_C^2} \right) x_3 &= 0, \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

где $\chi = 1 + m_O/m_C$.

Матрицы массы и упругости для молекулы углекислого газа в соответствии с (8.3.4) имеют следующий вид:

$$\hat{m} = m_O \begin{pmatrix} \chi & \frac{m_O}{m_C} \\ \frac{m_O}{m_C} & \chi \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = k \begin{pmatrix} \chi^2 + \frac{m_O^2}{m_C^2} & 2\chi \frac{m_O}{m_C} \\ 2\chi \frac{m_O}{m_C} & \chi^2 + \frac{m_O^2}{m_C^2} \end{pmatrix}.$$

Частоты колебаний вдоль оси OX найдем из уравнения (8.1.10). Подставляя в это уравнение матрицы массы $\hat{m}$ и упругости $\hat{k}$, получим

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_O \chi + k \left(\chi^2 + \frac{m_O^2}{m_C^2} \right) & -\omega^2 \frac{m_O^2}{m_C} + 2k \chi \frac{m_O}{m_C} \\ -\omega^2 \frac{m_O^2}{m_C} + 2k \chi \frac{m_O}{m_C} & -\omega^2 m_O \chi + k \left(\chi^2 + \frac{m_O^2}{m_C^2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (8.3.5)$$

Определим из последнего уравнения собственные частоты колебаний

$$\omega_1^2 = k/m_O, \quad \omega_2^2 = k \left(1 + \frac{2m_O}{m_C} \right) / m_O.$$

Матричное уравнение (8.1.12) дает возможность найти вектор

коэффициентов распределения амплитуд на каждой из частот

$$K_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad K_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2m_O/m_C \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8.3.6)$$

Из вида вектора K_1 следует, что колебание с частотой ω_1 полно-симметрично (рис. 8.2, а), т. е. симметрия молекулы при колебаниях не меняется. Это колебание носит название валентного, так как при нем меняется расстояние между атомами углерода и

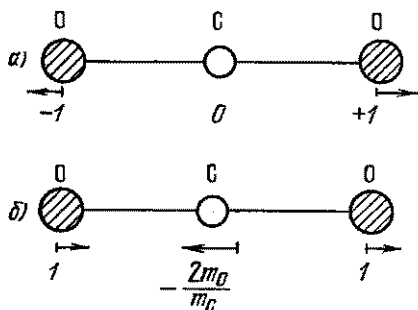


Рис. 8.2. Схема продольных колебаний атомов в молекуле CO_2 .

а) Симметричные колебания; б) антисимметричные колебания.

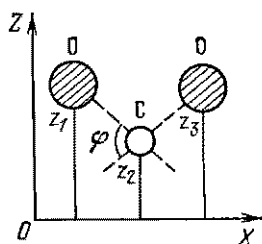


Рис. 8.3. Схема изгибных колебаний молекулы CO_2 .

кислорода, определяемое валентными силами. Колебание с частотой ω_2 является антисимметричным валентным колебанием (рис. 8.2, б).

Рассмотрим теперь изгибное колебание молекулы CO_2 . Пусть изгиб происходит в плоскости ZOX (рис. 8.3). Условие неподвижности центра масс в данном случае имеет вид

$$m_O z_1 + m_C z_2 + m_O z_3 = 0, \quad z_2 = -\frac{m_O}{m_C} (z_1 + z_3). \quad (8.3.7)$$

Исключая вращение молекулы как целого вокруг ее центра масс, получим следующее дополнительное условие, означающее равенство нулю момента количества движения молекулы CO_2 , $m_O \dot{z}_1 l = m_O \dot{z}_3 l$. Отсюда и из соотношения (8.3.7) можно выразить координаты z_2 и z_3 через z_1 : $z_3 = z_1$; $z_2 = -2m_O z_1 / m_C$.

Учитывая эти равенства, получим выражение для кинетической энергии изгибных колебаний молекулы CO_2

$$T = m_O (1 + 2m_O/m_C) \dot{z}_1^2. \quad (8.3.8)$$

Угол изгиба молекулы φ связан с координатами атомов z_i

соотношением

$$\varphi \approx (z_1 - z_2)/l + (z_3 - z_2)/l,$$

справедливым для малых углов φ .

В том же приближении потенциальная энергия изгиба пропорциональна квадрату φ

$$V = k' \varphi^2 = 4 \frac{k'}{l^2} \left(1 + \frac{2m_O}{m_C}\right)^2 z_1^2, \quad (8.3.9)$$

где k' — коэффициент упругости, соответствующий изгибным колебаниям молекулы. Уравнение изгибных колебаний принимает в этом случае вид

$$m_O \left(1 + \frac{2m_O}{m_C}\right) \ddot{z}_1 + \frac{4k'}{l^2} \left(1 + \frac{2m_O}{m_C}\right)^2 z_1 = 0. \quad (8.3.10)$$

Таким образом, частота изгибных колебаний молекулы CO_2 равна

$$\omega_3 = \frac{4k'}{m_O l^2} \left(1 + \frac{2m_O}{m_C}\right). \quad (8.3.11)$$

Вектор коэффициентов распределения амплитуд на этой частоте имеет вид

$$\mathbf{K}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2m_O/m_C \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8.3.12)$$

Колебание с частотой ω_3 носит название деформационного колебания. Оно нарушает симметрию молекул (см. рис. 8.3) и является вырожденным. Вырождение связано с тем, что плоскости ZOX и YOX равноправны. Поэтому в плоскости YOX возможно изгибное колебание той же частоты ω_3 .

Описанные выше собственные колебания молекулы CO_2 используются в газовом лазере на углекислом газе. Упрощенная схема энергетических уровней молекул CO_2 и азота N_2 , входящих в состав газовой смеси лазера, приведена на рис. 8.4. Электронный поток газового разряда возбуждает с большой эффективностью колебания, соответствующие наинизшему уровню молекул азота E_1 . Частота этих колебаний близка к частоте ω_2 антисимметричных колебаний молекулы CO_2 . В результате неупругого столкновения молекул N_2 и CO_2 происходит возбуждение антисимметричного колебания CO_2 и молекула переходит на энергетический уровень E_2 . Этот уровень метастабилен. С него возможны переходы на более низкий возбужденный уровень симметричного колебания E_3 и второй возбужденный уровень деформационного колебания E_4 . Уровни E_3 и E_4 близки, между ними в результате неупругого взаимодействия молекул существует сильная связь. Деформационные колебания молекулы CO_2 легко передают свою

энергию электронам газового разряда. Поэтому уровни E_3 и E_4 имеют малую населенность. Переходы между E_2 и E_3 или E_2 и E_4 являются рабочими переходами лазера на CO_2 . Они соответствуют генерации излучения с длинами волн 10,6 и 9,6 мкм. Следует иметь в виду, что на рис. 8.4 представлен лишь схематический спектр наинизших энергетических уровней газовой смеси

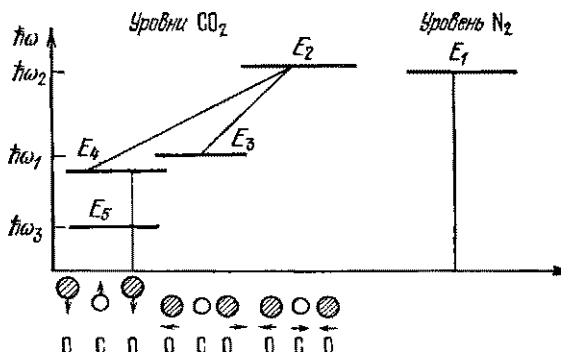


Рис. 8.4. Упрощенная схема энергетических уровней молекул CO_2 и N_2 .

CO_2 и N_2 . Реальный спектр значительно богаче, так как каждый колебательный уровень расщеплен на несколько близких вращательных уровней.

Рассмотрим теперь плоскую молекулу, у которой в положении равновесия все атомы расположены в одной плоскости. В этой

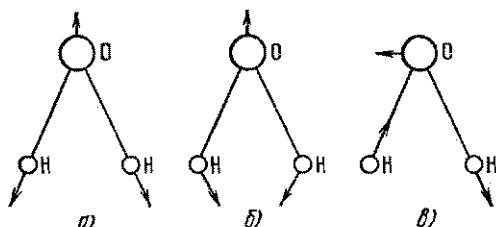


Рис. 8.5. Схемы колебаний атомов в молекуле H_2O .

а) Валентное колебание; б) деформационное; в) антисимметричное.

плоскости такая молекула имеет $2n$ степеней свободы. Из них две поступательные и одна вращательная, следовательно, число колебательных степеней свободы равно $2n - 3$. На долю колебаний, выводящих атомы из плоскости, остаются $3n - 6 - (2n - 3) = n - 3$ степени свободы. Это означает, что у трехатомной молекулы нет таких собственных колебаний, которые выводили бы атомы из плоскости. В качестве примера трехатомной молекулы

рассмотрим молекулу H_2O . У этой молекулы атомы в положении равновесия образуют равнобедренный треугольник. Как уже указывалось выше, все три возможных колебания молекулы происходят в одной плоскости. Схемы всех трех видов изображены на рис. 8.5, а, б, в. Первый вид колебаний (рис. 8.5, а) является валентным колебанием. При втором колебании, деформационном (рис. 8.5, б), изменяется угол между прямыми, связывающими атомы водорода с атомами кислорода. Первый и второй виды колебаний не меняют симметрии молекулы воды и потому полносимметричны. Третий вид колебаний (рис. 8.5, в) нарушает симметрию молекулы и антисимметричен. Поскольку масса атома кислорода в 16 раз больше массы атома водорода, при всех колебаниях смещение атома кислорода много меньше смещений атомов водорода.

§ 8.4. Вынужденные колебания в системах с n степенями свободы

В линейной системе с n степенями свободы справедлив принцип суперпозиции колебаний. Поэтому задача о вынужденных колебаниях в системе под действием любой периодической силы сводится к нахождению вынужденных движений системы в результате действия гармонической силы частоты p . В общем случае сила может действовать на каждую из координат. Таким образом, внешняя сила представляется вектором Fe^{ipt} , причем его составляющие описывают амплитуды сил, действующих на соответствующие координаты. Если рассматриваемая система консервативна, то уравнение ее колебаний в матричной форме принимает вид

$$\hat{m}\ddot{x} + \hat{k}x = Fe^{ipt}. \quad (8.4.1)$$

Вынужденные колебания системы, т. е. колебания, происходящие на частоте внешней силы, можно записать в виде

$$x = Ae^{ipt}, \quad (8.4.2)$$

где A — амплитудный вектор вынужденных колебаний. Подставляя решение (8.4.2) в (8.4.1), получим уравнение для амплитудного вектора

$$(\hat{k} - p^2\hat{m})A = F, \quad (8.4.3)$$

откуда имеем

$$A = (\hat{k} - p^2\hat{m})^{-1}F. \quad (8.4.4)$$

Таким образом, для отыскания выражения для вынужденного колебания в матричной форме необходимо найти матрицу, обратную матрице $\hat{k} - p^2\hat{m}$. Некоторые общие выводы о характере колебания можно сделать на основании вида решения (8.4.4). Матрица $(\hat{k} - p^2\hat{m})^{-1}$ при частоте p , равной одной из собственных

частот ω_s системы, обращается в бесконечность, так как определитель матрицы $\hat{k} - \omega_s^2 \hat{m}$ равен нулю (согласно (8.1.10)). Таким образом, при $p = \omega_s$ в системе имеет место резонанс.

Другой путь отыскания вынужденных колебаний состоит в разложении искомого решения по собственным колебаниям системы. Для этого амплитудный вектор A разлагают по K_s -векторам коэффициентов распределения амплитуды собственных колебаний системы:

$$A = \sum_{s=1}^n B_s K_s. \quad (8.4.5)$$

Теперь задача сводится к отысканию неизвестных коэффициентов B_s . Разложим внешнюю силу по векторам сил упругости:

$$F = \sum_{s=1}^n f_s \hat{k} K_s, \quad (8.4.6)$$

где f_s — коэффициенты разложения. Коэффициенты f_s можно найти, используя условие ортогональности собственных форм и векторов сил упругости (8.2.6). Умножая равенство (8.4.6) скалярно на K_s , запишем коэффициенты f_s в виде

$$f_s = \frac{(F K_s)}{K_s \hat{k} K_s}. \quad (8.4.7)$$

Подставляя (8.4.5) и (8.4.6) в уравнение (8.4.3), получим

$$\sum_{s=1}^n [B_s (1 - p^2/\omega_s^2) - f_s] \hat{k} K_s = 0. \quad (8.4.8)$$

Используя условие ортогональности (8.2.6), легко получить выражения для коэффициентов B_s :

$$B_s = \frac{f_s}{1 - p^2/\omega_s^2}. \quad (8.4.9)$$

Отсюда амплитуда вынужденных колебаний равна

$$A = \sum_{s=1}^n \frac{f_s K_s}{1 - p^2/\omega_s^2}. \quad (8.4.10)$$

Из (8.4.10) непосредственно видно, что при $p \rightarrow \omega_s$ амплитуды всех координат стремятся к бесконечности, т. е. происходит резонансное возрастание амплитуды. Резонанса на частоте ω_s не будет, если вектор внешней силы ортогонален s -му собственному колебанию. В соответствии с (8.4.7) коэффициент f_s в этом случае равен нулю. В системе с n степенями свободы резонансное возрастание амплитуды может не наступать и при действиях внеш-

ней силы только на одну l -ю координату. Это будет в том случае, если на данной частоте ω_s x_{sl} обращается в нуль, т. е. l -я координата является узлом s -го колебания, и, таким образом, сила приложена в узле соответствующего колебания.

§ 8.5. Колебания в диссипативных системах с n степенями свободы

При наличии затухания расчет колебаний для систем с n степенями свободы становится еще более громоздким. Если затухание имеет характер вязкого трения, то можно ввести матрицу рассеяния энергии вида

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \quad (8.5.1)$$

и решать матричное уравнение

$$\hat{m}\ddot{x} + \hat{h}\dot{x} + \hat{k}x = 0 \quad (8.5.2)$$

или

$$\hat{m}\ddot{x} + \hat{h}\dot{x} + \hat{k}x = Fe^{ipt} \quad (8.5.3)$$

в зависимости от того, ищем ли мы собственные или вынужденные колебания.

Собственные колебания системы можно искать в виде

$$x(t) = Ae^{\lambda t}. \quad (8.5.4)$$

Подставляя (8.5.4) в (8.5.2), получим уравнение степени $2n$ для определения λ

$$|\hat{m}\lambda^2 + \hat{h}\lambda + \hat{k}| = 0. \quad (8.5.5)$$

Так как уравнение (8.5.5) имеет действительные коэффициенты, то все его комплексные корни будут попарно сопряженными, т. е.

$$\lambda_s = \delta_s + j\omega_s, \quad \lambda_s^* = \delta_s - j\omega_s, \quad (8.5.5a)$$

где δ_s и ω_s — действительные числа.

Можно показать, что для неконсервативной диссипативной системы, не содержащей источников энергии, все $\delta_s > 0$. Величины λ_s часто называют *комплексными собственными частотами* системы. Подставляя λ_s из (8.5.5a) в (8.5.4) и учитывая (8.5.2), получим уравнения для определения коэффициентов распределения. В данном случае коэффициенты распределения будут комплексными. Общее решение системы уравнений (8.5.2) имеет вид

$$x(t) = \sum_s C_s e^{-\delta_s t} K_s \cos(\omega_s t + \varphi_s). \quad (8.5.6)$$

Здесь компоненты векторов $\mathbf{K}_s$ комплексны и могут быть представлены в виде $\kappa_{sl} \exp [j\psi_{sl}]$.

Колебание каждой координаты представляет собой суперпозицию затухающих колебаний, причем из-за комплексности коэффициентов распределения колебания на частоте ω_s в разных координатах сдвинуты по фазе на величину ψ_{sl} . Амплитуда C_s и фаза φ_s , как обычно, определяются из начальных условий.

При исследовании вынужденных колебаний в неконсервативной системе с n степенями свободы необходимо решать уравнение (8.5.3).

Разлагая амплитудный вектор вынужденных колебаний $\mathbf{A}e^{jpt}$ по векторам $\mathbf{K}_s$, получим

$$\mathbf{A} = \sum_{s=1}^n \frac{f_s \mathbf{K}_s}{1 - p^2/\omega_s^2 + j2\delta_s p/\omega_s^2}. \quad (8.5.7)$$

Таким образом, при совпадении частоты внешней силы с одной из собственных частот резонанс наблюдается в неконсервативной системе. Однако амплитуда вынужденных колебаний при резонансе остается ограниченной.

§ 8.6. Колебания в однородных цепочках

Анализ колебаний в системе с n степенями свободы значительно упрощается, если система представляет собой цепочку последовательно включенных однородных элементов. Рассмотрение собственных колебаний в такой цепочке представляет интерес в связи с тем, что цепочка является одномерным аналогом

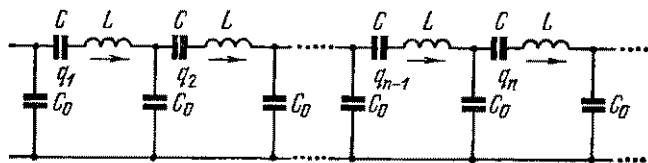


Рис. 8.6. Схема однородной цепочки.

кристаллической решетки, состоящей из одинаковых атомов. Однородные электрические и механические цепочки в режиме вынужденных колебаний используются в качестве фильтров, пропускающих или задерживающих определенную полосу частот.

Рассмотрим колебания в однородной цепочке на примере полосового фильтра, изображенного на рис. 8.6. Выберем в качестве независимых координат заряды q_i , прошедшие к моменту времени t через поперечное сечение соответствующих катушек.

Запишем в этих координатах магнитную и электрическую энергии системы, состоящей из $N+1$ элементов:

$$2T = \sum_{n=1}^{N+1} L \dot{q}_n^2, \quad 2V = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{q_n^2}{C} + \frac{(q_n - q_{n-1})^2}{C_0}. \quad (8.6.1)$$

Уравнения Лагранжа для цепочки с энергией (8.6.1) имеют вид

$$L \ddot{q}_n + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_0} \right) q_n - \frac{1}{C_0} (q_{n-1} + q_{n+1}) = 0. \quad (8.6.2)$$

Уравнение (8.6.2) справедливо для любого звена цепочки, кроме первого и последнего. Заряды в 1-м и $(N+1)$ -м звеньях цепочки определяются граничными условиями. Рассмотрим случай системы с разомкнутыми концами, т. е.

$$q_1 = 0, \quad q_{N+1} = 0. \quad (8.6.3)$$

Частное решение системы уравнений (8.6.2) ищем в виде

$$q_n = Q_n e^{j\omega t}. \quad (8.6.4)$$

Подставляя решение (8.6.4) в (8.6.2), получим соотношение, связывающее амплитуды колебаний в соседних элементах цепочки

$$(\nu^2 - \omega^2) Q_n - \alpha (Q_{n-1} + Q_{n+1}) = 0, \quad n = 2, \dots, N, \quad (8.6.5)$$

где $\nu^2 = 1/LC + 2/LC_0$ — квадрат парциальной частоты, $\alpha = 1/LC_0$ — коэффициент связи.

Решение системы уравнений (8.6.5) можно записать следующим образом:

$$Q_n = A e^{jn\beta}. \quad (8.6.6)$$

При подстановке (8.6.6) в (8.6.5) получим

$$\nu^2 - \omega^2 - \alpha (e^{j\beta} + e^{-j\beta}) = 0. \quad (8.6.7)$$

Отсюда

$$\cos \beta = \frac{\nu^2 - \omega^2}{2\alpha}. \quad (8.6.8)$$

Величина β в соответствии с (8.6.6) представляет собой сдвиг фаз на одном элементе цепочки. Поэтому уравнение (8.6.8), связывающее частоту колебаний ω и сдвиг фаз β , называется *дисперсионным уравнением* цепочки. Действительные значения β имеют место лишь при условии

$$\frac{|\nu^2 - \omega^2|}{2\alpha} \leq 1, \quad \nu^2 - 2\alpha \leq \omega^2 \leq \nu^2 + 2\alpha. \quad (8.6.9)$$

Каждому значению ω из интервала (8.6.9) соответствует два равных по модулю, но отличающихся знаком значения β .

Таким образом, общее решение системы уравнений (8.6.5) имеет вид

$$Q_n = Ae^{i\beta n} + Be^{-i\beta n}. \quad (8.6.10)$$

Для нахождения собственных частот колебаний цепочки воспользуемся граничными условиями (8.6.3)

$$Ae^{i\beta} + Be^{-i\beta} = 0, \quad Ae^{i\beta(N+1)} + Be^{-i\beta(N+1)} = 0. \quad (8.6.11)$$

Эта система уравнений совместна, если

$$\sin \beta N = 0, \quad (8.6.12)$$

т. е. $\beta N = \pi$ или $\beta = \pi/N$ и $B = -Ae^{-2i\beta}$.

Используя соотношение (8.6.8), найдем собственные частоты

$$\omega_s^2 = v^2 - 2\alpha \cos \frac{\pi s}{N}. \quad (8.6.13)$$

Так как цепочка с разомкнутыми концами ($q_1 = 0$, $q_{N+1} = 0$) представляет систему с $N-1$ степенью свободы, то мы имеем $N-1$ различных собственных частот: $s=1, 2, \dots, N-1$, лежащих в полосе прозрачности системы (8.6.9). Значения $s=0$ и $s=N$ дают критические частоты: $\omega_{кр1}^2 = v^2 - 2\alpha$ и $\omega_{кр2}^2 = v^2 + 2\alpha$. При $s > N$ из (8.6.13) получатся те же значения ω_s , что и при $s < N$. Из (8.6.10), учитывая (8.6.12), можно найти выражения для амплитуд Q_{ns} . Первый индекс у амплитуды заряда относится к номеру звена, второй — к номеру собственной частоты.

$$Q_{ns} = A_s \exp [j\pi sn/N] + B_s \exp [-j\pi sn/N]. \quad (8.6.14)$$

При $s=0$ и $s=N$ Q_{ns} равно нулю, т. е. амплитуды всех координат на критической частоте равны нулю.

Таким образом, собственные колебания цепочки из $N+1$ элементов с разомкнутыми концами описываются следующими выражениями:

$$q_n = \sum_{s=1}^{N-1} D_s \sin \frac{\pi s (n-1)}{N} \cos (\omega_s t + \varphi_s), \quad n = 1, 2, \dots, N+1. \quad (8.6.15)$$

Величины D_s и φ_s определяются начальными условиями. Собственное колебание n -го звена цепочки представляет суперпозицию N нормальных колебаний. Распределение амплитуд по координатам для каждой собственной частоты происходит по синусоидальному закону.

На рис. 8.7 показано распределение амплитуд Q_{ns} по звеньям цепочки на каждой собственной частоте для случая $N=6$, $q_1 = q_7 = 0$. Как видно из рисунка, при $\omega = \omega_1$ колебания во всех элементах цепочки происходят в фазе и на длине цепочки укладывается одна полуволна. С увеличением номера s количество

полувольт, укладываемых вдоль цепочки, растет. На s -й собственной частоте число полувольт равно s .

Рассмотрим теперь вынужденные колебания в однородной цепочке, изображенной на рис. 8.8. Предположим, что на одном конце цепочки действует гармоническая внешняя сила $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{jpt}$, а другой ее конец нагружен произвольным сопротивлением Z_H . Используем так называемое Т-разбиение, т. е. представим цепочку в виде последовательно соединенных Т-образных четырехполосников (рис. 8.9).

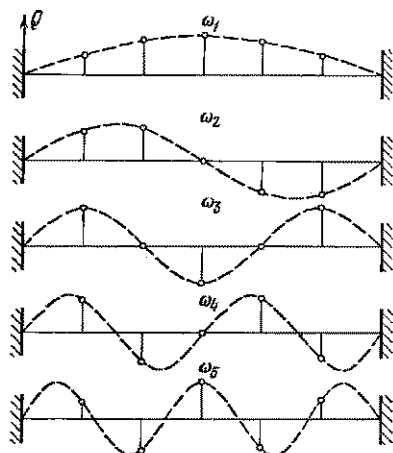


Рис. 8.7. Распределение амплитуд по звеньям однородной цепочки на каждой из собственных частот колебаний.

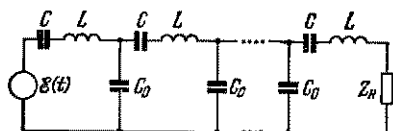


Рис. 8.8. Схема однородной цепочки с внешней силой и нагрузкой на конце.

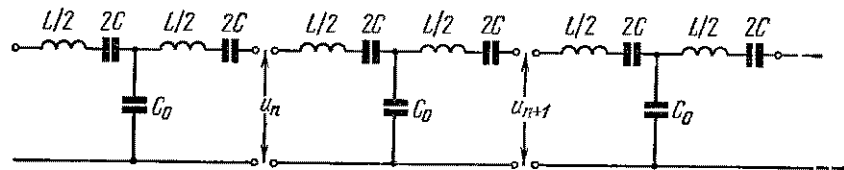


Рис. 8.9. Представление однородной цепочки в виде последовательно соединенных Т-образных четырехполосников.

Для напряжений на входе (u_n) и выходе (u_{n+1}) n -го звена запишем следующие уравнения Кирхгофа:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{L}{2} \frac{di_n}{dt} + \frac{1}{C_0} \int (i_n - i_{n+1}) dt + \frac{1}{2C} \int i_n dt, \\ -u_{n+1} &= \frac{1}{C_0} \int (i_{n+1} - i_n) dt + \frac{L}{2} \frac{di_{n+1}}{dt} + \frac{1}{2C} \int i_{n+1} dt. \end{aligned} \quad (8.6.16)$$

Нас интересуют только вынужденные колебания, и поэтому представим напряжения и токи в виде

$$\begin{aligned} u_n(t) &= U_n \exp(jpt), & u_{n+1}(t) &= U_{n+1} \exp(jpt), \\ i_n(t) &= I_n \exp(jpt), & i_{n+1}(t) &= I_{n+1} \exp(jpt), \end{aligned} \quad (8.6.17)$$

где U_n , I_n , U_{n+1} , I_{n+1} — комплексные амплитуды напряжений и токов.

При подстановке (8.6.17) в (8.6.16) получим следующие алгебраические уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} U_n &= (Z_1 + Z_2) I_n - Z_2 I_{n+1}, \\ -U_{n+1} &= -Z_2 I_n + (Z_1 + Z_2) I_{n+1}, \end{aligned} \quad (8.6.18)$$

где Z_1 , Z_2 — комплексные последовательное и параллельное сопротивления звена.

Отметим, что уравнения (8.6.18) справедливы для симметричной цепочки, состоящей из T звеньев, содержащих любую комбинацию линейных комплексных сопротивлений.

Решение системы уравнений (8.6.18) ищем в виде

$$U_n = A e^{\gamma n}, \quad I_n = B e^{\gamma n}, \quad (8.6.19)$$

где γ в общем случае может быть комплексной величиной, т. е.

$$\gamma = \tilde{\alpha} + j\beta. \quad (8.6.20)$$

Подстановка предполагаемого решения (8.6.19) в (8.6.18) дает два линейных однородных уравнения относительно комплексных амплитуд A и B

$$A = (Z_1 + Z_2) B - Z_2 e^{\gamma} B, \quad -A = -Z_2 e^{-\gamma} B + (Z_1 + Z_2) B. \quad (8.6.21)$$

Нетривиальное решение эта система уравнений имеет в том случае, когда ее детерминант равен нулю. Равенство нулю детерминанта приводит к следующему соотношению:

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 + Z_1/Z_2. \quad (8.6.22)$$

Последнее выражение дает связь между частотой внешней силы p и величиной γ , определяющей характер процесса.

Рассмотрим отдельно две возможности: $|1 + Z_1/Z_2| \leq 1$, $|1 + Z_1/Z_2| > 1$.

Для рассматриваемой схемы неравенство $|1 + Z_1/Z_2| \leq 1$ справедливо, если частота p лежит в пределах

$$p_1^2 = v^2 - 2\alpha \leq p^2 \leq v^2 + 2\alpha = p_2^2. \quad (8.6.23)$$

В этом случае γ — чисто мнимая величина, причем существуют два различающихся знаками значения γ

$$\gamma_1 = -j\beta \quad \text{и} \quad \gamma_2 = j\beta.$$

Соответственно решение (8.6.19) можно записать в виде

$$U_n = A_1 e^{-j\beta n} + A_2 e^{j\beta n}, \quad I_n = B_1 e^{-j\beta n} + B_2 e^{j\beta n}. \quad (8.6.24)$$

Для каждого значения γ можно найти из (8.6.21) связь между комплексными амплитудами A_s и B_s ($s=1, 2$). Так, для $\gamma_1 = -j\beta$

получим: $B_1/A_1 = 1/(Z_1 + Z_2 - Z_2 e^{-j\beta})$ или, учитывая соотношение (8.6.22),

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{1}{jZ_2 \sin \beta}. \quad (8.6.25)$$

Соответственно для $\gamma_2 = j\beta$ имеем

$$\frac{B_2}{A_2} = -\frac{1}{jZ_2 \sin \beta}. \quad (8.6.26)$$

Таким образом, решения (8.6.24) можно записать в виде

$$u_n(t) = A_1 \exp[j(pt - \beta n)] + A_2 \exp[j(pt + \beta n)], \quad (8.6.27)$$

$$i_n(t) = \frac{A_1}{jZ_2 \sin \beta} \exp[j(pt - \beta n)] - \frac{A_2}{jZ_2 \sin \beta} \exp[j(pt + \beta n)].$$

Каждое из слагаемых (8.6.27) можно рассматривать как бегущую волну. Однако в отличие от непрерывной среды фаза волны меняется не непрерывно, а скачком на величину β при переходе от n -го звена цепочки к $n+1$ -му.

Мы предположили, что входным звеном цепочки, к которому приложена внешняя э. д. с., служит звено с номером $n=0$. В (8.6.27) первые слагаемые соответствуют волне, бегущей от источника, а вторые — волне, отраженной от нагрузки. Амплитуды этих волн можно определить из следующих граничных условий

$$u_0 = \mathcal{E}_0 \exp(jpt), \quad u_N = i_N Z_n. \quad (8.6.28)$$

Из второго граничного условия, которое задает связь между напряжением и током на выходе цепочки ($n=N$), можно найти отношение A_2/A_1

$$jZ_2 \sin \beta \frac{\exp(-j\beta N) + (A_2/A_1) \exp(j\beta N)}{\exp(-j\beta N) - (A_2/A_1) \exp(j\beta N)} = Z_n. \quad (8.6.29)$$

Вводя обозначение $jZ_2 \sin \beta = Z_0$, перепишем (8.6.29) в виде

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{Z_n - Z_0}{Z_n + Z_0} \exp(-j2\beta N). \quad (8.6.30)$$

Если сопротивление нагрузки Z_n равно Z_0 , то, как видно из последнего соотношения, отраженная волна в цепочке отсутствует. Величину Z_0 называют *волновым сопротивлением цепочки*. Если цепочка нагружена волновым сопротивлением, то вся энергия, распространяющаяся по ней, будет поглощаться этим сопротивлением. В отсутствие потерь волновое сопротивление выражается действительной величиной, зависящей от параметров цепочки и частоты вынуждающей силы. Для рассматриваемой цепочки Z_0 равно

$$Z_0 = \frac{1}{pC_0} \sqrt{1 - \left(\frac{v^2 - p^2}{2\alpha}\right)^2}. \quad (8.6.31)$$

Вследствие зависимости волнового сопротивления от частоты условие согласования цепочки с нагрузкой ($Z_n = Z_0$) не может выполняться в широкой полосе частот.

Если $Z_n \neq Z_0$, то наряду с волной, бегущей от источника, существует и отраженная волна. Решение (8.6.27) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} u_n(t) &= A_1 \exp[j(pt - \beta n)] + \frac{Z_n - Z_0}{Z_n + Z_0} A_1 \exp[j(pt + \beta n - 2\beta N)], \\ i_n(t) &= \frac{A_1}{Z_0} \left[\exp[j(pt - \beta n)] - \frac{Z_n - Z_0}{Z_n + Z_0} \exp[j(pt + \beta n - 2\beta N)] \right]. \end{aligned} \quad (8.6.32)$$

По аналогии с непрерывной системой отношение комплексной амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей называют *коэффициентом отражения в n -м звене*

$$R = \frac{Z_n - Z_0}{Z_n + Z_0} \exp[-j2\beta(N - n)]. \quad (8.6.33)$$

При $Z_n \neq Z_0$ лишь часть энергии поглощается в нагрузке, остальная часть возвращается к источнику энергии.

Для короткозамкнутой цепочки ($Z_n = 0$) и разомкнутой цепочки ($Z_n \rightarrow \infty$) модуль коэффициента отражения $|R| = 1$ и в цепочке существует чисто стоячая волна. Так, для $Z_n = 0$

$$u_n(t) = D_1 \cos pt \sin \beta(N - n), \quad (8.6.34)$$

где $D_1 = 2je^{-i\beta N} A_1$; для $Z_n \rightarrow \infty$

$$u_n(t) = D_2 \cos pt \cos \beta(N - n),$$

где $D_2 = 2e^{-i\beta N} A_1$.

Для чисто стоячей волны поток энергии от источника к нагрузке равен нулю. Амплитуду A_1 в (8.6.32) и (8.6.34) можно определить из первого граничного условия (8.6.28).

Кроме волнового сопротивления, практически важны следующие параметры цепочки:

а) входное сопротивление, определяемое как отношение напряжения к току на входе линии:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_0}{I_0} = Z_0 \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}; \quad (8.6.35)$$

б) коэффициент передачи цепочки, т. е. отношение напряжения выходного сигнала к напряжению входного:

$$\tilde{K} = \frac{U_N}{U_0}. \quad (8.6.36)$$

Если на входе линии включен источник, внутреннее сопротивление которого много меньше волнового, то (8.6.36) принимает вид

$$\tilde{K} = U_N / \mathcal{E}_0. \quad (8.6.37)$$

При согласовании нагрузки с волновым сопротивлением цепочки ($Z_n = Z_0$) получим $Z_{вх} = Z_0$ и $|\tilde{K}| = 1$. В случае несогласованной цепочки ($Z_n \neq Z_0$) входное сопротивление и коэффициент передачи при изменении частоты могут принимать любые значения от нуля до бесконечности.

Рассмотрим теперь второй возможный случай: $|1 + Z_1/Z_2| > 1$. Это неравенство справедливо либо при

$$\beta = 0 \text{ и } \operatorname{ch} \tilde{\alpha} > 1, \quad (8.6.38)$$

либо при

$$\beta = \pi \text{ и } \operatorname{ch}(\tilde{\alpha} + j\pi) = -\operatorname{ch} \tilde{\alpha} < -1. \quad (8.6.39)$$

Область частот, для которых $\beta = 0$ и $\operatorname{ch} \tilde{\alpha} > 1$, располагается между нулем и частотой p_1 , т. е.

$$0 \leq p^2 < p_1^2 = v^2 - 2\alpha. \quad (8.6.40)$$

В этом диапазоне значений p решение (8.6.19) имеет вид

$$U_n = A_1 e^{-\tilde{\alpha}n} + A_2 e^{\tilde{\alpha}n}. \quad (8.6.41)$$

Здесь первый член характеризует колебательный процесс, при котором все звенья колеблются в фазе, но амплитуда колебаний экспоненциально уменьшается в направлении увеличения номера цепочки. При большом числе звеньев ($\tilde{\alpha}N \gg 1$) процесс затухнет раньше, чем колебания достигнут нагрузки. При выполнении этого условия второй член в (8.6.41), возникающий в результате отражения от нагрузки, можно не учитывать. В этом случае огибающая распределения напряжения по звеньям имеет вид экспоненты (рис. 8.10).

Коэффициент передачи цепочки для $\tilde{\alpha}N \gg 1$ будет равен

$$\tilde{K} = U_N/\mathcal{E}_0 = e^{-\tilde{\alpha}N}. \quad (8.6.42)$$

Отсюда следует, что $\tilde{K}$ падает с увеличением числа звеньев N , т. е. цепочка не пропускает колебаний всех частот, лежащих ниже значения p_1 .

Область частот, для которых $\beta = \pi$ и $|\operatorname{ch} \tilde{\alpha}| > 1$, простирается от p_2 до бесконечности. Решение для этой области частот имеет вид

$$U_n = (-1)^n (A_1 e^{-\tilde{\alpha}n} + A_2 e^{\tilde{\alpha}n}). \quad (8.6.43)$$

При большом числе звеньев ($\tilde{\alpha}N \gg 1$) мы можем ограничиться в решении только первым членом. В этом случае распределение

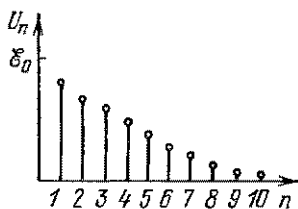


Рис. 8.10. Распределение напряжений по звеньям цепочки для $p < p_1$.

амплитуд по звеньям описывается показательным законом. Однако в области частот $p > p_2$ соседние звенья колеблются в противофазе (рис. 8.11). Коэффициент передачи по модулю совпадает с $\tilde{K}$, определяемым формулой (8.6.42). При большом N коэффициент $\tilde{K}$ для всех частот $p < p_1$ и $p > p_2$ может быть сделан очень малым.

Таким образом, рассмотренная цепочка представляет собой полосовой фильтр, пропускающий частоты, лежащие в полосе

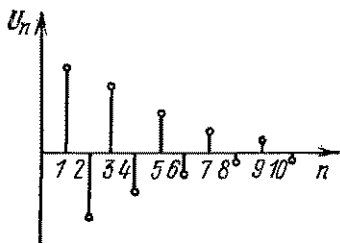


Рис. 8.11. Распределение напряжений по звеньям цепочки для $p > p_2$.

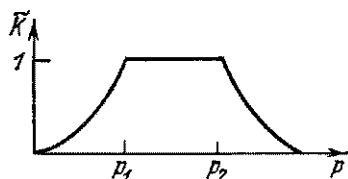


Рис. 8.12. Частотная характеристика полосового фильтра.

прозрачности (8.6.23), и отфильтровывающий частоты $p < p_1$ и $p > p_2$. Частоты p_1 и p_2 являются граничными частотами фильтра.

Частотная характеристика полосового фильтра, т. е. зависимость коэффициента передачи от частоты, при отсутствии затухания и $Z_n = Z_0$ имеет вид, изображенный на рис. 8.12. Наличие затухания сглаживает резкость изменения $\tilde{K}$ при переходе через граничные частоты.

В случае симметричных цепочек со структурой звеньев, отличной от рассмотренной нами, полоса пропускания будет определяться общим соотношением $|1 + Z_1/Z_2| \leq 1$.

Крутизна спада характеристики при $p < p_1$ и $p > p_2$ зависит от числа звеньев N . Чем больше N , тем резче спад характеристики.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И АУТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 9.1. Параметрические системы с n степенями свободы. Соотношения Мэнли — Роу

Системы с n степенями свободы находят применение в параметрических и автоколебательных устройствах. Параметрическая система с n степенями свободы состоит из нелинейной реактивности и линейной цепи с n контурами, настроенными на комбинационные частоты двух внешних сигналов, действующих на систему. Мэнли и Роу*) показали, что между мощностями, выделяющимися в каждом из контуров, существуют определенные

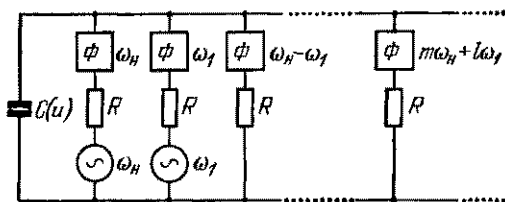


Рис. 9.1. Принципиальная схема многоконтурной параметрической системы.

соотношения. Эти соотношения позволяют определять максимальные коэффициенты усиления и преобразования сложной параметрической системы.

Рассмотрим поведение нелинейной емкости под действием двух э. д. с. несоизмеримых частот ω_1 и ω_n . Если связь между зарядом и напряжением u_C на этой емкости $q(u_C)$ однозначна, то заряд на нелинейной емкости будет содержать комбинационные частоты вида $|m\omega_n + l\omega_1|$, где m и l — любые положительные и отрицательные целые числа.

Пусть к емкости в параллель подключено бесконечное число линейных цепей, состоящих из фильтра Φ и сопротивления R (рис. 9.1). Фильтры считаем идеальными, т. е. пропускающими токи только одной частоты, соответствующей определенному значению чисел m и l . На каждом активном сопротивлении R выде-

*) Manley J., Rowe H. — Proc. IRE, 1956, 44, 904.

ляется мощность P_{ml} на частоте $|\omega_n m + l\omega_1|$, пропущенной соответствующим фильтром Φ . От внешних генераторов накачки и сигнала поступают мощность P_{10} на частоте накачки ω_n и мощность P_{01} на частоте сигнала ω_1 . Если нелинейная емкость свободна от потерь, то она не потребляет энергии, а преобразует поступающую на нее мощность в мощность колебаний P_{ml} на различных комбинационных частотах. Будем считать мощность, вводимую в систему, положительной, а мощности, рассеиваемые на сопротивлениях, — отрицательными. Тогда закон сохранения энергии для рассматриваемой системы можно записать в виде

$$\sum_{m, l=-\infty}^{+\infty} P_{ml} = 0. \quad (9.1.1)$$

Кроме этого очевидного соотношения, между мощностями существуют энергетические соотношения, называемые уравнениями или соотношениями Мэнли — Роу:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{mP_{ml}}{m\omega_n + l\omega_1} = 0, \quad (a) \quad (9.1.2)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{lP_{ml}}{m\omega_n + l\omega_1} = 0. \quad (б)$$

Эти соотношения можно получить, перемножая выражения для напряжений и токов с соответствующими частотами. Вывод (9.1.2) достаточно громоздок. Поэтому мы ограничимся лишь их физической трактовкой.

Рассмотрим сначала равенство (9.1.2, а). Если все его члены разделить на постоянную Планка $\hbar$, то выражения, стоящие в знаменателе каждого члена суммы, будут представлять собой энергию кванта колебаний соответствующей частоты и соотношение (9.1.2а) примет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{ml}}{\hbar(m\omega_n + l\omega_1)} = 0. \quad (9.1.3)$$

Так как от генератора накачки в систему подается мощность P_{10} , то член суммы $P_{10}/\hbar\omega_n$ больше нуля. Величина $P_{10}/\hbar\omega_n$, очевидно, равна числу квантов частоты ω_n , которые поступают за единицу времени на нелинейную емкость от генератора накачки. Среди остальных членов суммы положительными будут также те, для которых отрицательны как числитель ($P_{ml} < 0$, энергия рассеивается), так и знаменатель. Знаменатель может быть отрицателен при достаточно больших отрицательных l .

Рассмотрим один из таких членов. Его можно записать в виде

$$-\frac{mP_{ml}}{\hbar(l|\omega_1 - m\omega_n)} \quad (9.1.4)$$

Стоящее в знаменателе выражение является энергией одного кванта комбинационной частоты $|l|\omega_1 - m\omega_n$. На образование одного такого кванта затрачивается l квантов частоты ω_1 . Кроме того, в этом процессе выделяется m квантов частоты ω_n .

Так как выражение (9.1.4) представляет собой умноженное на m число квантов частоты $|l|\omega_1 - m\omega_n$, то его следует рассматривать как число квантов частоты ω_n , выделившееся в единицу времени на нелинейной емкости при возникновении колебаний соответствующей комбинационной частоты.

Любой отрицательный член суммы (9.1.3) можно считать равным числу квантов с частотой накачки, затрачиваемых в единицу времени на возбуждение колебаний с частотой $m\omega_n + l\omega_1$.

Таким образом, сумма (9.1.3) является алгебраической суммой числа квантов с частотой накачки, поступивших на нелинейную емкость от генератора накачки, числа квантов, выделившихся при возбуждении колебаний с некоторыми комбинационными частотами, и числа квантов, затраченных на создание колебаний со всеми остальными комбинационными частотами. Поэтому соотношение (9.1.2, а) выражает закон сохранения числа квантов частоты накачки. Аналогичные рассуждения показывают, что соотношение (9.1.2, б) можно рассматривать как закон сохранения числа квантов частоты сигнала ω_1 .

Из вида соотношений Мэнли—Роу следует, что независимо от вида нелинейности и вида потребителя энергии распределение мощности по комбинационным частотам определяется величиной и знаками комбинационных частот.

Применим соотношения Мэнли—Роу к анализу двухконтурных параметрических усилителей, рассмотренных в гл. 7.

Регенеративный усилитель. Пусть на нелинейную емкость действуют две э. д. с. с частотой накачки ω_n и частотой сигнала ω_1 , а в цепи имеется дополнительный контур — фильтр, настроенный на частоту $\omega_n - \omega_1$. Таким образом, в соотношения Мэнли—Роу войдут три мощности: P_{10} — мощность накачки, P_{01} — мощность сигнала и $P_{1(-1)}$ — мощность, выделяемая в дополнительном контуре. В этом случае в соотношении (9.1.2, а) нужно положить $m=1$ и $l=0, -1$, и тогда оно примет вид

$$\frac{P_{10}}{\omega_n} + \frac{P_{1(-1)}}{\omega_n - \omega_1} = 0. \quad (9.1.5)$$

Соответственно в (9.1.2, б) нужно положить $l=1, m=0, -1$, и тогда (9.1.2, б) запишется следующим образом:

$$\frac{P_{01}}{\omega_1} + \frac{P_{(-1)1}}{\omega_1 - \omega_n} = 0. \quad (9.1.6)$$

Мощности $P_{(-1)1}$ и $P_{1(-1)}$ тождественно равны. Поэтому вместо (9.1.6) получим

$$\frac{P_{01}}{\omega_1} - \frac{P_{1(-1)}}{\omega_n - \omega_1} = 0. \quad (9.1.7)$$

Как отмечалось выше, мощность, поступающая от генератора накачки P_{10} , больше нуля, и тогда из (9.1.5) следует, что

$$P_{1(-1)} = -P_{10} \frac{\omega_n - \omega_1}{\omega_1} < 0 \quad \text{и} \quad |P_{(-1)1}| < P_{10}.$$

Эти неравенства означают, что только часть мощности накачки поступает в дополнительный контур. Остальная часть, как видно из (9.1.7), идет в цепь сигнала ($P_{01} < 0$), т. е. расходуется на его усиление. Система представляет собой регенеративный усилитель и способна к самовозбуждению. На рис. 9.2 схематически показано распределение мощностей по спектру колебаний рассмотренного двухконтурного параметрического усилителя. Там же стрелками показано направление перераспределения энергии между частотами.

Рис. 9.2. Распределение мощностей по спектру колебаний для регенеративного двухконтурного параметрического усилителя.

Нерегенеративный усилитель — преобразователь частоты. В этом случае дополнительный контур настроен на частоту $\omega_n + \omega_1$. Поэтому в соотношения Мэнли — Роу будут входить мощности P_{10} , P_{01} и мощность, рассеиваемая в дополнительном контуре P_{11} . В первом из соотношений Мэнли — Роу необходимо положить $m = 1$, $l = 0, 1$, и тогда оно примет вид

$$\frac{P_{10}}{\omega_n} + \frac{P_{11}}{\omega_1 + \omega_n} = 0. \quad (9.1.8)$$

Для (9.1.2, б) $l = 1$, $m = 0, 1$, и соотношение запишется следующим образом:

$$\frac{P_{01}}{\omega_1} + \frac{P_{11}}{\omega_1 + \omega_n} = 0. \quad (9.1.9)$$

Из цепи накачки в систему поступает мощность $P_{10} > 0$. Тогда из (9.1.8) следует, что $P_{11} = -(\omega_n + \omega_1) P_{10} / \omega_n < 0$, и из (9.1.9), что $P_{01} = -\omega_1 P_{11} / (\omega_n + \omega_1) > 0$.

Это означает, что теперь на управление емкостью идет энергия как от генератора накачки, так и от генератора сигнала. В таком случае схема не способна к самовозбуждению. При съеме энергии с дополнительного контура получается усиление за счет перераспределения энергии в пользу более высокой частоты. Максимальный коэффициент усиления по мощности такого

усилителя — преобразователя частоты равен

$$\left| \frac{P_{11}}{P_{01}} \right| = \frac{\omega_n + \omega_1}{\omega_1}. \quad (9.1.10)$$

На рис. 9.3 приведено распределение мощностей по спектру колебаний для рассмотренного нерегенеративного усилителя.

Данная схема может быть использована как демодулятор. Подадим на нелинейную емкость модулированный сигнал с комбинационной частотой $\omega_n + \omega_1$ и сигнал от генератора накачки с частотой ω_n . Считая, что задан сигнал с частотой $\omega_n + \omega_1$ (т. е. $P_{11} > 0$), из соотношений (9.1.8) и (9.1.9) получим $P_{10} < 0$ и $P_{01} < 0$.

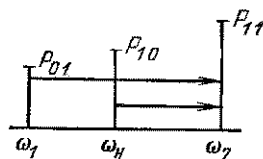


Рис. 9.3. Распределение мощностей по спектру колебания для нерегенеративного двухконтурного параметрического усилителя.

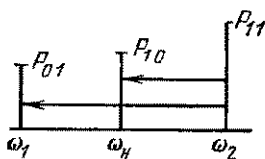


Рис. 9.4. Распределение мощностей по спектру колебаний для параметрического демодулятора.

Следовательно, энергия модулированного сигнала частично идет в первый контур, а частично — в цепь генератора накачки. В контуре выделяется продетектированный сигнал частоты ω_1 , причем его мощность меньше мощности модулированного сигнала в $\omega_1/(\omega_1 + \omega_n)$ раз. Схема эта способна к самовозбуждению. На рис. 9.4 дано распределение мощностей по спектру колебаний для данного случая.

Если число взаимодействующих частот превышает три, то два соотношения Мэнли—Роу не дают возможности решить задачу до конца. Необходим анализ конкретной схемы. Однако эти соотношения служат двумя дополнительными уравнениями, облегчающими решение задачи о поведении параметрической системы с n степенями свободы.

§ 9.2. Автоколебательные системы с тремя степенями свободы

В последние годы стали находить применение автоколебательные системы LC-типа с числом степеней свободы больше двух. Такие устройства обеспечивают лучшую стабилизацию частоты, чем рассмотренная в гл. 7 автоколебательная система с одним дополнительным контуром *).

*) Минакова И. И., Курдюмов О. А. — Известия вузов, Радиоэлектроника, 1968, 11, № 1, 41.

Наличие дополнительной степени свободы приводит к появлению третьей устойчивой ветви нормальных частот, причем стабилизация частоты может оказаться выше, чем в двухконтурной системе.

В качестве примера такого устройства рассмотрим генератор с тремя последовательно связанными контурами (рис. 9.5). Будем

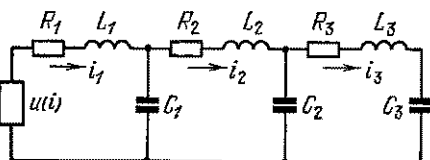


Рис. 9.5. Принципиальная схема генератора с тремя последовательно связанными контурами.

считать независимыми координатами токи в контурах i_1, i_2, i_3 . Допустим, что система работает в мягком режиме, т. е. характеристику нелинейного элемента можно аппроксимировать кубическим полиномом

$$u = r_0 i_1 - \frac{1}{3} r_2 i_1^3. \quad (9.2.1)$$

Составим дифференциальные уравнения, описывающие поведение схемы:

$$\begin{aligned} \ddot{i}_1 + 2(\delta_0 + \delta_1 i_1^2) \dot{i}_1 + v_1^2 i_1 - \alpha_1 i_2 &= 0, \\ \ddot{i}_2 + 2\delta_2 \dot{i}_2 + v_2^2 i_2 + \alpha_2 i_1 - \alpha_3 i_3 &= 0, \\ \ddot{i}_3 + 2\delta_3 \dot{i}_3 + v_3^2 i_3 - \alpha_4 i_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

где v_1^2, v_2^2, v_3^2 — квадраты парциальных частот контуров, соответственно равные

$$v_1^2 = 1/L_1 C_1, \quad v_2^2 = (1/C_1 + 1/C_2)/L_2, \quad v_3^2 = (1/C_2 + 1/C_3)/L_3,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 — коэффициенты связи между контурами

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/L_1 C_1, \quad \alpha_2 = 1/L_2 C_1, \quad \alpha_3 = 1/L_2 C_2, \quad \alpha_4 = 1/L_3 C_2, \\ 2\delta_0 &= (R_1 - r_0)/L_1, \quad 2\delta_1 = r_2/L_1, \quad 2\delta_2 = R_2/L_2, \quad 2\delta_3 = R_3/L_3. \end{aligned}$$

Колебания в контурах считаем гармоническими

$$i_1 = A \sin \omega t, \quad i_2 = B \sin(\omega t - \varphi), \quad i_3 = C \sin(\omega t - \psi). \quad (9.2.3)$$

Уравнения, связывающие амплитуды и фазы токов i_1, i_2, i_3 в стационарном режиме, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\delta_0 \omega A + \frac{1}{2} \delta_1 \omega A^3 + \alpha_1 B \cos \varphi &= 0, \\ 2\delta_2 \omega B - \alpha_2 A \sin \varphi - \alpha_3 C \sin(\varphi - \psi) &= 0, \\ 2\delta_3 \omega C + \alpha_4 B \sin(\varphi - \psi) &= 0, \\ \omega^2 - v_1^2 + \alpha_1 \frac{B}{A} \cos \varphi &= 0, \\ \omega^2 - v_2^2 + \alpha_2 \frac{A}{B} \cos \varphi + \alpha_3 \frac{C}{B} \cos(\varphi - \psi) &= 0, \\ \omega^2 - v_3^2 + \alpha_4 \frac{B}{C} \cos(\varphi - \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Из последних четырех уравнений (9.2.4) можно определить нормальные частоты системы, а из первого уравнения (9.2.4) — стационарную амплитуду колебаний в первом контуре. Здесь удобно ввести относительные расстройки

$$\xi_1 = \frac{\omega^2 - \nu_1^2}{\omega^2}, \quad \xi_2 = \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{\omega^2}, \quad \xi_3 = \frac{\nu_2^2 - \nu_3^2}{\omega^2}. \quad (9.2.5)$$

Зависимость нормальных частот от расстроек ξ_2 , ξ_3 и параметров системы наиболее просто проанализировать для следующего частного случая. Пусть парциальные частоты ν_2 и ν_3 постоянны и

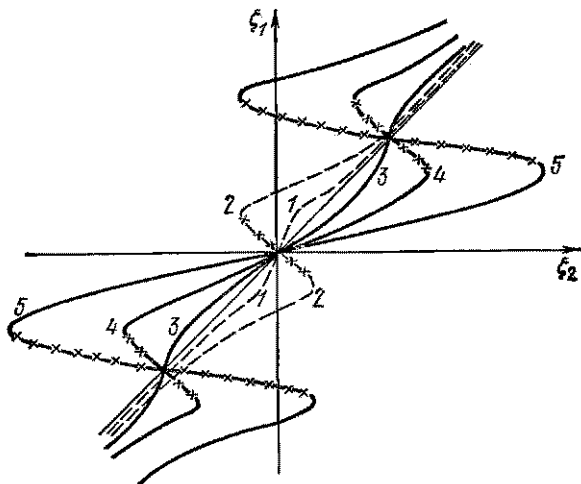


Рис. 9.6. Частотные кривые автоколебательной системы с тремя степенями свободы при различных связях между контурами.

1) $k_1 < k_{1,кр}$, $k_2 < k_{2,кр}$; 2) $k_1 > k_{1,кр}$, $k_2 < k_{2,кр}$; 3) $k_1 < k_{1,кр}$, $k_2 > k_{2,кр}$; 4, 5) $k_1 > k_{1,кр}$, $k_2 > k_{2,кр}$.

равны между собой, т. е. $\xi_3 = 0$. Единственной изменяющейся величиной будем считать парциальную частоту первого контура. Тогда из (9.2.4) можно получить частотное уравнение. Разрешая его относительно ξ_2 , находим

$$\xi_2 = \xi_1 \frac{\xi_1^4 + \xi_1^2 (\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - k_1^2 - 2k_2^2) + (k_2^2 + \vartheta_2 \vartheta_3)^2 + k_1^2 (k_2^2 - \vartheta_3^2)}{\xi_1^4 + \xi_1^2 (\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - 2k_2^2) + (k_2^2 + \vartheta_2 \vartheta_3)^2}, \quad (9.2.6)$$

где $\vartheta_2 = 2\delta_2/\omega$, $\vartheta_3 = 2\delta_3/\omega$ — декременты затухания второго и третьего контуров $k_1^2 = \alpha_1 \alpha_2 / \omega^4$, $k_2^2 = \alpha_3 \alpha_4 / \omega^4$ — безразмерные коэффициенты, характеризующие связь.

Частотное уравнение (9.2.6) может иметь до пяти действительных корней. На рис. 9.6 приведены частотные кривые, т. е. зависимость ξ_1 от ξ_2 (см. (9.2.6)) для различных соотношений параметров системы. Равенство $\xi_1 = \xi_2 = 0$ соответствует синхронизму

$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$. Вдали от синхронизма частотные кривые однозначны, причем нормальная частота трехконтурной системы ω близка к парциальной частоте первого контура ν_1 . Поэтому асимптотой для ветвей частотных кривых, уходящих в бесконечность, будет биссектриса первого и третьего квадрантов. Для области расстройек, близкой к синхронизму, частотные кривые будут вести себя по-разному в зависимости от величин связей k_1 и k_2 . Для наглядности целесообразно ввести в рассмотрение парциальную двухконтурную систему. Будем считать связанные между собой второй и третий контуры такой парциальной системой. Следовательно, полную систему можно рассматривать как регенерированный первый контур и связанную с ним парциальную двухконтурную систему. При этом величина k_1 описывает связь между первым контуром и парциальной системой. Величина k_2 характеризует связь между вторым и третьим контурами. Если $k_2 < k_{2, \text{кр}}$, то двухконтурную парциальную систему можно считать эквивалентной контуру с одной собственной частотой (см. § 6.3). Частотные кривые (см. рис. 9.6) при этом аналогичны кривым двухконтурной системы (см. § 7.4). Если $k_1 < k_{1, \text{кр}}$, то кривая однозначна (кривая 1) при любых расстройках; если $k_1 > k_{1, \text{кр}}$, то на частотной кривой вблизи точки синхронизма появляется участок трехзначности (кривая 2). При связи $k_2 > k_{2, \text{кр}}$ двухконтурная парциальная система имеет две нормальные частоты (см. § 6.3). Поэтому частотная кривая начинает пересекать биссектрису первого—третьего квадрантов, кроме точки синхронизма, еще в двух точках, соответствующих совпадению нормальных частот парциальной двухконтурной системы и частоты первого контура. Так как, по предположению, $\nu_2 = \nu_3$, то точки пересечения расположены симметрично относительно начала координат. При этом, если $k_1 < k_{1, \text{кр}}$, то частотная кривая сохраняет однозначность (кривая 3). Если же $k_1 > k_{1, \text{кр}}$, то появляются участки трехзначности (кривая 4). При дальнейшем увеличении связи k_1 и неизменных параметрах двухконтурной парциальной системы вблизи синхронизма парциальных частот появляются участки пятизначности (кривая 5).

Не исследуя условий устойчивости, что представляет для трехконтурной схемы сложную задачу, можно из общей теории автоколебательных систем указать неустойчивые участки частотных кривых. На рис. 9.6 они помечены крестиками. Из этого рисунка видно, что для целей частотной стабилизации наиболее пригодна работа в режиме, соответствующем средней ветви частотной кривой 5, проходящей через точку синхронизма.

Стационарную амплитуду колебаний в первом контуре можно записать в виде

$$A^2 = A_0^2 - \frac{4}{\theta_1} k_1^2 \frac{M_1}{M_1^2 + M_2^2}, \quad (9.2.7)$$

где $M_1 = \theta_2 + \theta_3 k_2^2 / (\zeta_1^2 + \theta_3^2)$, $M_2 = \zeta_1 - \zeta_3 - k_2^2 \zeta_1 / (\zeta_1^2 + \theta_3^2)$, $A_0^2 = \delta_0 / \delta_1$.

На рис. 9.7 приведена зависимость амплитуды колебаний в первом контуре от расстройки ξ_2 для $k_1 > k_{1, \text{кр}}$ и $k_2 > k_{2, \text{кр}}$. Устойчивые ветви амплитудных кривых обозначены на рисунке сплошной линией, неустойчивые — пунктирной. Устойчивые ветви 1 и 2 на рис. 9.7 аналогичны амплитудным кривым двухконтурной системы (см. рис. 7.15). Амплитудная ветвь 3 характерна только для трехконтурной системы. Она соответствует стабилизированному участку частотной кривой 5 на рис. 9.6.

Стабилизирующие свойства системы можно охарактеризовать коэффициентом стабилизации и областью удержания. Коэффициент стабилизации $\mathcal{S}$ определяется как значение производной $d\xi_2/d\xi_1$. При фиксированных параметрах системы он имеет максимум в точке синхронизма $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Областью удержания называется область значений расстроек ξ_2 , внутри которой существуют устойчивые колебания на средней ветви частотной кривой 5 рис. 9.6. Коэффициент стабилизации для случая $\xi_3 = 0$ найдем из (9.2.6):

$$\mathcal{S} = 1 + \frac{k_1^2 (k_2^2 - \vartheta_3^2)}{(k_2^2 + \vartheta_2 \vartheta_3)^2}. \quad (9.2.8)$$

Как мы видим, коэффициент стабилизации растет с увеличением связи k_1 и уменьшением декремента ϑ_3 . Зависимость $\mathcal{S}$ от k_2 при фиксированных параметрах имеет оптимум, достигаемый при $k_2^2 = \vartheta_2 \vartheta_3$.

Зависимость $\mathcal{S}$ от ϑ_2 сложнее, так как величина ϑ_2 существенно влияет на устойчивость колебательного режима на средней ветви частотной кривой. Подробное исследование показывает, что при больших величинах k_1 и добротности $Q_3 = 1/\vartheta_3$ максимальное значение $\mathcal{S}$ достигается при малой добротности второго контура $Q_2 = 1/\vartheta_2$.

Область удержания растет с увеличением коэффициента связи k_1 (см. рис. 9.6).

Таким образом, для создания высокостабильного генератора можно использовать трехконтурную систему с высокодобротным третьим контуром и сильной связью между первым и вторым контурами, причем добротность второго контура должна быть небольшой.

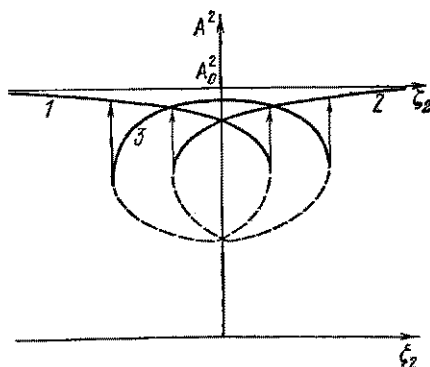


Рис. 9.7. Зависимость амплитуды колебаний в первом контуре от расстройки ξ_2 при $k_1 > k_{1, \text{кр}}$, $k_2 > k_{2, \text{кр}}$. Сплошные кривые — устойчивые ветви, пунктирные — неустойчивые.

где Δ_n — детерминант, образованный коэффициентами системы однородных уравнений (9.3.1).

Легко видеть, что

$$\Delta_1 = 2 + 1/j\omega RC, \quad \Delta_2 = (2 + 1/j\omega RC)^2 + 1,$$

а остальные Δ_n удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$\Delta_n = (2 + 1/j\omega RC) \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}. \quad (9.3.3)$$

В автоколебательном стационарном режиме должно выполняться условие $A_n = A$, откуда следует, что Δ_n должно равняться коэффициенту усиления усилителя

$$\Delta_n = K_{yc}. \quad (9.3.4)$$

Это соотношение определяет стационарную амплитуду колебаний A_0 . В общем случае Δ_n — комплексная величина. Если коэффициент усиления $K_{yc}(A_0)$ — действительная величина, то из (9.3.4) вытекают следующие два уравнения:

$$\text{Im } \Delta_n = 0, \quad (9.3.5)$$

$$\text{Re } \Delta_n = K_{yc}(A_0). \quad (9.3.6)$$

Эти два уравнения отражают баланс фаз и амплитуд в генераторе и дают возможность найти частоты и амплитуды установившихся колебаний.

Если усилитель дает сдвиг фаз между напряжениями на его входе и выходе, равный π ($K_{yc} < 0$), то, согласно условию (9.3.6), сдвиг фаз, создаваемый цепочкой, должен равняться $(2m+1)\pi$, где $m=0, 1, 2, \dots$. Каждое из звеньев цепочки (рис. 9.8) дает сдвиг фаз φ , определяемый соотношением $\text{tg } \varphi = 1/\omega RC$. Для реальной схемы он всегда меньше $\pi/2$, и поэтому минимальное число звеньев, входящих в цепь RC-генератора, должно равняться трем. Система, описываемая уравнением (9.3.6), в этом случае имеет одну частоту автоколебаний ω_1 . На этой частоте сдвиг фаз, вносимый цепочкой, равен π . Вторая, более низкая частота ω_2 возникает при числе звеньев $n > 6$. Сдвиг фаз по цепочке на этой частоте будет равен 3π . Третья частота появится при $n > 10$ и т. д.

Условие самовозбуждения для каждой из частот имеет вид

$$|\text{Re } \Delta_n|_{\omega=\omega_s} < |K_{yc}(0)|, \quad s=1, 2, \dots \quad (9.3.7)$$

Стационарная амплитуда колебаний на частотах ω_s определится из уравнения (9.3.6).

Рассмотрим в качестве примера четырехзвенный RC-генератор. Ограничившись в (9.3.1) четырьмя уравнениями, запишем выражение для детерминанта Δ_4

$$\Delta_4 = (2 - j/\omega RC)^4 - 3(2 - j/\omega RC)^2 - 1.$$

Выделяя из Δ_4 мнимую и действительную части, имеем

$$\operatorname{Im} \Delta_4 = 10/\omega RC - 4/(\omega RC)^3, \quad \operatorname{Re} \Delta_4 = 5 - 21/(\omega RC)^2 + 1/(\omega RC)^4.$$

Приравнивая нулю мнимую часть, найдем возможную частоту автоколебаний четырехзвенного RC -генератора

$$\omega = \sqrt{0,4/RC}. \quad (9.3.8)$$

Подставляя это значение в действительную часть Δ_4 , получим

$$|\operatorname{Re} \Delta_4| \approx 41. \quad (9.3.9)$$

Таким образом, для получения почти гармонических колебаний в четырехзвенной схеме модуль коэффициента усиления должен несколько превышать 41.

Если усилитель обладает положительным коэффициентом усиления (сдвиг фаз между напряжениями на входе и выходе равен нулю), то сдвиг фаз, создаваемый цепочкой RC , должен равняться $2m\pi$, $m=0, 1, 2, \dots$

RC -генераторы находят широкое применение для получения гармонических колебаний низких частот. Генерирование таких частот с помощью LC -генераторов потребовало бы применения весьма громоздких индуктивностей. Кроме того, с помощью RC -генераторов легче осуществлять перестройку частот в широких пределах. Это связано с тем, что частота RC -генераторов пропорциональна $1/C$ (см. (9.3.8)), а не $1/\sqrt{C}$, как в LC -генераторах.

Кроме многозвенных RC -генераторов, широкое применение находят также RC -генераторы с мостом Вина. Процессы колебаний в таких генераторах аналогичны рассмотренным выше.

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

§ 10.1. Основы теории распределенных систем

В рассмотренных выше системах с сосредоточенными постоянными имеет место пространственное разделение элементов массы и упругости (механические системы) или емкости и индуктивности (электрические системы). В этих системах можно не учитывать времени передачи возмущения от точки к точке, оно мало по сравнению с периодом колебаний. В системах происходят колебательные процессы, зависящие от единственной переменной — времени t . Поэтому движения в системах со сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В распределенных системах параметры распределены непрерывно по всему объему системы. Каждый сколь угодно малый элемент распределенной системы обладает как массой, так и упругостью. В случае электрической распределенной системы каждому элементу присущи емкость и индуктивность. В качестве примеров распределенных систем, имеющих широкое практическое применение, можно назвать струну, стержень, мембрану, двухпроводную и коаксиальную электрические линии, волноводы, объемные резонаторы и т. п.

Система рассматривается как распределенная, если ее линейные размеры сравнимы с длиной волны, т. е. время передачи возмущения по системе не мало по сравнению с периодом колебаний. Таким образом, для распределенных систем условие квазистатичности принципиально не выполняется. Основные движения в таких системах — волновые.

Возможны две трактовки движения в распределенных системах. В первой считается, что по системе бегут волны, отражающиеся от неоднородностей. Таким образом, полное движение представляет собой сумму бегущих в обе стороны волн. Это — трактовка Даламбера, особенно удобная для описания процессов в неограниченных системах и в системах, длина которых значительно больше длины волны. Колебательная трактовка (метод Бернулли) применима лишь для ограниченных систем. В ней любое движение рассматривается как сумма собственных колебаний системы (стоячие волны).

Зависимость процессов от нескольких переменных — координат и времени t — приводит к уравнению движения в частных производных. Это уравнение, называемое *волновым уравнением*, для одномерной однородной системы записывается в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (10.1.1)$$

где $y = y(x, t)$ — функция, характеризующая движение, v — параметр системы. Такому уравнению подчиняются, например, малые поперечные колебания натянутой струны. В этом случае $y(x, t)$ — смещение точки струны в момент времени t , $v = \sqrt{T/\rho}$, где T — натяжение струны, ρ — масса единицы длины.

Тому же уравнению подчиняются продольные колебания однородного стержня (или газа в трубе). Параметр v равен $v = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль упругости материала, ρ — объемная плотность.

Точное решение задачи об электромагнитных колебаниях в электрических линиях возможно лишь на основе уравнений Максвелла, из которых можно получить волновое уравнение вида (10.1.1). Однако обычно волновое уравнение для электрических систем типа длинной линии выводится из телеграфных уравнений, связывающих токи и напряжения в линии. Телеграфные уравнения не универсальны, и поэтому необходимо определить те условия, при которых можно ими пользоваться.

Как уже отмечалось, распределенные системы не удовлетворяют условию квазистатичности; следовательно, для электрического поля $\text{rot } E \neq 0$. В этом случае интеграл $\int_1^2 E_s ds$ зависит от пути интегрирования между точками 1 и 2, и поэтому нельзя ввести понятие потенциала и понятие емкости. Ток и индуктивность также введены для квазистатических полей и использовать их для описания процессов, происходящих в распределенных системах, строго говоря, нельзя.

Однако если в двухпроводной или коаксиальной линиях выполняются условия малости расстояния b между проводниками по сравнению с длиной линии l и длиной волны λ ($b \ll l$, $b \ll \lambda$) и малости сопротивления проводников, то в линии существует только поперечная электромагнитная волна. Такая волна характеризуется тем, что векторы электрического и магнитного полей лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, и в этой плоскости удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа. Таким образом, в плоскости, нормальной к линии, распределение этих полей совпадает с распределением электрического и магнитного полей для статического случая. Поэтому для малых участков линии dx можно считать применимой теорию квазистатических

токов и вводить понятия потенциала, тока, распределенных емкости и индуктивности.

Считая выполненными оба сформулированных выше условия, получим телеграфные уравнения для двухпроводной системы, схема участка которой показана на рис. 10.1.

Если система не излучает и не взаимодействует с какими-либо другими проводниками, то токи в каждом сечении линии в обоих проводниках равны и противоположны по направлению, т. е.

$$i_1(x, t) = -i_2(x, t) = i(x, t). \quad (10.1.2)$$

Рассмотрим бесконечно малый элемент dx длины линии, обладающей индуктивностью L и емкостью C на единицу длины линии. Падение напряжения на рассматриваемом участке равно индуктивности $L dx$, умноженной на скорость изменения тока, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = -L dx \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (10.1.3)$$

Уменьшение тока на длине dx равно тому току, который ответвляется в распределенную емкость. Этот ток равен произведению емкости на скорость изменения напряжения:

$$\frac{\partial i}{\partial x} dx = -C dx \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (10.1.4)$$

Из (10.1.3) и (10.1.4) получаем два так называемых *телеграфных уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (10.1.5)$$

Отсюда легко получить волновые уравнения для напряжения и тока:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v_{\phi}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v_{\phi}^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad (10.1.6)$$

где

$$v_{\phi} = 1/\sqrt{LC}. \quad (10.1.7)$$

Волновое уравнение можно получить также, если рассматривать, например, распределенную электрическую систему как предельный случай одномерной цепочки, составленной из сосредоточенных индуктивностей и емкостей. Если увеличивать число ячеек

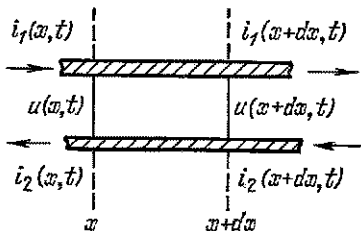


Рис. 10.1. Малый участок двухпроводной линии (к выводу телеграфных уравнений).

на единицу длины цепочки, сохраняя постоянной общую индуктивность и емкость, то в пределе система уравнений для цепочки (8.6.2) перейдет в волновое уравнение (10.1.6). Координата x соответствует изменяющемуся номеру ячейки.

Частным решением волнового уравнения типа (10.1.1) является любая функция аргумента $t - x/v_\phi$, т. е.

$$y = F_1(t - x/v_\phi). \quad (10.1.8)$$

Смысл этого решения заключается в том, что любое возмущение, которое находилось в момент времени $t=0$ в точке x , повторится через время t в точке $x + v_\phi t$. Таким образом, при $v_\phi = \text{const}$ возмущение распространяется по линии, не меняя своей формы. Величина v_ϕ является скоростью распространения волны. Второе частное решение волнового уравнения можно записать в виде

$$y = F_2(t + x/v_\phi). \quad (10.1.9)$$

Оно также представляет волну, которая без изменения формы распространяется со скоростью v_ϕ в сторону отрицательных x .

Полное решение уравнения (10.1.1) имеет вид

$$y = F_1(t - x/v_\phi) + F_2(t + x/v_\phi). \quad (10.1.10)$$

Для процессов, синусоидальных во времени, решение (10.1.10) принимает форму

$$y = A_1 \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{v_\phi} x \right) \right] + A_2 \exp \left[j \left(\omega t + \frac{\omega}{v_\phi} x \right) \right]. \quad (10.1.11)$$

Величина $\omega(t \pm x/v_\phi)$ называется *фазой волны*.

Из (10.1.11) видно, что v_ϕ определяет скорость распространения фазы, поэтому v_ϕ называют *фазовой скоростью*, а величину $\kappa = \omega/v_\phi$ — *фазовой постоянной* или *волновым числом*. Эта постоянная характеризует пространственную периодичность волнового процесса и связана с длиной волны соотношением

$$\kappa = 2\pi/\lambda. \quad (10.1.12)$$

Исходя из волновых уравнений (10.1.6), запишем волны напряжения и тока для электрической длинной линии:

$$\begin{aligned} u &= (A_1 \exp(-j\kappa x) + A_2 \exp(j\kappa x)) \exp(j\omega t), \\ i &= (B_1 \exp(-j\kappa x) + B_2 \exp(j\kappa x)) \exp(j\omega t). \end{aligned} \quad (10.1.13)$$

Подставив значения u и i из (10.1.13) в телеграфные уравнения (10.1.5), получим следующие соотношения между коэффициентами A_s и B_s :

$$B_1 = A_1/Z_0, \quad B_2 = -A_2/Z_0, \quad (10.1.14)$$

где $Z_0 = \sqrt{L/C}$.

Величина Z_0 имеет размерность сопротивления и называется *волновым сопротивлением линии*.

Учитывая (10.1.14), перепишем (10.1.13) в виде

$$\begin{aligned} u &= (A_1 \exp(-jkx) + A_2 \exp(jkx)) \exp(j\omega t), \\ i &= \frac{1}{Z_0} (A_1 \exp(-jkx) - A_2 \exp(jkx)) \exp(j\omega t). \end{aligned} \quad (10.1.15)$$

Таким образом, полное напряжение и полный ток в линии представлены в виде суперпозиции двух волн. Если на конце линии $x=0$ задано возмущение $\mathcal{E}_0 \exp(j\omega t)$, то волну $A_1 \exp[j(\omega t - kx)]$ можно рассматривать как бегущую от источника, а волну $A_2 \exp[j(\omega t + kx)]$ — как отраженную. Последняя волна может возникнуть либо при отражении от неоднородностей линии, либо, если линия ограничена в направлении x , от ее второго конца.

Если в линии существует только бегущая волна, то

$$u = iZ_0. \quad (10.1.16)$$

Исходя из этого соотношения, волновое сопротивление можно определить как сопротивление, которое «оказывает» линия бегущей волне напряжения.

Величины погонных индуктивности L и емкости C (т. е. индуктивности и емкости на единицу длины) длинных линий определяются геометрией проводников и свойствами окружающей среды.

Для двухпроводной линии имеем

$$L = \frac{4\mu}{c^2} \ln \frac{b}{r}, \quad b \geq r, \quad (10.1.17)$$

где b — расстояние между проводами, r — радиус проводов, c — скорость света в вакууме, μ — магнитная проницаемость среды, окружающей провода;

$$C = \frac{\epsilon}{4 \ln(b/r)}, \quad (10.1.18)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

Учитывая последние два соотношения, получим для волнового сопротивления следующее выражение:

$$Z_0 = 276 \lg \frac{b}{r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\text{Ом}]. \quad (10.1.19)$$

Для линии без потерь волновое сопротивление является действительной величиной, зависящей от размеров линии и от свойств среды.

Для коаксиальной линии имеем

$$Z_0 = 138 \lg \frac{D}{d} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\text{Ом}], \quad (10.1.20)$$

где D и d — диаметры внешнего и внутреннего проводников.

Подставляя погонные L и C в (10.1.7), получим, что фазовая скорость волны в линии равна

$$v_{\phi} = c/\sqrt{\epsilon_{\mu}}. \quad (10.1.21)$$

Таким образом, фазовая скорость v_{ϕ} волны, распространяющейся по длинной линии, зависит от свойств среды, в которой находится линия. Провода служат лишь направляющими, вдоль которых происходит распространение волны.

Если провода линии обладают конечной проводимостью, то существует продольная составляющая электрического поля, и распределение электрического и магнитного полей в плоскости, перпендикулярной проводам, отличается от статического. Однако если поперечная составляющая электрического поля в проводнике мала по сравнению с продольной, а продольная составляющая поля в диэлектрике, окружающем провода, мала по сравнению с поперечной, то можно пренебречь этими малыми компонентами поля и применять телеграфные уравнения, введя в них распределенные сопротивление и утечку между проводами. Телеграфные уравнения в этом случае примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -Gu - C \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (10.1.22)$$

где R и G — сопротивление и утечка на единицу длины линии.

Для гармонического во времени процесса уравнения (10.1.22) запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(R + j\omega L) I = -ZI,$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -(G + j\omega C) U = -YU, \quad (10.1.23)$$

где Z и Y — комплексные последовательное сопротивление и параллельная утечка, U и I — комплексные амплитуды напряжения и тока.

Из этих двух телеграфных уравнений получим уравнение для U

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \gamma^2 U, \quad (10.1.24)$$

где

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) = ZY. \quad (10.1.24a)$$

Его решение имеет вид

$$U = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}. \quad (10.1.25)$$

Постоянная распространения γ в данном случае является комплексной величиной. Представим ее так:

$$\gamma = \tilde{\alpha} + j\kappa.$$

Тогда мы вправе написать

$$U = A_1 e^{-\tilde{\alpha}x} e^{-i\kappa x} + A_2 e^{\tilde{\alpha}x} e^{i\kappa x}. \quad (10.1.26)$$

Падающая и отраженная волны содержат теперь множитель, характеризующий затухание волны. Величина $\tilde{\alpha}$ называется *постоянной затухания*.

Из (10.1.24a) получим

$$\gamma = \omega \sqrt{-LC + RC/\omega^2 + j(RC/\omega - GL/\omega)}. \quad (10.1.27)$$

Как мы видим, действительная и мнимая части γ являются нелинейными функциями частоты. Поэтому фазовая скорость в линии, равная $v_\phi = \omega/\kappa$, также зависит от частоты.

Зависимость фазовой скорости от частоты называется *дисперсией*. Любой сигнал при распространении по линии с дисперсией будет искажаться. Рассмотренные выше линии с потерями обладают дисперсией. Их волновое сопротивление является также комплексной величиной

$$Z_0 = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)} = \sqrt{Z/Y}.$$

Распределенные системы типа волноводов относятся к типичным неквазистатическим системам, для которых нельзя ввести такие электростатические и магнитостатические понятия, как напряжение, ток и т. п. Несмотря на это, для описания волноводных систем успешно применяются телеграфные уравнения. Волновод, в котором существует один определенный тип колебаний, можно формально сопоставить электрической линии с определенными параметрами. Для такой линии можно формально ввести понятие напряжения и тока. Напряжение u обычно задается в виде величины, пропорциональной поперечной составляющей электрического поля волны данного типа. Ток i предполагается пропорциональным поперечной составляющей магнитного поля. Коэффициенты пропорциональности выбираются так, чтобы произведение $\frac{1}{2} i^* u$ равнялось мощности, переносимой через поперечное сечение волновода. Мощность является экспериментально измеряемой величиной, что дает возможность проверить результаты расчетов опытным путем. Естественно, что выбор u и i при таком определении неоднозначен.

Рассмотрим в качестве примера вывод телеграфных уравнений для прямоугольного волновода, в котором распространяется волна типа H_{10} (рис. 10.2). У волны этого типа отличны от нуля лишь

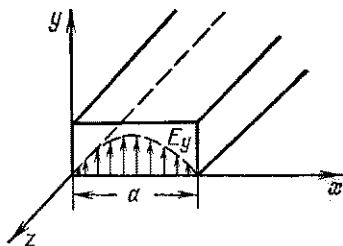


Рис. 10.2. Распределение электрического поля волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе.

компоненты E_y , H_x и H_z . Поперечными компонентами являются E_y и H_x , которые и будут использованы для определения параметров линии. Для упрощения выкладок допустим, что зависимость всех величин от времени имеет вид $e^{j\omega t}$. Расписывая уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \frac{j\omega\epsilon}{c} E, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{j\omega\mu}{c} H \quad (10.1.28)$$

по компонентам, получим

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{j\omega\epsilon}{c} E_y, & \text{б) } \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 0, \\ \text{в) } \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{j\omega\mu}{c} H_x, & \text{г) } \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{j\omega\mu}{c} H_z. \end{aligned} \quad (10.1.29)$$

Введем U и I следующим образом:

$$E_y = A \sin \frac{\pi x}{a} U(z), \quad H_x = -A \sin \frac{\pi x}{a} I(z), \quad (10.1.30)$$

где a — ширина волновода.

Подставим (10.1.30) в (10.1.29, в). Это даст одно из телеграфных уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -j \frac{\omega\mu}{c} I. \quad (10.1.31)$$

Подставляя (10.1.30) в уравнения (10.1.29, а, г), получим второе телеграфное уравнение

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -j\omega \left(\frac{\epsilon}{c} - \frac{c}{\omega^2\mu} \frac{\pi^2}{a^2} \right) U. \quad (10.1.32)$$

Из сравнения найденных уравнений с телеграфными уравнениями (10.1.22) следует, что последовательное индуктивное сопротивление линии, эквивалентной волноводу с волной типа H_{10} , равно

$$Z = \frac{j\omega\mu}{c} = j\omega L_{\text{эkv}}, \quad \text{т. е.} \quad L_{\text{эkv}} = \frac{\mu}{c}, \quad (10.1.33)$$

а параллельная емкостная проводимость определяется соотношением

$$\begin{aligned} Y &= j\omega \left[\frac{\epsilon}{c} - \frac{c}{\omega^2\mu} \frac{\pi^2}{a^2} \right] = j\omega C_{\text{эkv}}, \quad \text{т. е.} \quad C_{\text{эkv}} = \\ &= \frac{\epsilon}{c} - \frac{c}{\omega^2\mu} \frac{\pi^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (10.1.34)$$

Таким образом, для волноводов можно применять телеграфные уравнения, но с соответствующими эквивалентными параметрами, различными для разных типов волн в волноводе.

Волновое сопротивление для волны типа H_{10} в соответствии с соотношением (10.1.14) будет иметь вид

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{экв}}}{C_{\text{экв}}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \left(\frac{c}{\omega \sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (10.1.35)$$

При воздушном заполнении волновода ($\epsilon = \mu = 1$) получим для постоянной распространения γ

$$\gamma^2 = -\kappa^2 = -\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{a} \right)^2. \quad (10.1.36)$$

Нелинейная зависимость фазовой постоянной от частоты означает существование дисперсии в волноводах даже в отсутствие потерь.

Из выражения (10.1.36) видно, что при

$$\omega = \pi/a \quad (10.1.37)$$

постоянная распространения обращается в нуль. Частота, определяемая соотношением (10.1.37), называется критической частотой для данного типа волны в волноводе и обозначается $\omega_{\text{кр}}$.

При частоте возбуждения $\omega < \omega_{\text{кр}}$ постоянная $\gamma^2 > 0$ и решение уравнения (10.1.24) отвечает колебаниям с затухающей по длине волновода амплитудой

$$U \sim e^{-\gamma x}.$$

При частоте возбуждения $\omega > \omega_{\text{кр}}$ постоянная распространения $\gamma^2 < 0$, и мы получаем решение в виде бегущей волны

$$U \sim e^{\pm j\kappa x}, \quad \text{где} \quad \kappa = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/a)^2}. \quad (10.1.38)$$

Таким образом, распространение волны вдоль волновода возможно только на частотах ω , превышающих $\omega_{\text{кр}}$.

Учитывая (10.1.38), получим для фазовой скорости волны в волноводе выражение

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{\text{кр}}/\omega)^2}}. \quad (10.1.39)$$

Фазовая скорость $v_{\text{ф}}$ в волноводе зависит от частоты. Эта зависимость приведена на рис. 10.3. При $\omega \rightarrow \infty$ $v_{\text{ф}}$ стремится к скорости света c , т. е. условия распространения в волноводе приближаются к условиям распространения волны в свободном пространстве. При $\omega \rightarrow \omega_{\text{кр}}$ $v_{\text{ф}} \rightarrow \infty$.

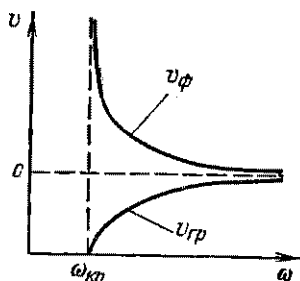


Рис. 10.3. Зависимость фазовой и групповой скорости волны в волноводе от частоты.

Такой закон дисперсии характерен для любого типа волны в любом волноводе, меняется лишь значение $\omega_{кр}$.

Групповая скорость волны, определяемая как $v_{гр} = d\omega/dk$, для волновода равна

$$v_{гр} = c \sqrt{1 - (\omega_{кр}/\omega)^2}. \quad (10.1.40)$$

Зависимость $v_{гр}$ от частоты приведена на том же рис. 10.3.

§ 10.2. Собственные колебания в системах конечной длины

При исследовании колебательных процессов в распределенных системах конечной длины обычно используется метод Бернулли, т. е. решение разлагается по собственным функциям краевой задачи. Вид собственных функций существенно зависит от граничных условий, связывающих ток и напряжение или силу и смещение на границах системы.

Остановимся лишь на простейших случаях граничных условий, которые, однако, часто встречаются на практике.

Наиболее простой тип граничных условий

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0 \quad (10.2.1)$$

соответствует закреплению концов струны, стержня и т. д. В электрической линии такие условия имеют место для отрезка линии, разомкнутой на концах, так что ток $i(0, t) = i(l, t) = 0$. Если линия замкнута на концах, то аналогичные условия могут быть написаны для напряжения u : $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0$.

Второй простейший тип граничных условий имеет вид

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (10.2.2)$$

Это граничное условие характерно для стержня со свободными концами. Оно следует из требования, чтобы сила, возникающая на конце стержня вследствие его деформации, была равна нулю. Для электрической системы этим условиям удовлетворяет напряжение на разомкнутых концах линии и ток в короткозамкнутой линии.

Более общий случай граничных условий осуществляется в электрической линии, нагруженной на конце емкостью C_0 . Для напряжения на этой емкости u и заряда q справедливо соотношение $u = q/C_0$, или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=l} = \frac{1}{C_0} \left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{x=l} = \frac{i(l, t)}{C_0}. \quad (10.2.3)$$

Подставляя (10.2.3) в телеграфное уравнение (без учета утечки) $\partial i/\partial x = -C \partial u/\partial t$, получим

$$\left. \frac{\partial i}{\partial x} \right|_{x=l} = -\frac{C}{C_0} i(l, t). \quad (10.2.4)$$

Если конденсатор включен на левом конце системы ($x=0$), то граничное условие будет иметь вид

$$\frac{\partial i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{C}{C_0} i(0, t). \quad (10.2.5)$$

Условия (10.2.4) и (10.2.5) различаются знаком. Это связано с тем, что ток в линии заряжает емкость на правом конце и разряжает ее, если она включена на левом конце, т. е. для левого конца $\partial q / \partial t = -i$.

Если на конце линии включена индуктивность L_0 , то граничные условия запишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{L}{L_0} u(0, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{L}{L_0} u(l, t). \quad (10.2.6)$$

Объединяя рассмотренные выше типы граничных условий, получим

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha y(0, t), \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\beta y(l, t), \quad (10.2.7)$$

где $0 \leq \alpha \leq \infty$, $0 \leq \beta \leq \infty$.

Уравнение колебаний типа (10.1.1) при граничных условиях (10.2.7) удобно решать методом разделения переменных (метод Бернулли). Тогда его решение имеет вид

$$y(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x) [A_s \cos \omega_s t + B_s \sin \omega_s t]. \quad (10.2.8)$$

Постоянные A_s и B_s определяются из начальных условий. Из решения (10.2.8) следует, что распределенные колебательные системы конечной длины имеют бесконечное множество собственных частот ω_s , каждой из которых соответствует определенная форма колебаний φ_s . Формами собственных колебаний одномерных однородных систем являются гармонические функции.

В простейшем случае однородной струны с закрепленными концами собственные формы колебаний системы имеют вид $\varphi_s(x) = \sin(s\pi x/l)$, а собственные частоты равны:

$\omega_s = \frac{s\pi}{l} \sqrt{\frac{\rho}{T}}$, где ρ и T — плотность и натяжение струны.

Нахождение общего решения для неоднородной системы весьма сложно. Однако в практически часто встречающемся случае сосре-

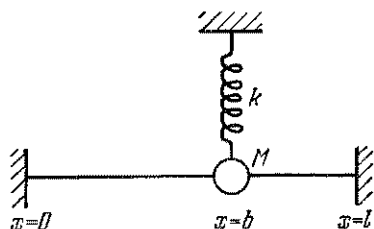


Рис. 10.4. Струна, нагруженная в точке b механическим резонатором.

доточенной неоднородности можно получить точное решение задачи методом поэтапного рассмотрения.

В качестве примера неоднородной системы рассмотрим струну с сосредоточенной неоднородностью. Пусть струна закреплена в точках $x=0$, $x=l$ и нагружена в точке $x=b$ резонатором, состоящим из массы M и пружины с упругостью k (рис. 10.4). Эквивалентной электрической системой такого типа является, например, измерительная линия с зондом, имеющим резонатор.

Смещение струны для $x < b$ обозначим через y_1 , для $x > b$ — через y_2 . Уравнения собственных колебаний для y_1 и y_2 одинаковы:

$$\frac{\partial^2 y_s}{\partial x^2} = \frac{1}{v_\Phi^2} \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2}, \quad s=1, 2; \quad v_\Phi = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (10.2.9)$$

Их решения имеют вид

$$y_1 = A \sin \kappa x \cos \omega t, \quad y_2 = B \sin \kappa (l-x) \cos \omega t, \quad (10.2.10)$$

где $\kappa = \omega/v_\Phi$. Здесь уже учтены граничные условия в точках $x=0$ и $x=l$. При $x=b$ решения необходимо сшить. Из непрерывности решения в точке b вытекает, что

$$y_1(b, t) = y_2(b, t) = y(t), \quad (10.2.11)$$

где $y(t)$ — смещение массы M . Второе условие сшивания можно получить из уравнения движения массы M под действием сил упругости струны и пружины:

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - T \left. \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|_{x=b} + T \left. \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|_{x=b}, \quad (10.2.12)$$

где k — коэффициент упругости пружины.

Учитывая условия (10.2.11), получим из (10.2.10)

$$A \sin \kappa b = B \sin \kappa (l-b) = C,$$

откуда

$$A = C/\sin \kappa b, \quad B = C/\sin \kappa (l-b).$$

Таким образом,

$$y_1 = C \frac{\sin \kappa x}{\sin \kappa b} \cos \omega t, \quad y_2 = C \frac{\sin \kappa (l-x)}{\sin \kappa (l-b)} \cos \omega t. \quad (10.2.13)$$

Подставляя эти значения в (10.2.12), получим

$$\kappa T [\cos \kappa b / \sin \kappa b + \cos \kappa (l-b) / \sin \kappa (l-b)] = M \kappa^2 v_\Phi^2 - k$$

или

$$\frac{M \kappa^2 v_\Phi^2 - k}{\kappa T} \frac{\sin \kappa b \sin \kappa (l-b)}{\sin \kappa l} = 1. \quad (10.2.14)$$

Из трансцендентного уравнения (10.2.14) найдем κ .

Рассмотрим сначала частный случай $b = l/2$ (резонатор находится в середине струны). Уравнение (10.2.14) при $b = l/2$ примет вид

$$(M\kappa^2 v_{\Phi}^2 - k) \sin^2 \kappa l/2 = \kappa T \sin \kappa l.$$

Отсюда

$$\sin \frac{\kappa l}{2} \left[\frac{M\kappa^2 v_{\Phi}^2 - k}{\kappa T} \operatorname{tg} \frac{\kappa l}{2} - 2 \right] = 0. \quad (10.2.15)$$

Одна группа решений этого уравнения определяется из равенства

$$\sin \kappa l/2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \kappa l = 2n\pi, \quad (10.2.16)$$

где n — целое число.

Учитывая, что $\kappa = 2\pi/\lambda$, получим $l = n\lambda$. Таким образом, решения вида (10.2.16) дают собственные колебания, при которых на струне укладывается целое число длин волн. Это четные обертоны струны. Для таких колебаний точка $b = l/2$ является узлом и поэтому резонатор не влияет на собственные частоты.

Для нечетных обертонов имеем

$$\operatorname{tg} \frac{\kappa l}{2} = \frac{2\kappa T}{M\kappa^2 v_{\Phi}^2 - k}. \quad (10.2.17)$$

Рассмотрим ряд частных случаев.

1) $M = 0$, *упругая нагрузка*. Частотное уравнение в этом случае имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\kappa l}{2} = -\frac{2\kappa T}{k} = -\frac{4T}{lk} \frac{\kappa l}{2} = F. \quad (10.2.18)$$

Решим это уравнение графически (рис. 10.5). Построим прямую $F = -(4T/lk)(\kappa l/2)$ и кривые $F = \operatorname{tg}(\kappa l/2)$. Точки их пересечения дают значения κ , удовлетворяющие уравнению (10.2.18). При малых k это уравнение определяет собственные частоты нечетных обертонов ненагруженной струны: $\kappa l/2 \approx (2n+1)\pi/2$, т. е. $l \approx (2n+1)\lambda/2$. С увеличением k уменьшается угол наклона прямой к оси абсцисс и собственные частоты обертонов растут. Их распределение неэквидистантно. Из рис. 10.5 видно, что сильнее всего меняется основной тон. При $k \rightarrow \infty$ ω_{2n+1} стремится к ω_{2n+2} . Изменение k меняет и форму колебания. Для первого тона форма колебаний при различных k изображена на рис. 10.6 (первая, третья, и четвертая кривые).

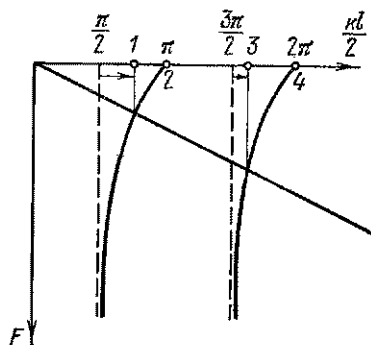


Рис. 10.5. Графическое решение частотного уравнения для струны, нагруженной пружиной.

Точками 1, 2, 3, 4 обозначены величины $1/k l$, соответствующие первым четырем собственным значениям частоты. Стрелками показаны изменения собственных частот, обусловленные влиянием пружины.

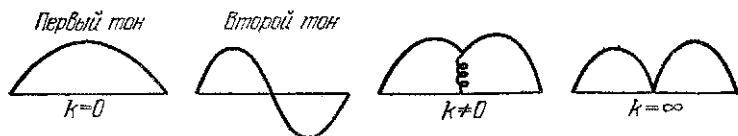


Рис. 10.6. Формы собственных колебаний струны, нагруженной пружиной.

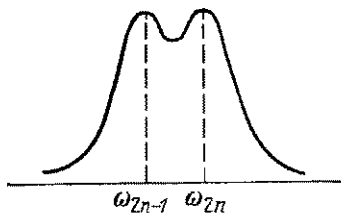


Рис. 10.7. Частотная характеристика полосового фильтра.

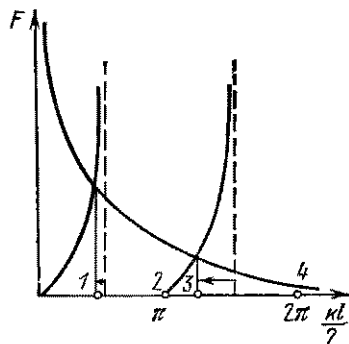


Рис. 10.8. Графическое решение частотного уравнения для струны, нагруженной массой.

Точками 1, 2, 3, 4 обозначены величины $1/\kappa l$, соответствующие первым четырем собственным значениям частоты. Стрелками показаны изменения собственных частот, обусловленные влиянием массы.

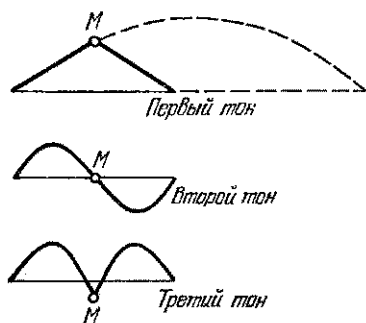


Рис. 10.9. Формы собственных колебаний струны, нагруженной массой.

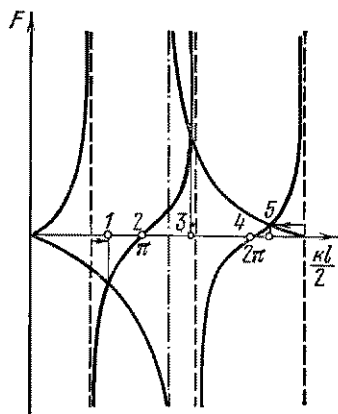


Рис. 10.10. Графическое решение частотного уравнения для струны, нагруженной резонатором.

Точка пересечения штрих-пунктирной прямой с осью абсцисс соответствует резонансной частоте контура $\omega_{\text{рез}}$.

По мере увеличения k смещение точки струны, в которой подключена пружина, уменьшается. В пределе при очень большой жесткости пружины точка $x = l/2$ остается при колебаниях неподвижной. В этом случае частота первого тона близка к частоте второго. Подбором нагрузки частоты соседних тонов можно сблизить настолько, что система будет вести себя как полосовой фильтр с частотной характеристикой, изображенной на рис. 10.7.

2) $k=0$, *струна нагружена только массой*. Частотное уравнение в этом случае имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\kappa l}{2} = -\frac{2T}{M\kappa v_{\phi}^2} = -\frac{\rho l}{M} \frac{1}{\kappa l/2} = F. \quad (10.2.19)$$

Для его графического решения построим кривые $F = \operatorname{tg}(\kappa l/2)$ и $F = (\rho l/M)(2/\kappa l)$ (гипербола) (рис. 10.8). По мере увеличения M гипербола идет круче и собственные частоты понижаются тем сильнее, чем выше номер обертона. При $M \rightarrow \infty$ $\omega_{2n+1} \rightarrow \omega_{2n}$, причем основной тон можно сделать сколь угодно низким. На рис. 10.9 изображены три первые собственные формы колебаний для струны, нагруженной массой M . Пунктиром показан основной тон эквивалентной струны, имеющей ту же частоту колебаний, что и рассматриваемая струна, нагруженная массой M .

3) *Нагрузкой струны является весь резонатор*. Частотное уравнение (10.2.17) решаем снова графически (рис. 10.10). Правая его часть обращается в бесконечность на частоте резонатора $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{k/M}$. При $\omega < \omega_{\text{рез}}$ резонатор представляет упругую нагрузку и собственные частоты нечетных тонов нагруженной струны повышаются. При $\omega > \omega_{\text{рез}}$ нагрузка действует как масса и ω_{2n+1} понижаются.

Таким образом, включение резонатора приводит к подтягиванию собственных частот ω_{2n+1} к частоте резонатора. Если частота какого-либо тона совпадает с собственной частотой резонатора, то в установившемся режиме взаимодействия между струной и резонатором на этой частоте нет.

Частотное уравнение (10.2.14) при любом $0 < b < l$ исследовать сложно. Однако можно показать, что в этом случае будут изменяться как нечетные, так и четные тона. Изменить число узлов конечная нагрузка не может. Поэтому при любой нагрузке частота n -го тона всегда выше частоты $(n-1)$ -го тона и ниже частоты $(n+1)$ -го, т. е. $\omega_{n-1} < \omega_n < \omega_{n+1}$. В качестве примера на рис. 10.11 приведены формы колебаний для $b = l/3$ и $M = 0$.

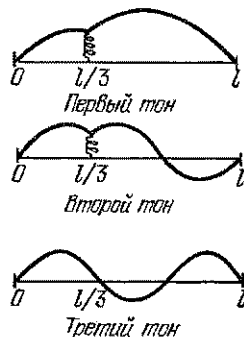


Рис. 10.11. Форма собственных колебаний струны, нагруженной пружиной на расстоянии $l/3$ от края струны.

Характерным примером распределенной системы, взаимодействующей с резонатором, является лазер. Резонатор лазера, образованный системой зеркал (резонатор Фабри—Перо), обладает эквидистантным спектром собственных частот ω_n . Когда в резонатор лазера помещается активное вещество, обладающее резонансной частотой ω_0 , собственные частоты резонатора ω_n подтягиваются к ω_0 . Спектр становится неэквидистантным. Это обстоятельство приводит к тому, что частоты генерируемых лазером мод становятся независимыми. Если с помощью специальных мер добиться, чтобы спектр стал близок к эквидистантному, то начинается самосинхронизация мод лазера (см. гл. 11).

§ 10.3. Вынужденные колебания распределенных систем

Вынужденные колебания в распределенной системе конечной длины представляются в виде разложения по собственным функциям краевой задачи. Если частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот системы, происходит резонансное увеличение амплитуды колебаний.

Вынуждающая сила может быть распределена вдоль системы либо действовать в определенной точке. В последнем случае возможно возбуждение только тех колебаний, для которых точка включения внешней силы не является узловой.

Рассмотрим вынужденные колебания в распределенной системе на примере электрической длинной линии, на которую действует распределенная э. д. с. произвольной формы $\mathcal{E}(x, t)$.

Уравнение колебаний в такой линии имеет вид

$$L \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + R \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{E}(x, t), \quad (10.3.1)$$

где L , C и R — постоянные погонные параметры линии.

Пусть линия разомкнута на обоих концах, т. е. $q(0, t) = q(l, t) = 0$. Предположим, что внешнюю силу $\mathcal{E}(x, t)$ в интервале $(0, l)$ можно разложить в ряд по собственным функциям однородной линии с разомкнутыми концами

$$\mathcal{E}(x, t) = \sum_n \Phi_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.3.2)$$

Коэффициенты разложения $\Phi_n(t)$ получим из (10.3.2), пользуясь условиями ортогональности собственных функций свободной системы

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \mathcal{E}(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (10.3.3)$$

Естественно искать решение уравнения (10.3.1) также в виде

ряда по собственным функциям линии с разомкнутыми концами

$$q(x, t) = \sum_n q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.3.4)$$

Подставим (10.3.2) и (10.3.4) в исходное уравнение (10.3.1):

$$L\ddot{q}_n + R\dot{q}_n + \frac{\pi^2 n^2}{Cl^2} q_n = \Phi_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.3.5)$$

Получилась бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $q_n(t)$. Каждое из них имеет обычный вид колебательного уравнения для системы с одной степенью свободы, на которую действует внешняя сила $\Phi_n(t)$. Уравнения независимы, и поэтому $q_n(t)$ можно рассматривать как нормальные координаты системы. Число таких координат бесконечно. Если отсутствует какая-либо компонента внешней силы Φ_n , то соответствующая координата q_n совершает только свободное затухающее колебание.

Решения уравнений (10.3.5) имеют вид

$$q_n(t) = \frac{1}{L\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2}} \int_0^t \Phi_n(\tau) \exp[-\delta(t-\tau)] \sin[\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2}(t-\tau)] d\tau, \quad (10.3.6)$$

где $\omega_n^2 = n^2\pi^2 v^2/l^2$, $v = 1/\sqrt{LC}$, $\delta = R/2L$.

Получим $q_n(t)$ для разных частных случаев внешнего воздействия $\Phi_n(t)$.

Пусть $\Phi_n(t) = \Phi_{n0} e^{jpt}$, т. е. внешнее воздействие представляет синхронное и синфазное гармоническое возбуждение линии. Тогда $q_n(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \\ &= \frac{\Phi_{n0}}{L\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2}} \int_0^t \exp[-\delta(t-\tau) + jp\tau] \sin[\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2}(t-\tau)] d\tau = \\ &= \frac{\Phi_{n0}}{2jL\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2}} \left[\frac{\exp(jpt) - \exp[-t(\delta - j\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2})]}{\delta + j(p + \sqrt{\omega_n^2 - \delta^2})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\exp(jpt) - \exp[-t(\delta + j\sqrt{\omega_n^2 - \delta^2})]}{\delta + j(p - \sqrt{\omega_n^2 - \delta^2})} \right]. \end{aligned}$$

Для установившихся колебаний ($t \gg 1/\delta$) вторыми членами в числителе каждой дроби можно пренебречь, поэтому для $q_n(t)$ имеем

$$q_n(t) = \frac{\Phi_{n0} e^{jpt}}{L(\omega_n^2 - p^2 + 2jp\delta)}. \quad (10.3.7)$$

Суммируя по n , получим общее решение уравнения (10.3.1):

$$q(x, t) = \frac{e^{jpt}}{L} \sum_n \frac{\Phi_{n0}}{\omega_n^2 - p^2 + 2j p \delta} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.3.8)$$

При частоте внешнего воздействия p , совпадающей с одной из собственных частот ω_n системы, имеет место резонансное возрастание амплитуды колебаний n -го обертона тем большее, чем меньше затухание системы δ .

Рассмотрим следующий частный случай: гармоническая внешняя сила приложена в точке $x=b$, т. е.

$$\mathcal{E}(x, t) = \Phi_0 \tilde{\delta}(x-b) e^{jpt}, \quad (10.3.9)$$

где $\tilde{\delta}(x)$ — дельта-функция.

Определим коэффициенты разложения функции $\mathcal{E}(x, t)$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l} \Phi_0 e^{jpt} \int_0^l \tilde{\delta}(x-b) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 2\Phi_0 \sin \left(\frac{n\pi b}{l} \right) e^{jpt}.$$

Общее решение в этом случае будет иметь вид

$$q(x, t) = 2 \frac{\Phi_0}{L} e^{jpt} \sum_n \frac{\sin(n\pi b/l) \sin(n\pi x/l)}{\omega_n^2 - p^2 + 2j p \delta}. \quad (10.3.10)$$

Из его вида можно сделать ряд полезных заключений о поведении рассматриваемой системы под действием внешнего воздействия типа (10.3.9). Если внешнее воздействие приложено в узле

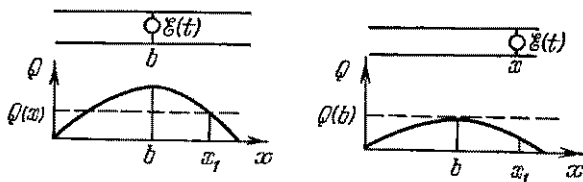


Рис. 10.12. Зависимость амплитуды вынужденного колебания от места включения внешней силы.

собственного колебания номера n , т. е. $\sin(n\pi b/l) = 0$, то это колебание, а также все кратные ему обертоны не возникнут. Из симметричности соотношения (10.3.10) относительно точек x и b следует принцип взаимности. Заряд, наведенный в точке x_1 , когда э. д. с. приложена в точке b , равен заряду, наведенному в b , если э. д. с. включена в точке x_1 . Принцип взаимности наглядно поясняет тот факт, что амплитуда колебаний тем больше, чем ближе точка включения к пучности колебания (рис. 10.12).

О практическом использовании принципа взаимности мы уже упоминали в § 6.3.

Зависимость амплитуд Q_n нормальных колебаний от p носит резонансный характер. Максимальную амплитуду имеет то колебание, для которого собственная частота $\omega_n = n\pi v/l$ совпадает с частотой внешней силы p .

Если внешняя сила подключена к одному из концов линии, ее можно учесть в граничных условиях при решении однородного волнового уравнения

$$L \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + R \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{C} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0. \quad (10.3.11)$$

Рассмотрим ряд частных, но часто встречающихся на практике случаев.

1) На одном конце линии включен генератор напряжения, а второй конец линии разомкнут, т. е.

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad \frac{1}{C} \frac{\partial q}{\partial x} &= \mathcal{E}_0 e^{ipt}, \\ \text{при } x=l \quad q(l) &= 0. \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

Вынужденные колебания ищем в следующем виде:

$$q(x, t) = Q(x) e^{ipt}. \quad (10.3.13)$$

Подставляя (10.3.13) в (10.3.11), получим уравнение для $Q(x)$

$$\frac{1}{C} \frac{d^2 Q}{dx^2} + (Lp^2 - jRp) Q = 0, \quad (10.3.14)$$

которое имеет общее решение

$$Q = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x, \quad (10.3.15)$$

где

$$\kappa^2 = C(Lp^2 - jRp). \quad (10.3.15a)$$

Решим сначала задачу, пренебрегая сопротивлением R . Тогда волновое число κ , равное $\kappa = p \sqrt{LC} = 2\pi/\lambda$, действительно. Удовлетворим граничным условиям (10.3.12) и получим для $Q(x)$ следующее выражение:

$$Q(x) = -\frac{\mathcal{E}_0 C \sin \kappa (l-x)}{\kappa \cos \kappa l}. \quad (10.3.16)$$

Перейдем от амплитуды заряда к амплитуде напряжения:

$$U(x) = -\frac{1}{C} \frac{dQ}{dx} = -\mathcal{E}_0 \frac{\cos \kappa (l-x)}{\cos \kappa l}. \quad (10.3.17)$$

Мы видим, что при $\kappa l = (2s+1)\pi/2$ ($s=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет место резонансное возрастание амплитуды напряжения в линии.

В этом случае на линии укладывается нечетное число четвертей длин волн, т. е. $l = (2s+1)\lambda/4$. Частота внешней силы p , при которой наступает резонанс, совпадает с одной из собственных частот линии, замкнутой на одном конце и разомкнутой на другом: $\omega_s = \pi v (2s+1)/2l$. Вблизи точки подключения внешней силы находится узел напряжения. На рис. 10.13 показано распределение $U(x)$ для первых трех обертонов. Отношение максимальной

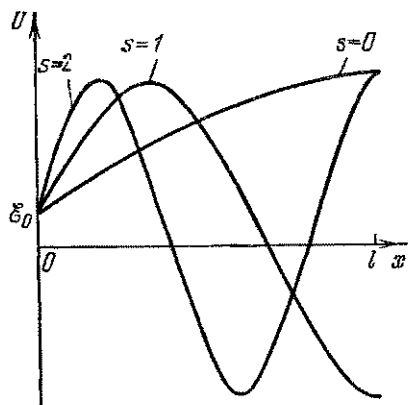


Рис. 10.13. Распределение амплитуды напряжения вдоль линии с разомкнутым концом, возбуждаемой генератором напряжения.

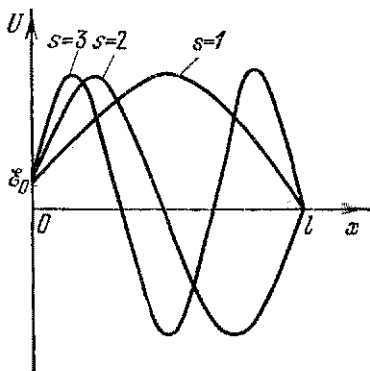


Рис. 10.14. Распределение амплитуды напряжения вдоль линии с замкнутым концом, возбуждаемой генератором напряжения.

амплитуды U к амплитуде внешней э. д. с. ξ_0 определяется добротностью. При добротности, стремящейся к бесконечности, максимальная амплитуда всех обертонов также стремится к бесконечности.

2) На одном конце линии включен генератор напряжения, второй ее конец замкнут, т. е.

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad \frac{1}{C} \frac{\partial q}{\partial x} &= \xi_0 e^{pt}, \\ \text{при } x=l \quad \frac{\partial q}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (10.3.18)$$

Решая уравнения (10.3.11), при граничных условиях (10.3.18) получим

$$U(x) = \xi_0 \frac{\sin \kappa (l-x)}{\sin \kappa l}. \quad (10.3.19)$$

Резонанс в этом случае возникает при $\kappa l = s\pi$, т. е. при резонансе на линии укладывается целое число полуволн. Резонансная частота системы совпадает с одной из собственных частот линии, короткозамкнутой на обоих концах, т. е. $\omega_s = s\pi v/l$. На рис. 10.14 при-

ведено распределение амплитуд напряжения для первых трех обертонов.

3) К одному концу линии подключен генератор тока, второй конец линии разомкнут, т. е.

$$\text{при } x=0 \quad \frac{\partial q}{\partial t} = I_0 e^{jpt}, \quad (10.3.20)$$

$$\text{при } x=l \quad q(l)=0.$$

Решение в этом случае имеет вид

$$Q(x) = \frac{I_0}{jp} \frac{\sin \kappa (l-x)}{\sin \kappa l}. \quad (10.3.21)$$

Соответственно для амплитуды напряжения получим

$$U(x) = \frac{I_0}{jpC} \frac{\kappa \cos \kappa (l-x)}{\sin \kappa l}. \quad (10.3.22)$$

При резонансе $\kappa l = s\pi$ и на линии укладывается целое число полуволн. Резонансная частота p равна одной из собственных частот линии, разомкнутой на обоих концах, т. е. $\omega_s = s\pi v/l$. На рис. 10.15 приведено распределение вдоль линии амплитуд тока и напряжения для первых двух тонов.

4) К одному концу линии подключен генератор тока, второй ее конец замкнут, т. е.

$$\text{при } x=0 \quad \frac{\partial q}{\partial t} = I_0 e^{jpt},$$

$$\text{при } x=l \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

(10.3.23)

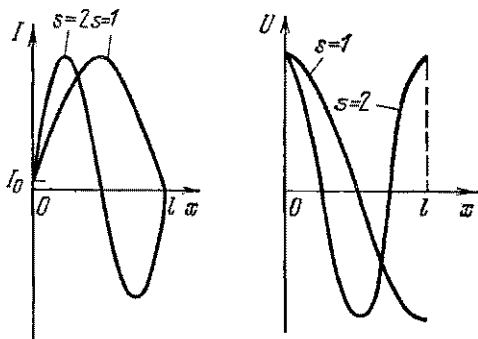


Рис. 10.15. Распределение амплитуд тока и напряжения вдоль линии с разомкнутым концом, возбуждаемой генератором тока.

При этих граничных условиях решение имеет вид

$$Q(x) = \frac{I_0}{jp} \frac{\cos \kappa (l-x)}{\cos \kappa l}.$$

Резонанс будет при совпадении p с одной из собственных частот $\omega_s = (2s+1)\pi v/2l$.

Распределение вдоль линии амплитуд тока и напряжения для двух наинизших тонов дано на рис. 10.16.

Таким образом, резонансные явления в рассматриваемой системе зависят не только от частоты p , но и от способа воздействия на систему. В зависимости от того, какой генератор (тока

или напряжения) подключен к системе, резонансные частоты будут различны.

Номер тона s , на котором при заданной частоте p может возникать резонанс, определяется соотношением

$$s = pl/\pi v = 2l/\lambda \quad \text{или} \quad s = (2l/\lambda) - 1/2.$$

При малых номерах s резонансное колебание происходит в основном на одном тоне, если же $s \gg 1$, то даже при небольшом затухании в полосу резонансной кривой попадает несколько тонов. При этом уже нецелесообразно пользоваться разложением по

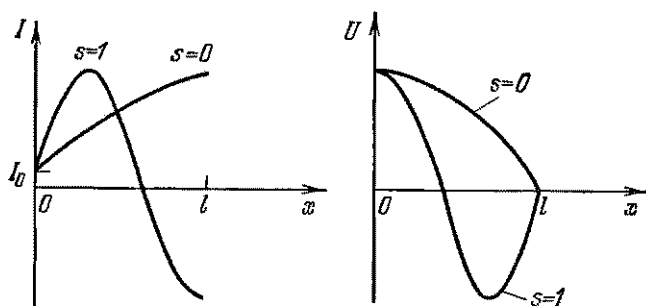


Рис. 10.16. Распределение амплитуд тока и напряжения в линии с замкнутым концом, возбуждаемой генератором тока.

спектру собственных колебаний. Лучшие результаты дает представление вынужденных колебаний в виде набора бегущих от источника волн и волн, отраженных от конца линии. При учете малого затухания волновое число κ можно записать, согласно (10.3.15а), следующим образом:

$$\kappa \approx \frac{p}{v} \left(1 - \frac{j}{2} \frac{RCv^2}{p} \right) = \frac{p}{v} - jR/(2\sqrt{L/C}). \quad (10.3.24)$$

Решая уравнение (10.3.11) при граничных условиях (10.3.12), найдем закон изменения напряжения $u(x, t)$

$$u(x, t) = -\mathcal{E}_0 \exp(jpt) \frac{\cos \kappa(l-x)}{\cos \kappa l} = -\mathcal{E}_0 \exp(jpt) (\exp[j\kappa(l-x)] + \exp[-j\kappa(l-x)]) / (\exp(j\kappa l) + \exp(-j\kappa l)).$$

После простых преобразований получим

$$u(x, t) = -\mathcal{E}_0 e^{jpt} (1 + \exp(-2j\kappa l))^{-1} (\exp(-j\kappa x) + \exp(j\kappa x) \exp(-2j\kappa l)). \quad (10.3.25)$$

Учитывая (10.3.24), можем записать

$$\exp(-2jkl) \approx \exp[-(2jpl/v + Rl/\sqrt{L/C})],$$

откуда следует, что $|\exp(-2jkl)| < 1$.

При этом предположении (10.3.25) можно переписать в виде

$$u(x, t) = -\mathcal{E}_0 \{ \exp[j(pt - kx)] - \exp[j(pt - kx)] \times \\ \times [\exp(-2jkl) - \exp(-4jkl) + \dots] + \\ + \exp[j(pt + kx)] [\exp(-2jkl) - \exp(-4jkl) + \dots] \}. \quad (10.3.26)$$

Таким образом, вынужденное колебание представлено в виде суммы бегущих волн. Первое слагаемое характеризует волну, бегущую от источника. Слагаемые вида $\exp[j(pt - kx)] \exp(-2jskl)$ ($s=1, 2, \dots$) описывают бегущие волны, отраженные от конца линии $x=0$, а слагаемые $\exp[j(pt + kx)] \exp(-2jskl)$ — отраженные от конца $x=l$. Величина s характеризует число отражений, которые претерпела данная волна. При каждом прохождении линии волна затухает по закону $\exp(-Rl/\sqrt{L/C})$. Поэтому в (10.3.26) следует учитывать лишь конечное число волн, тем меньшее, чем больше затухание в линии. В пределе при большом затухании остается лишь волна, бегущая от источника

$$u(x, t) = -\mathcal{E}_0 \exp\{j(pt - kx)\}.$$

§ 10.4. Обратная реакция системы на генератор

Все выводы предыдущего параграфа справедливы при предположении, что источник внешнего воздействия на систему обладает бесконечно большой мощностью. Только в этом случае можно считать постоянными амплитуду напряжения (генератор напряжения) или амплитуду тока (генератор тока) и не учитывать обратное влияние системы на источник колебательной энергии. Учтем теперь, что реальный источник обладает конечной мощностью, и колебательная система оказывает на него обратное воздействие. Рассмотрим механическую систему, эквивалентная схема которой представлена на рис. 10.17. Возбуждаемая струна характеризуется плотностью ρ , натяжением T и плотностью сил трения h . В центре струны через пружину связи с коэффициентом упругости k' подключен генератор механических колебаний. Генератор представлен в виде резонатора с массой M , образованного пружиной с коэффициентом упругости k и элементом трения, характеризующим коэффициентом h_{pes} . Автоколебательные свойства резонатора учтены зависимостью h_{pes} от амплитуды колебаний. Эта зависимость приведена на рис. 10.18 (мягкий режим). Величина A_0 является амплитудой устойчивых стационарных колебаний генератора в отсутствие связи со струной.

Обозначим через y_1 и y_2 смещение участков струны слева и справа от точки $l/2$, а через z — смещение массы M от положения

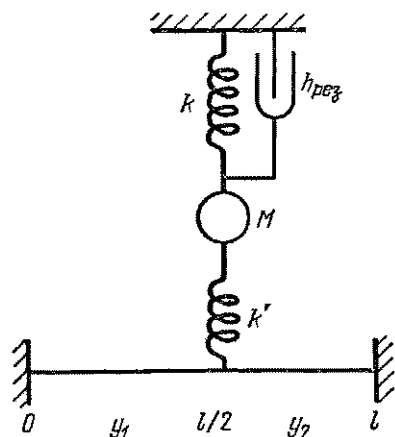


Рис. 10.17. Эквивалентная схема механического генератора, возбуждающего струну.

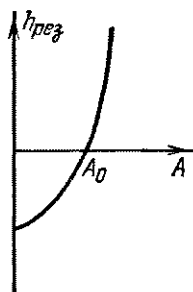


Рис. 10.18. Зависимость эквивалентного трения $h_{рез}$ генератора от амплитуды колебаний массы M .

равновесия. Тогда мы можем написать уравнения колебаний для струны и для генератора в виде

$$\rho \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} + h \frac{\partial y_n}{\partial t} = T \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}, \quad n = 1, 2, \quad (10.4.1)$$

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + h_{рез} \frac{dz}{dt} + kz + k' [z - y_0(l/2)] = 0. \quad (10.4.2)$$

Из условия сшивания решений в точке $x = l/2$ имеем

$$y_1(t, l/2) = y_2(t, l/2) = y_0(t), \quad (10.4.3)$$

$$T \left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x} \right)_{l/2} + k' (z - y_0) = 0. \quad (10.4.4)$$

Пусть струна закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$, т. е.

$$y_1(0, t) = y_2(l, t) = 0. \quad (10.4.5)$$

Тогда из граничных условий (10.4.5) и условий сшивания (10.4.3) следует вид решения

$$y_1 = y_0(t) \frac{\sin \kappa x}{\sin(\kappa l/2)}, \quad y_2 = y_0(t) \frac{\sin \kappa (l-x)}{\sin(\kappa l/2)}, \quad (10.4.6)$$

где κ — волновое число для колебаний ненагруженной струны. Подстановка этих выражений в условие сшивания (10.4.4) дает

связь между $y_0(t)$ и $z(t)$

$$-2\kappa T y_0 \operatorname{ctg}(\kappa l/2) + k'(z - y_0) = 0$$

или

$$y_0(t) = \frac{k' z(t)}{2\kappa T \operatorname{ctg}(\kappa l/2) + k'}. \quad (10.4.7)$$

Отсюда видно, что при $2\kappa T \operatorname{ctg}(\kappa l/2) \gg k'$ смещение струны $y_0(t) \ll z(t)$. Тогда в уравнении для генератора (10.4.2) можно пренебречь y_0 по сравнению с z . В данном случае струна практически не оказывает влияния на генератор. При этом генератор работает на частоте

$$\omega_r = \sqrt{(k + k')/M}. \quad (10.4.8)$$

Однако при приближении частоты генератора к одной из собственных частот струны, нагруженной в центре пружиной, $y_0(t)$ будет возрастать и станет сравнимым с $z(t)$. При малом k' собственные частоты нечетных тонов струны (четные тона не возбуждаются, так как пружина прикреплена в центре струны) близки к собственным частотам струны без нагрузки:

$$\omega_s = \frac{(2s+1)\pi}{l} \sqrt{T/\rho}. \quad (10.4.9)$$

Из (10.4.7) видно, что y_0 будет порядка z лишь вблизи тех значений κ , для которых

$$\kappa l/2 = (2s+1)\pi/2. \quad (10.4.10)$$

Для того чтобы получить связь между y_0 и z при сильном взаимодействии струны и генератора, разложим $\operatorname{ctg}(\kappa l/2)$ в ряд вблизи значения $\kappa l/2 = (2s+1)\pi/2$

$$\operatorname{ctg}(\kappa l/2) \approx (2s+1)\pi/2 - \kappa l/2. \quad (10.4.11)$$

Величину κ можно выразить через параметры струны и пока еще неизвестную частоту системы ω . Для этого, предполагая, что процесс носит гармонический характер, подставим $y_0(t) = B \exp[j(\omega t + \varphi)]$ в уравнение колебаний струны (10.4.1). В результате получается следующее соотношение:

$$-\rho\omega^2 + jh\omega + \kappa^2 T = 0. \quad (10.4.12)$$

Отсюда при малых h получим связь между κ и ω

$$\kappa \approx \omega \sqrt{\rho/T} (1 - jh/2\rho\omega). \quad (10.4.13)$$

Знаменатель (10.4.7) при подстановке в него (10.4.11) и (10.4.13) примет вид

$$2\kappa T \operatorname{ctg}(\kappa l/2) + k' = \rho l \omega (\omega_s - \omega) + jhl(\omega - \omega_s) + k'. \quad (10.4.14)$$

Так как ω порядка ω_s , то можно считать, что $\omega(\omega_s - \omega) \approx (\omega_s^2 - \omega^2)/2$. Таким образом, (10.4.7) принимает вид

$$[1/2\rho l (\omega_s^2 - \omega^2) + 1/2 j h l \omega + k'] y_0(t) = k' z(t) \quad (10.4.15)$$

Для генератора можно записать: $z(t) = A \exp(j\omega t)$. Колебания струны происходят с фазой, отличной от фазы генератора, и поэтому $y_0(t) = B \exp[j(\omega t + \varphi)]$.

Подставляя z и y_0 в (10.4.15) и в уравнение колебаний для генератора (10.4.2), получим

$$\begin{aligned} [1/2\rho l (\omega_s^2 - \omega^2) + k'] B \cos \varphi - 1/2 h l \omega B \sin \varphi - k' A &= 0, \\ [1/2\rho l (\omega_s^2 - \omega^2) + k'] B \sin \varphi + 1/2 h l \omega B \cos \varphi &= 0, \\ (-M\omega^2 + k + k') A - k' B \cos \varphi &= 0, \\ h_{\text{рез}} \omega A - k' B \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (10.4.16)$$

Мы получили систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных A , $C = B \cos \varphi$, $D = B \sin \varphi$, $h_{\text{рез}}$. Для нахождения стационарных амплитуд необходимо знать конкретный вид

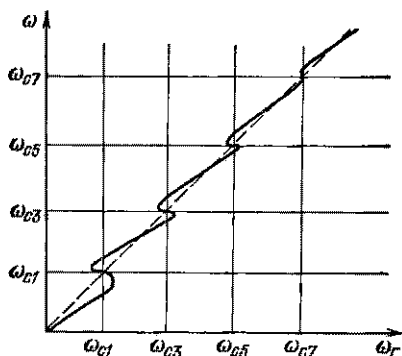


Рис. 10.19. Зависимость частоты колебаний в системе от парциальной частоты генератора.

зависимости $h_{\text{рез}}(A)$. Однако если нас интересует только частотная характеристика системы, мы можем ограничиться первыми тремя уравнениями. Это — система линейных однородных уравнений относительно A , C и D . Нетривиальное решение система имеет при условии равенства нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix} -k' & 1/2\rho l (\omega_s^2 - \omega^2) + k' & -1/2 h l \omega \\ 0 & 1/2 h l \omega & 1/2\rho l (\omega_s^2 - \omega^2) + k' \\ -M\omega^2 + k + k' & -k' & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (10.4.17)$$

Раскрывая детерминант, получим

$$(\omega^2 - \omega_{cs}^2)(\omega^2 - \omega_r^2) - \alpha_1 \alpha + 4\delta^2 \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2} = 0, \quad (10.4.18)$$

где $\alpha_1 = 2k'/\rho l$, $\alpha = k'/M$, $2\delta = h/\rho$, $\omega_{cs}^2 = \omega_s^2 + \alpha^2$.

Это уравнение для данной частоты ω_{cs} совпадает с уравнением частот для автоколебательной системы, нагруженной дополнительным контуром с парциальной частотой ω_{cs} (см. (7.4.7)). При связи, большей критической, т. е. при $\alpha\alpha_1 > 4\delta^2\omega^2$, вблизи частоты ω_{cs} имеет место явление затягивания. Струна обладает бесконечным числом собственных частот ω_{cs} , и явление затягивания будет возникать вблизи любой из частот ω_{cs} ($s=1, 2, \dots$). Зависимость частоты рассматриваемой сложной системы от настройки генератора ω_r имеет вид, изображенный на рис. 10.19. Так как величина критической связи (см. § 7.4) зависит от частоты, то при достаточно высоких частотах связь станет меньше критической и области затягивания исчезнут.

Так же, как и в случае системы с двумя степенями свободы, явление затягивания частоты генератора, нагруженного высокодобротным объемным резонатором, можно использовать для целей его частотной стабилизации вблизи одной из собственных частот объемного резонатора.

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ АУТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 11.1. Автоколебательная система с неэквидистантным спектром собственных частот

Распределенная система конечной длины имеет бесконечное число собственных частот, и поэтому при возникновении автоколебаний существенную роль играет характер спектра собственных частот. Если спектр неэквидистантен, так что комбинационные частоты не являются собственными, то в системе возникают синусоидальные колебания на одной из частот, для которой выполняются условия самовозбуждения и устойчивости стационарной амплитуды. В автоколебательных системах с эквидистантным

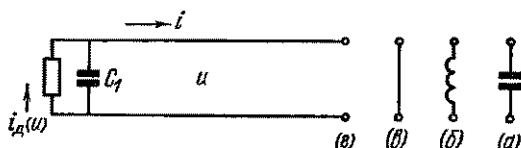


Рис. 11.1. Распределенная автоколебательная система с отрицательным сопротивлением на одном конце и различными нагрузками на другом.

спектром одновременно возбуждаются несколько собственных колебаний, и форма возникающих колебаний далека от гармонической.

В качестве распределенной автоколебательной системы с неэквидистантным спектром рассмотрим ограниченную двухпроводную линию, на одном из концов которой включен нелинейный активный элемент (туннельный диод, транзистор, электронная лампа и т. д.) (рис. 11.1 *).

Пусть линия обладает распределенными параметрами L , C и R . Нелинейный двухполюсник, включенный на конце линии, обладает емкостью C_1 и вольт-амперной характеристикой $i_d(u)$, имеющей падающий участок (см. § 5.1).

Решение задачи проведем для случая, когда сопротивление линии много меньше ее волнового сопротивления $Z_0 = \sqrt{L/C}$,

*) Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы. — ЖТФ, 1934, 4. 144.

т. е. параметр $\mu = RI/\sqrt{L/C}$ много меньше единицы. Используя телеграфные уравнения (10.1.22) (в пренебрежении утечкой)

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (a), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} - Ri \quad (б), \quad (11.1.1)$$

запишем волновое уравнение для линии:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + RC \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (11.1.2)$$

Граничное условие на конце $x=0$ имеет вид

$$i = -C_1 \frac{\partial u}{\partial t} + i_n(u). \quad (11.1.3)$$

Исключая с помощью этого соотношения из телеграфного уравнения (11.1.1, б) i и $\partial i/\partial t$, получим граничное условие, записанное для напряжения u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = LC_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L \frac{\partial i_n}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + RC_1 \frac{\partial u}{\partial t} - Ri_n(u). \quad (11.1.4)$$

Граничное условие на втором конце линии $x=l$ зависит от того, что подключено к линии. Рассмотрим несколько вариантов возможных нагрузок.

а) К концу линии подсоединена емкость C_0 (см. рис. 11.1, а). Тогда связь между током и напряжением на этом конце можно записать в виде $u = \int i dt/C_0$. Используя телеграфное уравнение (11.1.1, б), получим следующее граничное условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -RC_0 \frac{\partial u}{\partial t} - LC_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (11.1.5)$$

б) К концу линии $x=l$ подключена индуктивность L_0 (см. рис. 11.1, б). Тогда при $x=l$ $u = L_0 di/dt$ и граничное условие примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{R}{L_0} u - \frac{L}{L_0} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (11.1.6)$$

Граничные условия для случаев закороченного и разомкнутого концов получаются как частные случаи (11.1.5) и (11.1.6):

в) Для коротко замкнутого конца (см. рис. 11.1, в) при $x=l$ имеем

$$u = 0, \quad (11.1.7)$$

г) Для разомкнутого (см. рис. 11.1, г) при $x=l$ конца имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (11.1.8)$$

Будем считать, что характеристику нелинейного элемента можно представить кубическим полиномом (мягкий режим):

$$i_d(u) = S_0 u (1 - u^2/3u_0^2), \quad (11.1.9)$$

где u_0 — напряжение насыщения, S_0 — крутизна линейной части характеристики. Поскольку потери энергии в системе считаются малыми, то и вклад энергии, пропорциональный $i_d(u)$, также мал.

Здесь удобно перейти к безразмерным величинам, и поэтому введем ряд обозначений:

$$y = x/l, \quad \tau = t/\sqrt{LC}, \quad v = u/u_0, \quad (11.1.10)$$

$$\tilde{\beta} = L_0/Ll, \quad \tilde{\chi} = C_0/Cl, \quad \tilde{\gamma} = C_1/Cl, \quad S = S_0 L/RlC.$$

В этих обозначениях волновое уравнение (11.1.2) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \mu \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (11.1.11)$$

Соответственно для граничных условий получим при $y=0$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \mu [\tilde{\gamma} - S(1 - v^2)] \frac{\partial v}{\partial \tau}; \quad (11.1.12)$$

при $y=1$ соотношения (11.1.5) — (11.1.8) примут вид:

$$a) \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \tilde{\chi} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \tilde{\chi} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0, \quad (11.1.13)$$

$$б) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \tau} + \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\mu}{\tilde{\beta}} v = 0, \quad (11.1.14)$$

$$в) v = 0, \quad (11.1.15)$$

$$г) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (11.1.16)$$

В выражении (11.1.12) опущен член, пропорциональный $Rl_d(v)$, так как он имеет порядок малости μ^2 .

Решение задачи начнем с определения собственных частот соответствующей консервативной системы. Для этого положим μ равным нулю. Запишем для этого случая уравнение (11.1.11) и граничное условие (11.1.12)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0, \quad (11.1.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad (11.1.18)$$

При $y=1$ имеет место одно из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{\kappa} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{а}), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \tau} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{б}), \\ v = 0 \quad (\text{в}), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{г}). \end{aligned} \quad (11.1.19)$$

Решение уравнения (11.1.17) можно записать в виде

$$v = (A \cos \omega y + B \sin \omega y) \cos (\omega \tau + \varphi). \quad (11.1.20)$$

Подставляя это решение в граничные условия (11.1.18) и (11.1.19, а), получим уравнение для определения собственных частот консервативной системы, нагруженной на конце $y=1$ емкостью

$$\operatorname{ctg} \omega_k = (\tilde{\kappa} \tilde{\gamma} \omega_k^2 - 1) / \omega_k (\tilde{\kappa} + \tilde{\gamma}), \quad k=1, 2, \dots \quad (11.1.21)$$

Соответственно для системы, нагруженной на конце $y=1$ индуктивностью, имеем

$$\operatorname{tg} \omega_k = (1 - \tilde{\beta} \tilde{\gamma} \omega_k^2) / \omega_k (\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}). \quad (11.1.22)$$

Уравнения для нахождения собственных частот системы с закороченными или разомкнутыми концами получим как частный случай уравнения (11.1.21) при $\tilde{\kappa} = \infty$ или $\tilde{\kappa} = 0$, т. е.

$$\operatorname{ctg} \omega_k = \omega_k \tilde{\gamma}, \quad (11.1.23)$$

$$\operatorname{tg} \omega_k = -\omega_k \tilde{\gamma}. \quad (11.1.24)$$

Любое из приведенных выражений дает бесконечный спектр допустимых частот. Особенностью этого спектра является его неэквидистантность. Заметим, что ω_k есть безразмерная частота. Действительная частота Ω равна

$$\Omega_k = \omega_k / l \sqrt{LC} = \omega_k / \sqrt{(lL)(lC)}. \quad (11.1.25)$$

Собственные частоты находятся из уравнений (11.1.21) — (11.1.24) графически. Пример нахождения собственных частот с помощью уравнения (11.1.23) приведен на рис. 11.2. На этом рисунке построены кривые $F = \operatorname{ctg} \omega$ и прямая $\omega \tilde{\gamma}$. Точки их пересечения определяют собственные частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т. д.

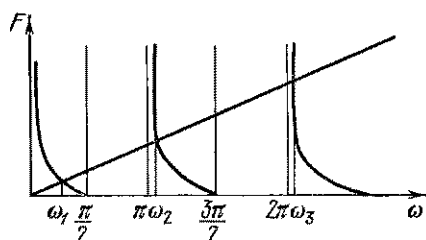


Рис. 11.2. Графическое нахождение собственных частот.

Найдем теперь условия самовозбуждения системы. При исследовании условий самовозбуждения можно линеаризовать граничное условие на конце $y=0$. Это означает пренебрежение в (11.1.12) членом v^2 по сравнению с единицей. Для простоты выкладок

будем в дальнейшем рассматривать линию, закороченную при $y=1$. Аналогично можно решить задачу и при других типах граничных условий.

Волновое уравнение (11.1.11) и граничные условия в этом случае примут вид

$$\text{при } y=0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \mu \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad (\text{a}) \quad (11.1.26)$$

$$\text{при } y=1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} - \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \mu (\tilde{\gamma} - S) \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad (\text{б})$$

$$v=0. \quad (\text{в})$$

Решим полученную линейную задачу методом разделения переменных, для чего искомое решение представим в виде

$$v(y, \tau) = Y(y) T(\tau). \quad (11.1.27)$$

Подставив (11.1.27) в (11.1.26, а), находим для $Y(y)$ и $T(\tau)$ следующие уравнения:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \Lambda^2 Y = 0, \quad \frac{d^2 T}{d\tau^2} + \mu \frac{dT}{d\tau} + \Lambda^2 T = 0, \quad (11.1.28)$$

где Λ^2 — собственное значение краевой задачи.

Общее решение уравнения (11.1.26, а) запишется в виде

$$v(y, \tau) = (A \cos \Lambda y + B \sin \Lambda y) \exp [(-\mu/2 \pm j\Lambda) \tau]. \quad (11.1.29)$$

Подстановка (11.1.29) в граничное условие при $y=0$ дает возможность определить отношение амплитуд B и A

$$B/A = \mp j\mu S - \Lambda \tilde{\gamma}. \quad (11.1.30)$$

С другой стороны, из граничного условия при $y=1$ следует, что отношение амплитуд B/A равно

$$B/A = -\text{ctg } \Lambda. \quad (11.1.31)$$

Приравнявая (11.1.30) и (11.1.31), получим

$$\text{ctg } \Lambda = \Lambda \tilde{\gamma} \pm j\mu S. \quad (11.1.32)$$

Разложим Λ в ряд по степеням μ :

$$\Lambda = \omega + \mu \Lambda_1 + \dots, \quad (11.1.33)$$

где ω — одна из собственных частот соответствующей консервативной системы. В рассматриваемом случае закороченного конца ω удовлетворяет уравнению (11.1.23). Ограничившись в соотношении (11.1.33) членом порядка μ , подставим его в (11.1.32):

$$\text{ctg } \omega - \mu \Lambda_1 (1 + \text{ctg}^2 \omega) = \tilde{\gamma} \omega + \mu \Lambda_1 \tilde{\gamma} \pm j\mu S,$$

откуда

$$\Lambda_1 = \pm jS/(1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2\omega^2). \quad (11.1.34)$$

Таким образом, поскольку Λ_1 является чисто мнимой величиной, поправка к частоте в первом приближении отсутствует.

Решение (11.1.29) теперь можно записать в виде

$$v(y, \tau) = (A \cos \Lambda y + B \sin \Lambda y) \exp [(-\mu/2 + \mu |\Lambda_1| \pm j\omega) \tau]. \quad (11.1.35)$$

Отсюда следует, что нарастающее со временем решение будет при $|\Lambda_1| > 1/2$. В экспоненте (11.1.35) член $\mu/2$ характеризует потери энергии (декремент), а член $\mu |\Lambda_1|$ — инкремент системы. Из требования превышения инкремента системы над декрементом (при малых амплитудах) вытекает условие самовозбуждения системы

$$S > (1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2\omega^2)/2. \quad (11.1.36)$$

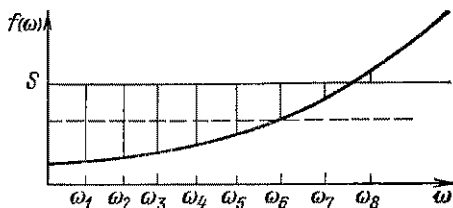


Рис. 11.3. График функции $f(\omega)$ для линии с замкнутым концом.

Исследование неравенства (11.1.36) проведем графически. Для этого построим правую часть выражения (11.1.36) как функцию частоты $f(\omega)$ (рис. 11.3). На том же рисунке проведем прямую, соответствующую величине S . На оси абсцисс отмечены те дискретные значения частоты ω_k ($k=1, 2, \dots$), которые соответствуют собственным частотам системы, удовлетворяющим уравнению (11.1.23). Как мы видим, с ростом номера собственной частоты превышение инкремента над декрементом уменьшается. Начиная с некоторой частоты (ω_8), система не самовозбуждается.

§ 11.2. Стационарные автоколебания

Амплитуда стационарного колебания определяется решением исходного уравнения (11.1.11), удовлетворяющим граничным условиям (11.1.12) и (11.1.15). В консервативной системе ($\mu=0$) периодические движения возможны с любой амплитудой, зависящей от начальных условий. В неконсервативной системе ($\mu \neq 0$) периодические движения существуют лишь с вполне определенными амплитудами, соответствующими равенству вклада энергии за счет отрицательного сопротивления и потерь в активном сопротивлении линии. В частном случае мягкого режима, как известно, имеется лишь одна стационарная амплитуда. Это — амплитуда предельного цикла, близкого к одной из замкнутых траекторий соответствующей консервативной системы.

Можно считать, что решение для неконсервативной системы имеет вид

$$v = v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \dots, \quad (11.2.1)$$

где v_0 — одно из решений для консервативной системы.

Из (11.1.17) и граничного условия (11.1.18) v_0 можно записать следующим образом:

$$v_0 = A (\cos \omega y - \omega \tilde{\gamma} \sin \omega y) \cos \omega \tau. \quad (11.2.2)$$

Здесь амплитуду A надо подобрать так, чтобы она была близка к амплитуде предельного цикла автоколебательной системы. В этом случае величина v_1 и члены, соответствующие более высоким приближениям, не будут возрастать со временем. Подставим (11.2.1) в уравнение (11.1.11) и граничные условия (11.1.12) и (11.1.15). Уравнение и граничные условия для v_1 принимают вид

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} = -A\omega (\cos \omega y - \omega \tilde{\gamma} \sin \omega y) \sin \omega \tau, \quad (a)$$

$$\text{при } y=0 \quad (11.2.3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} = -(\tilde{\gamma} - S) A\omega \sin \omega \tau - SA^3 \omega \cos^2 \omega \tau \sin \omega \tau, \quad (б)$$

$$\text{при } y=1$$

$$v_1 = 0. \quad (в)$$

Эти уравнения имеют вид уравнений, описывающих консервативную систему, на которую действуют как распределенные силы, так и силы, сосредоточенные на концах. В выражения для этих сил входят компоненты с частотами ω и 3ω , где ω — частота, определяемая соотношением (11.1.23). Так как спектр частот рассматриваемой нами системы неэквидистантен, т. е. $3\omega_1 \neq \omega_3$, то компонента силы с частотой $3\omega_1$ не создаст в системе движения с заметной амплитудой. Поэтому эту составляющую силы можно не учитывать. Тогда граничное условие (11.2.3, б) примет вид

$$г) \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} - \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} = -A\omega \left[\tilde{\gamma} - S \left(1 - \frac{A^2}{4} \right) \right] \sin \omega \tau. \quad (11.2.3)$$

Таким образом, на консервативную систему с собственной частотой ω действует сила резонансной частоты. Стационарное решение в данном случае возможно лишь при выполнении условия ортогональности внешней силы и собственного колебания системы. Это условие определит стационарную амплитуду, т. е. амплитуду, не возрастающую со временем. Поэтому потребуем, чтобы

$$v_1 = V(y) \sin \omega \tau. \quad (11.2.4)$$

Подставляя решение в форме (11.2.4) в уравнения (11.2.3), получим

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \omega^2 V = -A\omega (\cos \omega y - \tilde{\gamma} \sin \omega y), \quad (a)$$

при $y=0$

$$\frac{dV}{dy} + \tilde{\gamma}\omega^2 V = -A\omega [\tilde{\gamma} - S(1 - A^2/4)], \quad (б) \quad (11.2.5)$$

при $y=1$

$$V=0. \quad (в)$$

Общее решение неоднородного уравнения (11.2.5, а) имеет вид

$$V(y) = B \cos \omega y + C \sin \omega y - \frac{1}{2} \tilde{A} \omega \tilde{\gamma} y \cos \omega y - \frac{1}{2} A y \sin \omega y. \quad (11.2.6)$$

Из (11.2.6) и граничных условий (11.2.5, б, в), учитывая (11.1.23), получим два соотношения, связывающие A , B , C :

$$\begin{aligned} C + \tilde{\gamma}\omega B &= -A\tilde{\gamma}/2 + AS(1 - A^2/4), \\ C + \tilde{\gamma}\omega B &= A(1 + \omega^2 \tilde{\gamma}^2)/2. \end{aligned} \quad (11.2.7)$$

Отсюда найдем амплитуду стационарных колебаний

$$A_k^2 = 4[1 - (1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2 \omega_k^2)/2S]. \quad (11.2.8)$$

Стационарная амплитуда существует только на тех частотах ω_k , для которых $S > (1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2 \omega_k^2)/2$. Легко видеть, что это условие совпадает с условием самовозбуждения (11.1.36). Из выражения (11.2.8) и из рис. 11.3 также видно, что с ростом номера собственной частоты стационарная амплитуда уменьшается.

Таким образом, мы получили стационарное решение, которое в первом приближении можно записать в виде

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \mu v_1 = A_k (\cos \omega_k y - \omega_k \tilde{\gamma} \sin \omega_k y) \cos \omega_k \tau + \\ &+ \mu B \cos \omega_k y \sin \omega_k \tau + \mu [\frac{1}{2} A_k (1 + \omega_k^2 \tilde{\gamma}^2) - \omega_k \tilde{\gamma} B] \sin \omega_k y \sin \omega_k \tau - \\ &- \mu \frac{1}{2} A_k y \sin \omega_k y \sin \omega_k \tau - \mu \frac{1}{2} A_k \tilde{\gamma} \omega_k y \cos \omega_k y \sin \omega_k \tau \end{aligned} \quad (11.2.9)$$

(величина C исключена с помощью соотношения (11.2.7)).

Для исследования устойчивости этого решения дадим v небольшое отклонение z . Движение будет устойчивым, если z — ненарастающая функция времени.

Проводя соответствующие математические выкладки, можно показать, что колебание с амплитудой A_k на частоте ω_k будет устойчивым, если

$$A_k^2 > 2[1 - (1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2 \omega_k^2)/2S], \quad (11.2.10)$$

где ω_l — любая из собственных частот колебаний, удовлетворяющая уравнению (11.1.23).

Обратим внимание на то, что в условие самовозбуждения (11.1.36), в условие устойчивости периодического движения (11.2.10)

и в выражение для стационарной амплитуды (11.2.8) входит одна и та же частотная функция: $f(\omega_i) = (1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2 \omega_i^2)/2$. Это позволяет относительно просто анализировать полученные результаты.

Обратимся снова к рис. 11.3, где эта функция представлена в виде непрерывной зависимости от частоты.

Устойчивыми будут те амплитуды A_k , для которых выполнено условие

$$S - f(\omega_k) > [S - f(\omega_1)]/2. \quad (11.2.11)$$

Так как разность $S - f(\omega_i)$ максимальна для наименьшей частоты ω_1 (см. рис. 11.3), то будут устойчивы те A_k , для которых

$$S - f(\omega_k) > [S - f(\omega_1)]/2. \quad (11.2.12)$$

Прямая $[S - f(\omega_1)]/2$ показана на рис. 11.3 пунктиром. Из этого рисунка видно, что количество частот при заданном S , для которых выполнено условие самовозбуждения (для данного примера) равно семи ($i=7$). Однако устойчивыми будут колебания только для $k=1, 2, 3, 4, 5$, так как для них разность $S - f(\omega_k)$ больше $[S - f(\omega_1)]/2$.

Из рис. 11.3 видно, что легче всего в системе возбуждаются колебания на самой низкой из собственных частот ω_1 . Задавая

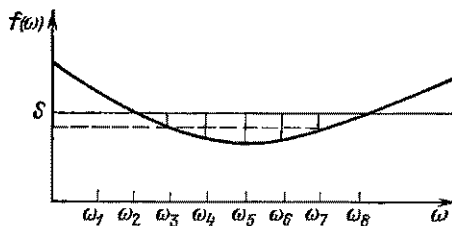


Рис. 11.4. График функции $f(\omega)$ для линии с емкостной нагрузкой.

определенные начальные условия, в системе можно возбудить колебания также на одной из частот $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$. Любое из этих гармонических колебаний может устойчиво существовать в системе. Если система генерирует колебания с частотой ω_i , где $i \geq 2$, то при уменьшении инкремента амплитуда колебаний данной частоты

уменьшается. Как только нарушается условие устойчивости (11.2.10), происходит перескок с колебания частоты ω_i на колебание частоты ω_1 . Вопрос о возможности одновременной генерации колебаний нескольких частот требует отдельного рассмотрения.

Для линии, нагруженной при $y=1$ емкостью или индуктивностью, условия самовозбуждения, амплитуда стационарных колебаний и условие устойчивости имеют тот же вид, что и для замкнутого конца. Разница будет лишь в форме зависимости функции $f(\omega_i)$ от частоты.

Так, для случая емкостной нагрузки имеем

$$f(\omega_i) = (1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2 \omega_i^2)/2 + \tilde{\kappa} (1 + \tilde{\gamma}^2 \omega_i^2)/2 (1 + \tilde{\kappa}^2 \omega_i^2), \quad (11.2.13)$$

а для линии, нагруженной индуктивностью, функция $f(\omega_l)$ равна

$$f(\omega_l) = (1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^2 \omega_l^2)/2 + \tilde{\beta} (1 + \tilde{\gamma}^2 \omega_l^2)/2 (1 + \tilde{\beta}^2 \omega_l^2). \quad (11.2.14)$$

Из (11.2.13) и (11.2.14) видно, что функция $f(\omega)$ может быть немонотонной. На рис. 11.4 приведена зависимость $f(\omega)$ для случая емкостной нагрузки при $\tilde{\chi} \gg \tilde{\gamma}$ ($C_0 \gg C_1$). В такой системе возбуждаются колебания (для данного примера) на частотах от ω_3 до ω_7 . Устойчивыми колебаниями являются колебания с частотами ω_4 , ω_5 , ω_6 .

§ 11.3. Распределенная автоколебательная система с эквидистантным спектром собственных частот

Если реактивные нагрузки на концах линии малы, например при емкостной нагрузке $\tilde{\chi} \ll 1$ и $\tilde{\gamma} \ll 1$, то спектр собственных частот близок к эквидистантному. Колебания, возбуждаемые в таких системах, являются негармоническими, так как происходит одновременное возбуждение нескольких мод с кратными частотами. Поэтому форма автоколебаний может быть весьма сложной (вплоть до треугольной *).

Рассмотрим автоколебательную систему, состоящую из отрезка передающей линии, нагруженной туннельным диодом с пренебрежимо малой паразитной емкостью (рис. 11.5).

Волновое уравнение для линии, свободной от потерь, имеет обычный вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (11.3.1)$$

Для линии, закороченной при $x=0$ и нагруженной при $x=l$ туннельным диодом, можно записать следующие граничные условия:

$$u(0, t) = 0, \quad (11.3.2)$$

$$i(l, t) = f[u(l, t) + \mathcal{E}], \quad (11.3.3)$$

где $\mathcal{E}$ — постоянное смещение на диоде, а $i = f(u_d)$ — вольт-амперная характеристика туннельного диода.

Решение волнового уравнения (11.3.1) в соответствии с § 10.1 при учете граничного условия (11.3.2) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(t - x/v) - F(t + x/v), \\ i(x, t) &= \{F(t - x/v) + F(t + x/v)\}/Z_0, \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

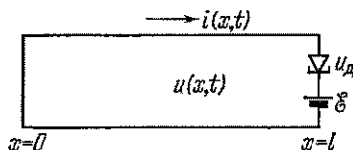


Рис. 11.5. Схема распределенной автоколебательной системы с туннельным диодом.

*) Витт А. А., К теории скрипичной струны. — ЖТФ, 1936, 6, 1459.

где $Z_0 = \sqrt{L/C}$ — волновое сопротивление линии, $v = 1/\sqrt{LC}$ — скорость волны в линии.

Подставляя (11.3.4) в граничное условие при $x=l$, получим

$$F(t-T/2) + F(t+T/2) = Z_0 f[F(t-T/2) - F(t+T/2) + \mathcal{E}], \quad (11.3.5)$$

где $T/2 = l/v$ — время прохождения волной пути l . Уравнение (11.3.5) можно переписать в виде

$$F(t+T/2) = \Phi[F(t-T/2)]. \quad (11.3.6)$$

Это функциональное уравнение дает возможность определять состояние системы в момент $t+T$, если известно ее состояние в момент времени t :

$$F(t+T) = \Phi[F(t)]. \quad (11.3.7)$$

Пусть в начальный момент функция $F(t)$ известна, т. е. $F(t) = F_0(t)$, где F_0 — известная функция t в интервале $0 < t < T$.

Для любого t_0 , расположенного в этом интервале, имеем следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} F_0 &= F_0(t_0), \\ F_1 &= F(t_0+T) = \Phi[F_0(t_0)], \\ F_2 &= F(t_0+2T) = \Phi[F(t_0+T)] = \\ &= \Phi\{\Phi[F_0(t_0)]\} = \Phi^{(2)}[F_0(t_0)], \\ &\dots\dots\dots \\ F_n &= F(t_0+nT) = \Phi\{F[t_0+(n-1)T]\} = \\ &= \Phi\Phi\dots\Phi[F_0(t_0)] = \Phi^{(n)}[F_0(t_0)]. \end{aligned} \quad (11.3.8)$$

При $n \rightarrow \infty$ (11.3.8) может иметь два типа предельных решений. В первом случае существует единственное значение F_∞ , удовлетворяющее уравнению

$$F_\infty = \Phi(F_\infty). \quad (11.3.9)$$

Это решение соответствует неколебательному процессу в линии (напряжение и ток постоянны). Во втором случае — последовательность стремится к предельному циклу с корнями (см. § 5.4)

$$F_{\infty 1}, F_{\infty 2}, \dots, F_{\infty m}. \quad (11.3.10)$$

Каждый итерационный корень индекса m из (11.3.10) удовлетворяет соотношению

$$F_{\infty s} = \Phi^{(m)}[F_{\infty s}], \quad (11.3.11)$$

которое описывает периодический процесс в линии. Форма колебаний зависит от вида характеристики туннельного диода и величины смещения $\mathcal{E}$.

Характер процесса, устанавливающегося в системе, удобно исследовать геометрически (построение Лемерея, см. гл. 5). На

рис. 11.6 построена зависимость $F(t+T) = \Phi[F(t)]$. Там же на рисунке показана прямая $F(t+T) = F(t)$, которая является биссектрисой координатного угла. Для того чтобы проследить характер установления колебаний и определить устойчивость стационарного решения, произведем на рис. 11.6 следующее построение. Возьмем на кривой Φ точку с абсциссой $F_0(t_0)$, проведем от нее горизонтальную прямую до пересечения с биссектрисой. Из точки пересечения прямой и биссектрисы проведем вертикальную прямую до пересечения с кривой Φ . Продолжая такое построение, получим последовательность значений $F_n(t)$, которая полностью

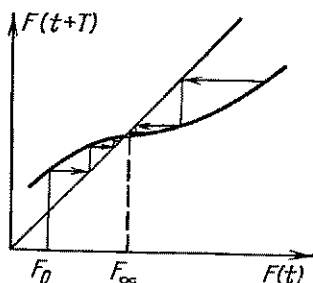


Рис. 11.6. Схема итерационного процесса (построение Лемерея) с одним стационарным состоянием.

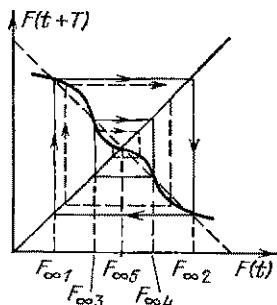


Рис. 11.7. Построение Лемерея для случая существования трех стационарных решений.

Пунктиром показан процесс установления колебаний.

соответствует итерационному процессу (11.3.8). На рис. 11.6 построена такая последовательность, которая сходится к единственному значению F_∞ , соответствующему пересечению биссектрисы и кривой Φ . Легко видеть, что стационарное значение F_∞ в этом случае устойчиво. F_∞ будет неустойчиво, если $|d\Phi/dF|_{F=F_\infty} > 1$. На рис. 11.7 изображена зависимость $F(t+T) = \Phi[F(t)]$, для которой существуют три стационарных решения итерационного уравнения. Первому стационарному решению соответствует два предельных значения $F_{\infty 1}$ и $F_{\infty 2}$. При втором стационарном решении существуют также два предельных значения $F_{\infty 3}$ и $F_{\infty 4}$. Третьему стационарному решению соответствует $F_{\infty 5}$. Из построения видно, что первое и третье решения устойчивы, а второе решение неустойчиво.

Пунктирные ломаные, соответствующие итерационному процессу, аналогичны интегральным кривым на фазовой плоскости. Предельные последовательности (на рис. 11.7 они изображены сплошными линиями) подобны предельным циклам. Неустойчивые предельные последовательности являются сепаратрисами, разде-

ляющими области приближения к различным устойчивым решениям. Какое из устойчивых решений установится в системе, зависит от начальных условий, т. е. от распределения тока и напряжения в линии при $t=0$. Все предельные циклы образуют на плоскости $F(t+T)$, $F(t)$ замкнутые многоугольники, вершины которых лежат на кривой Φ и биссектрисе. В частном случае, изображенном на рис. 11.7, предельные циклы являются квадратными.

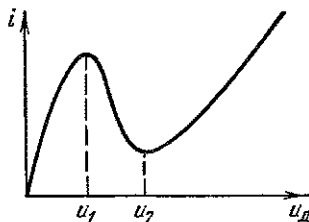


Рис. 11.8. Вольт-амперная характеристика туннельного диода.

Вид предельной последовательности зависит от конкретной характеристики диода и от величины смещения $\mathcal{E}$. На рис. 11.8 приведена типичная характеристика зависимости $i=f(u_d)$ для туннельного диода. При $u_d < u_1$ и $u_d > u_2$ дифференциальное сопротивление диода положительно, для $u_1 < u_d < u_2$ дифференциальное сопротивление отрицательно.

Для получения функционального уравнения (11.3.6) необходимо перейти от переменных u_d и i к переменным $F(t)$ и $F(t+T)$. Воспользуемся соотношениями (11.3.3) и (11.3.4) при $x=l$:

$$u_d - \mathcal{E} = u(l) = F(t) - F(t+T), \quad (11.3.12)$$

$$Z_0 i(l) = F(t) + F(t+T).$$

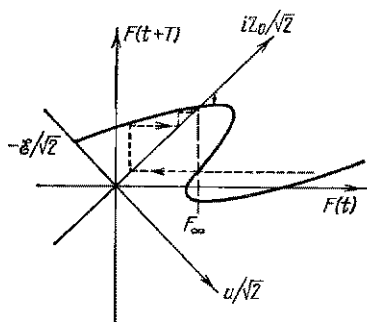


Рис. 11.9. Нахождение стационарного состояния при выборе рабочей точки на участке характеристики с положительным дифференциальным сопротивлением.

Пунктиром показан итерационный процесс, сходящийся к стационарной точке

Отсюда видно, что для перехода от переменных u_d , i к $F(t)$, $F(t+T)$ необходимо сдвинуть начало координат на отрезок $\mathcal{E}$ по оси u_d , повернуть полученную систему координат на 45° и изменить масштаб по оси u_d в $1/\sqrt{2}$ раз, а по оси i в $Z_0/\sqrt{2}$ раз. Соответствующее преобразование координат поясняется рис. 11.9, где по оси абсцисс отложена величина $u/\sqrt{2} = (u_d - \mathcal{E})/\sqrt{2}$.

Стационарное состояние системы существенно зависит от величины смещения $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{E} < u_1$ или $\mathcal{E} > u_2$, т. е. рабочая точка находится в области положительного дифференциального сопротивления диода, то существует единственное предельное значение F_∞ . Процесс установления напряжения и тока в линии для случая $\mathcal{E} < u_1$ изображен на рис. 11.9. Стационарному режиму F_∞ соот-

ветствует нулевое напряжение в линии; при этом по линии течет постоянный ток.

Если рабочая точка выбрана на падающем участке характеристики диода ($u_1 < \mathcal{E} < u_2$), то в системе возбуждаются автоколебания, форма и амплитуда которых определяются $\mathcal{E}$ и волновым

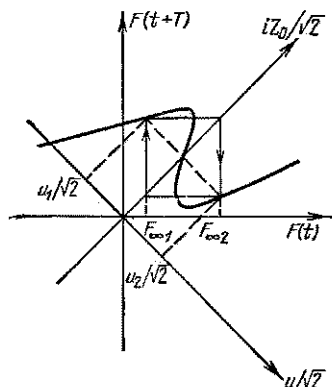


Рис. 11.10. Нахождение стационарного решения при выборе рабочей точки на падающем участке характеристики диода.

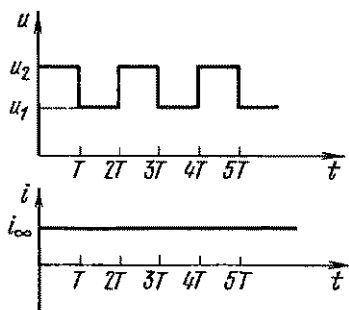


Рис. 11.11. Форма возбуждающихся стационарных колебаний.

сопротивлением Z_0 . Если выбранная рабочая точка соответствует максимуму модуля отрицательного сопротивления туннельного

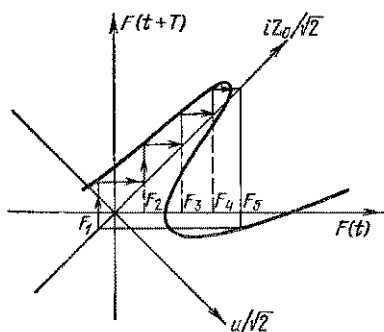


Рис. 11.12. Предельная последовательность при больших Z_0 .

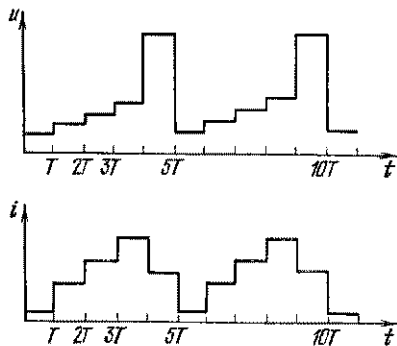


Рис. 11.13. Форма тока и напряжения, соответствующие предельной последовательности рис. 11.12.

диода $|R_-|$ и $Z_0 \approx |R_-|$, то устанавливается режим, иллюстрированный рис. 11.10. Форма стационарных напряжения и тока в линии, соответствующая данному режиму, приведена на рис. 11.11. Через

время $T = 2l/v$ происходит переключение туннельного диода от напряжения u_1 к напряжению u_2 . Ток в линии при этом остается постоянным.

При увеличении Z_0 кривая $\Phi[F(t)]$ вытягивается вдоль биссектрисы. Это приводит к более сложной форме стационарной предельной последовательности. Соответственно более сложной становится форма напряжения и тока в линии. На рис. 11.12 приведена одна из возможных форм предельной последовательности при больших Z_0 , а на рис. 11.13 — зависимость напряжения и тока от времени, соответствующая рис. 11.12. Автоколебания в данном случае являются периодическими с периодом $5T$; форма тока и напряжения весьма сложна.

Таким образом, в автоколебательных системах с эквидистантным спектром существуют автоколебания релаксационного характера (см. § 5.2).

§ 11.4. Лазер как распределенная автоколебательная система

Оптический квантовый генератор — лазер является автоколебательной системой с распределенным отрицательным сопротивлением. Последнее создается средой с инверсной населенностью.

Сопротивление может быть отрицательным лишь в определенной полосе частот вблизи линии поглощения данной среды. Как правило, в пределах ширины линии активного вещества укладывается несколько собственных частот резонатора. Поэтому лазер генерирует, в общем случае, ряд мод с частотами, близкими к собственным частотам резонатора.

Анализ работы лазера обычно проводится в полуклассическом приближении. Электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла, а поляризация среды, определяющая отрицательное нелинейное сопротивление, описывается на квантовом языке. Амплитуды и фазы колебаний, генерируемых лазером, можно найти методом самосогласованного поля. Электромагнитное поле, воздействуя на активную среду, создает в ней поляризацию $\mathcal{P}(r, t)$. В свою очередь поляризация является источником электромагнитного поля. Необходимо отметить, что поляризация среды зависит не от мгновенного значения напряженности электромагнитного поля, а от его амплитуды. Поэтому лазер представляет собой автоколебательную систему с инерционной нелинейностью (см. § 5.6).

В простейшем случае оптического резонатора, образованного двумя плоскими зеркалами, расположенными на расстоянии l друг от друга, наибольшую добротность имеют аксиально симметричные типы колебаний. Электромагнитное поле таких колебаний медленно меняется в направлении, параллельном зеркалам, что позволяет ограничиться рассмотрением одномерной задачи, в кото-

рой единственная пространственная переменная z направлена вдоль оси резонатора.

Волновое уравнение для аксиально симметричных мод можно получить из уравнений Максвелла

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{4\pi\zeta}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}. \quad (11.4.1)$$

Это уравнение записано в пренебрежении векторным характером электрического поля, что справедливо для резонатора, в котором созданы условия существования колебаний с определенной плоскостью поляризации. Величина ζ характеризует все виды потерь энергии в оптическом резонаторе.

Напряженность электрического поля можно представить в виде ряда по собственным функциям нормальных мод резонатора

$$E(z, t) = \sum_n A_n(t) \sin \kappa_n z, \quad (11.4.2)$$

где $\kappa_n = n\pi/l = 2\pi/\lambda_n$ — волновое число n -го нормального колебания. Такой вид нормальных колебаний соответствует граничным условиям $E(0, t) = E(l, t) = 0$, т. е. в точках $z=0$ и $z=l$ помещены зеркала с коэффициентом отражения, равным единице.

Подставляя (11.4.2) в (11.4.1), получим дифференциальное уравнение для пространственной фурье-компоненты электрического поля $A_n(t)$

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + \frac{\omega}{Q_n} \frac{dA_n}{dt} + \Omega_n^2 A_n = -4\pi \frac{d^2 P_n}{dt^2}, \quad (11.4.3)$$

где Ω_n — собственная частота резонатора, равная

$$\Omega_n = n\pi c/l, \quad (11.4.4)$$

Q_n — добротность резонатора на n -й моде, ω — частота электромагнитного поля, P_n — пространственная фурье-компонента поляризации среды, равная

$$P_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \mathcal{P}(z, t) \sin \frac{n\pi z}{l} dz. \quad (11.4.5)$$

При достаточно высокой добротности Q_n для решения уравнения (11.4.3) можно использовать метод медленно меняющихся амплитуд (см. § 2.5). Решение уравнения (11.4.3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} A_n(t) &= E_n(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)], \\ P_n(t) &= C_n(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] + S_n(t) \sin[\omega_n t + \varphi_n(t)], \end{aligned} \quad (11.4.6)$$

где $E_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ — медленно меняющиеся за период $2\pi/\omega$ амплитуда и фаза n -го колебания, $C_n(t)$ и $S_n(t)$ медленно меняющиеся компоненты $P_n(t)$.

Обычно для газовых лазеров время установления инверсной населенности много меньше времени установления амплитуды колебаний. Поэтому можно считать, что поляризация $P_n(t)$ успевает следовать за амплитудой электрического поля. В этом случае укороченные уравнения для амплитуды и фазы n -й моды имеют вид

$$\dot{E}_n + \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q_n} E_n = -2\pi\omega S_n, \quad (\omega_n + \dot{\phi}_n - \Omega_n) E_n = -2\pi\omega C_n. \quad (11.4.7)$$

Из-за инерционной нелинейности лазера компоненты поляризации C_n и S_n зависят от амплитуды электрического поля E_n . Эта зависимость определяется механизмом создания инверсной населенности среды и характером уширения спектральной линии активного вещества. Если напряженность электрического поля в резонаторе невелика (лазер работает вблизи порога самовозбуждения), то в разложении C_n и S_n по амплитудам поля можно ограничиться членами третьей степени, т. е.

$$\begin{aligned} -2\pi\omega S_n &= \alpha_{0n} E_n - \beta_n E_n^3 - \sum_{m \neq n} \vartheta_{nm} E_n E_m^2, \\ -2\pi\omega C_n &= \sigma_n E_n + \rho_n E_n^3 + \sum_{m \neq n} \tau_{nm} E_n E_m^2. \end{aligned} \quad (11.4.8)$$

Коэффициенты α_{0n} , β_n , ϑ_{nm} , σ_n , ρ_n и τ_{nm} для газового лазера рассчитаны Лэмбом*). При расчете предполагалось, что активная среда может рассматриваться как двухуровневая система, обладающая инверсной населенностью. Величины коэффициентов, входящих в соотношения (11.4.8), зависят от собственных частот резонатора Ω_n , от степени инверсии населенности, от времени релаксации верхнего и нижнего рабочих уровней и от ширины линии поглощения. С учетом (11.4.8) укороченные уравнения для амплитуды и фазы n -й моды лазера примут вид

$$\dot{E}_n = (\alpha_{0n} - \omega/2Q_n) E_n - \beta_n E_n^3 - \sum_{m \neq n} \vartheta_{nm} E_n E_m^2, \quad (11.4.9)$$

$$\omega_n + \dot{\phi}_n = \Omega_n + \sigma_n + \rho_n E_n^2 + \sum_{m \neq n} \tau_{nm} E_m^2. \quad (11.4.10)$$

Из уравнения (11.4.9) следует, что величина α_{0n} определяет коэффициент усиления активной среды на n -й моде колебаний для малого сигнала. Поэтому условие самовозбуждения n -й моды колебаний можно записать в виде $\alpha_{0n} > \omega/2Q_n$. Это означает, что усиление превышает потери в резонаторе на соответствующей частоте. Физический смысл остальных коэффициентов уравнений (11.4.9) и (11.4.10) будет выяснен ниже.

*) Лэмб У. Теория оптических мазеров. В сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», М. — Мир, 1966, стр. 282.

Рассмотрим сначала случай возбуждения в системе только одной моды. Уравнения (11.4.9) и (11.4.10) приобретают следующий вид:

$$\dot{E} = (\alpha_0 - \omega/2Q) E - \beta E^3, \quad \omega = \Omega + \sigma + \rho E^2. \quad (11.4.11)$$

Отсюда можно найти стационарную амплитуду и частоту генерации

$$E_0^2 = (\alpha_0 - \omega/2Q)/\beta, \quad \omega = \Omega + \sigma + \rho E_0^2. \quad (11.4.12)$$

Стационарная амплитуда E_0 тем больше, чем больше превышение усиления над потерями. Кроме того, E_0 зависит от коэффициента нелинейности β . Этот коэффициент определяет уменьшение инверсной населенности, связанное с насыщением активной среды, вызванным колебаниями генерируемой моды. Частота генерации ω отличается от собственной частоты резонатора на величину $\sigma + \rho E_0^2$. Коэффициент σ пропорционален разности между собственной частотой резонатора и частотой спектральной линии атомного перехода. Поэтому он создает линейное подтягивание генерируемой частоты к частоте атомного перехода. Аналогичное явление было рассмотрено в § 10.2. Нелинейный член ρE_0^2 дает зависящее от амплитуды смещение частоты.

Если усиление активной среды превышает потери для двух собственных частот оптического резонатора, то возможна одновременная генерация двух независимых мод колебаний.

В случае двухмодового режима укороченные уравнения для амплитуд E_1 и E_2 имеют вид

$$\dot{E}_1 = \alpha_1 E_1 - \beta_1 E_1^3 - \theta_{12} E_1 E_2^2, \quad \dot{E}_2 = \alpha_2 E_2 - \beta_2 E_2^3 - \theta_{21} E_2 E_1^2, \quad (11.4.13)$$

где $\alpha_1 = \alpha_{01} - \omega/2Q_1$, $\alpha_2 = \alpha_{02} - \omega/2Q_2$ — коэффициенты, характеризующие превышение усиления над потерями для каждой из мод. Коэффициенты θ_{12} и θ_{21} определяют уменьшение инверсной населенности для каждой моды, вызванное колебаниями другой моды, т. е. эквивалентны коэффициентам связи. Физический смысл остальных коэффициентов, входящих в уравнения (11.4.13), был определен раньше.

Уравнения (11.4.13) удобно переписать для квадратов амплитуд $E_1^2 = X$ и $E_2^2 = Y$:

$$\dot{X} = 2X(\alpha_1 - \beta_1 X - \theta_{12} Y), \quad \dot{Y} = 2Y(\alpha_2 - \beta_2 Y - \theta_{21} X). \quad (11.4.14)$$

Будем исследовать эти уравнения на фазовой плоскости переменных X , Y (см. § 1.1). Физический смысл имеют только положительные значения X и Y , т. е. фазовые траектории расположены в первом квадранте. Прямая

$$\alpha_1 - \beta_1 X - \theta_{12} Y = 0 \quad (11.4.15)$$

является изоклиной вертикальных касательных, т. е. на ней $dX/dY = 0$.

Прямая

$$\alpha_2 - \beta_2 Y - \theta_{21} X = 0 \quad (11.4.16)$$

является изоклиной горизонтальных касательных ($dX/dY = \infty$). В общем случае возможны четыре стационарных решения системы уравнений (11.4.14):

$$\begin{aligned} 1) & X_1 = Y_1 = 0, \\ 2) & X_2 = 0, \quad Y_2 = \alpha_2/\beta_2, \\ 3) & X_3 = \alpha_1/\beta_1, \quad Y_3 = 0, \\ 4) & X_4 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\theta_{12})/(\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}), \\ & Y_4 = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\theta_{21})/(\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}). \end{aligned} \quad (11.4.17)$$

Первое решение соответствует отсутствию генерации, второе и третье — генерации одной моды. Четвертое решение, которому на фазовой плоскости соответствует точка пересечения прямых (11.4.15) и (11.4.16), описывает режим одновременной генерации двух мод.

Устойчивость стационарных решений можно определить при исследовании поведения малых отклонений от стационарных решений (см., например, § 4.2). Однако в данном случае устойчивость стационарных состояний можно исследовать с помощью фазовой плоскости.

Будем рассматривать только случаи, когда α_1 и α_2 больше нуля, т. е. условия самовозбуждения выполнены для обеих мод. Коэффициенты β_1 и β_2 для активной среды всегда положительны. На рис. 11.14 представлены фазовые траектории для случая, когда $\alpha_1/\beta_1 > \alpha_2/\theta_{21}$. Прямые 1 и 2 — изоклины вертикальных и горизонтальных касательных. Эти прямые не пересекаются в первом квадранте, что свидетельствует о невозможности двухмодового режима. Остальным трем режимам соответствуют стационарные точки $(0, 0)$, $(0, \alpha_2/\beta_2)$, $(\alpha_1/\beta_1, 0)$.

Об устойчивости этих состояний можно судить по направлению движения изображающей точки по фазовым траекториям вблизи данного стационарного состояния. Как видно из рис. 11.14 и уравнения (11.4.14), правее прямой 1 переменная X уменьшается со временем ($\dot{X} < 0$), а левее этой прямой X возрастает. Ниже прямой 2 переменная Y возрастает ($\dot{Y} > 0$), а выше — убывает. В соответствии с этими представлениями проведены фазовые траектории на рисунке. Видно, что положение равновесия и состояние $X = 0$, $Y = \alpha_2/\beta_2$ неустойчивы. Единственному устойчивому состоянию соответствует точка $X = \alpha_1/\beta_1$, $Y = 0$.

Таким образом, пока $(\alpha_2/\theta_{21}) < \alpha_1/\beta_1$ система генерирует только одну моду. Вторая мода подавляется модой с большим коэффици-

ентом усиления. Можно ввести эффективный коэффициент усиления для второй моды $\alpha'_2 = \alpha_2 - \theta_{21}\alpha_1/\beta_1$. Пока $\alpha'_2 < 0$, вторая мода не возникает. Если эффективные коэффициенты усиления для обеих мод положительны, то в системе могут существовать обе моды колебаний. В этом случае режим работы системы зависит от величины связи между модами. При слабой связи ($\beta_1\beta_2 > \theta_{12}\theta_{21}$) происходит одновременная генерация колебаний двух частот. На рис. 11.15 изображен фазовый портрет, соответствующий этому режиму. Пересечение прямых 1 и 2 определяет устойчивую точку

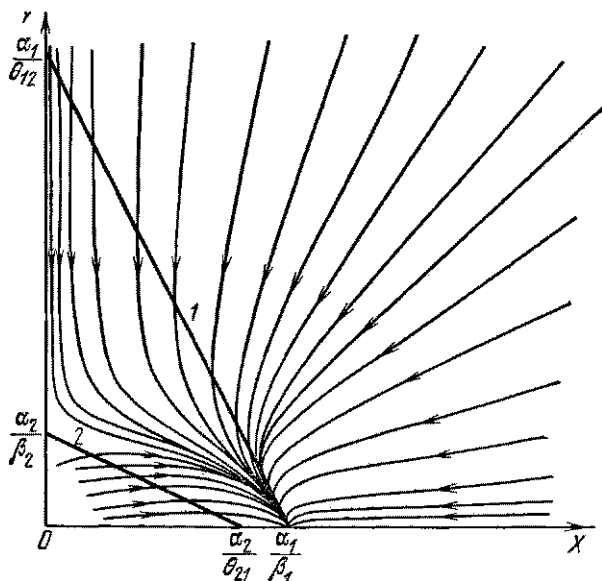


Рис. 11.14. Фазовые траектории в случае $\alpha_1/\beta_1 > \alpha_2/\theta_{21}$, $\alpha_1/\theta_{12} > \alpha_2/\beta_2$.

(узел) фазовых траекторий. Положение равновесия и одночастотные режимы при слабой связи неустойчивы.

В случае сильной связи ($\beta_1\beta_2 < \theta_{21}\theta_{12}$), приведенном на рис. 11.16, точка пересечения двух прямых является неустойчивой (седло). Устойчивы одночастотные режимы генерации: $X = \alpha_1/\beta_1$, $Y = 0$ и $X = 0$, $Y = \alpha_2/\beta_2$.

Из вида фазовых траекторий, изображенных на рис. 11.16, следует, что в системе может установиться либо один, либо другой одночастотный режим в зависимости от начальных условий. Если начальные условия таковы, что изображающая точка в момент $t=0$ лежит правее бифуркационной кривой (пунктир на рис. 11.16), то установятся колебания с частотой ω_1 и амплитудой $E_{10} = \sqrt{\alpha_1/\beta_1}$. Все изображающие точки, лежащие слева от бифуркационной

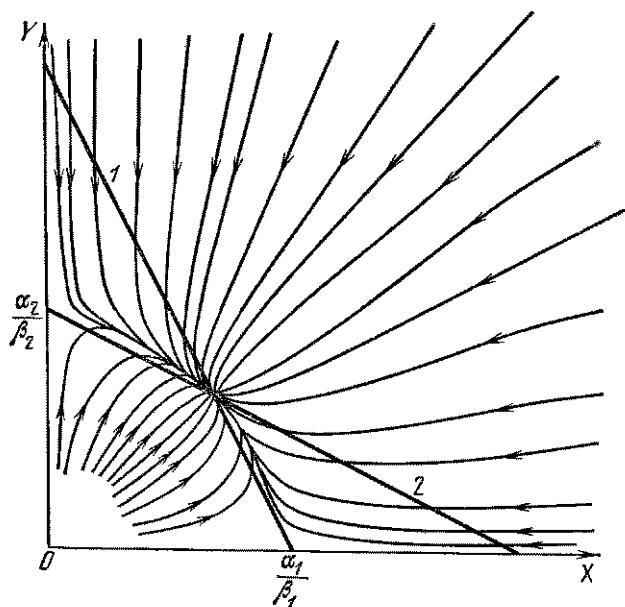


Рис. 11.15. Фазовый портрет двухмодовой системы при слабой связи.

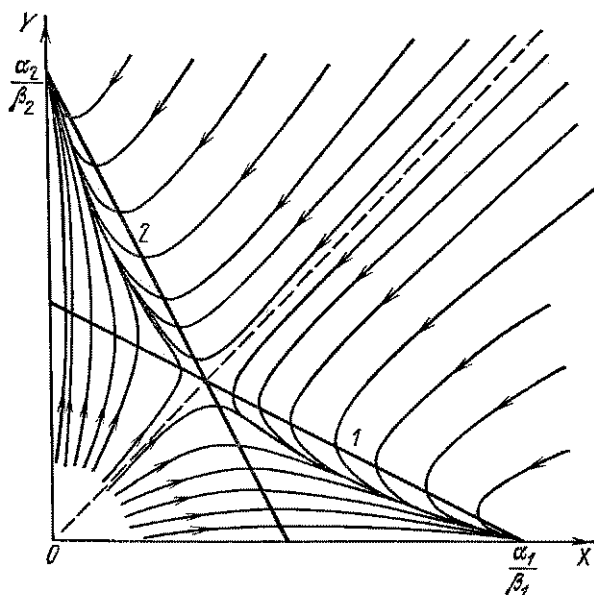


Рис. 11.16. Фазовый портрет двухмодовой системы при сильной связи.

прямой, в процессе установления движутся к точке, характеризующей процесс с частотой ω_2 и амплитудой $E_{20} = \sqrt{\alpha_2/\beta_2}$. Таким образом, в случае сильной связи двухмодовый лазер ведет себя аналогично автоколебательной системе с двумя степенями свободы, описанной в § 7.5 (явление затягивания).

Соотношения (7.5.4) и (7.5.5) показывают *), что в автоколебательной системе с двумя контурами всегда осуществляется сильная связь ($\theta_{12}\theta_{21} = 4\beta_1\beta_2$). Поэтому бигармонический режим в такой системе невозможен. В газовом лазере преимущественно реализуется случай слабой связи. Это различие обусловлено тем, что в системе с двумя контурами (см. § 7.5) усиление колебаний обеих частот происходит в одном и том же нелинейном активном элементе, например в полевом транзисторе или лампе. В газовом же лазере с неоднородным уширением линии поглощения усиление на каждой из генерируемых мод происходит за счет энергии различных атомов активной среды. Поэтому взаимное влияние колебаний различных частот оказывается малым и возможна одновременная генерация двух независимых колебаний.

Амплитуды этих колебаний связаны с параметрами системы следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} E_{10}^2 &= \frac{(\beta_2\alpha_1 - \theta_{12}\alpha_2)}{(\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21})}, \\ E_{20}^2 &= \frac{(\beta_1\alpha_2 - \theta_{21}\alpha_1)}{(\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21})}. \end{aligned} \quad (11.4.18)$$

Частоты генерируемых мод в соответствии с (11.4.10) равны

$$\omega_1 = \Omega_1 + \sigma_1 + \rho_1 E_{10}^2 + \tau_{12} E_{20}^2, \quad \omega_2 = \Omega_2 + \sigma_2 + \rho_2 E_{20}^2 + \tau_{21} E_{10}^2. \quad (11.4.19)$$

Из последнего соотношения следует, что частота каждого из колебаний зависит не только от его амплитуды, но и от амплитуды второго колебания.

Если в пределах ширины линии активного вещества укладывается три собственных частоты резонатора, то возможен трехмодовый режим генерации. Поскольку спектр собственных частот резонатора эквидистантен, т. е. $\Omega_2 - \Omega_1 = \Omega_3 - \Omega_2$, то и для генерируемых частот ω_i справедливо следующее приближенное соотношение:

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \omega_3 - \omega_2. \quad (11.4.20)$$

Поэтому вблизи каждой из генерируемых частот возникают комбинационные частоты: $2\omega_2 - \omega_3 \approx \omega_1$, $\omega_3 - \omega_2 + \omega_1 \approx \omega_2$ и $2\omega_2 - \omega_1 \approx \omega_3$. Наличие этих комбинационных частот при кубической

*) В настоящем параграфе введены обозначения, принятые в цитированной выше книге Лэмба, но отличные от использованных в гл. 7.

аппроксимации нелинейной поляризации приводит к следующим укороченным уравнениям для фаз генерируемых колебаний

$$\begin{aligned}\omega_1 + \dot{\phi}_1 &= \Omega_1 + \sigma_1 + \rho_1 E_1^2 + \tau_{12} E_2^2 + \tau_{13} E_3^2 + \\ &\quad + (\eta_{23} \sin \psi - \zeta_{23} \cos \psi) E_2^2 E_3 / E_1, \\ \omega_2 + \dot{\phi}_2 &= \Omega_2 + \sigma_2 + \rho_2 E_2^2 + \tau_{21} E_1^2 + \tau_{23} E_3^2 + \\ &\quad + (\eta_{13} \sin \psi - \zeta_{13} \cos \psi) E_1 E_3, \\ \omega_3 + \dot{\phi}_3 &= \Omega_3 + \sigma_3 + \rho_3 E_3^2 + \tau_{31} E_1^2 + \tau_{32} E_2^2 + \\ &\quad + (\eta_{21} \sin \psi - \zeta_{21} \cos \psi) E_2^2 E_1 / E_3,\end{aligned}\quad (11.4.21)$$

где слагаемые с коэффициентами η_{ij} и ζ_{ij} определяют вклад в поляризацию членов с комбинационными частотами,

$$\psi = (2\omega_2 - \omega_1 - \omega_3) t + (2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3). \quad (11.4.22)$$

Из (11.4.22) видно, что в общем случае ψ зависит от времени. Уравнение для ψ можно получить, дифференцируя (11.4.22) и учитывая (11.4.21):

$$\dot{\psi} = \sigma + A \sin \psi + B \cos \psi, \quad (11.4.23)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma &= 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 + (2\tau_{21} - \rho_1 - \tau_{31}) E_1^2 + (2\rho_2 - \tau_{12} - \tau_{32}) E_2^2 + \\ &\quad + (2\tau_{23} - \tau_{13} - \rho_3) E_3^2, \\ A &= 2E_1 E_3 \eta_{13} - E_2^2 (\eta_{23} E_3 / E_1 + \eta_{21} E_1 / E_3), \\ B &= E_2^2 (\zeta_{23} E_3 / E_1 + \zeta_{21} E_1 / E_3) - 2E_1 E_3 \zeta_{13}.\end{aligned}$$

Удобно записать (11.4.23) в виде

$$\dot{\psi} = \sigma + C \sin(\psi + \alpha), \quad (11.4.24)$$

где $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\operatorname{tg} \alpha = B/A$.

Характер функции $\psi(t)$ существенно зависит от соотношения величин σ и C . Если $|\sigma| < C$, то уравнение (11.4.24) имеет следующее стационарное решение:

$$\psi = -\arcsin(\sigma/C) - \alpha. \quad (11.4.25)$$

ψ в этом случае не зависит от времени и в соответствии с (11.4.22)

$$2\omega_2 - \omega_1 - \omega_3 = 0. \quad (11.4.26)$$

Генерируемые частоты эквидистантны, а фазы связаны соотношением

$$2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3 = -\arcsin(\sigma/C) - \alpha. \quad (11.4.27)$$

Частотное (11.4.26) и фазовое (11.4.27) соотношения указывают на самосинхронизацию мод. Каждая из генерируемых мод захватывается соответствующей комбинационной частотой,

В синхронном режиме лазер генерирует последовательность световых импульсов с частотой повторения Δ , равной

$$\Delta = \omega_3 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_1. \quad (11.4.28)$$

Форма импульса зависит от амплитуд и фаз генерируемых мод. В частном случае близких амплитуд $E_1 \approx E_2 \approx E_3 \approx E_0$ и разностей фаз, удовлетворяющих соотношению

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0, \quad (11.4.29)$$

импульс имеет вид

$$E = E_0 \frac{\sin [3 (\Delta t + \varphi_0)/2]}{\sin [(\Delta t + \varphi_0)/2]} \cos (\omega t + \varphi_0). \quad (11.4.30)$$

Зависимость огибающей (11.4.30) от Δt изображена на рис. 11.17. Если фазы не удовлетворяют (11.4.29), то форма импульса искажается.

В случае $|\sigma| > C$ стационарного значения для ψ не существует. Поэтому генерируемые моды не синхронизируют друг друга, их частоты и фазы не связаны. Обычно в лазерах наблюдается несинхронная генерация. Самосинхронизация мод возникает лишь при симметричном расположении собственных частот резонатора относительно центра линии усиления. Частота Ω_2 должна при этом совпадать с центром линии усиления, а частоты Ω_1 и Ω_3 располагаются симметрично относительно центра. В таком случае величина σ оказывается минимальной и выполняются условия самосинхронизации.

В лазере, генерирующем много мод (больше трех), также возможна их самосинхронизация. При этом, чем больше число синхронизируемых мод, тем уже генерируемый импульс и тем больше величина импульсной мощности.

Синхронизация мод лазера может также осуществляться при подаче внешнего сигнала, изменяющего потери резонатора или его оптическую длину (внешняя синхронизация). Частота внешнего сигнала должна быть близка к Δ — разности частот генерируемых лазером мод.

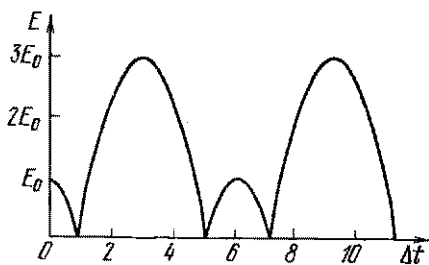


Рис. 11.17. Форма импульса в синхронном режиме для трехмодового лазера.

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕОДНОРОДНЫХ И В НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

§ 12.1. Волновые процессы в неоднородных линиях

Неоднородными распределенными системами называются такие системы, параметры которых изменяются от точки к точке. В неоднородных одномерных распределенных системах параметры изменяются вдоль направления распространения.

Для электрических длинных линий с погонными индуктивностью и емкостью, изменяющимися с координатой x , получим, исходя из телеграфных уравнений (10.1.5), волновое уравнение для напряжения в линии

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{L(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = C(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12.1.1)$$

и волновое уравнение для тока

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{C(x)} \frac{\partial i}{\partial x} \right] = L(x) \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (12.1.2)$$

Если параметры системы изменяются на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны, то можно говорить о скачкообразном изменении параметров. Скачкообразное нарушение однородности встречается очень часто при практическом использовании длинных линий, например при соединении двух однородных линий с разными волновыми сопротивлениями, при подключении к волноводу коаксиальной линии, при подключении к линии нагрузки.

В месте скачкообразного изменения параметров возникают отраженные волны. Энергия падающей волны частично проходит дальше, частично отражается к источнику. Кроме того, в точке разрыва может возникнуть излучение, а также возбуждение волн высших типов. Эти явления нельзя учесть, оставаясь в рамках телеграфных уравнений. Однако если линейные размеры области скачкообразного изменения параметров (например, геометрических размеров на стыке двух линий) значительно меньше длины волны, то эффекты возбуждения волн высших типов малы. В случае волноводных систем для уменьшения влияния волн высших типов необходимо так подобрать размеры волноводов, чтобы частоты этих волн оказались ниже критической частоты для данного волновода.

Тогда происходит быстрое затухание волн высших типов, возбужденных в месте стыка. В этом случае в волноводе распространяется только один тип волны и можно применить телеграфные уравнения. Влияние волн высших типов, существующих в окрестности стыка, можно учесть, если считать, что в линию включена сосредоточенная комплексная проводимость. Наличие последней изменяет фазу отраженной и проходящей волн. При малой величине неоднородности этот эффект мал, и мы в дальнейшем его учитывать не будем.

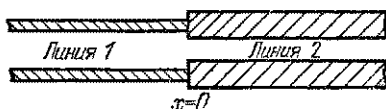


Рис. 12.1. Схема передающей линии со скачкообразным изменением параметров.

Предположим, что при $x=0$ параметры системы испытывают скачкообразное изменение (рис. 12.1), причем все перечисленные выше условия применимости телеграфных уравнений удовлетворены. Тогда для волны, падающей на неоднородность, имеем

$$u_{\text{пад}} = A_{10} \exp [j (\omega t - \kappa_1 x)],$$

а для волны, отраженной от неоднородности,

$$u_{\text{отр}} = A_2 \exp [j (\omega t + \kappa_1 x)],$$

где κ_1 — волновое число для волны в линии 1, $A_2 = A_{20} e^{j\varphi}$ — комплексная амплитуда отраженной волны при $x=0$.

Кроме того, существует прошедшая через неоднородность волна, распространяющаяся по линии 2:

$$A_3 \exp [j (\omega t - \kappa_2 x)],$$

где κ_2 — волновое число для волны в линии 2, $A_3 = A_{30} e^{j\psi}$ — комплексная амплитуда прошедшей волны при $x=0$. Неоднородность со стороны линии 1 охарактеризуем коэффициентом отражения $R(0)$, равным отношению комплексных амплитуд отраженной и падающей волн в точке $x=0$, т. е.

$$R(0) = \frac{A_{20}}{A_{10}} e^{j\varphi}. \quad (12.1.3)$$

Коэффициент отражения можно ввести и в более общем смысле как отношение амплитуд отраженной и падающей волн в любой точке линии:

$$R(x) = \frac{A_{20}}{A_{10}} \exp [j (2\kappa_1 x + \varphi)]. \quad (12.1.4)$$

Отсюда следует, что модуль коэффициента отражения $|R(x)| = A_{20}/A_{10}$ остается постоянным вдоль линии (если не учитывать

затухание). Фаза же коэффициента отражения $\Phi = 2\kappa_1 x + \varphi$ линейно изменяется с расстоянием x .

Неоднородность со стороны линии 2 охарактеризуем коэффициентом прохождения $D(0)$, равным отношению комплексных амплитуд прошедшей и падающей волн:

$$D(0) = \frac{A_{30}}{A_{10}} e^{i\psi}. \quad (12.1.5)$$

Рассмотрим теперь подробнее, что представляет собой волновой процесс в линии 1. Волну напряжения $u(x, t)$ можно записать в виде суперпозиции падающей и отраженной волн:

$$u(x, t) = A_{10} \exp[j(\omega t - \kappa_1 x)] + A_{20} \exp[j(\omega t + \kappa_1 x + \varphi)]. \quad (12.1.6)$$

Преобразуя это соотношение, получим

$$u(x, t) = A_{10} \{ (1 - |R(0)| e^{-i\varphi}) \exp[j(\omega t - \kappa_1 x)] + 2|R(0)| \cos(\kappa_1 x + \varphi) e^{j\omega t} \}. \quad (12.1.7)$$

Таким образом, мы представили сумму падающей и отраженной волн в виде суммы бегущей волны с амплитудой $A_{10}(1 - |R(0)| e^{-i\varphi})$ и чисто стоячей волны. Амплитуда стоячей

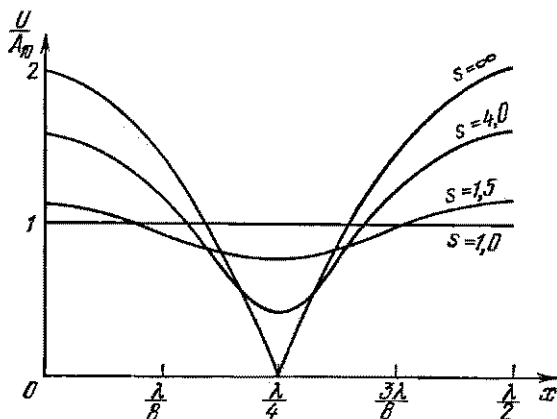


Рис. 12.2. Распределение амплитуды волны напряжения вдоль линии при различных значениях коэффициента стоячей волны.

волны $2A_{10}|R(0)|$ и фаза φ определяются характером неоднородности. Нетрудно заметить, что амплитуда волны напряжения последовательно проходит максимальные и минимальные значения. Так, при $2\kappa_1 x + \varphi = (2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) амплитуда напряжения минимальна и равна $U_{\min} = A_{10}(1 - |R(0)|)$; при $2\kappa_1 x + \varphi = 2n\pi$ амплитуда максимальна и равна $U_{\max} = A_{10}(1 + |R(0)|)$.

Отношение $U_{\text{макс}}$ к $U_{\text{мин}}$ называется коэффициентом стоячей волны и обозначается через s :

$$s = U_{\text{макс}}/U_{\text{мин}} \quad (12.1.8)$$

Коэффициент стоячей волны и модуль коэффициента отражения связаны очевидным соотношением

$$s = \frac{1 + |R(0)|}{1 - |R(0)|} \quad (12.1.9)$$

При $s=1$ имеет место режим бегущей волны ($|R(0)|=0$), при $s \rightarrow \infty$ существует чисто стоячая волна. На рис. 12.2 изображено распределение амплитуды волны напряжения вдоль линии при различных значениях s .

Записывая соответствующие выражения для волны тока, можно показать, что

$$s = I_{\text{макс}}/I_{\text{мин}} \quad (12.1.10)$$

Рассмотрим в качестве примера неограниченную линию с точечной неоднородностью в виде резонатора, включенного в точке $x=0$ (рис. 12.3). Неоднородности такого вида возникают, например, при подключении к линии волномера или резонансной нагрузки. Допустим, кроме того, что волновые сопротивления линий при $x < 0$ и $x > 0$ равны соответственно Z_{01} и Z_{02} . Слева от неоднородности для комплексных амплитуд напряжения и тока (процесс считаем гармоническим во времени) имеем следующие выражения

$$U_1 = e^{-ikx} + R(0)e^{ikx}, \quad I_1 = \frac{1}{Z_{01}}(e^{-ikx} - R(0)e^{ikx}). \quad (12.1.11)$$

Амплитуда падающей волны принята равной единице.

Справа от неоднородности существует только прошедшая волна

$$U_2 = D(0)e^{-ikx}, \quad I_2 = \frac{D(0)}{Z_{02}}e^{-ikx}. \quad (12.1.12)$$

В точке $x=0$, где к линии присоединен резонатор, должны быть выполнены условия непрерывности амплитуд напряжения и тока, т. е.

$$U_1 = U_2 = U, \quad I_1 - I_2 = U/Z, \quad (12.1.13)$$

где $Z = r_0 + j(\omega L_0 - 1/\omega C_0)$ — комплексное сопротивление резонатора.

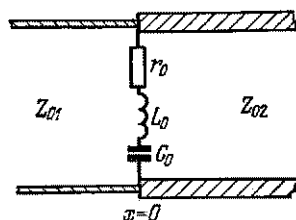


Рис. 12.3. Схема подключения резонатора к точке соединения двух линий с разными волновыми сопротивлениями.

Эти условия служат двумя уравнениями для определения $R(0)$ и $D(0)$

$$1 + R = D, \quad (1 - R)/Z_{01} - D/Z_{02} = (1 + R)/Z. \quad (12.1.14)$$

Разрешая их относительно R , получим

$$R = \frac{1 - Z_{01}(1/Z_{02} + 1/Z)}{1 + Z_{01}(1/Z_{02} + 1/Z)}. \quad (12.1.15)$$

На частотах, очень высоких и очень низких по сравнению с собственной частотой резонатора ω_0 , величина $1/Z$ стремится к нулю и коэффициент отражения равен

$$R = (Z_{02} - Z_{01})/(Z_{02} + Z_{01}), \quad (12.1.16)$$

т. е. наличие резонатора не влияет на процесс в линии. Чем ближе друг к другу волновые сопротивления участков линии 1 и 2, тем меньше коэффициент отражения. При ω , стремящейся к ω_0 , возрастает влияние резонатора. Когда частота волны, распространяющейся по линии, совпадает с собственной частотой резонатора, коэффициент отражения принимает вид

$$R = \frac{Z_{02} - Z_{01} - Z_{01}Z_{02}/r_0}{Z_{02} + Z_{01} + Z_{01}Z_{02}/r_0}. \quad (12.1.17)$$

Отсюда следует, что подбором величины активного сопротивления нагрузки можно устранить отражение от неоднородности. В этом случае r_0 должно быть равно $r_0 = Z_{01}Z_{02}/(Z_{02} - Z_{01})$.

При включении резонансной нагрузки в однородную линию ($Z_{01} = Z_{02}$) всегда имеет место отражение.

Если второй линии нет, т. е. резонатор включен на конце, то в выражении для R (12.1.15) отсутствует член $1/Z_{02}$ и для коэффициента отражения имеем

$$R(0) = (Z - Z_{01})/(Z + Z_{01}). \quad (12.1.18)$$

В этом случае при $\omega \ll \omega_0$ и при $\omega \gg \omega_0$ коэффициент отражения стремится к 1. На частоте $\omega = \omega_0$ коэффициент отражения будет минимальным, причем минимум будет тем глубже, чем ближе сопротивление r_0 к волновому сопротивлению линии. Зависимость модуля коэффициента отражения от частоты при различных соотношениях между r_0 и волновым сопротивлением Z_0 приведена на рис. 12.4.

В случае систем с распределенной неоднородностью телеграфные уравнения для комплексных амплитуд можно записать в виде

$$\frac{dU}{dx} = -Z(x)I, \quad \frac{dI}{dx} = -Y(x)U, \quad (12.1.19)$$

где $Z(x) = j\omega L(x)$, $Y(x) = j\omega C(x)$.

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{d \ln Z}{dx} \frac{dU}{dx} - ZYU &= 0, \\ \frac{d^2 I}{dx^2} - \frac{d \ln Y}{dx} \frac{dI}{dx} - ZYI &= 0. \end{aligned} \quad (12.1.20)$$

В случае однородной линии $\frac{d \ln Z}{dx} = \frac{d \ln Y}{dx} = 0$ и уравнения (12.1.20) сводятся к уравнениям (10.1.6).

Телеграфные уравнения для неоднородных линий (12.1.19) решены до конца только при определенных законах изменения параметров $Z(x)$ и $Y(x)$, например для экспоненциальной линии и для линии, в которой $Z(x)$ и $Y(x)$ выражаются степенными функциями x . Если изменение параметров мало по сравнению с их средней величиной, задача может быть решена методом теории возмущений. Приближенное решение задачи о распространении волн в неоднородной линии можно также получить при медленном изменении параметров (методом геометрической оптики). Этот метод применим в тех случаях, когда параметры мало меняются на расстоянии порядка длины волны, т. е. $\frac{d \ln Z}{dx} \lambda \ll 1$.

Однако изложение всех этих вопросов выходит за рамки данной книги.

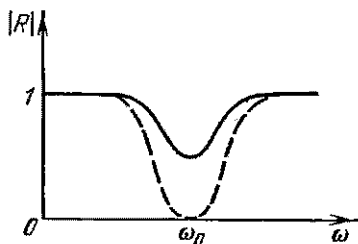


Рис. 12.4. Зависимость модуля коэффициента отражения от частоты при разных соотношениях между r_0 и Z_0 .

Сплошная линия $r_0 \neq Z_0$, пунктирная $r_0 = Z_0$.

§ 12.2. Волновые процессы в нелинейной системе при отсутствии дисперсии

Нелинейными распределенными системами называются такие распределенные системы, параметры которых зависят от амплитуды бегущей по системе волны. Эта зависимость приводит к тому, что скорость распространяющейся волны зависит от ее амплитуды. Такими системами, например, являются акустические системы. Скорость упругих волн тем выше, чем больше их амплитуда.

В радиотехнике также находят применение нелинейные распределенные системы. Это, например, линии, заполненные ферритом, а также параметрические усилители бегущей волны на основе линий с сегнетоэлектриком. В последние годы в связи с развитием лазерной техники нелинейные явления начали использоваться и в оптическом диапазоне.

Теоретическое исследование распространения волн во всех этих разнообразных системах можно провести с единой точки зрения в рамках теории колебаний распределенных систем.

В нелинейных распределенных системах даже при чисто гармоническом внешнем воздействии, кроме волны основной частоты, рождаются и распространяются волны на комбинационных частотах. При этом существенную роль играет дисперсия в системе. Если волны распространяются по системе с одинаковой скоростью, то они сильно взаимодействуют между собой. Это приводит к тому, что в системе без дисперсии волна, распространяясь вдоль линии, сильно обогащается гармониками и превращается в ударную волну.

Рассмотрим распространение волн в линии без дисперсии. Пусть погонная емкость зависит от напряжения по линейному закону

$$C = C_0 (1 + 2\beta u). \quad (12.2.1)$$

Заряд q на емкости и напряжение в этом случае связаны следующим соотношением:

$$q = \int u \, dt = C_0 u + \beta C_0 u^2. \quad (12.2.2)$$

Будем считать, что между проводами линии существует настолько малая утечка G_1 , что вызываемая ею дисперсия не сказывается на тех расстояниях, на которых происходит существенное нелинейное взаимодействие. Волновое уравнение в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - L \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - L G_1 \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (12.2.3)$$

Подставляя сюда выражение для q , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - L C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L C_0 \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} - L G_1 \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (12.2.4)$$

Строгое решение этого уравнения при произвольных значениях коэффициента нелинейности β и погонной утечки G_1 невозможно. Поэтому решим задачу в предположении малости β и G_1 , т. е. примем, что $\beta = \mu \beta_1$ и $G_1 = \mu G$, где $\mu \ll 1$.

Будем считать, что линия ограничена с одного конца, т. е. $0 \leq z < \infty$ и на ее конце $z=0$ задано граничное условие

$$u(0, t) = \Phi(t). \quad (12.2.5)$$

Для решения уравнения (12.2.4) применим метод последовательных приближений. При $\mu = 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - L C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (12.2.6)$$

Как известно, решение этого уравнения имеет вид бегущей волны

$$u = F(t - z\sqrt{LC_0}),$$

где вид функции F зависит от граничного условия при $z=0$. Эта волна без искажения формы распространяется со скоростью $v = 1/\sqrt{LC_0}$ вдоль линии.

Учитывая теперь малые потери и малую нелинейность среды ($\mu \neq 0$), естественно предположить, что решение уравнения (12.2.4) примет вид

$$u = F(\mu z, t - z\sqrt{LC_0}). \quad (12.2.7)$$

Оно представляет волну, распространяющуюся с той же скоростью v , но форма этой волны медленно изменяется с координатой.

Введем новые переменные $x = \mu z$, $\tau = t - z\sqrt{LC_0}$; тогда

$$z = x/\mu, \quad t = \tau + \frac{x}{\mu} \sqrt{LC_0}. \quad (12.2.8)$$

Перейдем в уравнении (12.2.4) к новым переменным и отбросим члены порядка μ^2 и выше:

$$2\mu \sqrt{LC_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} + \mu LC_0 \beta_1 \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2} + \mu LG \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0. \quad (12.2.9)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[2\sqrt{LC_0} \frac{\partial u}{\partial x} + LC_0 \beta_1 \frac{\partial u^2}{\partial \tau} + LG u \right] = 0. \quad (12.2.10)$$

Интегрируя его по τ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{\beta} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta u = f(x), \quad (12.2.11)$$

где $f(x)$ — постоянная интегрирования, зависящая от x , $\tilde{\beta} = \beta_1 \sqrt{LC_0}$, $2\delta = G \sqrt{L/C_0}$.

Так как нас не интересуют постоянные напряжения в линии, то можно положить $f(x) = 0$. Тогда (12.2.11) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{\beta} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \delta u = 0. \quad (12.2.12)$$

Рассмотрим сначала частный случай линии без потерь, т. е. положим $\delta = 0$. Тогда последнее уравнение упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{\beta} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0. \quad (12.2.13)$$

Это однородное уравнение в частных производных решаем методом характеристик, т. е. интегрируем обыкновенное дифференциальное уравнение вида: $dx/l = d\tau/\tilde{\beta}u$ или $\tilde{\beta}u dx = d\tau$.

В результате интегрирования получим

$$\tilde{\beta}_{ux} = \tau + A(u), \quad (12.2.14)$$

где A — постоянная интегрирования, зависящая от u . Для отыскания $A(u)$ воспользуемся граничным условием (12.2.5). Разрешая его относительно t , имеем

$$t = [\Phi]^{-1}(u). \quad (12.2.15)$$

Так как при $x=0$, $\tau=t$, то $A(u) = -[\Phi]^{-1}(u)$. Таким образом, решение уравнения (12.2.13) примет вид

$$\tau = \tilde{\beta}_{ux} + [\Phi]^{-1}(u). \quad (12.2.16)$$

Будем считать, что на входе линии ($z=0$) действует гармонический сигнал, т. е. $u = U \sin \omega t$, тогда $[\Phi]^{-1}(u) = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{u}{U}\right)$. В этом случае решение интересующей нас задачи имеет вид

$$\omega\tau = U\omega\tilde{\beta}_{ux}/U + \arcsin(u/U). \quad (12.2.17)$$

Это решение записано в необычной форме, так как представляет τ в виде функции напряжения u и координаты x . Нас же интересует зависимость u от x и τ .

Чтобы получить такую зависимость, решим уравнение (12.2.17) графически, откладывая по оси абсцисс $\omega\tau$, а по оси ординат u/U (рис. 12.5). В этих координатах решение представляет сумму синусоиды и прямой, угол ψ наклона которой относительно оси ординат определяется из соотношения: $\operatorname{tg} \psi = U\omega\tilde{\beta}_x$. На рис. 12.5

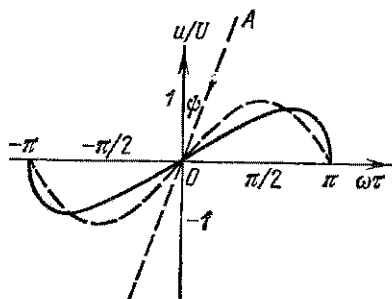


Рис. 12.5. Графическое построение формы волны.

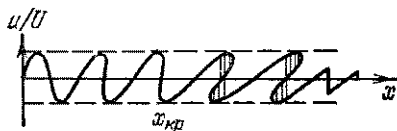


Рис. 12.6. Изменение формы волны при распространении в нелинейной среде в отсутствие потерь и дисперсии.

синусоида и прямая показаны пунктиром, результирующая кривая, характеризующая форму волны, сплошной линией. В отсутствие нелинейности ($\tilde{\beta}=0$) прямая OA совпадает с осью ординат. Форма волны в этом случае остается гармонической на любом расстоянии от начала линии. В нелинейной системе по мере продвижения волны (увеличение $x = \mu z$) угол ψ увеличивается, т. е. прямая OA вращается по часовой стрелке. Происходит

искажение формы волны. В результате мы получаем сигнал, мгновенная фотография которого изображена на рис. 12.6.

Таким образом, по мере распространения сигнала в нелинейной среде форма волны отклоняется от гармонической. Профиль волны становится все более крутым, пока не появится вертикальный участок. Это происходит в той точке системы, где $\operatorname{tg} \psi = 1$, т. е. при

$$x = x_{\text{кр}} = 1/\tilde{\beta}\omega U. \quad (12.2.18)$$

Условие (12.2.18) следует из того, что на расстоянии $x = x_{\text{кр}}$ наклоны прямой OA и кривой $\sin(u/U)$ в точке $u = 0$ становятся одинаковыми. Если формально продолжать построение для $x > x_{\text{кр}}$, то u оказывается неоднозначной функцией времени, что физически абсурдно. На самом деле, волна в точке разрыва $x = x_{\text{кр}}$ имеет скачок напряжения, т. е. является *ударной волной*. Этот разрыв с определенной скоростью распространяется вдоль системы. Постепенно ударная волна принимает треугольную форму, однако ее амплитуда убывает по мере увеличения x . Искажение формы волны связано с перекачкой энергии из колебания с основной частотой в гармоники. Можно показать, что в начале образуется вторая гармоника, а затем в результате нелинейного взаимодействия появляются волны комбинационных частот. Необходимо отметить, что любая волна независимо от формы, которую она имеет в начале линии ($x = 0$), на определенном расстоянии принимает треугольную форму. Затухание ударной волны можно объяснить, если предположить, что последовательно с нелинейной емкостью имеется погонное сопротивление r . Затухание каждого из бесконечного числа компонент ударной волны в этом случае будет определяться выражением $u_n \sim \exp(-\delta n \omega x)$. Отсюда следует, что при $r \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) для компонент высоких частот ($n \rightarrow \infty$) будет характерно конечное затухание, что и приводит к убыли амплитуды ударной волны на расстояниях $x > x_{\text{кр}}$. Основная диссипация энергии происходит в области разрыва, причем наличие активного сопротивления r ограничивает крутизну переднего фронта ударной волны. Крутизна изменения напряжения вблизи $x = x_{\text{кр}}$ тем меньше, чем больше r .

Решим теперь задачу о распространении волны по нелинейной системе с учетом малой утечки μG . Для этого вернемся к уравнению (12.2.12). Запишем для него два уравнения характеристик:

$$dx/l = d\tau/\tilde{\beta}u = -du/\delta u. \quad (12.2.19)$$

Решая их, получим

$$u = A_1 e^{-\delta x}, \quad (12.2.20a)$$

$$\tau = -\tilde{\beta}u/\delta + A_2(A_1), \quad (12.2.20б)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, которые нам предстоит найти. Для этого исключим из (12.2.20а) постоянную A_1 и подставим ее в (12.2.20б): $A_1 = ue^{\delta x}$, $\tau = -\tilde{\beta}u/\delta + A_2(ue^{\delta x})$. Для определения A_2 используем граничное условие (12.2.5)

$$-\tilde{\beta}u/\delta + A_2(u) = [\Phi]^{-1}(u).$$

Отсюда для $A_2(u)$ получим

$$A_2(u) = [\Phi]^{-1}(u) + \tilde{\beta}u/\delta.$$

Очевидно, что входящая в решение (12.2.20б) константа $A_2(A_1)$ равна

$$A_2(A_1) = [\Phi]^{-1}(ue^{\delta x}) + \tilde{\beta}ue^{\delta x}/\delta. \quad (12.2.21)$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$\tau = -\frac{\tilde{\beta}}{\delta}u + \frac{\tilde{\beta}}{\delta}ue^{\delta x} + [\Phi]^{-1}(ue^{\delta x}) = \frac{\tilde{\beta}}{\delta}ue^{\delta x}(1 - e^{-\delta x}) + [\Phi]^{-1}(ue^{\delta x}). \quad (12.2.22)$$

Если при $z=0$ мы по-прежнему имеем гармонический сигнал $u = U \sin \omega t$, то (12.2.22) можно записать следующим образом:

$$\omega \tau = \frac{\tilde{\beta}\omega U}{\delta}(1 - e^{-\delta x}) \frac{ue^{\delta x}}{U} + \arcsin\left(\frac{ue^{\delta x}}{U}\right). \quad (12.2.23)$$

Это соотношение также удобно анализировать графически. В координатах ωt и $y = ue^{\delta x}/U$ построение аналогично проведенному ранее. Однако угол наклона ψ прямой OA к оси ординат теперь определяется иным соотношением, а именно:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\tilde{\beta}\omega U}{\delta}(1 - e^{-\delta x}). \quad (12.2.24)$$

При $x=0$ $\operatorname{tg} \psi = 0$; с ростом x $\operatorname{tg} \psi$ увеличивается и при $x \rightarrow \infty$ $\operatorname{tg} \psi$ стремится к некоторой постоянной величине

$$\operatorname{tg} \psi_{\infty} = \tilde{\beta}\omega U/\delta. \quad (12.2.25)$$

Если величина $\operatorname{tg} \psi_{\infty}$ мала по сравнению с единицей, то нелинейностью среды можно пренебречь. Волна, распространяясь по линии, затухает по закону $e^{-\delta x}$ и затухнет раньше, чем успеет изменить свою форму из-за нелинейности среды. При $\operatorname{tg} \psi_{\infty} > 1$ в системе образуется ударная волна.

Условие $\operatorname{tg} \psi_{\infty} = 1$ определяет пороговую амплитуду:

$$U_{\text{пор}} = \delta/\omega\tilde{\beta} = G/2\omega C_0\beta_1. \quad (12.2.26)$$

Для того чтобы в нелинейной системе могла возникнуть ударная волна, необходимо, чтобы амплитуда входного сигнала была больше или равна пороговой амплитуде $U \geq U_{\text{пор}}$.

На рис. 12.7 приведены формы волны при $U < U_{\text{пор}}$ и при $U > U_{\text{пор}}$ для заданных потерь δ .

Пороговое значение амплитуды $U_{\text{пор}}$ тем больше, чем больше утечка и чем меньше коэффициент нелинейности емкости β .

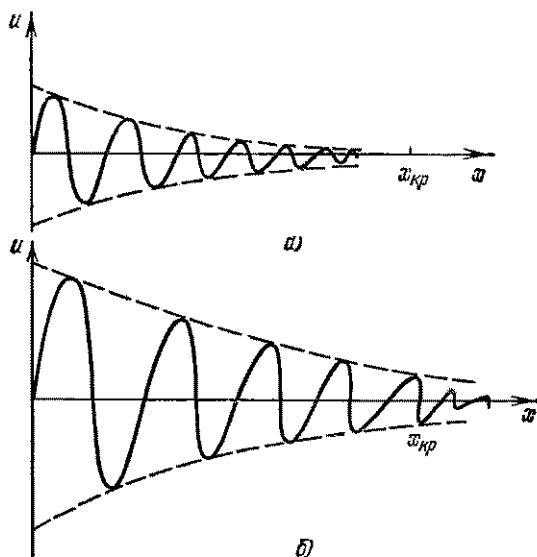


Рис. 12.7. Изменение формы волны в нелинейной среде с потерями

а) $U < U_{\text{пор}}$; б) $U > U_{\text{пор}}$.

Величину критического расстояния $x_{\text{кр}}$, на котором формируется разрыв, при заданной амплитуде U найдем из условия

$$\frac{\tilde{\beta}\omega U}{\delta} (1 - \exp(-\delta x_{\text{кр}})) = 1. \quad (12.2.27)$$

Отсюда следует, что $x_{\text{кр}}$ тем больше, чем больше затухание в системе.

Таким образом, наличие затухания кардинально меняет картину распространения волны в нелинейной среде. При наличии конечного затухания для образования ударной волны необходима достаточно большая амплитуда сигнала U , чтобы могли себя проявить нелинейные эффекты. Именно поэтому в оптике до появления мощных лазеров нелинейные явления практически не наблюдались.

§ 12.3. Нелинейная система с дисперсией. Генерация второй гармоники

Наличие дисперсии в системе приводит к тому, что длительное взаимодействие возможно лишь для волн определенных частот, фазовые скорости которых равны или близки друг к другу.

Если зависимость погонной емкости линии от напряжения, как и прежде, имеет вид: $C = C_0(1 + 2\beta u)$, где β — малая величина, то волновое уравнение для линии без потерь запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - LC_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta LC_0 \frac{\partial^3 u^2}{\partial t^2} = 0. \quad (12.3.1)$$

Рассмотрим распространение по этой системе волны с частотой ω и волновым числом $\kappa_1 = \omega/v_1$. Фазовая скорость волны v_1 определяется параметрами системы

$$v_1 = 1/\sqrt{L_1 C_{01}}, \quad (12.3.2)$$

где L_1 , C_{01} — значения на частоте ω погонных индуктивности L и емкости C_0 линии. Пусть возникшая из-за нелинейности системы волна с частотой 2ω имеет скорость $v_2 = 1/\sqrt{L_2 C_{02}}$, близкую к v_1 . В этом случае

$$\kappa_2 = 2\omega/v_1 + \Delta = 2\kappa_1 + \Delta, \quad (12.3.3)$$

где Δ — малая расстройка, характеризующая различие скоростей v_1 и v_2 , L_2 , C_{02} — значения L и C_0 на частоте 2ω .

Будем считать, что волны с частотами 3ω , 4ω и т. д. имеют скорости, сильно отличающиеся от v_1 . Далее будет показано, что различие в фазовых скоростях приводит к ограничению длины, на которой происходит эффективное взаимодействие волн. В слабо нелинейной среде в отсутствие длительного взаимодействия накоплением энергии на частотах 3ω , 4ω и т. д. можно пренебречь. Амплитуды этих волн не могут достигать значительной величины. Поэтому решение волнового уравнения (12.3.1) можно искать в виде суммы только двух взаимодействующих волн с частотами ω и 2ω . Их амплитуды и фазы будут медленно меняться с расстоянием z .

Исходя из изложенного выше, мы вправе написать

$$u = A_1(z) \cos[\omega t - \kappa_1 z + \varphi_1(z)] + A_2(z) \cos[2\omega t - \kappa_2 z + \varphi_2(z)]. \quad (12.3.4)$$

Такое решение предполагает, что процесс является установившимся во времени, т. е. амплитуды и фазы волн зависят только от координаты и не зависят от времени.

Задачу о распространении такой волны в слабо нелинейной среде можно решать методом ММА. В применении к распределенным системам он имеет некоторые особенности. В сосредото-

точных системах метод ММА применим, если амплитуды медленно изменяются во времени, т. е. относительное изменение амплитуды за период колебаний мало. В распределенных системах, к которым можно применить метод ММА, амплитуды «медленно» меняются по пространству, т. е. относительное изменение амплитуды мало на расстояниях порядка длины волны. Это различие приводит к тому, что для распределенных систем стационарное решение существует лишь при определенных граничных условиях. Условия применимости метода и процедура составления укороченных уравнений те же, что и для систем с сосредоточенными постоянными.

Найдем величину u^2 . Отбрасывая члены, соответствующие волнам с частотами 3ω и 4ω , скорости которых сильно отличаются от v_1 , получим

$$u^2 = \frac{1}{2} A_1^2 \cos [2\omega t - \kappa_2 z + \varphi_2 + \Phi] + A_1 A_2 \cos [\omega t - \kappa_1 z + \varphi_1 - \Phi], \quad (12.3.5)$$

где $\Phi = \Delta z + 2\varphi_1 - \varphi_2$.

Введем для упрощения записи следующие обозначения: $\xi = \omega t - \kappa_1 z + \varphi_1$, $\eta = 2\omega t - \kappa_2 z + \varphi_2$; тогда (12.3.4) и (12.3.5) примут вид

$$u = A_1 \cos \xi + A_2 \cos \eta, \quad u^2 = \frac{1}{2} A_1^2 \cos (\eta + \Phi) + A_1 A_2 \cos (\xi - \Phi).$$

Запишем в этих обозначениях производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 A_1 \cos \xi - 4\omega^2 A_2 \cos \eta,$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} = -\omega^2 A_1 A_2 \cos (\xi - \Phi) - 2\omega^2 A_1^2 \cos (\eta + \Phi).$$

Так как для каждой из частот (ω и 2ω) вместо одной переменной $u(z)$ введены две переменные $A(z)$ и $\varphi(z)$, то можно, как всегда делается в методе ММА, наложить дополнительное условие на $\frac{\partial u}{\partial z}$. Потребуем, чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \kappa_1 A_1 \sin \xi + \kappa_2 A_2 \sin \eta,$$

т. е.

$$A_1' \cos \xi + A_2' \cos \eta - A_1 \varphi_1' \sin \xi - A_2 \varphi_2' \sin \eta \equiv 0 \quad (12.3.6)$$

(здесь и ниже штрихом обозначено дифференцирование по z). Учитывая (12.3.6), запишем вторую производную от u по z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = & -\kappa_1^2 A_1 \cos \xi - \kappa_2^2 A_2 \cos \eta + \kappa_1 A_1' \sin \xi + \\ & + \kappa_2 A_2' \sin \eta + \kappa_1 A_1 \varphi_1' \cos \xi + \kappa_2 A_2 \varphi_2' \cos \eta. \end{aligned}$$

Подставляя все найденные производные в волновое уравнение (12.3.1), получим

$$\begin{aligned} \kappa_1 A'_1 \sin \xi + \kappa_2 A'_2 \sin \eta + \kappa_1 A_1 \varphi'_1 \cos \xi + \kappa_2 A_2 \varphi'_2 \cos \eta = \\ = -\beta \kappa_1^2 A_1 A_2 \cos (\xi - \Phi) - \frac{1}{2} \beta \kappa_2^2 A_1^2 \cos (\eta + \Phi). \end{aligned} \quad (12.3.7)$$

Умножая уравнение (12.3.6) на $\cos \xi$, уравнение (12.3.7) на $\sin \xi / \kappa_1$, складывая их и усредняя по периоду $T = 2\pi/\omega$, получим укороченное уравнение для амплитуды A_1

$$A'_1 = -\frac{1}{2} \beta \kappa_1 A_1 A_2 \sin \Phi. \quad (12.3.8a)$$

Аналогично получим укороченные уравнения для амплитуды A_2 и фаз φ_1 и φ_2

$$\begin{aligned} A'_2 = \frac{1}{4} \beta \kappa_2 A_1^2 \sin \Phi, \quad \varphi'_1 = -\frac{1}{2} \beta \kappa_1 A_2 \cos \Phi, \\ \varphi'_2 = -\frac{\beta \kappa_2}{4} \frac{A_1^2}{A_2} \cos \Phi. \end{aligned} \quad (12.3.8b)$$

Учитывая (12.3.5), запишем укороченное уравнение для Φ в виде

$$\Phi' = \kappa_2 - 2\kappa_1 - \beta (\kappa_1 A_2 - \kappa_2 A_1^2 / 4 A_2) \cos \Phi. \quad (12.3.9)$$

Рассмотрим сначала случай равных скоростей, т. е. $\Delta = 0$. Умножим уравнение (12.3.8a) на $2A_1$, первое из уравнений (12.3.8b) на $2A_2$ и сложим:

$$\frac{dA_1^2}{dz} + \frac{dA_2^2}{dz} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d}{dz} (A_1^2 + A_2^2) = 0. \quad (12.3.10)$$

Тогда

$$A_1^2 + A_2^2 = \text{const} = A_0^2. \quad (12.3.11)$$

Последнее соотношение выражает закон сохранения энергии в среде без поглощения. Учитывая (12.3.11), перепишем уравнение (12.3.8b)

$$A'_2 = \frac{\beta \kappa_2}{4} (A_0^2 - A_2^2) \sin \Phi, \quad \Phi' = -\beta \kappa_1 \left(A_2 - \frac{A_0^2 - A_2^2}{2A_2} \right) \cos \Phi. \quad (12.3.12)$$

Если в начале линии $z=0$ задана только волна частоты ω , т. е. $A_1 = A_0$, $A_2 = 0$ *), то Φ_0 — начальную фазу можно выбрать любой. Пусть $\Phi_0 = \pi/2$, тогда $\Phi' = 0$ и

$$4dA_2 / (A_0^2 - A_2^2) = \beta \kappa_2 dz. \quad (12.3.13)$$

Интегрируя это уравнение, получим зависимость амплитуды A_2 от координаты z

$$A_2 = A_0 \text{th} (A_0 \beta \kappa_2 z / 4). \quad (12.3.14)$$

*) Задача о взаимодействии волн с частотами ω и 2ω может быть решена при любых начальных условиях (произвольные A_1 , A_2 , Φ при $z=0$) методом фазовой плоскости.

Зная A_2 , из (12.3.11) получим выражение для амплитуды A_1

$$A_1 = A_0 \operatorname{sch} (A_0 \beta \kappa_2 z / 4). \quad (12.3.15)$$

На рис. 12.8 приведены зависимости A_1 и A_2 от z . Как мы видим, по мере распространения волны по линии происходит перекачка энергии из волны на основной частоте во вторую гармонику. Для расстояния, на котором происходит полная перекачка энергии, имеем

$$z_1 \approx 4 / \beta \kappa_2 A_0 = 2 / (\beta \omega A_0 \sqrt{LC_0}). \quad (12.3.16)$$

Это расстояние совпадает с характерной длиной $\chi_{кр}$, определяемой (12.2.18), на которой в недиспергирующей среде, обладающей теми же нелинейными свойствами, образуется ударная волна. Поэтому величина z_1 , задаваемая (12.3.16), характеризует длину взаимодействия, на которой максимально проявляются нелинейные эффекты.

Когда A_1 станет меньше уровня шумов в системе, начнется обратная перекачка энергии. В спектре шумов всегда найдется компонента частоты ω , для которой $\Phi = -\pi/2$. В этом случае $\sin \Phi = -1$ и перекачка энергии пойдет от волны частоты 2ω к волне частоты ω в соответствии с уравнениями (12.3.12).

При наличии потерь энергия основной волны лишь частично переходит в энергию второй гармоники.

Рассмотрим теперь случай сильного рассинхронизма волн с частотами ω и 2ω . Пусть $\kappa_2 - 2\kappa_1 \gg \beta (\kappa_1 A_2 - \kappa_2 A_1^2 / 4 A_2)$. В этом случае для Φ' можно написать $\Phi' \approx \kappa_2 - 2\kappa_1$ или $\Phi \approx (\kappa_2 - 2\kappa_1) z + \Phi_0$.

Решая задачу при начальных условиях $A_1(0) = A_0$, $A_2(0) = 0$, можно положить $\Phi_0 = \pi/2$. Сильный рассинхронизм ведет к слабой перекачке энергии, поэтому в уравнении (12.3.86) мы вправе считать A_1 примерно равной A_0 для всех z (приближение заданного поля):

$$4A_2' = \beta \kappa_2 A_0^2 \cos (\kappa_2 - 2\kappa_1) z. \quad (12.3.17)$$

Интегрируя (12.3.17) при условии $A_2(0) = 0$, получим

$$A_2 = \frac{\beta \kappa_2}{4} \frac{A_0^2}{\kappa_2 - 2\kappa_1} \sin (\kappa_2 - 2\kappa_1) z. \quad (12.3.18)$$

Отсюда следует, что если Δ велико, то амплитуда второй гармо-

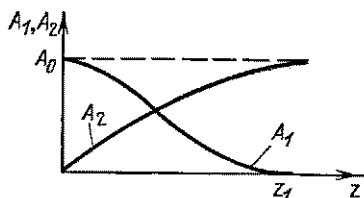


Рис. 12.8. Изменение амплитуды волны A_1 и ее второй гармоники A_2 при синхронном взаимодействии в нелинейной среде.

ники остается малой при всех z . При подстановке A_2 в (12.3.8a) уравнение для A_1' примет вид

$$A_1' = -\frac{\beta^2 \kappa_1 \kappa_2}{16 (\kappa_2 - 2\kappa_1)} A_0^2 \sin 2(\kappa_2 - 2\kappa_1) z. \quad (12.3.19)$$

Интегрируя (12.3.19) и учитывая, что $A_1(0) = A_0$, получим

$$A_1 = A_0 - \frac{\beta^2 \kappa_1 \kappa_2 A_0^2}{32 (\kappa_2 - 2\kappa_1)} [1 - \cos 2(\kappa_2 - 2\kappa_1) z]. \quad (12.3.20)$$

Графики зависимости A_1 и A_2 от z приведены на рис. 12.9. Взаимодействие волн с частотами ω и 2ω проявляется в виде пространственных биений, причем величина изменения амплитуды A_1 тем меньше, чем больше расстройка Δ . Расстояние, на котором происходит максимальная перекачка энергии, равно

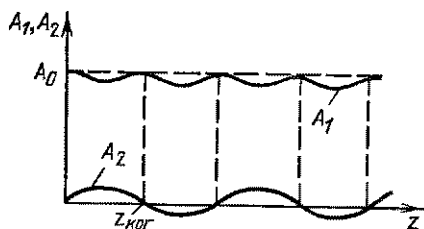


Рис. 12.9. Изменение амплитуды волны A_1 и ее второй гармоники A_2 в нелинейной среде при наличии рассинхронизма.

$$z_{\text{ког}} = \pi / (\kappa_2 - 2\kappa_1) \ll z_1, \quad (12.3.21)$$

где z_1 определена (12.3.16). Расстояние $z_{\text{ког}}$ называется *длиной когерентного взаимодействия*.

Чем больше длина когерентного взаимодействия, тем большая часть энергии преобразуется в энергию гармоники.

§ 12.4. Взаимодействие трех волн в нелинейной системе.

Высокочастотная накачка

Рассмотрим случай, когда длительное взаимодействие в нелинейной среде возможно для трех волн с разными частотами. Пусть по линии с тем же законом нелинейности $q(u)$, который был рассмотрен в предыдущих параграфах, распространяются волны трех частот ω_1 , ω_2 и ω_3 с близкими скоростями. Эффективное длительное взаимодействие этих волн возможно при выполнении условий синхронизма

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \kappa_3 = \kappa_1 + \kappa_2. \quad (12.4.1)$$

При рассмотрении взаимодействия трех волн учтем возможность малого отклонения от условий синхронизма.

Пусть

$$\kappa_3 = \kappa_1 + \kappa_2 + \Delta, \quad (12.4.2)$$

где Δ — малая расстройка.

Из-за наличия дисперсии среды исключим из рассмотрения волны всех частот, отличных от ω_1 , ω_2 и ω_3 . Поэтому напряжение

в линии u можно искать в следующем виде:

$$u = A_1(z) \cos [\omega_1 t - \kappa_1 z + \varphi_1(z)] + A_2(z) \cos [\omega_2 t - \kappa_2 z + \varphi_2(z)] + \\ + A_3(z) \cos [\omega_3 t - \kappa_3 z + \varphi_3(z)]. \quad (12.4.3)$$

Решим методом медленно меняющихся амплитуд задачу о распространении волн вида (12.4.3) вдоль линии, для которой справедливо нелинейное уравнение (12.3.1). Введем обозначения: $\xi = \omega_1 t - \kappa_1 z + \varphi_1$, $\eta = \omega_2 t - \kappa_2 z + \varphi_2$, $\zeta = \omega_3 t - \kappa_3 z + \varphi_3$. В новых обозначениях (12.4.3) запишется следующим образом:

$$u = A_1 \cos \xi + A_2 \cos \eta + A_3 \cos \zeta.$$

Потребуем, как обычно в методе ММА, чтобы производная $\partial u / \partial z$ имела вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \kappa_1 A_1 \sin \xi + \kappa_2 A_2 \sin \eta + \kappa_3 A_3 \sin \zeta. \quad (12.4.4)$$

Такой вид производной означает, что на функции $A_i(z)$ и $\varphi_i(z)$ наложено дополнительное условие

$$A_1' \cos \xi - A_1 \varphi_1' \sin \xi + A_2' \cos \eta - A_2 \varphi_2' \sin \eta + \\ + A_3' \cos \zeta - A_3 \varphi_3' \sin \zeta = 0. \quad (12.4.5)$$

Вычислив производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}$ и подставив их в волновое уравнение (12.3.1), имеем

$$\kappa_1 A_1' \sin \xi + \kappa_2 A_2' \sin \eta + \kappa_3 A_3' \sin \zeta + \kappa_1 A_1 \varphi_1' \cos \xi + \\ + \kappa_2 A_2 \varphi_2' \cos \eta + \kappa_3 A_3 \varphi_3' \cos \zeta + \beta \kappa_1^2 A_2 A_3 \cos (\Phi - \xi) + \\ + \beta \kappa_2^2 A_1 A_3 \cos (\Phi - \eta) + \beta \kappa_3^2 A_1 A_2 \cos (\Phi + \zeta) = 0, \quad (12.4.6)$$

где $\Phi = \Delta z - \varphi_3 + \varphi_1 + \varphi_2$, $\kappa_i^2 = \omega_i^2 L C_0$, $i = 1, 2, 3$.

Преобразуя уравнения (12.4.5) и (12.4.6), как в предыдущем параграфе, и усредняя их по времени $T = 2\pi / |\omega_1 - \omega_2|$, получим следующие усредненные уравнения:

$$2A_1' = -\beta \kappa_1 A_2 A_3 \sin \Phi, \quad 2A_2' = -\beta \kappa_2 A_1 A_3 \sin \Phi, \\ 2A_3' = \beta \kappa_3 A_1 A_2 \sin \Phi, \quad (12.4.7) \\ \Phi' = \Delta - \frac{1}{2} \beta (\kappa_1 A_2 A_3 / A_1 + \kappa_2 A_1 A_3 / A_2 - \kappa_3 A_1 A_2 / A_3).$$

Из этих уравнений, описывающих взаимодействие трех волн в нелинейной среде, можно получить закон сохранения энергии. Умножим первое из амплитудных уравнений на A_1 , второе на A_2 и третье — на A_3 :

$$2A_1 A_1' = -\beta \kappa_1 A_1 A_2 A_3 \sin \Phi, \\ 2A_2 A_2' = -\beta \kappa_2 A_1 A_2 A_3 \sin \Phi, \\ 2A_3 A_3' = \beta \kappa_3 A_1 A_2 A_3 \sin \Phi.$$

Отсюда легко находим следующее соотношение между амплитудами:

$$-(A_1^2)'/\kappa_1 = -(A_2^2)'/\kappa_2 = (A_3^2)'/\kappa_3,$$

или

$$A_1^2/\kappa_1 + A_2^2/\kappa_2 = \text{const}, \quad A_2^2/\kappa_2 + A_3^2/\kappa_3 = \text{const}. \quad (12.4.8)$$

Введем поток энергии на каждой из частот: $S_i = v_i A_i^2$, $i = 1, 2, 3$. Тогда (12.4.8) можно представить в виде

$$S_1/\omega_1 + S_3/\omega_3 = \text{const}, \quad S_2/\omega_2 + S_3/\omega_3 = \text{const}. \quad (12.4.9)$$

Умножим первое из этих соотношений на ω_1 , второе на ω_2 и сложим их:

$$S_1 + S_2 + S_3 (\omega_1 + \omega_2)/\omega_3 = \text{const}. \quad (12.4.10)$$

Так как $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, то (12.4.10) выражает закон сохранения энергии при распространении по линии волн с частотами ω_1 , ω_2 , ω_3 , т. е.

$$S_1 + S_2 + S_3 = \text{const}. \quad (12.4.11)$$

Будем в дальнейшем считать, что амплитуда одной из взаимодействующих волн значительно превосходит амплитуды двух других. В этом случае в укороченных уравнениях (12.4.7) амплитуду интенсивной волны можно считать заданной (приближение заданного поля). В приближении заданного поля изменение емкости линии (или любого другого параметра) происходит только под воздействием мощной волны накачки. Изменение же емкости приводит к параметрическому взаимодействию менее интенсивных волн.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимодействии волн с частотами ω_1 и ω_2 при наличии в системе мощной накачки на частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ (высокочастотная накачка).

Пусть на входе в систему задана волна частоты ω_1 с амплитудой $A_1(0) = A_{10}$, волны же разностной частоты $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ на входе нет, т. е. $A_2(0) = 0$. Уравнения (12.4.7) для амплитуд A_1 и A_2 и фазы Φ в приближении заданного поля $A_3 \equiv A_s \gg A_{10}$; $\varphi_3 = \text{const}$ примут вид

$$2A_1' = -\beta\kappa_1 A_2 A_s \sin \Phi, \quad 2A_2' = -\beta\kappa_2 A_1 A_s \sin \Phi, \\ \Phi' = \Delta - \frac{1}{2}\beta (\kappa_1 A_2/A_1 + \kappa_2 A_1/A_2) A_s \cos \Phi. \quad (12.4.12)$$

Положим $\Phi(0) = -\pi/2$ и $\Delta = 0$, тогда $\cos \Phi = 0$, $\Phi' = 0$, $\sin \Phi = -1$. В этом случае вместо (12.4.12) имеем

$$2A_1' = \beta\kappa_1 A_2 A_s, \quad 2A_2' = \beta\kappa_2 A_1 A_s. \quad (12.4.13)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде

$$A_1 = a_1 e^{\Gamma z}, \quad A_2 = a_2 e^{\Gamma z}. \quad (12.4.14)$$

Подставляя (12.4.14) в (12.4.13), получим

$$2a_1\Gamma = \beta\kappa_1 a_2 A_n, \quad 2a_2\Gamma = \beta\kappa_2 a_1 A_n.$$

Эта система однородных уравнений относительно a_1 и a_2 имеет нетривиальное решение, если $\Gamma_1 = \pm \beta A_n \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} = \pm \Gamma_0$.

Таким образом, амплитуды A_1 и A_2 можно записать в виде

$$A_1 = a_1 e^{\Gamma_0 z} + b_1 e^{-\Gamma_0 z}, \quad A_2 = a_2 e^{\Gamma_0 z} + b_2 e^{-\Gamma_0 z}.$$

Постоянные a_1 , b_1 , a_2 и b_2 должны быть определены из граничных условий

$$A_1(0) = A_{10}, \quad A_2(0) = 0, \quad A'_1(0) = 0, \quad 2A'_2(0) = \beta\kappa_2 A_{10} A_n. \quad (12.4.15)$$

Последние два соотношения вытекают из уравнений (12.4.13). Из (12.4.15) с учетом (12.4.14) получим

$$a_1 = b_1 = A_{10}/2, \quad a_2 = -b_2 = 1/2 \sqrt{\kappa_2/\kappa_1} A_{10}. \quad (12.4.16)$$

Таким образом, амплитуды волн с частотами ω_1 и ω_2 равны

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{10} \operatorname{ch}(\beta \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} A_n z/2), \\ A_2 &= \sqrt{\kappa_2/\kappa_1} A_{10} \operatorname{sh}(\beta \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} A_n z/2). \end{aligned} \quad (12.4.17)$$

Зависимость A_1 и A_2 от z изображена на рис. 12.10. По мере распространения волны по линии происходит экспоненциальное нарастание амплитуд волн на обеих частотах ω_1 и ω_2 . Энергия этих волн увеличивается за счет энергии волны накачки, меняющей параметр системы. Такая система представляет собой регенеративный распределенный усилитель. Коэффициент усиления на единицу длины такого усилителя определяется скоростью нарастания амплитуды Γ_0 . Величина Γ_0 зависит от частоты по закону $\Gamma_0 \sim \sqrt{\omega_1(\omega_n - \omega_1)}$. Это выражение достигает максимума при $\omega_1 = \omega_n/2$. Такой режим работы параметрического усилителя называется *вырожденным*. Регенеративный параметрический усилитель может самовозбуждаться, если в системе существует обратная связь. Обратную связь может, например, создать отраженная волна.

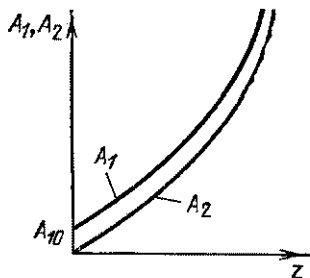


Рис. 12.10. Зависимость амплитуд A_1 и A_2 от z в случае высокочастотной накачки.

На больших расстояниях от начала линии, где $\operatorname{th}(\beta \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} A_n z/2) \approx 1$ отношение амплитуд A_1 и A_2 принимает вид

$$A_1^2/A_2^2 \approx \kappa_1/\kappa_2 = \omega_1/\omega_2. \quad (12.4.18)$$

Последнее соотношение показывает, что и в распределенной параметрической системе справедливы соотношения Мэнли — Роу (см. § 9.1).

Если система обладает малым затуханием, то задача аналитически решается, когда коэффициент затухания одинаков на обеих частотах, т. е. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_0$. Можно показать, что в этом случае учет потерь сводится к замене параметра нарастания Γ_0 на $\Gamma_\delta = \Gamma_0 - \delta_0$.

В общем случае взаимодействия в системе трех волн со сравнимой мощностью аналитическое решение возможно лишь в отсутствие затухания и расстройки. Из решения следует, что взаимодействие волн проявляется в этом случае в виде пространственных биений. Экспоненциальный рост амплитуд A_1 и A_2 при $A_1, A_2 \approx A_n$ замедляется, так как начинает происходить обратная перекачка энергии этих волн в волну с частотой ω_n . Если на входе такой линии существует сигнал A_{10} и накачка A_{n0} , то максимальное усиление сигнала по мощности будет равно

$$P_{\text{макс}}/P_{10} = 1 + \omega_1 A_{n0}^2 / \omega_n A_{10}^2. \quad (12.4.19)$$

Потери и отклонение от условия синхронизма уменьшают коэффициент усиления.

§ 12.5. Взаимодействие трех волн в нелинейной системе. Низкочастотная накачка

Практический интерес представляет также случай, когда наибольшей мощностью обладает волна частоты ω_2 (низкочастотная накачка). Положим $A_2 = A_n = \text{const}$, $\varphi_2 = \text{const}$. Тогда изменение параметра линии происходит с частотой ω_2 , что приводит к параметрическому взаимодействию волн с частотами ω_1 и ω_3 . Для амплитуд этих волн A_1 , A_3 и фазы Φ укороченные уравнения (12.4.7) при $\Delta = 0$ примут вид

$$\begin{aligned} 2A_1' &= -\beta \kappa_1 A_3 A_n \sin \Phi, & 2A_3' &= \beta \kappa_3 A_1 A_n \sin \Phi, \\ 2\Phi' &= -\beta (\kappa_1 A_3 / A_1 - \kappa_3 A_1 / A_3) A_n \cos \Phi. \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

Допустим, что на конце линии $z=0$ задана только волна частоты ω_1 , т. е. $A_1(0) = A_{10}$, $A_3(0) = 0$, $\Phi(0) = \pi/2$.

В этом случае $\Phi' = 0$ и (12.5.1) сводится к двум уравнениям для A_1 и A_3

$$2A_1' = -\beta \kappa_1 A_3 A_n, \quad 2A_3' = \beta \kappa_3 A_1 A_n. \quad (12.5.2)$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде

$$A_1 = a_1 e^{\Gamma z}, \quad A_3 = a_3 e^{\Gamma z}. \quad (12.5.3)$$

Подставляя предполагаемое решение (12.5.3) в (12.5.2), получим

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \exp[j|\Gamma|z] + b_1 \exp[-j|\Gamma|z], \\ A_3 &= a_3 \exp[j|\Gamma|z] + b_3 \exp[-j|\Gamma|z], \end{aligned} \quad (12.5.4)$$

где $2|\Gamma| = \beta A_n \sqrt{\kappa_1 \kappa_3}$.

Для нахождения a_1 , b_1 , a_3 и b_3 используем граничные условия $A_1(0) = A_{10}$, $A_3(0) = 0$, $A'_1(0) = 0$, $2A'_3(0) = \beta \kappa_3 A_{10} A_n$. (12.5.5)

Окончательное решение получим в виде

$$A_1 = A_{10} \cos |\Gamma| z, \quad A_3 = A_{10} \sqrt{\kappa_3/\kappa_1} \sin |\Gamma| z. \quad (12.5.6)$$

Отсюда следует, что взаимодействие волн проявляется в виде пространственных биений. Их период равен $\pi/|\Gamma|$, т. е. тем меньше, чем больше коэффициент нелинейности β и амплитуда накачки A_n .

Таким образом, в случае низкочастотной накачки энергия периодически переходит от волны частоты ω_1 к волне частоты ω_3 (рис. 12.11). Из (12.5.6) легко найти соотношение между максимальными амплитудами взаимодействующих волн:

$$A_{3\text{макс}}^2 / A_{1\text{макс}}^2 = \kappa_3 / \kappa_1 = \omega_3 / \omega_1, \quad (12.5.7)$$

т. е. мы опять получим соотношение Мэнли — Роу.

Максимальная мощность сигнала на частоте ω_3 превышает максимальную мощность входного сигнала, так как в течение первого полупериода биений (см. рис. 12.11) происходит перекачка энергии от волн с частотами ω_1 и ω_n в волну с частотой ω_3 . В следующий полупериод энергия этой волны преобразуется в энергию волн с частотами ω_1 и ω_n . Такое преобразование энергии может быть использовано при создании нерегенеративного распределенного параметрического усилителя с одновременным преобразованием частоты. На вход системы подается сигнал частоты ω_1 . На выходе, т. е. на определенном расстоянии от начала системы, равном $z = (2n+1)\pi/2|\Gamma|$, где $n=0, 1, 2, \dots$, получается усиленный сигнал частоты ω_3 . Максимальный коэффициент усиления по мощности определяется отношением ω_3/ω_1 . Нерегенеративный распределенный параметрический усилитель обладает высокой стабильностью и низким уровнем шумов.

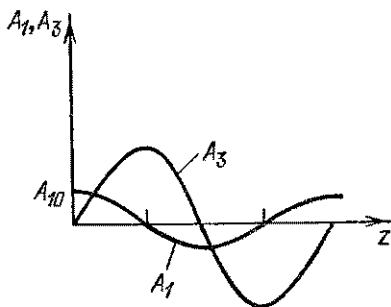


Рис. 12.11. Распределение амплитуд A_1 и A_3 по длине нелинейной системы при наличии низкочастотной накачки.

СПИСОК ОСНОВНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мандельштам Л. И.* Полное собрание трудов. — М.: Изд. АН СССР, 1955, т. IV; Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972.
2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
3. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964.
4. *Горелик Г. С.* Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
6. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. — М.: Изд. АН СССР, 1949.
7. *Теодорчик К. Ф.* Автоколебательные системы. — М.: Гостехиздат, 1952.
8. *Булгаков Б. В.* Колебания. — М.: Наука, 1969.
9. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. — М.: ИЛ, 1952.
10. *Харкевич А. А.* Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике. — М.: Гостехиздат, 1956.
11. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. — М.: Мир, 1968.
12. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969.
13. *Блякьер О.* Анализ нелинейных систем. — М.: Мир, 1969.
14. *Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. Н.* Параметрические генераторы и делители частоты. — М.: Сов. радио, 1966.
15. *Найфя А. Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.
16. *Ахманов А. С., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М.: ВИНТИ, 1964.
17. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
18. *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976.
19. *Самойло К. А.* Метод анализа колебательных систем второго порядка. — М.: Сов. радио, 1976.