Юрий Кулаков

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

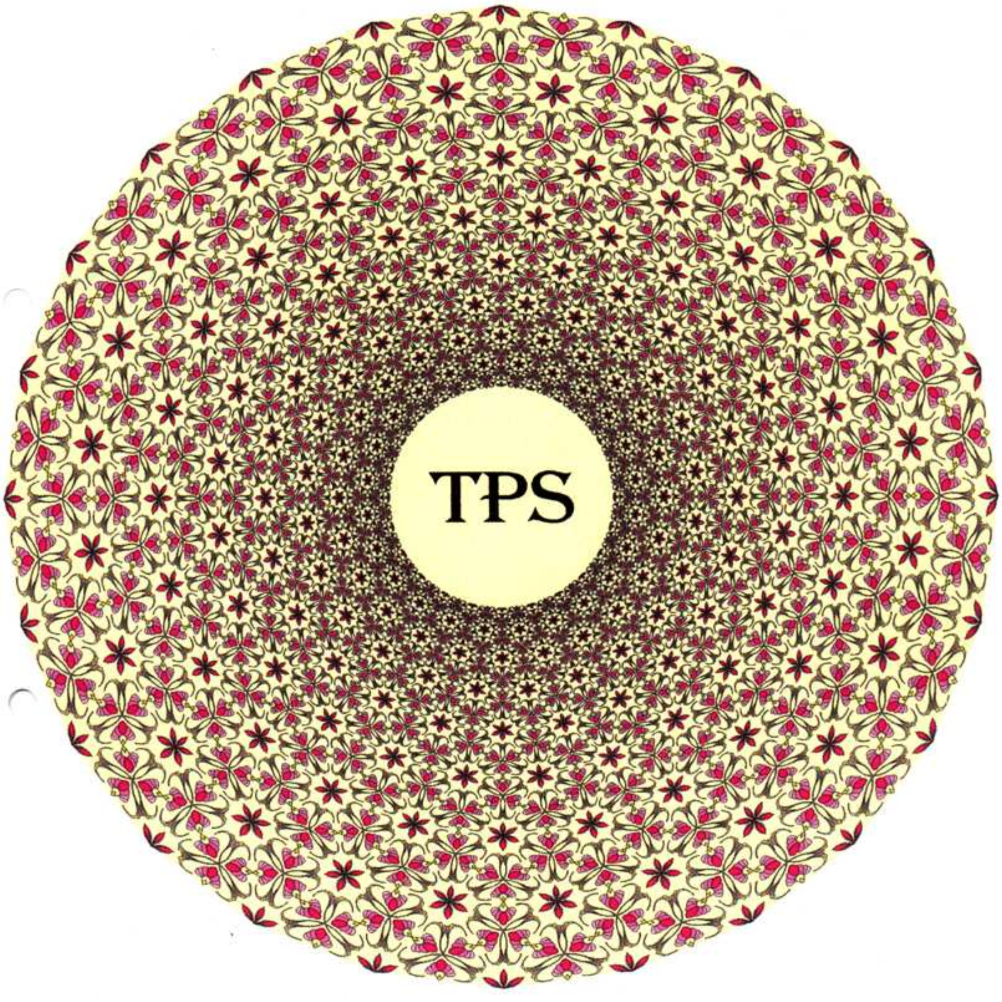
АЛЬФА ВИСТА

Новосибирск

2004

בראשית

– В начале ... (*иврит*)

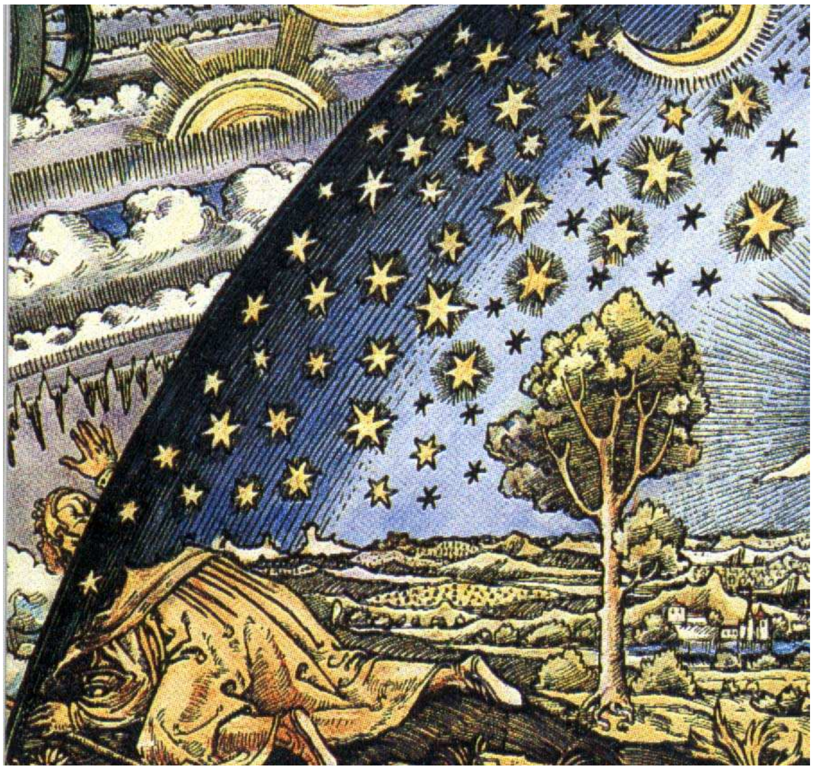


Авторы орнамента – математик Евгений ЛОЗИЦКИЙ и художник Алла СТЕПАНОВА.

Не думайте, что Я пришёл нарушить закон или пророков; не нарушить пришёл Я, но исполнить.

Мат. 5, 17.

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР



Перед физикой XXI века открывается новая перспектива – перейти от изучения микромира к изучению мира Высшей реальности, содержащего, в частности, обширную информацию о фундаментальных законах, лежащих в основании физики и геометрии, и ответ на вопрос: почему наш мир устроен именно так, а не иначе.

НОВОСИБИРСКИЙ
КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том I

Серия основана в 2001 году издательством Альфа Виста
(Научный центр профессора Ю.И. Кулакова)

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Математические начала физической герменевтики)

*Рекомендовано к изданию
Методическим центром при Министерстве науки и
образования Республики Алтай в качестве учебного
пособия для студентов физических, математических
и химических специальностей Горно-Алтайского
университета, лицеев и колледжей
Республики Алтай.*

Ю.И.Кулаков

Горно-Алтайский государственный
университет. Горно-Алтайск. Россия.

Новосибирский государственный
университет. Новосибирск. Россия.

Новосибирск • Альфа Виста • 2004

УДК 530.12; 539.12
ББЛ 22.31
К 30

Кулаков Ю.И. К 30 Теория физических структур.
– Новосибирск: Изд-во "Альфа Виста", 2004. – 851 с., ил.

Книга представляет собой первое систематическое изложение Теории физических структур, разработанной проф. Ю.И. Кулаковым и развитой впоследствии его учениками – доктором ф.-м. наук Г.Г. Михайличенко и канд. ф.-м. наук В.Х. Львом.

Эти исследования, начатые в 1961 году, можно отнести к "основаниям физики", если понимать этот термин в несколько ином смысле, чем это принято в "основаниях математики". В Теории физических структур изучаются общие структуры, лежащие в основании фундаментальных физических законов, но не на уровне математической логики, а как следствия существования нового типа симметрии – сакральной симметрии, накладывающей на вид фундаментальных физических законов существенные ограничения.

Цель книги – довести до широкого круга физиков, математиков и философов содержание теории физических структур – новой и уже детально разработанной физико-математической теории, лежащей в основании всей современной физики и обладающей в силу этого неожиданно глубоким мировоззренческим смыслом. Эта книга предназначена для научных сотрудников, преподавателей вузов, аспирантов, магистрантов и студентов физических факультетов университетов и вузов с углублённой физико-математической подготовкой, сохранивших живой интерес к своей профессии, ещё не утративших способности удивляться простым вещам, ищущих новые и трудные задачи, лежащие в стороне от проторенных дорог, и желающих понять не столько – как устроен Мир, сколько – почему он устроен именно так.

Ответственный редактор:
профессор, доктор ф.-м.н. **Г.Г.Михайличенко** (Горно-Алтайский государственный университет)

Научные редакторы:
профессор, доктор ф.-м.н. **В.М.Бяков** (Институт экспериментальной и теоретической физики РАН, Москва)
доцент, к.ф.-м.н. **Г.Т.Козлов** (Новосибирский государственный университет)

Рецензенты:
Dr. chem и Dr. phys **Язеп Эйдус** (профессор Латвийского университета)
профессор, доктор ф.-м.н. **Ю.И.Кузнецов** (Институт математики СО РАН, Новосибирск)

$\mathbf{Г}\,\dfrac{\mathbf{1602010000\text{-}002}}{\mathbf{14Б(03)\text{-}98}}$ Без объявления

ISBN 5-88119-008-4

Общий план книги

Ю.И. КУЛАКОВ

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Математические начала физической герменевтики)

Прелюдия

Часть I. Истоки Теории физических структур

Часть II. Три первых шага в мир физических структур

Часть III. Определители – фундаментальные понятия ТФС

Часть IV. Теория физических структур

Часть V. Примеры, иллюстрирующие основные идеи ТФС

Приложения

Лишь стоя на плечах гигантов можно заглянуть за горизонт ортодоксальной науки.

Мы унаследовали от наших предков острое стремление к объединённому , всеохватывающему знанию. Мы ясно чувствуем, что только теперь начинаем приобретать надёжный материал для того, чтобы объединить в одно целое всё, что нам известно; но с другой стороны, становится почти невозможным для одного ума полностью овладеть более чем какой-либо одной небольшой специальной частью науки. Я не вижу выхода из этого положения (чтобы при этом наша основная цель не оказалась потерянной навсегда), если некоторые из нас не рискнут взяться за синтез фактов и теорий, хотя бы наше знание в некоторых из этих областей было неполным и полученным из вторых рук, и хотя бы мы не подвергались опасности показаться невеждами [1].

Эрвин Шрёдингер

П Р Е Л Ю Д И Я [1]

Verba volant, scripta manent.[2]

Веленью Истины, Наука, будь послушна.
Нападок не страшась, не требуя венца,
Хвалу и клевету приемли равнодушно
И не оспаривай глупца.

— *(По Пушкину)*

1. Оглавление
2. Пушкин. “Поэту”
3. Dem Gott und den Menschen
4. Тамм
5. Физические структуры – ключ к Плану Творения
6. Дюрер. “Меланхолия”
7. Предисловие
8. Преамбула
9. Благодарности
10. Литература к Прелюдии
11. Простота – критерий Истины

[1] *Прелюдия* (от лат. praeludere – играть предварительно) – инструментальная музыкальная пьеса, являющаяся вступлением к другому музыкальному сочинению, объединяющему в себе несколько циклов; вступление, предвестник.

[2] Слова улетают, написанное остаётся.

ПРЕЛЮДИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Прелюдия

Часть I. Истоки Теории физических структур

Глава 1. О языке, на котором написаны законы природы

Глава 2. Основные понятия Теории физических структур

Глава 3. Что же такое Теория физических структур?

Часть II. Три первых шага в мир физических структур

Глава 4. Механика Ньютона – царский путь в мир физических структур

Глава 5. Закон Ома – простейший пример физической структуры ранга (2, 3)

Глава 6. Эмпирические основания евклидовой геометрии

Глава 7. Евклидова геометрия – очевидная и невероятная

Часть III. Определители – фундаментальные понятия Теории физических структур

Глава 8. Секстет фундаментальных определителей на двух множествах различной природы

Глава 9. Репрезентаторы как корни сакральных тождеств

Глава 10. Разделение нечисловых переменных

Часть IV. Теория физических структур

Глава 11. Основные понятия Теории физических структур первого поколения (1961 – 1997)

Глава 12. Основные понятия Теории физических структур второго поколения (1998 – 2002)

Глава 13. Сакральные уравнения

Глава 14. Строгие доказательства

Часть V. Примеры, иллюстрирующие основные идеи Теории физических структур

Глава 15. Примеры сакральных законов первого рода, не содержащих произвольных параметров

Глава 16. Примеры сакральных законов второго рода, содержащих произвольные параметры

Глава 17. Взгляд со стороны

Приложение I. Таблица химических мультиплетов

Приложение II. Сакрально-алгебраические структуры Симонова

Приложение III. Первая публикация по ТФС

Приложение IV. Полная библиография по ТФС

Приложение V. Страницы из личного архива

Поэту

Поэт! Не дорожи любовию народной.
Восторженных похвал пройдёт минутный шум;
Услышишь суд глупца и смех толпы холодной,
Но ты останься твёрд, спокоен и угрюм.

Ты царь: живи один. Дорогою свободной
Иди, куда влечёт тебя свободный ум,
Усовершенствуя плоды любимых дум,
Не требуя наград за подвиг благородный.

Они в самом тебе. Ты сам свой высший суд;
Всех строже оценить умеешь ты свой труд.
Ты им доволен ли, взыскательный художник?

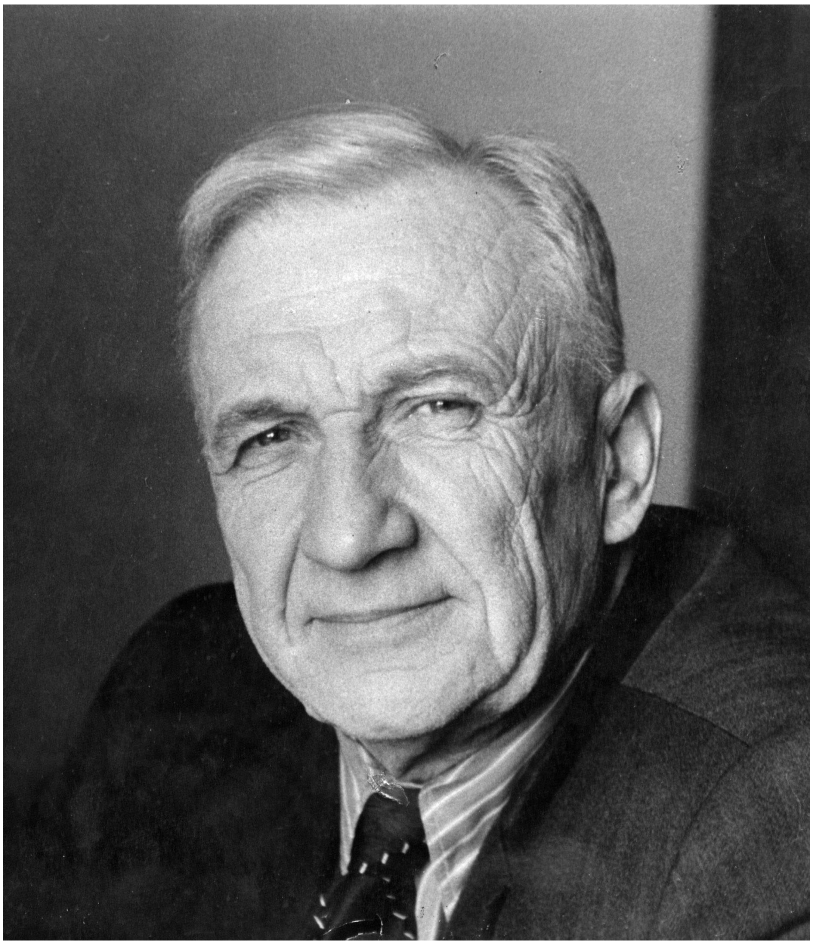
Доволен? Так пускай толпа его бранит
И плюет на алтарь, где твой огонь горит,
И в детской резвости колеблет твой треножник.

(1830) Пушкинъ

Эти стихи Пушкина, переписанные Галиной Вишневской, хранятся Мстиславом Растроповичем как талисман в футляре его виолончели.

Dem Gott und den Menschen

Художник Карева Н.С.



Ю. И. Журавлеву
на добрую память

Своему учителю
Игорю Евгеньевичу Тамму
посвящаю

Физические структуры - ключ к Плану Творения

Я счастлив, что мне не пришлось долгие годы быть одним из винтиков современной научной фабрики и работать только над задачами, указанными начальством. Родись я в эпоху нынешнего умственного феодализма, мне удалось бы достигнуть немногого. Я от всего сердца жалею современных молодых учёных, многие из которых обречены служить интеллектуальными лакеями [2].

— *Норберт Винер*

Дюрер. Меланхолия (1514).

Во времена Возрождения меланхолический темперамент отождествляли с творческим началом. На гравюре Дюрера Меланхолия окружена атрибутами зодчества и геометрии, отчего математики считают этот шедевр олицетворением творческого духа математики, а саму Меланхолию – представительницей математики в Мире высшей реальности.

Предисловие

Книга представляет собой первое систематическое изложение Теории физических структур, разработанной проф. Ю.И. Кулаковым и развитой впоследствии его учениками – доктором ф.-м. наук Г.Г. Михайличенко, канд. ф.-м. наук В.Х. Львом и аспирантом Андреем Симоновым.

Эти исследования, начатые в 1961 году, можно отнести к "основаниям физики", если понимать этот термин в несколько ином смысле, чем это принято в "основаниях математики". В Теории физических структур изучаются общие структуры, лежащие в основании фундаментальных физических законов, но не на уровне математической логики, а как следствия существования нового типа симметрии – **сакральной симметрии**, накладывающей на вид фундаментальных физических законов существенные ограничения.

Читатель, приступающий к изучению этой книги, подготовлен вековыми традициями - физикой и математикой, которым он обучался в школе и в университете. Он привык мыслить образами, оперировать наглядными представлениями, опираясь на традиционное физическое мировоззрение. И от этого его не нужно отучать, не говоря уже – вооружать его против этого. На протяжении всей этой книги я[3] постараюсь осуществлять переход к новому физическому мышлению постепенно, используя в качестве примеров факты, хорошо известные из традиционной физики.

Недавно мне исполнилось 76 лет. Из них 52 года я посвятил преподаванию физики. Я обучал физике студентов и в технических вузах Новочеркасска и Таганрога, и на прославленном Физтехе в Долгопрудном, и в Московском университете, и на физмате Горно-Алтайского университета, и в специально для меня созданной экспериментальной группе Новосибирского педагогического университета. Но больше всего – 40 лет, я отдал студентам физического факультета Новосибирского университета.

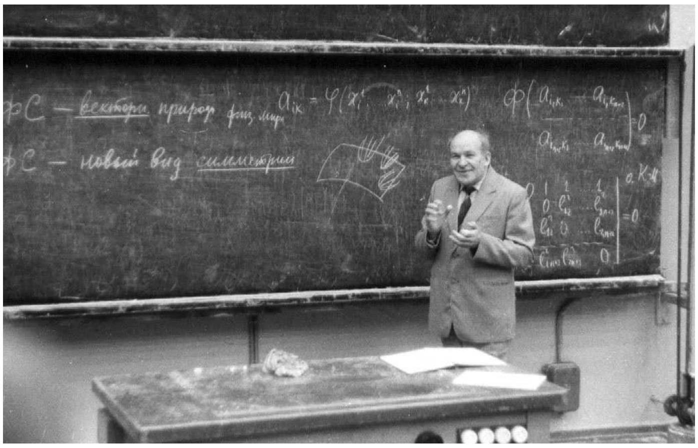
При этом я постоянно был неудовлетворён постановкой физического образования и на физфаке НГУ, и вообще – у нас в стране и за рубежом.

Я всё время чувствовал необходимость новых фундаментальных физических идей и основанных на них новых методов обучения.

[3] На протяжении всей этой книги я избегаю пользоваться местоимением "мы". Это слово имеет один существенный недостаток – оно удобно, но ни к чему не обязывает. "Я" – слово обязывающее. Оно бесконечно скромнée слова "мы"; "я" – выражение ответственное и одновременно действенное.

Необходимо учить студентов не только умению решать сложные узкоспециальные задачи и рассчитывать на компьютере большое число различных моделей, возникающих в рамках существующей традиционной физики. Но и учить студентов мыслить широко, свободно, вскрывая огромные эвристические возможности, заключённые в универсальных, общих принципах, единым образом охватывающих всё разнообразие Мира.

Но как пробудить и развить у студента дремлющее творческое начало, без которого немыслима деятельность подлинного учёного?



К настоящему времени давно назрела необходимость иметь капитальный труд "Фундаментальная физика", в котором вся физика и геометрия выводились бы из небольшого числа исходных аксиом Теории физических структур и соответствующих дополнительных ограничений (опций).

В Теории физических структур изучаются общие структуры, лежащие в основании фундаментальных физических законов и возникающие как следствия существования сакральной[4] симметрии, накладывающей на вид фундаментальных физических законов существенные ограничения.

Характерное отличие Теории физических структур от ортодоксальной физики Ландау состоит в следующем:

ортодоксальная физика изучает физические законы, исходя из внешних наблюдаемых физических явлений;

объектом изучения Теории физических структур является внутренняя сущность физических законов, физических величин и понятий.

Это стало возможным после того, как был найден строго определённый математический объект (физическая структура), заменяющий туманное философское понятие "сущность" (кантовская "вещь-в-себе").

Программа перестройки и построения всей физики на основе Теории физических структур весьма обширна, значительна и перспективна. Но уже сейчас многие разделы теоретической физики могут быть зáново построены на новых основаниях. При этом хорошо известные ещё из средней школы физические понятия, величи́ны и законы приобретают новый смысл и занимают своё законное

[4]Сам термин **сакральный** происходит от латинского сло́ва лат. sacer – *священный*.

место в Единой физической картине мира. Возникает такое ощущение, будто кто-то провёл влажной тряпкой по давно немытому стеклу и мир заиграл, заискрился всеми цветами радуги.

Прежде чем переходить к физическим и геометрическим примерам, иллюстрирующим основную идею, лежащую в основании Теории физических структур, я хочу познакомить читателей с основными понятиями того языка, на котором будет вестись дальнейшее изложение. Такими понятиями являются **объём** и **определитель**, хорошо известные любому первокурснику.

Оказывается, подобно тому, как всё разнообразие живых организмов, начиная с бактерий и лишайников и кончая приматами и человеком, может быть описано на едином языке ДНК с набором четырёх нуклеотидов (А – аденин, Т – тимин, Г – гуанин и Ц – цитозин), играющих роль своеобразных букв, с помощью которых записывается программа жизни того или иного живого организма, так и всё разнообразие фундаментальных законов физики и геометрии сводится к равенству нулю шести [5] типов определителей $\overset{N}{K}{}^{00}$, $\overset{N}{K}{}^{01}$, $\overset{N}{K}{}^{10}$, $\overset{N}{K}{}^{11}$, $\overset{2}{M}{}^{02}$, $\overset{2}{M}{}^{20}$.

В том, что это действительно так, читатель может убедиться, познакомившись с многочисленными примерами, приведёнными в Части V.

Но хорошо всем известные объёмы и определители являются лишь внешней частью большого айсберга – нового математического исчисления – **исчисления кортов**, представляющего собой наиболее адекватный инструмент, предназначенный для описания физической реальности. Этот математический аппарат излагается в Частях I, II, III и IV.

Но для усвоения этого математического аппарата, из-за его непохожести на всё известное ранее, требуется некоторая математическая культура.

Поэтому, если перешагнуть через строгое математическое доказательство **самодостаточности, существования и единственности** физических структур, которые сами по себе уникальны и воспринимаются как чудо ("чудо Кулакова–Михайличенко"), то на следующем этапе, в Частях II и V открывается поистине необозримая область приложений Теории физических структур как основания самых различных разделов физики, геометрии и некоторых разделов чистой математики.

Мы живём в удивительное время, когда не только рушится казавшееся вечным марксистско-ленинское "учение", но и происходит другой, менее заметный процесс, когда современная наука, не желая в этом признаться, вплотную подошла к тому понятию, с отрицания которого она начала своё победоносное шествие более трёхсот лет тому назад, – к понятию Бога. Уже один только более глубокий совместный анализ оснований физики и биологии позволяет убедиться в этом.

[5] Так как определители $\overset{N}{K}{}^{10}$, $\overset{2}{M}{}^{20}$ в определённом смысле слова эквивалентны, соответственно, определителям $\overset{N}{K}{}^{01}$, $\overset{2}{M}{}^{02}$, то, по сути дела, всё разнообразие фундаментальных законов физики и геометрии сводится к равенству нулю не шести, а четырёх определителей $\overset{N}{K}{}^{00}$, $\overset{N}{K}{}^{01}$, $\overset{N}{K}{}^{11}$, $\overset{2}{M}{}^{02}$

Поэтому необходимо коренным образом пересмотреть и изменить формы взаимоотношений науки и христианской культуры, сделать их более тесными, открытыми и толерантными.

Наконец, остаётся понять, какое место занимают физика и математика в Единой картине Мира, включающей в себя не только физическую реальность, но и явление жизни, феномен человека как личности и существование Бога как Высшего Сверхличностного Первоначала всего сущего. Эти вопросы обсуждаются во втором томе настоящего издания ("Теория физических структур. II.").

Таким образом, основная цель этой книги – донести до широкого круга физиков, математиков и философов содержание Теории физических структур – новой и уже детально разработанной физико-математической теории, претендующей на роль основания физики и обладающей в силу этого неожиданно глубоким мировоззренческим смыслом.

Эта книга – не учебник и не научная монография. Скорее всего – это строго математически аргументированный путеводитель в ещё неве́домый мир физических структур. Именно здесь, в этом мире находятся ответы на многие "еретические" вопросы.

Эта книга предназначена главным образом для физиков и математиков – студентов, магистрантов, аспирантов, преподавателей и уже сложившихся учёных, сохранивших живой интерес к своей профессии, ещё не утративших, несмотря на существующую систему образования, способности удивляться простым вещам, ищущих новые и трудные задачи, лежащие в стороне от проторенных дорог, и желающих понять не столько как устроен Мир, сколько почему он устроен именно так. Эта книга обращена ко всем тем физикам, кто несмотря на давление конъюнктуры и требование скорейших результатов, оформленных в виде сырых отчётов и скороспелых статей, по-прежнему любит физику, кто не утратил надежды на её лучшее понимание и отваживается задавать "еретические" вопросы.

Эта книга может оказаться полезной и интересной и для профессиональных математиков, так как в ней они смогут найти постановки и методы решения новых нетривиальных и содержательных математических задач.

Кроме того я надеюсь, что эта книга может представить определённый интерес для тех физиков и математиков, для которых вопрос "что есть Истина?" и вопросы об основаниях и общих принципах Бытия не являются надуманными и праздными, а также для философов, интересующихся онтологическими проблемами. Вопросы, рассматриваемые в этой книге, относятся не к частным и узкоспециальным физическим задачам, а тесно связаны с основаниями всего физического знания и носят всеобщий мировоззренческий характер.

И, наконец, отметив недавно своё семидесятипятилетие и оглянувшись на пройденный этап своей жизни, я решил опубликовать в Приложении V часть своего личного архива, на мой взгляд, представляющую интерес для широкого круга читателей.

Основу логотипа, отражающего главное содержание Теории физических

структур, образуют две комплементарные друг другу скрижали[6], на которых записан фундаментальный закон Мироздания. На скрижалях изображены символы двух дуально сопряжённых друг с другом множеств:
$\underline{\mathfrak{N}}$ — множество левых (нижних) субэйдосов и
$\overline{\mathfrak{M}}$ — множество правых (верхних) субэйдосов, являющихся прообразами физических объектов мира эмпирической действительности.

Символы s и r означают ранг физических структур, описывающих всё многообразие физических законов.

С другой стороны абстрактные скрижали как бы образуют прясла фасадных стен древнерусских храмов, наглядно утверждая тем самым мысль, что по большому счёту Теория физических структур – это дорога, ведущая к Храму.

Логотип завершается крестом – христианским символом нравственной позиции человека, означающим готовность мужественно переносить жизненные лишения, тяжёлые обязанности и страдания, быть всегда в согласии с велениями чистой совести[7].

Эта книга из-за её большого объёма так и осталась бы в виде неизданной рукописи, если бы не активная помощь со стороны моего ближайшего сотрудника и верного друга **Владимира Михайловича САРАНИНА**, взявшего на себя титанический труд по набору в редакторе LaTeX2 ε чрезвычайно сложных математических текстов и многочисленных чертежей и графиков. Я с полным на то основанием считаю его соавтором этой книги.

Итак, общая направленность книги "Теория физических структур" определяется следующими тремя символами веры:

Физическое кредо – признание Теории физических структур в качестве математического фундамента современной физики;

Философское кредо – признание в русле неоплатонизма, неотомизма и метафизического реализма в качестве основы Бытия иерархии идеальных сущностей, образующих Мир Высшей Реальности;

Теологическое кредо – Credo ut intelligan (Верю для того, чтобы понимать) признание Мирового Сверхличностного Разума в качестве Высшего надмирного Первоначала.

Я надеюсь, что эта книга будет отвечать широкому кругу интересов физиков, математиков, философов – интересов научных, мировоззренческих, духовных, которые не могут не волновать учёного как личность и как гражданина.

[6] Под скрижалями понимаются две каменные доски́, на которых начертаны Законы, полученные Моисеем от Бога.

[7] Недавно, во время "Макарьевских чтений", проходивших в Горно-Алтайске с 11 по 14 декабря 2000 г., я узнал о существовании похожего логотипа Института переводов Библии.

ПРЕАМБУЛА

Настоящая смена теорий не есть смена уравнений – это смена математических структур. Безумная идея, которая ляжет в основу будущей фундаментальной физической теории, будет осознанием того, что физический смысл имеет некоторый математический образ, ранее не связывавшийся с реальностью [3].

— *Ю.И. Манин*

1. Проблема оснований физики и геометрии.

В 1961 году я обнаружил существование **Универсального физико-геометрического кода,** с помощью которого по Единому Плану записываются все фундаментальные законы физики.

Аналогичным образом закодированы основания всех вещественных и комплексных n-мерных векторных пространств и так называемых сакральных геометрий, к числу которых относятся: n-мерные евклидовы и псевдоевклидовы геометрии, n-мерные геометрии Лобачевского и Римана, чётномерные и нечётномерные симплектические геометрии, проективная геометрия.

Единый физико-геометрический код можно рассматривать как новый, до сих пор неизвестный вид симметрии — как **сакральную симметрию**, порождающую своеобразные законы сохранения, инвариантами которых являются многие хорошо известные физические величины.

На этой основе научной школой Кулакова (Г.Г. Михайличенко, В.Х. Лев, В.К. Ионин, А.А. Симонов) создана и детально разработана принципиально новая метатеоретическая область физики – **Теория физических структур**, представляющая собой своеобразную “физическую алгебру”, объектом изучения которой являются все допустимые формы физических законов.

В рамках Теории физических структур даётся точная формулировка понятия фундаментального закона и строго математически доказывается существование и единственность всего **четырёх (!)** априорно допустимых форм фундаментальных законов физики и геометрии (Теорема Михайличенко).

Распространение Иониным и Симоновым основной идеи сакральной симметрии на множества произвольной природы позволило взглянуть на математику в целом с высоты “птичьего полёта” и понять, что скрывается за аксиоматикой теории групп, колец и ассоциативных тел, за “алмазным фондом высшей математики” — элементарными функциями и постоянными e и π и за такими, хорошо известными ещё из начальной школы, бинарными операциями, как сложение и умножение.

Характерное отличие Теории физических структур от ортодоксальной физики состоит в следующем:

ортодоксальная теоретическая физика (“антропная”, дольняя физика первого поколения) является **физикой явлений** и изучает физические законы, исходя из установленных эмпирическим путём фактов, с помощью удачно найденных наглядных (антропных) моделей;

Теория физических структур (метатеоретическая, сакральная, горняя физика второго поколения) является **физикой сущности** и изучает сущность (кантовскую “вещь-в-себе”) фундаментальных физических законов, основных физических величин и понятий; исходным понятием в этом случае является абстрактный **универсальный принцип сакральной симметрии.**

Таким образом, вскрывая сущность физических законов, Теория физических структур позволяет по-новому взглянуть на глубинное содержание таких уже привычных разделов теоретической физики, как аналитическая механика, теория относительности, равновесная термодинамика, классическая теория поля, статфизика, общая теория относительности, квантовая механика и теория элементарных частиц.

2. Необходимость нового математического аппарата.

Подобно тому как механика Ньютона потребовала создания дифференциального исчисления, электродинамика – дифференциальных уравнений в частных производных, теория элементарных частиц – представлений групп Ли, так и точная формулировка понятия физического закона потребовала создания **исчисления кортов**[8] – нового математического аппарата, адекватно описывающего свойства и строение рационального фундамента Мира Высшей реальности, “платоновской тенью” которого является наблюдаемый нами Мир материальной действительности.

В основании исчисления кортов лежит неизвестное ранее самодостаточное **сакральное уравнение** ранга (s, r) – общезначимое тождество относительно выбора двух групп нечисловых переменных, содержащее две неизвестные функции – **репрезентатор** и **верификатор**, определяющие сущность фундаментальных законов физики и геометрии.

Уникальная особенность этого самодостаточного уравнения состоит в том, что все неизвестные – репрезентатор и верификатор вместе с областью их определения, ранг и даже алгебраическая структура множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$, из которых берутся две группы нечисловых переменных, находятся в процессе решения.

3. Теория физических структур – ключ к Плану Творения.

Дальнейшее развитие Теории физических структур и распространение её выводов на новые области знаний приводит к принципиально новой картине Мира. Согласно этой картине, объективно существующий Универсум не исчерпывается миром эмпирической действительности – миром воспринимаемым нашими органами чувств, – существует особый Мир Высшей реальности, в котором для каждого материального объекта $\tilde{a}$ имеется два реально существующих прообраза – нижнего $\langle a|$ и верхнего $|a\rangle$. Теория физических структур устанавливает соответствие между идеальными, реально существующими физическими

[8]Корт – сокращённая форма от слова “кортеж”. Корт длины r – упорядоченная последовательность, состоящая из r произвольных нечисловых элементов.

структурами и фундаментальными физическими законами, действующими в мире материальной действительности.

Общее понятие физической структуры, заменяющее в определённом смысле туманное понятие материи, позволяет по-новому взглянуть на проблему Творения вещественного мира, на соотношение и взаимосвязь науки и теологии.

Теория физических структур не имеет аналогов и предшественников ни у нас в России, ни за рубежом. С одной стороны, она достаточно универсальна, чтобы охватить с помощью одного общего принципа самые различные области физики и геометрии, а с другой, достаточно содержательна, чтобы получить конкретные выражения для всех четырёх априорно допустимых форм фундаментальных законов физики и геометрии.

Таким образом, Теория физических структур является принципиально новым направлением в теоретической физике, позволяющим ставить и решать фундаментальные проблемы, не рассматриваемые до сих пор академической наукой. Содержательность и плодотворность программы физических структур подтверждены многочисленными результатами, полученными школой профессора Кулакова в Новосибирском университете и школой профессора Владимирова в Московском университете.

Иллюстрацией эффективности идей групповой и сакральной симметрии, лежащих в основании сакральной физики второго поколения, может служить Таблица химических мультиплетов. Эта таблица, в отличие от традиционной Периодической системы элементов, не имеет ни одного исключения и адекватно описывает свойства всех известных и ещё не открытых химических элементов.

Введение нового понятия *метаморфии* как парного к понятию *структуры* открывает широкие возможности для исследования проблемы неповторимости и индивидуальности, а введение нового понятия *программы* как парного к понятию *закона*, приводит к необходимости признания **Цели** и **Творца**.

За открытие и разработку нового направления в теоретической физике профессору Ю.И.Кулакову в 1972 году присвоено звание члена-корреспондента Centro Superiore di Logica e Scienze Comparate (Bologna, Italy) [9].

[9]Высший Центр логики и межнаучных исследований (Болонья, Италия)

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарю тебя, Господи, творца моего, за то, что ты дал мне созерцать красоту творения рук твоих.
— Кеплер (1571 – 1630)

С большой любовью вспоминаю я своего отца **Кулакова Ивана Васильевича** (1900 – 1945) – бухгалтера-экономиста Отрожского вагоно-ремонтного завода, непостижимым путём оказавшегося моим первым учителем физики.

Он был арестован в 1937 году как "враг народа" и несколько месяцев провёл в тюремной камере с одним профессором физики Воронежского университета. Чудесным образом реабилитированный, отец вышел на свободу в конце 1939 года и с юношеским азартом постарался реализовать на практике полученные им в тюрьме знания по физике. Он привлёк меня, 12-летнего мальчишку, к созданию в нашей детской комнате и на кухне домашней лаборатории, чем-то напоминавшей средневековую лабораторию алхимика. Тем самым он первый ввёл меня в таинственный, ещё неведомый мне, мир физики.

Когда отец находился в одном из отдалённых концлагерей Унжлага, я, с благословения моей мамы – Антонины Козьминичны Ивановой, нелегально проник в этот концлагерь и провёл с отцом одну незабываемую ночь. И там, в бараке, под храп и стоны спящих заключённых, при сумеречном свете летней полярной ночи, отец преподал мне на всю жизнь урок большого гражданского мужества.

Светлой памяти моего отца – моего первого учителя физики, погибшего в концлагере под Берлином во время Великой Отечественной войны, я посвящаю первую главу этой книги – "Истоки Теории физических структур".

Прежде всего, я многим обязан моему Учителю – академику **Игорю Евгеньевичу Тамму** (1895 – 1971) – замечательному человеку, выдающемуся физику, великому гражданину. Его светлой памяти посвящаю я эту книгу.

Но более, чем кто-либо иной, движущей силой в моей работе над этой монографией на протяжении последних пятнадцати лет была моя жена **Люся**[10]. Именно она в первую очередь содействовала созданию журнала-депозитария Credo, постоянно побуждает меня к изданию многотомной монографии по Теории физических структур и терпеливо переносит все материальные трудности, с которыми неизбежно связано такого рода издание.

Я благодарен **Ольге Александровне Ладыженской** – математику Божией милостью, замечательной женщине, действительному члену Российской Академии наук за высокую оценку Теории физических структур на самом первом этапе её возникновения и развития.

Виктор Иванович Шахов, мой старинный университетский друг, с которым мы связаны чувством большой привязанности уже более пятидесяти (!) лет, – один из первых, кому я хотел бы выразить здесь свою любовь и признательность.

---

[10] Людмила Сергеевна Сычёва

Я благодарен ему за неугасимый интерес к Теории физических структур с самого́ её создания, за удивительную способность задавать глубокие "еретические" вопросы, за стремление навести полную ясность по каждой проблеме физики, математики и Мироздания, которые мы обсуждаем при наших встречах, за его доброту и заботу обо мне и о других участниках нашей школы. Мне трудно представить себе историю создания Теории физических структур и её дальнейшее развитие без Виктора Ивановича – непременного участника всех наших школ и ревностного хранителя наших традиций.

Инна Иннокентьевна Тычинская – мой верный друг, соавтор и единомышленник. Её стихи и понимание важности выбранного мной пути сопровождают меня каждый раз, когда я выхожу на просёлочную дорогу, ведущую к Храму – в мир физических структур, и далее – в Мир Высшей реальности. Они придают мне новые силы, когда я вторгаюсь в до сих пор запретную область знания.

Я с большим удовольствием выражаю здесь свою благодарность моему первому ученику и другу **Гене Михайличенко**[11] за его научный подвиг – полное и окончательное решение очень трудной математической задачи: доказательство существования и единственности физических структур ранга (r, s), за его преданность идее физических структур и за его воистину сыновнее отношение ко мне.

Я приношу глубокую благодарность моему верному другу и бескорыстному летописцу **Владимиру Михайловичу Саранину**, самоотверженно записывающего на магнитофон и затем обрабатывающего все мои лекции. Ещё в "докомпьютерную эпоху" он по собственной инициативе приступил к набору моей книги по Теории физических структур в весьма несовершенном редакторе "CHIWRITER" и в настоящее время оказывает мне неоценимую помощь по набору для настоящего издания сложнейших математических текстов и многочисленных чертежей и рисунков в великолепном редакторе LaTeX2 ε .

Существенную спонсорскую помощь в наборе этой книги оказали мне крупный специалист по железнодорожному строительству **Анатолий Филенович Ким** и его жена **Валентина Ивановна.**

Я выражаю глубокую благодарность моему большому другу – **Юрию Сергеевичу Владимирову** за активное и инициативное участие во всех наших совместных школах по Теории физических структур, за создание бинарной геометрофизики, позволившей распространить область применения Теории физических структур на теорию элементарных частиц, за постоянные приглашения выступить с докладом о новых результатах на руководимом им теоретическом семинаре в Московском университете, за его неизменно доброжелательное ко мне отношение.

Полное понимание разрабатываемого мною нового направления в теоретической физике я нашёл в лице моего большого и верного друга **Джо** (Язепа Ароновича Эйдуса) – по-европейски широко и глубоко образованного заслужен-

[11] Геннадию Григорьевичу Михайличенко

ного учёного Латвийской республики, переводчика с латинского на латышский язык поэмы Тита Лукреция Кара “О природе вещей”, обладателя двух докторских степеней (Dr. chem и Dr. phys), почётного члена одного из колледжей Лондонского университета, заслуженного соросовского профессора, обладателя медали Гиллера АН Латв.ССР, лауреата премии Джорджа Сороса и т. д. Его необыкновенная судьба, одновременно трагическая и счастливая, могла бы лечь в основу современного остросюжетного романа.

Я благодарю своего ученика и верного друга **Володю Льва**[12] за многолетнее сотрудничество, за верность идеям Теории физических структур, за тот прекрасный участок жизненного пути, который мы прошли с ним в одной связке.

Пользуюсь случаем, чтобы поблагодарить своего бывшего ученика **Изю Шрейбера** (Исаака Рувимовича Шрейбера) за то, что он, будучи заместителем директора Института криосферы Земли СОАН СССР (Тюмень), в трудное для меня время, нашёл возможность создать в своём институте для меня и двух моих учеников специальное подразделение по Теории физических структур, просуществовавшее три с половиной года.

И, конечно, я глубоко благодарен всем моим ученикам и постоянным участникам семинара по Теории физических структур в НГУ, которым я руковожу тридцать пять лет, за неизменный интерес к ТФС и, прежде всего, моему верному ученику и другу **Андрею Симонову**, успешно разрабатывающему принципиально новый аспект теории физических структур.

Я благодарен человеку, пожелавшему остаться неизвестным, передавшему мне крупную по тем временам сумму денег, которые мы использовали для покупки персонального компьютера.

Существенную помощь в приобретении этого компьютера оказал нам мой ученик **Анатолий Суворин**.

Я благодарю **Диму Бакшеева** за постоянную и безотказную помощь в установке и освоении мною “восхитительного LaTeX-а”. Невозможно переоценить его роль в ликвидации последствий катастрофы, возникшей по моей вине, в результате случайного уничтожения всех файлов, содержащих полный текст этой, уже набранной, книги.

Но особое чувство признательности я испытываю по отношению к моему надёжному и бескорыстному помошнику, главному архитектору и строителю журнала-депозитария Credo **Алексею Яковлеву**, проявлявшего буквально чудеса изобретательности при создании оригинал-макета электронного журнала Credo. Находясь в настоящее время в Соединённых Штатах Америки, он нашёл возможность возродить наш журнал-депозитарий Credo на американской почве, найдя для него подходящий сайт.

Я благодарю американского астрофизика **Билла Самнера (William Sumner)** и математика **Евгения Евгеньевича Витяева** за живой интерес к Теории физических структур и создание по их инициативе сайта для моих работ по ТФС:

Особую благодарность я приношу **Елене Масоян**, которая в трудное для меня время оказала мне бескорыстную финансовую помощь.

[12]ВладимираХанановича Льва

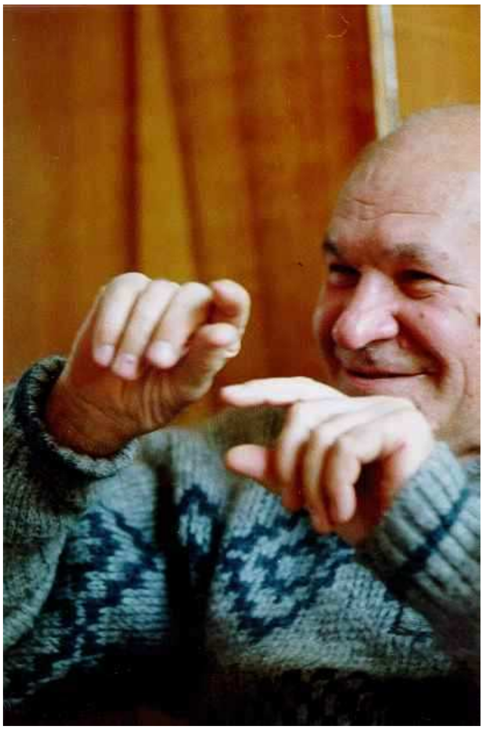
Я глубоко признателен **Алексею Анатольевичу Глебову**, вложившему немало труда и средств, чтобы сохранить на видео наши школы-семинары и мои выступления по различным научным и философским проблемам.

Приношу глубокую благодарность бескорыстному подвижнику – библиографу **Альберту Петровичу Зарубину** за постоянную библиографическую информацию и неугасимый интерес к моим работам.

Пользуюсь случаем отметить, что именно в молодой Республике Алтай со стороны моего бывшего ученика, а ныне председателя Комитета природных ресурсов, кандидата физ.-мат. наук **Валерия Владимировича Кудачина** и Государственного Собрания – Эл Курултая – было проявлено глубокое понимание необходимости развития в Республике Алтай фундаментальной науки.

Эта книга вряд ли смогла бы выйти в настоящем виде без активного участия в её издании бывшего выпускника НГУ, а ныне директора издательства “Альфа Виста” **Скринникова Александра Валерьевича**, обратившегося к выпускникам НГУ – моим бывшим ученикам – с предложением принять участие в издании этой книги в качестве спонсоров.

Благодарю также моих коллег по кафедре теоретической физики НГУ за их снисходительно-ироническое отношение к создаваемой мною Теории физических структур, постоянно стимулировавшее меня к её дальнейшему совершенствованию и развитию.



Литература к Прелюдии

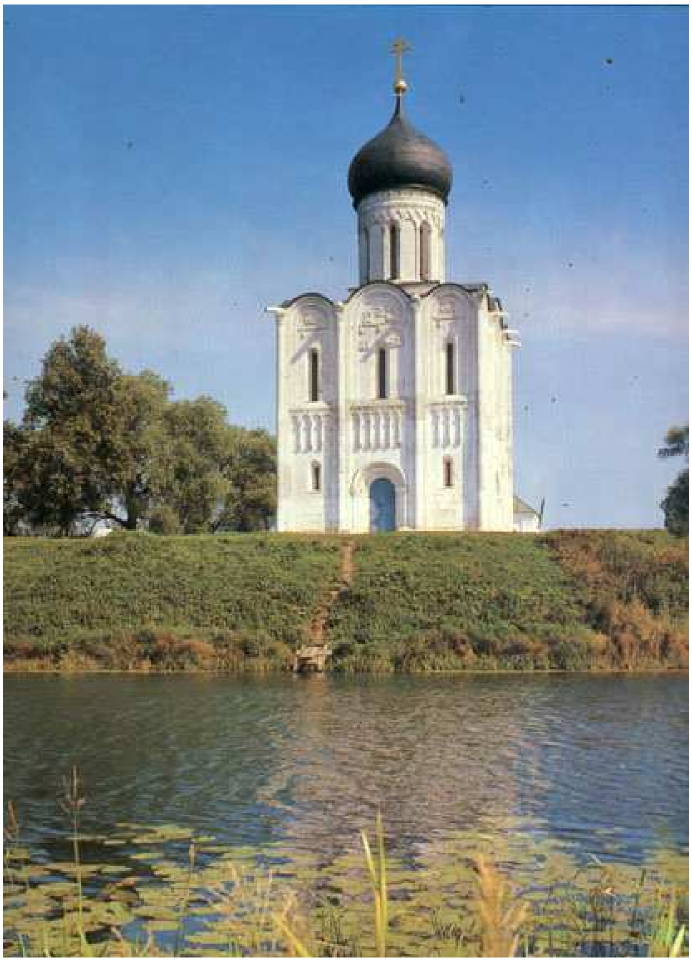
[1] *Шрёдингер Э.* Что такое жизнь с точки зрения физики? М.: Иностранная литература, 1947. - С.11.
То же *Шрёдингер Э.* Что такое жизнь? С точки зрения физика. Перев. с англ. Изд. 2. М.: Атомиздат, 1972. - С.11-12.

[2] *Винер Н.* Я — математик. М.: Наука, 1964. С.343.

[3] *Манин Ю.И.* Математика и физика. – М.: Знание. 1979. С.4.

Что скрывается за...?

Фото *Лидии Стародубцевой*



Церковъ Покрова на Нерли. 1165 г.

Будто сказочное виденье плывёт эта церковь
над водой во время половодья.

Пожалуй, самым трудным и вместе с тем обязательным в архитектурном творчестве является простота. Простота форм обязывает придавать прекрасные пропорции и соотношения, которые сообщили бы им необходимую гармонию.

Академик А.В. Щусев (1873 – 1949)

Часть I

ИСТОКИ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Sic itur ad astra[13]

С самого начала проявилось стремление найти для унификации всех отраслей науки теоретическую основу, образованную минимальным числом понятий и фундаментальных соотношений, из которых логическим путём можно было бы вывести все понятия и соотношения отдельных дисциплин. Вот что мы понимаем под поиском фундамента для физики в целом. Глубокое убеждение в достижимости этой цели является главным источником страстной преданности, которая всегда воодушевляет исследователя.

— Альберт Эйнштейн

Глава 1. О языке, на котором написаны законы природы

Глава 2. Основные понятия Теории физических структур.

Глава 3. Что же такое Теория физических структур?

[13]Так идут к звёздам.

Эта история началась сорок лет тому назад ...

В смятенье чувств и помыслов невольно
Смотрю на фотографию свою.
Как ни печально мне, как мне ни больно,
Я сам себя на ней не узнаю [1].

Расул Гамзатов

Глава 1

О ЯЗЫКЕ, НА КОТОРОМ НАПИСАНЫ ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ.

NON FINGENDUM AUT, EXCOGITANDUM, SED INVENIENDUM, QUI NATURA FACIT AUT FERATНе выдумывать, не измышлять, а искать, что творит и приносит с собой природа.

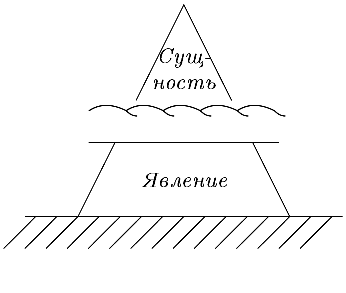
Занятие фундаментальной физикой можно сравнить со строительством монументального здания, скажем, Сартрского собора. Мы, физики и математики, строим такое здание собора — Единую физическую картину Мира. И хотя результаты наших усилий, как и Сартрский собор, находят практическое применение — цель нашей работы, как она была бы выражена в средние века, — прославление Господа. И только с помыслами, подобными этому, люди могут построить собор, а не фабрику. И точно так же, как неизвестны сегодня имена строителей средневекового собора (ибо значение имеет лишь дело их рук, но не они сами), так и вклад большинства учёных остаётся анонимным. Собор — это общее дело, а учёные — подмастерья мощной бригады строителей, или, рассматривая их деятельность во всемирном масштабе, они — братья всемирного ордена, в котором личные амбиции уходят на второй план перед великим общим делом [2].

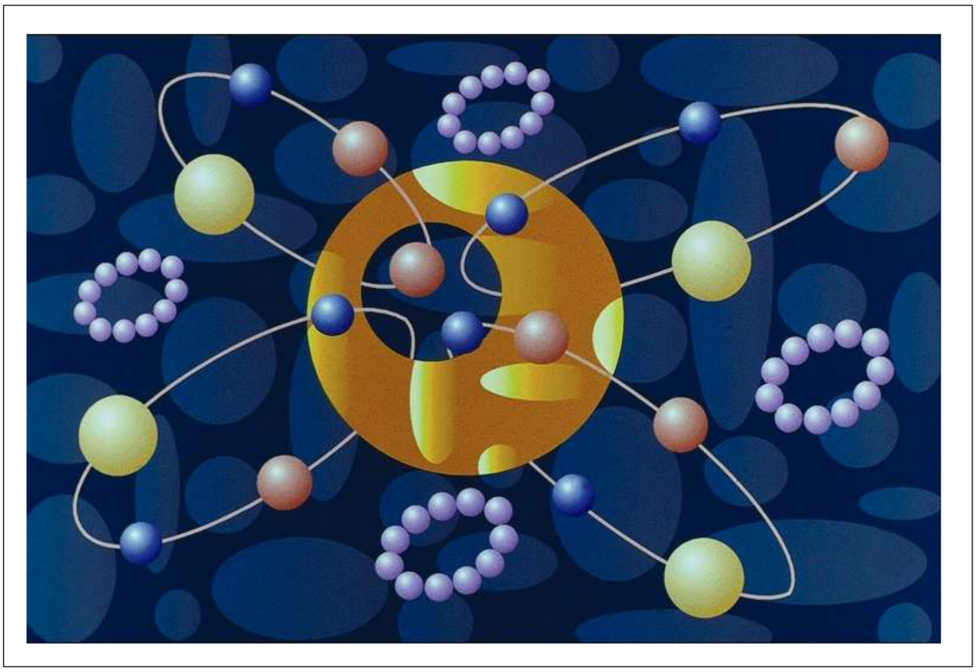
— Х.О. Пайтген, П.Х. Рихтер

§ 1. В начале было слово.

§ 2. О Теории физических структур.

§ 3. Физика как целостная система знаний.





Аннотация к Главе 1

О языке, на котором написаны законы природы

В этой главе я вспоминаю о том, как в конце 1960 года, моим Учителем Игорем Евгеньевичем Таммом была поставлена передо мной совершенно необычная задача – найти единый универсальный язык, на котором написаны все фундаментальные физические законы, и опираясь на него, пересмотреть и переосмыслить основания всей физики.

Далее речь идёт о самых первых шагах создания Теории физических структур на кафедре теоретической физики в стенах Новосибирского государственного университета, о возникновении научного сообщества – Всесоюзной Школы по Теории физических структур.

Характерной особенностью Теории физических структур является взгляд на физику как на единое целостное знание.

Как известно, Н. Бурбаки предложили программу построения математики как целостной системы знаний. Ими было показано, что в основании математики лежат **три** (!) независимые порождающие структуры — алгебраическая, топологическая и структура порядка.

Аналогичная задача "бурбакизации" может быть поставлена и в физике (задача построения физики как целостного знания). Смысл её состоит в том, чтобы свести всё многообразие фундаментальных физических законов, понятий и величин к **одной** (!) универсальной физической структуре, имеющей смысл особой скрытой симметрии, существующей в мире физических законов.

§ 1. В начале было слово.

Меня, Даниила, сильно смущали размышления мои, ...
но слово я сохранил в сердце моём.

– Дан. 7. 28.

Эта история поисков единства законов природы, поиска языка, на котором адекватным образом написаны фундаментальные физические законы, началась в Московском университете более сорока лет тому назад.

Тогда мне посчастливилось стать аспирантом выдающегося физика, нобелевского лауреата, замечательного человека Игоря Евгеньевича Тамма [3].

В то время теоретическая физика переживала состояние глубокой депрессии. После поражающих воображение успехов квантовой электродинамики дальнейшему движению вперёд препятствовало отсутствие принципиально новых физических идей. Многие физики-теоретики того времени были заняты созданием новых, и как выяснилось в дальнейшем, неэффективных моделей сильных взаимодействий, отличных от моделей, использующих методы теории возмущений.

Несмотря на широкое признание мировой научной общественностью модели Тамма – Данкова, Игорь Евгеньевич с присущей ему самокритичностью говорил мне: “Знаете, Юрий Иванович, мы с вами работаем для корзины. Через десять лет это никому не будет нужно. Об этом забудут. Но нужно что-то делать, нельзя стоять на месте!”

Тамм: “Нужно научиться “слушать” природу, чтобы понять её язык”.

Я был озадачен. Но слова и тон, какими они были сказаны, запали в память и остались навсегда как образец предельной честности в оценке своей работы.

Игорь Евгеньевич неоднократно говорил мне о том, что, изобретая различные модели взаимодействий, мы навязываем природе наш собственный “человеческий” язык. Но природа не понимает нашего языка, и диалога не получается. “Поэтому, наша первейшая задача, – говорил Тамм, – научиться “слушать” природу, чтобы понять её язык”. Но где он этот язык? В чём? Он в законах. В законе Ньютона, в уравнениях Максвелла, в евклидовой геометрии, в законах квантовой механики.

Все эти законы написаны на некотором едином языке. Это как поэмы Гомера, Библия, романы Достоевского, “История” Карамзина, "Архипелаг ГУЛАГ" Солженицына. Вещи разные, но написаны на одном и том же языке.

Так впервые, в конце 1960 года, была поставлена совершенно необычная задача — **найти единый универсальный язык, на котором написаны все фундаментальные физические законы, и, опираясь на него, пересмотреть и переосмыслить основания всей физики**.

Как-то, во время поездки в Дубну, Игорь Евгеньевич сказал мне: “Если Вы хотите стать настоящим физиком, а не высококвалифицированным ремесленником, Вы не должны исключать возможности существования иных форм реальности, отличных от формы существования материальной действительности. Вы должны читать и внимательно изучать авторов, не входящих в список обязательной литературы, предлагаемый официальной философией, и, прежде всего, русских философов — Бердяева, Лосского, Владимира Соловьёва, Франка. Они о многом догадывались, хотя не могли сформулировать свою идею всеединства на строгом математическом языке. Попробуйте, может быть, Вам удастся это сделать!”.

В те уже далёкие времена, во времена господства “диалектического и исторического материализма”, эти слова казались мне еретическими, вызывали сладостное ощущение запретного плода и открывали передо мной новые горизонты. Но только теперь, спустя много лет, я по-настоящему понял их глубоко провиденциальный смысл.

Дело в том, что исторически возникшие из опыта — “снизу”, различные разделы физики – механика, термодинамика, электродинамика, теория относительности, квантовая механика – сохранили свой, характерный для каждого раздела, полуэмпирический язык. Но если подняться на достаточно высокий уровень абстракции и взглянуть на хорошо известные разделы физики “сверху”, то многочисленные детали, важные при решении тех или иных конкретных задач, постепенно исчезают, и вместо них обнаруживаются новые фундаментальные физические законы, написанные на новом универсальном языке.

Перед нами открывается новая физика, с новыми целями, новыми задачами и новым математическим аппаратом.

Нечто подобное происходит при восхождении на высокую горную вершину. Сначала альпинисты идут по ущелью. Перед их взором проходит множество разнообразных объектов — валуны и камни, потоки, водопады, кустарники и деревья. Поднимаясь всё выше и выше, они попадают в область альпийских лугов. А затем, преодолев слой облаков, они видят перед собой величественную картину — горный хребет с покрытыми вечными снегами вершинами, бездонное синее небо, ослепительно сияющее солнце, а внизу уже не видно деталей, но зато хорошо просматривается пройденный ими маршрут.

Как выяснилось позже, суть любых фундаментальных физических законов состоит в объективном существовании абстрактных физических структур — особого рода отношений, в которых находятся идеальные “двойники” — прообразы объектов материальной действительности. В отличие от хорошо известных причинно-следственных связей, эти отношения имеют совершенно иную природу, описываются на том самом едином универсальном языке, о котором ранее говорил мне Тамм, и выражают наиболее адекватным образом идею целостности и всеединства особого **Мира высшей реальности**, тенью которого является видимый нами вещественный мир [4].

Разработанная мной и моими учениками **Теория физических структур** возникла из анализа самых различных фундаментальных физических законов и предназначена для описания глубинных слоёв физической реальности. Примечательно, что в некоторых соотношениях Теории физических структур, полученных из самых общих предположений о равноправии исходных физических объектов, отчётливо просматривается их связь с линейной алгеброй и евклидовой геометрией. Возникает естественное желание дать геометрическую интерпретацию для всех физических структур, даже если для этого пришлось бы пойти по пути пересмотра и обобщения существующих геометрий.

Что такое теория физических структур? что является предметом ее изучения? к какой области физики она относится?

§ 2. О теории физических структур.

Та особая цель в области теоретической физики, которая кажется мне особенно важной, состоит в логической унификации теории

— Альберт Эйнштейн

Теория физических структур возникла на кафедре теоретической физики Новосибирского университета почти сорок лет тому назад и в течение всего этого времени, вопреки снисходительно-ироническому отношению к ней со стороны официальной науки, успешно развивалась, время от времени вступая в неизбежные контакты с академической наукой (публикация в центральных академических и математических отечественных и зарубежных журналах, защита пяти кандидатских и одной докторской диссертации по “еретической” тематике, чтение спецкурсов по Теории физических структур в Московском, Ленинградском, Киевском, Латвийском, Софийском (Болгария) и других университетах страны и ближнего зарубежья, выступления с докладами на Всесоюзных и Международных конференциях, симпозиумах и конгрессах). Однако, до самого последнего времени из-за необычной для подавляющего большинства физиков постановки задачи и принципиально новых математических методов её решения, Теория физических структур была известна лишь сравнительно небольшой группе физиков и математиков, привлечённых естественной простотой её исходных постулатов и глубинным содержанием самой теории.

Эта группа образовала некоторое научное сообщество — Школу по Теории физических структур, активно работающее над дальнейшим развитием Теории физических структур и над её физическими и математическими приложениями. В рамках этой Школы, начиная с лета 1984 года, регулярно проводятся Школы-семинары по Теории физических структур, на которых осуществляется критический разбор полученных новых результатов, ставятся новые задачи и обсуждаются тесно связанные с физическими структурами общие проблемы Мироздания.

За 40 лет с момента создания Теории физических структур мной и моими учениками рассмотрено большое количество примеров из самых различных разделов физики, геометрии и чистой математики, иллюстрирующих основную идею ТФС, создан совершенный математический аппарат — **исчисление кортов**, лежащий в её основании, доказана основополагающая теорема Михайличенко о существовании и единственности всего **четырёх (!)** априорно допустимых форм фундаментальных законов физики и геометрии.

К числу последних значительных результатов, полученных на основе этой теоремы, можно отнести создание **сакральной геометрии**См. Глава 1, Раздел 4, II. Евклидова геометрия – очевидная и невероятная., частными случаями которой являются с одной стороны линейная (векторная) алгебра, а с другой — евклидова геометрия.

Распространение Иониным и Симоновым основной идеи сакральной симметрии на множества произвольной природы позволило взглянуть на математику в целом с высоты “птичьего полёта” и понять, что скрывается за аксиоматикой теории групп, колец и ассоциативных тел, за “алмазным фондом высшей математики” — элементарными функциями и постоянными e, π, “золотым сечением” $\varepsilon = 1.618...$ и за такими, хорошо известными ещё из начальной школы, бинарными операциями, как сложение и умножение.

Характерное отличие Теории физических структур от ортодоксальной физики состоит в следующем:

ортодоксальная теоретическая физика (“антропная”, дольняя физика первого поколения) является **физикой явлений** и изучает физические законы, исходя из установленных эмпирическим путём фактов, с помощью удачно найденных наглядных (антропных) моделей;

Теория физических структур (физическая герменевтика*герменевтика* — искусство понимания, метатеоретическая, сакральная физика второго поколения) является **физикой сущности** и изучает сущность (кантовскую “вещь-в-себе”) фундаментальных физических законов, основных физических величин и понятий; исходным понятием в этом случае является абстрактный **универсальный принцип сакральной симметрии.**

Таким образом, вскрывая сущность физических законов, Теория физических структур позволяет по-новому взглянуть на глубинное содержание таких уже привычных разделов теоретической физики, как аналитическая механика, теория относительности, равновесная термодинамика, классическая теория поля, статфизика, квантовая механика и теория элементарных частиц.

Подобно тому как механика Ньютона потребовала создания дифференциального исчисления, электродинамика — дифференциальных уравнений в частных производных, теория элементарных частиц — представлений групп Ли, так и точная формулировка понятия физического закона потребовала создания **исчисления кортов**Корт – сокращённая форма от слова “кортеж”. Корт длины r – упорядоченная последовательность, состоящая из r произвольных нечисловых элементов.нового математического аппарата, адекватно описывающего свойства и строение рационального фундамента Мира Высшей реальности, “платоновской тенью” которого является наблюдаемый нами Мир материальной действительности.

В основании исчисления кортов лежит неизвестное ранее самодостаточное **сакральное уравнение** ранга (s, r) — общезначимое тождество относительно выбора двух групп нечисловых переменных, содержащее две неизвестные функции — **репрезентатор** и **верификатор**, определяющие конкретный вид фундаментальных законов физики и геометрии и их сущность, как устойчивое отношение между двумя субъэйдосами – нижним (левым) и верхним (правым), являющимися прообразами физических объектов мира эмпирической действительности.

Уникальная особенность этого самодостаточного уравнения состоит в том, что все неизвестные — репрезентатор и верификатор вместе с областью их определения, ранг и даже алгебраическая структура множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$, из которых берутся две группы нечисловых переменных, находятся по ходу решения этой необычной математической задачи.

В общей сложности по Теории физических структур с 1968 года опубликовано более 150 работ (см. Полную библиографию по Теории физических структур.)

В Новосибирском университете уже в течение 35 лет работает под моим руководством рабочий семинар по Теории физических структур.

Аналогичный семинар работает с 1995 года под руководством профессора Г.Г. Михайличенко в Горно-Алтайском университете.

§ 3. Физика как целостная система знаний.

Многообразие отдельных законов пронизано некими общими принципами, которые так или иначе содержатся в каждом законе.

— Ричард Фейнман

Среди многочисленных попыток обнаружить единую математическую структуру различных физических законов лишь одна, в какой-то степени, увенчалась успехом и может претендовать на название универсального принципа. Это — хорошо известный принцип Гамильтона, взятый в качестве объединяющего начала в фундаментальном курсе теоретической физики Ландау и Лифшица.

Что же касается более частных областей физики, то здесь найдено достаточно большое число математических структур, объединяющих между собой различные разделы физики. Так, например, ещё давно обнаружена единая математическая структура электрического и магнитного поля (тензор электромагнитного поля), света и электромагнитных явлений (уравнение Максвелла), геометрии и гравитационного поля (общая теория относительности), квантовой и релятивистской механики (квантовая электродинамика) и уже совсем недавно обнаружена единая структура слабых, электрослабых и сильных взаимодействий (теория Вайнберга–Салама–Глешоу).

В 1968 году мною был сформулирован новый взгляд на природу и математическую структуру фундаментальных физических законов и основных физических величин и понятий [5], [6].

Суть его в самых общих чертах состоит в следующем:

Начиная с Галилея и по настоящее время, физика, как правило, строится и излагается **индуктивно**, т. е. из огромного множества наблюдений и опытных фактов выбирается небольшое число свойств и вырабатываются основные понятия, в терминах которых формулируется физическая теория. Я предлагаю **дедуктивный** путь построения физики.

Для его реализации мной найдена некоторая чрезвычайно простая математическая структура. Эта структура оказалась весьма эффективной при установлении природы фундаментальных физических законов и введении в теорию основных физических величин и понятий, и потому я назвал её **"теорией физических структур".**

Как известно, Н. Бурбаки предложили программу построения математики как целостной системы знаний. Ими было показано, что в основании математики лежат **три** (!) независимые порождающие структуры — алгебраическая, топологическая и структура порядка [7].

Аналогичная задача "бурбакизации" может быть поставлена и в физике (задача построения физики как целостного знания). Смысл её состоит в том, чтобы свести всё многообразие фундаментальных физических законов, понятий и величин к одной универсальной физической структуре, имеющей смысл особой скрытой симметрии мира физических объектов.

Физика представляет собой сложную иерархическую систему фундаментальных физических законов и понятий, основных уравнений и общефизических принципов, наблюдаемых и ненаблюдаемых физических величин, равновесных и неравновесных процессов. В самом её основании лежат фундаментальные физические законы, порождающие достаточно богатый набор исходных физических величин и понятий, таких как, например, пространство и время, масса и сила, температура, энтропия, электрический заряд, сопротивление и т. п. Используя эти понятия и физические величины как исходный строительный материал, оказалось возможным сделать следующий шаг — сформулировать исходные динамические уравнения. Эти уравнения играют в физике настолько важную роль, что возникает соблазн сказать, что вся механика заключена в уравнении Ньютона, электродинамика — в уравнениях Максвелла, теория тяготения — в уравнении Эйнштейна, нерелятивистская квантовая механика — в уравнении Шрёдингера, релятивистская квантовая механика — в уравнения Дирака и т. д.

Однако, сводя содержание различных разделов физики к соответствующим уравнениям, мы, сами того не замечая, рискуем лишить физику её подлинного смысла, ибо главное содержание физики, как теперь выясняется, нужно искать не на уровне уравнений, а не более глубоком уровне — на уровне фундаментальных физических законов, понятий и специфических физических величин, порождаемых особым видом симметрии системы физических объектов.

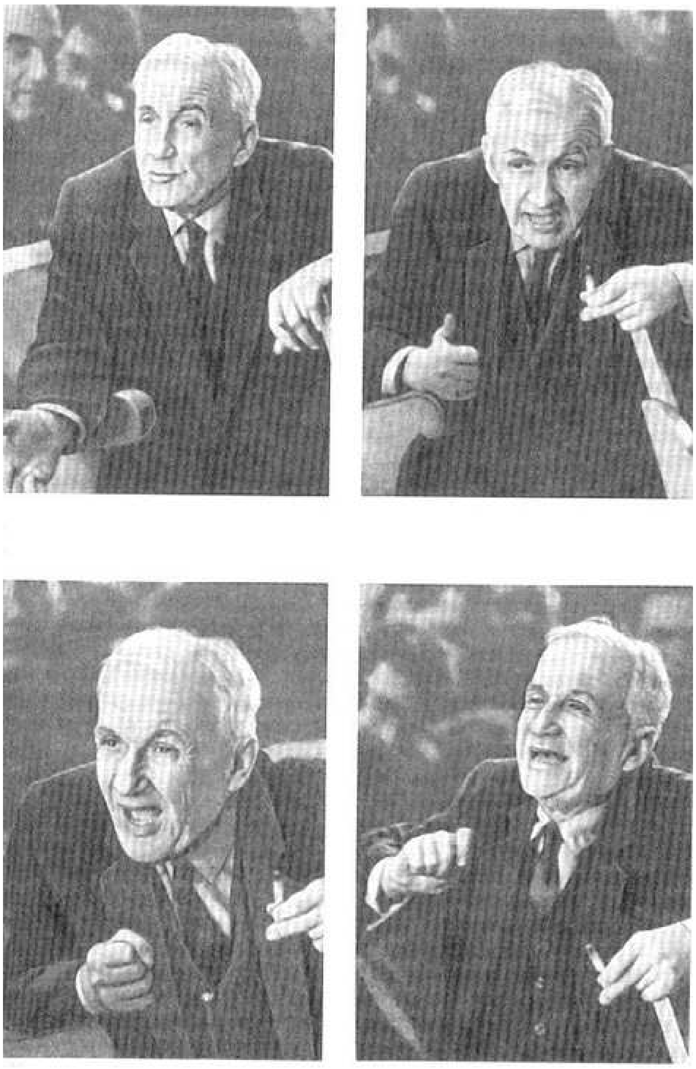
Заметим, что динамические уравнения получают неожиданную свежесть, появляясь заново совсем в другом аспекте. Дело в том, что современная теория элементарных частиц, основанная на квантовой механике, во главу угла поставила ту часть квантовой теории, которая раньше занимала лишь подчинённое место. Речь идёт о теории групп. В обычной квантовой теории группы симметрии играли лишь вспомогательную роль: в основе теории лежало "динамическое уравнение" (уравнение Шрёдингера или уравнение Дирака), которое в определённых условиях оказалось инвариантным относительно некоторой группы преобразований. Считалось, что уравнения в принципе могли бы быть решены и без групп, а группы рассматривались лишь как математический метод, позволяющий извлекать частичную информацию о квантовой системе без интегрирования уравнений.

Развитие теории элементарных частиц в последние годы обратило, в известном смысле, соотношение между уравнениями движения и группами симметрии. Теперь симметрия выступает на передний план, так как оказалось, что представления соответствующих групп несут в себе самую фундаментальную информацию о системе. Таким образом, симметрия оказывается первичным, наиболее глубоким инструментом для физического описания природы [8].

Но предложенная мною Теория физических структур в определённом смысле идёт дальше, так как в её основании лежит новый тип симметрии, имеющий место в мире самых различных физических объектов. Эта симметрия, названная мною **сакральной**, позволяет совершенно по-новому взглянуть на само понятие физического закона и на сам факт существования групп преобразований, играющих такую важную роль в современной теоретической физике.

Что же представляет собой физика в целом? По отношению к физике можно задать тот же вопрос, который задают Н. Бурбаки по отношению к математике: "Является ли это обширное разрастание развитием крепко сложенного организма, который с каждым днём приобретает всё больше и больше согласованности и единства между своими вновь возникающими частями, или, напротив, оно является только внешним признаком тенденции к идущему всё дальше и дальше распаду, обусловленному самой природой математики... Одним словом, существует в настоящее время одна математика или несколько математик?" [9].

Поиск ответа на этот вопрос, составляющий предмет уже не физики, а специфической области знания, которую по аналогии с математикой можно было бы назвать "метафизикой" или, более традиционно, – "основаниями физики", привёл меня в 1968 году к созданию Теории физических структур [10], [11].



Игорь Евгеньевич Тамм на семинаре

Литература к главе 1

[1] *Расул Гамзатов.* Стихотворения и поэмы. – М.: “Молодая гвардия”, 1992, С. 127.

[2] *Герт Айленбергер.* Свобода, наука и эстетика. //Х.О.Пайтген, П.Х.Рихтер. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: “Мир”, 1993. С. 155.

[3] Воспоминания о И.Е.Тамме. -М.: Наука, 1981. 296 с.

[4] *Кулаков Ю.И.* Еретические горизонты физика // Вопросы истории естествознания и техники. № 4, 1996, С. 165 – 167.

[5] *Кулаков Ю. И.* К теории физических структур. Новосибирск. НГУ. 1968. 29с.

[6] *Кулаков Ю. И.* Элементы теории физических структур. Дополнение Г. Г. Михайличенко. Новосибирск, 1968. 227 с.

[7] *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М. 1963. с. 252.

[8] *Румер Ю. Б., Фет А. И.* Теория унитарной симметрии. М. 1970. с. 7–8.

[9] *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М. 1963. с. 246.

[10] *Кулаков Ю.И.* О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа //Доклады АН СССР, т. 201, 1971, No.3, С. 570-572. (Представлена акад. Беляевым 12 мая 1969)

[11] *Kulakov Ju.I., Protosiewich T.I.* Phenomenological Symmetry and the Foundation of Physics // International Logic Review (Italy). 1973, n. 7. pp. 98–101.

Глава 2.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Omne initium difficile est [14]

Задача обновления и совершенствования понятийного аппарата современной физики оказалась очень трудной – как со стороны её "математичекого обеспечения", так, по–видимому, и со стороны её методологического осмысления. Дело в том, что революция в физике оказывается плодотворной только тогда, когда она позволяет выявить тот конкретный математический аппарат, с помощью которого можно сформулировать основные наиболее глубокие закономерности новой области действительности [1].

— И.А.Акчурин

§ 1. Отношения – важнейшая особенность Мироздания.

§ 2. Примеры возможных отношений между физическими объектами.

§ 3. Репрезентатор, корт, ранг.

§ 4. Предварительное определение физической структуры ранга (s, r).

§ 5. Сакрально-инвариантная, тождественно истинная формула.

§ 6. Сакральное уравнение ранга (s, r).

§ 7. Постановка задачи и первое решение.

§ 8. Полное решение задачи Г.Г. Михайличенко.

[14]Всякое начало трудно.

§ 1. Отношения – важнейшая особенность Мироздания.

Важной особенностью нашего Мира является

- дискретное строение вещества и
- наличие *фундаментальных физических законов*, представляющих собой определённый вид так называемых **сакральных отношений.**

Первое обстоятельство было обнаружено как гениальная догадка ещё в античные времена (*атомистическая гипотеза*, высказанная Левкиппом ($\sim$ 500 - 440 до н.э.) и его учеником Демокритом (460 - 370 до н.э.) и блестяще подтверждено современной физикой.

Что же касается второго, то насколько мне известно, никто ранее не обращал на это обстоятельство внимания, так как само понятие **сакральные отношения** возникло лишь в рамках Теории физических структур.

В отличие от всех других физических теорий, объектом изучения которых являются те или иные конкретные классы, на которые разбиты все физические объекты:

- движущиеся материальные тела (механика);
- сплошные среды (гидро- и газодинамика, теория упругости);
- макроскопические системы, находящиеся в состоянии термодинамического равновесия (термодинамика);
- макроскопические системы, состоящие из очень большого числа частиц (статистическая физика);
- электромагнитное поле (электродинамика);
- гравитационное поле (теория тяготения);
- квантово-механические системы (квантовая механика);
- оптические среды (геометрическая оптика);
- диэлектрики, металлы, полупроводники, сверхпроводники, ферромагнетики (теория твёрдого тела и т.п.);
- молекулы, атомы, нуклиды (молекулярная, атомная, ядерная физики)
- элементарные частицы (теория элементарных частиц) и т. п.,

объектом изучения **Теории физических структур** являются специальные, но достаточно широкие, классы **сакральных отношений**.

Как уже отмечалось выше, особенностью нашего Мира является то, что весь он пронизан отношениями. Всё связано со всем, все находятся в тех или иных отношениях со всеми. В основании Мира, наряду с элементарными частицами, лежат фундаментальные физические законы.

Но закон — это и есть устойчивый тип сакральных отношений.

Итак, весь Мир существует постольку, поскольку существуют отношения. Именно сакральные отношения являются тем ключевым понятием, которое лежит в основании Теории физических структур.

§ 2. Примеры возможных отношений между физическими объектами

Так в определённых отношениях между собой находятся

- ♢ точки на прямой;
- ♢ точки на плоскости и на сфере;
- ♢ точки в трёхмерном евклидовом пространстве;
- ♢ события, происходящие в одной и той же точке;
- ♢ события, происходящие в разных точках в одной и той же системе отсчёта;
- ♢ ускоряемые тела и акселераторы (ускорители);
- ♢ проводники и источники постоянного тока;
- ♢ произвольные физические объекты и соответствующие физические объекты, принятые за эталон;
- ♢ различные термодинамические состояния одного и того же термодинамического тела;
- ♢ различные состояния одной и той же квантово-механической системы;
- ♢ заряженные тела и источники электростатического поля;
- ♢ электрические токи и источники магнитного поля;
- ♢ линзы и точечные источники света и т. п.

С другой стороны, существуют отношения иного типа. Например, отношения между

- ♡ родителями и детьми;
- ♡ учителем и учеником;
- ♡ продавцом и покупателем;
- ♡ предпринимателем и наёмным рабочим;
- ♡ мужчиной и женщиной;

или отношения между

- ♡ людьми, принадлежащими к одному сообществу;
- ♡ людьми и природой;
- ♡ религиозными конфессиями;
- ♡ странами и т.п.

Принципиальное отличие отношений типа ♢ от отношений типа ♡ состоит в том, что только в первом случае отношение между двумя элементами характеризуется либо вещественным, либо комплексным числом, в то время как в случае отношений типа ♡ в принципе нельзя указать множество, элементы которого характеризовали бы эти отношения.

В первом случае отношения между двумя элементами характеризуются, как правило, вещественными числами, представляющими собой результаты соответствующей измерительной операции. Так, например:

$\diamondsuit$ отношение между двумя точками i и k, лежащими на прямой, на плоскости, в трёхмерном евклидовом пространстве, характеризуется квадратом расстояния между ними l_{ik}^2;

$\diamondsuit$ отношение между двумя точками i и k, лежащими на поверхности сферы, характеризуется расстоянием между ними λ_{ik}, измеренным вдоль поверхности сферы;

$\diamondsuit$ отношение между двумя событиями i и k, происходящими в одной и той же точке, характеризуется квадратом промежутка времени между этими событиями t_{ik}^2;

$\diamondsuit$ отношение между двумя событиями i и k, происходящими в различных точках одной и той же системы отсчёта, характеризуется **двумя** числами – квадратом промежутка времени между этими событиями $X = t_{ik}^2$ и квадратом расстояния между ними $Y = l_{ik}^2$;

$\diamondsuit$ отношение между ускоряемым телом i и акселератором (ускорителем) α характеризуется ускорением $a_{\alpha i}$, которое приобретает это тело при действии на него акселератора α;

$\diamondsuit$ отношение между проводником i и источником тока α характеризуется силой тока $\Im_{i\alpha}$, протекающего через этот проводник i при подключении к нему источника тока α;

$\diamondsuit$ отношение между двумя термодинамическими состояниями i и k одного и того же термодинамического тела характеризуется работой $A^{TS}(ik)$, совершаемой системой при переходе из начального состояния i в промежуточное состояние p по изотерме, а затем при переходе из состояния p в конечное состояние k по адиабате;

$\diamondsuit$ отношение между двумя состояниями i и k одной и той же квантово-механической системы характеризуется комплексной *амплитудой вероятности* $\langle i \mid k \rangle$, равной скалярному произведению *кет*-вектора состояния $\mid k \rangle$ на *бра*-вектор состояния $\langle i \mid$;

$\diamondsuit$ отношение между заряженным телом i и источником электростатического поля α характеризуется силой $f_{i\alpha}$, с которой поле, создаваемое источником α, действует на тело i;

$\diamondsuit$ отношение между контуром i, по которому течёт электрический ток, и источником магнитного поля α характеризуется моментом силы $M_{i\alpha}$, с которой магнитное поле, создаваемое источником α, действует на контур i;

§ 3. Репрезентатор, корт, ранг

Вообще говоря, Теория физических структур имеет дело с двумя множествами физических объектов различной природы:

$$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta \ldots\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} = \{i, k \ldots\},$$

Отношения между двумя физическими объектами α и i характеризуются числовой функцией двух нечисловых переменных:

$$\varphi : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \quad (\text{или } \mathbb{C})$$

$$(\alpha,\, i) \longmapsto \varphi_{\alpha i},$$

которая называется **репрезентатором** (от фр. représentant – представитель).

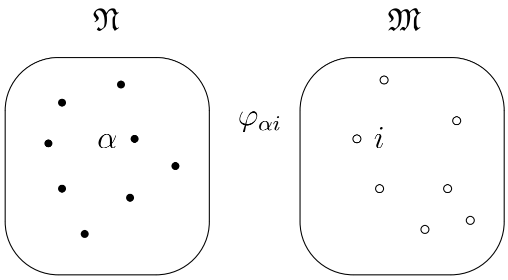


Рис. 1. Отношение между двумя физическими объектами α и i характеризуется репрезентатором $\varphi_{\alpha i}$.

В частности, если α и i – векторы, то репрезентатор $\varphi_{\alpha i}$ имеет смысл *скалярного произведения двух векторов;*

если же α и i – точки евклидова пространства, то $\varphi_{\alpha i}$ имеет смысл *квадрата расстояния между ними*[15].

Подобно тому как *слово* является центральным понятием языка, и подобно тому как *четыре нуклеотида* — аденин(А), тимин(Т), гуанин(Г) и цитозин(Ц) являются первичными понятиями генетики, так и **корт** является главным понятием Теории физических структур.

Сам термин “корт" ведёт своё начало от слова “кортеж" как его сокращенная форма.

[15]Употребляемый Ю.С.Владимировым [2], [3] вместо введённого мною термина “репрезентатор”, новый термин “парное отношение” является, на мой взгляд, вдвойне неудачным:

во-первых, потому, что, строго говоря, численная величина $\varphi_{i\alpha}$ является числовой *функцией* двух нечисловых переменных i и α , а не *отношением* между i и α в строго математическом смысле этого слова [4], [5];

во-вторых, потому, что фраза – “отношение между двумя физическими объектами i и α характеризуется парным отношением $\varphi_{i\alpha}$ ” очень напоминает словосочетание “масло масляное”.

Понятие кортежа несколько менее популярно, нежели понятие множества, но почти столь же фундаментально [6]. Так же, как понятие множества, оно заимствовано из опыта, хотя формально это понятие, правда, весьма искусственно, можно определить через понятие множества [4].

Итак, под **кортом** мы будем понимать конечную последовательность или конечный упорядоченный набор элементов, взятых из какого-либо множества:

$$A_s = \langle \alpha_1 \dots \alpha_s \,| \in \mathfrak{N}^s$$

$$I_r = |\, i_1 \dots i_r \,\rangle \in \mathfrak{M}^r.$$

Целые натуральные числа $s = 1, 2, \dots$ и $r = 1, 2, \dots,$ равные числу элементов в соответствующем корте, называются **рангами** кортов.

В отличие от традиционной теоретической физики, где рассматриваются лишь отношения между отдельными физическими объектами α и i, в Теории физических структур рассматриваются **отношения между кортами.**

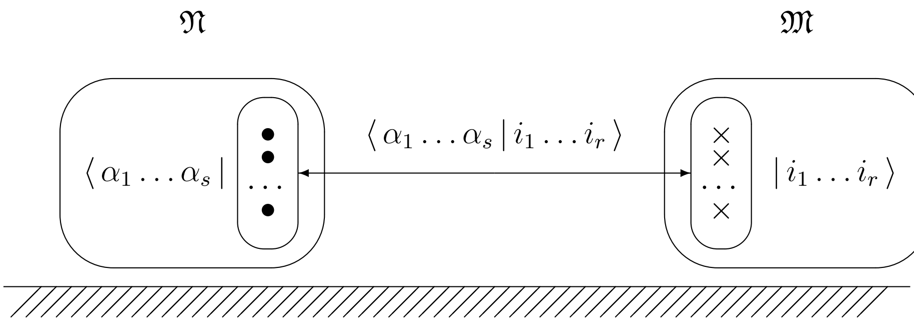


Рис. 2. Верификатор $\langle\, \alpha_1 \dots \alpha_s \,|\, i_1 \dots i_r \,\rangle$, характеризующий отношения между двумя кортами $\langle\, \alpha_1 \dots \alpha_s \,|$ и $|\, i_1 \dots i_r \,\rangle$.

Заметим, что, строго говоря, фундаментальный физический закон в принципе не может быть сформулирован в терминах отдельных физических объектов. Дело в том, что глубинное содержание любого фундаментального закона состоит в существовании особых *сакральных отношений* между соответствующими кортами.

Отношение между двумя кортами $\langle\, \alpha_1 \dots \alpha_s \,|$ и $|\, i_1 \dots i_r \,\rangle$ характеризуется числовой функцией, называемой **верификатором** $\langle \alpha_1 \dots \alpha_s \,|\, i_1 \dots i_r \rangle$ (См. рис.2).

Сакральные отношения между двумя кортами $\langle\, \alpha_1 \dots \alpha_s \,|$ и $|\, i_1 \dots i_r \rangle$ сводятся к $s\,r$ попарным отношениям между элементами $\alpha_1 \dots \alpha_s$ с одной стороны и элементами $i_1 \dots i_r$ – с другой, то есть выражаются через $s\,r$ репрезентаторов

$$\begin{gathered} \varphi_{\alpha_1 i_1}, \dots, \varphi_{\alpha_1 i_r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{\alpha_s i_1}, \dots, \varphi_{\alpha_s i_r} \end{gathered}$$

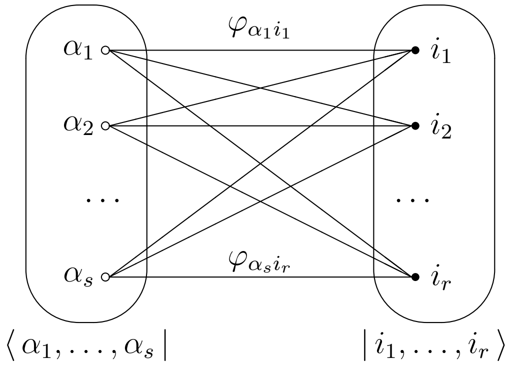


Рис. 3. Сведе́ние отношений между кортами $\langle\, \alpha_1 \dots \alpha_s \,|$ и $|\, i_1 \dots i_r \,\rangle$ к попарным отношениям между элементами $\alpha_1 \dots \alpha_s$ и $i_1 \dots i_r$.

с помощью **верификатора ранга (s, r)** – вещественнозначной, заранее неизвестной функции $s\,r$ вещественных переменных (См. рис. 3)

$$\begin{array}{l}\Phi(u_{11}, \dots, u_{1r},\\ \quad \dots\dots\dots\dots\\ \quad u_{s1}, \dots, u_{sr}).\end{array}$$

Суперпозиция двух заранее неизвестных функций – репрезентатора и верификатора – приводит к удивительному явлению – “самопроизвольному” возникновению линейных и дробнолинейных структур – прообразов фундаментальных законов физики и геометрии.

Более подробно это выглядит следующим образом: Зададим два целых натуральных числа $s, r = 1, 2, \dots$ и рассмотрим две произвольные функции – **верификатор** (числовая функция $s\,r$ числовых двухиндексных переменных)

$$\begin{array}{l}\Phi(u_{11}, \dots, u_{1r},\\ \quad \dots\dots\dots\dots\\ \quad u_{s1}, \dots, u_{sr}).\end{array}$$

и **репрезентатор** (числовая функция двух нечисловых переменных)

$$\varphi(\alpha, i)$$

Если подставить $s\,r$ значений

$$\begin{array}{ccc}\varphi(\alpha_1, i_1) & \dots & \varphi(\alpha_1, i_r)\\ \dots & \dots & \dots\\ \varphi(\alpha_s, i_1) & \dots & \varphi(\alpha_s, i_r)\end{array}$$

одного и того же репрезентатора $\varphi(\alpha, i)$ в произвольный верификатор Φ, то в итоге получим некоторую числовую функцию $s + r$ нечисловых переменных

$$\begin{array}{l}\Phi\{\varphi(\alpha_1, i_1) \quad \dots \quad \varphi(\alpha_1, i_r)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \quad \varphi(\alpha_s, i_1) \quad \dots \quad \varphi(\alpha_s, i_r)\}\end{array} = \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_s; i_1, \dots, i_r)$$

Утверждается (theorema egregium[16] Михайличенко[8]), что, если потребовать, чтобы непрерывная, достаточно гладкая функция Ψ оставалась бы тождественно равной нулю при любом выборе нечисловых переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и $i_1, \ldots, i_r$, то при некоторых значениях s и r из "хаоса" произвольных функций φ и Φ возникают упорядоченные линейные или дробно-линейные структуры.

§ 4. Предварительное определение физической структуры ранга (s, r).

Итак, мы подошли к ключевому понятию Теории физических структур.

Мы будем говорить, что на двух множествах $\mathfrak{N} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ и $\mathfrak{M} = \{i_1, i_2, \ldots\}$ имеет место **физическая структура ранга (s, r)**, если при произвольном выборе двух кортов ранга s и r $A_s = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \,| \in \mathfrak{N}^s$ и $I_r = |\, i_1, \ldots, i_r \rangle \in \mathfrak{M}^r$, существуют такие две функции – репрезентатор $\varphi_{\alpha i}$ – числовая функция двух нечисловых переменных и верификатор Φ – непрерывная, достаточно гладкая числовая функция sr числовых переменных

$$\begin{array}{l}\Phi(u_{11}, \ldots, u_{1r}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad u_{s1}, \ldots, u_{sr})\ ,\end{array}$$

что имеет место следующее сакрально-инвариантное тождество:

$$\begin{array}{l}\Phi(\varphi_{\alpha_1 i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_1 i_r}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \varphi_{\alpha_s i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_s i_r})\ \equiv 0.\end{array}$$

Предварительный характер такого определения физической структуры состоит в том, что здесь ничего не говорится о структуре множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ и не указана область определения репрезентатора $\varphi_{\alpha i}$. Это будет сделано позже в соответствующем месте.

§ 5. Сакрально-инвариантная тождественно истинная формула.

Итак, самой важной содержательной догадкой, положенной в основание всей Теории физических структур, является утверждение, что все **фундаментальные законы физики и геометрии** содержатся "в закодированном виде" в сакрально-инвариантной тождественно истинной[17] формуле:

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathfrak{N}; \quad \forall i_1, \ldots, i_r \in \mathfrak{M}$$

[16] блистательная теорема

[17] В логике тождественно истинной или общезначимой формулой (тавтологией) называется формула, принимающая значение "истина" при любых истинностных значениях предикатных и пропозициональных переменных. Например $\forall A, B$ имеются следующие тавтологии: $A \supset A$ или $A \vee \neg A$ или $(A \vee A) \vee (\neg B \vee \neg A)$. Всякая тождественно истинная формула выражает **логический закон**.

$$
\begin{aligned}
\Phi(&\varphi_{\alpha_1,i_1},\dots,\varphi_{\alpha_1,i_r},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_{\alpha_s,i_1},\dots,\varphi_{\alpha_s,i_r}) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Можно показать (мне удалось это сделать ещё в 1968 году), что репрезентатор $\varphi_{\alpha i}$, представляющий собой некоторую заранее неизвестную функцию двух нечисловых переменных α и i, может быть сведён к другой неизвестной достаточно гладкой функции $(r-1)+(s-1)$ числовых переменных

$$\varphi_{\alpha i} = \varphi(\xi_1(\alpha),\dots,\xi_{r-1}(\alpha); x^1(i),\dots,x^{s-1}(i)).$$

В результате сакрально-инвариантное тождество (1) превращается в сакральное уравнение

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\Phi(&\varphi(\alpha_1,i_1),\dots,\varphi(\alpha_1,i_r),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi(\alpha_s,i_1),\dots,\varphi(\alpha_s,i_r)) \equiv 0
\end{aligned}
} \tag{2}
$$

относительно двух неизвестных достаточно гладких функций:

репрезентатора

$$\varphi(\alpha,i) = \varphi(\xi_1(\alpha),\dots,\xi_n(\alpha); x^1(i),\dots,x^m(i)),$$

$$\text{где} \qquad n = r-1 \qquad m = s-1$$

и верификатора

$$
\begin{aligned}
\Phi\ (&u_{11}, \ \dots, \ u_{1r},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&u_{s1}, \ \dots, \ u_{sr}),
\end{aligned}
$$

§ 6. Сакральное уравнение ранга (s, r) .

Аксиоматика Теории физических структур в конечном итоге сводится к специальному функциональному уравнению неизвестного ранее вида – к **сакральному уравнению ранга** $(s,\, r)$.

Сакральное уравнение (2), возникшее в рамках Теории физических структур в результате требования **сакральной симметрии**, лежит в са́мом Начале Мироздания, так как именно из него получаются фундаментальные законы физики и геометрии как его единственно возможные решения.

Особенность такого сакрального уравнения по сравнению со всеми другими известными уравнениями состоит в наличии **двух неизвестных функций**:

одной функции $s\,r$ **числовых** переменных

$$
\begin{aligned}
\Phi\ (\ &u_{11}, \ \dots \ , u_{1r},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&u_{s1}, \ \dots \ , u_{sr}\ )
\end{aligned}
$$

и одной функции $n + m$ **нечисловых** переменных

$$\varphi(\alpha, i) = \varphi\ (\xi_1(\alpha), \ldots, \xi_n(\alpha)\, ;\, x^1(i), \ldots, x^m(i))$$

и в **отсутствии в этом уравнении каких-либо вносимых извне операций и произвольных параметров или функций**.

Его характерной особенностью является предельная простота и самодостаточность.

Действительно, в этом уравнении нет ничего лишнего, вносимого извне "руками". Несмотря на предельную общность, это уравнение допускает, в строго определённом смысле, единственные допустимые решения, из которых естественным образом возникают фундаментальные законы, лежащие в основании физики и геометрии.

Даже ранг $(s,\, r)$ и области определения репрезентатора $\varphi(\alpha, i)$ и верификатора Φ не задаются заранее, а находятся в ходе решения.

Всё разнообразие такого рода уравнений определяется заданием двух пар натуральных чисел – ранга (s, r) и размерности $[n, m]$, связанных между собой следующими соотношениями:

$$n \;=\; r - 1$$

$$m \;=\; s - 1$$

Другой особенностью сакральных уравнений является **существование и единственность очень простых решений** при одних значениях (s, r) и **невозможность существования каких-либо решений** при других значениях (s, r).

Не об этой ли формуле мечтал Планк, когда писал: "С давних времён, с тех пор, как существует изучение природы, оно имело перед собой в качестве идеала, конечную, высшую задачу: объединить пёстрое многообразие физических явлений в единую систему, а если возможно, то в одну-единственную формулу" [9].

Simplex sigillum veri (Простота – печать истины) – это девиз, начертанный на стене физической аудитории Гёттингенского университета.

По большому "гамбургскому" счёту Теория физических структур удовлетворяет высшему критерию Простоты, как в случае знаменитой Теоремы Ферма, проста постановка задачи, прост окончательный ответ.

Что же касается самого́ решения, полученного моим бывшим аспирантом, а ныне доктором физико-математических наук Геннадием Григорьевичем Михайличенко, то оно по трудности может быть сравнимо лишь с покорением восьмитысячника – с заветной мечтой каждого Мастера спорта по альпинизму.

§ 7. Постановка задачи и первое решение.

Задача, поставленная мною в общем виде ещё в 1967 году, состояла в следующем:

Найти для всех рангов (s, r) *все возможные решения функционального уравнения* (2), *то есть найти невырожденные репрезентатор* $\varphi(\alpha, i)$ *и верификатор* Φ , *обращающие соотношение* (2) *в тождественный ноль относительно всех* $s(r-1) + r(s-1)$

$$\begin{array}{ccc} \xi_1(\alpha_1)\ \dots\ \xi_{r-1}(\alpha_1) & \qquad & x^1(i_1)\ \dots\ x^{s-1}(i_1) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ \xi_1(\alpha_s)\ \dots\ \xi_{r-1}(\alpha_s) & & x^1(i_r)\ \dots\ x^{s-1}(i_r) \end{array}$$

переменных.

В случае ранга (2,2) – простейшем нетривиальном случае, задача состояла в том, чтобы найти две функции

$$\varphi(\xi; x)$$

и

$$\Phi\ \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, \\ u_{21}, & u_{22} \end{pmatrix},$$

такие, чтобы при любых ξ, η; x, y имело место следующее тождество:

$$\Phi\ \Big(\begin{matrix} \varphi(\xi, x), & \varphi(\xi, y), \\ \varphi(\eta, x), & \varphi(\eta, y) \end{matrix}\Big) \equiv 0.$$

Эта задача была впервые решена мною в 1967 году [10], [11].

Оказалось, что с точностью до несущественных переобозначений имеется два решения:

аддитивное

$$\Phi_1\ \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, \\ u_{21}, & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & u_{11} & u_{12} \\ -1 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11} + u_{22} - u_{12} - u_{21}$$

$$\varphi_1(\xi, x) = \xi + x$$

и *мультипликативное*

$$\Phi_2\ \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, \\ u_{21}, & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}$$

$$\varphi_2(\xi, x) = \xi\ x.$$

§ 8. Полное решение задачи Г.Г. Михайличенко.

Итак, полное доказательство существования и единственности физических структур при специальных значениях ранга (s, r) было впервые блестяще осуществлено Геннадием Григорьевичем Михайличенко, (ныне доктор физ.-мат. наук, профессор Горно-Алтайского университета), использовавшим для этой цели разработанный им “функциональный метод”.

Вслед за ним Владимир Хананович Лев (ныне старший научный сотрудник Института ядерной физики СОРАН) получил те же самые результаты, применив иной – “параметрический метод” [12].

Строгое доказательство существования и единственности физических структур при специально выбранном ранге (s, r) явилось темой кандидатской диссертации Г.Г. Михайличенко “Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона” [7] и изложено им в отдельно изданной монографии “Математический аппарат теории физических структур” [8].

Теорема Михайличенко:

Сакральные уравнения Теории физических структур (2) *имеют отличные от нуля решения только в случае следующих рангов:*

$$
\begin{array}{rl}
(r,r) & \text{— \textit{два семейства решений} } \Phi^{(1)}_{r,r} \text{ и } \Phi^{(2)}_{r,r} \\
(r,r+1) & \text{— \textit{одно семейство решений} } \Phi_{r,r+1} \\
(r+1,r) & \text{— \textit{одно семейство решений} } \Phi_{r+1,r}, \ \text{\textit{где} } r = 1, 2, \ldots \\
(2,4) & \text{— \textit{одно единственное решение} } \Phi_{2,4} \\
(4,2) & \text{— \textit{одно единственное решение} } \Phi_{4,2}
\end{array}
$$

Всё это похоже на чудо, подобное сотворению Вселенной “из ничего”, когда из весьма общего функционального уравнения (2), связывающего между собой две неизвестные функции φ и Φ, как бы сами собой возникают

- допустимые значения ранга (s, r),
- верификатор Φ и
- репрезентатор φ,

имеющие, как мы увидим в дальнейшем, простой геометрический и физический смысл, и определяющие в конечном итоге вид всех известных (и ещё неизвестных) фундаментальных физических законов.

Этот удивительный математический факт можно истолковать как факт объективного существования **физических структур** – прообразов фундаментальных законов, лежащих в основании физики и геометрии.

Возникающие при этом, как бы из ничего, четыре семейства регулярных физических структур рода

$$\overset{n+1}{\boldsymbol{K}}{}^{00}(\overset{n}{\boldsymbol{a}}) \equiv \boldsymbol{0}; \qquad \overset{n+1}{\boldsymbol{K}}{}^{01}(\overset{n}{\boldsymbol{u}}) \equiv \boldsymbol{0}; \qquad \overset{n+1}{\boldsymbol{K}}{}^{10}(\overset{n}{\boldsymbol{v}}) \equiv \boldsymbol{0}; \qquad \overset{n+1}{\boldsymbol{K}}{}^{11}(\overset{n}{\boldsymbol{w}}) \equiv \boldsymbol{0}$$

и две спорадические физические структуры Михайличенко

$$\overset{2}{\boldsymbol{M}}{}^{02}(\overset{1}{\boldsymbol{p}}) \equiv \boldsymbol{0} \qquad \overset{2}{\boldsymbol{M}}{}^{20}(\overset{1}{\boldsymbol{q}}) \equiv \boldsymbol{0}$$

являются единственно возможными сакральными законами, лежащими в основании физики и геометрии.

Таким образом, Теория физических структур позволяет установить соответствие между свойствами идеальных объектов Мира Высшей реальности и фундаментальными законами в мире эмпирической действительности.

Однако, объединяющая мощь Теории физических структур, за редким исключением, специалистов интересует меньше чем неспециалистов.

Нечто подобное мы имеем в биологии, когда огромное разнообразие растений и животных втискивается в одну и ту же универсальную программу:

все живые организмы состоят из клеток,

каждая клетка содержит в себе ядро,

ядро содержит хромосомы,

хромосомы состоят из биополимерных молекул ДНК,

содержащих очень длинную линейную последовательность, состоящую, в случае любых живых организмов, из одних и тех же букв: А (аденин), Г (гуанин), Ц (цитозин) и Т (тимин).

Новосибирский государственный университет,

где создавалась Теория физических структур

Литература к главе 2

[1] *И.А Акчурин* Единство естественно-научного знания. - М.; Наука, 1974, С. 60 - 61.

[2] *Владимиров Ю.С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. - М.: Изд-во МГУ, 1996. - 262 с.

[3] *Владимиров Ю.С.* Пространство-время и электрослабые взаимодействия в бинарной геометрофизике. //Gravitation and Cosmology. Vol. 1 (1995). No. 2, - p. 1 - 7.

[4] *Шиханович Ю. А.* Введение в современную математику. — М.: Наука, 1965, с. 23–24, с. 233–297.

[5] Математическая энциклопедия, Т. 4. - М.: Советская энциклопедия, 1984. - С. 151.

[6] Математическая энциклопедия, Т. 3. - М.: Советская энциклопедия, 1982. - С. 31.

[7] *Михайличенко Г.Г.*"Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона". Дисс.канд. ф.м.н. Новосибирск, НГУ, 1973.

[8] *Михайличенко Г.Г.* Математический аппарат теории физических структур. - Горно-Алтайск.: Изд-во ГАГУ, 1997. - С. 143.

[9] *Макс Планк.* Единство физической картины мира, М., "Наука", 1966, стр. 23.

[10] *Кулаков Ю.И.* Математическая формулировка теории физических структур.//Сиб. мат. журн. 1971. Т.12, № 5. - С. 1142-1144.

[11] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. /Дополнение Г.Г.Михайличенко. Новосибирск. Изд-во Новосибирского университета, 1968. 228 с.

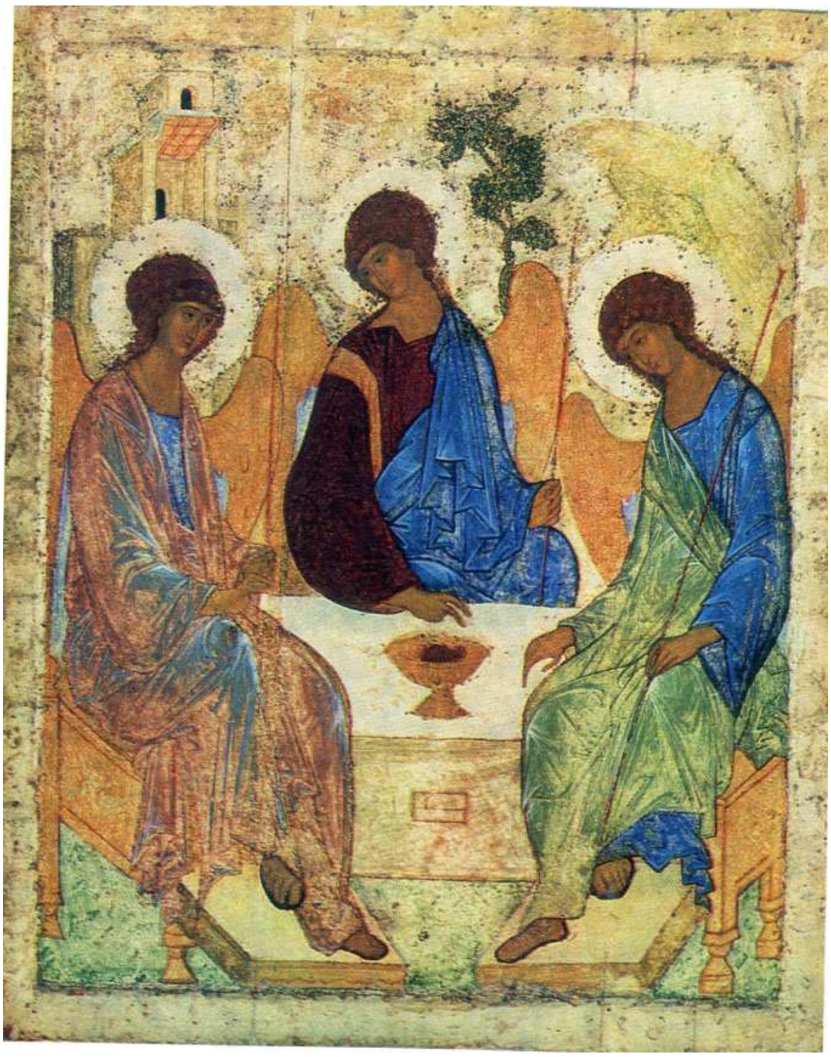
[12] *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3). //Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. - Новосибирск.: Институт математики СОАН СССР, 1984. С. 91 - 113.

ТФС – дорога, ведущая к Храму

A realibus ad realiora[18]

И предал я сердце моё тому, чтоб исследовать мудростью всё, что делается под небом; это тяжёлое занятие дал Бог сынам человеческим, чтобы они упражнялись в нём.

– Еккл. 1, 13.



[18]От реального к реальнейшему

Нас умиляет, поражает и почти ожигает в произведении Рублёва вовсе не сюжет, не число "три", не чаша за столом и не крилá, а внезапно сдёрнутая перед нами завеса ноуменального мира, и нам, в порядке эстетическом, важно не то, какими средствами достиг иконописец этой обнажённости ноуменального и были ли в чьих-либо других руках те же краски и те же приёмы, – а то, что он воистину передал нам узренное им откровение.

Среди мятущихся обстоятельств времени, среди раздоров, междуусобных распрей, всеобщего одичания и татарских набегов, среди этого глубокого безмирия, растлившего Русь, открылся духовному взору бесконечный, невозмутимый, нерушимый мир, "свышний мир" горнего мира. Вражде и ненависти, царящим в дольнем, противопоставилась взаимная любовь, струящаяся в вечном согласии, в вечной безмолвной беседе, в вечном единстве сфер горних.

Вот этот-то неизъяснимый мир, струящийся широким потоком прямо в душу созерцающего от Троицы Рублёва, эту ничему в мире не равную лазурь – более небесную, чем само земное небо, да, эту воистину пренебесную лазурь, несказáнную мечту протосковавшего о ней Лермонтова, эту невыразимую грацию взаимных склонений, эту премирную тишину безглагольности, эту бесконечную друг перед другом покорность – мы считаем творческим содержанием Троицы.

Человеческая культура, представленная палатами, мир жизни – деревом и земля – скалою, – всё мало и ничтожно пред этим общением неиссякаемой бесконечной любви: всё – лишь около неё, ибо она – своею голубизною, музыкой своей красоты, своим пребыванием выше пола, выше возраста, выше всех земных определений и разделений – есть само небо, есть сама безусловная реальность, есть то истинно лучшее, что выше всего сущего.

Андрей Рублёв воплотил столь же непостижимое, сколь и кристально-твёрдое в непоколебимо-верное вúдение Мира. Но, чтобы увидеть этот Мир, чтобы вобрать в свою душу и в свою кисть это прохладное, живительное веяние духа, нужно было иметь художнику пред собою небесный первообраз, а вокруг себя – земное отображение, – быть в среде духовной, в среде умирённой. Андрей Рублёв питался как художник тем, что дано ему было. И потому не преподобный Андрей Рублёв, духовный внук преподобного Сергия, а сам родоначальник земли Русской – Сергий Рáдонежский должен быть почитаем за истинного творца величайшего из произведений не только русской, но и, конечно, всемирной кисти.

Павел Флоренский. Троице-Сергиева лавра и Россия. –
В кн.: Троице-Сергиева лавра. Сергиев посад, 1919. С. 19-20.

Глава 3.

Что же такое Теория физических структур?

Non multa, sed multum[19].

> *Прогресс науки состоит в установлении взаимосвязей, в настойчивых и изобретательных поисках, доказывающих, что события нашего вечно изменчивого мира — всего лишь отражения немногочисленных общих соотношений, называемых законами. Отыскание общего в частном, вечного в преходящем и составляет задачу научного мышления* [1].
>
> — *Альфред Уайтхед*

§ 1. Многоликая Теория

§ 2. Концепция двух миров

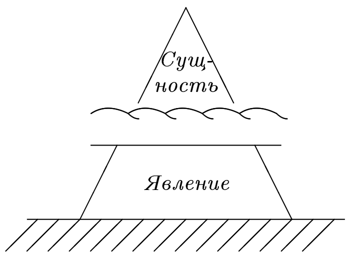
§ 3. Явление и сущность

§ 4. Антропная физика первого поколения

§ 5. Герменевтика – высшая форма знания

§ 6. Сравнительная характеристика ортодоксальной физики и Теории физических структур

§ 7. Теория физических структур – точная постановка, полное и окончательное решение Шестой проблемы Гильберта



[19] Не многое, но много.

§ 1. Многоликая Теория

Теория физических структур не является каким-либо разделом физики, хотя имеет к ней самое непосредственное отношение.

Теория физических структур не является разделом математики, хотя эта книга может оказаться полезной и интересной для профессиональных математиков, так как в ней они смогут найти постановки и методы решения принципиально новых нетривиальных и содержательных задач.

Теория физических структур – это новое научное направление, основная цель которого – опираясь на специально разработанный для этой цели математический аппарат, ответить на вопрос:

– Что скрывается за общепринятыми понятиями, хорошо знакомыми ещё с детства, со школы, с университета, такими как масса и сила, температура и энтропия, энергия, пространство и время, инерциальная система отсчёта, физические законы, атомы, поля и элементарные частицы?

Можно пойти дальше и попытаться распространить это направление на саму математику и опираясь на тот же самый математический аппарат, постараться ответить на аналогичные вопросы:

– Что стоит за такими разделами математики как логика, линейная алгебра и евклидова геометрия, теория групп и теория колец?

– Что скрывается за такими фундаментальными понятиями математики как определитель, производная, элементарные функции, числа e и π, “золотое сечение” $\varepsilon = 1.618...$, аналитическая геометрия?

Итак, на Теорию физических структур можно взглянуть с разных точек зрения:

Теория физических структур как метатеоретическая физика (Универсальный язык современной физики).

Теория физических структур как мост между геометрией, линейной алгеброй и физикой (Единый Принцип сакральной симметрии).

Теория физических структур как общая теория бинарных отношений (Алгебра и анализ двухиндексных переменных).

Теория физических структур как Универсальная теория сакральной симметрии.

Теория физических структур как теория сакрально-функциональных уравнений.

Теория физических структур как теория сакральных инвариантов.

Теория физических структур как прообраз линейной алгебры (аксиомы линейной алгебры как частные следствия из единого Принципа сакральной симметрии).

Теория физических структур как обобщение метрической геометрии на случай двух множеств (метрическая геометрия на множестве “белых” и “чёрных” точек).

Теория физических структур и обобщение понятия “системы координат”.

Теория физических структур как основание глобальных геометрий (евклидовой, псевдоевклидовой, геометрии Римана и геометрии Лобачевского, симплектической и проективной геометрий).

Теория физических структур как основание физики (хронометрии, кинематики, теории относительности, механики Ньютона, лагранжевой и гамильтоновой механик, электродинамики, термодинамики, квантовой механики).

Теория физических структур как геометрическая теория многообразий, обладающих “внутренней сакральной” симметрией.

Теория физических структур и Шестая проблема Гильберта.

Наконец, можно сделать попытку экстраполировать главную идею этого научного направления – поиск единства, за пределы физики и математики и попробовать ответить с единых позиций на “вечные” вопросы:
– Что скрывается за такими понятиями как материя, жизнь, сознание, язык?

Но для того, чтобы понять, что же такое Теория физических структур, и какое место занимает она в иерархии общечеловеческой культуры, необходимо спуститься на несколько ступенек вниз.

Зима. Академгородок

§ 2. Концепция двух миров

С самого начала я исхожу из того, что объективно существующий Мир не исчерпывается миром материальной действительности, миром воспринимаемым нашими органами чувств, даже многократно усиленными современными приборами.

Необходимо признать существование другого, особого, информационно гораздо более ёмкого мира – Мира высшей реальности, тенью которого (в платоновском смысле) и является наша видимая Вселенная.

Итак, исходный Универсум представляет собой единство двух различных форм бытия, тесно связанных между собой:

ненаблюдаемого Мира идеальных сущностей – невидимого мира абстрактных, объективно существующих первообразов и столь же объективно существующих отношений между ними и

наблюдаемого Мира материальной действительности – видимого, вещественного, физического мира, воспринимаемого нашими органами чувств и являющегося объектом эмпирического исследования (См. рис. 1).

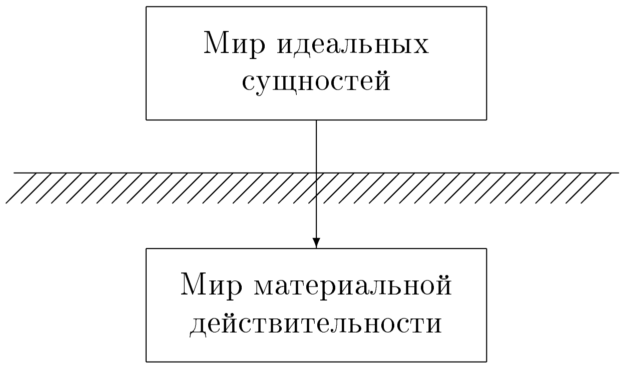


Рис. 1. Первая дихотомия: Мир идеальных сущностей — Мир материальной действительности.

§ 3. Явление и сущность

Под явлением я понимаю частное проявление (выражение) предмета – его эмпирически устанавливаемая, внешняя форма существования.

Под сущностью я понимаю результат перехода от многообразия внешних форм к внутреннему содержанию и единству.

Одна единая сущность проявляется и находит своё выражение во множестве явлений.

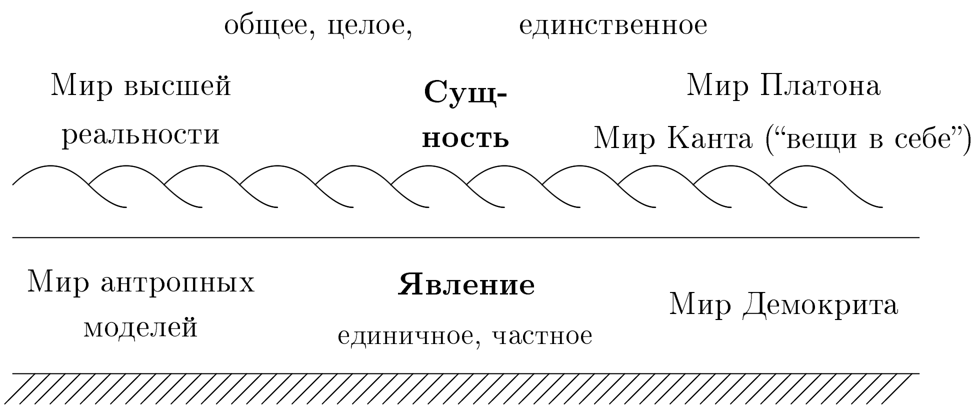


Рис. 2. Вторая дихотомия: Мир сущностей (Мир высшей реальности) — Мир явлений (Мир антропных моделей).

Кант был убеждён, что то, чем вещь является для нас (“феномен”), и то, что она представляет собой на самом деле (“ноумен”) – это принципиально разные характеристики Мира, требующие для своего описания двух разных языков.

§ 4. Антропная физика первого поколения

Антропная физика первого поколения возникла из опыта, и её выводы могут быть проверены на опыте. Более того, именно согласие с опытом является здесь единственным критерием истины.

Возникшая из мира эмпирической действительности, физика первого поколения имеет дело с огромным разнообразием различных явлений и фактов, частных закономерностей и многочисленных моделей, и потому особенно привлекательна для тех физиков, которые обладают сильно развитым левым полушарием головного мозга и страдают из-за этого определённой “близорукостью”. Дело в том, что для подавляющего большинства физиков, обладающих “левополушарным” способом мышления, характерна склонность к изучению деталей, созданию наглядных физических моделей, виртуозная способность решения мелких, хотя и очень сложных и трудоёмких задач. Среди них подавляющее большинство занято решением прикладных задач.

Рис. 3. Ортодоксальная физика (Модельная физика первого поколения).

Под ортодоксальной (модельной физикой первого поколения) – под физикой Ландау – я понимаю следующий набор достаточно автономных и в то же самое время как-то связанных между собой, следующих физических дисциплин, каждая из которых имеет свой объект исследования:

1. Механика, 2. Гидродинамика, 3. Теория упругости, 4. Теория относительности, 5. Теория тяготения, 6. Теория электромагнитного поля, 7. Статистическая физика, 8. Физическая кинетика, 9. Термодинамика, 10. Квантовая механика, 11. Квантовая электродинамика, 12. Физика элементарных частиц, 13. Физика твёрдого тела, 14. Астрофизика.

Характерной особенностью ортодоксальной физики является следующее:

* использование наглядных (антропных) моделей,
* безграничное доверие к дифференциальным уравнениям,
* вычисления и объяснение вместо понимания,
* основная задача – получение численных результатов,
* успех теории определяется согласием с экспериментом; опыт – единственный критерий истины,
* интерес к деталям и к частностям,
* отношение к математике: математика – это лишь удобный инструмент для описания физической реальности,
* вавилонский метод исследования (отсутствие единого исходного принципа),
* нелюбовь к “философии”,
* объектом изучения физики является материальная действительность (кантовская “вещь-для-нас”),
* пренебрежение точными формулировками.

§ 5. Герменевтика – высшая форма знания

В отличие от объяснений в ортодоксальной физике, сводящих любое физическое явление или закон к наглядным (антропным) моделям, понимание идёт дальше; оно выстраивает цепочку понятий до последней общезначимой первопричины неживой природы – до физической структуры.

В свете вышесказанного, герменевтика – это форма знания, в основании которой лежит выявление сущности и смысла, скрытых за очевидными явлениями.

Науке XXI века ещё предстоит создать новые области знания, позволяющие по существу ответить на вопросы:

в чём состоит сущность **необратимых процессов** (в существовании нелинейности? точек бифуркации? управляющих параметров?);

в чём состоит сущность **жизни** (в программе генетического кода?);

в чём состоит сущность **социума и популяции** (в существовании “популяционного гения”? или в существовании ещё неизвестной “популяционной программы”?);

в чём состоит сущность **личности** (в свободе? в творчестве? в откровении?).

Что же касается сущности физических и геометрических законов, то для того, чтобы понять, в чём смысл и сущность основных законов и понятий физики и геометрии, необходимо было создать новую область знания с новыми целями, с новыми задачами, с новым математическим аппаратом – исчислением кортов.

Перед нами стоит необычная задача: **реконструкция физики как единого целого на принципиально новых основаниях** с целью

раскрытия её внутренней простоты, самосогласованности и гармонии;
установления нового взгляда на хорошо известные ещё с детства привычные понятия и законы;

облегчения преподавания физики в средней школе и в университете;

устранения накопившихся в физике мифов;

объединения физики и математики в единую область знания и

установления границы их применимости.

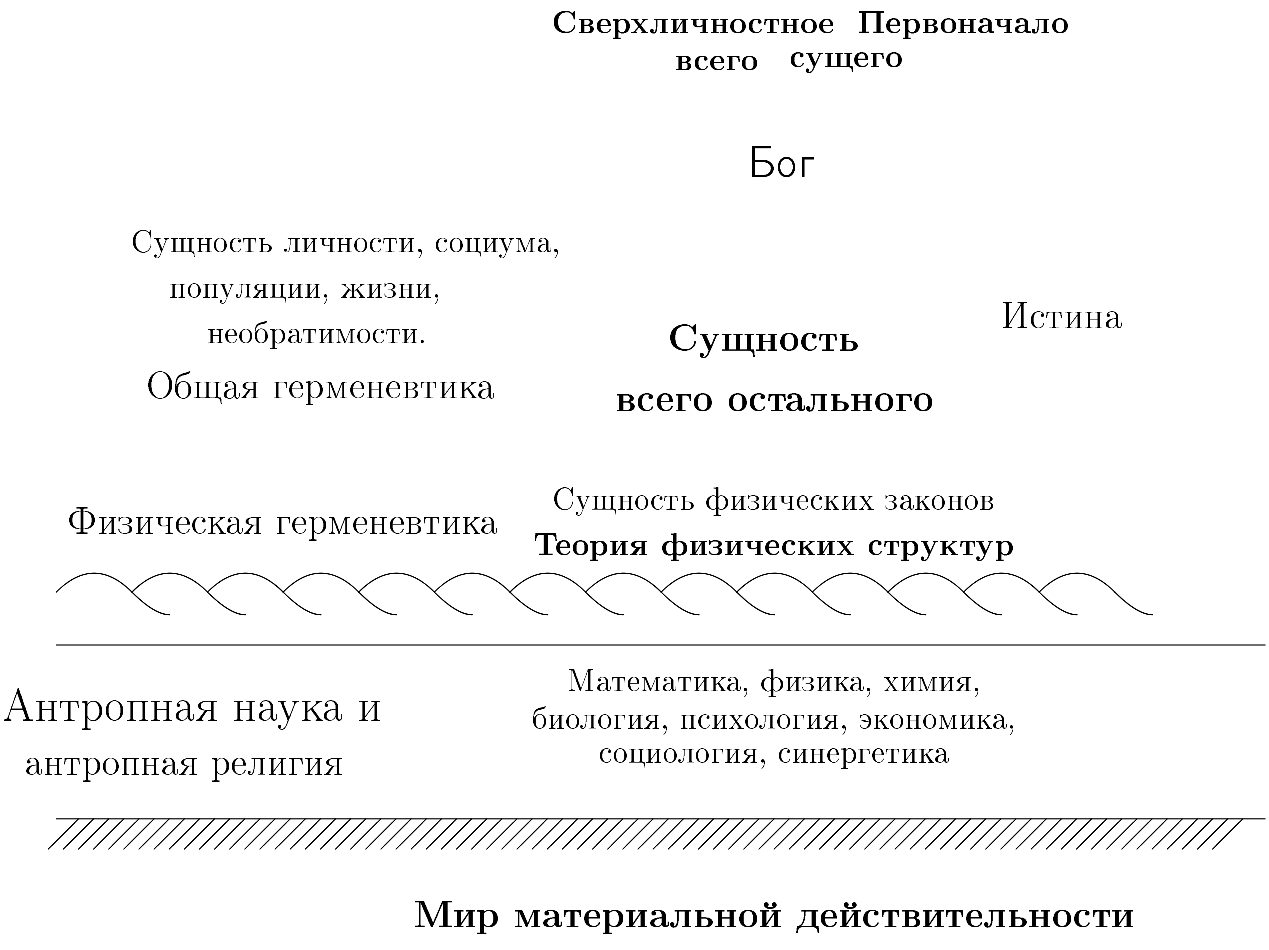


Рис. 4. Место Теории физических структур в Единой системе Мира

§ 6. Сравнительная характеристика ортодоксальной физики и Теории физических структур

Ортодоксальная физика	**Теория физических структур**
Определение	
Ортодоксальная физика – наука о физических **явлениях.**	Теория физических структур или физическая герменевтика – наука о **сущности** физических явлений.
Исходные понятия	
Наглядные (антропные) **модели:** пространство и время, элементарные частицы, взаимодействия.	**Физические структуры** как прообраз универсального **принципа инвариантности** (однородности, равноправия, симметрии).
Ближайшая цель	
Объяснение – это сведе́ние того или иного физического явления к функционированию наглядной модели. Ближайшая цель состоит в том, чтобы объяснить, **как** происходят конкретные явления и предсказать новые эффекты.	**Понимание** – это установление первопричины данного физического явления или прообраза того или иного понятия. Ближайшая цель состоит в том, чтобы понять, **почему** фундаментальные физические законы имеют такой, а не иной вид.
Конечная цель	
Конечная цель состоит в том, чтобы свести всё многообразие физических явлений к свойствам элементарных частиц и полей.	Конечная цель состоит в том, чтобы свести всё многообразие фундаментальных физических законов к первичным физическим структурам.

Характер исследования

Характерной особенностью ортодоксальной физики является **экстенсивный** характер исследований, цель которых состоит в объяснении и предсказании различных конкретных явлений, опираясь на **известные** фундаментальные физические законы.

Характерной особенностью Теории физических структур является **интенсивный** характер исследований, цель которых состоит в **открытии новых** фундаментальных физических законов и понятий, то есть в установлении небольшого числа общих принципов, из которых можно получить как следствия большое число различных физических законов меньшей степени общности.

Главный аспект

Преимущественная точка зрения, с которой рассматриваются в ортодоксальной физике основные явления и понятия, имеет явно выраженный **субстанционально-аналитический** характер, то есть неявно считается, что "свойство целого определяется свойством его частей".

Основная точка зрения, с которой рассматриваются в Теории физических структур различные явления, понятия и законы, имеет явно выраженный **структурно-синтетический** характер, то есть считается, что свойство фундаментального физического закона – это свойство соответствующего **множества** физических объектов, а не свойство самих физических объектов.

Математический аппарат

Аналитический аспект определяет широкое использование **дифференциальных** уравнений относительно неизвестных числовых функций числовых переменных.

Синтетический аспект требует использования особых **сакральных** уравнений относительно двух неизвестных функций: **верификатора** – числовой функции числовых переменных и **репрезентатора** – числовой функции нечисловых переменных.

Типичная постановка задачи (темы дипломных работ и диссертаций)

Исходя из вполне определённой наглядной модели, произвести необходимый расчёт, чтобы найти измеряемую на опыте физическую величину и сравнить её с экспериментом.

Найти прообраз того или иного физического закона или понятия, то есть ответить на вопрос: **в чём сущность** того или иного раздела физики или геометрии, конкретного физического закона или хорошо знакомого ещё с детства понятия (например, что является **прообразом** числа $\boldsymbol{\pi}$, определяющим его **сущность**?).

Отношение к математике

С точки зрения ортодоксального физика математика – это множество придуманных математиками **искусственных** структур, которые непостижимым образом оказываются эффективными при использовании их в качестве моделей реального мира.

С точки зрения Теории физических структур математика – это наука об **объективно существующих** структурах Мира высшей реальности. Математики открывают, а не придумывают их.

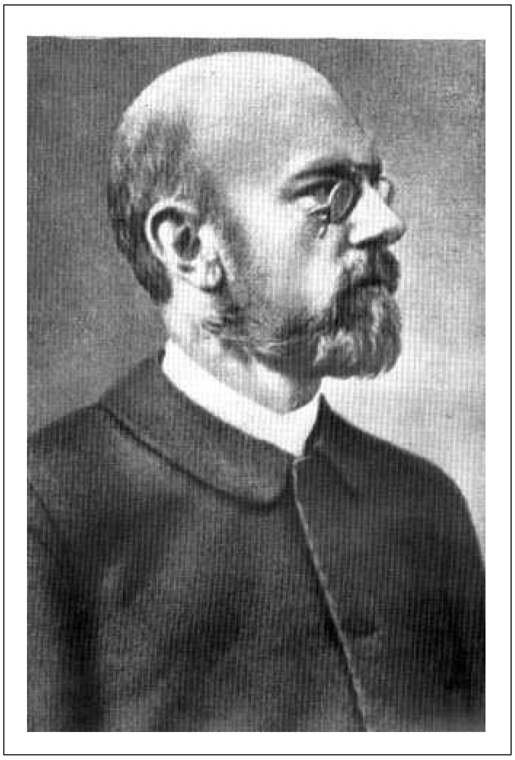
Критерий истины

С точки зрения ортодоксального физика единственным критерием истины является **согласие с опытом.**

С точки зрения Теории физических структур главным критерием истины является, похожая на чудо, **самодостаточность** исходного принципа инвариантности и **самосогласованность** полученных решений, описывающих фундаментальные законы, относящиеся к различным разделам физики и геометрии.

Итак, речь идёт о Теории физических структур как о новой области знания — о физической герменевтике – науке о сущности физических явлений, физических законов и понятий, лежащей на границе физики, математики и философии.

§ 7. Теория физических структур – точная постановка, полное и окончательное решение Шестой проблемы Гильберта



Давид Гильберт (1862 – 1943)

оказал сильное влияние на всю математику и физику XX века.

Надо сказать,что задача перестройки оснований физики была поставлена давно. В 1900 году на Втором Международном математическом конгрессе в Париже Давид Гильберт огласил сформулированный им список двадцати трёх математических проблем. С тех пор большинство из них были решены, причём некоторые совсем недавно.

Однако известная Шестая проблема Гильберта - проблема аксиоматизации теоретической физики:

"Провести построение физических аксиом по образцу аксиом геометрии так, чтобы небольшим количеством аксиом охватить возможно более общий класс физических явлений" – долго оставалась нерешённой.

Дело в том, что для решения этой проблемы недостаточно навести внешний математический лоск на существующие, исторически сложившиеся, нестрогие и просто запутанные формулировки физических теорий. Необходима новая, физически содержательная идея, позволяющая вскрыть за внешним разнообразием и непохожестью различных физических дисциплин глубокую сущность физических законов, и благодаря этому увидеть ту единую, универсальную физическую структуру, которая составляет основание физики как концептуальной системы и которая может и должна быть подвергнута вполне естественной, простой и строгой аксиоматизации.

Таким образом, трудности, возникшие при попытке дать точную формулировку этой проблемы, которая, в отличие от конкретных физических задач, связана с наиболее общими законами, присущими различным физическим теориям, и требует для своего описания совершенно нового формализма, оказались столь велики, а конкретные успехи физики начала XX века столь впечатляющими, что Шестая проблема, поставленная великим математиком, была воспринята многими физиками как лишённая глубокого содержания.

Полным решением Шестой проблемы Гильберта явилось бы создание некоторой метатеоретической физики, которая давала бы возможность:

1. установить на основании опытных данных факт существования первичных фундаментальных законов – физических структур, лежащих в основании физики;

2. понять наличие основных физических величин (декартовых координат, времени, массы, силы, температуры, энтропии, вектор-потенцала электромагнитного поля, ёмкости, индуктивности, электрического сопротивления и т.п.) как результат существования своеобразных "сакральных" инвариантов;

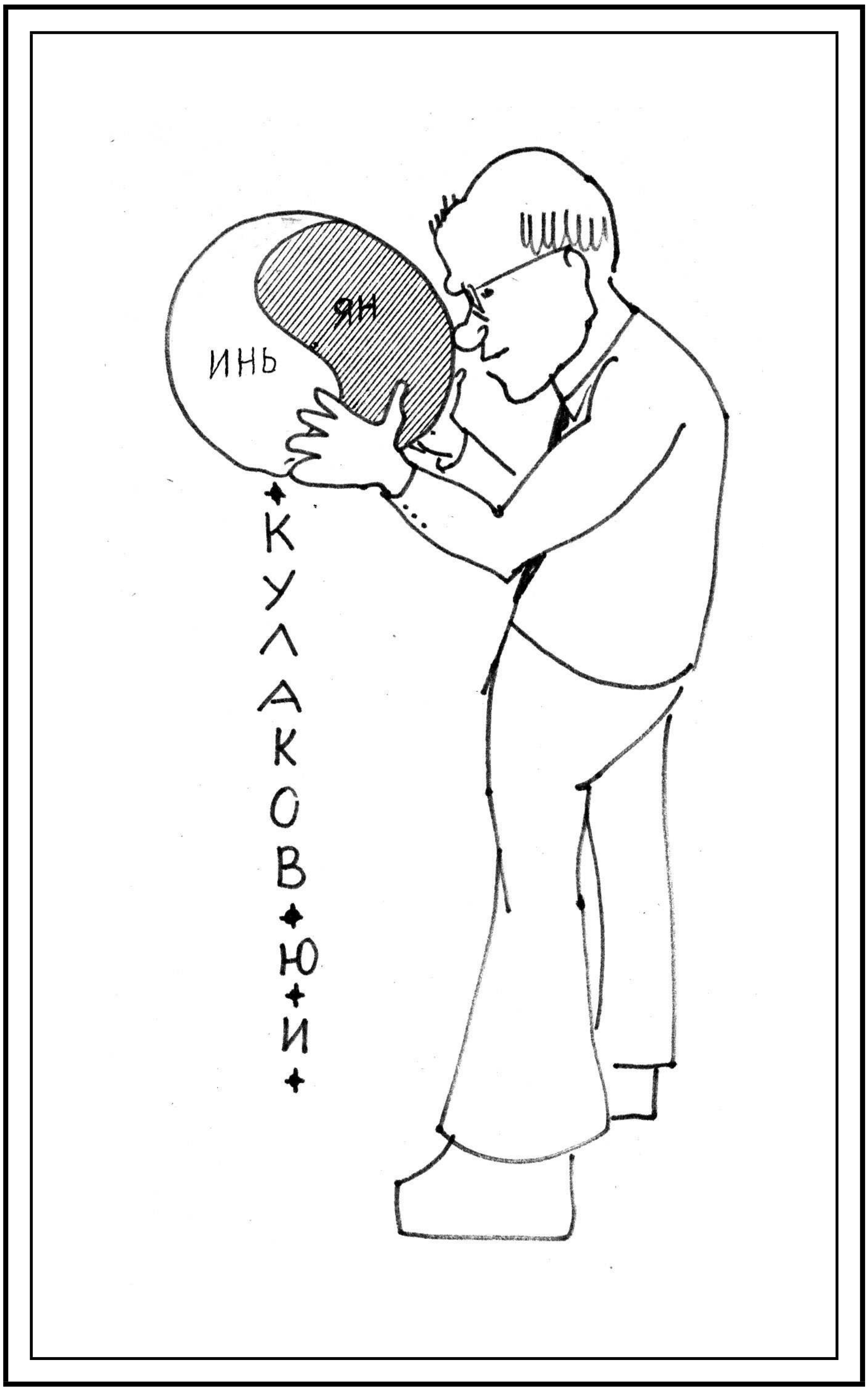
3. установить внутреннюю необходимость и высокую степень однозначности существующих физических теорий;

4. унифицировать и объединить в единое целое – "фундаментальную физику" – до сих пор разрозненные и оторванные друг от друга различные разделы физики;

5. создать "генеральный план физики", на котором каждому разделу теоретической физики было бы отведено своё, вполне определённое место.

Создание Теории физических структур и является полным решением Шестой проблемы Гильберта.

Что же касается непосредственных результатов, вытекающих из теории физических стуктур, то я вижу их, прежде всего, в чувстве глубокого удовлетворения, возникающем при установлении наиболее глубоких законов природы, в возможном содействии преодолению существующих трудностей в современной физике путём выявления новых физических идей, возникающих при всякой новой точке зрения на уже известные факты, и, наконец, в содействии улучшению и совершенствованию самой системы физического образования.



Шарж *Ирины КУЛАКОВОЙ* (12 лет)

Литература к главе 3

[1] *Whitehead A.N.*, An enquiry concerning the principles of natural knowledge (Cambridge University Press, New York, 1919), p.18.

Юрий Владимиров и Юрий Кулаков

Нераздельно и неслиянно

Часть II

ТРИ ПЕРВЫХ ШАГА В МИР ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

In usum profanorum[20]

Каждому, кто хоть когда-нибудь изучал математические теории, знакомо то неприятное чувство, которое охватывает, когда шаг за шагом прослеживаешь всё доказательство и после всех тяжких трудов вдруг осознаёшь, что упустил главную идею, которую автор не подчеркнул либо вследствие неумения ясно выразить свои мысли, либо (что особенно часто встречалось раньше) из-за какого-то непонятного, почти комического кокетства. Помочь этой беде может лишь безграничная честность автора, который не должен бояться давать в руки своих читателей руководящие идеи даже в том случае, если эти идеи несовершенны [1].

— Альберт Эйнштейн

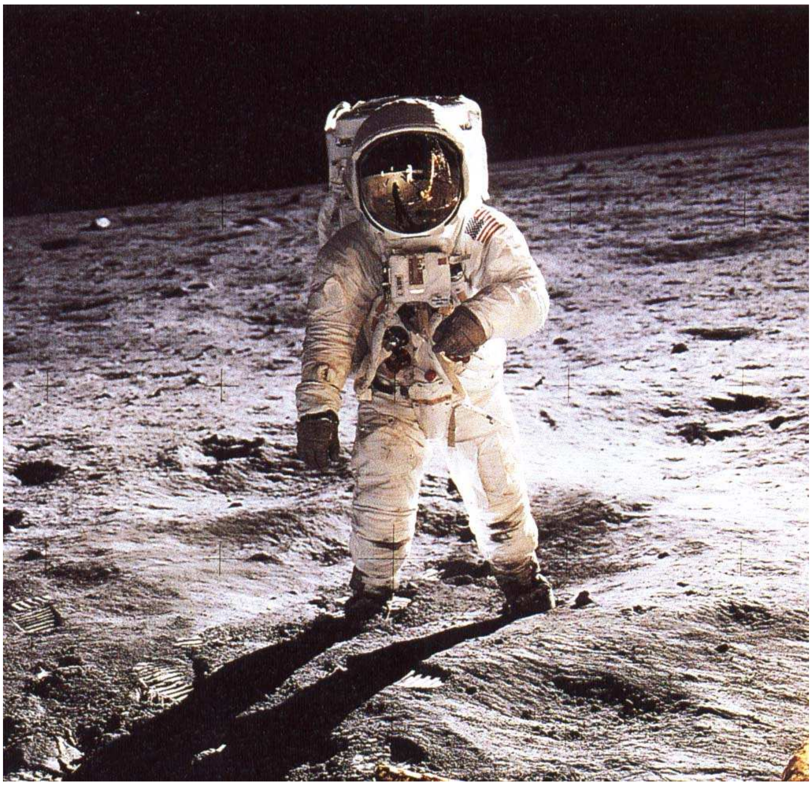
Глава 4. Механика Ньютона – царский путь в Теорию физических структур

Глава 5. Закон Ома – простейший пример физической структуры ранга (2, 3)

Глава 6. Эмпирические основания евклидовой геометрии

Глава 7. Евклидова геометрия – очевидная и невероятная

[20] Для непосвящённых.



20 июля 1969 года в 20 часов 17 минут по среднеевропейскому времени спускаемый аппарат “Орёл” космического корабля “Аполлон – 11” опустился на Луну. 21 июля в 3 часа 56 минут первые из землян – Нил Армстронг и Эдвин Олдрин[1] ступили на лунную поверхность.

Гораздо важнее то, что Христос вступил на Землю, чем то, что человек вступил на Луну.

Джеймс Ирвин [21]

[20]На фотографии Эдвин Олдрин во время “лунной прогулки”. В стекле его скафандра отражается Нил Армстронг

[21]Американский космонавт, вступивший на Луну во время полёта “Аполлона – 15” (26 июля – 7 августа 1971)

Глава 4.

МЕХАНИКА — ЦАРСКИЙ ПУТЬ В ТЕОРИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Salus per mechanica[22]

Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу, развлекающимся тем, что от поры до времени отыскиваю камешек более цветистый, чем обыкновенно, или красивую раковину, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным [2].

— *Исаак Ньютон*

§ 1. Исходная задача.

§ 2. Закон Ньютона – закон или определение?

§ 3. Трудности определений основных понятий механики.

§ 4. О первичных неопределяемых понятиях механики.

§ 5. Физические величины и их единицы.

§ 6. Фундаментальный опытный факт, лежащий в основании механики.

§ 7. Два сакральных инварианта $\boldsymbol{\varphi(\alpha,\beta)}$ и $\boldsymbol{\mu(i,k)}$.

§ 8. Что же такое сила и масса?.

§ 9. Закон Ньютона в случае трёхмерного движения; скалярная природа массы и векторная природа силы.

§ 10. Законы аддитивности сил и масс.

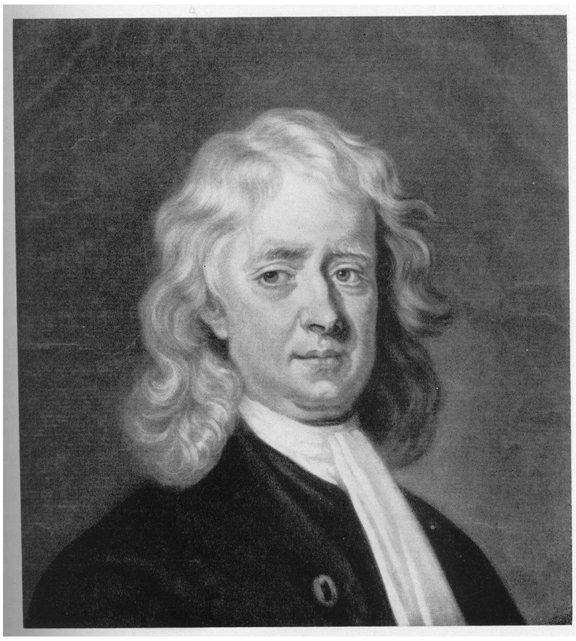
§ 11. Закон Ньютона в случае движения в неинерциальной системе отсчёта. Первый сакральный инвариант $\boldsymbol{b_\sigma}$.

§ 12. Почему “сила тяготения” не является силой?.

[22]Спасение души через механику.

§ 13. Предпосылки Теории физических структур, содержащиеся в законе Ньютона.

§ 14. Предварительное определение физической структуры ранга (2,2).



Sir Isaac Newton (1642 – 1727)

Закон I. *Corpus omne perseverate in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogiur statum suum mutare.*

Закон II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impresssae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

Закон III. *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

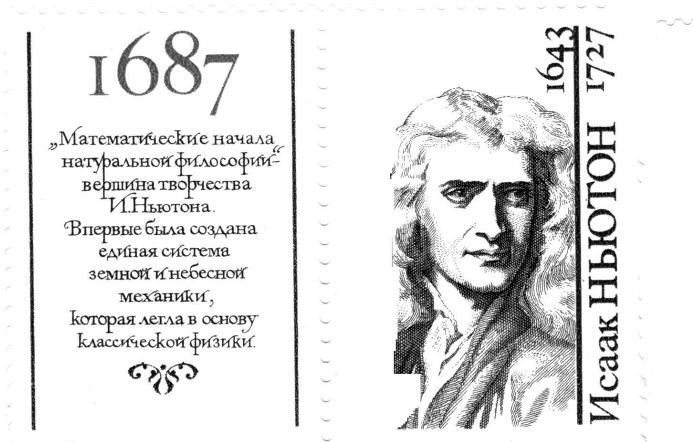
Сейчас, спустя пятьдесят восемь лет, я вспоминаю своё первое яркое впечатление, которое произвёл на меня символ высокой науки, висевший в Большой физической аудитории в старом здании физического факультета Московского университета на Моховой.

Это была белая доска в чёрной лакированной раме, на которой по латыни были написаны Три закона Ньютона. И то, что они были написаны на неизвестном мне языке, придавало этим, хорошо известным ещё с детства, законам особую глубину и таинственность. Много лет спустя я обнаружил эту доску задвинутой в пыльный угол, как ненужный хлам, за шкафом в демонстрационном кабинете уже нового физического факультета на Ленинских горах.

Думал ли я тогда, что сорок пять лет своей жизни я посвящу созданию новой специальной области знания — физической герменевтики, предназначенной для выявления смысла и сущности всех физических законов и понятий, и возникшей из естественного желания ответить на вопрос: что же такое Второй закон Ньютона – закон или определение?

Что же касается формулировки Трёх законов механики Ньютона на латинском языке, то я обращаюсь к ней для того, чтобы подчеркнуть сакральное происхождение физической герменевтики, математические начала которой составляют основное содержание этой книги.

Переход из привычного мира эмпирической (материальной) действительности в качественно иной Мир Высшей реальности подобен восхождению от перенаселённых безблагодатных городских кварталов к благодатным вершинам высшего знания, скрытых от постороннего взгляда слоем облаков. При этом возникает естественное желание передать читателю всю гамму чувств, охватывающих первооткрывателя при восхождении к высшему знанию, с помощью дополнительных средств (“отступлений и украшений”), выходящих за рамки строгой и по-своему совершенной и красивой математики.



Аннотация к Главе 4

Механика Ньютона – царский путь в Теорию физических структур.

Фундаментальное понятие *физической структуры* возникло при анализе Второго закона механики Ньютона.

Чтобы обнаружить физическую структуру, лежащую в основании механики Ньютона, необходимо взять *два* тела i и k и *два* акселератора (“ускорителя”) α и β, написать четыре уравнения Ньютона

$m_i a_{\alpha i} = f_\alpha;\qquad m_i a_{\beta i} = f_\beta;\qquad m_k a_{\alpha k} = f_\alpha;\qquad m_k a_{\beta k} = f_\beta,$

исключить из них массы m_i и m_k и силы f_α и f_β и получить сакральное соотношение между четырьмя ускорениями $a_{\alpha i}a_{\beta k} - a_{\beta i}a_{\alpha k} = 0$, вид которого не зависит от выбора тел i и k и акселераторов α и β.

Из этого тождества следует определение массы $m(i,e) = a_{\varepsilon e}/a_{\varepsilon i}$ и силы $f(\alpha,\varepsilon) = a_{\alpha e}/a_{\varepsilon e},$ если в качестве эталонного тела взять тело e, а в качестве эталонного акселератора взять акселератор ε.

Имея матрицу измеряемых на опыте ускорений $||a_{\alpha i}||,$ можно убедиться в том, что масса является скаляром, а сила – вектором.

Измеряя на опыте три ускорения $a_{\alpha e},$ $a_{\beta e}$ и $a_{\alpha\oplus\beta\ e},$, можно убедиться в существовании закона аддитивности сил $f_\alpha + f_\beta = f_{\alpha\oplus\beta}$. Аналогично, измеряя на опыте три ускорения $a_{\varepsilon i},$ $a_{\varepsilon k}$ и $a_{\varepsilon\ i\oplus k}$ можно убедиться в существовании закона аддитивности масс $m_i + m_k = m_{i\oplus k}$.

В случае поступательно движущейся неинерциальной системы отсчёта σ, зная матрицу измеряемых на опыте ускорений $||\tilde a_{\alpha i;\sigma}||$, можно найти поступательное ускорение неинерциальной системы отсчёта σ относительно “первичной” инерциальной системы отсчёта

$b_\sigma = -(\tilde a_{\alpha i;\sigma}\ \tilde a_{\beta k;\sigma} - \tilde a_{\alpha k;\sigma}\ \tilde a_{\beta i;\sigma})/(\tilde a_{\alpha i;\sigma} + \tilde a_{\beta k;\sigma} - \tilde a_{\alpha k;\sigma} - \tilde a_{\beta i;\sigma})$

Описан мысленный эксперимент, позволяющий убедиться в том, что “сила тяготения”, имея иную природу, не складывается с “нормальной” силой f_α акселератора α; она вызывает эффект, эквивалентный изменению ускорения неинерциальной системы отсчёта.

В завершение приводится предварительная формулировка простейшей физической структуры ранга (2,2) и на примере закона Ньютона даётся физическая интерпретация основных понятий Теории физических структур.

Глава 4

Механика Ньютона – царский путь в теорию физических структур

§ 1. Исходная задача.

Безумная идея, которая ляжет в основу будущей фундаментальной физической теории, будет осознанием того, что физический смысл имеет некоторый математический образ, ранее не связывавшийся с реальностью [4]

– Ю. И. Манин

Первоначальная задача, из которой возникла Теория физических структур, выглядела весьма скромно – выяснить, в какой степени Второй закон механики Ньютона является экспериментально проверяемым физическим законом, а в какой определением силы, массы, инерциальной системы отсчёта.

При этом возникла необходимость дать такое определение исходным понятиям (силе, массе, инерциальной системе отсчёта), которые, в отличие от туманных, расплывчатых и неконструктивных определений, вроде "масса – есть мера инерции, а сила – мера механического действия" или "инерциальная система отсчёта — это такая система, в которой справедливы законы Ньютона" [5], были бы конструктивны, логически безупречны и позволили бы определить численное значение вводимых физических величин экспериментальным путём.

Цель была достигнута: выяснилось, что Второй закон механики Ньютона является одновременно и экспериментально проверяемым физическим законом (в форме соотношения между четырьмя ускорениями $a_{\alpha i}$, $a_{\alpha k}$, $a_{\beta i}$, $a_{\beta k}$, относящимися к двум произвольным телам i и k и к двум произвольным акселераторам[23] α и β , $a_{\alpha i}a_{\beta k} - a_{\beta i}a_{\alpha k} = 0$) и содержит в себе три независимых определения (определение силы, массы и инерциальной системы отсчёта).

Однако, как это иногда бывает, наряду с решением поставленной, весьма частной задачи, было получено нечто гораздо большее.

Оказалось, что ход рассуждения, с помощью которого удалось получить индивидуальную характеристику тела – массу m_i и акселератора – силу f_α , исходя лишь из взаимных отношений между ними, может быть перенесён и на другие фундаментальные законы. Более того, оказалось, что за таким хорошо

[23]Под акселератором (ускорителем) мы будем понимать всевозможные поля или ускоряющие механизмы, сообщающие телам определённые ускорения.

известным ещё со школы законом, как Второй закон Ньютона, стоит целая неисследованная область **сакральных** (коллективных, системных) **отношений** между физическими объектами различной природы, порождающих, в частности, фундаментальные физические и геометрические законы.

Возникшая при этом теория, названная мною **Теорией физических структур**, исходит из хорошо известных физических законов и основных уравнений и выделяет из них нечто общее, универсальное, присущее всем фундаментальным физическим законам независимо от конкретной "физической природы" изучаемых объектов и используемых при этом измерительных приборов.

Оказывается, что с каждым фундаментальным физическим законом тесно связан определённый тип устойчивых отношений (физическая структура определённого ранга), не зависящий ни от "физической природы" изучаемого физического объекта, ни от выбора измерительного прибора.

Строгая математическая формулировка понятия физической структуры делает возможным изучение общих свойств физических законов до их конкретной физической интерпретации, подобно тому как абстрактные методы элементарной алгебры позволяют на бумаге решать конкретные школьные задачи, взятые из реальной действительности, не прибегая к анализу этой действительности.

Именно Теория физических структур позволяет обнаружить глубокое единство самых различных разделов физики. Опираясь на методы, разработанные в рамках этой теории, можно показать, что такие, внешне не похожие друг на друга разделы физики, как механика, специальная теория относительности, феноменологическая электродинамика, теория электрических цепей, равновесная термодинамика как бы вырастают из единого корня, реализуя тем самым физические структуры различных рангов [7].

Поскольку, как отмечалось выше, понятие физической структуры возникло при анализе Второго закона механики Ньютона, рассмотрим его более подробно.

§ 2. Закон Ньютона – закон или определение?

Общепризнанные мнения и то, что каждый считает давно решённым, чаще всего заслуживают исследований.
— Г. К.Лихтенберг

Это началось более сорока лет тому назад. В 1957 году после окончания аспирантуры МГУ я оказался в Московском физико-техническом институте. Когда мне предложили прочитать курс механики, я задумался над её основами: что такое Закон Ньютона – закон или определение? что такое масса? что такое сила? что такое инерциальная система координат? О том, как удалось мне ответить на эти вопросы, как раз и рассказывается в этой главе.

Начнём с понятия "физического закона". Поводом для такого анализа служит та неопределённость, которая до сих пор остаётся при трактовке фундаментального закона механики – закона Ньютона

$$ma = f \tag{1}$$

закона Ома

$$I = \frac{U}{R}, \tag{2}$$

известного соотношения электростатики

$$F = qE \tag{3}$$

и целого ряда других подобных соотношений: является ли каждое из выписанных соотношений "физическим законом" или определением, соответственно, силы f, сопротивления R, напряжённости электрического поля E?

Заметим, что никаких проблем не возникает, когда речь идёт о зависимости, например, давления реального газа p от его объёма V и температуры T. Здесь совершенно ясно, что имеет место простейший "физический закон" – связь между тремя независимо определёнными, измеряемыми на опыте физическими величинами p_i, V_i и T_i, относящимися к различным состояниям i реального газа

$$p_i = p\,(V_i, T_i).$$

Когда же речь заходит о законе Ньютона (1) или о соотношениях (2) и (3), ситуация сильно осложняется тем, что, строго говоря, хорошо определёнными и измеряемыми на опыте величинами являются лишь ускорение a в первом случае, сила тока I – во втором и сила F, действующая на заряд q в электрическом поле E – в третьем [24].

Что же касается силы f и массы m в первом случае, разности потенциалов U и сопротивления R – во втором, заряда q и напряжённости электрического поля E – в третьем, то вопрос об их независимом определении представляется не таким простым, как это может показаться на первый взгляд.

Вот что писал по поводу изложения механики **Генрих Герц**: "Кажется почти невозможной сама мысль искать логические несовершенства в системе, которая разработана лучшими умами. Но прежде чем отказаться от дальнейшего исследования, следует спросить, все ли, в том числе и лучшие умы, были удовлетворены этой системой... По моему мнению, прежде всего нужно указать на то, что как раз введение в механику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая при этом необходимости то тут, то там приносить этим слушателям, конечно, не без некоторого смущения, извинения и не испытывая желания побыстрее перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя" [6].

Стараясь объяснить, почему Герц не был удовлетворён изложением механики в рамках классической системы, **Анри Пуанкаре** писал: "Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определение основным понятиям. Что такое масса? "Это, – отвечает Ньютон, – произведение объёма на плотность".

[24] При последовательном (иерархическом) построении физики мы можем считать, что в электростатике понятие силы заимствуется из механики, где оно уже определено. Поэтому в законе $F = qE$ можно рассматривать силу F как хорошо определённую величину.

– “Лучше было бы сказать, – отвечают **Томсон** и **Тэт**, — что плотность есть количество массы в единице объёма”. – Что такое сила? “Это, – скажет **Лагранж**, — причина, которая производит движение тела или которая стремится произвести движение”. — “Это, — отвечает **Кирхгоф**, — произведение массы на ускорение”. Но тогда почему не сказать, что масса есть количество силы, рассчитанной на единицу ускорения? Эти затруднения непреодолимы. Когда говорят, что сила есть причина движения, – это метафизика, и это определение, если бы пришлось довольствоваться им, оказалось бы совершенно бесплодным. Чтобы определение могло быть полезным, оно должно научить измерять силу; впрочем, этого достаточно, нет никакой необходимости, чтобы оно объясняло, что такое сила в себе и что она является причиной или следствием движения. Итак, мы возвращаемся к определению Кирхгофа: “**сила равна массе, умноженной на ускорение**”. На этот “закон Ньютона” перестают, в свою очередь, смотреть как на экспериментальный закон, он становится только определением. Но это определение также недостаточно, потому что мы не знаем, что такое масса... Не остаётся ничего, и наши усилия были бесплодны, – мы оказались перед необходимостью прибегнуть к следующему определению, которое, по существу, является признанием нашего бессилия: массы представляют собой коэффициенты, которые удобно вводить в вычисления (см. [8]. – Ю.К.)... Мы должны сделать вывод, что при помощи классической системы невозможно дать удовлетворительную идею о силе и массе” [10].

Итак, трудности, возникшие при попытке строгого определения понятий массы, силы, инерциальной системы отсчёта, не являются случайными. Как показали работы Герца, Кирхгофа, Гельмгольца, Пуанкаре, эти трудности носят принципиальный характер. Для их преодоления необходимо выйти за рамки существующей парадигмы. Но чтобы это сделать, необходимо создать новую концептуальную систему, в основании которой лежали бы новые конструктивные понятия и принципы.

Обратимся к истокам этой концептуальной системы и попытаемся по-новому взглянуть на хорошо известный всем ещё со средней школы Второй закон механики Ньютона, рассмотрение которого с новой и неожиданной точки зрения привело меня в 1961 году к формулировке общего *принципа сакральной симметрии*, лежащего в основании Теории физических структур [9], [11].

§ 3. Трудности определения основных понятий механики.

По-видимому, всем хорошо известно, что всякое, достаточно вдумчивое изучение оснований механики, наталкивается на значительные трудности в понимании её исходных принципов. Это происходит из-за того, что в традиционной формулировке Второго закона Ньютона: “В инерциальной системе отсчёта произведение ускорения материальной точки на её массу равно по величине и направлению действующей на неё силе”, вводится далеко не тривиальное понятие инерциальной системы отсчёта и устанавливается связь между тремя физическими величинами – ускорением, массой и силой, две последние из которых предварительно не определены.

Надо сказать, что эти трудности часто воспринимаются, как не принципиальные, связанные просто с элементарной манерой изложения, и легко устранимые при достаточно аккуратных формулировках на каком-то более современном уровне. Но это заблуждение, ибо восхождение на такого рода уровень требует особой работы мысли, тем более, что этот уровень необходимо ещё воссоздать.

Трудности определения основных понятий механики были известны как самому Ньютону, так и более поздним авторам. Однако тщательное исследование оснований механики началось лишь в середине позапрошлого XIX века. Начиная с этого момента, принципы ньютоновской механики становятся предметом критических исследований таких физиков и математиков как Сен-Венан, Мах, Кирхгоф, Герц и Пуанкаре. Провозгласив идею сведе́ния динамических понятий к кинематическим, они много сделали для устранения из ньютоновской механики всей той метафизики, которая с са́мого начала была связана с основными понятиями механики.

Тем не менее, ситуация, сложившаяся к началу двадцатого столетия, оказалась далеко не простой. Это хорошо понимали учёные того времени, и проблема трактовки законов Ньютона и определения понятий массы, силы и инерциальной системы отсчёта по-прежнему продолжала оставаться предметом многочисленных дискуссий в специальных журналах и на научных конференциях.

Блестящие успехи и не менее значительные трудности новейшей физики заслонили эту старую проблему. Но то обстоятельство, что она не стоит в центре внимания современной физики, ещё не означает, что эта проблема исчерпала себя. Напротив, мы должны признать, что фундамент современной физики, основные её понятия и принципы до сих пор опутаны серьёзными неопределённостями и приводящими в смущение трудностями, не преодолёнными до сих пор.

Так, несмотря на то, что с момента формулировки Второго закона Ньютона (1687) прошло более трёхсот лет, до сих пор нет окончательной ясности по следующим вопросам:

что такое масса?

что такое сила?

в какой степени Второй закон Ньютона является определением (массы? силы? инерциальной системы отсчёта?), а в какой — опытным фактом?

Рассмотрим, например, вопрос о том, что такое масса? Все известные попытки строгого определения массы не привели ко сколько-нибудь удовлетворительному решению проблемы, так как все рассмотренные ранее определения либо основаны на понятии силы как первоначального понятия, либо предполагают существование некоторого динамического закона, явно или неявно использующего понятие силы. К этому следует добавить трудности, связанные с неопределённостью понятия инерциальной системы отсчёта. “Мы получаем наши знания о силах, – замечает Уайтхед, – имея некоторую теорию массы, а наше знание массы мы имеем на основании некоторой теории относительно силы" [12].

Многочисленные неудачные попытки логически последовательной формулировки ньютоновской механики, казалось бы, подтверждают эту точку зрения. Так, анализируя современное состояние вопроса о точной формулировке законов Ньютона, известный специалист по истории физики Макс Джеммер пишет: "Хотя ньютоновская механика является простейшей теорией, какую физика когда-либо создавала, и хотя для обычных физических объектов средних масштабов механика Ньютона в высшей степени справедлива, тем не менее её логическая структура не поддаётся попыткам полного логического анализа, если допустить, что такой анализ предполагает явное определение содержавшихся в этой структуре фундаментальных понятий" [13].

Однако, к счастью, такая пессимистическая точка зрения является, по-видимому, ошибочной. В этой книге предлагается новая формулировка Второго закона Ньютона, позволяющая рассматривать механику как законченную концептуальную систему, обладающую достаточно высокой степенью логико-математической строгости.

§ 4. О первичных неопределяемых понятиях механики.

Итак, в соответствии с общим принципом сакральной симметрии, мы, прежде чем формулировать тот или иной физический закон, должны указать:

множество физических объектов, на котором определён этот закон, и

экспериментальную операцию μ, реализующую этот закон путём сопоставления каждой паре физических объектов (α, i) определённого вещественного числа – экспериментально измеряемой величины $a(\mu)_{\alpha i}$.

Если речь идёт о законах механики, то среди множеств различных физических объектов особое значение играют два:

множество тел $\mathfrak{M}$ и

множество акселераторов[25] $\mathfrak{N}$.

Заметим при этом, что понятие "тело" и "акселератор" вводятся нами в теорию как первоначальные, интуитивно ясные понятия. Мы не можем дать им какие-либо разумные определения, не рискуя впасть в тавтологию (например, "тело – это отдельный предмет"); единственное, что мы можем сделать, это указать на реальные объекты и сказать: "Вот это и это — тела, а это — акселераторы".

На первый взгляд может показаться, что столь туманное определение исходных понятий неминуемо должно привести к неизбежной некорректности в формулировке основных физических законов. Но, к счастью, этого не происходит. Дело в том, что несмотря на то, что сами понятия "тело" и "акселератор" остаются неопределёнными, можно дать предельно строгое определение понятию

[25] Под акселератором мы будем понимать всевозможные механизмы и поля, сообщающие телам различные ускорения.

отношений, в которых находятся тела и акселераторы, и на уровне которых как раз и возникают фундаментальные физические понятия – *масса* и *сила*.

Таким образом, не имея возможности дать содержательные определения терминам, обозначающим реальные физические объекты (тела, акселераторы и т.п.) мы, тем не менее, можем и обязаны дать предельно строгие определения основным физическим понятиям – массе, силе, инерциальной системе отсчёта. Это необходимо сделать, так как в противном случае всё здание физики, и, в частности, механики, оказалось бы построенным на песке [14].

Обращаясь к экспериментальной операции μ, сопоставляющей каждому телу i и каждому акселератору α определённое вещественное число $a(\mu)_{\alpha i}$, мы сталкиваемся с той же проблемой – можно ли априори, ничего не зная ни о телах, ни об акселераторах, узнать, что это за операции. Естественно, что это невозможно; никакая математическая теория не в состоянии предугадать эту эмпирическую процедуру. И именно здесь, в поисках измерительной операции, отражающей закономерности отношений между физическими объектами (между телами и акселераторами, в нашем конкретном случае) должна проявиться интуиция физика, открывающего тот или иной физический закон.

Должен родиться гений, такой как Галилей или Ньютон, чтобы сказать:
“В качестве характеристики отношений между множеством тел и множеством акселераторов необходимо взять, вопреки Аристотелю, не скорость, а ускорение”.

Через двести тридцать лет другой гений – Эйнштейн – внесёт поправку:
“В качестве этой характеристики нужно взять не обычное трёхмерное ускорение $a_\nu = \frac{dv_\nu}{dt}$, а общековариантное 4-ускорение

$$a(\alpha, i)_n = g_{nm}\frac{du^m}{d\tau} + \Gamma_{n,ml}u^m u^l,$$

которое, так же как и a_ν, может быть измерено на опыте, то есть выражено через трёхмерные скорости и ускорения”.

Уточнилась, изменилась в связи с использованием релятивистской кинематики измерительная процедура $\overset{*}{\mu}$, но суть основного закона механики, как мы увидим ниже, осталась той же.

§ 5. Физические величины и их единицы.

То, что в первую очередь отличает теоретическую физику от математики, это широкое использование *физических величин* – длины, времени, скорости, ускорения, температуры, силы, массы, энергии и т.д. – и соответствующих *единиц* – метра, секунды, метра в секунду, метра на секунду в квадрате, кельвина, ньютона, килограмма, джоуля и т.д.

Что же такое физическая величина?

Любая физическая величина зависит прежде всего от самóго физического объекта i и от соответствующей измерительной процедуры σ, позволяющей выявить те или иные характеристики этого физического объекта.

Обычно, имея перед собой простейшую, наглядную операцию измерения длины стержня, трактуют процедуру измерения любой физической величины как процедуру "откладывания" эталонного физического объекта e на измеряемом объекте i [15]. Эту операцию ещё можно как-то представить и осуществить в случае измерения длины, сложнее – площади, и уже с большим трудом – объёма.

Но что значит "отложить" эталонное состояние на измеряемое состояние того или иного физического тела в случае измерения его температуры, плотности или намагниченности? Как, например, "отложить" один градус Кельвина на состояние нагретого тела?

Дело в том, что при более строгом рассмотрении процедуры измерения с точки зрения Теории физических структур выясняется, что универсальный алгоритм измерения любой физической величины не имеет ничего общего с наглядным "откладыванием" эталона.

Процесс измерения физической величины предполагает существование целого множества

$$\mathfrak{S} = \{\sigma, \lambda, \ldots\}$$

различных по своей конструкции приборов с различными равномерными шкалами, предназначенных для измерения одной и той же характеристики рассматриваемого физического объекта i.

Физической величиной называется числовая функция двух нечисловых переменных:

физического объекта $i \in \mathfrak{M}$

и соответствующего измерительного прибора $\sigma \in \mathfrak{S}$, то есть

$$a : \mathfrak{S} \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\sigma, i) \longmapsto a_\sigma(i)$$

Другими словами, произвольно выбранный прибор σ сопоставляет каждому физическому объекту i число $a_\sigma(i)$, называемое физической величиной физического объекта i.

Между множеством физических объектов $\mathfrak{M}$ и множеством соответствующих измерительных приборов $\mathfrak{S}$ имеют место вполне определённые устойчивые отношения, находящие своё выражение в факте существования простейшей мультипликативной физической структуры ранга (2,2). Это значит, что четыре физические величины

$$a_\sigma(i),\ a_\sigma(k) \qquad \text{и} \qquad a_\lambda(i),\ a_\lambda(k),$$

относящиеся к двум различным физическим объектам i и k и полученные в результате двух измерительных операций σ и λ, связаны между собой простейшим соотношением:

$$\begin{vmatrix} a_\sigma(i) & a_\sigma(k) \\ a_\lambda(i) & a_\lambda(k) \end{vmatrix} = a_\sigma(i)\, a_\lambda(k) - a_\sigma(k)\, a_\lambda(i) = 0$$

или

$$\frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(k)} = \frac{a_\lambda(i)}{a_\lambda(k)} = \ldots = a(k, i),$$

то есть отношение двух физических величин $\frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(k)} = a(k,\, i)$ не зависит от выбора измерительного прибора σ.

Таким образом, имеем

$$a_\sigma(i) = a_\sigma(k) \cdot a(k,\, i). \tag{4}$$

Если среди всех физических объектов, принадлежащих к множеству $\mathfrak{M}$ выбрать один объект

$$e \in \mathfrak{M}$$

и назвать его *эталонным* физическим объектом, то равенство (4) приобретёт вид:

$$a_\sigma(i) = a_\sigma(e) \cdot a(e,\, i). \tag{5}$$

Итак, любая физическая величина $a_\sigma(i)$ представляет собой произведение двух числовых функций $a_\sigma(e)$ и $a(e,\, i)$.

Первая числовая функция $a_\sigma(e)$ представляет собой физическую величину физического объекта e, принятого в качестве эталона. По традиции эта числовая функция называется *"единицей физической величины"* и обозначается так [16] [стр. 12]:

$$a_\sigma(e) = [\,e\,]_\sigma.$$

Она как бы вбирает в себя "ненужную" переменную — произвольную измерительную операцию σ, делая тем самым величину $a(e,\, i)$ инвариантной относительно выбора операции σ.

По традиции числовая функция $a(e,\, i)$ называется *"численным значением физического объекта i при выборе в качестве эталона физического объекта e* и обозначается так [17] [стр. 12]

$$a(e,\, i) = \{\,a\,\}.$$

Таким образом, равенство (5) в традиционных обозначениях выглядит следующим образом

$$a_\sigma = [\,e\,]_\sigma \cdot \{\,a\,\}. \tag{6}$$

В случае, если эталонный физический объект e – "сантиметр" и $a(\textit{см},\, i) = 12$, то равенство (6) примет знакомый ещё из средней школы вид:

$$\ell_\sigma = \textit{см}_\sigma \cdot 12 \qquad \text{или} \qquad \ell = 12\,\textit{см}.$$

По традиции, идущей от наглядной процедуры измерения длины стержня путём откладывания на нём стержня, принятого за эталон, считается, что единица физической величины совпадает с соответствующим физическим объектом, принятым в качестве эталона. Но если это так, то единица скорости должна представлять собой частное от деления отрезка единичной длины на промежуток времени между двумя фиксированными событиями, принятыми за эталон, напоминая при этом нечто несуразное типа частного от деления пирога на сапоги.

Итак, установление числовой природы физической величины $a_\sigma(i)$ и её единицы $a_\sigma(e)$ снимает многие проблемы, возникающие при рассмотрении уравнений, описывающих физические законы, а именно:

• отпадает необходимость введения "именованных чисел", имеющих якобы какую-то особую нечисловую природу;

• делает возможным осуществлять с единицами физических величин обычные операции — умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня [26].

• позволяет правильно сформулировать и написать выражение для физического закона в виде, инвариантном относительно выбора эталонов e и процедуры измерения σ.

В чём же состоит основное содержание механики и, прежде всего, механики материальной точки?

Чтобы понять это, начнём с хорошо известного ещё из средней школы Второго закона Ньютона.

§ 6. Фундаментальный опытный факт, лежащий в основании механики.

В чём же состоит основное содержание механики, и прежде всего, механики материальной точки?

Чтобы понять это, начнём ab ovo.

Рассмотрим два множества: $\mathfrak{M}$ — множество тел $i, k, \cdots, l, \cdots$ и $\mathfrak{N}$ — множество акселераторов $\alpha, \beta, \cdots, \gamma, \cdots$.

Акселератор α, действуя на тело i, сообщает ему ускорение $a_{\alpha i}$. Если рассмотреть действие всех акселераторов из $\mathfrak{N}$ на все тела из $\mathfrak{M}$, то множество всех полученных при этом ускорений $a_{\alpha i}$ можно записать в виде следующей

[26] Что же касается операций сложения и вычитания, то в них, в силу специфики физических величин, просто нет необходимости. Дело в том, что физические величины возникают в результате существования особых отношений между множеством физических объектов $\mathfrak{M}$ и множеством измерительных приборов $\mathfrak{S}$, в основании которых лежит *мультипликативная* физическая структура ранга (2,2), обеспечивающая существование инвариантов $a(e, i) = \frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(e)} = \ldots = \frac{a_\lambda(i)}{a_\lambda(e)}$, не зависящих от случайного выбора той или иной измерительной операции σ. Другими словами, физическая величина, имея числовую природу, обладает ещё одним важным свойством: *отношение* двух физических величин инвариантно относительно выбора конкретной измерительной операции.

прямоугольной матрицы

$$\Big(\mathfrak{a}\Big) = \left(\begin{array}{ccccc} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} & \cdots & a_{\alpha l} & \cdots \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} & \cdots & a_{\beta l} & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{\gamma i} & a_{\gamma k} & \cdots & a_{\gamma l} & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}\right) \tag{7}$$

Заметим, что в этой матрице заложена вся информация об отношениях между телами из $\mathfrak{M}$ и акселераторами из $\mathfrak{N}$. Задача состоит в том, чтобы извлечь её из этой матрицы и воплотить её в физический закон – Второй закон механики Ньютона.

Оказывается, что матрица (7), состоящая из экспериментальных значений соответствующих ускорений, измеренных в инерциальной системе отсчёта, обнаруживает следующую замечательную закономерность:

её ранг равен единице.

Это означает, что ускорения $a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}$, измеренные в инерциальной системе отсчёта и относящиеся к двум произвольным телам i и k, и к двум произвольным акселераторам α и β, связаны между собой одним и тем же соотношением

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0.} \tag{8}$$

В том, что это действительно так, нетрудно убедиться, замечая, что

$$a_{\alpha i} = \frac{f_\alpha}{m_i}.$$

Но, с другой стороны, можно непосредственно исходить из опыта, который показывает, что *несмотря на произвольную природу тел* $i, k, \dots$ *и произвольную природу акселераторов* $\alpha, \beta, \dots$ *ускорения, образующие матрицу* (7), *не являются произвольными; при произвольном выборе двух тел* i *и* k *и двух акселераторов* α *и* β *, ускорения* $a_{i\alpha}$, $a_{i\beta}$, $a_{k\alpha}$, $a_{k\beta}$, *оказываются связанными между собой соотношением* (8).

Итак, соотношение (8), содержащее только измеряемые на опыте ускорения $a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}$, и справедливое при любом выборе двух тел i и k и двух акселераторов α и β, можно трактовать как

фундаментальный опытный факт,

лежащий в основании динамики точки.

Мы получили его, исходя из традиционного Закона Ньютона $ma = f$. Однако, чуть ниже мы покажем и обратное: принимая соотношение (8) в качестве исходного опытного факта, можно получить, при надлежащем выборе эталонного тела e и эталонного ускорителя ε, Второй закон механики Ньютона в его канонической форме $ma = f$.

С формальной стороны соотношение (8) представляет собой некоторую функциональную связь

$$\Phi(a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}) = 0 \tag{9}$$

между четырьмя числами $a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}$, каждое из которых является *числовой функцией двух нечисловых переменных* (так ускорение $a_{\alpha i}$ есть числовая функция акселератора α и тела i), а всё соотношение в целом содержит четыре нечисловых переменных – две переменные i и k и две переменные α и β.

Если потребовать, чтобы связь (9) сохраняла бы свой вид при любом выборе нечисловых переменных α, β и i, k, то, как будет показано в Части IV, соотношение (8) является **единственным** соотношением, удовлетворяющим этому требованию.

Другими словами, требование сакральной инвариантности, то есть инвариантности относительно выбора двухэлементных подмножеств

$$\{\alpha, \beta\} \subset \mathfrak{N} \qquad\qquad \{i, k\} \subset \mathfrak{M}$$

непосредственно приводит к фундаментальному соотношению (8).

Резюмируя всё сказанное, назовём равенство (8) **верифицированной**[27] **формой Закона Ньютона.**

Подчеркнём, что верифицированная форма Закона Ньютона (8) не содержит ничего иного, кроме измеряемых на опыте ускорений, и поэтому может быть подвергнута непосредственной экспериментальной проверке.

В связи с этим мы будем называть **феноменологическим**[28] **основанием** такую систему аксиом, в которой исходными понятиями являются непосредственно измеряемые величины. В данном случае в качестве такой величины принимается ускорение $a_{\alpha i}$.

§ 7. Два сакральных инварианта $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\mu(i, k)$.

Итак, измеряя ускорения различных тел под воздействием различных акселераторов, мы обнаружим, что каковы бы ни были пары тел i и k и пары акселераторов α и β, всегда будет выполняться равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Принимая этот опытный факт за основу, легко показать, что отношение двух ускорений $a_{\alpha i}$ и $a_{\beta i}$ одного и того же тела i при действии на него двух различных акселераторов α и β не зависит от выбора этого тела, то есть

$$\frac{a_{\alpha i}}{a_{\beta i}} = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\beta k}} = \frac{a_{\alpha l}}{a_{\beta l}} = \ldots = \varphi(\alpha, \beta), \tag{11}$$

[27]От слова *верификация* [фр. vérification $<$ лат. verus истинный $+$ facere делать] – установление истинности теоретических положений опытным путём.

[28]От слова *феномен* [греч. $\varphi\alpha\iota\nu\acute{o}\mu\epsilon\nu o\nu$ – являющееся, $\varphi\alpha\acute{\iota}\nu o\mu\alpha\iota$ – являюсь].

где $\varphi(\alpha, \beta)$ – некоторая величина, являющаяся относительной характеристикой акселераторов α и β, инвариантная относительно выбора тел (второй[29] сакральный инвариант).

Точно так же из равенства (10) следует, что отношение двух ускорений $a_{\alpha i}$ и $a_{\alpha k}$ двух различных тел i и k при поочерёдном действии на них одного и того же акселератора α не зависит от выбора этого акселератора, то есть

$$\frac{a_{\alpha k}}{a_{\alpha i}} = \frac{a_{\beta k}}{a_{\beta i}} = \frac{a_{\gamma k}}{a_{\gamma i}} = \ldots = \mu(i, k), \tag{12}$$

где $\mu(i, k)$ – некоторая величина, являющаяся относительной характеристикой тел i и k, инвариантная относительно выбора акселераторов (третий сакральный инвариант).

Обратим внимание на последовательность аргументов α и β при обозначении сакрального инварианта

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{a_{\alpha i}}{a_{\beta i}}$$

и противоположное расположение аргументов i и k при обозначении сакрального инварианта

$$\mu(i, k) = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\alpha i}}.$$

При выборе обозначений для сакральных инвариантов $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\mu(i, k)$ мы руководствовались следующими соображениями: соотношение

$$a_{\alpha i} = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\beta k}}\ a_{\beta k}\ \frac{a_{\beta i}}{a_{\beta k}},$$

которое получается, если переписать верифицированную форму Закона Ньютона (10) в виде, разрешённом относительно $a_{\alpha i}$:

$$a_{\alpha i} = a_{\alpha k}\ \frac{1}{a_{\beta k}}\ a_{\beta i} = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\beta k}}\ a_{\beta k}\ \frac{a_{\beta i}}{a_{\beta k}},$$

приобретает явно симметричный вид, если ввести приведённые выше обозначения:

$$\boxed{a_{\alpha i} = \varphi(\alpha, \beta)\ a_{\beta k}\ \mu(k, i).} \tag{13}$$

Симметрия сохраняется, если уравнение (13) разрешить относительно $a_{\beta k}$

$$a_{\beta k} = \frac{1}{\varphi(\alpha, \beta)}\ a_{\alpha i}\ \frac{1}{\mu(k, i)} = \varphi(\beta, \alpha)\ a_{\alpha i}\ \mu(i, k).$$

Легко видеть, что оба сакральных инварианта $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\mu(i, k)$ обладают свойствами рефлексии

$$\varphi(\alpha, \alpha) = 1 \qquad\qquad \mu(i, i) = 1$$

[29] первый сакральный инвариант будет рассмотрен в § 14.

обратимости

$$\varphi(\alpha,\beta)=\frac{1}{\varphi(\beta,\alpha)} \qquad\qquad \mu(i,k)=\frac{1}{\mu(k,i)}$$

и мультипликативности

$$\varphi(\alpha,\gamma)=\varphi(\alpha,\beta)\ \varphi(\beta,\gamma)$$

$$\mu(i,l)=\mu(i,k)\ \mu(k,l)$$

Уравнение (13) является сакральным прообразом традиционного уравнения Ньютона. Мы будем называть его **сакральной формой Закона Ньютона**

§ 8. Что же такое сила и масса?

Чтобы ответить на эти вопросы, обратимся к Закону Ньютона, записанному в сакрально-инвариантной форме:

$$a(\alpha\ i)=\varphi(\alpha,\beta)\ a(\beta\ k)\ \mu(k,i), \tag{14}$$

где сакральные инварианты $\varphi(\alpha,\beta)$ и $\mu(k,i)$, характеризующие, соответственно, отношения между двумя акселераторами α и β и отношения между двумя телами i и k , имеют, в частности, следующий вид:

$$\varphi(\alpha,\beta)=\frac{a(\alpha\ k)}{a(\beta\ k)} \tag{15}$$

$$\mu(k,i)=\frac{a(\beta\ i)}{a(\beta\ k)}. \tag{16}$$

1. Чтобы получить новые физические величины, характеризующие каждый акселератор α и каждое тело i в отдельности, выберем и зафиксируем в качестве **эталонов** один акселератор ε из множества $\mathfrak{N}$ и одно тело e из множества $\mathfrak{M}$.

Заменяя в выражениях (15) и (16) β на ε и k на e , получим две новые числовые функции от одной нечисловой переменной α или i :

$$\varphi(\alpha,\varepsilon)=\frac{a(\alpha\ e)}{a(\varepsilon\ e)}$$

$$\mu(e,i)=\frac{a(\varepsilon\ i)}{a(\varepsilon\ e)}. \tag{17}$$

Функция $\varphi(\alpha,\varepsilon)$ – представляет собой сакральный инвариант, описывающий свойство произвольного акселератора α по сравнению с эталоном ε ;

Что же касается функции $\mu(e,i)$, то она представляет собой сакральный инвариант, описывающий свойство тела e , принятого за эталон, по сравнению с произвольно выбранным телом i .

Чтобы получить сакральный инвариант, описывающий свойство произвольного тела i по сравнению с эталоном e, переставим в выражении (17) местами e и i:

$$\mu(i,e) = \frac{1}{\mu(e,i)} = \frac{a(\varepsilon\ e)}{a(\varepsilon\ i)}.$$

Итак, имеем два сакральных инварианта, описывающие
акселератор α

$$\varphi(\alpha,\varepsilon) = \frac{a(\alpha\ e)}{a(\varepsilon\ e)}$$

и тело i

$$\mu(i,e) = \frac{a(\varepsilon\ e)}{a(\varepsilon\ i)}.$$

Назовём первый из них **относительной силой** акселератора α

$$f(\alpha,\varepsilon) = \frac{a(\alpha\ e)}{a(\varepsilon\ e)}, \tag{18}$$

а второй — **относительной массой** тела i

$$m(i,e) = \frac{a(\varepsilon\ e)}{a(\varepsilon\ i)}. \tag{19}$$

Полагая в равенстве (14) $\beta = \varepsilon$ и $k = e$, получим

$$a(\alpha\ i) = \varphi(\alpha,\varepsilon)\ a(\varepsilon\ e)\ \mu(e,i)$$

или

$$a(\alpha\ i) = a(\varepsilon\ e)\ \frac{f(\alpha,\varepsilon)}{m(i,e)}$$

и окончательно

$$\boxed{m(i,e)\ a(\alpha\ i;\varepsilon\ e) = f(\alpha,\varepsilon),} \tag{20}$$

где

$$a(\alpha\ i;\varepsilon\ e) = \frac{a(\alpha\ i)}{a(\varepsilon\ e)}$$

Соотношение (20) представляет собой Закон Ньютона, записанный в безразмерном виде.

Поскольку все входящие в выражение (20) величины выражаются через измеряемые на опыте ускорения, то Закон Ньютона (20) допускает непосредственную проверку на опыте.

2. Вернёмся к определениям относительной силы (18) и (19).

Припишем эталонному акселератору ε число $[\varepsilon]_a$, а эталонному телу i число $[e]_b$ и назовём новое число

$$\boxed{[\alpha]_a = f(\alpha,\varepsilon)[\varepsilon]_a} \tag{21}$$

абсолютной силой акселератора α ,

а другое новое число

$$\boxed{[i]_b = m(i,e)[e]_b} \tag{22}$$

абсолютной массой тела i .

Теперь остаётся выяснить, что же скрывается за введёнными только что числами $[\varepsilon]_a$, $[\alpha]_a$, $[e]_b$, $[i]_b$?

Числа $[\varepsilon]_a$ и $[\alpha]_a$ представляют собой **числа делений** произвольного прибора a с равномерной шкалой, предназначенного для непосредственного измерения силы (например, динамометра) при измерении, соответственно, силы эталонного акселератора ε и силы произвольного акселератора α .

Точно так же, числа $[e]_b$ и $[i]_b$ представляют собой **числа делений** произвольного прибора b с равномерной шкалой, предназначенного для непосредственного измерения массы (например, весов) при измерении, соответственно, массы эталонного тела e и массы произвольного тела i .

Заметим, что числа $[e]_b$ и $[i]_b$, то есть "наименованная масса" и "единица массы" как бы впитывают в себя несущественные сведения об измерительном приборе b , сохраняя важную физическую величину — массу $m(i,e)$ – независящей от конкретной процедуры измерения.

В традиционной физике формулы (21) и (22) и им подобные истолковываются довольно туманным образом:

число $[\alpha]_a$ называют "наименованной физической величиной – силой",
число $f(\alpha,\varepsilon) = \underline{f}$ называют "численным значением силы",
число $[\varepsilon]_a$ называют "единицей силы"
и записывают выражение (21) в виде $f = \underline{f}$ *дин*
или конкретно f =120*дин.*

Аналогично

число $[i]_b$ называют "наименованной физической величиной – массой",
число $m(i,e) = \underline{m}$ называют "численным значением массы",
число $[e]_b$ называют "единицей массы"
и записывают выражение (22) в виде $m = \underline{m}$ *грамм*
или конкретно m =500*грамм.*

§ 9. Закон Ньютона в случае трёхмерного движения; скалярная природа массы и векторная природа силы.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением случая одномерного движения. В случае трёхмерного движения, когда вместо одной компоненты ускорения

$a\,(\alpha\, i)$ мы должны рассматривать три проекции ускорения $a_x(\alpha\, i),\ a_y(\alpha\, i),\ a_z(\alpha\, i)$, на óси $x,\ y,\ z$, вся логика рассуждений в основном остаётся прежней.

Другими словами, мы будем рассматривать ускорение $\vec{a}\,(\alpha\, i)$ как векторную функцию двух нечисловых переменных — акселератора α и тела i, то есть:

$$a : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha\ i) \ \longmapsto\ a_\mu(\alpha\ i) = \{a_x(\alpha\ i),\ \ a_y(\alpha\ i),\ \ a_z(\alpha\ i)\},$$

где $\mu = x, y, z.$

Полагая
$$a_\mu(\alpha\ i) = f_\mu\ \frac{1}{m(i)},$$
находим, что однотипные компоненты четырёх ускорений

$$a_\mu(\alpha\ i),\ a_\mu(\alpha\ k),\ a_\mu(\beta\ i),\ a_\mu(\beta\ k)$$

связаны между собой хорошо известным соотношением:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\alpha\ k) \\ a_\mu(\beta\ i) & a_\mu(\beta\ k) \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (23)$$

В принципе, три компоненты ускорения $a_\mu(\alpha\, i)$ могут быть представлены в виде произведения двух физических величин, характеризующих акселератор α и тело i, двумя способами:

$$a_\mu(\alpha\ i) \begin{array}{l} \nearrow\ \ a_\mu(\alpha\ i) = \xi_\mu(\alpha)\ x(i) \\[2em] \searrow\ \ \tilde{a}_\mu(\alpha\ i) = \tilde{\xi}(\alpha)\ \tilde{x}_\mu(i) \end{array}$$

где $\xi_\mu(\alpha) = f_\mu(\alpha)$ – **вектор** силы, характеризующей акселератор α,
$x(i) = \frac{1}{m(i)}$; $m(i)$ – **скалярная** масса, характеризующая тело i;

$\tilde{\xi}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha)$ – гипотетическая **скалярная** сила, характеризующая акселератор α,

$\tilde{x}_\mu(i) = \left(\frac{1}{m(i)}\right)_\mu$ – гипотетический **вектор** обратной массы, характеризующий тело i ;

Какими свойствами должны обладать компоненты ускорения $a_\mu(\alpha\ i)$ в первом случае, и компоненты ускорения $\tilde{a}_\mu(\alpha\ i)$ – во втором?

Можно ли опытным путём установить, является ли масса скаляром, а сила – вектором?

Легко видеть, что в первом случае, когда масса – скаляр, сила – вектор и компоненты ускорения имеют вид $a_\mu(\alpha\ i) = \xi_\mu(\alpha)\ x(i)$, выполняются следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\alpha\ k) \\ a_\nu(\beta\ i) & a_\nu(\beta\ k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_\mu(\alpha)\ x(i) & \xi_\mu(\alpha)\ x(k) \\ \xi_\nu(\beta)\ x(i) & \xi_\nu(\beta)\ x(k) \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{24}$$

При этом имеют место следующие неравенства:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\beta\ i) \\ a_\nu(\alpha\ k) & a_\nu(\beta\ k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_\mu(\alpha)\ x(i) & \xi_\mu(\beta)\ x(i) \\ \xi_\nu(\alpha)\ x(k) & \xi_\nu(\beta)\ x(k) \end{vmatrix} =$$

$$= x(i)\ x(k) \begin{vmatrix} \xi_\mu(\alpha) & \xi_\mu(\beta) \\ \xi_\nu(\alpha) & \xi_\nu(\beta) \end{vmatrix} \not\equiv 0. \tag{25}$$

Если же имеет место второй гипотетический случай (масса – вектор, а сила – скаляр), то легко убедиться в том, что возникает противоположная ситуация:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\alpha\ k) \\ a_\nu(\beta\ i) & a_\nu(\beta\ k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi(\alpha)\ x_\mu(i) & \xi(\alpha)\ x_\mu(k) \\ \xi(\beta)\ x_\nu(i) & \xi(\beta)\ x_\nu(k) \end{vmatrix} =$$

$$= \xi(\alpha)\ \xi(\beta) \begin{vmatrix} x_\mu(i) & x_\mu(k) \\ x_\nu(i) & x_\nu(k) \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

но при этом имеют место следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\beta\ i) \\ a_\nu(\alpha\ k) & a_\nu(\beta\ k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi(\alpha)\ x_\mu(i) & \xi(\beta)\ x_\mu(i) \\ \xi(\alpha)\ x_\nu(k) & \xi(\beta)\ x_\nu(k) \end{vmatrix} \equiv 0$$

Итак, при рассмотрении одномерного движения мы обнаруживаем между множеством акселераторов $\mathfrak{N}$ и множеством тел $\mathfrak{M}$ определённое равноправие; и акселераторы, и тела характеризуются скалярными силой f и массой m .

Однако при рассмотрении случаев двумерного и трёхмерного движений мы замечаем, что равноправие между множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ нарушается; тела по-прежнему характеризуются скалярной массой $m(i)$, а акселераторы характеризуются вектором силы $f_\mu(\alpha)$.

Эта асимметрия проявляется в существовании двух качественно различных матриц A и $\tilde{A}$, состоящих из численных значений компонент ускорений:

$$A = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} a_x(\alpha\ i) & a_x(\alpha\ k) & a_x(\alpha\ m) & \cdots \\ a_y(\alpha\ i) & a_y(\alpha\ k) & a_y(\alpha\ m) & \cdots \\ a_z(\alpha\ i) & a_z(\alpha\ k) & a_z(\alpha\ m) & \cdots \\ \hline a_x(\beta\ i) & a_x(\beta\ k) & a_x(\beta\ m) & \cdots \\ a_y(\beta\ i) & a_y(\beta\ k) & a_y(\beta\ m) & \cdots \\ a_z(\beta\ i) & a_z(\beta\ k) & a_z(\beta\ m) & \cdots \\ \hline a_x(\gamma\ i) & a_x(\gamma\ k) & a_x(\gamma\ m) & \cdots \\ a_y(\gamma\ i) & a_y(\gamma\ k) & a_y(\gamma\ m) & \cdots \\ a_z(\gamma\ i) & a_z(\gamma\ k) & a_z(\gamma\ m) & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} a_x(\alpha\ i) & a_x(\beta\ i) & a_x(\gamma\ i) & \cdots \\ a_y(\alpha\ i) & a_y(\beta\ i) & a_y(\gamma\ i) & \cdots \\ a_z(\alpha\ i) & a_z(\beta\ i) & a_z(\gamma\ i) & \cdots \\ \hline a_x(\alpha\ k) & a_x(\beta\ k) & a_x(\gamma\ k) & \cdots \\ a_y(\alpha\ k) & a_y(\beta\ k) & a_y(\gamma\ k) & \cdots \\ a_z(\alpha\ k) & a_z(\beta\ k) & a_z(\gamma\ k) & \cdots \\ \hline a_x(\alpha\ m) & a_x(\beta\ m) & a_x(\gamma\ m) & \cdots \\ a_y(\alpha\ m) & a_y(\beta\ m) & a_y(\gamma\ m) & \cdots \\ a_z(\alpha\ m) & a_z(\beta\ m) & a_z(\gamma\ m) & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\}$$

Неравноправие скалярной массы m и векторной силы $\vec{f}$ проявляется в неравноправии матриц A и $\tilde{A}$. Как это следует из равенств (23) и (24) и неравенств (25) только матрица A имеет ранг равный единице, в то время как матрица $\tilde{A}$ этим свойством не обладает.

Итак, вся информация о наиболее глубоких закономерностях отношений между телами и акселераторами заложена именно в матрице A, и Второй закон механики Ньютона в его традиционной векторной формулировке

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

есть не что иное как неявное выражение основного и единственного её замечательного свойства:

$$\boxed{\textbf{ранг матрицы A равен единице}}$$

§ 10. Законы аддитивности сил и масс.

Итак, в § **8** мы показали, что из фундаментального соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0$$

следует факт существования двух сакральных инвариантов

$$f(\alpha,\varepsilon) = \varphi(\alpha,\varepsilon) = \frac{a_{\alpha e}}{a_{\varepsilon e}}$$

$$m(i,e) = \mu(i,e) = \frac{a_{\varepsilon e}}{a_{\varepsilon i}}$$

характеризующих, соответственно, акселератор α и тело i .

Но при этом возникает новый вопрос – а как ведут себя эти инварианты при композиции акселераторов и тел?

Это новая физическая проблема, и здесь при её решении мы будем опираться на опыт.

Этот опыт состоит в следующем.

1. Рассмотрим произвольное тело i и два произвольных акселератора α и β и измерим три ускорения:

ускорения $a_{\alpha i}$ и $a_{\beta i}$ и ускорение $a_{\alpha\oplus\beta\ i}$ тела i при одновременном действии акселераторов α и β .

Опыт показывает, что имеет место следующее соотношение, справедливое при любых α , β и i :

$$a_{\alpha\oplus\beta\ i} = a_{\alpha i} + a_{\beta i}. \tag{26}$$

Подставляя в (26) выражения

$$a_{\alpha i} = \varphi(\alpha,\varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e,i),$$

$$a_{\beta i} = \varphi(\beta,\varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e,i),$$

$$a_{\alpha\oplus\beta\ i} = \varphi(\alpha\oplus\beta,\varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e,i),$$

получим, что сакральный инвариант $\varphi(\alpha,\varepsilon)$ и равная ему сила f_α , обладают *свойством аддитивности*:

$$\boxed{\begin{gathered} \varphi(\alpha\oplus\beta,\varepsilon) = \varphi(\alpha,\varepsilon) + \varphi(\beta,\varepsilon) \\[2ex] f_{\alpha\oplus\beta} = f_\alpha + f_\beta \end{gathered}}$$

Укажем на ещё одну форму записи закона аддитивности сил:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & f_{\alpha\oplus\delta} & f_{\alpha\oplus\vartheta} \\ 1 & f_{\beta\oplus\delta} & f_{\beta\oplus\vartheta} \end{vmatrix} = f_{\alpha\oplus\vartheta} + f_{\beta\oplus\delta} - f_{\alpha\oplus\delta} - f_{\beta\oplus\vartheta} = 0.$$

Как мы увидим в Части V, равенство нулю этого определителя Кели-Менгера указывает на существование на множестве акселераторов $\mathfrak{N}$ аддитивной физической структуры ранга (2, 2).

2. Рассмотрим далее два произвольных тела i и k и один произвольный акселератор α и измерим три ускорения:

ускорения $a_{\alpha i}$ и $a_{\alpha k}$ и ускорение $a_{\alpha, i\oplus k}$ тела, полученного путём объединения в одно целое тел i и k, при действии акселератора α.

Как и в предыдущем случае, результаты трёх измерений оказываются связанными между собой. Однако, в отличие от предыдущего, эта связь имеет несколько иной вид:

$$\frac{1}{a_{\alpha, i\oplus k}} = \frac{1}{a_{\alpha i}} + \frac{1}{a_{\alpha k}} \tag{27}$$

Подставляя в (27) выражения

$$a_{\alpha i} = \varphi(\alpha, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, i),$$

$$a_{\alpha k} = \varphi(\alpha, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, k),$$

$$a_{\alpha, i\oplus k} = \varphi(\alpha, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, i\oplus k),$$

получим, что сакральный инвариант

$$\mu(i, e) = \frac{1}{\mu(e, i)},$$

и, следовательно, пропорциональная ему масса m_i, обладают *свойством аддитивности*:

$$\boxed{\begin{gathered} \mu(i\oplus k, e) = \mu(i, e) + \mu(k, e) \\[2ex] m_{i\oplus k} = m_i + m_k \end{gathered}}$$

Закон аддитивности масс может быть записан ещё в одном виде, явно указывающем на факт существования на множестве тел $\mathfrak{M}$ аддитивной физической структуры ранга (2,2):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & m_{i\oplus p} & m_{i\oplus q} \\ 1 & m_{k\oplus p} & m_{k\oplus q} \end{vmatrix} = m_{i\oplus q} + m_{k\oplus p} - m_{i\oplus p} - m_{k\oplus q} = 0.$$

§ 11. Закон Ньютона в случае движения в неинерциальной системе отсчёта. Первый сакральный инвариант b_σ .

До сих пор мы рассматривали движение материальной точки в инерциальной системе отсчёта. Но что такое инерциальная система? Можно ли экспериментальным путём установить, является ли данная система отсчёта инерциальной или нет?

Чтобы ответить на эти вопросы и ещё глубже понять физический смысл фундаментального закона механики — закона Ньютона, откажемся с самого начала от понятия "инерциальной системы отсчёта" и наряду с рассмотренными выше множеством тел $\mathfrak{M}$ и множеством акселераторов $\mathfrak{N}$ рассмотрим множество систем отсчёта (для простоты – одномерных), произвольно движущихся друг относительно друга

$$\mathfrak{S} = \{\sigma, \lambda, \ldots\}$$

Измеряя ускорения

$$\tilde{a}(\alpha\ i;\sigma) = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\alpha i;\sigma}$$

различных тел i, k, $\ldots$ под действием акселераторов α, β, $\ldots$ в различных системах отсчёта σ, λ, $\ldots$, мы тем самым задаём числовую функцию $\tilde{a}(\alpha\ i;\sigma)$ трёх нечисловых переменных

$$\tilde{a} : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{S} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha,\ i,\ \sigma) \longmapsto \tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$$

(простоты ради мы ограничиваемся здесь рассмотрением одномерного движения), значения которой можно рассматривать как элементы трёхмерной матрицы.

Как известно, закон Ньютона в случае движения в одномерной неинерциальной системе отсчёта имеет вид:

$$m_i\ \tilde{a}_{\alpha i;\sigma} = f_\alpha - m_i\ b_\sigma, \tag{28}$$

где b_σ – ускорение системы отсчёта σ относительно "первоначальной" инерциальной системы.

Перепишем уравнение (28) в сакрально-инвариантном виде, не содержащем ни массы m_i , ни силы f_α .

Для этого рассмотрим два акселератора α и β и два ускоряемых тела i и k и запишем четыре уравнения:

$$m_i(\tilde{a}_{\alpha i;\sigma} + b_\sigma) = f_\alpha, \qquad m_i(\tilde{a}_{\beta i;\sigma} + b_\sigma) = f_\beta,$$

$$m_k(\tilde{a}_{\alpha k;\sigma} + b_\sigma) = f_\alpha, \qquad m_k(\tilde{a}_{\beta k;\sigma} + b_\sigma) = f_\beta,$$

Исключая из написанных четырёх уравнений четыре неизвестные f_α, f_β, m_i и m_k, получим следующее соотношение между ускорениями $\tilde a_{\alpha i;\sigma}$, $\tilde a_{\beta i;\sigma}$, $\tilde a_{\alpha k;\sigma}$, $\tilde a_{\beta k;\sigma}$, содержащее один, пока неизвестный параметр b_σ:

$$(\tilde a_{\alpha i;\sigma}+b_\sigma)\,(\tilde a_{\beta k;\sigma}+b_\sigma)-(\tilde a_{\alpha k;\sigma}+b_\sigma)\,(\tilde a_{\beta i;\sigma}+b_\sigma)=0. \tag{29}$$

Итак, мы видим, что ускорения $\tilde a_{\alpha i;\sigma}$, $\tilde a_{\beta i;\sigma}$, $\tilde a_{\alpha k;\sigma}$, $\tilde a_{\beta k;\sigma}$ входят в соотношение (27) в виде одной и той же комбинации с b_σ. Таким образом, существует вполне определённая функция одной переменной x и одного параметра b_σ

$$\chi(x)=x+b_\sigma,$$

преобразующая измеряемые на опыте "эмпирические" ускорения $\tilde a_{\alpha i;\sigma}$ в новые величины

$$a_{\alpha i}=\chi(\tilde a_{\alpha i;\sigma})=\tilde a_{\alpha i;\sigma}+b_\sigma, \tag{30}$$

Таким образом, фундаментальное соотношение между ускорениями a имеет уже знакомый вид:

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\beta i}\\ a_{\alpha k} & a_{\beta k}\end{vmatrix}=0. \tag{31}$$

Чтобы придать соотношениям (29) и (30) статус физического закона, необходимо указать рецепт, по которому можно измерять величину b_σ, входящую в качестве слагаемого в ускорение $a_{\alpha i}$.

Воспользовавшись уравнением (29) легко находим **первый сакральный инвариант,** не зависящий ни от выбора акселераторов γ и δ, ни от выбора ускоряемых тел m и n

$$\boxed{b_\sigma=-\frac{\tilde a_{\gamma n;\sigma}\,\tilde a_{\delta m;\sigma}-\tilde a_{\gamma m;\sigma}\,\tilde a_{\delta n;\sigma}}{\tilde a_{\gamma n;\sigma}+\tilde a_{\delta m;\sigma}-\tilde a_{\gamma m;\sigma}-\tilde a_{\delta n;\sigma}},} \tag{32}$$

где m и n – произвольно выбранные тела,
γ и δ – произвольно выбранные акселераторы.

Итак, физическая величина $a_{\alpha i}$, равная сумме двух непосредственно измеряемых на опыте величин $\tilde a_{\alpha i;\sigma}$ и b_σ, каждая из которых существенным образом зависит от выбора системы отсчёта σ, взятая как единое целое, не зависит от выбора σ, то есть

$$a_{\alpha i}=\tilde a_{\alpha i;\sigma}+b_\sigma=\tilde a_{\alpha i;o}$$

Таким образом, b_σ представляет собой некоторый "компенсирующий" член, исправляющий "неинерционность" системы отсчёта σ. **Инерциальной системой отсчёта** $o\in\mathfrak{S}$ мы будем называть такую систему $\sigma\in\mathfrak{S}$, для которой первый сакральный инвариант тождественно равен нулю:

$$b_\sigma=0.$$

Итак, величины $\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$, $a_{\alpha i}$ и b_σ допускают простую физическую интерпретацию:

$\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$ – это ускорение тела i под действием акселератора α , измеренное в неинерциальной системе отсчёта;

$a_{\alpha i}$ – это ускорение тела i относительно "первичной" инерциальной системы отсчёта o ;

b_σ – это ускорение само́й неинерциальной системы отсчёта σ относительно "первичной" инерциальной системы отсчёта o .

§ 12. Почему "сила тяготения" не является силой?

Для того, чтобы понять особую природу "силы тяготения" рассмотрим лабораторию, находящуюся в космическом аппарате, который с помощью реактивного двигателя перемещается в пространстве с ускорением $\vec{a}_0$. Можно ли, находясь внутри этого аппарата, измерить ускорение $\vec{a}_0$ и "силу тяготения" со стороны массивного тела с массой M , укреплённого на стенке аппарата?

Рассмотрим три случая:

1. тяготеющее тело M отсутствует;

2. тяготеющее тело M действует на тело i с массой m в том же направлении, что и сила f_α ;

3. тяготеющее тело M действует на тело i в противоположном направлении, нежели сила f_α .

Во всех трёх случаях будем поступать следующим образом:

- возьмём два произвольных тела i и k и два произвольных акселератора α и β , измерим четыре ускорения

$$\tilde{a}(\alpha\ i),\ \tilde{a}(\alpha\ k),\ \tilde{a}(\beta\ i),\ \tilde{a}(\beta\ k)$$

и найдём значение первого сакрального инварианта:

$$b = -\frac{\tilde{a}(\alpha\ i)\ \tilde{a}(\beta\ k) - \tilde{a}(\alpha\ k)\ \tilde{a}(\beta\ i)}{\tilde{a}(\alpha\ i) + \tilde{a}(\beta\ k) - \tilde{a}(\alpha\ k) - \tilde{a}(\beta\ i)},$$

- возьмём произвольный акселератор α , эталонный акселератор ε и эталонное тело e , измерим два ускорения

$$\tilde{a}(\alpha\ e),\ \tilde{a}(\varepsilon\ e)$$

и найдём значение второго сакрального инварианта – силы

$$f(\alpha,\varepsilon) = \frac{\tilde{a}(\alpha\ e) + b}{\tilde{a}(\alpha\ e) + b},$$

- возьмём произвольное тело i , эталонный акселератор ε и эталонное тело e , измерим два ускорения

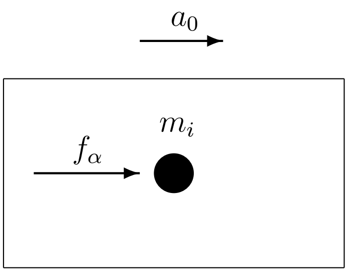
$$\tilde{a}(\varepsilon\ i),\ \tilde{a}(\varepsilon\ e)$$

и найдём значение третьего сакрального инварианта – массы

$$m(i,e) = \frac{\tilde{a}(\varepsilon\ e) + b}{\tilde{a}(\varepsilon\ i) + b}.$$

В результате получим

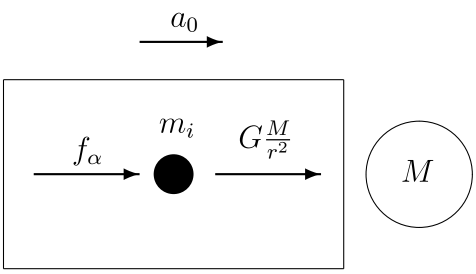
♢ в первом случае



$\tilde{a}_1(\alpha\ i)$

$b = a_0$ $\qquad$ $f = f_\alpha$ $\qquad$ $m = m_i$

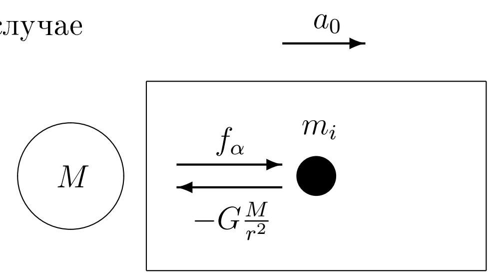
♢ во втором случае



$\tilde{a}_2(\alpha\ i)$

$b = a_0 - G\frac{M}{r^2}$ $\qquad$ $f = f_\alpha$ $\qquad$ $m = m_i$

♢ в третьем случае



$\tilde{a}_3(\alpha\ i)$

$b = a_0 + G\frac{M}{r^2}$ $\qquad$ $f = f_\alpha$ $\qquad$ $m = m_i$

Итак, мы видим, что “сила тяготения” не складывается с “нормальной” силой f_α акселератора α ; она вызывает эффект, эквивалентный уменьшению ускорения системы отсчёта во втором случае и увеличения его – в третьем случае. Этот факт находится в полном согласии с выводами общей теории относительности [18].

§ 13. Предпосылки Теории физических структур, содержащиеся в законе Ньютона.

Рассматриваемый с этой точки зрения анализ столь же широк, как и сама природа... Главным его атрибутом является ясность; в нём нет знаков для обозначения неопределённых понятий.

— Жан Батист Фурье (1768–1830)

Рассмотрим второй закон механики Ньютона в его традиционной форме:

$$ma = f \tag{33}$$

Входящие в него физические величины – масса m и сила f с одной стороны, и ускорение a с другой, имеют, вообще говоря, различную математическую природу. Так, масса m зависит от ускоряемого тела i и не зависит от акселератора α, сообщающего телу i ускорения a; сила f, напротив, зависит от акселератора α и не зависит от тела i. Что же касается ускорения a, то оно зависит как от тела i, так и от акселератора α.

Таким образом, масса m_i является некоторой вещественной функцией **одной** нечисловой переменной – тела i, т. е.

$$m : \mathfrak{M} \to \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество всех ускоряемых тел $i, k, \ldots$; $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел; сила f_α является другой вещественной функцией **одной** нечисловой переменной – акселератора α, т. е.

$$f : \mathfrak{N} \to \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ – множество всех акселераторов $\alpha, \beta, \ldots$;

ускорение же $a_{\alpha i}$ является вещественной функцией **двух** нечисловых переменных – тела i и акселератора α, т. е.

$$a : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}.$$

Итак, специально выделяя независимые нечисловые переменные $\alpha \in \mathfrak{N}$ и $i \in \mathfrak{M}$, перепишем закон Ньютона (33) в виде:

$$m_i a_{\alpha i} = f_\alpha \tag{34}$$

Таким образом, закон Ньютона, записанный в виде (34), представляет собой связь между существенно разнородными физическими величинами: **одноиндексными** массой m_i и силой f_α с одной стороны и **двухиндексным** ускорением $a_{\alpha i}$ с другой, т. е.

$$a_{\alpha i} = a(f_\alpha, m_i,) = \frac{f_\alpha}{m_i}.$$

Обратим внимание на то, что тело i характеризуется **одним** $(m = 1)$ параметром – массой m_i и акселератор α характеризуется **одним**[30] $(n = 1)$ параметром – силой f_α. Другими словами, и множество тел $\mathfrak{M}$ и множество акселераторов $\mathfrak{N}$ – одномерны.

Назовём соотношение

$$a_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i, \tag{35}$$

где $\xi_\alpha = f_\alpha$, $x_i = \frac{1}{m_i}$ **канонической** формой Второго закона механики Ньютона.

Заметим, что, строго говоря, единственными измеряемыми величинами в механике являются координаты, время, скорость и, в конечном итоге, ускорение. В связи с этим перепишем закон Ньютона (34) в виде, не содержащем ни массы m_i, ни силы f_α.

Чтобы исключить все массы и силы, нужно взять, по крайней мере, **два** $(r = 2)$ тела i и k и **два** $(s = 2)$ акселератора α и β и записать четыре $(k = r \cdot s = 2 \cdot 2)$ равенства

$$\begin{matrix} a_{\alpha i} = \dfrac{f_\alpha}{m_i} & a_{\alpha k} = \dfrac{f_\alpha}{m_k} \\[2ex] a_{\beta i} = \dfrac{f_\beta}{m_i} & a_{\beta k} = \dfrac{f_\beta}{m_k} \end{matrix}, \tag{36}$$

содержащие четыре $(N = m \cdot r + n \cdot s = 4)$ неизвестных $m_i, m_k, f_\alpha, f_\beta$.

Здесь и в дальнейшем через r и s мы будем обозначать то минимальное число элементов, которое нужно взять, соответственно из множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, чтобы исключить из соответствующей системы уравнений все параметры $x^1(i), \ldots, x^m(i)$, характеризующие элемент $i \in \mathfrak{M}$ и все параметры $\xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_n$, характеризующие элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$.

Пару (s, r) мы будем называть **рангом** физической структуры, а пару (n, m) – размерностью множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$. Итак, мы имеем четыре уравнения (36), содержащих четыре неизвестные m_i, m_k, f_α, f_β. Особенность этой системы уравнений состоит в том, что из неё можно исключить все неизвестные m_i, m_k, f_α, f_β, получив при этом одно соотношение между $a_{\alpha i}$, $a_{\alpha k}$, $a_{\beta i}$, $a_{\beta k}$, но нельзя выразить m_i, m_k, f_α, f_β через ускорения $a_{\alpha i}$, $a_{\alpha k}$, $a_{\beta i}$, $a_{\beta k}$.

Таким образом, исключая из написанных **четырёх** уравнений (36) **четыре** неизвестные m_i, m_k, f_α, f_β, получаем следующее соотношение между четырьмя ускорениями:

$$a_{\alpha i} a_{\beta k} - a_{\alpha k} a_{\beta i} = 0 \tag{37}$$

[30] Имеется в виду простейший случай одномерного движения.

или в виде, разрешённом относительно $a_{\alpha i}$:

$$a_{\alpha i} = a_{\alpha k}\frac{1}{a_{\beta k}}a_{\beta i} \tag{38}$$

Примечательно, что закон Ньютона, записанный в виде (37) или (38), имеет явно выраженный универсальный характер, так как не зависит ни от выбора двух тел $i,\ k \in \mathfrak{M}$, ни от выбора **двух** акселераторов $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{N}$ т. е.

$$\forall i, k \in \mathfrak{M} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$$

$$\Phi\begin{pmatrix} a_{\alpha i}, & a_{\alpha k}, \\ a_{\beta i}, & a_{\beta k} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0 \tag{39}$$

Соотношения (37), (38), (39) мы будем называть Вторым законом механики Ньютона в **сакрально-инвариантной** форме.

Подчеркнём, что эти соотношения не содержат ничего, кроме измеряемых на опыте ускорений, и могут быть подвергнуты непосредственной экспериментальной проверке. Итак, мы получили фундаментальное соотношение (39) как достаточно тривиальное следствие из закона Ньютона, записанного в канонической форме (35). Но при этом существенно, что здесь возможен и обратный переход: приняв в качестве исходного опытного факта факт существования соотношения (39) между четырьмя измеряемыми на опыте ускорениями $a_{\alpha i},\ a_{\alpha k},\ a_{\beta i},\ a_{\beta k}$, мы можем снова получить отсюда Второй закон механики Ньютона в канонической форме (35).

Действительно, назовём одно из тел (например, тело k) и один из акселераторов (например, акселератор β) "эталонными" и переобозначим их, соответственно, через $\overline{1}$ и $\underline{1}$. Полагая в (38) $k = \overline{1}$, $\beta = \underline{1}$ будем иметь:

$$a_{\alpha i} = a_{\alpha \overline{1}}\frac{1}{a_{\underline{1}\overline{1}}}a_{\underline{1}i} = \frac{a_{\underline{1}\overline{1}}}{c_1}\cdot\frac{a_{\alpha\overline{1}}}{a_{\underline{1}\overline{1}}}\cdot c_1\frac{a_{\underline{1}i}}{a_{\underline{1}\overline{1}}}, \tag{40}$$

где c_1 – произвольная постоянная. Сравнивая (40) с (35), получим Второй закон механики Ньютона в канонической форме

$$a_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i = \frac{f_\alpha}{m_i}$$

если положим

$$\xi_\alpha = f_\alpha = c_1\frac{a_{\alpha\overline{1}}}{a_{\underline{1}\overline{1}}}.$$

$$x_i = \frac{1}{m_i} = \frac{a_{\underline{1}\overline{1}}}{c_1}\cdot\frac{a_{\underline{1}i}}{a_{\underline{1}\overline{1}}}$$

Постоянная c_1 (и аналогичные постоянные в других случаях) существенно связана с выбором системы единиц и обеспечивает таким образом определённую свободу выбора значений массы и силы. Формально постоянная c_1 возникает из-за того, что x_i и ξ_α не определяются однозначно, так как существует однопараметрическая группа преобразований

$$\begin{array}{ccc} x = \dfrac{1}{c_1}\overline{x} & & m = c_1\overline{m} \\ & \text{или} & \\ \xi = c_1\overline{\xi} & & f = c_1\overline{f} \end{array},$$

сохраняющая вид выражения

$$a_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i = \overline{\xi}_\alpha \overline{x}_i$$

или

$$a_{\alpha i} = \frac{f_\alpha}{m_i} = \frac{\overline{f}_\alpha}{\overline{m}_i}.$$

Итак, мы показали, что Второй закон Ньютона может быть записан в двух эквивалентных формах: в канонической

$$a_{\alpha i} = \varphi(\xi_\alpha x_i) = \xi_\alpha x_i = \frac{f_\alpha}{m_i}$$

и в сакрально-инвариантной

$$\begin{array}{l} \Phi(a_{\alpha i}, \quad a_{\alpha k}, \\ \quad\ a_{\beta i}, \quad a_{\beta k}) \end{array} = \begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0$$

или в виде, разрешённом относительно $a_{\alpha i}$:

$$a_{\alpha i} = f(a_{\alpha k}, a_{\beta k}, a_{\beta i})$$

$$a_{\alpha i} = a_{\alpha k}\frac{1}{a_{\beta k}}a_{\beta i}$$

Другими словами, мы можем сказать, что ускорение $a_{\alpha i}$ произвольного тела i под действием произвольного акселератора α зависит от ускорения $a_{\beta i}$ тела i под действием эталонного акселератора β , от ускорения $a_{\alpha k}$ эталонного тела k под действием акселератора α и, наконец, от ускорения $a_{\beta k}$ эталонного тела k под действием эталонного акселератора β . То есть Закон Ньютона представляет собой сакральное отношение между двумя кортами, левым и правым $\langle\alpha\,\beta|$ и $|i\,k\rangle$ (см.рис. 1).

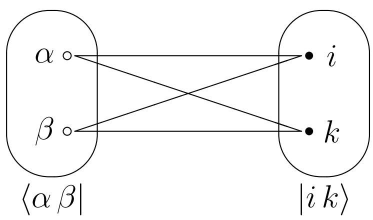


Рис. 1.

§ 14. Предварительное определение физической структуры ранга (2, 2).

Опираясь на рассмотренный пример, сформулируем понятие физической структуры ранга (2,2):

Рассмотрим два множества:

$\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество ускоряемых тел и

$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$. – множество акселераторов (ускорителей).

Предварительный характер этого определения состоит в том, что с самого начала мы требуем существования следующих двух отображений

$$z : \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \qquad i \mapsto z(i) \qquad\qquad \text{и} \qquad\qquad \zeta : \mathfrak{N} \to \mathbb{R} \qquad \alpha \mapsto \zeta(\alpha).$$

Мы будем говорить, что на множествах $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ размерности (1,1) определена **физическая структура ранга (2,2)**, если существует вещественная функция двух вещественных переменных

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (\zeta, z) \mapsto \varphi(\zeta, z)$$

такая, что четыре функции

	z_1	z_2
ζ_1	$\varphi(\zeta_1, z_1)$	$\varphi(\zeta_1, z_2)$
ζ_2	$\varphi(\zeta_2, z_1)$	$\varphi(\zeta_2, z_2)$

образованные из функции $\varphi(\zeta, z)$ путём всевозможной замены переменных ζ и z на новые независимые переменные $\zeta \to \zeta_1, \zeta_2$ и $z \to z_1, z_2$

связаны между собой соотношением

$$\begin{matrix} \Phi(\varphi(\zeta_1, z_1), & \varphi(\zeta_1, z_2), \\ \varphi(\zeta_2, z_1), & \varphi(\zeta_2, z_2)) \end{matrix} \equiv 0 \tag{41}$$

или

$$\varphi(\zeta_1, z_1) = f(\varphi(\zeta_1, z_2),\, \varphi(\zeta_2, z_2),\, \varphi(\zeta_2, z_1)) \tag{42}$$

представляющими собой тождество относительно независимых переменных $\zeta_1,\ \zeta_2,\ z_1,\ z_2$.

Не случайно в этом определении физической структуры ничего не говорится о "физической природе" элементов из множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Важно лишь, что каждый элемент i из множества $\mathfrak{M}$ характеризуется каким-либо одним числовым параметром z_i , а элемент α из множества $\mathfrak{N}$ – каким-либо одним числовым параметром ζ_α . Далее существенно, что существует какая-то (заранее неизвестная) числовая функция $\varphi(\zeta_\alpha, z_i)$, характеризующая парные отношения между элементами $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{M}$. И, наконец, самое главное, чтобы её числовые значения

$$\begin{matrix} \varphi(\zeta_\alpha, z_i) & \varphi(\zeta_\alpha, z_k) \\ \varphi(\zeta_\beta, z_i) & \varphi(\zeta_\beta, z_k) \end{matrix}$$

были бы связаны между собой какой-то (тоже заранее неизвестной) функциональной зависимостью

$$\Phi(\varphi(\zeta_\alpha, z_i), \varphi(\zeta_\alpha, z_k), \varphi(\zeta_\beta, z_i), \varphi(\zeta_\beta, z_k)) \equiv 0$$

или

$$\varphi(\zeta_\alpha, z_i) = f(\varphi(\zeta_\alpha, z_k), \varphi(\zeta_\beta, z_k), \varphi(\zeta_\beta, z_i))$$

тождественной относительно выбора переменных $\zeta_\alpha, \zeta_\beta, z_i, z_k$
где

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

две непрерывные и достаточное число раз дифференцируемые функции, соответственно, четырёх и трёх вещественных переменных.

Оказывается, и это составляет основное содержание и весь пафос Теории физических структур, эти весьма общие требования фактически однозначно (с точностью до строго определённой эквивалентности) определяют конкретный вид функций φ и f (или Φ), в свою очередь определяющих ещё до всякой физической интерпретации, единственно возможную каноническую и сакрально-инвариантную формы физического закона.

Это обстоятельство открывает перед теоретической физикой новые возможности, позволяя свести все мыслимые физические законы к небольшому числу сакральных физических законов, вид которых определяется требованиями сакральной инвариантности.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти неизвестные функции $\varphi(\zeta, z)$ и

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi_{11}, & \varphi_{12}, \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22}\end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad f(\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{21}),$$

обращающие равенства (41) и (42) в тождества относительно системы независимых переменных $\zeta_1, \zeta_2; z_1, z_2$.

Собственно говоря, Теория физических структур и началась с решения этой задачи.

Мною было показано [3], что функциональное уравнение

$$\forall\ \xi_1,\ \xi_2;\ x^1,\ x^2\ \in \mathbb{R}$$

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi(\xi_1, x^1), & \varphi(\xi_1, x^2), \\ \varphi(\xi_2, x^1), & \varphi(\xi_2, x^2)\end{pmatrix} \equiv 0$$

относительно двух неизвестных функций

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

и

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

имеет два и только два решения, определённые с точностью до эквивалентности, которые могут быть записаны в двух эквивалентных друг другу формах: **аддитивной**

$$\varphi_1(\eta, z) = A_{\lambda;\alpha,f}(\eta, z) = \lambda(\alpha(\eta) + f(z))$$

$$\begin{array}{r}\Phi_1(\varphi_{11}, \quad \varphi_{12}, \\ \varphi_{21}, \quad \varphi_{22})\end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda^{-1}(\varphi_{11}) & \lambda^{-1}(\varphi_{12}) \\ -1 & \lambda^{-1}(\varphi_{21}) & \lambda^{-1}(\varphi_{22}) \end{vmatrix} = \lambda^{-1}(\varphi_{12}) + \lambda^{-1}(\varphi_{21}) - \lambda^{-1}(\varphi_{11}) - \lambda^{-1}(\varphi_{22});$$

и **мультипликативной**

$$\varphi_2(\eta, z) = B_{\chi;\beta,g}(\eta, z) = \chi(\beta(\eta) \cdot g(z));$$

$$\begin{array}{r}\Phi_2(\varphi_{11}, \quad \varphi_{12}, \\ \varphi_{21}, \quad \varphi_{22})\end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} \chi^{-1}(\varphi_{11}) & \chi^{-1}(\varphi_{12}) \\ \chi^{-1}(\varphi_{21}) & \chi^{-1}(\varphi_{22}) \end{vmatrix} = \chi^{-1}(\varphi_{11})\chi^{-1}(\varphi_{22}) - \chi^{-1}(\varphi_{12})\chi^{-1}(\varphi_{21});$$

Легко видеть, что общее решение функционального уравнения (41) получается из двух **фундаментальных решений**:

аддитивного

$$a(\xi, x) = \xi + x$$

$$\begin{array}{r}\Phi_1(a_{11}, \quad a_{12}, \\ a_{21}, \quad a_{22})\end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & a_{11} & a_{12} \\ -1 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} + a_{21} - a_{11} - a_{22};$$

и мультипликативного

$$b(\eta, y) = \eta \cdot y$$

$$\begin{array}{r}\Phi_2(b_{11}, \quad b_{12}, \\ b_{21}, \quad b_{22})\end{array} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21};$$

путём произвольного преобразования аргументов:

$$a \to \lambda(a) \qquad \xi \to \alpha(\xi) \qquad x \to f(x)$$

$$b \to \chi(b) \qquad \eta \to \beta(\eta) \qquad y \to g(y)$$

Рассмотрим следующие законы преобразования переменных

$$\xi \leftrightarrow \eta \qquad \text{и} \qquad x \leftrightarrow y$$

$$\alpha(\xi) = \ln(\beta(\eta)) \qquad \text{и обратно} \qquad \beta(\eta) = exp(\alpha(\xi))$$

$$f(x) = \ln(g(y)) \qquad \text{и обратно} \qquad g(y) = exp(f(x))$$

и следующие суперпозиции функций $\lambda(u)$ и $\chi(v)$

$$\lambda(u) = \chi(exp(u)) \qquad \text{и обратно} \qquad \chi(v) = \lambda(\ln(v))$$

Легко заметить, что аддитивная и мультипликативная формы решения функционального уравнения (41) связаны между собой следующим соотношением:

$$\varphi_1(\xi, x) = A_{\lambda;\alpha,f}(\xi, x) = \lambda(\ln \beta(\eta) + \ln g(y)) =$$
$$= \lambda\bigl(\ln(\beta(\eta) \cdot g(y))\bigr) = \chi\bigl(\beta(\eta) \cdot g(y)\bigr) = B_{\chi;\beta,g}(\eta, y) = \varphi_2(\eta, y)$$

Итак, можно показать, что вид уравнения Ньютона $m_i a_{\alpha i} = f_\alpha$ и вид непосредственно связанного с ним соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0$$

не являются случайными; они оказываются единственно возможными, если в основание механики положить **принцип сакральной инвариантности** ранга $(s, r) = (2, 2)$, т. е. требование, чтобы четыре ускорения

$$\begin{array}{c|cc} & i & k \\ \hline \alpha & a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ \beta & a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{array}$$

относящиеся к двум $(r = 2)$ произвольным телам i и k и к двум $(s = 2)$ произвольным акселераторам α и β были связаны между собой одним функциональным соотношением

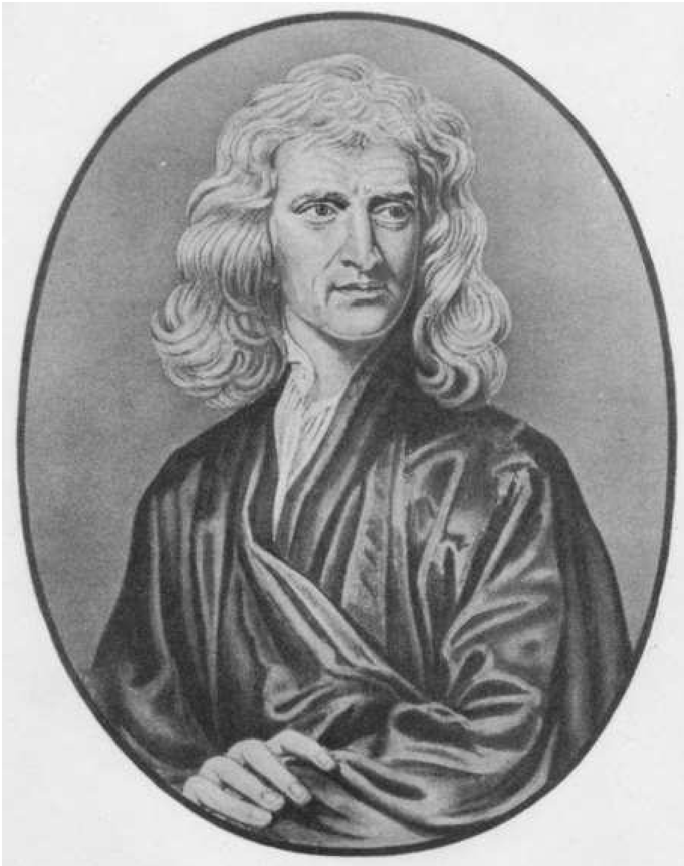
$$\Phi(a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}) = 0$$

инвариантным относительно выбора двух тел i и k и двух акселераторов α и β . Я подробно останавливаюсь на Втором законе механики Ньютона, так как уже в этой главе хочу изложить главную идею, которая ляжет в основание отдельного тома “Механика”, входящего в многотомник “Фундаментальная физика”.

Обратимся теперь к следующему примеру, иллюстрирующему понятие физической структуры ранга (2,3).

Заметки на полях

В глазах современников Ньютон был “новым Моисеем”, которому Бог явил свои законы, начертанные на скрижалях, и которому была явлена Истина, лежащая в основе Мироздания. Но при этом “Начала” – книга весьма трудная для понимания даже для современного читателя. Неудивительно, что студенты Кембриджа, встречая Ньютона, говорили: “Вот идёт человек, написавший книгу, в которой ни он сам, ни кто другой ничего не понимает”.



Те, кто подобно Ньютону, умеют воспользоваться фактами для создания великого храма науки, те, кому дано разгадать сокровенную суть вещей, составляют, если можно так выразиться, круг личных советников Бога, все прочие трудятся для них.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Диалог о двух главнейших системах мира.

Фронтиспис издания на латинском языке. 1641.

Сейчас, как и 350 лет назад, вновь остро встал вопрос О двух главнейших системах мира.

"В начале было Слово..." (Иоан. 1,1) или по-прежнему

"В мире нет ничего, кроме движущейся материи".

Литература к главе 4

[1] *Эйнштейн А.* Рецензия на книгу Г.А. Лоренца "Статистические теории в термодинамике" /Собрание научных трудов. – Т. IV. – М.: Наука, 1967. – С. 19.

[2] **Творцы мировой науки:** от античности до XX века; Попул. биобиблиографич. энцикл. /Рос. гос. б-ка. – М.: Пашков дом, 2001. – С. 154.

[3] *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. мат. журнал. 1971. т. 12. №5. с. 1142–1144.

[4] *Манин Ю.И.* Математика и физика. – М.: Знание. 1979. С.4.

[5] Физический энциклопедический словарь. - М.: Советская энциклопедия, 1963. Т. III, С. 135; 1965. Т. IV, С. 522; 1962. Т. II, С. 181.

[6] *Герц Генрих.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: 1959. С. 16-19.

[7] *Кулаков Ю. И., Сычёва Л. С.* Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике. // Исследовательские программы в современной науке. Новосибирск. Наука. 1987. с. 99–120.

[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. Механика. – М.: Наука, 1988, С. 16.

[9] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. Дополнение Г.Г.Михайличенко. Новосибирск. Изд-во НГУ, 1968. 226 с.

[10] *Пуанкаре Анри.* Идеи Герца в механике //Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: 1959. С. 311, 316.

[11] *Кулаков Ю.И.* О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа //Доклады АН СССР, т. 201, 1971, No.3, С. 570-572. (Представлена акад. Беляевым 12 мая 1969)

[12] *Whitehead A.N.*, An enquiry concerning the principles of natural knowledge. Cambridge University Press, New York, 1919. p. 18.

[13] *Макс Джеммер.* Понятие массы в классической и современной физике. - М.: Изд.-во “Прогресс”, 1967. С. 128.

Max Jammer, Concepts of mass in classical and modern physics. Harvard University Press, Cambridge-Massachusetts. 1961.

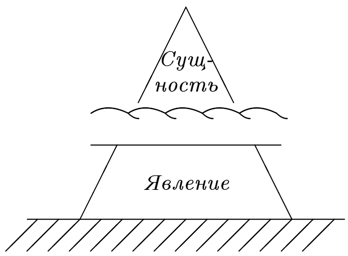
[14] *Кулаков Ю.И.* О теории физических структур /В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 15 (Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, т. 127). Сборник работ под ред. О.А.Ладыженской. Ленинград, Наука, 1983, С. 103-151.

[15] *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности: Учебно-справочное руководство. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. С. 19.

[16] *Чертов А.Г.* Физические величины (терминология, определения, обозначения, размерности, единицы): Справ. пособие. — М.: Высш. школа, 1990, 335 с.

[17] *Данилов Н.И.* Единицы измерений: Справочник для преподавателей физики. — М.: Учпедгиз, 1961, 304 с.

[18] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. – М.: Наука. 1988. С. 292 - 293.



Глава 5.

ЗАКОН ОМА – ПРОСТЕЙШИЙ ПРИМЕР ФИЗИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ РАНГА (2,3)

DIMIDIUM FACTI QUI COEPIT HABET:
SAPERE AUDE; INCIPE! [31]

Теория, притязающая на звание непреходящей и плодотворной должна, по-моему, обнаруживать своё благородное происхождение не в пустой словесности, а в том, чтобы действительно всюду выявлять своё родство с духом природы, изъясняясь простыми и полными выражениями, без всяких словесных прикрас [1].

— Георг Симон Ом

§ 1. Что стоит за законом Ома?

§ 2. Сопротивление проводника, ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока как сакральные инварианты.

§ 3. Предварительное определение физической структуры ранга (2,3).

[31] Тот уже полдела свершил, что начал: осмелься быть мудрым; и начинай!

Георг Ом (1787 - 1854)

Ампер считал необходимым особо подчеркнуть, что математическая теория электродинамических явлений выведена им исключительно из опыта.

Вильгельм Вебер

Скажите мне, что такое электричество, и я объясню вам всё остальное.

Вильям Томсон

Аннотация к Главе 5

Закон Ома – простейший пример физической структуры ранга (2,3)

Чтобы обнаружить физическую структуру, лежащую в основании закона Ома для всей цепи, необходимо взять *два* источника тока α и β и *три* проводника i, k, m и написать шесть уравнений;

$$\mathcal{J}(\alpha\, i) = \tfrac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i+\rho_\alpha}; \qquad \mathcal{J}(\alpha\, k) = \tfrac{\mathcal{E}_\alpha}{R_k+\rho_\alpha}; \qquad \mathcal{J}(\alpha\, m) = \tfrac{\mathcal{E}_\alpha}{R_m+\rho_\alpha};$$
$$\mathcal{J}(\beta\, i) = \tfrac{\mathcal{E}_\beta}{R_i+\rho_\beta}; \qquad \mathcal{J}(\beta\, k) = \tfrac{\mathcal{E}_\beta}{R_k+\rho_\beta}; \qquad \mathcal{J}(\beta\, m) = \tfrac{\mathcal{E}_\beta}{R_m+\rho_\beta}$$

исключить из них сопротивления R_i, R_k, R_m , электродвижущие силы $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta$ и внутренние сопротивления ρ_α, ρ_β и получить сакральное соотношение между шестью силами токов $\mathcal{J}_{\alpha i},\ \mathcal{J}_{\alpha k},\ \mathcal{J}_{\alpha m},\ \ \mathcal{J}_{\beta i}, \mathcal{J}_{\beta k}, \mathcal{J}_{\beta m}$

$$\begin{vmatrix} I_{\alpha i} & I_{\alpha k} & I_{\alpha m} \\ I_{\beta i} & I_{\beta k} & I_{\beta m} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где $I_{\alpha i} = \frac{1}{J_{\alpha i}}$, вид которого не зависит от выбора проводников i, k, m и источников тока α, β .

Из этого тождества следует определение электродвижущей силы источника тока

$$\mathcal{E}_\alpha = (R_2 - R_0) \cdot \frac{\mathcal{J}_{\alpha 0}\mathcal{J}_{\alpha 2}}{\mathcal{J}_{\alpha 0} - \mathcal{J}_{\alpha 2}}$$

внутреннего сопротивления

$$\rho_\alpha = \frac{R_2\mathcal{J}_{\alpha 2} - R_0\mathcal{J}_{\alpha 0}}{\mathcal{J}_{\alpha 0} - \mathcal{J}_{\alpha 2}}$$

и сопротивления проводника

$$R_i = \frac{R_2\mathcal{J}_{12}(\mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_{1i}) - R_0\mathcal{J}_{10}(\mathcal{J}_{12} - \mathcal{J}_{1i})}{\mathcal{J}_{1i}(\mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_{12})}$$

В завершение приводится предварительная формулировка физической структуры ранга (2,3) и на примере закона Ома для всей цепи даётся физическая интерпретация основных понятий Теории физических структур.

Глава 5

Закон Ома – простейший пример физической структуры ранга (2,3)

Именно переход с одной ступени на другую, более высокую – от явления к законам природы, от законов природы к симметрии, или принципам инвариантности, – представляет собой то, что я называю иерархией нашего знания об окружающем мире [2].

— Юджин Поль Вигнер

§ 1. Что стоит за законом Ома?

Легко показать, что закон Ома для участка цепи

$$\mathcal{J} = \frac{U}{R} \tag{1}$$

с точностью до обозначения и физической интерпретации имеет то же самое строение или, другими словами, ту же самую физическую структуру, что и только что рассмотренный закон Ньютона. В самом деле, полагая

$$I_{\alpha i} = \frac{1}{\mathcal{J}_{\alpha i}}, \qquad x_i = R_i, \qquad \xi_\alpha = \frac{1}{U_\alpha},$$

где R_i — сопротивление проводника i ,
U_α — разность потенциалов на выходе источника напряжения α ,
$\mathcal{J}_{\alpha i}$ — сила тока через проводник i при подключении его к источнику напряжения α ,
получаем каноническую форму закона Ома для участка цепи:

$$I_{\alpha i} = \xi_\alpha \cdot x_i, \tag{2}$$

совпадающую с канонической формой закона Ньютона.

Что же касается закона Ома для всей цепи

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R+\rho}, \tag{3}$$

то его строение — его физическая структура – существенно отличается от физической структуры Второго закона механики Ньютона, и потому мы рассмотрим его более подробно.

Входящие в (3) физические величины — сила тока $\mathcal{J}$, сопротивление проводника R , электродвижущая сила $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление ρ источника тока имеют, как и в только что рассмотренном законе Ньютона, различную математическую природу. Так, сопротивление R_i является числовой функцией одной нечисловой переменной — проводника i , т. е.

$$R : \mathfrak{M} \to \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ — множество проводников $i, k, \ldots$,

электродвижущая сила $\mathcal{E}_\alpha$ и внутреннее сопротивление ρ_α являются числовыми функциями одной нечисловой переменной — источника тока α , т. е.

$$\mathcal{E} : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$$

$$\rho : \mathfrak{N} \to \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество источников тока $\alpha, \beta, \ldots$,

сила же тока $\mathcal{J}_{\alpha i}$ является числовой функцией двух нечисловых переменных — проводника i и источника тока α , то есть

$$\mathcal{J} : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}.$$

Итак, специально выделяя независимые нечисловые переменные $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, перепишем закон Ома (3) в виде:

$$\mathcal{J}_{\alpha i} = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + \rho_\alpha}. \qquad (4)$$

Таким образом, закон Ома в форме (4) представляет собой связь между существенно разнородными физическими величинами – **одноиндексными** сопротивлением R_i проводника i , электродвижущей силой $\mathcal{E}_\alpha$ и внутренним сопротивлением ρ_α источника тока α с одной стороны и **двухиндексной** силой тока $\mathcal{J}_{\alpha i}$ с другой, то есть

$$\mathcal{J}_{\alpha i} = \varphi(\mathcal{E}_\alpha, \rho_\alpha; R_i) = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + \rho_\alpha}.$$

Назовём соотношение

$$I_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i + \eta_\alpha, \qquad (5)$$

где

$$I_{\alpha i} = \frac{1}{J_{\alpha i}}$$

$$x_i = R_i, \qquad \xi_\alpha = \frac{1}{\mathcal{E}_\alpha}, \qquad \eta_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\mathcal{E}_\alpha}$$

канонической формой закона Ома для всей цепи.

Заметим, что, строго говоря, единственной измеряемой величиной в этом примере является сила тока $\mathcal{J}_{\alpha i}$. В связи с этим перепишем закон Ома (4) в виде, не содержащем ни сопротивления R_i , ни электродвижущей силы $\mathcal{E}_\alpha$, ни внутреннего сопротивления ρ_α . Чтобы исключить все сопротивления, электродвижущие силы и внутренние сопротивления, нужно взять, как показывает простой перебор вариантов, по крайней мере **три** $(r = 3)$ проводника $i, k, m \in \mathfrak{M}$ и **два** $(s = 2)$ источника α, β . Итак, запишем шесть $k = r \cdot s = 6$ равенств:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\alpha i} &= \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + \rho_\alpha} & \qquad \mathcal{J}_{\beta i} &= \frac{\mathcal{E}_\beta}{R_i + \rho_\beta} \\ \mathcal{J}_{\alpha k} &= \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_k + \rho_\alpha} & \qquad \mathcal{J}_{\beta k} &= \frac{\mathcal{E}_\beta}{R_k + \rho_\beta} \\ \mathcal{J}_{\alpha m} &= \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_m + \rho_\alpha} & \qquad \mathcal{J}_{\beta m} &= \frac{\mathcal{E}_\beta}{R_m + \rho_\beta}, \end{aligned} \tag{6}$$

содержащих семь $(N = mr + ns = 1\cdot 3 + 2\cdot 2 = 7)$ неизвестных $R_i.R_k, R_m; \mathcal{E}_\alpha, \rho_\alpha, \mathcal{E}_\beta, \rho_\beta$.

Обратим при этом внимание на то, что проводник i характеризуется **одним** $(m = 1)$ параметром – сопротивлением R_i , а источник тока α характеризуется уже **двумя** $(n = 2)$ параметрами – электродвижущей силой $\mathcal{E}_\alpha$ и внутренним сопротивлением ρ_α .

Другими словами, множество проводников $\mathfrak{M}$ одномерно, а множество источников тока $\mathfrak{N}$ двумерно.

Итак, мы имеем **шесть** уравнений (6) содержащих **семь** неизвестных $R_i.R_k, R_m; \mathcal{E}_\alpha, \rho_\alpha, \mathcal{E}_\beta, \rho_\beta$. Особенность этой системы состоит в том, что из шести уравнений (6) можно можно исключить все семь неизвестных, получив при этом одно соотношение между токами

$$\begin{matrix} \mathcal{J}_{\alpha i} & \mathcal{J}_{\alpha k} & \mathcal{J}_{\alpha m} \\ \\ \mathcal{J}_{\beta i} & \mathcal{J}_{\beta k} & \mathcal{J}_{\beta m} \end{matrix}$$

Исключая из шести уравнений (6) семь неизвестных, получаем следующее соотношение между шестью значениями тока $\mathcal{J}_{\alpha i}$ или между шестью их обратными значениями $I_{\alpha i} = \dfrac{1}{\mathcal{J}_{\alpha i}}$:

$$\forall i, k, m \in \mathfrak{M} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$$

$$\begin{vmatrix} \mathcal{J}_{\alpha i} & \mathcal{J}_{\alpha i} & \mathcal{J}_{\alpha m} \\ \mathcal{J}_{\beta i} & \mathcal{J}_{\beta i} & \mathcal{J}_{\beta m} \\ \mathcal{J}_{\alpha i}\mathcal{J}_{\beta i} & \mathcal{J}_{\alpha i}\mathcal{J}_{\beta k} & \mathcal{J}_{\alpha m}\mathcal{J}_{\beta m} \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

или

$$\begin{vmatrix} I_{\alpha i} & I_{\alpha k} & I_{\alpha m} \\ I_{\beta i} & I_{\beta k} & I_{\beta m} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Соотношение (8) мы будем называть **сакрально-ивариантной** формой закона Ома для всей цепи.

Оно не содержит ничего, кроме измеряемых на опыте сил токов (точнее, их обратных значений $I_{\alpha i} = \mathcal{J}_{\alpha i}^{-1}$) и может быть, таким образом, подвергнуто непосредственной экспериментальной проверке.

Итак, фундаментальное соотношение (8) или (7) получено нами как очевидное следствие из закона Ома (4). Но, с другой стороны, можно показать, что каноническая форма закона Ома (5) (или (4)), в свою очередь, может быть получена как следствие из сакрального соотношения (8).

Только заметим при этом, что параметры $x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$, входящие в правую часть выражения (5), не определяются однозначно, так как существует двухпараметрическая группа преобразований[32]

$$x = c_1(\overline{x} - c_2)$$

$$\xi = \frac{1}{c_1}\overline{\xi}$$

$$\eta = \overline{\eta} + c_2\overline{\xi},$$

сохраняющая вид выражения

$$\xi_\alpha x_i + \eta_\alpha = \overline{\xi}_\alpha \overline{x}_i + \overline{\eta}_\alpha.$$

Чтобы перейти от сакрально-инвариантной формы закона Ома (8) к канонической (5), назовём два произвольных проводника, например k и m , и один произвольный источник тока, например β , “эталонным” и переобозначим их, соответственно, через “2”, “0” и “1”. Полагая в (8) $k = 2$, $m = 0$, $\beta = 1$, будем иметь:

$$\begin{vmatrix} I_{\alpha i} & I_{\alpha 2} & I_{\alpha 0} \\ I_{1i} & I_{12} & I_{10} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{\alpha i} - I_{\alpha 0} & I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0} \\ I_{1i} - I_{10} & I_{12} - I_{10} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Далее имеем:

$$I_{\alpha i} - I_{\alpha 0} = \frac{I_{1i} - I_{10}}{I_{12} - I_{10}} \cdot (I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0})$$

или

$$I_{\alpha i} = (I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}) \left(\frac{I_{1i} - I_{10}}{I_{12} - I_{10}} + \frac{I_{\alpha 0}}{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}} \right). \tag{9}$$

Полученное соотношение (9) сохраняет свой вид при внесении в него двух произвольных параметров c_1 и c_2 :

$$I_{\alpha i} = \frac{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}}{c_1} \cdot c_1 \left(\frac{I_{1i} - I_{10}}{I_{12} - I_{10}} - c_2 + \frac{I_{\alpha 0}}{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}} + c_2 \right) = \frac{R_i + \rho_\alpha}{\mathcal{E}_\alpha}.$$

---

[32]Постоянная c_1 зависит от выбора системы единиц, а постоянная c_2 определяется выбором начала отсчёта величины сопротивления.

§ 2. Сопротивление проводника, ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока как сакральные инварианты

Таким образом, получаем следующие выражения
для электродвижущей силы источника тока α

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{c_1}{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}},$$

для внутреннего сопротивления источника тока α

$$\rho_\alpha = c_1 \left(\frac{I_{\alpha 0}}{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}} + c_2 \right)$$

и для сопротивления проводника i

$$R_i = c_1 \left(\frac{I_{1i} - I_{10}}{I_{12} - I_{10}} - c_2 \right),$$

содержащие две произвольные постоянные c_1 и c_2 .

Чтобы найти эти постоянные, припишем эталонным проводникам "0" и "2" произвольные значения сопротивлений R_0 и R_2 . При этом будем иметь

$$R_0 = -c_1 c_2$$

$$R_2 = c_1(1 - c_2),$$

откуда получаем:

$$c_1 = R_2 - R_0;$$

$$c_2 = -\frac{R_0}{R_2 - R_0}$$

Итак, в самом общем случае имеем следующие выражения для $\mathcal{E}_\alpha$, ρ_α и R_i через измеряемые на опыте силы токов $\mathcal{J}_{\alpha i}$:

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{R_2 - R_0}{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}} = (R_2 - R_0) \cdot \frac{\mathcal{J}_{\alpha 0}\mathcal{J}_{\alpha 2}}{\mathcal{J}_{\alpha 0} - \mathcal{J}_{\alpha 2}} \tag{10}$$

$$\rho_\alpha = \frac{R_2 I_{\alpha 0} - R_0 I_{\alpha 2}}{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}} = \frac{R_2 \mathcal{J}_{\alpha 2} - R_0 \mathcal{J}_{\alpha 0}}{\mathcal{J}_{\alpha 0} - \mathcal{J}_{\alpha 2}} \tag{11}$$

$$R_i = \frac{R_2(I_{1i} - I_{10}) - R_0(I_{1i} - I_{12})}{I_{12} - I_{10}} =$$

$$= \frac{R_2 \mathcal{J}_{12}(\mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_{1i}) - R_0 \mathcal{J}_{10}(\mathcal{J}_{12} - \mathcal{J}_{1i})}{\mathcal{J}_{1i}(\mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_{12})} \tag{12}$$

Если в качестве эталонного проводника "0" взять "проводник короткого замыкания" и приписать ему значение сопротивления $R_0 = 0$, то формулы (10), (11) и (12) в этом случае примут свой окончательный вид:

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{R_2}{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}} = R_2 \cdot \frac{\mathcal{J}_{\alpha 0}\mathcal{J}_{\alpha 2}}{\mathcal{J}_{\alpha 0} - \mathcal{J}_{\alpha 2}}$$

$$\rho_\alpha = R_2 \frac{I_{\alpha 0}}{I_{\alpha 2} - I_{\alpha 0}} = R_2 \frac{\mathcal{J}_{\alpha 2}}{\mathcal{J}_{\alpha 0} - \mathcal{J}_{\alpha 2}}$$

$$R_i = R_2 \frac{I_{1i} - I_{10}}{I_{12} - I_{10}} = R_2 \frac{\mathcal{J}_{12}(\mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_{1i})}{\mathcal{J}_{1i}(\mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_{12})}$$

Таким образом, исходя из соотношения (7),связывающего между собой измеряемые на опыте силы токов $\mathcal{J}_{\alpha i}$, мы получили хорошо известный ещё из средней школы закон Ома для всей цепи

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R} + \rho}$$

и попутно – конкретные выражения для электродвижущей силы $\mathcal{E}$, внутреннего сопротивления ρ и сопротивления R .

Итак, мы убедились в том, что закон Ома для всей цепи может быть записан в двух эквивалентных формах:

в канонической

$$I_{\alpha i} = \varphi(\xi_\alpha, \sigma_\alpha; x_i) = \xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha$$

где $$I_{\alpha i} = \tfrac{1}{J_{\alpha i}}, \qquad \xi_\alpha = \tfrac{1}{\mathcal{E}_\alpha}, \qquad x_i = R_i, \qquad \sigma_\alpha = \tfrac{\rho_\alpha}{\mathcal{E}_\alpha}$$

и в сакрально-инвариантной

$$\begin{matrix} \Phi(I_{\alpha i}, & I_{\alpha k}, & I_{\alpha m} \\ I_{\beta i}, & I_{\beta k}, & I_{\beta m}) \end{matrix} = \begin{vmatrix} I_{\alpha i} & I_{\alpha k} & I_{\alpha m} \\ I_{\beta i} & I_{\beta k} & I_{\beta m} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Другими словами, мы можем сказать, что сила тока $\mathcal{J}_{\alpha i}$ через произвольный проводник i под действием произвольного источника тока α зависит вполне определённым образом от силы тока $\mathcal{J}_{\beta i}$ через проводник i под действием эталонного источника тока β , от сил токов $\mathcal{J}_{\alpha k}$, $\mathcal{J}_{\alpha m}$ через эталонные проводники k и m под действием источника тока α и, наконец, от сил токов $\mathcal{J}_{\beta k}$, $\mathcal{J}_{\beta m}$ через эталонные проводники k и m под действием эталонного источника тока β .

То есть Закон Ома для всей цепи представляет собой сакральное отношение между двумя кортами, левым $\langle \alpha\, \beta|$ и правым $|i\, k\, m\rangle$ (см.рис. 2).

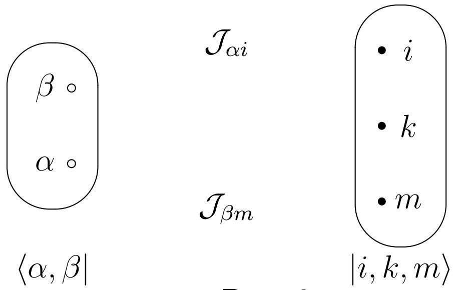


Рис. 2.

§ 3. Предварительное определение физической структуры ранга (2, 3).

Опираясь на этот пример, сформулируем понятие физической структуры ранга (2,3):

Рассмотрим два множества

$\mathfrak{N}=\{\alpha,\beta,\ldots\}$ – множество источников тока и

$\mathfrak{M}=\{i,k,\ldots\}$ – множество проводников.

Предварительный характер этого определения состоит в том, что с самого начала мы требуем существования следующих двух отображений

$$v:\mathfrak{N}\to\mathbb{R}^2\quad \alpha\mapsto\xi(\alpha),\eta(\alpha)$$
$$u:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}\quad i\mapsto x(i)$$

Мы будем говорить, что на множествах $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ размерности (2,1) определена **физическая структура** ранга (2,3), если существует вещественная функция трёх вещественных переменных

$$\varphi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$\xi,\eta;x\mapsto\varphi(\xi,\eta;x)$$

такая, что шесть функций

	x_1	x_2	x_3
ξ_1,η_1	$\varphi(\xi_1,\eta_1;x_1)$	$\varphi(\xi_1,\eta_1;x_2)$	$\varphi(\xi_1,\eta_1;x_3)$
ξ_2,η_2	$\varphi(\xi_2,\eta_2;x_1)$	$\varphi(\xi_2,\eta_2;x_2)$	$\varphi(\xi_2,\eta_2;x_3)$,

образованных из одной и той же функции $\varphi(\xi,\eta;x)$ путём всевозможной замены переменных ξ,η и x на новые переменные

$$\xi,\eta\to\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2$$

$$x\to x_1,x_2,x_3,$$

связаны между собой соотношением

$$\begin{matrix}\Phi(\varphi(\xi_1,\eta_1;x_1), & \varphi(\xi_1,\eta_1;x_2), & \varphi(\xi_1,\eta_1;x_3), \\ \varphi(\xi_2,\eta_2;x_1), & \varphi(\xi_2,\eta_2;x_2), & \varphi(\xi_2,\eta_2;x_3))\end{matrix}\equiv 0 \qquad (13)$$

или

$$\varphi(\xi_1,\eta_1;x_1) \equiv f(\varphi(\xi_1,\eta_1;x_2);\varphi(\xi_1,\eta_1;x_3);\varphi(\xi_2,\eta_2;x_1);\varphi(\xi_2,\eta_2;x_2);\varphi(\xi_2,\eta_2;x_3)) \tag{14}$$

представляющим собой тождество относительно независимых переменных $\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2;x_1,x_2,x_3$.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти неизвестные функции $\varphi(\xi,\eta;x)$ и

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{13} \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22}, & \varphi_{23}\end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad f(\varphi_{12},\varphi_{13},\varphi_{21},\varphi_{22},\varphi_{23}),$$

обращающие равенства (13) и (14) в тождества относительно системы независимых переменных $x_1,x_2,x_3;\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2$.

Эта задача была впервые решена Г. Г. Михайличенко [3], [4], [5] разработавшим общий метод решения необычных функциональных уравнений типа (13), возникающих в рамках теории физических структур.

Им было показано [5], что функциональное уравнение

$$\forall \xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2;x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi(\xi_1,\eta_1;x_1), & \varphi(\xi_1,\eta_1;x_2), & \varphi(\xi_1,\eta_1;x_3), \\ \varphi(\xi_2,\eta_2;x_1), & \varphi(\xi_2,\eta_2;x_2), & \varphi(\xi_2,\eta_2;x_3)\end{pmatrix} \equiv 0$$

относительно двух неизвестных функций

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\Phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$$

имеет **одно и только одно**(!) фундаментальное решение, определённое с точностью до эквивалентности

$$a(\xi,\eta;x) = \xi x + \eta$$

$$\Phi\begin{pmatrix}a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Общее решение получается из фундаментального путём произвольного преобразования аргументов

$$\varphi(\xi,\eta;x) = \psi(u(\xi,\eta)\cdot f(x) + v(\xi,\eta))$$

Итак, можно показать, что форма закона Ома для всей цепи

$$\mathcal{J}_{\alpha i} = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{R_i + \rho_\alpha}$$

и вид непосредственно связанного с ним соотношения

$$\begin{vmatrix} I_{\alpha i} & I_{\alpha k} & I_{\alpha m} \\ I_{\beta i} & I_{\beta k} & I_{\beta m} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

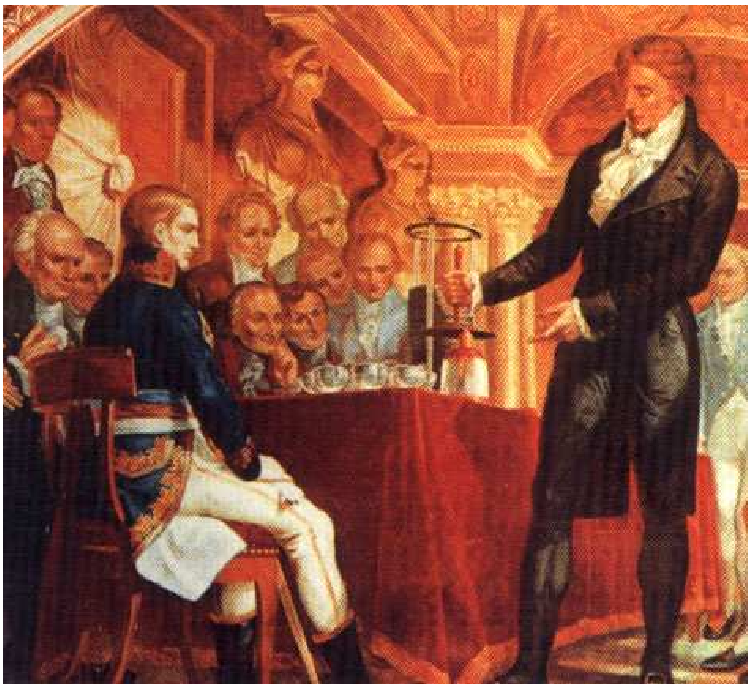
не являются случайными; они оказываются единственно возможными (с точностью до переобозначений), если в основание электродинамики постоянных токов положить принцип **сакральной инвариантности** ранга (2, 3), то есть требование, чтобы шесть сил токов

$$\begin{array}{c|ccc} & i & k & m \\ \hline \alpha & \mathcal{J}_{\alpha i} & \mathcal{J}_{\alpha k} & \mathcal{J}_{\alpha m} \\ \beta & \mathcal{J}_{\beta i} & \mathcal{J}_{\beta k} & \mathcal{J}_{\beta m}, \end{array}$$

относящиеся к двум $(s = 2)$ произвольным источникам тока α и β и к трём $(r = 3)$ произвольным проводникам i, k, m были бы связаны между собой одним, заранее неизвестным, функциональным соотношением:

$$\Phi\begin{pmatrix} \mathcal{J}_{\alpha i} & \mathcal{J}_{\alpha k} & \mathcal{J}_{\alpha m} \\ \mathcal{J}_{\beta i} & \mathcal{J}_{\beta k} & \mathcal{J}_{\beta m} \end{pmatrix} \equiv 0,$$

инвариантным относительно выбора **двух** источников тока α, β и **трёх** проводников i, k, m .



Nicola Clanfanelli, 1841 *Алессандро Вольта демонстрирует столб Наполеону*

Литература к главе 5

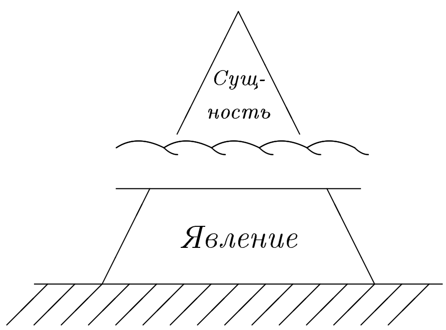
[1] **Творцы мировой науки:** от античности до XX века; Попул. биобиблиографич. энцикл. /Рос. гос. б-ка. – М.: Пашков дом, 2001. – С. 282.

[2] *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. - М.: Мир, 1971, С. 36.

[3] *Михайличенко Г. Г.* Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. // Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур. Новосибирск. НГУ. 1968. с. 175–226.

[4] *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур. // Доклады АН СССР. 1972. т. 206. №5 с. 1056–1058.

[5] Михайличенко Г. Г. Бинарные физические структуры ранга 3,2 // Сибирский математический журнал. 1973. т. 14. №5. с. 1057–1064.



Глава 6.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Salus per geometria[33]

Трудно назвать выдающегося геометра, который не отдал бы дани основаниям геометрии. Декарт, Лейбниц, Логранж, Лежандр, Фурье, Гаусс, Коши, Ампер – все эти творцы новой математики – люди, чрезвычайно различные по своим научным, философским, политическим установкам, – все размышляли об основаниях геометрии, старались, по выражению Н. И. Лобачевского, пролить свет на те "темные понятия, с которых, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию". Следует заметить при этом, что и объем, и содержание геометрии, а может быть и всей математики, глубоко изменились под влиянием идей, которые принесли с собой размышления над её основаниями, – что эти идеи положили чётко выраженную печать на всё построение теоретического естествознания [1].

— *В.Ф. Каган*

§ 1. Геометрия, физика и Теория физических структур.

§ 2. Возможно ли точное определение исходных понятий?

§ 3. Об одном замечании Эйнштейна.

§ 4. Наглядные соображения.

§ 5. Формула Герона.

§ 6. Квадраты объёма точки, длины отрезка, площади треугольника и объёма тетраэдра.

§ 7. r -точечные диагональные определители Кэли-Менгера и их связь с объёмами.

§ 8. Что же такое трёхмерное евклидово пространство?

[33] Спасение души через геометрию.

§ 9. А если определитель $\boldsymbol{\mathcal{K}_{ikmst;\ ikmst}(\ell^2)}$ не равен нулю?

§ 10. Трёхмерное евклидово пространство с точностью $\boldsymbol{\delta\ell.}$.

§ 11. Наш мир как четырёхмерный слой толщины $\boldsymbol{\Delta_4.}$.

§ 12. Наш мир как трёхмерное пространство постоянной кривизны.

§ 13. Существование “реального” (физического) пространства как опытный факт.

Renatus Cartesius – Рэне Декарт (1596 – 1650)

Французский философ, математик и естествоиспытатель, основатель современного рационализма.

Всё развитие, приведшее к перевороту в понимании геометрии, следует признать за здоровое и сильное движение. Подготавливаемое столетиями, значительно усилившееся в наши дни, оно никоим образом не может считаться уже законченным. Напротив, следует ожидать, что движение это принесёт ещё богатейшие плоды [2].

Эрнст Мах

Глава 6

Эмпирические основания евклидовой геометрии

§ 1. Геометрия, физика и Теория физических структур.

Евклидова геометрия должна считаться физической наукой. С точки зрения физика, существенное значение евклидовой геометрии состоит в том, что её законы не зависят от специфической природы тел, относительные положения которых она изучает.

— Альберт Эйнштейн

Эта глава имеет дело с основами теории, которая может рассматриваться как наиболее древняя часть физики, а именно, с основами евклидовой геометрии.

В течение почти ста лет обсуждается проблема "физического" пространства и особенно после создания неевклидовой геометрии, лежащей в основании общей теории относительности. Несмотря на это, в противоположность впечатлению, производимому некоторыми учебниками по физике, предмет этот ещё далёк от завершения. Проблема определения и интерпретации физических понятий часто игнорировалась частично потому, что методологическая строгость заменялась (и успешно) физической интуицией и частично потому, что проблемы безнадёжно перепутаны и трудны по существу.

В противоположность положению дел в математике, основания физики всё ещё находятся в "предбурбаковском" состоянии. В этой главе, по сути дела впервые, излагается новая точка зрения на евклидову геометрию с позиций Теории феноменологических структур.

Как известно, теория тяготения Эйнштейна отождествляет гравитационное поле с искривлением четырёхмерного пространства событий и таким образом сводит тяготение к геометрии. Возникла идея объединить гравитационное и электромагнитное поля в некоторое единое физическое поле, отождествляя его с новой обобщённой геометрией.

Эйнштейн посвятил этой идее более тридцати лет жизни, но ни один из выдвинутых вариантов единой теории поля не дал реальных результатов, и физики, в конце концов, отказались от мысли свести фундаментальные законы физики к геометрии. Однако, как показывают результаты, полученные в Теории физических структур, сама идея свед́ения фундаментальной физики к некоторой обобщённой геометрии не только не является абсурдной, но, напротив, оказывается чрезвычайно глубокой.

Можно строго показать, что все законы фундаментальной физики – те самые, которые мы обычно принимаем в качестве исходных постулатов (второй закон Ньютона в механике, принцип постоянства скорости света в теории относительности, первое и второе начала термодинамики, уравнения Максвелла в электродинамике, принцип суперпозиции и соотношение неопределённости в квантовой механике и т. д.), являются, в конечном итоге, теоремами некоторой обобщённой геометрии, названной мною **сакральной**. В сакральной геометрии мы будем различать левый (нижний) математический объект – $\langle\, \underline{i}\, |$ и правый (верхний) математический объект – $|\, \overline{k}\, \rangle$.

Заметим, что геометрия всегда рассматривалась как некоторая математическая структура, заданная на одном множестве $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$, состоящем из элементов $i, k, \ldots$ произвольной природы, называемых “точками”. В зависимости от той или иной системы исходных аксиом получаются различные пространства: евклидово пространство, пространства постоянной положительной и отрицательной кривизны, пространство аффинной связности, симплектическое пространство и, соответственно, – различные геометрии.

Но как бы ни были различными все традиционные геометрии, все они относятся к одному классу математических структур, заданных на одном множестве $\mathfrak{M}$.

Тщательный анализ самого́ понятия физического закона (не конкретного закона Ньютона или конкретных законов термодинамики, а физического закона вообще) привёл меня к созданию специальной метатеории – Теории физических структур – предметом изучения которой являются не конкретные физические явления или физические объекты (такие, как, например, твёрдые тела, конденсированные среды или элементарные частицы), а сами физические законы, рассматриваемые как специальные типы отношений между физическими объектами.

Одним из основных результатов Теории физических структур является установление глубокой связи между фундаментальными физическими законами и особой, принципиально новой, **сакральной геометрией**, наиболее адекватно описывающей физическую реальность. Заметим при этом, что “сакральная геометрия” – это, по сути дела, та же Теория физических структур, но изложенная на специфическом геометрическом языке, в котором широко используются такие понятия, как “точка” и “расстояние”.

Характерной особенностью такой сакральной геометрии является структура, заданная не на одном множестве $\mathfrak{M}$, как это имеет место для любой традиционной геометрии, а на двух множествах $\overline{\mathfrak{M}} = \{i, k, \ldots\}$ и $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, состоящих из элементов различной природы. (Будем для наглядности называть элементы из $\overline{\mathfrak{M}}$ “чёрными точками”, а элементы из $\underline{\mathfrak{N}}$ “белыми точками”. Тогда сакральная геометрия может быть наглядно интерпретирована как геометрия, различающая два типа точек – “белые” и “чёрные”).

Оказывается, что структура, заданная на двух множествах, более проста и, в то же самое время, более содержательна, чем известные до сих пор структуры на одном множестве, то есть традиционные геометрии. При этом сакральная геометрия переходит в обычную геометрию в том частном случае, когда множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ “совпадают”, то есть тогда, когда для каждого $i \in \mathfrak{M}$ существует единственный элемент $\alpha(i) \in \mathfrak{N}$ такой, что “расстояние” $\ell_{i\alpha(i)}$ между ними равно нулю. В этом случае пару $< i,\ \alpha(i) >$ естественно назвать “точкой” в традиционном смысле слова.

Заметим при этом, что основные физические величины, такие как расстояние, время, масса, сила, температура, энтропия, сопротивление, тензор электромагнитного поля и т. п., не вводятся в Теорию физических структур (представляющую собой сакральную геометрию, дополненную физической интерпретацией) извне “руками”, а возникают в ней естественным путём как своеобразные сакральные инварианты.

§ 2. Возможно ли точное определение исходных понятий?

Уже при традиционной формулировке основных законов механики – простейшей физической теории – предполагаются известными такие классические понятия, как трёхмерное евклидово пространство, декартовы координаты, время, скорость и ускорение, масса и сила, инерциальная система отсчёта. Эти понятия привычны с детства и потому наиболее трудны для анализа.

Так, Анри Пуанкаре (1854 – 1912) писал по этому поводу: “Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определения основным понятиям... Эти затруднения непреодолимы” [3].

Действительно, нельзя дать точные определения исходным понятиям, оставаясь в рамках традиционной теоретической физики. Для этого необходимо подняться на более высокий метатеоретический уровень – на уровень Теории физических структур.

Однако можно достичь значительного прогресса в понимании сущности многих физических величин и понятий (а именно эту цель преследует наш курс фундаментальной физики), достаточно долго оставаясь в рамках традиционного физического мировоззрения. И лишь в самый последний момент нам всё же придётся воспользоваться фундаментальными соотношениями, вытекающими как следствие из чрезвычайно общих и очевидных аксиом, лежащих в основании Теории физических структур.

Итак, начнём с вопросов:

- что такое евклидово пространство? и
- что такое декартовы координаты?

§ 3. Об одном замечании Эйнштейна.

Первыми, кто обратил внимание на то, что “евклидова геометрия ... содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путём”, были Мах и Эйнштейн.

Эйнштейн, рассматривая вопрос о связи геометрии с объектами природы, писал: “Физика занимает вопрос, справедливы ли теоремы геометрии.

То, что евклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путём, видно из следующего простого рассуждения.

Между N точками пространства существуют $\frac{1}{2}N(N-1)$ расстояний ℓ_{ik}; между ℓ_{ik} и $3N$ координатами имеют место соотношения

$$\ell_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 \quad (1)$$

Из этих $\frac{1}{2}N(N-1)$ уравнений можно исключить $3N$ координат, и тогда для ℓ_{ik} останется, по крайней мере, $\frac{1}{2}N(N-1) - 3N$ соотношений[34]. Поскольку ℓ_{ik} — измеряемые величины и, по определению, не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами ℓ_{ik} не являются необходимыми a priori" [20].

Ернст Мах (1838 – 1916)

Dr Ernst Mach

В другом месте Эйнштейн отмечает, что “Мах был единственным, кто серьёзно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками”.

Заметим, что факт существования и вид связи между расстояниями на прямой, на плоскости, в трёхмерном и n-мерном евклидовых пространствах, в пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны были известны математикам давно [13], [17], [18], [6]. О существовании упомянутых выше связей между расстояниями иногда говорится и в физической литературе, например, в книге Синга [19], в книге Вейнберга [8] или в книге Мизнера, Торна, Уилера [14].

Например, в книге Вейнберга мы можем прочитать следующее: “Существует простой пример, к которому обращались Эйнштейн, Уилер и др., чтобы проиллюстрировать, как исследование метрики поверхности позволяет изучить её внутренние свойства.

[34] Фактически, из-за специального вида уравнений (1) из приведённой системы можно исключить не $3N$, а только $3N-6$ и тогда для l_{ik} останется не $\frac{1}{2}N(N-1) - 3N$ соотношений, а $\frac{1}{2}N(N-1) - 3N + 6$. Однако ясно, что подобное уточнение не меняет существа дела. (– Ю.К.)

Рассмотрим N точек на плоскости (См. рис. 1). Одну из них примем за начало координат. Ось X проведём из начала координат через другую заданную точку, тогда расстояния между различными точками будут задаваться с помощью $2N-3$ координат, а именно с помощью x_2 – координаты второй точки и x – и y – координат остальных $N-2$ точек. Существует $\frac{1}{2}N(N-1)$ различных расстояний между N точками, и для достаточно больших N их можно связать M различными алгебраическими соотношениями, где $M = \frac{1}{2}N(N-1)-(2N-3) = \frac{1}{2}(N-2)(N-3)$. В простейшем нетривиальном случае $N = 4$ можно легко показать (!?), что расстояния ℓ_{ik} между i-той и k-той точками связаны соотношением:

$$\begin{gathered}
\ell_{12}^4\ell_{34}^2+\ell_{13}^4\ell_{24}^2+\ell_{14}^4\ell_{23}^2+\ell_{23}^4\ell_{14}^2+\ell_{24}^4\ell_{13}^2+\ell_{34}^4\ell_{12}^2+ \\
+\ell_{12}^2\ell_{23}^2\ell_{31}^2+\ell_{12}^2\ell_{24}^2\ell_{41}^2+\ell_{13}^2\ell_{34}^2\ell_{41}^2+\ell_{23}^2\ell_{34}^2\ell_{42}^2- \\
-\ell_{12}^2\ell_{23}^2\ell_{34}^2-\ell_{13}^2\ell_{32}^2\ell_{24}^2-\ell_{12}^2\ell_{24}^2\ell_{43}^2-\ell_{14}^2\ell_{42}^2\ell_{23}^2- \\
-\ell_{13}^2\ell_{34}^2\ell_{42}^2-\ell_{14}^2\ell_{43}^2\ell_{32}^2-\ell_{23}^2\ell_{31}^2\ell_{14}^2-\ell_{21}^2\ell_{13}^2\ell_{34}^2- \\
-\ell_{24}^2\ell_{41}^2\ell_{13}^2-\ell_{21}^2\ell_{14}^2\ell_{43}^2-\ell_{31}^2\ell_{12}^2\ell_{24}^2-\ell_{32}^2\ell_{21}^2\ell_{14}^2=0
\end{gathered}$$

Это соотношение удовлетворяется на любом односвязном участке поверхности или конуса, так как эти фигуры обладают теми же внутренними свойствами, что и плоскость”[8].

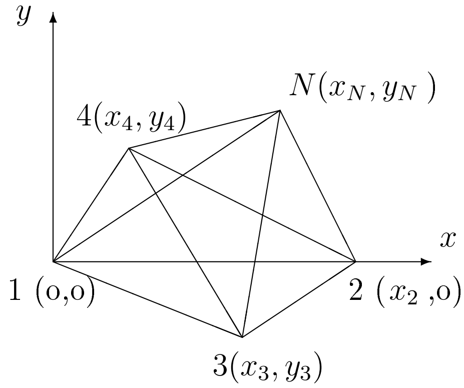


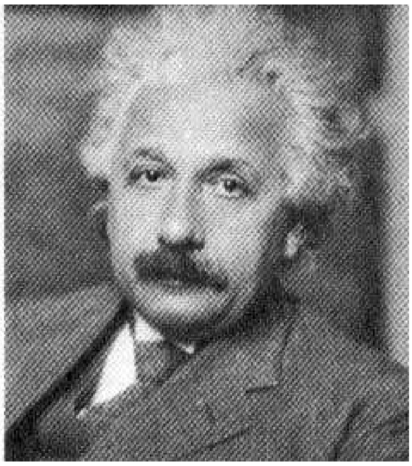
Рис.1. Выбор системы координат на плоскости по Вейнбергу [8].

Однако после Маха, пожалуй, только один Эйнштейн увидел в факте существования связи между расстояниями нетривиальную физическую проблему. Действительно, Вейнберг говорит об этой связи лишь как об иллюстрации существования внутренней геометрии любой поверхности, открытой ещё Гауссом, а Синг, приводя в своей “Общей теории относительности” [19] конкретный вид уравнения, связывающего *десять* взаимных расстояний между *пятью* произвольными точками трёхмерного евклидова пространства i, k, m, n, p

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ 1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ 1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ 1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ 1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

рассматривает его лишь как вспомогательное средство для экспериментального определения кривизны мировой линии наблюдателя при наличии гравитационного поля.

И только Эйнштейн взглянул на всю эту элементарную алгебру глазами физика–философа и, по-видимому, интуитивно почувствовал, что "евклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путём". Мысль, заключённая в словах Эйнштейна о том, что факт существования соотношения между измеряемыми на опыте расстояниями имеет нетривиальное происхождение и отражает наиболее глубокие физические свойства системы материальных точек, является, на мой взгляд, чрезвычайно плодотворной.



Альберт Эйнштейн
(1879 – 1955)

Поэтому всё дальнейшее изложение Теории физических структур мы будем осуществлять лишь как последовательное развитие этой, по существу своему простой, идеи.

§ 4. Наглядные соображения.

Философия природы написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами, – я разумею Вселенную, но понять её сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена её – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых нельзя понять по-человечески её слова: без них – тщетное кружение в темном лабиринте.

— Галилео Галилей

Сегодня нас может удивить, что Галилей считал "буквами" того языка, на котором записаны все законы природы, "треугольники, окружности и другие геометрические фигуры". Но ведь единственной математикой, доступной Галилею, была геометрия древних греков, а до открытия дифференциального и интегрального исчисления (в значительной степени стимулированных трудами Галилея) и возникновения концепции дифференциального уравнения оставалось больше полувека [10].

Эта книга предназначена для читателя, подготовленного вековыми традициями – физикой и математикой, которым он обучался в школе и в университете, и потому привыкшего мыслить образами, оперировать наглядными представлениями, опираясь на традиционное физическое мировоззрение. Не будем отучать его от этого, не говоря уже – вооружать его против этого. Необходимо переходить к новому физическому мировоззрению по возможности постепенно и плавно.

Итак, рассмотрим конечное множество

$$\mathfrak{M} = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\},$$

состоящее из N произвольно расположенных в трёхмерном пространстве точек. Можно ли утверждать, что несмотря на совершенно произвольное их расположение существует вполне определённый физический закон (то есть закон, справедливость которого может быть установлена экспериментальным путём), которому подчиняются все точки множества $\mathfrak{M}$?

Оказывается, что такой закон действительно существует. Чтобы обнаружить его, необходимо рассмотреть все возможные пары точек из $\mathfrak{M}$ (их будет $\frac{1}{2}N(N-1)$) и сопоставить каждой паре экспериментально измеряемую величину, характеризующую взаимное расположение точек. В качестве такой измеряемой на опыте величины примем в простейшем случае расстояние, измеренное, например, с помощью обычной масштабной линейки.

Сопоставляя каждой паре точек (i, k) расстояние ℓ_{ik}, мы получим набор опытных данных, полностью характеризующих данное множество $\mathfrak{M}$, который может быть представлен в виде следующей симметрической матрицы:

	i_1	i_2	i_3	$\ldots$	i_N
i_1	0	ℓ_{12}	ℓ_{13}	$\ldots$	ℓ_{1N}
i_2	ℓ_{12}	0	ℓ_{23}	$\ldots$	ℓ_{2N}
i_3	ℓ_{13}	ℓ_{23}	0	$\ldots$	ℓ_{3N}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
i_N	ℓ_{1N}	ℓ_{2N}	ℓ_{3N}	$\ldots$	0

где

$$\ell_{ik} = \ell_{p_i p_k}$$

Ясно, что взаимные расстояния ℓ_{ik} ℓ_{im} ℓ_{km} между *тремя* произвольными точками $i, k, m \in \mathfrak{M}$ не могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, так как при фиксированных расстояниях ℓ_{ik} и ℓ_{im} третье расстояние ℓ_{km} может принимать различные значения от $|\ell_{ik} - \ell_{im}|$ до $\ell_{ik} + \ell_{im}$
то есть $|\ell_{ik} - \ell_{im}| \leqslant \ell_{km} \leqslant \ell_{ik} + \ell_{im}$. (см. рис. 2).

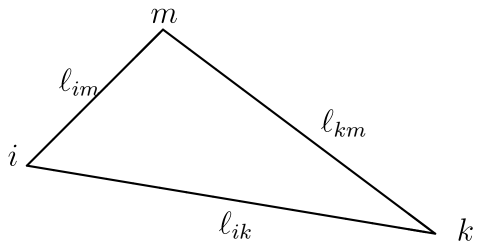


Рис. 2. Тройка точек $\{i,k,m\} \subset \mathfrak{M}$. При фиксированных значениях ℓ_{ik} и ℓ_{im} значение ℓ_{km} не определено.

Точно так же обстоит дело, если взять *четыре* произвольные точки $i,k,m,n \in \mathfrak{M}$ (см. рис. 3) и рассмотреть зависимость между *шестью* взаимными расстояниями

$$\begin{array}{ccc} \ell_{ik} & \ell_{im} & \ell_{in} \\ & \ell_{km} & \ell_{kn} \\ & & \ell_{mn} \end{array}$$

При фиксированных пяти расстояниях ℓ_{ik} ℓ_{im} ℓ_{in} ℓ_{km} ℓ_{kn} шестое расстояние ℓ_{mn} может принимать различные значения из некоторого интервала (см. рис. 3):

$$\Psi_-(\ell_{ik},\ell_{im},\ell_{in},\ell_{km},\ell_{kn}) \leqslant \ell_{mn} \leqslant \Psi_+(\ell_{ik},\ell_{im},\ell_{in},\ell_{km},\ell_{kn}).$$

Но если взять *пять* произвольных точек $i,\ k,\ m,\ n,\ p \in \mathfrak{M}$ (см. рис. 4), то одно из *десяти* взаимных расстояний

$$\begin{array}{cccc} \ell_{ik} & \ell_{im} & \ell_{in} & \ell_{ip} \\ & \ell_{km} & \ell_{kn} & \ell_{kp} \\ & & \ell_{mn} & \ell_{mp} \\ & & & \ell_{np} \end{array}$$

является двузначной функцией остальных девяти.

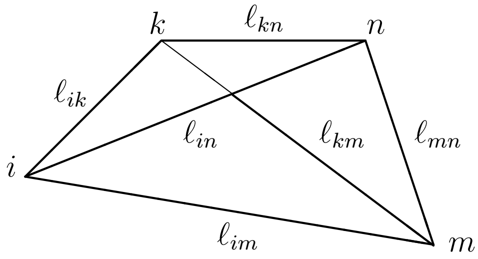


Рис. 3. Четвёрка точек $\{i,k,m,n\} \subset \mathfrak{M}$. При фиксированных расстояниях $\ell_{ik},\ell_{im},\ell_{in},\ell_{km},\ell_{kn}$ расстояние ℓ_{mn} не определено.

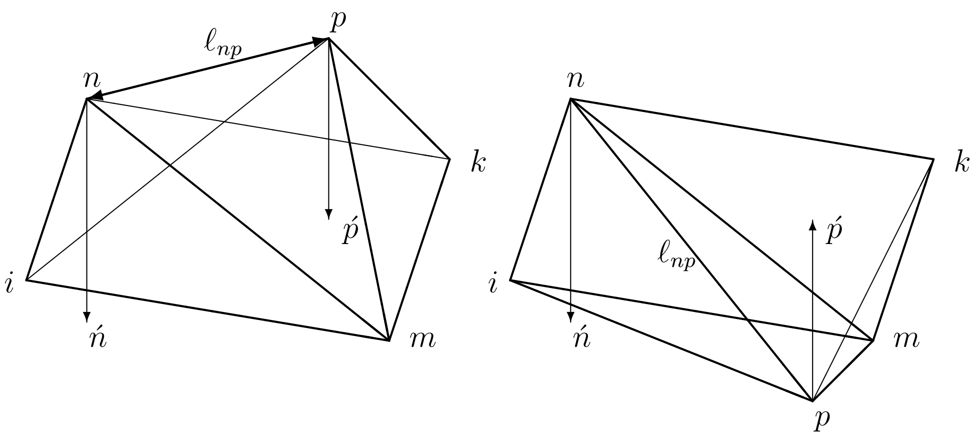


Рис. 4. Пятёрка точек $\{i,\ k,\ m,\ n,\ p\} \subset \mathfrak{M}$. Девять расстояний $\ell_{ik},\ \ell_{im},\ \ell_{in},\ \ell_{ip},\ell_{km},\ \ell_{kn},\ \ell_{kp},\ \ell_{mn},\ \ell_{mp}$ определяют собой два воможных значения расстояния ℓ_{np}.

Итак, для любых пяти точек трёхмерного евклидова пространства существует функциональная связь между их взаимными расстояния-

ми, вид которой не зависит от выбора этих точек.

Чтобы получить наиболее естественным путём конкретное выражение для этой функции, имеющей для понимания дальнейшего чрезвычайно важное значение, в следующем параграфе мы подробно рассмотрим понятие *объёма*, представляющее собой одно из фундаментальных понятий Теории физических структур.

§ 5. Формула Герона.

Не иди по следам древних, но ищи то, что искали они.
— Кобо-дайси (774 - 835) (Великий учитель Южной горы, буддийский проповедник, поэт, писатель и учёный.)
—

Это может показаться удивительным и странным, но именно формула Герона, содержащаяся в “Метрике” Герона Александрийского (65 – 150 гг. н.э.) и известная ещё Архимеду (III в. до н.э.), может стать той щелью, через которую можно заглянуть в мир физических структур.

Итак, чтобы реконструировать ход мысли античных математиков, напомним вывод хорошо известной ещё из средней школы формулы Герона, выражающей площадь треугольника S_{ikm} через длины его сторон ℓ_{ik} , ℓ_{im} , ℓ_{km} .

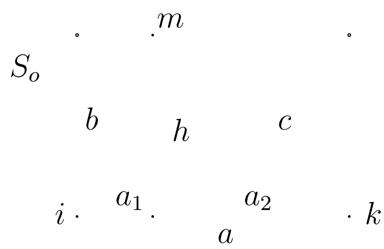


Рис. 5. К выводу формулы Герона.

Исходим из представления, что площадь прямоугольника S_o равна произведению его сторон h и a . Отсюда площадь треугольника

$$S = \tfrac{1}{2}S_o = \tfrac{1}{2}ha.$$

Высота h и три стороны a, b, c связаны между собой посредством двух вспомогательных сторон a_1 и a_2 следующими тремя соотношениями;

$$h^2 = b^2 - {a_1}^2,$$
$$h^2 = c^2 - {a_2}^2,$$
$$a = a_1 + a_2.$$

Исключая вспомогательные величины a_1 и a_2 , получаем следующее выражение для h^2 :

$$h^2 = \tfrac{1}{4c^2}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Таким образом, выражение для квадрата площади треугольника приобретает вид:

$$S^2 = \tfrac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Замечая, что

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$$
$$= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c), \qquad (2)$$

получаем
$$S^2 = \tfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

или

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \tag{3}$$

где
$$p = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Но выражение $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ помимо представления (2) допускает ещё одно, ещё более красивое, представление в виде определителя четвёртого порядка (!):

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a^2 & b^2 \\ -1 & a^2 & 0 & c^2 \\ -1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, выражение для квадрата площади треугольника приобретает следующий вид:

$$S^2 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a^2 & b^2 \\ -1 & a^2 & 0 & c^2 \\ -1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Предвидя дальнейшее обобщение формулы (4) на случай объёма тетраэдра, представим множитель $1/16$ в виде

$$\tfrac{1}{16} = \tfrac{(-1)^2}{2^2\ (2!)^2},$$

введём следующие обозначения:

$$S = S_{ikm}$$

$$a = \ell_{ik}\,; \quad b = \ell_{im}\,; \quad c = \ell_{km}$$

и перепишем формулу (4) в окончательном виде:

$$\boxed{S^2_{ikm} = \tfrac{(-1)^2}{2^2\ (2!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 \end{vmatrix}} \tag{5}$$

Сравнивая оба выражения (3) и (5), заметим, что очень трудно, а практически невозможно, обобщить формулу (3) на случай квадрата объёма тетраэдра, в то время как из формулы (5) это обобщение следует естественным образом.

§ 6. Квадраты объёма точки, длины отрезка, площади треугольника и объёма тетраэдра.

Хотя идеи, на которых основан метод аналитической геометрии, детски просты, тем не менее этод метод настолько мощен, что, применяя его, рядовые семнадцатилетние мальчики могут решать задачи, которые поставили бы в тупик величайших из греческих геометров – Евклида, Архимеда и Аполлония [7].

— *Э.Т. Белл (1883 – 1960)*

Имея формулу (5) для квадрата площади треугольника, легко обобщить её на случай симплекса любой размерности.

Таким образом, имеем следующие выражения:

$\boldsymbol{n=0}$ для квадрата объёма точки v_i

$$v_i^2 = \frac{(-1)^o}{2^o\ (0!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \tag{6}$$

$\boldsymbol{n=1}$ для квадрата длины отрезка ℓ_{ik}

$$\ell_{ik}^2 = \frac{(-1)^1}{2^1\ (1!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 \end{vmatrix}; \tag{7}$$

$\boldsymbol{n=2}$ для квадрата площади треугольника S_{ikm}
(формула Герона Александрийского (65 – 150 гг.н.э.))

$$S_{ikm}^2 = \frac{(-1)^2}{2^2\ (2!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix}; \tag{8}$$

$\boldsymbol{n=3}$ для квадрата объёма тетраэдра V_{ikmp}
(формула Никколо Тартальи (1500 – 1557 гг.))

$$V_{ikmp}^2 = \frac{(-1)^3}{2^3\ (3!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Обращает на себя внимание несколько неожиданное утверждение, что объём точки v_i равен 1. Прежде всего возникает вопрос – в каких единицах? Мы хорошо знаем, что длина измеряется, например, в метрах (m^1), площадь – в метрах квадратных (m^2), объём – в метрах кубических (m^3). Следовательно, объём нульмерного объекта – точки – должен измеряться в m^o , то есть быть безразмерным, или, другими словами, должен измеряться в "естественных" единицах, не зависящих от выбора эталона длины.

Из-за множителя $(-1)^n$ выражения, стоящие в правых частях формул (5), (6)–(9) всегда являются положительно определёнными.

Коэффициенты
$$\frac{1}{2^n\ (n!)^2}$$
выбраны так, чтобы объём элементарного куба, с ребром, равным единице длины, был бы равен единице.

§ 7. $\boldsymbol{r}$ -точечные диагональные определители Кэли-Менгера и их связь с объёмами.

Итак, формула Герона, записанная в виде (3), (4) и (5), породила целое семейство определителей, представляющих собой функции $\frac{1}{2}r(r-1)$ квадратов расстояний между произвольными r точками:
$$\begin{matrix} \ell^2_{i_1 i_2} & \ell^2_{i_1 i_3} & \dots & \ell^2_{i_1 i_r} \\ & \ell^2_{i_2 i_3} & \dots & \ell^2_{i_2 i_r} \\ & & \dots & \dots \\ & & & \ell^2_{i_{r-1} i_r}. \end{matrix}$$
Эти определители, называемые **$\boldsymbol{r}$ -точечными диагональными определителями Кэли-Менгера** [6], [11], имеют следующий вид:

одноточечный диагональный определитель Кэли-Менгера
$$\mathcal{K}_{i;i}(\ell^2) = (-1)^o \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$
двухточечный диагональный определитель Кэли-Менгера
$$\mathcal{K}_{ik;ik}(\ell^2) = (-1)^1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 \end{vmatrix};$$
трёхточечный диагональный определитель Кэли-Менгера
$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}(\ell^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 \end{vmatrix};$$
четырёхточечный диагональный определитель Кэли-Менгера
$$\mathcal{K}_{ikmp;ikmp}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{ip} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kp} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mp} \\ -1 & \ell^2_{ip} & \ell^2_{kp} & \ell^2_{mp} & 0 \end{vmatrix};$$

. . . .

r -точечный диагональный определитель Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\ell^2) = (-1)^{r-1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{i_1i_2} & \ldots & \ell^2_{i_1i_r} \\ -1 & \ell^2_{i_1i_2} & 0 & \ldots & \ell^2_{i_2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ell^2_{i_1i_r} & \ell^2_{i_2i_r} & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

Нижние индексы $i_1\ldots i_r; i_1\ldots i_r$ у символа $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\ell^2)$ дублируются [4], чтобы подчеркнуть, что r -точечные диагональные определители Кэли-Менгера являются частным случаем более общих $2\cdot r$ -точечных недиагональных определителей Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(\ell^2)$.

r -точечные диагональные определители Кэли-Менгера являются фундаментальными инвариантами, то есть функциями исходных инвариантов – квадратов расстояний $\ell^2_{ik;n} = (x_1(i)-x_1(k))^2+\ldots+(x_n(i)-x_n(k))^2$ и имеют простой геометрический смысл: каждый такой определитель с точностью до множителя равен квадрату объёма соответствующего симплекса[35]:

$$\mathcal{K}_{i;i}(\overset{0}{\ell}{}^2) = 2^0\ (0!)^2\ (v_i)^2;$$

$$\mathcal{K}_{ik;ik}(\overset{1}{\ell}{}^2) = 2^1\ (1!)^2\ (\ell_{ik})^2;$$

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}(\overset{2}{\ell}{}^2) = 2^2\ (2!)^2\ (S_{ikm})^2;$$

$$\mathcal{K}_{ikmp;ikmp}(\overset{3}{\ell}{}^2) = 2^3\ (3!)^2\ (V_{ikmp})^2;$$

. . . .

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\overset{r-1}{\ell}{}^2) = 2^{r-1}\ ((r-1)!)^2\ (V_{i_1\ldots i_r})^2.$$

Известный английский математик Артур Кэли (1821 – 1895) первый показал, что квадраты взаимных расстояний между пятью точками трёхмерного евклидова пространства обращают в ноль определитель

$$\mathcal{K}_{ikmpq;ikmpq}(\ell^2_3) = (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik;3} & \ell^2_{im;3} & \ell^2_{ip;3} & \ell^2_{iq;3} \\ -1 & \ell^2_{ik;3} & 0 & \ell^2_{km;3} & \ell^2_{kp;3} & \ell^2_{kq;3} \\ -1 & \ell^2_{im;3} & \ell^2_{km;3} & 0 & \ell^2_{mp;3} & \ell^2_{mq;3} \\ -1 & \ell^2_{ip;3} & \ell^2_{kp;3} & ell^2_{mp;3} & 0 & \ell^2_{pq;3} \\ -1 & \ell^2_{iq;3} & \ell^2_{kq;3} & \ell^2_{mq;3} & \ell^2_{pq;3} & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$\ell^2_{ik;3} = (x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2.$$

[35]Итак, мы видим, что определители Кэли-Менгера позволяют выразить квадраты объёмов $n+2$ -точечных симплексов через квадраты расстояний между точками и уже поэтому играют важную роль в n -мерной евклидовой геометрии. Однако по непонятной причине о них нет даже упоминаний в пятитомной “Математической энциклопедии” (1977 – 1984) [12]

Коэффициент $(-1)^{r-1}$ вводится в выражение для r-точечного определителя Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\ell^2)$ для того, чтобы сделать этот определитель положительно определённым при любых r.

С другой стороны, Карл Менгер (р. 1902), заложивший в 1928 году основы абстрактной **геометрии расстояний**, широко использовал определитель $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_{n+2};i_1\ldots i_{n+2}}(\ell^2)$ для формулировки достаточных условий конгруэнтного вложения полуметрического набора $n+2$ точек в n-мерное евклидово пространство [6].

В связи с этим определители $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\ell^2)$ с полным правом могут быть названы r **-точечными определителями Кэли-Менгера.**

§ 8. Что же такое трёхмерное евклидово пространство?

Картезианское видение мира глубоко проникло в человеческий ум за три века, прошедшие после него, и нужно время, чтобы оно было вытеснено иным отношением к проблемам реальности.

— Вернер Гейзенберг

Начнём с понятия евклидовой прямой.

Определение 1.

Мы будем говорить, что точки $i,\ k,\ m,\ p,\ \ldots \in \mathfrak{M}_1$ лежат на евклидовой прямой $\mathfrak{M}_1$, если для любых **трёх** *точек $i,\ k,\ m$* **три** *квадрата расстояний*

$$\begin{matrix} \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} \\ & \ell^2_{km} \end{matrix}$$

обращают в ноль 3-точечный диагональный определитель Кэли-Менгера, то есть

$$\forall\ i,\ k,\ m\ \in \mathfrak{M}_1$$

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}(\ell^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

При этом запишем два неравенства, первое из которых тривиально и приведено здесь лишь из-за соображений полноты:

$$\mathcal{K}_{i;i} = 1$$

$$\mathcal{K}_{ik;ik} \geqslant 0$$

Аналогичным образом определим понятие евклидовой плоскости:

Определение 2.

Мы будем говорить, что точки $i,\ k,\ m,\ p,\ q\ldots \in \mathfrak{M}_2$ лежат на евклидовой плоскости $\mathfrak{M}_2$, если для любых **четырёх** *точек $i,\ k,\ m,\ p$* **шесть** *квадратов* *расстояний*

$$\begin{matrix} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 \\ & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 \\ & & \ell_{mp}^2 \end{matrix}$$

обращают в ноль 4-точечный определитель Кэли-Менгера, то есть

$$\forall\ i,\ k,\ m,\ p\ \in \mathfrak{M}_2$$

$$\mathcal{K}_{ikmp;ikmp}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

При этом должны выполняться три дополнительных условия:

$$\mathcal{K}_{i;i} = 1$$

$$\mathcal{K}_{ik;ik}\ \geqslant 0$$

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}\ \geqslant 0$$

Наконец, дадим определение трёхмерного евклидова пространства:

Определение 3.

Мы будем говорить, что на множестве точек $\mathfrak{M}_3 = \{i,\ k,\ m,\ p,\ \ldots\}$ имеет место структура трёхмерного евклидова пространства, если для любых пяти точек десять квадратов расстояний

$$\begin{matrix} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 & \ell_{iq}^2 \\ & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{kq}^2 \\ & & \ell_{mp}^2 & \ell_{mq}^2 \\ & & & \ell_{pq}^2 \end{matrix}$$

обращают в ноль 5-точечный определитель Кэли-Менгера, то есть

$$\forall\ i,\ k,\ m,\ p,\ q\ \in \mathfrak{M}_3$$

$$\mathcal{K}_{ikmpq;ikmpq}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 & \ell_{iq}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{kq}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mp}^2 & \ell_{mq}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & 0 & \ell_{pq}^2 \\ -1 & \ell_{iq}^2 & \ell_{kq}^2 & \ell_{mq}^2 & \ell_{pq}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

При этом должны выполняться четыре дополнительных условия:

$$\mathcal{K}_{i;i} = 1,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ik;ik} &\geqslant 0,\\ \mathcal{K}_{ikm;ikm} &\geqslant 0,\\ \mathcal{K}_{ikmp;ikmp} &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Приведённое выше определение трёхмерного евклидова пространства удобно, прежде всего, для физики, так как, в отличие от всех других известных определений [9], [1], [16], [5], позволяет **экспериментальным путём** установить факт существования евклидова пространства и определить его размерность, равную трём.

Другими словами, для произвольно выбранных точек трёхмерного евклидова пространства имеют место следующие соотношения между квадратами взаимных расстояний:

- положительная определённость квадрата расстояния[36]:

$$\forall i,k \in \mathfrak{M} \qquad (-1)^1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{10}$$

- неравенство треугольника:

$$\forall i,k,m \in \mathfrak{M} \qquad (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{11}$$

- неравенство тетраэдра:

$$\forall i,k,m,n \in \mathfrak{M} \qquad (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 \\ -1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{12}$$

и, наконец, самое главное

- *фундаментальный физический закон, лежащий в основании трёхмерной евклидовой геометрии,* допускающий непосредственную проверку на опыте:

$$\forall i,k,m,n,p \in \mathfrak{M} \qquad (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{13}$$

[36]не имеющая места, например, в псевдоевклидовом пространстве событий с метрикой $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

Итак, равенство нулю пятиточечного определителя Кэли-Менгера (13), дополненное неравенствами (10) – (12), представляет собой универсальный, общезначимый факт существования трёхмерного евклидова пространства, и потому может рассматриваться как один из наиболее глубоких и фундаментальных законов природы, допускающих непосредственную экспериментальную проверку.

Так что, если человек когда-нибудь достигнет далёких звёздных систем, то первый эксперимент, который там необходимо осуществить, должен ответить на вопрос – применима ли там для описания отношений между неподвижными телами трёхмерная евклидова геометрия?

Идея такого эксперимента чрезвычайно проста: необходимо взять достаточно большое число $N > 5$ неподвижных относительно друг друга тел, как можно точнее измерить расстояние между ними и, используя полученные из эксперимента данные, найти значения $C_N^5 = \frac{N!}{5!(N-5)!} = \frac{1}{5!}(N-4)(N-3)(N-2)(N-1)N$ определителей Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{ikmpq;ikmpq}(\ell^2) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{ip} & \ell^2_{iq} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kp} & \ell^2_{kq} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mp} & \ell^2_{mq} \\ -1 & \ell^2_{ip} & \ell^2_{kp} & \ell^2_{mp} & 0 & \ell^2_{pq} \\ -1 & \ell^2_{iq} & \ell^2_{kq} & \ell^2_{mq} & \ell^2_{pq} & 0 \end{vmatrix},$$

где $\{i, k, m, p, q\} \subset \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$.

Если все эти определители обращаются в ноль, то мы можем утверждать, что и в далёкой звёздной системе отношения между неподвижными телами описываются трёхмерной евклидовой геометрией, как и у нас на Земле.

§ 9. А если определитель $\mathcal{K}_{ikmst;\ ikmst}(\ell^2)$ не равен нулю?

Отклонение от нуля определителя $\mathcal{K}_{ikmst;\ ikmst}(\ell^2) \equiv \mathcal{K}_5 \equiv \varepsilon$ в принципе может быть обусловлено разными причинами.

Прежде всего такой причиной может быть

• систематическая погрешность измерения расстояния между двумя точками;

далее может оказаться, что

• наш мир, образно говоря, представляет собой очень тонкий плоский слой, расположенный в четырёхмерном евклидовом пространстве между двумя близкими трёхмерными гиперплоскостями;

может оказаться, что

• наш мир представляет собой трёхмерное пространство очень малой постоянной положительной или отрицательной кривизны;

и не исключена ещё одна альтернатива,что

• наш мир обладает структурой трёхмерного евклидова пространства лишь на достаточно больших расстояниях; на расстояниях же сравнимых или меньших некоторого предельного значения δ , отличного от нуля, в принципе отсутствует какая-либо структура.

Рассмотрим каждый из этих случаев более подробно.

§ 10. Трёхмерное евклидово пространство с точностью $\boldsymbol{\delta\ell}$.

Допустим, что *отклонение определителя* $\mathcal{K}_5$ *от нуля обусловлено обычной систематической погрешностью измерения расстояния.*

Поскольку любое измерение, и в том числе измерение расстояния, осуществляется с некоторой погрешностью $\delta\ell$, то, естественно, значение определителя Кэли-Менгера[37] $\mathcal{K}_5 \equiv \varepsilon^{(4\cdot2)}$ при наличии структуры трёхмерного евклидова пространства должно лежать в интервале $-\delta\mathcal{K}_5 < \varepsilon^{(4\cdot2)} < \delta\mathcal{K}_5$.

Так как явная зависимость определителя $\mathcal{K}_5$ от измеряемых на опыте расстояний ℓ_{ik}^2 известна

$$\varepsilon^{(4\cdot2)} = \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_{ikmst;ikmst} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ -1 & \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ -1 & \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

то возможное малое отклонение определителя Кэли-Менгера $\delta\mathcal{K}_5$ от нуля можно легко подсчитать, зная погрешность $\delta\ell$ при измерении расстояния ℓ :

$$\delta\mathcal{K}_5 = A(\ell^2)\ell\delta\ell.$$

Если подсчитанные по формуле (14) значения определителя $\varepsilon^{(4\cdot2)}$ при любом выборе тел $i,\ k,\ m,\ s,\ t \in \mathfrak{M}$ лежат в достаточно узком интервале

$$-\delta\mathcal{K}_5 < \varepsilon^{(4\cdot2)} < \delta\mathcal{K}_5,$$

то мы будем говорить, что на множестве реальных тел $\mathfrak{M}$ имеет место структура трёхмерного евклидова пространства с точностью $\delta\ell$.

Если же $|\varepsilon^{(4\cdot2)}| > \delta\mathcal{K}_5$,

то отклонение от нуля определителя $\varepsilon^{(4\cdot2)} = \mathcal{K}_5$ может быть обусловлено другими причинами.

[37]Обозначение $\mathcal{K}_5 \equiv \varepsilon^{(4\cdot2)}$ должно напоминать читателю, что определитель $\mathcal{K}_5$ имеет размерность квадрата четырёхмерного объёма, то есть $(\text{см}^4)^2$.

§ 11. Наш мир как четырёхмерный слой толщины $\boldsymbol{\Delta_4}$.

Допустим, что *отклонение определителя* $\mathcal{K}_5$ *от нуля обусловлено тем, что наш мир представляет собой очень тонкий плоский слой, расположенный в четырёхмерном евклидовом пространстве между двумя близкими трёхмерными гиперплоскостями.*

Прежде всего введём понятие *высоты* $(n+1)$ *-точечного симплекса* $\{i_1,\ldots\ldots,i_n,i_{n+1}\}$, то есть длины перпендикуляра h_{n+1} в n -мерном евклидовом пространстве, опущенного из точки i_{n+1} на n -точечный симплекс $\{i_1,\ldots,i_n\}$.

Измеряемые на опыте n -мерный объём $V^{(n)}_{i_1\ldots i_n i_{n+1}}$ $(n+1)$ -точечного симплекса $\{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}\}$ и $(n-1)$ -мерный объём $V^{(n-1)}_{i_1\ldots i_n}$ n -точечного симплекса $\{i_1,\ldots,i_n\}$ связаны с высотой h_{n+1} следующим образом:

$$V^{(n)}_{i_1\ldots i_n i_{n+1}} = \tfrac{1}{n}\, V^{(n-1)}_{i_1\ldots i_n}\, h_{n+1},$$

то есть

$$\begin{array}{rclcrcl}
V^{(1)}_{ik} &=& \frac{1}{1}\, V^{(o)}_i h_k & \text{или} & \ell_{ik} &=& \frac{1}{1}\, v_i h_k \\[2ex]
V^{(2)}_{ikm} &=& \frac{1}{2}\, V^{(1)}_{ik} h_m & \text{или} & S_{ikm} &=& \frac{1}{2}\, \ell_{ik} h_m \\[2ex]
V^{(3)}_{ikms} &=& \frac{1}{3}\, V^{(2)}_{ikm} h_s & \text{или} & V_{ikms} &=& \frac{1}{3}\, S_{ikm} h_s \\[2ex]
V^{(4)}_{ikmst} &=& \frac{1}{4}\, V^{(3)}_{ikms} h_t & \text{или} & V^{(4)}_{ikmst} &=& \frac{1}{4}\, V_{ikms} h_t
\end{array}$$

где $V^{(o)}_i = v_i = 1$ — объём точки i ;

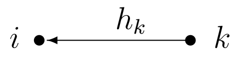
$V^{(1)}_{ik} = \ell_{ik}$ — расстояние между точками i и k ;

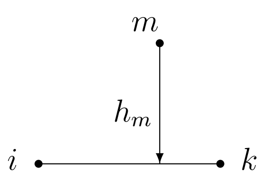
$V^{(2)}_{ikm} = S_{ikm}$ — площадь треугольника с вершинами $i,\ k,\ m$;

$V^{(3)}_{ikms} = V_{ikms}$ — объём тетраэдра с вершинами $i,\ k,\ m,\ s$;

$V^{(4)}_{ikmst}$ — четырёхмерный объём пентаэдра с вершинами $i,\ k,\ m,\ s,\ t$;

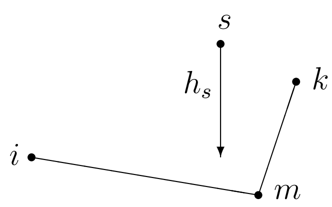
h_k — длина перпендикуляра в одномерном евклидовом пространстве, опущенного из точки k на точку i ;

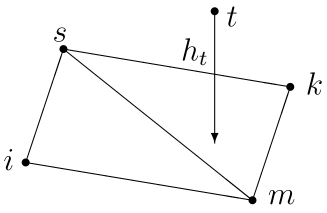




h_m — длина перпендикуляра в двумерном евклидовом пространстве, опущенного из точки m на отрезок с вершинами $i,\ k$;

h_s — длина перпендикуляра в трёхмерном евклидовом пространстве, опущенного из точки s на треугольник с вершинами $i,\ k,\ m$;





h_t — длина перпендикуляра в четырёхмерном евклидовом пространстве, опущенного из точки t на тетраэдр с вершинами i, k, m, s .

Воспользуемся соотношениями

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_n i_{n+1}} = 2^n (n!)^2 (V^{(n)}_{i_1\ldots i_n i_{n+1}})^2$$

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n} = 2^{n-1}[(n-1)!]^2 (V^{(n-1)}_{i_1\ldots i_n})^2$$

и выразим высоту $(n+1)$ -точечного симплекса $\{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\}$ через определители Кэли-Менгера:

$$h_{n+1} = n\frac{V^{(n)}_{i_1\ldots i_n i_{n+1}}}{V^{(n-1)}_{i_1\ldots i_n}} = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_n i_{n+1}}}{2\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n}}}$$

Особый интерес представляет собой выражение для наименьшей высоты

$$h^*_{n+1} = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_n i_{n+1}}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n}}} \tag{15}$$

$(n+1)$ -точечного симплекса $\{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\}$, когда в качестве его основания выбирается грань, то есть симплекс $\{i_1, \ldots, i_n\}$, с наибольшим объёмом, или что то же самое, с наибольшим значением определителя Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}^*{}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n} \geqslant \mathcal{K}_{i_1\ldots i_{n-1} i_{n+1};\ i_1\ldots i_{n-1} i_{n+1}} \geqslant \mathcal{K}_{i_1\ldots i_{n-2} i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_{n-2} i_n i_{n+1}} \geqslant \ \ldots$$

$$\ldots \ \geqslant \mathcal{K}_{i_2\ldots i_n i_{n+1};\ i_2\ldots i_n i_{n+1}}$$

Выражение (15) для h^*_{n+1} позволяет дать следующее определение:

Мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}_{\Delta_n} = \{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}, \ldots\}$ задана структура n *-мерного евклидова пространства конечной толщины* Δ_n, если для любого $(n+1)$ -точечного симплекса $\{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\} \subset \mathfrak{M}_{\Delta_n}$, имеет место следующее неравенство:

$$\sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_n i_{n+1}}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n}}} \leqslant \Delta_n$$

Так, например, если $\forall\ i_1, i_2, i_3, i_4 \ \in \mathfrak{M}_{\Delta_2}$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3;\ i_1,i_2,i_3}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1,i_2;\ i_1,i_2}}} \leqslant \Delta_2 \qquad \text{и} \qquad \mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4;\ i_1,i_2,i_3,i_4} \equiv 0,$$

то двумерное евклидово пространство конечной толщины Δ_2 представляет собой полосу шириной Δ_2 , расположенную на евклидовой плоскости
(См. рис. 6).

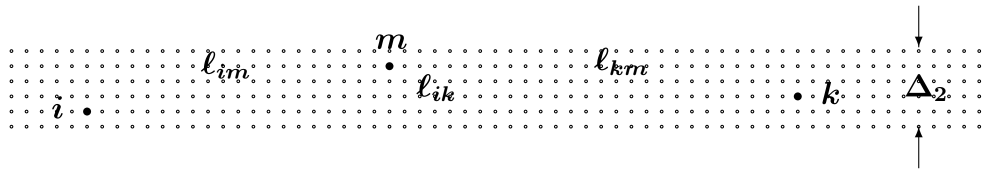


Рис. 6. Отличная от нуля площадь треугольника с вершинами i, k, m внутри узкой полосы шириной Δ_2 .

Заметим при этом, что расстояния ℓ_{ik} и площади S_{ikm} в этой полосе могут быть как угодно велики, но высота треугольника, опущенная на его самую большую сторону, не может превышать ширину полосы Δ_2 .

Если $\forall\, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \in \mathfrak{M}_{\Delta_3}$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4;\; i_1,i_2,i_3,i_4}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1,i_2,i_3;\; i_1,i_2,i_3}}} \leqslant \Delta_3 \qquad \text{и} \qquad \mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5;\; i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \equiv 0,$$

то трёхмерное евклидово пространство конечной толщины Δ_3 представляет собой слой толщины Δ_3 , расположенный в трёхмерном евклидовом пространстве (См. рис. 7).

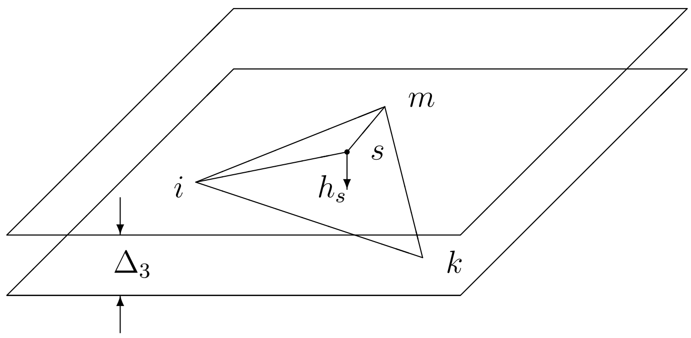


Рис. 7. Отличный от нуля объём тетраэдра с вершинами i, k, m, s в тонком слое толщиной Δ_3 .

В этом случае расстояния ℓ_{ik} , площади S_{ikm} и объёмы тетраэдров V_{ikms} в этом слое могут быть как угодно велики, но высота тетраэдра, опущенная на его самую большую грань, не может превышать толщину слоя Δ_3 .

И, наконец, если $\forall\, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 \in \mathfrak{M}_{\Delta_4}$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5;\; i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1,i_2,i_3,i_4;\; i_1,i_2,i_3,i_4}}} \leqslant \Delta_4 \qquad \text{и} \qquad \mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6;\; i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6} \equiv 0,$$

то четырёхмерное евклидово пространство конечной толщины Δ_4 представляет собой слой толщины Δ_4 , расположенный в четырёхмерном евклидовом пространстве.

В этом случае не существует каких-либо ограничений на величину расстояний, площадей и трёхмерных объёмов, но высота пентаэдра, опущенная на самый большой тетраэдр, играющий роль грани пентаэдра, не может превышать толщину четырёхмерного слоя Δ_4 . Человек не может "увидеть" высоту пентаэдра, но эта высота выражается формулой (15) через хорошо видимые и измеряемые расстояния между вершинами пентаэдра.

Подведём итоги:

если $\varepsilon^{(2r-2)}$ — отклонение от нуля r -точечного определителя Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1\,\dots\,i_r;\;i_1\,\dots\,i_r}$, то

$\delta_2 = \frac{1}{1!2^1}\,\frac{\sqrt{\varepsilon^{(4)}}}{\ell_{ik}}$ — толщина одномерного мира во втором измерении;

$\delta_3 = \frac{1}{2!2^{3/2}}\,\frac{\sqrt{\varepsilon^{(6)}}}{S_{ikm}}$ — толщина двумерного мира в третьем измерении;

$\delta_4 = \frac{1}{3!2^2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon^{(8)}}}{V_{ikms}}$ — толщина трёхмерного мира в четвёртом измерении;

Таким образом, если, проведя точные измерения расстояний между любыми шестью телами нашего мира, мы обнаружим, что

$$\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5;\;i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \neq 0 \qquad \text{однако} \qquad \mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6;\;i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6} \equiv 0$$

(или с учётом погрешностей измерений расстояний

$$|\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5;\;i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}| > \delta_4 \qquad \text{а} \qquad |\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6;\;i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6}| < \delta_5,$$

где δ_4 и δ_5 — систематические погрешности измерений соответствующих определителей), то в этом случае мы можем сказать, что **с точностью до $\delta\ell$ наш мир является четырёхмерным слоем толщины** δ_4.

§ 12. Наш мир как трёхмерное пространство постоянной кривизны.

Допустим, что *отклонение определителя $\mathcal{K}_5$ от нуля обусловлено тем, что наш мир представляет собой трёхмерное пространство очень малой постоянной положительной или отрицательной кривизны.*

Чтобы выразить соотношение, связывающее между собой десять расстояний пяти-точечного симплекса в пространстве постоянной кривизны, обратимся к определителю Грама в четырёхмерном линейном пространстве.

Известно, что в n -мерном линейном пространстве любые $n+1$ векторов

$$\vec{i}_1,\ \vec{i}_2,\ \dots,\vec{i}_{n+1} \in L_n$$

линейно зависимы, то есть существует $n+1$ чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1\vec{i}_1 + \alpha_2\vec{i}_2 + \ldots + \alpha_{n+1}\vec{i}_{n+1} = 0. \tag{16}$$

Умножая равенство (16) скалярно на векторы $\vec{i}_1,\ \vec{i}_2,\ \ldots, \vec{i}_{n+1}$, получим систему $n+1$ линейных однородных уравнений относително $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$

$$\begin{gathered}
\alpha_1(\vec{i}_1\vec{i}_1) + \alpha_2(\vec{i}_1\vec{i}_2) + \ldots + \alpha_{n+1}(\vec{i}_1\vec{i}_{n+1}) = 0\\
\alpha_1(\vec{i}_2\vec{i}_1) + \alpha_2(\vec{i}_2\vec{i}_2) + \ldots + \alpha_{n+1}(\vec{i}_2\vec{i}_{n+1}) = 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_1(\vec{i}_{n+1}\vec{i}_1) + \alpha_2(\vec{i}_{n+1}\vec{i}_2) + \ldots + \alpha_{n+1}(\vec{i}_{n+1}\vec{i}_{n+1}) = 0.
\end{gathered}$$

Чтобы эта система уравнений имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы $(n+1)$ -векторный определитель Грама $n+1$ порядка обращался в нуль:

$$\Gamma_{\vec{i}_1\ldots\vec{i}_{n+1};\ \vec{i}_1\ldots\vec{i}_{n+1}} = \begin{vmatrix}
(\vec{i}_1\vec{i}_1) & (\vec{i}_1\vec{i}_2) & \ldots & (\vec{i}_1\vec{i}_{n+1})\\
(\vec{i}_2\vec{i}_1) & (\vec{i}_2\vec{i}_2) & \ldots & (\vec{i}_2\vec{i}_{n+1})\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(\vec{i}_{n+1}\vec{i}_1) & (\vec{i}_{n+1}\vec{i}_2) & \ldots & (\vec{i}_{n+1}\vec{i}_{n+1})
\end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

Начнём с рассмотрения двумерного пространства постоянной кривизны.

Двумерное пространство постоянной положительной кривизны – это сфера радиуса R, вложенная в трёхмерное евклидово пространство.

Точки, лежащие на поверхности сферы, описываются векторами $\vec{r}$, модуль которых равен R. Таким образом, скалярное произведение $(\vec{i}\,\vec{k})$ двух векторов $\vec{i}$ и $\vec{k}$ может быть записано в виде:

$$(\vec{i}\,\vec{k}) = R^2\cos\varphi_{ik} = R^2\cos\frac{\lambda_{ik}}{R}, \tag{18}$$

где φ_{ik} — угол между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_k$;
λ_{ik} — расстояние между точками i и k, измеренное вдоль дуги большого круга.

Подставляя выражения скалярных произведений (18) в тождество (17), получим соотношение, связывающее между собой шесть расстояний

$$\begin{matrix}
\lambda_{ik} & \lambda_{im} & \lambda_{is}\\
 & \lambda_{km} & \lambda_{ks}\\
 & & \lambda_{ms}
\end{matrix} \tag{19}$$

между четырьмя точками $i, k, m, s,$ произвольно расположенными на сфере радиуса R:

$$\Gamma_{ikms;\ ikms}(\cos\frac{\lambda}{R}) = \begin{vmatrix}
1 & \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} & \cos\frac{\lambda_{im}}{R} & \cos\frac{\lambda_{is}}{R}\\
\cos\frac{\lambda_{ik}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{km}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ks}}{R}\\
\cos\frac{\lambda_{im}}{R} & \cos\frac{\lambda_{km}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{ms}}{R}\\
\cos\frac{\lambda_{is}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ks}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ms}}{R} & 1
\end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Бернгард Риман (1826 – 1866)

Как на опыте убедиться в том, что все точки, образующие множество $\mathfrak{N} = \{i, k, \ldots\}$ лежат на некоторой невидимой сфере? и как измерить радиус этой сферы?

Для этого нужно взять из множества $\mathfrak{N}$ четыре произвольные точки i, k, m, s и измерить шесть расстояний (19).

Считая их известными и рассматривая соотношение (20) как некоторое трансцендентное уравнение относительно неизвестного радиуса R, найдём его решение[38], лежащее в интервале $\frac{\lambda_{max}}{\pi} < R < \infty$. Если при любом выборе четырёх точек $i, k, m, s \in \mathfrak{N}$, каждый раз неизвестный радиус R, входящий в уравнение (20), имеет одно и то же численное значение, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{N}$ задана структура двумерного пространства постоянной положительной кривизны или, другими словами, задана структура двумерного эллиптического пространства Римана.

Однако может случиться так, что при заданных расстояниях λ_{ik} уравнение (20) не имеет вещественных решений. Тогда вместо уравнения (20) необходимо рассмотреть уравнение

$$\Gamma_{ikms;\ ikms}(\mathrm{ch}\,\frac{\lambda}{R}) = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ik}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{im}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{is}}{R} \\ \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ik}}{R} & 1 & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{km}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ks}}{R} \\ \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{im}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{km}}{R} & 1 & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ms}}{R} \\ \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{is}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ks}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ms}}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

которое получается из уравнения (20) при замене в нём вещественного радиуса R на мнимый iR, так что

$$\cos\frac{\lambda_{ik}}{iR} = \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ik}}{R}.$$

Если при любом выборе четырёх точек $i, k, m, s \in \mathfrak{N}$ каждый раз неизвестный радиус R, входящий в уравнение (21), имеет одно и то же численное значение, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{N}$ задана структура двумерного пространства постоянной отрицательной кривизны или, другими словами, задана структура двумерного гиперболического пространства Лобачевского.

Совершенно аналогичным образом решается вопрос о кривизне "нашего" трёхмерного пространства. Только в этом случае вместо четырёх точек нужно взять пять $i, k, m, s, t \in \mathfrak{N}$, измерить десять расстояний

[38]Решение уравнения (20) при заданных расстояниях λ_{ik} естественно находить на персональном компьютере методом последовательного перебора.

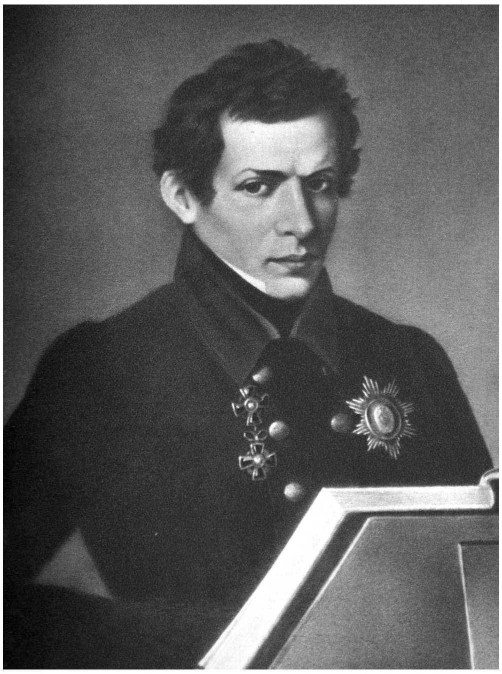
$$
\begin{array}{cccc}
\lambda_{ik} & \lambda_{im} & \lambda_{is} & \lambda_{it} \\
 & \lambda_{km} & \lambda_{ks} & \lambda_{kt} \\
 & & \lambda_{ms} & \lambda_{mt} \\
 & & & \lambda_{st}
\end{array}
$$

и рассмотреть следующие два вида соотношений:

$$
\Gamma_{ikms;\, ikms}(\cos\frac{\lambda}{R}) = \begin{vmatrix}
1 & \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} & \cos\frac{\lambda_{im}}{R} & \cos\frac{\lambda_{is}}{R} & \cos\frac{\lambda_{it}}{R} \\
\cos\frac{\lambda_{ik}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{km}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ks}}{R} & \cos\frac{\lambda_{kt}}{R} \\
\cos\frac{\lambda_{im}}{R} & \cos\frac{\lambda_{km}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{ms}}{R} & \cos\frac{\lambda_{mt}}{R} \\
\cos\frac{\lambda_{is}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ks}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ms}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{st}}{R} \\
\cos\frac{\lambda_{it}}{R} & \cos\frac{\lambda_{kt}}{R} & \cos\frac{\lambda_{mt}}{R} & \cos\frac{\lambda_{st}}{R} & 1
\end{vmatrix} = 0, \qquad (22)
$$

$$
\Gamma_{ikms;\, ikms}(\operatorname{ch}\frac{\lambda}{R}) = \begin{vmatrix}
1 & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ik}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{im}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{is}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{it}}{R} \\
\operatorname{ch}\frac{\lambda_{ik}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{km}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ks}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{kt}}{R} \\
\operatorname{ch}\frac{\lambda_{im}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{km}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ms}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{mt}}{R} \\
\operatorname{ch}\frac{\lambda_{is}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ks}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ms}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{st}}{R} \\
\operatorname{ch}\frac{\lambda_{it}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{kt}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{mt}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{st}}{R} & 1
\end{vmatrix} = 0. \qquad (23)
$$

Если при любом выборе пяти точек $i, k, m, s, t \in \mathfrak{N}$, каждый раз неизвестный радиус R, входящий в уравнение (22), имеет одно и то же численное значение, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{N}$ задана структура трёхмерного пространства постоянной положительной кривизны или, другими словами, задана структура трёхмерного эллиптического пространства Римана. Точно так же, если при любом выборе пяти точек $i, k, m, s, t \in \mathfrak{N}$, каждый раз неизвестный радиус R, входящий в уравнение (23), имеет одно и то же численное значение, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{N}$ задана структура трёхмерного пространства постоянной отрицательной кривизны или, другими словами, задана структура трёхмерного гиперболического пространства Лобачевского.



Николай Лобачевский (1792 – 1856)

В случае, когда $\frac{\lambda}{R} \ll 1$ решения уравнений (20)–(23) можно существенно упростить, если перейти от расстояний λ_{ik}, измеряемых по дуге большого круга, то есть по геодезической, к длинам ℓ_{ik} хорд, соединяющих между собой точки i и k.

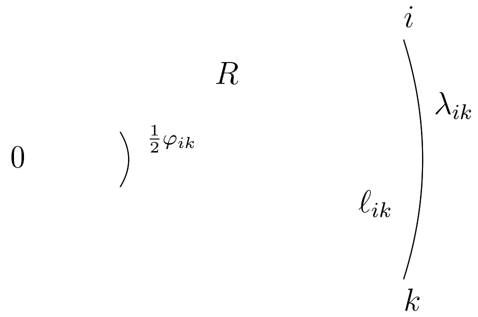


Рис. 8. К определению зависимости длины хорды ℓ_{ik} от длины дуги λ_{ik} .

Легко видеть (см. рис. 8), что

$$\ell_{ik} = 2R \sin \tfrac{\lambda_{ik}}{2R}$$

или

$$\ell_{ik} = 2R \operatorname{sh} \tfrac{\lambda_{ik}}{2R} = 2iR \sin \tfrac{\lambda_{ik}}{2iR}$$

Замечая, что

$$\cos \tfrac{\lambda_{ik}}{R} = 1 - 2\sin^2 \tfrac{\lambda_{ik}}{2R} = 1 - \tfrac{\ell_{ik}^2}{2R^2}$$

и

$$\operatorname{ch} \tfrac{\lambda_{ik}}{R} = 1 + 2\operatorname{sh}^2 \tfrac{\lambda_{ik}}{2R} = 1 + \tfrac{\ell_{ik}^2}{2R^2}$$

преобразуем уравнения (22) и (23) к виду:

$$\Gamma_{ikmst;\ ikmst}(\cos \frac{\lambda}{R}) = \Big(-\frac{1}{2R^2}\Big)^3 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2R^2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ -1 & \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ -1 & \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (24)$$

и аналогично

$$\Gamma_{ikmst;\ ikmst}(\operatorname{ch} \frac{\lambda}{R}) = \Big(\frac{1}{2R^2}\Big)^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2R^2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ -1 & \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ -1 & \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (25)$$

Из уравнений (24) и (25) легко находим численное значение и знак постоянной кривизны "нашего" трёхмерного пространства:

$$K = \frac{1}{\varepsilon R^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ -1 & \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ -1 & \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix}}, \qquad (26)$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Полученное выражение (26) для кривизны "нашего" трёхмерного пространства является математически точным следствием из соотношений (22) и (23). Однако с точки зрения физики, формула (26) является приближённой, так как в неё, вместо измеряемых на опыте расстояний между двумя точками i и k вдоль геодезических λ_{ik}, входят неизмеряемые длины хорд ℓ_{ik}. Однако, как легко видеть из соотношений $\ell_{ik} = 2R\sin\frac{\lambda_{ik}}{2R}$ или $\ell_{ik} = 2R\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_{ik}}{2R}$, отличие ℓ_{ik} от λ_{ik} мало, если $\frac{\lambda_{ik}}{R} \ll 1$.

§ 13. Существование "реального" (физического) пространства как опытный факт.

Итак, после всего сказанного видно, каким эффективным инструментом являются r-точечные определители Кэли-Менгера[39] $\mathcal{K}_{i_1,\ldots,i_r;\ i_1,\ldots,\text{ß}_r}$ и r-векторные определители Грама

$$\Gamma_{i_1,\ldots,\text{ß}_r;\ i_1,\ldots,\text{ß}_r;}\,(\cos\tfrac{\lambda}{R})$$
$$\Gamma_{i_1,\ldots,\text{ß}_r;\ i_1,\ldots,\text{ß}_r;}\,(\mathrm{ch}\,\tfrac{\lambda}{R})$$

при анализе понятия пространства.

Более того, в следующих главах мы покажем, как легко и естественно решается, при этом с единых позиций, проблема основания линейной алгебры (теории линейных пространств) и самых различных геометрий произвольных размерностей, таких как

- евклидова и псевдоевклидова геометрии,
- эллиптическая геометрия Римана и
- гиперболическая геометрия Лобачевского,
- чётномерная и нечётномерная симплектические геометрии,
- проективная геометрия.

---

[39] В связи с этим вызывает недоумение отсутствие всяких упоминаний об определителе Кэли-Менгера в пятитомной Математической энциклопедии [12] и в большом Математическом энциклопедическом словаре [15]

Использование определителей Кэли-Менгера и определителей Грама позволяет по измеренным расстояниям между точками судить о размерности и кривизне соответствующих пространств.

Так, если равенства

$$\mathcal{K}_{ikm;\ ikm}(\ell^2) = 0\ ,$$
$$\mathcal{K}_{ikms;\ ikms}(\ell^2) = 0\ ,$$
$$\mathcal{K}_{ikmst;\ ikmst}(\ell^2) = 0\ ,$$
$$\mathcal{K}_{ikmstu;\ ikmstu}(\ell^2) = 0$$

выполняются в пределах заранее известных ошибок измерений, то мы имеем дело, соответственно,

с евклидовой прямой (точнее, с одномерным многообразием),

с евклидовой (псевдоевклидовой) плоскостью,

с трёхмерным евклидовым (псевдоевклидовым) пространством и, наконец,

с четырёхмерным евклидовым (псевдоевклидовым) пространством.

С другой стороны, если в пределах заранее известных ошибок измерения выполняются равенства:

$$\Gamma_{ikms;\ ikms}(\cos\tfrac{\lambda}{R}) = 0 \quad \text{или} \quad \Gamma_{ikms;\ ikms}(\operatorname{ch}\tfrac{\lambda}{R}) = 0$$
$$\Gamma_{ikmst;\ ikmst}(\cos\tfrac{\lambda}{R}) = 0 \quad \text{или} \quad \Gamma_{ikmst;\ ikmst}(\operatorname{ch}\tfrac{\lambda}{R}) = 0$$

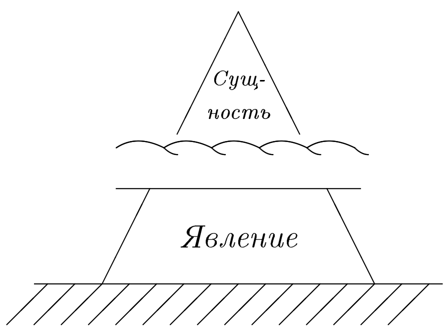
то мы имеем дело, соответственно,

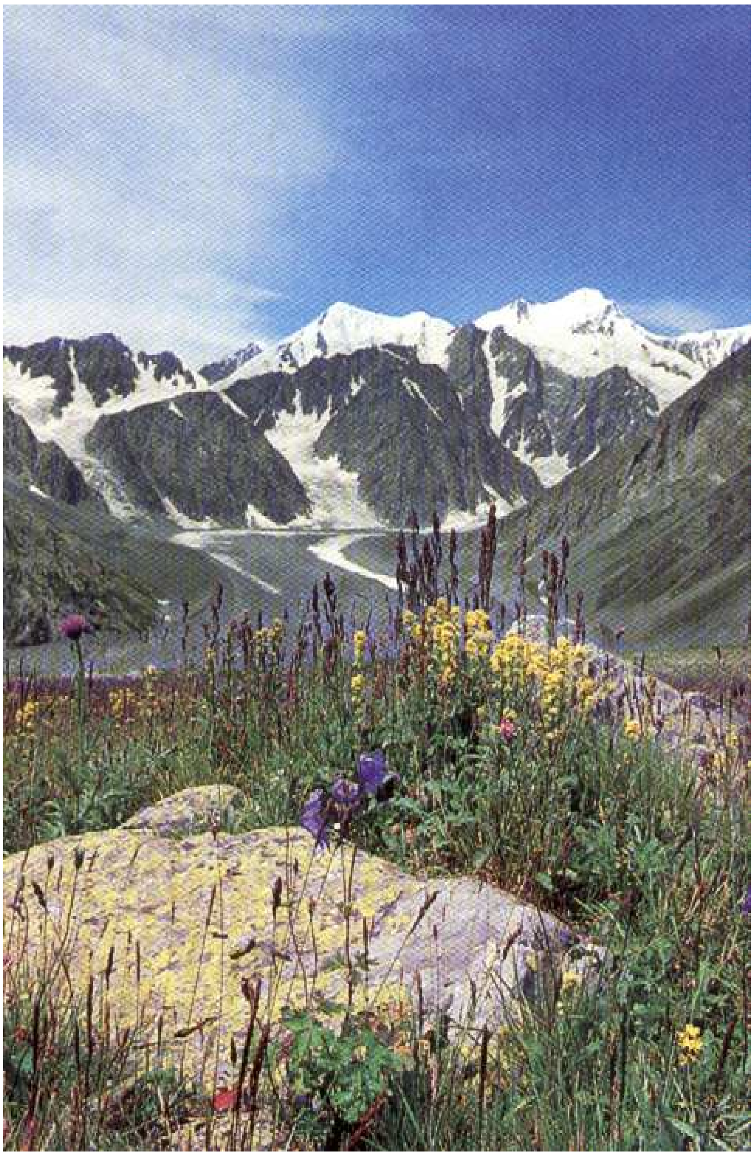
с двумерной сферой или с двумерной гиперболической плоскостью Лобачевского,

с трёхмерным пространством постоянной положительной или отрицательной кривизны.

Но в принципе не исключена возможность, что при достаточно высокой точности измерения расстояния величи́ны всех перечисленных выше определителей будут лежать за пределами ошибок измерения.

В этом случае мы должны сказать, что несмотря на то, что существуют тела (точки) и расстояния между ними, **не существует пространства в истинном смысле этого слова**, как устойчивого (не зависящего от конкретного выбора точек) отношения между фиксированным числом точек $r = n+2$ (между тремя точками на прямой, четырьмя точками на плоскости, между пятью точками в трёхмерном пространстве).





Гора Белуха – высочайшая вершина Горного Алтая

Литература к главе 6

[1] *Каган В.Ф.* Основания геометрии, часть I. М. – Л.: Наука, 1949, С. 16 - 17.

[2] *Мах Эрнст*//Альберт Эйнштейн и теория гравитации. - М.: Мир, 1979. С. 82.

[3] *Пуанкаре Анри.* Идеи Герца в механике //Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: 1959. С. 311, 316.

[4] *Кулаков Ю. И., Сычёва Л. С.* Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике. // Исследовательские программы в современной науке. Новосибирск. Наука. 1987. с. 99–120.

[5] *Бахман Ф.* Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем. — М.: 1969.

[6] *Blumenthal Leonard Mascot*, Theory and applications of distance geometry, Clarendon press, 1953, XII, 348 p.

[7] *Bell E.T.*, Men of Mathematics, N.Y., 1937, p. 21. Цитируется по книге Кокстера “Введение в геометрию”, — М.: Наука, 1966, С. 167.

[8] *Вейнберг С.*, Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975, С.18

[9] *Гильберт Давид.* Основания геометрии, пер. с нем. М. – Л.: 1948.

[10] *Клайн М.*, Математика. Утрата определённости. М.: Мир, 1984, С.58, 409.

[11] *Кулаков Ю.И.* Теория размерности физических величин // Вычислительные системы. Выпуск 110. Новосибирск, Изд-во Института математики СОАН СССР. 1985, С. 52 - 88.

[12] *Математическая энциклопедия:* Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 1 – Т. 5, – М.: “Советская энциклопедия”, 1977 – 1984.

[13] Menger K.// American Journal of Mathematics, 53 (1931), pp. 721 – 745.

[14] *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.*, Гравитация, Т. I. — М.: Мир, 1977, С. 380.

[15] Математический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.

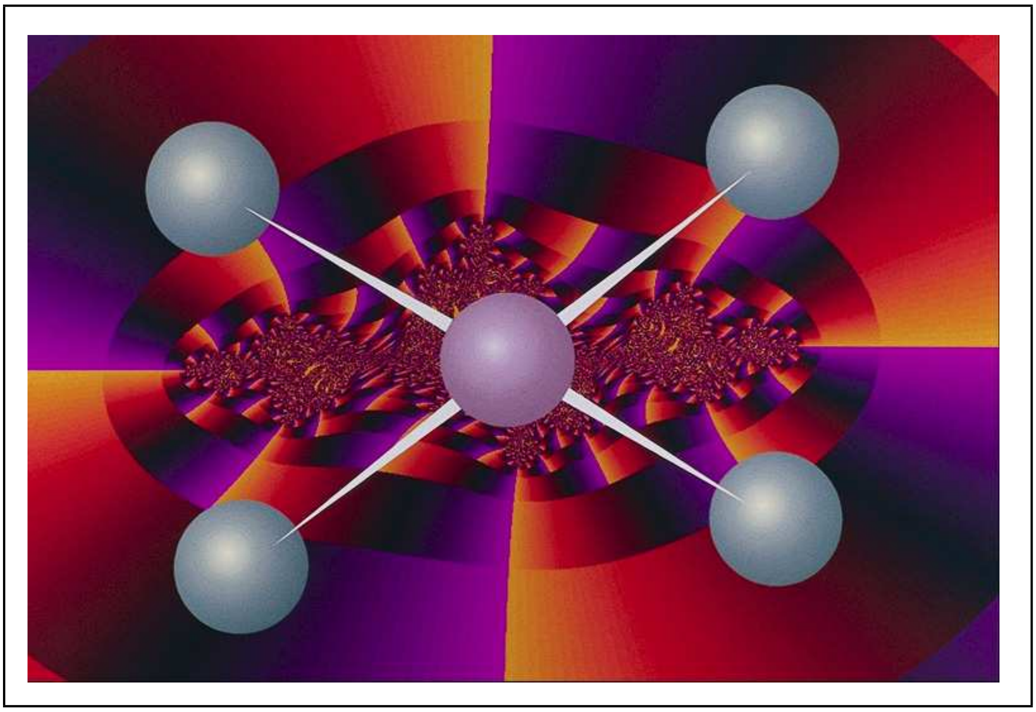
[16] *Погорелов А.В.* Основания геометрии, 4 изд. — М.: 1979.

[17] *Robb A.A.* Geometry of Time and Space, Univ. Press, Cambridge, England. 1936.

[18] *Robb A.A.* Geometry of Time and Space, Univ. Press, Cambridge, England. 1914. (Первое издание геометрии расстояния.)

[19] *Синг Дж.*, Общая теория относительности. — М.: ИЛ, 1963, С.343

[20] *Эйнштейн Альберт.* Сущность теории относительности, — М.: ИЛ, 1955, С. 13.



Глава 7.

ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ – ОЧЕВИДНАЯ И НЕВЕРОЯТНАЯ

Nun, nisi parendo, vineitur[40]

Мах был единственным, кто серьёзно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками.

— Альберт Эйнштейн

Евклидова геометрия – очевидная:

§ 1. Определители Кэли-Менгера – фундаментальное понятие евклидовой геометрии.

§ 2. Дважды окаймлённый верификатор. рода $\overset{n}{\boldsymbol{K}}{}^{11}_{i_1 \ldots i_{n+1}; k_1 \ldots k_{n+1}}$.

§ 3. Простейшая связь между расстояниями на прямой.

§ 4. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве размерности 1.

§ 5. Простейшая связь между расстояниями на плоскости.

§ 6. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве размерности 2.

§ 7. Простейшая связь между расстояниями в трёхмерном евклидовом пространстве.

§ 8. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 5 на одном множестве размерности 3.

---

[40] Только тот побеждает её (природу), кто ей повинуется. (То есть, чтобы заставить природу служить нуждам человека, нужно знать её законы и им повиноваться.) Фр. Бэкон (1561 – 1626)

Евклидова геометрия – невероятная:

§ 9. Феноменологические и сакральные геометрии.

§ 10. Одномерная сакральная геометрия.

§ 11. Двумерная сакральная геометрия.

§ 12. Корт – фундаментальное понятие физической герменевтики.

Евклид (365 – 300 до н.э.)

Древнегреческий математик, автор "Начал" – первого дошедшего до нас математического трактата.

Глава 7

I. Евклидова геометрия – очевидная.

Итак, на двух простейших примерах мы рассмотрели две физические структуры ранга (2,2) и (2, 3), описывающие определённые типы устойчивых (сакрально-инвариантных) отношений между двумя множествами $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ различной природы.

В то же самое время мы столкнулись с другим типом математических структур – с феноменологическими структурами "на одном множестве".

Примером таких феноменологических структур может служить хорошо известная всем евклидова геометрия.

§ 1. Определители Кэли-Менгера.

Итак, мы замечаем, что в выражениях (6)–(9) § 6 Главы 6 для объёмов симплексов с одной, с двумя, с тремя и с четырьмя вершинами появляются определители, имеющие сходное строение и представляющие собой специальные функции r нечисловых переменных $i_1, \dots, i_r$:

$$\mathcal{K}_{i;i}(\overset{0}{\ell}{}^2) = (-1)^0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathcal{K}_{ik;ik}(\overset{1}{\ell}{}^2) = (-1)^1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}(\overset{2}{\ell}{}^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{ikmn;ikmn}(\overset{3}{\ell}{}^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 \\ -1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

. . . .

$$\overset{N}{\ell}{}^2_{ik} = (x_\mu(i) - x_\mu(k))(x^\mu(i) - x^\mu(k)) = x_\mu(i)x^\mu(i) + x_\mu(k)x^\mu(k) - 2x_\mu(i)x^\mu(k)$$

$$\mu = 1, 2, \dots, N$$

Это и есть так называемые **определители Кэли-Менгера.**

Таким образом, определители Кэли-Менгера являются удобными функциями $n+1$ нечисловых переменных $i_1, \dots, i_{n+1}$, позволяющими выразить квадраты объёмов n-мерных симплексов с вершинами $i_1, \ldots, i_{n+1}$ через квадраты расстояний между ними,:

$$
\begin{gathered}
2^o (0!)^2 v_i^2 = \mathcal{K}_{i;i}(\overset{0}{\ell}{}^2) \\
2^1 (1!)^2 \ell_{ik}^2 = \mathcal{K}_{ik;ik}(\overset{1}{\ell}{}^2) \\
2^2 (2!)^2 S_{ikm}^2 = \mathcal{K}_{ikm;ikm}(\overset{2}{\ell}{}^2) \\
2^3 (3!)^2 V_{ikmn}^2 = \mathcal{K}_{ikmn;ikmn}(\overset{3}{\ell}{}^2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
$$

В общем случае под определителем Кэли-Менгера мы будем понимать следующую функцию $2(N+1)$ нечисловых переменных $i_1, \ldots, i_{N+1}; k_1, \ldots, k_{N+1}$:

$$
\mathcal{K}_{i_1,\ldots,i_{N+1};k_1,\ldots,k_{N+1}}(\varphi) = (-1)^N
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
-1 & \varphi_{i_1k_1} & \varphi_{i_1k_2} & \ldots & \varphi_{i_1k_{N+1}} \\
-1 & \varphi_{i_2k_1} & \varphi_{i_2k_2} & \ldots & \varphi_{i_2k_{N+1}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-1 & \varphi_{i_{N+1}k_1} & \varphi_{i_{N+1}k_2} & \ldots & \varphi_{i_{N+1}k_{N+1}}
\end{vmatrix}.
$$

Возьмём в качестве числовой переменной φ_{ik} квадрат расстояния между двумя точками i и k

$$
\overset{N}{\ell}{}^2_{ik} = x_\mu(i)x^\mu(i) + x_\mu(k)x^\mu(k) - 2x_\mu(i)x^\mu(k) \qquad \mu = 1, 2, \ldots, N
$$

В этом случае определители Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1,\ldots,i_{N+1};k_1,\ldots,k_{N+1}}(\overset{N}{\ell}{}^2)$ имеют простой геометрический смысл — они равны произведению объёмов соответствующих симплексов:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{K}_{i_1;k_1}(\overset{0}{\ell}{}^2) = 2^0 (0!)^2 v_{i_1} v_{k_1} \\
\mathcal{K}_{i_1i_2;k_1k_2}(\overset{1}{\ell}{}^2) = 2^1 (1!)^2 \ell_{i_1i_2} \ell_{k_1k_2} \\
\mathcal{K}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{\ell}{}^2) = 2^2 (2!)^2 S_{i_1i_2i_3} S_{k_1k_2k_3} \\
\mathcal{K}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}(\overset{3}{\ell}{}^2) = 2^3 (3!)^2 V_{i_1i_2i_3i_4} V_{k_1k_2k_3k_4} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
$$

§ 2. Дважды окаймлённые верификаторы рода $\overset{N}{\boldsymbol{K}}{}^{11}_{i_1,\ldots,i_{N+1};k_1,\ldots,k_{N+1}}$.

В связи с тем, что в качестве репрезентатора, характеризующего отношения между двумя точками i и k, наряду с очевидным квадратом расстояния между ними

$$
\overset{N}{\ell}{}^2_{ik} = x_\mu(i)x^\mu(i) + x_\mu(k)x^\mu(k) - 2x_\mu(i)x^\mu(k) \qquad \mu = 1, 2, \ldots, N
$$

удобно взять неизвестное ранее, более общее понятие – “скалярное произведение двух точек с двумя скрытыми параметрами”[41]

$$\overset{N}{w}_{ik}= x^o(k) + x(i)_\mu x^\mu(k) + x_o(i),$$

рассмотрим два определителя, играющие роль соответствующих верификаторов. Так наряду с уже известным определителем Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_{N+1};k_1\ldots k_{N+1}}(\overset{N}{\ell}{}^2) = (-1)^N \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ell^2_{i_1k_1} & \ell^2_{i_1k_2} & \ldots & \ell^2_{i_1k_{N+1}} \\ -1 & \ell^2_{i_2k_1} & \ell^2_{i_2k_2} & \ldots & \ell^2_{i_2k_{N+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ell^2_{i_{N+1}k_1} & \ell^2_{i_{N+1}k_2} & \ldots & \ell^2_{i_{N+1}k_{N+1}} \end{vmatrix}$$

рассмотрим дважды окаймлённый определитель

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{i_1\ldots i_{N+1};k_1\ldots k_{N+1}}(\overset{N}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & w_{i_1k_1} & w_{i_1k_2} & \ldots & w_{i_1k_{N+1}} \\ -1 & w_{i_2k_1} & w_{i_2k_2} & \ldots & w_{i_2k_{N+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & w_{i_{N+1}k_1} & w_{i_{N+1}k_2} & \ldots & w_{i_{N+1}k_{N+1}} \end{vmatrix},$$

связанный с определителем Кэли-Менгера следующим соотношением:

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_{N+1};k_1\ldots k_{N+1}}(\varphi) = (-1)^N \; \overset{N}{K}{}^{11}_{i_1\ldots i_{N+1};k_1\ldots k_{N+1}}(\varphi)$$

и

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_{N+1};k_1\ldots k_{N+1}}(\overset{N}{\ell}{}^2) = 2^N \; \overset{N}{K}{}^{11}_{i_1\ldots i_{N+1};k_1\ldots k_{N+1}}(\overset{N}{w})$$

То есть

$$\mathcal{K}_{i_1;k_1}(\overset{0}{\ell}{}^2) = 2^0 \; \overset{0}{K}{}^{11}_{i_1;k_1}(\overset{0}{w})$$

$$\mathcal{K}_{i_1i_2;k_1k_2}(\overset{1}{\ell}{}^2) = 2^1 \; \overset{1}{K}{}^{11}_{i_1i_2;k_1k_2}(\overset{1}{w})$$

$$\mathcal{K}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{\ell}{}^2) = 2^2 \; \overset{2}{K}{}^{11}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{w})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или

$$\overset{0}{K}{}^{11}_{i_1;k_1}(\overset{0}{w}) = (0!)^2 v_{i_1}\, v_{k_1} = \tilde v_{i_1}\, \tilde v_{k_1}$$

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{i_1i_2;k_1k_2}(\overset{1}{w}) = (1!)^2 \ell_{i_1i_2}\, \ell_{k_1k_2} = \tilde\ell_{i_1i_2}\, \tilde\ell_{k_1k_2}$$

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{w}) = (2!)^2 S_{i_1i_2i_3}\, S_{k_1k_2k_3} = \tilde S_{i_1i_2i_3}\, \tilde S_{k_1k_2k_3}$$

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}(\overset{3}{w}) = (3!)^2 V_{i_1i_2i_3i_4}\, V_{k_1k_2k_3k_4} = \tilde V_{i_1i_2i_3i_4}\, \tilde V_{k_1k_2k_3k_4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[41] Скалярное произведение двух точек с двумя скрытыми параметрами является понятием более глубоким и фундаментальным, нежели квадрат расстояния между точками, так как квадрат расстояния ℓ^2_{ik} получается из скалярного произведения w_{ik} при двух естественных дополнительных условиях – симметрии $w_{ik} = w_{ki}$ и рефлексии $w_{ii} = 0$.

где

$$\overset{n}{w}_{ik} = -\frac{1}{2}\,\overset{n}{\ell^2}_{ik}$$

$v_{i_1} = \frac{1}{0!}|1| = 1$ — объём точки $[i_1]$,

$v_{k_1} = \frac{1}{0!}|1| = 1$ — объём точки $[k_1]$,

$\tilde{v}_{i_1} = |1| = 1$ — объём левого 1-точечного корта $\langle\, i_1 \,|$,

$\tilde{v}_{k_1} = |1| = 1$ — объём правого 1-точечного корта $|\, k_1 \,\rangle$;

$\ell_{i_1 i_2} = \frac{1}{1!}\begin{vmatrix} x_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & 1 \end{vmatrix} = x_{i_1} - x_{i_2}$ — длина отрезка $[i_1\, i_2]$

$\ell_{k_1 k_2} = \frac{1}{1!}\begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_{k_1} - x_{k_2}$ — длина отрезка $[k_1\, k_2]$

$\tilde{\ell}_{i_1 i_2} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & 1 \end{vmatrix} = x_{i_1} - x_{i_2}$ — объём левого 2-точечного корта $\langle\, i_1\, i_2 \,|$

$\tilde{\ell}_{k_1 k_2} = \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_{k_1} - x_{k_2}$ — объём правого 2-точечного корта $|\, k_1\, k_2 \,\rangle$

$S_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & 1 \end{vmatrix}$ — площадь треугольника $[i_1\, i_2\, i_3]$

$S_{k_1 k_2 k_3} = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ — площадь треугольника $[k_1\, k_2\, k_3]$

$\tilde{S}_{i_1 i_2 i_3} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & 1 \end{vmatrix}$ — объём левого 3-точечного корта $\langle\, i_1\, i_2\, i_3 \,|$

$\tilde{S}_{k_1 k_2 k_3} = \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ — объём правого 3-точечного корта $|\, k_1\, k_2\, k_3 \,\rangle$

$V_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & z_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & z_{i_2} & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & z_{i_3} & 1 \\ x_{i_4} & y_{i_4} & z_{i_4} & 1 \end{vmatrix}$ — объём тетраэдра $[i_1\, i_2\, i_3\, i_4]$

$V_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} & x_{k_4} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} & y_{k_4} \\ z_{k_1} & z_{k_2} & z_{k_3} & z_{k_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ — объём тетраэдра $[k_1\, k_2\, k_3\, k_4]$

$$\tilde{V}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & z_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & z_{i_2} & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & z_{i_3} & 1 \\ x_{i_4} & y_{i_4} & z_{i_4} & 1 \end{vmatrix} \text{— объём левого 4-точечного корта } \langle\, i_1\, i_2\, i_3\, i_4 \,|$$

$$\tilde{V}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} & x_{k_4} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} & y_{k_4} \\ z_{k_1} & z_{k_2} & z_{k_3} & z_{k_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{— объём правого 4-точечного корта } |\, k_1\, k_2\, k_3\, k_4 \,\rangle$$

Заметим, что дважды окаймлённые верификаторы рода $\overset{N}{K}{}^{11}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\overset{N}{w})$ являются, как мы убедимся в этом в дальнейшем, менее наглядными, но более глубокими и фундаментальными, нежели определители Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\overset{N}{\ell}{}^2)$.

§ 3. Простейшая связь между расстояниями на прямой.

Пусть $\mathfrak{M}_1 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ – множество точек, лежащих на прямой. Рассмотрим симплекс

$$\mathfrak{S}_3 = \{i, k, m\} \subset \mathfrak{M}_1,$$

состоящий из трёх произвольных точек $i, k, m \in \mathfrak{M}_1$, и три соответствующие ему расстояния

$$\begin{matrix} \ell_{ik} & \ell_{im} \\ & \ell_{km} \end{matrix}$$

Поскольку три точки i, k, m лежат на одной прямой, то площадь треугольника с вершинами $i, k, m,$ S_{ikm} очевидно равна нулю при любом взаимном расположении точек i, k, m .

Используя формулу Герона

$$S_{ikm} = \sqrt{p(p - \ell_{ik})(p - \ell_{im})(p - \ell_{km})},$$

$$\text{где } p = \tfrac{1}{2}(\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km})$$

или

$$S_{ikm} = \frac{1}{4}\sqrt{(\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km})(\ell_{ik} + \ell_{im} - \ell_{km})(\ell_{ik} - \ell_{im} + \ell_{km})(-\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km})} =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot 2!}\sqrt{\;2(\ell_{ik}^2\ell_{im}^2 + \ell_{im}^2\ell_{km}^2 + \ell_{km}^2\ell_{ik}^2) - \ell_{ik}^4 - \ell_{im}^4 - \ell_{km}^4} =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot 2!}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix}^{1/2}$$

то есть

$$S_{ikm} = \frac{1}{2\cdot 2!}[\mathcal{K}_{ikm,ikm}(\ell^2)]^{1/2} = \frac{1}{2!}[\overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(w)]^{1/2},$$

где

$$\mathcal{K}_{ikm,ikm}(\ell^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix} \; -$$

трёхточечный определитель Кэли-Менгера;

$$\ell_{ik}^2 = x_i^2 + x_k^2 - 2x_i x_k$$

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 \end{vmatrix} -$$

трёхточечный дважды окаймлённый верификатор;

$$w_{ik} = -\frac{1}{2}\,x_k^2 + x_i x_k - \frac{1}{2}\,x_i^2 = -\frac{1}{2}\,\ell_{ik}^2$$

симметричное, рефлексивное скалярное произведение
двух точек i и k с двумя скрытыми параметрами;

можно придать этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего три квадрата взаимных расстояний

$$w_{ik} = -\frac{1}{2}\,\ell_{ik}^2, \qquad w_{im} = -\frac{1}{2}\,\ell_{im}^2, \qquad w_{km} = -\frac{1}{2}\,\ell_{km}^2$$

произвольного симплекса $\mathfrak{S}_3 = \{i, k, m\}$ одномерного евклидова пространства:

$$\forall i, k, m \in \mathfrak{M}_1$$

$$\boxed{\Phi(w_{ik},\ w_{im},\ w_{km}) = \overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0} \qquad (1)$$

В существовании тождества (1) можно убедиться непосредственно, если воспользоваться следующим разложением $\overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(w)$ на множители:

так как $w_{ik} = -\frac{1}{2}x_k^2 + x_i x_k - \frac{1}{2}x_i^2$, то

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_i & 0 & -\frac{1}{2}x_i^2 \\ -1 & x_k & 0 & -\frac{1}{2}x_k^2 \\ -1 & x_m & 0 & -\frac{1}{2}x_m^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}x_i^2 & \frac{1}{2}x_k^2 & \frac{1}{2}x_m^2 \\ 0 & x_i & x_k & x_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_i & 0 & 1 \\ x_k & 0 & 1 \\ x_m & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & 0 & 1 \\ x_k & 0 & 1 \\ x_m & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 . \equiv 0$$

Опираясь на этот пример, дадим предварительное определение феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве.

§ 4. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве размерности 1.

Рассмотрим одно множество $\mathfrak{M}_1 = \{i, k, \ldots\}$ и отображение

$$\xi : \mathfrak{M}_1 \to \mathbb{R} \qquad\qquad i \mapsto \xi(i)$$

Мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}_1$ размерности 1 имеет место феноменологическая структура ранга 3, если существует вещественная функция двух вещественных переменных

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$u, u' \mapsto \varphi(u, u')$$

такая, что три функции

$$\begin{matrix} \varphi(\xi_1, \xi_2) & \varphi(\xi_1, \xi_3) \\ & \varphi(\xi_2, \xi_3) \end{matrix} \qquad \text{где} \qquad \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \in \mathbb{R},$$

связаны между собой соотношением

$$\Psi\begin{pmatrix} \varphi(\xi_1, \xi_2), & \varphi(\xi_1, \xi_3), \\ & \varphi(\xi_2, \xi_3) \end{pmatrix} \equiv 0, \tag{2}$$

представляющим собой тождество относительно трёх независимых переменных $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$.

Задача состоит в том, чтобы найти две неизвестные функции

$$\varphi(u, u') \qquad \text{и} \qquad \Psi\begin{pmatrix} \varphi_{12}, & \varphi_{13}, \\ & \varphi_{23} \end{pmatrix},$$

обращающие равенство (2) в тождество.

Можно показать, что с точностью до эквивалентности имеется два и только два решения функционального уравнения (2):

1. антисимметрическое

$$\varphi_1(\xi_i, \xi_k) = a(\xi_i, \xi_k) = \xi_k - \xi_i$$

$$\Psi_1\begin{pmatrix} a(\xi_i, \xi_k), & a(\xi_i, \xi_k), \\ & a(\xi_i, \xi_k) \end{pmatrix} = \overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(a) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ -1 & -a_{ik} & 0 & a_{km} \\ -1 & -a_{im} & -a_{km} & 0 \end{vmatrix} = \tag{3}$$

$$= (a_{ik} + a_{km} - a_{im})^2$$

и 2. симметрическое

$$\varphi_2(\xi_i, \xi_k) = s(\xi_i, \xi_k) = (\xi_k - \xi_i)^2$$

$$\Psi_2(s(\xi_i,\xi_k), \quad \begin{matrix} s(\xi_i,\xi_k), \\ s(\xi_i,\xi_k)) \end{matrix} = \overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & s_{ik} & s_{im} \\ -1 & s_{ik} & 0 & s_{km} \\ -1 & s_{im} & s_{km} & 0 \end{vmatrix} = \tag{4}$$

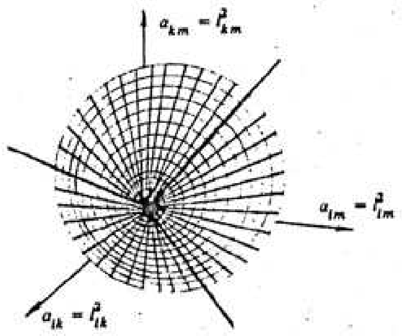
$$= 2(s_{ik}s_{im} + s_{im}s_{km} + s_{km}s_{ik}) - s_{ik}^2 - s_{im}^2 - s_{km}^2 =$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{s_{ik}} + \sqrt{s_{im}} + \sqrt{s_{km}}) \times \\ &\times (\sqrt{s_{ik}} + \sqrt{s_{im}} - \sqrt{s_{km}}) \times \\ &\times (\sqrt{s_{ik}} - \sqrt{s_{im}} + \sqrt{s_{km}}) \times \\ &\times (-\sqrt{s_{ik}} + \sqrt{s_{im}} + \sqrt{s_{km}}) \end{aligned}$$

Первое антисимметрическое решение определяет собой структуру симплектической прямой (одномерного симплектического пространства).

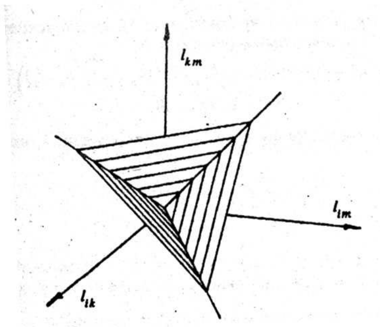
Второе симметрическое решение определяет собой структуру одномерной евклидовой прямой.

Уже на примере феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве мы встречаемся с особым типом полиарных (в данном случае – тернарных) отношений между точками. Мы видим, что между тремя произвольными точками i, k, m симплектической или евклидовой прямой существует необычная связь: с одной стороны, точки i, k, m совершенно произвольны, а с другой — три расстояния a_{ik}, a_{im}, a_{km} в первом случае, и три квадрата расстояния $s_{ik} = \ell_{ik}^2$, $s_{im} = \ell_{im}^2$, $s_{km} = \ell_{km}^2$ не являются произвольными, так как связаны между собой соотношениями (3) и (4). Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_3$ как некоторый единый физический объект, мы можем приписать ему три числа (три измеряемых на опыте квадрата расстояния). Трактуя их как три координаты симплексов $\mathfrak{S}_3$ в трёхмерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$, мы тем самым сопоставляем каждому симплексу $\mathfrak{S}_3$ некоторую точку в $\mathbb{R}^3$. Эту точку мы будем называть характеристической точкой симплекса $\mathfrak{S}_3$, а само арифметическое пространство $\mathbb{R}^3$ характеристическим пространством.



$$2(s_{ik}s_{im} + s_{im}s_{km} + s_{km}s_{ik}) - s_{ik}^2 - s_{im}^2 - s_{km}^2 = 0$$

Рис. 8. Характеристическая поверхность феноменологической структуры ранга 3 в координатах s_{ik}, s_{im}, s_{km}.



$$2(\ell_{ik}^2\ell_{im}^2 + \ell_{im}^2\ell_{km}^2 + \ell_{km}^2\ell_{ik}^2) - \ell_{ik}^4 - \ell_{im}^4 - \ell_{km}^4 =$$
$$= (\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km})(\ell_{ik} + \ell_{im} - \ell_{km})(\ell_{ik} - \ell_{im} + \ell_{km})(-\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km}) \equiv 0$$

Рис. 9. Характеристическая поверхность феноменологической структуры ранга 3 в координатах ℓ_{ik}, ℓ_{im}, ℓ_{km}.

Факт существования соотношений (3) и (4) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_3$, располагаются в трёхмерном характеристическом пространстве $\mathbb{R}^3$ не произвольно, а на некоторой двумерной поверхности (см. рис. 8 и 9), что и означает существование на прямой $\mathfrak{M}_1$ феноменологической структуры ранга 3.

§ 5. Простейшая связь между расстояниями на плоскости.

Пусть $\mathfrak{M}_2 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ — множество точек, лежащих на одной плоскости. Рассмотрим симплекс

$$\mathfrak{S}_4 = \{i, k, m, n\} \subset \mathfrak{M}_2,$$

состоящий из четырёх произвольных точек $i, k, m, n \in \mathfrak{M}_2$, и шесть соответствующих ему расстояний

$$\begin{array}{ccc} \ell_{ik} & \ell_{im} & \ell_{in} \\ & \ell_{km} & \ell_{kn} \\ & & \ell_{mn} \end{array}.$$

Поскольку четыре точки i, k, m, n лежат на одной и той же плоскости, то объём тетраэдра с вершинами i, k, m, n V_{ikmn} очевидно равен нулю при любом взаимном расположении точек i, k, m, n .

Воспользуемся формулой Никколо Тартальи, выражающей, подобно формуле Герона, объём тетраэдра через длины его рёбер:

$$V_{ikmn} = \frac{1}{2^{3/2}\cdot 3!}[\mathcal{K}_{ikmn,ikmn}(\ell^2)]^{1/2} = \frac{1}{3!}[\overset{3}{K}{}^{11}_{ikmn,ikmn}(w)]^{1/2}$$

где

$$\mathcal{K}_{ikmn,ikmn}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix} \text{ —}$$

четырёхточечный определитель Кэли-Менгера,

$$\ell^2_{ik} = x_i^2 + y_i^2 + x_k^2 + y_k^2 - 2x_ix_k - 2y_iy_k$$

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{ikmn,ikmn}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} & w_{in} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} & w_{kn} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 & w_{mn} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & w_{mn} & 0 \end{vmatrix} \text{ —}$$

четырёхточечный дважды окаймлённый верификатор,

$$w_{ik} = -\frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2) + x_ix_k + y_iy_k - \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2) = -\frac{1}{2}\ell^2_{ik} \text{ —}$$

симметричное, рефлексивное скалярное произведение двух точек i и k с двумя скрытыми параметрами; и придадим этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего шесть квадратов взаимных расстояний

$$\begin{array}{ccc} w_{ik} = -\frac{1}{2}\ell^2_{ik}, & w_{im} = -\frac{1}{2}\ell^2_{im}, & w_{in} = -\frac{1}{2}\ell^2_{in} \\ & w_{km} = -\frac{1}{2}\ell^2_{km}, & w_{kn} = -\frac{1}{2}\ell^2_{kn}, \\ & & w_{mn} = -\frac{1}{2}\ell^2_{mn} \end{array}$$

произвольного симплекса $\mathfrak{S}_4 = \{i, k, m, n\}$ двумерной евклидовой плоскости:

$$\forall i, k, m, n \in \mathfrak{M}_2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Psi(w_{ik},\ w_{im},\ w_{in},\\ \qquad w_{km},\ w_{kn},\\ \qquad\qquad w_{mn})\end{array} = \overset{3}{K}{}^{11}_{ikmn,ikmn}(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} & w_{in} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} & w_{kn} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 & w_{mn} \\ -1 & w_{in} & w_{kn} & w_{mn} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0} \tag{5}$$

или ему эквивалентного тождества (6)

$$\begin{array}{l}\Psi(\ell^2_{ik},\ \ell^2_{im},\ \ell^2_{in},\\ \qquad \ell^2_{km},\ \ell^2_{kn},\\ \qquad\qquad \ell^2_{mn})\end{array} = \mathcal{K}_{ikmn,ikmn}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ -1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{6}$$

В существовании тождества (6) можно убедиться непосредственно, если воспользоваться следующим разложением $\mathcal{K}_{ikmn,ikmn}(\ell^2)$ на множители:

так как $\quad \ell^2_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 = x_i^2 + y_i^2 + x_k^2 + y_k^2 - 2x_i x_k - 2y_i y_k,$ то

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ -1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_i & y_i & 0 & x_i^2 + y_i^2 \\ -1 & x_k & y_k & 0 & x_k^2 + y_k^2 \\ -1 & x_m & y_m & 0 & x_m^2 + y_m^2 \\ -1 & x_n & y_n & 0 & x_n^2 + y_n^2 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & -(x_i^2 + y_i^2) & -(x_k^2 + y_k^2) & -(x_m^2 + y_m^2) & -(x_n^2 + y_n^2) \\ 0 & -2x_i & -2x_k & -2x_m & -2x_n \\ 0 & -2y_i & -2y_k & -2y_m & -2y_n \\ 0 & -2 \cdot 0 & -2 \cdot 0 & -2 \cdot 0 & -2\cdot \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3\, 2^3 \begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 & 1 \\ x_k & y_k & 0 & 1 \\ x_m & y_m & 0 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3\, 2^3 \begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 & 1 \\ x_k & y_k & 0 & 1 \\ x_m & y_m & 0 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \equiv 0.$$

Опираясь на этот пример, дадим предварительное определение феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве.

§ 6. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве размерности 2.

Рассмотрим одно множество $\mathfrak{M}_2 = \{i, k, \ldots\}$ и отображение

$$q : \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad i \mapsto \xi(i), \eta(i)$$

Мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}_2$ размерности 2 определена **феноменологическая структура ранга 4**, если существует вещественная функция $2+2$ вещественных переменных

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$u, v; u', v' \mapsto \varphi(u, v; u', v')$$

такая, что шесть функций

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) & \varphi(\xi_1,\eta_1;\xi_3,\eta_3) & \varphi(\xi_1,\eta_1;\xi_4,\eta_4) \\ & \varphi(\xi_2,\eta_2;\xi_3,\eta_3) & \varphi(\xi_2,\eta_2;\xi_4,\eta_4) \\ & & \varphi(\xi_3,\eta_3;\xi_4,\eta_4) \end{array}$$

где $\xi_1, \eta_1;\ \ \xi_2, \eta_2;\ \ \xi_3, \eta_3;\ \ \xi_4, \eta_4$ – восемь $2 \cdot 4$ независимых переменных, связаны между собой соотношением

$$\begin{array}{llll} \Psi(\varphi(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2), & \varphi(\xi_1,\eta_1;\xi_3,\eta_3), & \varphi(\xi_1,\eta_1;\xi_4,\eta_4), & \\ & \varphi(\xi_2,\eta_2;\xi_3,\eta_3), & \varphi(\xi_2,\eta_2;\xi_4,\eta_4), & \equiv 0, \\ & & \varphi(\xi_3,\eta_3;\xi_4,\eta_4)) & \end{array} \tag{7}$$

представляющим собой тождество относительно восьми независимых переменных $\xi_1, \eta_1;\ \ \xi_2, \eta_2;\ \ \xi_3, \eta_3;\ \ \xi_4, \eta_4$.

Задача состоит в том, чтобы найти две неизвестные функции

$$\varphi(u, v; u', v') \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{lll} \Psi(\varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \varphi_{14}, \\ & \varphi_{23}, & \varphi_{24}, \\ & & \varphi_{34}) \end{array},$$

обращающие равенство (7) в тождество.

Задача эта, несравненно более сложная, чем нахождение феноменологической структуры ранга 3, была решена двумя различными методами Г. Г. Михайличенко [3], [4] и В. Х. Львом [2]. Г. Г. Михайличенко первый доказал, что сакрально-функциональное уравнение (7) имеет только три (!) “естественных” решения и только четыре (!) “экзотических” независимых решения:

1. антисимметричное $\boxed{a_{ik} = -a_{ki}}$

$$\varphi_1(x_i, y_i; x_k, y_k) = a_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

$$\Psi_1(a_{ik}, a_{im}, a_{in}, a_{km}, a_{kn}, a_{mn}) = \begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overset{4}{K}{}^{00}_{ikmn;ikmn}(\overset{2}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & 0 \\ 0 & -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} & 0 \\ 0 & -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} & 0 \\ 0 & -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \tag{8}$$

$$= (a_{ik}a_{mn} - a_{im}a_{kn} + a_{in}a_{km})^2 \equiv 0$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ в верификатор (8) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & -y_i & 0 & 0 \\ x_k & -y_k & 0 & 0 \\ x_m & -y_m & 0 & 0 \\ x_n & -y_n & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_k & y_m & y_n \\ x_i & x_k & x_m & x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

2. симметричное (1) $\boxed{s_{ik} = s_{ki}; \quad s_{ii} = 0}$

$$\varphi_2(x_i, y_i; x_k, y_k) = s_{ik} = \varepsilon_1(x_i - x_k)^2 + \varepsilon_2(y_i - y_k)^2 \qquad \varepsilon = -1, 1$$

$$\Psi_2(s_{ik}, s_{im}, s_{in}, s_{km}, s_{kn}, s_{mn}) = \overset{3}{K}{}^{11}_{ikmn;ikmn}(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & s_{ik} & s_{im} & s_{in} \\ -1 & s_{ik} & 0 & s_{km} & s_{kn} \\ -1 & s_{im} & s_{km} & 0 & s_{mn} \\ -1 & s_{in} & s_{kn} & s_{mn} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{9}$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $s_{ik} = \varepsilon_1(x_i - x_k)^2 + +\varepsilon_2(y_i - y_k)^2$ в верификатор (9) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & s_{ik} & s_{im} & s_{in} \\ -1 & s_{ik} & 0 & s_{km} & s_{kn} \\ -1 & s_{im} & s_{km} & 0 & s_{mn} \\ -1 & s_{in} & s_{kn} & s_{mn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon_1 x_i & \varepsilon_2 y_i & 0 & \varepsilon_1 x_i^2 + \varepsilon_2 y_i^2 \\ -1 & \varepsilon_1 x_k & \varepsilon_2 y_k & 0 & \varepsilon_1 x_k^2 + \varepsilon_2 y_k^2 \\ -1 & \varepsilon_1 x_m & \varepsilon_2 y_m & 0 & \varepsilon_1 x_m^2 + \varepsilon_2 y_m^2 \\ -1 & \varepsilon_1 x_n & \varepsilon_2 y_n & 0 & \varepsilon_1 x_n^2 + \varepsilon_2 y_n^2 \end{vmatrix}.$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & -(\varepsilon_1 x_i^2+\varepsilon_2 y_i^2) & -(\varepsilon_1 x_k^2+\varepsilon_2 y_k^2) & -(\varepsilon_1 x_m^2+\varepsilon_2 y_m^2) & -(\varepsilon_1 x_n^2+\varepsilon_2 y_n^2) \\ 0 & -2x_i & -2x_k & -2x_m & -2x_n \\ 0 & -2y_i & -2y_k & -2y_m & -2y_n \\ 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\varepsilon_1\varepsilon_2(-2)^3\begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 & 1 \\ x_k & y_k & 0 & 1 \\ x_m & y_m & 0 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2(-2)^3\begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 \equiv 0$$

3. симметричное (2) $\boxed{\hat{s}_{ik}=\hat{s}_{ki}\ ;\quad \hat{s}_{ii}=1}$

$$\varphi_3(x_i,y_i;x_k,y_k)=\hat{s}_{ik}=\varepsilon_1\,x_ix_k+\varepsilon_2\,y_iy_k+\sqrt{1-\varepsilon_1\,x_i^2-\varepsilon_2\,y_i^2}\;\sqrt{1-\varepsilon_1\,x_k^2-\varepsilon_2\,y_k^2}$$

$$\Psi_3\begin{pmatrix}\hat{s}_{ik}, & \hat{s}_{im}, & \hat{s}_{in}, \\ & \hat{s}_{km}, & \hat{s}_{kn}, \\ & & \hat{s}_{mn}\end{pmatrix} = \overset{4}{K}{}^{00}_{ikmn;ikmn}(\hat{s}) = \begin{vmatrix} 1 & \hat{s}_{ik} & \hat{s}_{im} & \hat{s}_{in} \\ \hat{s}_{ik} & 1 & \hat{s}_{km} & \hat{s}_{kn} \\ \hat{s}_{im} & \hat{s}_{km} & 1 & \hat{s}_{mn} \\ \hat{s}_{in} & \hat{s}_{kn} & \hat{s}_{mn} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (10)$$

В том, что результат подстановки репрезентатора

$$\hat{s}_{ik}=\varepsilon_1\,x_ix_k+\varepsilon_2\,y_iy_k+\sqrt{1-\varepsilon_1\,x_i^2-\varepsilon_2\,y_i^2}\;\sqrt{1-\varepsilon_1\,x_k^2-\varepsilon_2\,y_k^2}$$

в верификатор (10) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & \hat{s}_{ik} & \hat{s}_{im} & \hat{s}_{in} \\ \hat{s}_{ik} & 1 & \hat{s}_{km} & \hat{s}_{kn} \\ \hat{s}_{im} & \hat{s}_{km} & 1 & \hat{s}_{mn} \\ \hat{s}_{in} & \hat{s}_{kn} & \hat{s}_{mn} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1\,x_i & \varepsilon_2\,y_i & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_i^2-\varepsilon_2\,y_i^2} & 0 \\ \varepsilon_1\,x_k & \varepsilon_2\,y_k & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_k^2-\varepsilon_2\,y_k^2} & 0 \\ \varepsilon_1\,x_m & \varepsilon_2\,y_m & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_m^2-\varepsilon_2\,y_m^2} & 0 \\ \varepsilon_1\,x_n & \varepsilon_2\,y_n & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_n^2-\varepsilon_2\,y_n^2} & 0 \end{vmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_i^2-\varepsilon_2\,y_i^2} & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_k^2-\varepsilon_2\,y_k^2} & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_m^2-\varepsilon_2\,y_m^2} & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_n^2-\varepsilon_2\,y_n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=\varepsilon_1\varepsilon_2\begin{vmatrix} \varepsilon_1\,x_i & \varepsilon_2\,y_i & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_i^2-\varepsilon_2\,y_i^2} & 0 \\ \varepsilon_1\,x_k & \varepsilon_2\,y_k & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_k^2-\varepsilon_2\,y_k^2} & 0 \\ \varepsilon_1\,x_m & \varepsilon_2\,y_m & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_m^2-\varepsilon_2\,y_m^2} & 0 \\ \varepsilon_1\,x_n & \varepsilon_2\,y_n & \sqrt{1-\varepsilon_1\,x_n^2-\varepsilon_2\,y_n^2} & 0 \end{vmatrix}^2$$

Особенность феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве состоит в том, что наряду с тремя, приведенными выше “естественными” решениями, уравнение (7) допускает ещё четыре “экзотических” решения:

1* $$\boxed{a_{1;ik} = \frac{y_i-y_k}{x_i-x_k}}$$

2* $$\boxed{a_{3;ik} = [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2]e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i-y_k}{x_i-x_k}}}$$

где $\gamma > 0$ — произвольная постоянная;

3* $$\boxed{a_{4;ik} = [(x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2]e^{\gamma \operatorname{Arth} \frac{y_i-y_k}{x_i-x_k}}}$$

где $\gamma > 0$; $\gamma \neq 2$ — произвольная постоянная.

4* $$\boxed{a_{2;ik} = (x_i - x_k)^2 e^{\gamma \frac{y_i-y_k}{x_i-x_k}}}$$

где $\gamma > 0$ — произвольная постоянная;

По-видимому, верификаторы для всех "экзотических" решений в явном виде через элементарные функции не выражаются. Таким образом, чтобы убедиться в том, что приведённые выше четыре "экзотических" репрезентатора действительно являются решениями сакрально-функционального уравнения (7), необходимо подставить их выражения в якобиан

$$\frac{\partial(a_{ik}, a_{im}, a_{in}, a_{km}, a_{kn}, a_{mn})}{\partial(x_i, y_i, x_k, y_k, x_m, y_m, x_n, y_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} & \frac{\partial a_{im}}{\partial x_i} & \frac{\partial a_{in}}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_i} & \frac{\partial a_{im}}{\partial y_i} & \frac{\partial a_{in}}{\partial y_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial x_k} & \frac{\partial a_{kn}}{\partial x_k} & 0 \\ \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_k} & 0 & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial y_k} & \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_k} & 0 \\ 0 & \frac{\partial a_{im}}{\partial x_m} & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial x_m} & 0 & \frac{\partial a_{mn}}{\partial x_m} \\ 0 & \frac{\partial a_{im}}{\partial y_m} & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial y_m} & 0 & \frac{\partial a_{mn}}{\partial y_m} \\ 0 & 0 & \frac{\partial a_{in}}{\partial x_n} & 0 & \frac{\partial a_{kn}}{\partial x_n} & \frac{\partial a_{mn}}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \frac{\partial a_{in}}{\partial y_n} & 0 & \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_n} & \frac{\partial a_{mn}}{\partial y_n} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

и убедиться, что ранг этого якобиана равен пяти.

Итак, если в основание двумерной геометрии положить принцип **феноменологической симметрии ранга** 4, т. е. требование, чтобы шесть переменных (играющие роль "квазиметрик")

$$\begin{matrix} \varphi_{ik} & \varphi_{im} & \varphi_{in} \\ & \varphi_{km} & \varphi_{kn} \\ & & \varphi_{mn} \end{matrix},$$

относящееся к четырём произвольным точкам $i, k, m, n \in \mathfrak{M}_2$, были бы связаны между собой одним функциональным соотношением (7), то можно показать, что получается только три (!) "естественных" решения, из которых получаются хорошо известные геометрии:

1 — двумерная симплектическая геометрия;

2 и 3 — двумерные евклидова и псевдоевклидова геометрии;

4, 5 и 6 — двумерная геометрия Римана (сферическая геометрия постоянной положительной кривизны),

— геометрия на поверхности сферы вещественного радиуса в псевдоевклидовом трёхмерном пространстве,

— двумерная геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия постоянной отрицательной кривизны)

и только четыре (!) "экзотических" решения, из которых получаются четыре, неизвестные до сих пор, "экзотические" геометрии.

На примере евклидовой плоскости мы встречаемся с новым типом коллективных или сакральных (в данном случае – тетрарных) отношений между точками.

Тетрарные отношения наблюдаются, если рассматривать множество всех симплексов $\mathfrak{S}_4$, состоящих из произвольных четырёх точек, лежащих на одной евклидовой плоскости. Как и в случае прямой, между четырьмя точками плоскости существует любопытная связь: с одной стороны, точки i, k, m, n совершенно произвольны, а с другой — шесть значений квадратов расстояний $\ell_{ik}^2,\ \ell_{im}^2,\ \ell_{in}^2,\ \ell_{km}^2,\ \ell_{kn}^2,\ \ell_{mn}^2$ связаны между собой соотношением (7).

Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_4$ как некоторый единый физический объект, мы можем сопоставить ему одну характеристическую точку в шестимерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^6$, если в качестве её шести координат выберем шесть значений $\ell_{ik}^2,\ \ell_{im}^2,\ \ell_{in}^2,\ \ell_{km}^2,\ \ell_{kn}^2,\ \ell_{mn}^2$.

Факт существования соотношения (7) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_4$, располагаются в $\mathbb{R}^6$ не произвольно, а на некоторой пятимерной гиперповерхности, что и означает на геометрическом языке существование феноменологической структуры ранга 4 на евклидовой плоскости.

§ 7. Простейшие соотношения между расстояниями в трёхмерном евклидовом пространстве.

Пусть $\mathfrak{M}_3 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ – множество точек, произвольно расположенных в трёхмерном евклидовом пространстве.

Рассмотрим произвольный симплекс

$$\mathfrak{S}_5 = \{i, k, m, n, p\} \subset \mathfrak{M}_3$$

и десять, соответствующих ему, расстояний

$$\begin{matrix} \ell_{ik} & \ell_{im} & \ell_{in} & \ell_{ip} \\ & \ell_{km} & \ell_{kn} & \ell_{kp} \\ & & \ell_{mn} & \ell_{mp} \\ & & & \ell_{np} \end{matrix}$$

Рассматривая трёхмерное евклидово пространство как трёхмерную гиперповерхность в четырёхмерном евклидовом пространстве, можно утверждать, что объём V_{ikmnp} четырёхмерного симплекса $\mathfrak{S}_5 = \{i,k,m,n,p\}$, пять вершин которого $i,k,m,n,p \in \mathfrak{M}_3$ лежат на одной и той же трёхмерной гиперповерхности, равен нулю.

Воспользовавшись формулой для объёма четырёхмерного симплекса

$$V_{ikmnp} = \frac{1}{2^2 \cdot 4!} (\mathcal{K}_{ikmnp,ikmnp})^{1/2},$$

где

$$\mathcal{K}_{ikmnp,ikmnp}(\ell^2) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

пятиточечный определитель Кэли-Менгера, можно придать этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего десять квадратов взаимных расстояний

$$\begin{matrix} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ & & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ & & & \ell_{np}^2 \end{matrix}$$

произвольного симплекса $\mathfrak{S}_5 = \{i,k,m,n,p\}$ трёхмерного евклидова пространства:

$$\forall i,k,m,n,p \in \mathfrak{M}_3$$

$$\Psi\begin{pmatrix} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ & & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ & & & \ell_{np}^2 \end{pmatrix} = \mathcal{K}_{ikmnp,ikmnp} =$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

§ 8. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 5 на одном множестве размерности 3.

Рассмотрим одно множество

$$\mathfrak{M}_3 = \{i, k, \ldots\}$$

и отображение

$$\begin{gathered} q : \mathfrak{M}_3 \to \mathbb{R}^3 \\ i \mapsto \xi(i), \eta(i), \zeta(i). \end{gathered}$$

Мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}_3$ размерности 3 имеет место феноменологическая структура ранга 5, если существует вещественная функция $3+3$ вещественных переменных

$$\begin{gathered} \varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ u, v, w; u', v', w' \mapsto \varphi(u, v, w; u', v', w') \end{gathered}$$

такая, что десять функций

$$\begin{matrix} \varphi(1;2) & \varphi(1;3) & \varphi(1;4) & \varphi(1;5) \\ & \varphi(2;3) & \varphi(2;4) & \varphi(2;5) \\ & & \varphi(3;4) & \varphi(3;5) \\ & & & \varphi(4;5) \end{matrix},$$

где

$$1 = \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \quad 2 = \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \quad 3 = \xi_3, \eta_3, \zeta_3; \quad 4 = \xi_4, \eta_4, \zeta_4; \quad 5 = \xi_5, \eta_5, \zeta_5 \ -$$

пятнадцать $(3 \cdot 5)$ независимых переменных,

связаны между собой соотношением

$$\begin{matrix} \Psi(\varphi(1;2), & \varphi(1;3), & \varphi(1;4), & \varphi(1;5), \\ & \varphi(2;3), & \varphi(2;4), & \varphi(2;5), \\ & & \varphi(3;4), & \varphi(3;5), \\ & & & \varphi(4;5)) \end{matrix} \equiv 0, \tag{12}$$

представляющим собой тождество относительно пятнадцати независимых переменных 1, 2, 3, 4, 5.

Задача состоит в том, чтобы найти две независимые функции

$$\varphi(u, v, w; u', v', w') \quad \text{и} \quad \begin{matrix} \Psi(\varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \varphi_{14}, & \varphi_{15}, \\ & \varphi_{23}, & \varphi_{24}, & \varphi_{25}, \\ & & \varphi_{34}, & \varphi_{35}, \\ & & & \varphi_{45}) \end{matrix},$$

обращающие равенство (12) в тождество.

Эта весьма сложная задача была решена В.Х.Львом в его диссертации “Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур” [1]. Он первый доказал, что функциональное уравнение (12) имеет только три (!) “естественных” решения и только три (!) “экзотических” независимых решения:

1. антисимметричное $\boxed{a_{ik} = -a_{ki}}$

$$a_1(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = a_{ik} = x_i y_k - x_k y_i + z_i - z_k$$

$$\begin{array}{l} \Psi_1(a_{ik}, \quad a_{im}, \quad a_{in}, \quad a_{ip} \\ \qquad\qquad a_{km}, \quad a_{kn}, \quad a_{kp} \\ \qquad\qquad\qquad a_{mn} \quad a_{mp} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{np}) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ -1 & -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ -1 & -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ -1 & -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 & a_{np} \\ -1 & -a_{ip} & -a_{kp} & -a_{mp} & -a_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. симметричное (1) $\boxed{\ell_{ik}^2 = \ell_{ki}^2; \quad \ell_{ii}^2 = 0}$

$$a_2(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = \ell_{ik}^2 = \varepsilon_1 (x_i - x_k)^2 + \varepsilon_2 (y_i - y_k)^2 + \varepsilon_3 (z_i - z_k)^2;$$

где $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3 = \pm 1$

$$\begin{array}{l} \Psi_2(\ell_{ik}^2, \quad \ell_{im}^2, \quad \ell_{in}^2, \quad \ell_{ip}^2 \\ \qquad\qquad \ell_{km}^2, \quad \ell_{kn}^2, \quad \ell_{kp}^2 \\ \qquad\qquad\qquad \ell_{mn}^2 \quad \ell_{mp}^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ell_{np}^2) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. симметричное (2) $\boxed{\hat{s}_{ik} = \hat{s}_{ki} \, ; \quad \hat{s}_{ii} = 1}$

$$a_3(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k z_k) = \hat{s}_{ik} = \sqrt{1 - \varepsilon_1 x_i^2 - \varepsilon_2 y_i^2 - \varepsilon_3 z_i^2} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon_1 x_k^2 - \varepsilon_2 y_k^2 - \varepsilon_3 z_k^2} +$$

$$+ \varepsilon_1 x_i x_k + \varepsilon_2 y_i y_k + \varepsilon_3 z_i z_k,$$

где $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3 = \pm 1$

$$\begin{array}{l} \Psi_3(\hat{s}_{ik}, \quad \hat{s}_{im}, \quad \hat{s}_{in}, \quad \hat{s}_{ip} \\ \qquad\qquad \hat{s}_{km}, \quad \hat{s}_{kn}, \quad \hat{s}_{kp} \\ \qquad\qquad\qquad \hat{s}_{mn} \quad \hat{s}_{mp} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \hat{s}_{np}) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & \hat{s}_{ik} & \hat{s}_{im} & \hat{s}_{in} & \hat{s}_{ip} \\ \hat{s}_{ik} & 1 & \hat{s}_{km} & \hat{s}_{kn} & \hat{s}_{kp} \\ \hat{s}_{im} & \hat{s}_{km} & 1 & \hat{s}_{mn} & \hat{s}_{mp} \\ \hat{s}_{in} & \hat{s}_{kn} & \hat{s}_{mn} & 1 & \hat{s}_{np} \\ \hat{s}_{ip} & \hat{s}_{kp} & \hat{s}_{mp} & \hat{s}_{np} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и ещё три “экзотических” решения:

$$a_4(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k z_k) = \left\{ \ln\left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] + \gamma \mathrm{arctg} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} \right\} z_i z_k,$$

$$a_5(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k z_k) = \left\{ \ln\left[(x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2\right] + \gamma \mathrm{Arth} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} \right\} z_i z_k,$$

$$a_6(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k z_k) = \ln(x_i - x_k) + \frac{y_i - y_k + z_i x_k - z_k x_i}{x_i - x_k}.$$

Функции $\Psi_{4,5,6}$ через элементарные функции не выражаются.

Итак, если в основание трёхмерной геометрии положить принцип **феноменологической симметрии ранга 5**, т. е. требование, чтобы десять переменных, (играющих роль “квазиметрик”)

$$\begin{matrix} \varphi_{ik} & \varphi_{im} & \varphi_{in} & \varphi_{ip} \\ & \varphi_{km} & \varphi_{kn} & \varphi_{kp} \\ & & \varphi_{mn} & \varphi_{mp} \\ & & & \varphi_{np} \end{matrix},$$

относящиеся к пяти произвольным точкам $i, k, m, n, p \in \mathfrak{M}_3$, были бы связаны между собой одним функциональным соотношением (12), то можно показать, что получается десять и только десять геометрий:

1 – евклидова геометрия,

2 – псевдоевклидова геометрия,

3 – трёхмерная геометрия Римана (сферическая геометрия постоянной положительной кривизны),

4 и 5 – геометрии на поверхности трёхмерной сферы, вложенные в четырёхмерные псевдоевклидовы пространства,

6 – трёхмерная геометрия Лобачевского, гиперболическая геометрия постоянной отрицательной кривизны,

7 – геометрия на трёхмерной плоскости, вложенной в четырёхмерное симплектическое пространство,

8, 9 и 10 – неизвестные ранее трёхмерные “экзотические” геометрии.

Как и в случае прямой или плоскости, между пятью точками трёхмерного евклидова пространства существует необычная связь: с одной стороны, точки i, k, m, n, p совершенно произвольны, а с другой – десять значений квадратов расстояний между ними связаны между собой соотношением (12).

Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_5$ как некоторый единый физический объект, мы можем сопоставить ему одну характеристическую точку в десятимерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{10}$, если в качестве её десяти координат выберем соответствующие расстояния или их квадраты. Факт существования соотношения (12) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_5$, расположены в $\mathbb{R}^{10}$ не произвольно, а на некоторой девятимерной поверхности, что и означает существование феноменологической структуры ранга 5 на одном множестве $\mathfrak{M}_3$ размерности 3.

Рябина красная

II. Евклидова геометрия – невероятная.

§ 9. Феноменологические и сакральные геометрии.

До сих пор точка как, основное, исходное понятие в любой геометрии, рассматривалась как нечто неделимое, бесструктурное. То есть считается, говоря словами Евклида, что: "Точка есть то, что не имеет частей" [?].

Однако, одним из главных принципов, лежащих в основании теории физических структур, является **Принцип сакральной симметрии**, согласно которому каждый физический объект $\tilde{i}$ имеет в качестве своего идеального прообраза пару, состоящую из двух сопряжённых прообразов (субъэйдосов) $|i\rangle$ и $\langle i|$ (см. рис. 10)

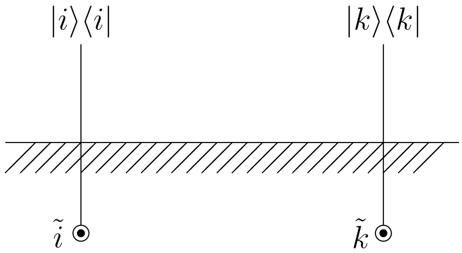
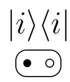


Рис. 10. Связь между физическими объектами
и их идеальными прообразами.

Поскольку евклидову геометрию можно рассматривать как раздел физики, возникает желание переизложить её в соответствии с принципом сакральной симметрии. Прообразы (субъэйдосы) $|i\rangle$, $|k\rangle$ мы будем называть правыми (верхними) математическими объектами, а прообразы (субъэйдосы) $\langle i|$, $\langle k|$ – левыми (нижними) математическими объектами.

Итак, перенесём этот принцип на геометрию и будем рассматривать каждую точку i как своеобразный диполь, состоящий из двух слипшихся нижних (левых) и верхних (правых) математических объектов:

Точка в феноменологической геометрии



Точка в сакральной геометрии

В феноменологической геометрии исходным понятием является точка i ; в сакральной геометрии исходным понятием являются эйдосы – левые и правые математические объекты, а точка является производным понятием, представляющим собой пару, состоящую из левых и правых математических объектов:

$$i = |i\rangle\langle i|.$$

В феноменологической геометрии расстояние между двумя точками i и k симметрично, т. е.

$$\ell_{ik} = \ell_{ki}.$$

В сакральной геометрии, вообще говоря,

$$\ell_{\underline{i}\bar{k}} \neq \ell_{\underline{k}\bar{i}}.$$

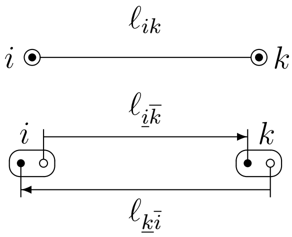


Рис. 11. Расстояние ℓ_{ik} в феноменологической геометрии
и расстояния $\ell_{\underline{i}\bar{k}}$ и $\ell_{\underline{k}\bar{i}}$ в сакральной геометрии.

В основании n-мерной феноменологической геометрии лежит отношение между $n+2$ **точками**

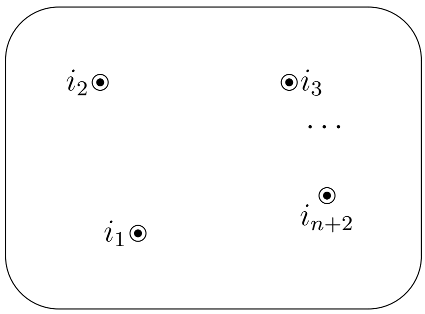


Рис. 12. Отношения между $n+2$ точками в n-мерной
феноменологической геометрии.

В основании n-мерной сакральной геометрии лежит отношение между сакральными левыми $n+2$-кортами $\langle i_1 \dots i_{n+2}|$ рода и сакральными правыми $n+2$-кортами $|k_1 \dots k_{n+2}\rangle$:

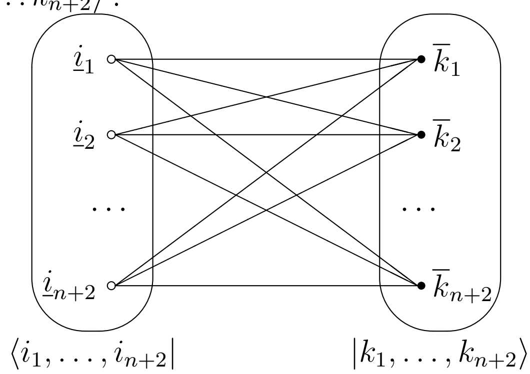


Рис. 13. Отношения между кортами в n-мерной сакральной геометрии.

§ 10. Одномерная сакральная геометрия.

Рассмотрим множество точек на прямой

$$\mathfrak{M}_1 = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Разобъём его произвольным образом на два множества

$$\underline{\mathfrak{M}}_1 = \{\underline{i}_1, \underline{i}_2, \ldots\},$$

которое условно назовём множеством "белых" точек, и

$$\overline{\mathfrak{M}}_1 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots\},$$

которое условно назовём множеством "чёрных" точек.

Рассмотрим квадраты всевозможных расстояний

$$\overset{1}{\ell}{}^2_{\underline{i}\overline{k}} = (x_{\underline{i}} - x_{\overline{k}})^2$$

между "белыми" и "чёрными" точками.

Фундаментальный закон, лежащий в основании сакральной геометрии евклидовой прямой, состоит в следующем:

при любом выборе трёх "белых" точек, образующих левый 3-субъэйдосный корт $\langle \underline{i}_1\, \underline{i}_2\, \underline{i}_3|$, и при любом выборе трёх "чёрных" точек, образующих правый 3-субъэйдосный корт $|\overline{k}_1\, \overline{k}_2\, \overline{k}_3\rangle$, имеет место следующее тождество

$$\begin{array}{l}\Phi(\ell^{\,2}_{\underline{i}_1\overline{k}_1}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_1\overline{k}_2}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_1\overline{k}_3},\\ \quad \ell^{\,2}_{\underline{i}_2\overline{k}_1}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_2\overline{k}_2}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_2\overline{k}_3},\\ \quad \ell^{\,2}_{\underline{i}_3\overline{k}_1}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_3\overline{k}_2}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_3\overline{k}_3})\end{array} = \overset{2}{\mathcal{K}}{}^{11}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(\overset{1}{\ell}{}^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

В этом легко убедиться, рассмотрев следующее тождество

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_{i_1} & 0 & x^2_{i_1} \\ -1 & x_{i_2} & 0 & x^2_{i_2} \\ -1 & x_{i_3} & 0 & x^2_{i_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -x^2_{k_1} & -x^2_{k_2} & -x^2_{k_3} \\ 0 & -2x_{k_1} & -2x_{k_2} & -2x_{k_3} \\ 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \cdot 2^2 \begin{vmatrix} x_{i_1} & 0 & 1 \\ x_{i_2} & 0 & 1 \\ x_{i_3} & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

§ 11. Двумерная сакральная геометрия.

Рассмотрим множество точек на плоскости

$$\mathfrak{M}_2 = \{a_1, a_2, \dots\}.$$

Разобъём его произвольным образом на два множества:

$$\underline{\mathfrak{M}}_1 = \{\underline{i}_1, \underline{i}_2, \dots\},$$

которое условно назовём множеством “белых” точек, и множество

$$\overline{\mathfrak{M}}_2 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \dots\},$$

которое условно назовём множеством “чёрных” точек.

Рассмотрим всевозможные квадраты расстояний

$$\overset{2}{\ell}{}^2_{\underline{i}\overline{k}} = (x_{\underline{i}} - x_{\overline{k}})^2 + (y_{\underline{i}} - y_{\overline{k}})^2$$

между “белыми” и “чёрными” точками.

Фундаментальный закон, лежащий в основании сакральной геометрии двумерной евклидовой плоскости, состоит в следующем:

при любом выборе четырёх “белых” точек, образующих левый 4-субъэйдосный корт $\langle \underline{i}_1\, \underline{i}_2\, \underline{i}_3\, \underline{i}_4|$ и при любом выборе четырёх “чёрных” точек, образующих правый 4-субъэйдосный корт $|\overline{k}_1\, \overline{k}_2\, \overline{k}_3\, \overline{K}_4\rangle$, имеет место следующее тождество:

$$\begin{array}{l}\Phi(\ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1}, \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2}, \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3}, \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_4}\\ \quad \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1}, \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2}, \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3}, \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_4}\\ \quad \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1}, \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2}, \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3}, \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_4}\\ \quad \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_1}, \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_2}, \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_3}, \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_4})\end{array} = \overset{3}{\mathcal{K}}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}(\overset{2}{\ell}{}^2) =$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_4} \end{vmatrix} \equiv 0$$

В этом легко убедиться, рассмотрев следующее тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_4} \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_{i_1} & y_{i_1} & 0 & r_{i_1}^2 \\ -1 & x_{i_2} & y_{i_2} & 0 & r_{i_2}^2 \\ -1 & x_{i_3} & y_{i_3} & 0 & r_{i_3}^2 \\ -1 & x_{i_4} & y_{i_4} & 0 & r_{i_4}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -r_{k_1}^2 & -r_{k_2}^2 & -r_{k_3}^2 & -r_{k_4}^2 \\ 0 & -2x_{k_1} & -2x_{k_2} & -2x_{k_3} & -2x_{k_4} \\ 0 & -2y_{k_1} & -2y_{k_2} & -2y_{k_3} & -2y_{k_4} \\ 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= (-1)^3 2^3 \begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & 0 & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & 0 & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & 0 & 1 \\ x_{i_4} & y_{i_4} & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} & x_{k_4} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} & y_{k_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,
$$

где $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$.

§ 12. Корт – фундаментальное понятие сакральной физики второго поколения.

Три понятия лежат в основании Теории физических структур. Это **корт**, **верификатор** и **репрезентатор.**

Корт играет роль Слова, из которого с помощью верификатора и репрезентатора формируется понятие *фундаментального физического закона.*

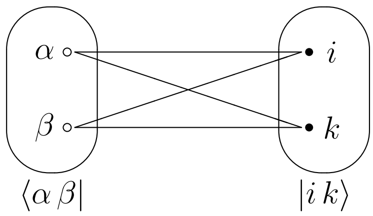
Оказывается, для этой цели нужно взять *конечное число* физических объектов и, рассматривая их как независимые нечисловые переменные, построить по определённому правилу некоторую **общезначимую формулу (тавтологию)**, подобно тому как это делается, например, в исчислении высказываний, в исчислении предикатов или в абстрактной алгебре Буля.

Далее на многочисленных примерах можно убедиться в том, что полученное таким образом “сакральное тождество” и есть фундаментальный закон, лежащий в основании физики и геометрии.

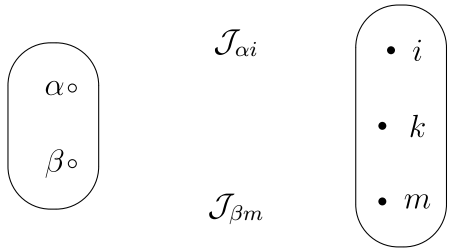
Итак, мы рассмотрели два физических закона – закон Ньютона и закон Ома – и два варианта евклидовой геометрии и установили следующее:

за всеми рассмотренными законами скрываются отношения между двумя соответствующими кортами :

1. между левым кортом $\langle\alpha\,\beta\,|$, состоящим из двух акселераторов (ускорителей) α и β, и правым кортом $|\,i\,k\rangle$, состоящим из двух ускоряемых тел i и k, в случае закона Ньютона:

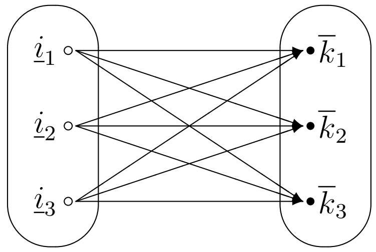


2. между левым кортом $\langle\alpha\,\beta\,|$, состоящим из двух источников тока α и β, и правым кортом $|\,i\,k\,m\rangle$, состоящим из трёх проводников i, k и m, в случае закона Ома для всей цепи:



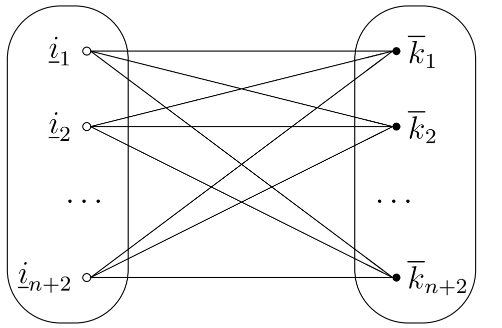
.

3. между левым кортом $\langle \underline{i_1}\ \underline{i_2}\ \underline{i_3} \,|$, состоящим из трёх “белых” точек, и правым кортом $|\, \overline{k_1}\ \overline{k_2}\ \overline{k_3} \,\rangle$, состоящим из трёх “чёрных” точек, в случае одномерной сакральной евклидовой геометрии:



$\langle \underline{i}_1\, \underline{i}_2\, \underline{i}_3 \,|$ $\qquad$ $|\overline{k}_1\, \overline{k}_2\, \overline{k}_3 \,\rangle$

4. между левым кортом $\langle \underline{i}_1\ \underline{i}_2\ \ldots\ \underline{i}_{n+2} \,|$, состоящим из $n+2$ “белых” точек, и правым кортом $|\, \overline{k}_1\ \overline{k}_2\ \ldots\ \overline{k}_{n+2} \,\rangle$, состоящим из $n+2$ “чёрных” точек, в случае n -мерной сакральной евклидовой геометрии:



$\langle \underset{\cdot}{i_1}, \ldots, i_{n+2}|$ $\qquad$ $|k_1, \ldots, k_{n+2}\rangle$

Как мы увидим в дальнейшем, идея **отношений между кортами** является важнейшей для всей физики и геометрии, так как составляет **сущность** самогó понятия закона. Можно сказать, что суть каждого закона физики и геометрии состоит в отношении между двумя **сакральными кортами**.

При этом мне вспоминается моя единственная встреча с академиком Владимиром Александровичем Фоком (1898–1974), к которому я приехал в 1970 году в Ленинград, чтобы рассказать ему о своих работах по Теории физических структур и, в частности, о новой точке зрения на закон Ньютона $ma = f$.

Он встретил меня весьма доброжелательно, пригласил к себе домой и приготовился внимательно выслушать меня. Но когда я сказал:

— Рассмотрим два тела, i и k, и две пружинки, α и β, и измерим четыре ускорения $a_{\alpha i}$, $a_{\alpha k}$, $a_{\beta i}$, $a_{\beta k}$ ...

Здесь он перебил меня:

— Простите, о чём идёт речь? о механике материальной точки? или о механике системы, состоящей из двух материальных точек?

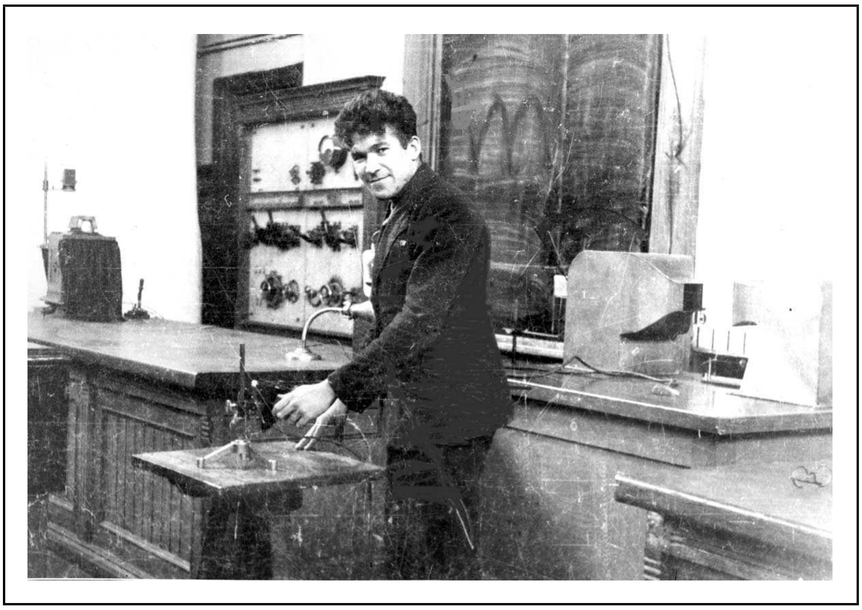
Я ответил:

— Речь идёт о механике материальной точки, то есть о новой точке зрения на закон Ньютона $ma = f$.

— Но, почему же Вы рассматриваете два тела? Нет, я Вас не понимаю!
и выключил свой слуховой аппарат, дав понять тем самым, что дальнейший разговор на эту тему лишён для него всякого смысла.

Действительно, очень трудно взглянуть на хорошо известную ещё с детства механику с существенно иной, непривычной точки зрения.

Кстати, должен заметить, что мой друг и давний коллега, профессор МГУ Юрий Сергеевич Владимиров в своих работах по “реляционной теории пространства-времени и взаимодействий” [5]–[6] по-своему переизлагает Теорию физических структур, (вводя, между прочим, свою неудачную терминологию), не как теорию отношений между кортами, а как теорию отношений между отдельными элементами, тем самым “выплёскивая из ванны самого ребёнка”, что в значительной степени обесценивает эвристическое содержание Теории физических структур.



Юрий КУЛАКОВ *в Большой физической аудитории в старом здании МГУ на Моховой (1946 год)*

Литература к главе 7

[1] *Лев В.Х.* Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур. Кандидатская диссертация.

[2] *Лев В. Х.* Трёхмерные геометрии в теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Выпуск 125. Вычислительные системы. Новосибирск. Институт математики СОАН СССР. 1988. с. 90–103.

[3] *Михайличенко Г. Г.* Двумерные геометрии // Доклады АН СССР 1981. т. 260. №4. с. 803–805.

[4] *Mikhaylichenko G.G.* Geométries a deux dimensions dans la théorie de structures physiques. C.R. Acad. Sc. Paris. t. 293 (16 november 1981) Serie 1. pp. 529–531.

[5] *Владимиров Ю.С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. (Теория систем отношений). – М.: Изд-во МГУ, 1996.

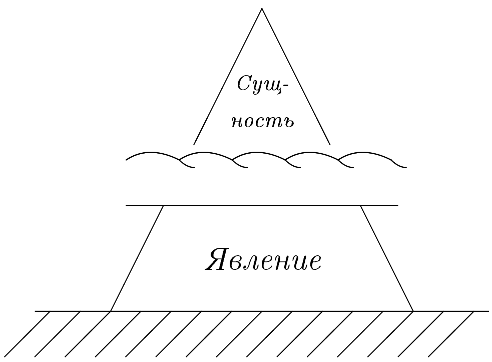
[6] *Владимиров Ю.С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. (Теория физических взаимодействий). – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 448 с.

Санти Рафаэль (1483 – 1520) *Афинская школа*

В центре:

Платон: – **Истинное знание имеет сакральное происхождение!**

Аристотель: – **Знание возникает из опыта и имеет антропное происхождение!**



Часть III

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Difficile est proprie communia dicere [42]

Знание определителей необходимо почти в любой отрасли математики. Благодаря своему широкому и разнообразному применению они привлекают к себе внимание со стороны всех, кто занимается прикладной математикой; для чистых математиков они представляют интерес как функции с особенно простыми и замечательными свойствами. Значение их очевидно и они вполне заслуживают изучения [1].

— *У.У. Сойер*

Глава 8. Секстет[43] фундаментальных определителей на двух множествах различной природы.

Глава 9. Репрезентаторы как корни сакральных тождеств.

Глава 10. Разделение нечисловых переменных.

[42] Трудно по-своему выразить общеизвестные вещи.

[43] *Секстет* (лат. sextus – шестой) – музыкальное произведение для шести инструментов, каждому из которых предназначена особая партия.

Аннотация к Части III

В двух предыдущих Частях рассматривались примеры, взятые из геометрии и общей физики, в которых хорошо известные законы записывались в виде тождественного равенства нулю определителей следующих шести типов:

четырёх регулярных

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}(\overset{n}{a}) \equiv 0,$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}(\overset{n}{u}) \equiv 0, \qquad \overset{n+1}{K}{}^{10}(\overset{n}{v}) \equiv 0,$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

и двух спорадических

$$\overset{2}{M}{}^{02}(\overset{1}{p}) \equiv 0, \qquad \overset{2}{M}{}^{20}(\overset{1}{q}) \equiv 0.$$

В этой Части мы сможем убедиться в том, что весь этот секстет определителей может быть получен из одного определителя

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1 i_1} & \dots & a_{\alpha_1 i_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_n i_1} & \dots & a_{\alpha_n i_n} \end{vmatrix}$$

путём замены двухиндексных переменных $a_{\alpha i}$ на трёх- и четырёхиндексные переменные

$$a_{\alpha i},$$

$$u_{\alpha,ik} = u_{\alpha i} - u_{\alpha k},$$

$$v_{\alpha\beta,i} = v_{\alpha i} - v_{\beta i},$$

$$w_{\alpha\beta,ik} = w_{\alpha,ik} - w_{\beta,ik} = w_{\alpha\beta,i} - w_{\alpha\beta,k} = w_{\alpha,i} - w_{\beta,i} - w_{\alpha,k} + w_{\beta,k},$$

$$p_{\alpha,ikm} = \frac{p_{\alpha,ik}}{p_{\alpha,im}} = \frac{p_{\alpha,i} - p_{\alpha,k}}{p_{\alpha,i} - p_{\alpha,m}}$$

$$q_{\alpha\beta\gamma,i} = \frac{q_{\alpha\beta,i}}{p_{\alpha\gamma,i}} = \frac{q_{\alpha,i} - q_{\beta,i}}{q_{\alpha,i} - q_{\gamma,i}},$$

получаемыми из двухиндексных переменных с помощью двух обратных(!) функций – вычитания и деления.

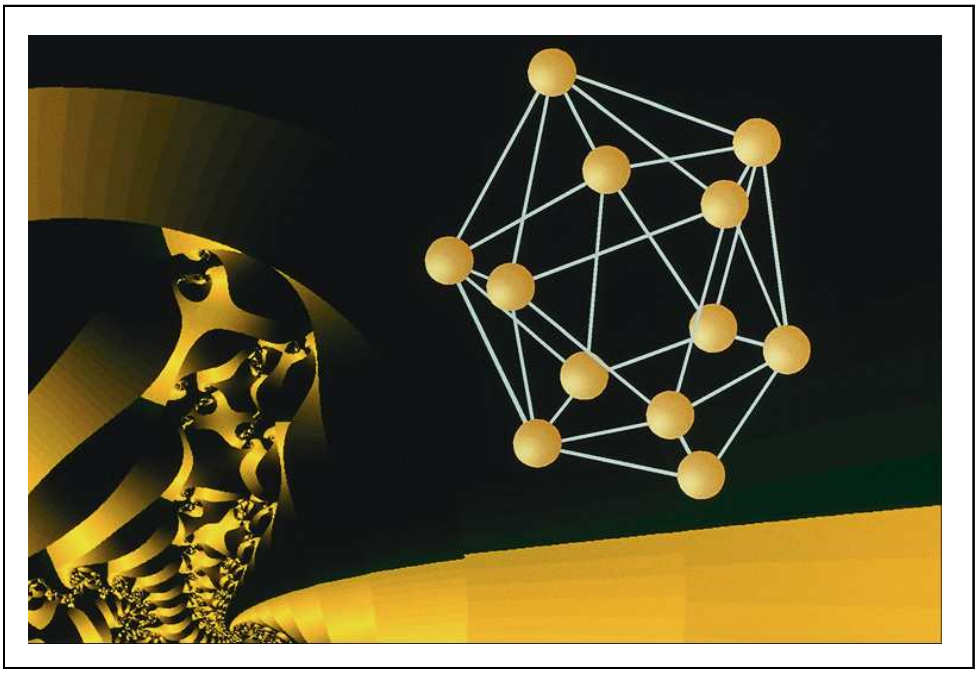
Этот факт интересен сам по себе, но он не отвечает на главные вопросы – почему законы физики и геометрии описываются рассмотренным выше синглетом определителей? почему определители играют такую большую роль в математике? и, наконец, что скрывается за понятием определителя?

Ответить на эти вопросы можно лишь опираясь как на фундамент на Теорию физических структур.

Математик, так же как художник или поэт, создаёт узоры. И если его узоры более устойчивы, то лишь потому, что они составлены из идей...

Узоры математика, так же как узоры художника или поэта должны быть прекрасны; идеи, так же как цвета или слова, должны гармонически соответствовать друг другу. Красота есть первое требование; в мире нет места для некрасивой математики.

Годфри Харольд Харди [2]



Глава 8.

Секстет фундаментальых определителей на двух множествах различной природы

Melius non incipient, quam desinent[44].

Мах был единственным кто серьёзно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками.

— Альберт Эйнштейн

§ 1. Две различные точки зрения на определитель

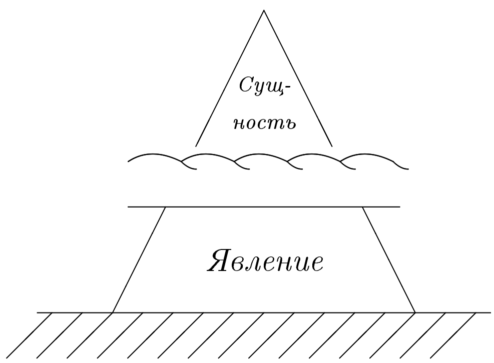
§ 2. Исходный определитель N -го порядка

§ 3. Фундаментальные двух- трёх- и четырёхиндексные переменные

§ 4. Шесть промежуточных определителей

§ 5. Квартет фундаментальных определителей и два определителя Михайличенко

§ 6. Квартет дважды окаймлённых фундаментальных определителей



[44]Лучше не начинать, чем остановиться на полпути.

Кэли сказал как-то в разговоре со мною, что в случае, если бы ему пришлось прочесть пятнадцать лекций по всей математике, то одну лекцию он посвятил бы определителям [3].

— *Феликс Клейн*

§ 1. Две различные точки зрения на определитель.

Обычно под определителем понимается специальная функция n^2 *двухиндексных переменных*:

$$A(a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Однако, определитель можно рассматривать как функцию $2n$ *нечисловых переменных* $\boldsymbol{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}$ и $\boldsymbol{i_1}, \ldots, \boldsymbol{i_n}$, играющих роль индексов у числовых двухиндексных переменных $a_{\boldsymbol{\alpha i}}$:

$$A_{\boldsymbol{\alpha_1} \ldots \boldsymbol{\alpha_n};\, \boldsymbol{i_1} \ldots \boldsymbol{i_n}} = \begin{vmatrix} a_{\boldsymbol{\alpha_1 i_1}} & \cdots & a_{\boldsymbol{\alpha_1 i_n}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{\boldsymbol{\alpha_n i_1}} & \cdots & a_{\boldsymbol{\alpha_n i_n}} \end{vmatrix}.$$

На первый взгляд кажется странным – **определитель как функция индексов входящих в него числовых переменных!**

Однако, именно такая точка зрения на определитель делает его идеальным инструментом для описания физической реальности. Дело в том, что, как мы увидим в дальнейшем, любой физический закон – это вполне определенное утверждение относительно реальных физических объектов (точнее, относительно их идеальных прообразов – *субэйдосов*), имеющих нечисловую природу. Однако сам физический закон выражается через физические объекты не напрямую, а опосредованно через некоторую числовую функцию – *репрезентатор* $a_{\boldsymbol{\alpha i}}$, зависящую от двух, каждый раз различных, нечисловых переменных $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{i}$.

Так, например, Второй закон механики Ньютона в рамках Теории физических структур записывается в виде:

$$\forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{N}; \qquad \forall\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \in \mathfrak{M}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha\beta};\, \boldsymbol{ik}} = \begin{vmatrix} a_{\boldsymbol{\alpha i}} & a_{\boldsymbol{\alpha k}} \\ a_{\boldsymbol{\beta i}} & a_{\boldsymbol{\beta k}} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где $\mathfrak{N} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots\}$ – множество идеальных прообразов акселераторов,
$\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \ldots\}$ – множество идеальных прообразов ускоряемых тел;
$a_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{i}}$ – ускорение тела $\boldsymbol{i}$ под действием акселератора $\boldsymbol{\alpha}$.

Аналогично, закон Ома для всей цепи записывается в виде[45]:

$$\forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{N}; \quad \forall\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m} \in \mathfrak{M}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta};\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}} = \begin{vmatrix} \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{i}} & \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{k}} & \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{m}} \\ \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{i}} & \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{k}} & \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{m}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где $\mathfrak{N} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots\}$ – множество идеальных прообразов источников тока,
$\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \ldots\}$ – множество идеальных прообразов проводников;
$\mathfrak{I}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{i}}$ – сила тока, проходящего через проводник $\boldsymbol{i}$ при подключении к нему источника тока $\boldsymbol{\alpha}$.

§ 2. Исходный определитель N-го порядка.

Прежде чем рассматривать физические и геометрические примеры, иллюстрирующие основную идею, лежащую в основании Теории физических структур, рассмотрим все виды определителей, которые будут встречаться нам в дальнейшем. Мы будем вводить их формальным путём, используя лишь хорошо известные свойства определителей.

Таким образом, в этом разделе, который имеет предварительный справочный характер, мы будем считать, что понятие определителя всем хорошо известно. Другое дело, когда в следующих разделах зайдёт речь о фундаментальных физических законах, то там мы начнём ab ovo, и само понятие определителя мы получим как единственно возможное решение некоторого чрезвычайно общего функционального уравнения.

Итак, мы будем исходить из хорошо известного определителя

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix}.$$

[45] Чтобы обратить внимание читателей на широкое использование в Теории физических структур *нечисловых физических переменных*, я использовал в этом параграфе “жирный” шрифт. Но в дальнейшем для обозначения нечисловых переменных я буду использовать нормальный шрифт.

§ 3. Фундаментальные двух-, трёх- и четырёхиндексные переменные.

Чтобы получить новые виды определителей как функции двухиндексных переменных, осуществим следующую замену переменных:

- *двухиндексные* переменные оставим без изменений:

$$Q_{*;*} = \varphi_{*;*}$$

- *трёхиндексные* переменные образуем как разности двухиндексных переменных:

$$Q_{*;*i} = \varphi_{*;*} - \varphi_{*;i}$$

$$Q_{*\alpha;*} = \varphi_{*;*} - \varphi_{\alpha;*}$$

- *четырёхиндексные* переменные образуем

либо как разности трёхиндексных переменных:

$$Q_{*\alpha;*i} = Q_{*;*i} - Q_{\alpha;*i} = Q_{*\alpha;*} - Q_{*\alpha;i} =$$

$$= \varphi_{*;*} - \varphi_{\alpha;*} - \varphi_{*;i} + \varphi_{\alpha;i}$$

либо как отношения трёхиндексных переменных:

$$Q_{*;*ik} = \frac{Q_{*;*i}}{Q_{*;*k}} = \frac{\varphi_{*;*} - \varphi_{*;i}}{\varphi_{*;*} - \varphi_{*;k}}$$

$$Q_{*\alpha\beta;*} = \frac{Q_{*\alpha;*}}{Q_{*\beta;*}} = \frac{\varphi_{*;*} - \varphi_{\alpha;*}}{\varphi_{*;*} - \varphi_{\beta;*}}$$

§ 4. Шесть промежуточных определителей.

Подставляя полученные таким образом двух-, трёх- и четырёхиндексные переменные в исходный определитель, получим шесть следующих определителей:

1.
$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1 i_1} & \cdots & Q_{\alpha_1 i_N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{\alpha_N i_1} & \cdots & Q_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix}$$

2.
$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*i_{N+1}}) =$$
$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1;i_1 i_{N+1}} & \cdots & Q_{\alpha_1;i_N i_{N+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N;i_1 i_{N+1}} & \cdots & Q_{\alpha_N;i_N i_{N+1}} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \end{vmatrix}$$

3.
$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*}) =$$
$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_1} & \cdots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_1} & \cdots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_N} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} \end{vmatrix}$$

4.
$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*i_{N+1}}) =$$
$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_1 i_{N+1}} & \cdots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_N i_{N+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_1 i_{N+1}} & \cdots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_N i_{N+1}} \end{vmatrix} =$$
$$= \left| \begin{matrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} + \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} & \cdots \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} + \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} & \cdots \end{matrix} \right.$$
$$\left. \begin{matrix} \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} + \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} + \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \end{matrix} \right|$$

5. $$A^{02}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1} i_{N+2}}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;* i_{N+1} i_{N+2}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1;i_1 i_{N+1} i_{N+2}} & \cdots & Q_{\alpha_1;i_N i_{N+1} i_{N+2}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N;i_1 i_{N+1} i_{N+2}} & \cdots & Q_{\alpha_N;i_N i_{N+1} i_{N+2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}}}{\varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+2}}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}}}{\varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+2}}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}}}{\varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_N i_{N+2}}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}}}{\varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_N i_{N+2}}} \end{vmatrix}$$

6. $$A^{20}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};*}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_1} & \cdots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_1} & \cdots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_N} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1}}{\varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_{N+2} i_1}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N}}{\varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_{N+2} i_N}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1}}{\varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_{N+2} i_1}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N}}{\varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_{N+2} i_N}} \end{vmatrix}$$

Как мы увидим в дальнейшем, все полученные таким образом четыре определителя

$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*})$$
$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*})$$
$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*})$$
$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*})$$

естественным путём возникают сами собой в Теории физических структур.

Что же касается определителей

$$A^{02}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1} i_{N+2}}(\varphi_{*;*})$$

$$A^{20}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}),$$

то из них востребованными оказываются лишь определители с $N=2$, то есть в Теории физических структур естественным путём получаются лишь определители

$$A^{02}_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha\beta;ik}(Q_{*;*mn}) =$$
$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha;imn} & Q_{\alpha;kmn} \\ & \\ Q_{\beta;imn} & Q_{\beta;kmn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha i}-\varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha i}-\varphi_{\alpha n}} & \dfrac{\varphi_{\alpha k}-\varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha k}-\varphi_{\alpha n}} \\ & \\ \dfrac{\varphi_{\beta i}-\varphi_{\beta m}}{\varphi_{\beta i}-\varphi_{\beta n}} & \dfrac{\varphi_{\beta k}-\varphi_{\beta m}}{\varphi_{\beta k}-\varphi_{\beta n}} \end{vmatrix}$$

и

$$A^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha\beta;ik}(Q_{*\gamma\delta;*}) =$$
$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha\gamma\delta;i} & Q_{\alpha\gamma\delta;k} \\ & \\ Q_{\beta\gamma\delta;i} & Q_{\beta\gamma\delta;k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha i}-\varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\alpha i}-\varphi_{\delta i}} & \dfrac{\varphi_{\alpha k}-\varphi_{\gamma k}}{\varphi_{\alpha k}-\varphi_{\delta k}} \\ & \\ \dfrac{\varphi_{\beta i}-\varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\beta i}-\varphi_{\delta i}} & \dfrac{\varphi_{\beta k}-\varphi_{\gamma k}}{\varphi_{\beta k}-\varphi_{\delta k}} \end{vmatrix}$$

§ 5. Квартет[46] фундаментальных определителей и два определителя Михайличенко.

Итак, после соответствующего окаймления имеем квартет фундаментальных опеределителей:

1. фундаментальный 00−определитель

$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix}$$

2. фундаментальный 01−определитель

$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[46] *Квартет* (лат. quartus – четвёртый) – музыкальное произведение для четырёх инструментов, каждому из которых предназначена особая партия.

3. фундаментальный 10−определитель

$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & 1 \\ \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & 1 \end{vmatrix}$$

4. фундаментальный 11−определитель

$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \end{vmatrix}$$

и два определителя Михайличенко:

1. $$A^{02}_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha n}} & \dfrac{\varphi_{\alpha k} - \varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha k} - \varphi_{\alpha n}} \\ & \\ \dfrac{\varphi_{\beta i} - \varphi_{\beta m}}{\varphi_{\beta i} - \varphi_{\beta n}} & \dfrac{\varphi_{\beta k} - \varphi_{\beta m}}{\varphi_{\beta k} - \varphi_{\beta n}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Q_{\alpha;in}Q_{\alpha;kn}Q_{\beta;in}Q_{\beta;kn}} M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{*;*}),$$

где

$$M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{**}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_{\alpha i} & \varphi_{\alpha k} & \varphi_{\alpha m} & \varphi_{\alpha n} \\ \varphi_{\beta i} & \varphi_{\beta k} & \varphi_{\beta m} & \varphi_{\beta n} \\ \varphi_{\alpha i}\varphi_{\beta i} & \varphi_{\alpha k}\varphi_{\beta k} & \varphi_{\alpha m}\varphi_{\beta m} & \varphi_{\alpha n}\varphi_{\beta n} \end{vmatrix}$$

– первый определитнль Михайличенко

2. $$A^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{**}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\delta i}} & \dfrac{\varphi_{\alpha k} - \varphi_{\gamma k}}{\varphi_{\alpha k} - \varphi_{\delta k}} \\ & \\ \dfrac{\varphi_{\beta i} - \varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\beta i} - \varphi_{\delta i}} & \dfrac{\varphi_{\beta k} - \varphi_{\gamma k}}{\varphi_{\beta k} - \varphi_{\delta k}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Q_{\alpha\delta;i}Q_{\alpha\delta;k}Q_{\beta\delta;i}Q_{\beta\delta;k}} M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{*;*}),$$

где

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_{\alpha i} & \varphi_{\alpha k} & \varphi_{\alpha i}\varphi_{\alpha k} \\ 1 & \varphi_{\beta i} & \varphi_{\beta k} & \varphi_{\beta i}\varphi_{\beta k} \\ 1 & \varphi_{\gamma i} & \varphi_{\gamma k} & \varphi_{\gamma i}\varphi_{\gamma k} \\ 1 & \varphi_{\delta i} & \varphi_{\delta k} & \varphi_{\delta i}\varphi_{\delta k} \end{vmatrix}$$

– второй определитель Михайличенко

§ 6. Квартет дважды окаймлённых фундаментальных определителей.

Полученные выше фундаментальные определители при фиксированном N имеют различный порядок. Чтобы обнаружить общие их свойства, необходимо путём соответствующего окаймления привести их к единообразному виду определителя $N+2$ порядка. Произведя такое окаймление мы получим квартет дважды окаймлённых фундаментальных определителей:

1. дважды окаймлённый фундаментальный $00-$определитель:

$$\overset{N}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. дважды окаймлённый фундаментальный $01-$определитель:

$$\overset{N}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3. дважды окаймлённый фундаментальный $10-$определитель:

$$\overset{N}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & 0 \\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & 0 \end{vmatrix}$$

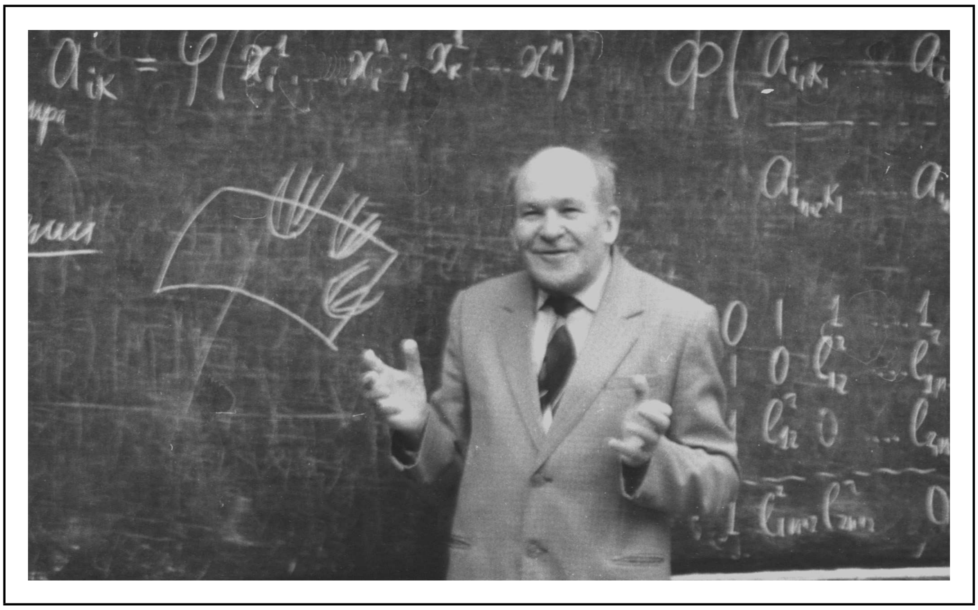
4. дважды окаймлённый фундаментальный $11-$определитель:

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \end{vmatrix}$$

В итоге появляется возможность записать все четыре фундаментальных определителя в виде одной формулы, содержащей три параметра $N = 1, 2, \ldots$ $p = 0, 1;$ и $q = 0, 1:$

$$\overset{N}{K}{}^{pq}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+p}; i_1 \ldots i_N i_{N+q}}(\varphi_{*;*}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & q & \cdots & q & 1 \\ -p & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & q\varphi_{\alpha_1 i_{N+q}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -p & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & q\varphi_{\alpha_N i_{N+q}} \\ -1 & p\varphi_{\alpha_{N+p} i_1} & \cdots & p\varphi_{\alpha_{N+p} i_N} & pq\varphi_{\alpha_{N+p} i_{N+q}} \end{vmatrix}$$



Определитель – это просто!

Стоя́щие у основания ТФС:

Владимир Лев, Юрий Кулаков, Виктор Шахов и Геннадий Михайличенко

Литература к главе 8

[1] *Сойер У.У.* Прелюдия к математике - М.: Просвещение, 1965. - С. 199.

[2] *Hardy G.H.* A Mathematician's Apology, Cambridge – London, 1940, ss. 24, 25.

[3] *Клейн Феликс* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. Геометрия. - М.: Наука. 1987. С. 220.

Нобелевская медаль Игоря Евгеньевича Тамма

Глава 9.

РЕПРЕЗЕНТАТОРЫ КАК КОРНИ САКРАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВ

Nullis in verba[47]

Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и суровой, подобной красоте скульптуры, не обращающейся ни к чему в нашей слабой натуре... Возвышенно чистая, способная к такому строгому совершенству, которое доступно только величайшему искусству [1].

— *Бертран Рассел (1872 – 1970)*

§ 1. Репрезентатор $a_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(a_{*;*}) \equiv 0$

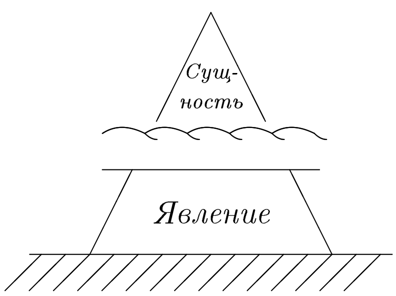
§ 2. Репрезентатор $u_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}i_{n+2}}(u_{*;*}) \equiv 0$.

§ 3. Репрезентатор $v_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(v_{*;*}) \equiv 0$.

§ 4. Репрезентатор $w_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1}i_{n+2}}(w_{*;*}) \equiv 0.$

§ 5. Дробно-линейные репрезентаторы $p_{\alpha i}$ и $q_{\alpha i}$ как корни двух фундаментальных уравнений Михайличенко.

§ 6. Предварительные итоги



[47]Ничего на́ слово.

В наших примерах мы всегда создавали инварианты путём образования определителей; таким образом, вообще теория определителей всегда оказывается основой теории инвариантов. Такое положение дел побудило Кэли первоначально дать инвариантам название "сверхопределителей". Лишь позже Сильвестр ввёл слово "инвариант" [2].

— *Феликс Клейн*

Рассматривая фундаментальные определители

$$\overset{N}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+p};i_1\ldots i_N i_{N+q}}(\varphi_{*;*})$$

как функцию $(N+p)+(N+q)$ нечисловых переменных $\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\alpha_{N+p}$ и $i_1,\ldots,i_N,i_{N+q}$ поставим следующую задачу:

Найти все корни (репрезентаторы) всех уравнений вида

$$\overset{N}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+p};i_1\ldots i_N i_{N+q}}(\varphi_{*;*})=0, \tag{1}$$

то есть найти такую опосредованную зависимость числовой функции $\varphi_{\alpha i}$ от двух нечисловых переменных α и i, при которой равенство (1) обращается в тождественный нуль.

Введём новую целочисленную переменную $n=N-1$ $n=0,1,2,$ и рассмотрим все четыре варианта:

§ 1. Репрезентатор $a_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(a_{*;*})\equiv 0$.

В исходном тождестве

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(a_{*;*})\equiv 0 \tag{2}$$

зафиксируем $2n$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 = \alpha & \qquad & i_1 = i \\ \alpha_2 = \underline{1} & & i_2 = \overline{1} \\ \alpha_3 = \underline{2} & & i_3 = \overline{2} \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ \alpha_{n+1} = \underline{n} & & i_{n+1} = \overline{n} \end{array}$$

См. рис. 1.

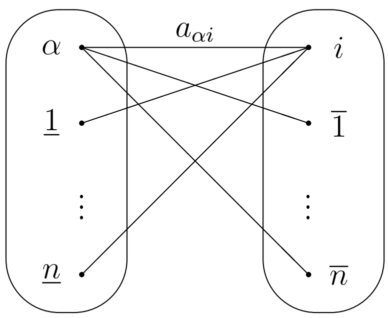


Рис. 1.

После этого уравнение (2) будет выглядеть следующим образом:

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha\underline{1}\dots\underline{n};i\overline{1}\dots\overline{n}}(a) = \begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha\overline{1}} & \cdots & a_{\alpha\overline{n}} \\ a_{\underline{1}i} & a_{\underline{1}\,\overline{1}} & \cdots & a_{\underline{1}\,\overline{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\underline{n}i} & a_{\underline{n}\,\overline{1}} & \cdots & a_{\underline{n}\,\overline{n}} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Разлагая определитель (3) по элементам первого столбца, будем иметь:

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha\underline{1}\dots\underline{n};i\overline{1}\dots\overline{n}}(a) = a_{\alpha i}\,\overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\dots\underline{n};\overline{1}\dots\overline{n}} - a_{\underline{1}i}\,\overset{n}{K}{}^{00}_{\alpha\underline{2}\dots\underline{n};\overline{1}\dots\overline{n}} + a_{\underline{2}i}\,\overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\alpha\underline{3}\dots\underline{n};\overline{1}\dots\overline{n}} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} a_{\underline{n}i}\,\overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\dots\underline{n+1}\alpha;\overline{1}\dots\overline{n}} = 0.$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_r = \overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\dots\underline{r-1}\alpha\underline{r+1}\dots\underline{n};\overline{1}\dots\overline{n}}\,; \qquad\qquad x^r(i) = \frac{a_{\underline{r}i}}{\overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\dots\underline{n};\overline{1}\dots\overline{n}}}$$

получим *обычное скалярное произведение*:

$$\boxed{a_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \dots + \xi(\alpha)_n x^n(i)}$$

Итак, нечисловые переменные α и i входят в равенство (3) и обращают его в тождественный нуль через произвольные числовые функции $\xi(\alpha)_r$ и $x^r(i)$, играющие роль декартовых ко- и контравариантных координат.

§ 2. Репрезентатор $u_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1} i_{n+2}}(u_{*;*}) \equiv 0$.

В исходном тождестве

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1} i_{n+2}}(u_{*;*}) \equiv 0. \tag{4}$$

зафиксируем $n+n+1$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 = \alpha & i_1 = i \\
\alpha_2 = \underline{1} & i_2 = \overline{1} \\
\alpha_3 = \underline{2} & i_3 = \overline{2} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\alpha_{n+1} = \underline{n} & i_{n+1} = \overline{n} \\
 & i_{n+2} = \overline{n+1}
\end{array}$$

См. рис. 2.

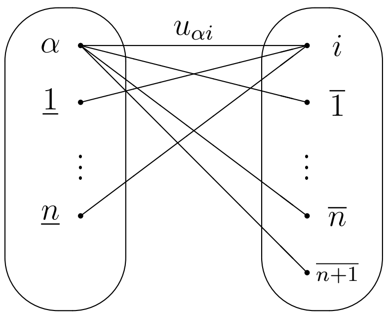


Рис. 2.

После этого уравнение (4) будет выглядеть следующим образом:

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n};i\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}(u) = \begin{vmatrix} u_{\alpha i} & u_{\alpha\overline{1}} & \cdots & u_{\alpha\overline{n}} & u_{\alpha\overline{n+1}} \\ u_{\underline{1}i} & u_{\underline{1}\,\overline{1}} & \cdots & u_{\underline{1}\,\overline{n}} & u_{\underline{1}\,\overline{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\underline{n}i} & u_{\underline{n}\,\overline{1}} & \cdots & u_{\underline{n}\,\overline{n}} & u_{\underline{n}\,\overline{n+1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Разлагая определитель (2) по элементам первого столбца, будем иметь:

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n};i\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}(u) = u_{\alpha i}\,\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} - u_{\underline{1}i}\,\overset{n}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{2}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} +$$

$$+u_{\underline{2}i}\,\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\alpha\underline{3}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} - \ldots + (-1)^n u_{\underline{n}i}\,\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{n-1}\alpha;\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} + (-1)^{n+1}\,\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\alpha;\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} = 0$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_r = \overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{r-1}\alpha\underline{r+1}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}\,; \qquad x^r(i) = \frac{u_{\underline{r}i}}{\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}}\,;$$

$$\sigma(\alpha) = \frac{\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\alpha;\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}}{\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}}$$

получим *скалярное произведение* $u_{\alpha i}$ *с одним правым хвостом* $\sigma(\alpha)$

$$\boxed{u_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \cdots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha)}$$

§ 3. Репрезентатор $v_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(v_{*;*}) \equiv 0$.

В исходном тождестве

$$\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(v_{*;*}) \equiv 0 \qquad (6)$$

зафиксируем $n+1+n$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = \alpha & i_1 = i \\ \alpha_2 = \underline{1} & i_2 = \overline{1} \\ \alpha_3 = \underline{2} & i_3 = \overline{2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n+1} = \underline{n} & i_{n+1} = \overline{n} \\ \alpha_{n+2} = \underline{n+1} & \end{array}$$

См. рис. 3.

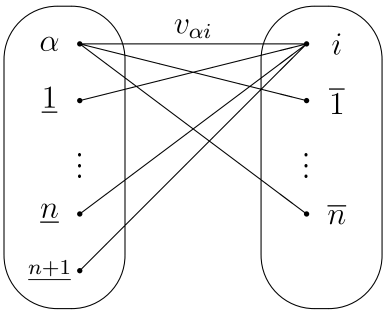


Рис. 3.

После этого уравнение (6) будет выглядеть следующим образом:

$$\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\overline{1}\ldots\overline{n}}(v) = \begin{vmatrix} v_{\alpha i} & v_{\alpha\overline{1}} & \cdots & v_{\alpha\overline{n}} & 1 \\ v_{\underline{1}i} & v_{\underline{1}\,\overline{1}} & \cdots & v_{\underline{1}\,\overline{n}} & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ v_{\underline{n}i} & v_{\underline{n}\,\overline{1}} & \cdots & v_{\underline{n}\,\overline{n}} & 1 \\ v_{\underline{n+1}i} & v_{\underline{n+1}\,\overline{1}} & \cdots & v_{\underline{n+1}\,\overline{n}} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Разлагая определитель (7) по элементам первой строки, будем иметь:

$$\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\bar{1}\ldots\bar{n}}(v) = v_{\alpha i}\,\overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\bar{1}\ldots\bar{n}} - v_{\alpha\bar{1}}\,\overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\bar{1}\,\bar{2}\ldots\bar{n}} +$$

$$+ v_{\alpha\bar{2}}\,\overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\bar{1}i\bar{3}\ldots\bar{n}} - \ldots + (-1)^n v_{\alpha\bar{n}}\,\overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\bar{1}\ldots\overline{n-1}i} + (-1)^{n+1}\,\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\bar{1}\ldots\bar{n}} = 0$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_r = \frac{v_{\alpha\bar{r}}}{\overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\bar{1}\ldots\bar{n}}}\,; \qquad x^r(i) = \overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\bar{1}\ldots\overline{r-1}i\overline{r+1}\ldots\bar{n}}\,;$$

$$s(i) = \frac{\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\bar{1}\ldots\bar{n}}}{\overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\bar{1}\ldots\bar{n}}}\,.$$

получим *скалярное произведение* $v_{\alpha i}$ *с одним левым хвостом* $s(i)$.

$$\boxed{v_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \cdots + \xi(\alpha)_n x^n(i)}$$

§ 4. Репрезентатор $w_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1} i_{n+2}}(w_{*;*}) \equiv 0.$

В исходном тождестве

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1} i_{n+2}}(w_{*;*}) \equiv 0. \tag{8}$$

зафиксируем $2(n+1)$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 = \alpha & \quad i_1 = i \\
\alpha_2 = \underline{1} & \quad i_2 = \bar{1} \\
\alpha_3 = \underline{2} & \quad i_3 = \bar{2} \\
\ldots\ldots & \quad \ldots\ldots \\
\alpha_{n+1} = \underline{n} & \quad i_{n+1} = \bar{n} \\
\alpha_{n+2} = \underline{n+1} & \quad i_{n+2} = \overline{n+1}
\end{array}$$

См. рис. 4.

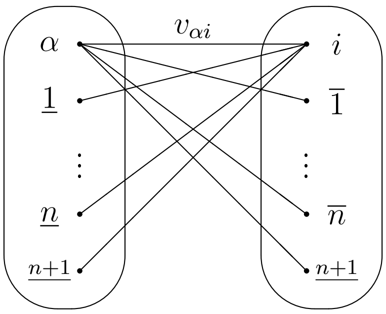


Рис. 4.

После этого уравнение (8) будет выглядеть следующим образом:

$$\overset{n+1}{K}{}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\bar1\ldots\bar n\,\overline{n+1}}(w)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ -1 & w_{\alpha i} & w_{\alpha\bar1} & \cdots & w_{\alpha\bar n} & w_{\alpha\overline{n+1}}\\ -1 & w_{\underline1 i} & w_{\underline1\bar1} & \cdots & w_{\underline1\bar n} & w_{\underline1\overline{n+1}}\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ -1 & w_{\underline n i} & w_{\underline n\bar1} & \cdots & w_{\underline n\bar n} & w_{\underline n\overline{n+1}}\\ -1 & w_{\underline{n+1} i} & w_{\underline{n+1}\bar1} & \cdots & w_{\underline{n+1}\bar n} & w_{\underline{n+1}\overline{n+1}} \end{vmatrix}=0 \qquad (9)$$

В этом случае для разделения переменных недостаточно разложить определитель (9) по элементам одной строки или одного столбца. Чтобы установить общий алгоритм разделения переменных, рассмотрим последовательно следующие частные случаи:

$n = 0$

Найдём репрезентатор $\overset{0}{w}_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1};i\bar1}(\overset{0}{w})=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & \overset{0}{w}_{\alpha i} & \overset{0}{w}_{\alpha\bar1}\\ -1 & \overset{0}{w}_{\underline1 i} & \overset{0}{w}_{\underline1\bar1} \end{vmatrix}=0. \qquad (10)$$

См. рис. 5.

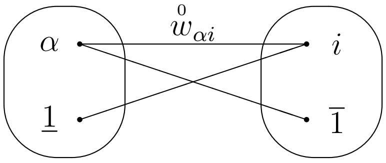


Рис. 5.

Уравнение (10) может быть записано в виде:

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1};i\bar1}(\overset{0}{w})=\overset{0}{w}_{\alpha i}\,\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline1;\bar1}-\overset{1}{K}{}^{10}_{\alpha\underline1;\bar1}-\overset{1}{K}{}^{01}_{\underline1;i\bar1}-\overset{1}{K}{}^{00}_{\underline1;\bar1}=0$$

Вводя следующие обозначения

$$\sigma(\alpha) = \frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1};\bar{1}}}{\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{1};\bar{1}}}, \qquad s(i) = \frac{\overset{1}{K}{}^{01}_{\underline{1};i\bar{1}}}{\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{1};\bar{1}}},$$

$$C = \frac{\overset{1}{K}{}^{00}_{\underline{1};\bar{1}}}{\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{1};\bar{1}}}.$$

получаем *репрезентатор* $\overset{0}{w}_{\alpha i}$ *с двумя хвостами - с правым* $\sigma(\alpha)$ *и с левым* $s(i)$:

$$\boxed{\overset{0}{w}_{\alpha i} = s(i) + \sigma(\alpha) + C}$$

$\boldsymbol{n=1}$

Найдём репрезентатор $\overset{1}{w}_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2};i\bar{1}\,\bar{2}}(\overset{1}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{1}{w}_{\alpha i} & \overset{1}{w}_{\alpha\bar{1}} & \overset{1}{w}_{\alpha\bar{2}} \\ -1 & \overset{1}{w}_{\underline{1}i} & \overset{1}{w}_{\underline{1}\,\bar{1}} & \overset{1}{w}_{\underline{1}\,\bar{2}} \\ -1 & \overset{1}{w}_{\underline{2}i} & \overset{1}{w}_{\underline{2}\,\bar{1}} & \overset{1}{w}_{\underline{2}\,\bar{2}} \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

См. рис. 6.

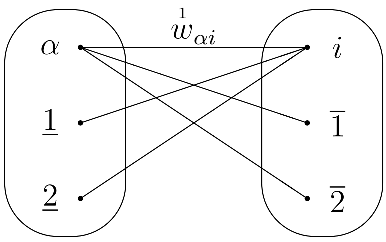


Рис. 6.

Уравнение (11) может быть записано в виде:

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2};i\bar{1}\,\bar{2}}(\overset{1}{w}) = \overset{1}{w}_{\alpha i}\,\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}} + \overset{2}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}} + \overset{2}{K}{}^{01}_{\underline{1}\,\underline{2};i\bar{1}\,\bar{2}} - \overset{2}{K}{}^{00}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}} - \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\,\underline{2};i}\cdot \overset{1}{K}{}^{01}_{\alpha;\bar{1}\,\bar{2}} = 0$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_1 = \overset{1}{K}{}^{01}_{\alpha;\bar{1}\,\bar{2}}, \qquad x^1(i) = \frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\,\underline{2};i}}{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}},$$

$$\sigma(\alpha) = -\frac{\overset{2}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}}{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}}, \qquad s(i) = -\frac{\overset{2}{K}{}^{01}_{\underline{1}\,\underline{2};i\bar{1}\,\bar{2}}}{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}},$$

$$C = \frac{\overset{2}{K}{}^{00}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}}{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}}\quad .$$

получаем *скалярное произведение* $\overset{1}{w}_{\alpha i}$ *с двумя хвостами*
- с правым $\sigma(\alpha)$ и *с левым* $s(i)$:

$$\boxed{\overset{1}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \sigma(\alpha) + C}$$

$\boldsymbol{n = 2}$

Найдём репрезентатор $\overset{2}{w}_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};i\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}(\overset{2}{w}_{\alpha i}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & w_{\alpha i} & w_{\alpha\overline{1}} & w_{\alpha\overline{2}} & w_{\alpha\overline{3}} \\ -1 & w_{\underline{1}i} & w_{\underline{1}\,\overline{1}} & w_{\underline{1}\,\overline{2}} & w_{\underline{1}\,\overline{3}} \\ -1 & w_{\underline{2}i} & w_{\underline{2}\,\overline{1}} & w_{\underline{2}\,\overline{2}} & w_{\underline{2}\,\overline{3}} \\ -1 & w_{\underline{3}i} & w_{\underline{3}\,\overline{1}} & w_{\underline{3}\,\overline{2}} & w_{\underline{3}\,\overline{3}} \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

См. рис. 7.

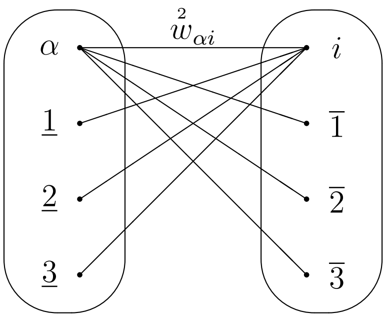


Рис. 7.

Уравнение (12) может быть записано в виде:

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};i\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}(\overset{2}{w}_{\alpha i}) = \overset{2}{w}_{\alpha i}\ \overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}} - \overset{3}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}} - \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};i\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}} - \overset{3}{K}{}^{00}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}} +$$

$$+\ \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\,\underline{3};i}(\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3};\overline{1}\,\overline{23}} + \overset{2}{K}{}^{01}_{\underline{2}\alpha;\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}) -$$

$$-\ \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{2}\,\underline{3};i}(\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}} + \overset{2}{K}{}_{\underline{1}\alpha;\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}).$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_1 = -\,(\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}} + \overset{2}{K}{}_{\underline{2}\alpha;\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}), \qquad x^1(i) = \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\,\underline{3};i},$$

$$\xi(\alpha)_2 = (\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}} + \overset{2}{K}{}_{\underline{1}\alpha;\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}), \qquad x^2(i) = \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{2}\,\underline{3};i},$$

$$\sigma(\alpha) = \frac{\overset{3}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}}{\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}}, \qquad s(i) = \frac{\overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};i\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}}{\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}},$$

$$C = \frac{\overset{3}{K}{}^{00}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}}{\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}},$$

получаем *скалярное произведение* $\overset{2}{w}_{\alpha i}$ *с двумя хвостами*
- с правым $\sigma(\alpha)$ и *с левым* $s(i)$:

$$\boxed{\overset{2}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_2 x^2(i) + \sigma(\alpha) + C}$$

***n* = 3**

Найдём репрезентатор $\overset{3}{w}_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$\overset{4}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4};i\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}}(\overset{3}{w}_{\alpha i}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & w_{\alpha i} & w_{\alpha\bar{1}} & w_{\alpha\bar{2}} & w_{\alpha\bar{3}} & w_{\alpha\bar{4}} \\ -1 & w_{\underline{1}i} & w_{\underline{1}\bar{1}} & w_{\underline{1}\bar{2}} & w_{\underline{1}\bar{3}} & w_{\underline{1}\bar{4}} \\ -1 & w_{\underline{2}i} & w_{\underline{2}\bar{1}} & w_{\underline{2}\bar{2}} & w_{\underline{2}\bar{3}} & w_{\underline{2}\bar{4}} \\ -1 & w_{\underline{3}i} & w_{\underline{3}\bar{1}} & w_{\underline{3}\bar{2}} & w_{\underline{3}\bar{3}} & w_{\underline{3}\bar{4}} \\ -1 & w_{\underline{4}i} & w_{\underline{4}\bar{1}} & w_{\underline{4}\bar{2}} & w_{\underline{4}\bar{3}} & w_{\underline{4}\bar{4}} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

См. рис. 8.

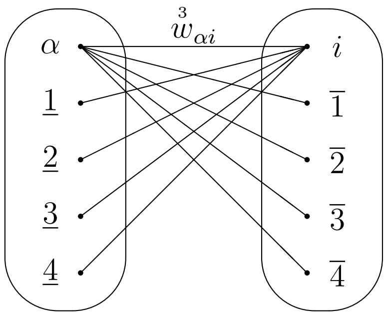


Рис. 8.

Уравнение (13) может быть записано в виде:

$$\overset{4}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4};i\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}}(\overset{3}{w}_{\alpha i}) = \overset{3}{w}_{\alpha i}\,\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4};\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \overset{4}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4};i\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \overset{4}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4};i\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} -$$

$$- \overset{4}{K}{}^{00}_{\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4};\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} - \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\,\underline{4};i}(\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3}\,\underline{4};\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{2}\alpha\underline{4};\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{2}\,\underline{3}\alpha;\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}}) +$$

$$+ \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{2}\,\underline{4};i}(\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3}\,\underline{4};\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\alpha\underline{4};\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\,\underline{3}\alpha;\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}}) -$$

$$- \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{3}\,\underline{4};i}(\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{2}\,\underline{4};\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\alpha\underline{4};\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\,\underline{2}\alpha;\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}})$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_1 = \overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{2}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{2}\underline{3}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}; \qquad x^1(i) = \frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\underline{4};i}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}$$

$$\xi(\alpha)_2 = -\left(\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{1}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{1}\underline{3}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}\right); \qquad x^2(i) = \frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{2}\underline{4};i}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}$$

$$\xi(\alpha)_3 = \overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{2}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{1}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{1}\underline{2}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}; \qquad x^3(i) = \frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{3}\underline{4};i}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}$$

$$\sigma(\alpha) = -\frac{\overset{4}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}; \qquad s(i) = -\frac{\overset{4}{K}{}^{01}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}};$$

$$C = \frac{\overset{4}{K}{}^{00}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}} .$$

получаем *скалярное произведение* $\overset{3}{w}_{\alpha i}$ *с двумя хвостами - с правым* $\sigma(\alpha)$ *и с левым* $s(i)$:

$$\boxed{\overset{3}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_2 x^2(i) + \xi(\alpha)_3 x^3(i) + \sigma(\alpha) + C}$$

§ 5. Дробно-линейные репрезентаторы $p_{\alpha i}$ и $q_{\alpha i}$ как корни двух фундаментальных уравнений Михайличенко.

1. Репрезентатор $p_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$M_{\alpha\beta;ikmn}(p_{*;*}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha i} & p_{\alpha k} & p_{\alpha m} & p_{\alpha n} \\ p_{\beta i} & p_{\beta k} & p_{\beta m} & p_{\beta n} \\ p_{\alpha i}p_{\beta i} & p_{\alpha k}p_{\beta k} & p_{\alpha m}p_{\beta m} & p_{\alpha n}p_{\beta n} \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

В исходном определителе (14) зафиксируем $1+3$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\beta = \underline{1} \qquad k = \overline{1}, \quad m = \overline{2}, \quad n = \overline{3}$$

См. рис. 9.

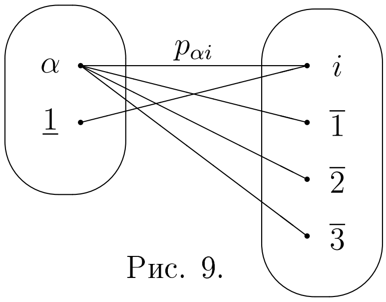


Рис. 9.

После этого уравнение (14) будет выглядеть следующим образом:

$$M_{\alpha\underline{1};i\bar{1}\bar{2}\bar{3}}(p)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha i} & p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\underline{1}i} & p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \\ p_{\alpha i}p_{\underline{1}i} & p_{\alpha\bar{1}}p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}}p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}}p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}=0 \tag{15}$$

Разрешая уравнение (15) относительно репрезентатора $p_{\alpha i}$ получим следующее соотношение

$$p_{\alpha i}=\frac{p_{\underline{1}i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\alpha\bar{1}}p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}}p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}}p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \\ p_{\alpha\bar{1}}p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}}p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}}p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}}{p_{\underline{1}i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \\ p_{\alpha\bar{1}}p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}}p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}}p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}} \tag{16}$$

Вводя обозначения

$$x_i=p_{\underline{1}i}$$

$$\xi_\alpha=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\alpha\bar{1}}p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}}p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}}p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}}$$

$$\eta_\alpha=\frac{\begin{vmatrix} p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \\ p_{\alpha\bar{1}}p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}}p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}}p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}}$$

$$\zeta_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \\ p_{\alpha\bar{1}}p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}}p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}}p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha\bar{1}} & p_{\alpha\bar{2}} & p_{\alpha\bar{3}} \\ p_{\underline{1}\bar{1}} & p_{\underline{1}\bar{2}} & p_{\underline{1}\bar{3}} \end{vmatrix}}$$

перепишем выражение (16) для репрезентатора $p_{\alpha i}$ в виде следующего дробно-линейного отношения:

$$\boxed{p_{\alpha i} = \frac{x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}}$$

2. Репрезентатор $q_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(q_{*;*}) = \begin{vmatrix} 1 & q_{\alpha i} & q_{\alpha k} & q_{\alpha i}q_{\alpha k} \\ 1 & q_{\beta i} & q_{\beta k} & q_{\beta i}q_{\beta k} \\ 1 & q_{\gamma i} & q_{\gamma k} & q_{\gamma i}q_{\gamma k} \\ 1 & q_{\delta i} & q_{\delta k} & q_{\delta i}q_{\delta k} \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Как и в предыдущем случае, в исходном определителе (17) зафиксируем $3+1$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{ll} \beta = \underline{1} & \qquad k = \bar{1} \\ \gamma = \underline{2} & \\ \delta = \underline{3} & \end{array}$$

См. рис. 10.

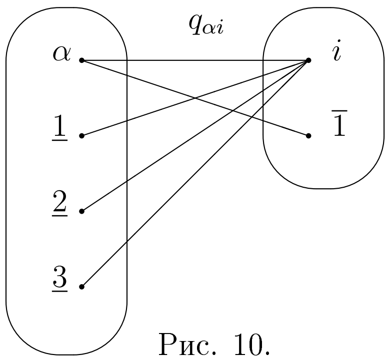


Рис. 10.

После этого уравнение (17) будет выглядеть следующим образом:

$$M_{\alpha\,\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};i\bar{1}}(q_{*;*}) = \begin{vmatrix} 1 & q_{\alpha i} & q_{\alpha\bar{1}} & q_{\alpha i}q_{\alpha\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Разрешая уравнение (18) относительно репрезентатора $q_{\alpha i}$ получим следующее соотношение

$$q_{\alpha i} = \frac{q_{\alpha\bar{1}}\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}{q_{\alpha\bar{1}}\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}} \tag{19}$$

Вводя обозначения

$$\xi_\alpha = q_{\alpha\bar{1}}$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}, \qquad y_i = \frac{\begin{vmatrix} q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}, \qquad z_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}$$

перепишем выражение (19) для репрезентатора $q_{\alpha i}$ в виде следующего дробно-линейного отношения:

$$\boxed{q_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + y_i}{\xi_\alpha + z_i}}$$

§ 6. Предварительные итоги.

Итак, введя “руками”, то есть достаточно произвольным образом[48], шесть новых двух-, трёх- и четырёхиндексных переменных

$$Q_{\alpha;i} = \varphi_{\alpha i}$$

$$Q_{\alpha;im} = \varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha m}$$

$$Q_{\alpha\gamma;i} = \varphi_{\alpha i} - \varphi_{\gamma i}$$

$$Q_{\alpha\gamma;im} = \varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha m} - \varphi_{\gamma i} + \varphi_{\gamma m}$$

[48]Замечу, что новые переменные Q образованы мной из двухиндексных переменных $\varphi_{\alpha i}$ не совсем произвольным образом, а только с помощью двух обратных операций – операции вычитания и операции деления.

$$Q_{\alpha;imn} = \frac{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha n}}$$

$$Q_{\alpha\gamma\delta;i} = \frac{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\delta i}}$$

и подставляя их в исходный определитель $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}$, мы получили шесть семейств различных типов определителей:

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*;*}) = A^{00}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(\varphi_{**})$$

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*;* i_{N+1}}) = A^{01}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{**})$$

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*}) = A^{10}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}; i_1 \ldots i_N}(\varphi_{**})$$

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};* i_{N+1}}) = A^{11}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}; i_1 \ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{**})$$

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*;* i_{N+1} i_{N+2}}) = A^{02}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N i_{N+1} i_{N+2}}(\varphi_{**})$$

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};*}) = A^{20}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1} \alpha_{N+2}; i_1 \ldots i_N}(\varphi_{**})$$

Первые четыре типа уравнений

$$A^{00}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(a) = 0$$

$$A^{01}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N i_{N+1}}(u) = 0$$

$$A^{10}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}; i_1 \ldots i_N}(v) = 0$$

$$A^{11}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}; i_1 \ldots i_N i_{N+1}}(w) = 0$$

при любых $N = 1, 2, 3, \ldots$ имеют следующие решения:

$$\varphi^{00}_{\alpha i} = \overset{N-1}{a}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_{N-1} x^{N-1}(i),$$

$$\varphi^{01}_{\alpha i} = \overset{N-1}{u}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_{N-1} x^{N-1}(i) + \sigma(\alpha),$$

$$\varphi^{10}_{\alpha i} = \overset{N-1}{v}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_{N-1} x^{N-1}(i),$$

$$\varphi^{11}_{\alpha i} = \overset{N-1}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_{N-1} x^{N-1}(i) + \sigma(\alpha).$$

Что же касается уравнений

$$A^{02}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N i_{N+1} i_{N+2}}(p) = 0$$

$$A^{20}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1} \alpha_{N+2}; i_1 \ldots i_N}(q) = 0,$$

то среди них имеется только два уравнения (при $N = 2$)

$$A^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(p) = 0$$
$$A^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;\,ik}(q) = 0,$$

которые имеют соответствующие решения:

$$\varphi^{02}_{\alpha i} = p_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}$$

$$\varphi^{20}_{\alpha i} = q_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + y_i}{\xi_\alpha + z_i}.$$

Итак, мы пришли наиболее коротким путём, правда, без существенного в данном случае доказательства единственности, к существованию следующих четырёх семейств определителей:

$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;\,i_1\ldots i_N}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix},$$

$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,i_1\ldots i_N}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & 1 \\ \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & 1 \end{vmatrix},$$

$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \end{vmatrix},$$

и соответствующих репрезентаторов

$$\overset{N-1}{a}_{\alpha i}, \quad \overset{N-1}{u}_{\alpha i}, \quad \overset{N-1}{v}_{\alpha i}, \quad \overset{N-1}{w}_{\alpha i}$$

и двух уникальных определителей – определителей Михайличенко

$$A^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\varphi) = M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_{\alpha i} & \varphi_{\alpha k} & \varphi_{\alpha m} & \varphi_{\alpha n} \\ \varphi_{\beta i} & \varphi_{\beta k} & \varphi_{\beta m} & \varphi_{\beta n} \\ \varphi_{\alpha i}\varphi_{\beta i} & \varphi_{\alpha k}\varphi_{\beta k} & \varphi_{\alpha m}\varphi_{\beta m} & \varphi_{\alpha n}\varphi_{\beta n} \end{vmatrix}$$

$$A^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;\,ik}(\varphi) = M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_{\alpha i} & \varphi_{\alpha k} & \varphi_{\alpha i}\varphi_{\alpha k} \\ 1 & \varphi_{\beta i} & \varphi_{\beta k} & \varphi_{\beta i}\varphi_{\beta k} \\ 1 & \varphi_{\gamma i} & \varphi_{\gamma k} & \varphi_{\gamma i}\varphi_{\gamma k} \\ 1 & \varphi_{\delta i} & \varphi_{\delta k} & \varphi_{\delta i}\varphi_{\delta k} \end{vmatrix}$$

и соответствующих дробно-линейных репрезентаторов $p_{\alpha i}$ $q_{\alpha i}$. При этом имеет место удивительный факт:

Одним из основных результатов Теории физических структур, исходящей из чрезвычайно общего принципа сакральной симметрии, является теорема Михайличенко, согласно которой все только что приведённые определители и соответствующие репрезентаторы **являются единственными решениями** некоторого чрезвычайно общего сакрального тождества, лежащего в основании Теории физических структур

$$\forall\ \ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\ \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \forall\ \ i_1,\ldots,i_r\ \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\Phi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\,i_1,\ldots,i_r}(\varphi) \equiv 0.$$

Дальнейший шаг в понимании единства приведённого выше квартета определителей состоит в их двойном окаймлении, то есть в переходе от определителей

$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;\,i_1\ldots i_N}(\varphi)$$

$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi)$$

$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,i_1\ldots i_N}(\varphi)$$

$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi)$$

к равным им дважды окаймлённым фундаментальным определителям

$$\overset{N}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi),$$

$$\overset{N}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi),$$

$$\overset{N}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi),$$

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi).$$

Таким образом, все виды фундаментальных определителей, лежащих в основании всей физики и геометрии (а также в основании некоторых других разделов математики), изображены на рис. 11.

Используя двух-, трёх- и четырёхиндексные переменные, можно записать все виды фундаментальных определителей, включая и уникальные определители Михайличенко $\overset{1}{M}{}^{02}$, $\overset{2}{M}{}^{02}$ и $\overset{1}{M}{}^{20}$, $\overset{2}{M}{}^{20}$, в виде простейших определителей Грама:

$$\overset{N}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{**}) =$$

$$= \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1;i_1} & \ldots & Q_{\alpha_1;i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N;i_1} & \ldots & Q_{\alpha_N;i_N} \end{vmatrix},$$

$$\overset{N}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{**}) =$$

$$= \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*i_{N+1}}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1;i_1 i_{N+1}} & \ldots & Q_{\alpha_1;i_N i_{N+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N;i_1 i_{N+1}} & \ldots & Q_{\alpha_N;i_N i_{N+1}} \end{vmatrix},$$

$$\overset{N}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{**}) =$$

$$= \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_1} & \ldots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_1} & \ldots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_N} \end{vmatrix},$$

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{**}) =$$

$$= \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*i_{N+1}}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_1 i_{N+1}} & \ldots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_N i_{N+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_1 i_{N+1}} & \ldots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_N i_{N+1}} \end{vmatrix}.$$

$$\overset{1}{K}{}^{02}_{\alpha;\,imn}(\varphi_{**}) = \Gamma_{\alpha;\,i}(Q_{*;*mn}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha;imn} \end{vmatrix},$$

$$\overset{2}{K}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\varphi_{**}) = \Gamma_{\alpha\beta;\,ik}(Q_{*;*mn}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha;imn} & Q_{\alpha;kmn} \\ Q_{\beta;imn} & Q_{\beta;kmn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Q_{\alpha;in}Q_{\alpha;kn}Q_{\beta;in}Q_{\beta;kn}} M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{**})$$

$$\overset{1}{K}{}^{20}_{\alpha\gamma\delta;\,i}(\varphi_{**}) = \Gamma_{\alpha;\,i}(Q_{*\gamma\delta;*}) = \left| \; Q_{\alpha\gamma\delta;\,i} \; \right|,$$

$$\overset{2}{K}{}^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;\,ik}(\varphi_{**}) = \Gamma_{\alpha\beta;\,ik}(Q_{*\gamma\delta;*}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha\gamma\delta;i} & Q_{\alpha\gamma\delta;k} \\ Q_{\beta\gamma\delta;i} & Q_{\beta\gamma\delta;k} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Q_{\alpha\delta;i}Q_{\alpha\delta;k}Q_{\beta\delta;i}Q_{\beta\delta;k}} M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{**})$$

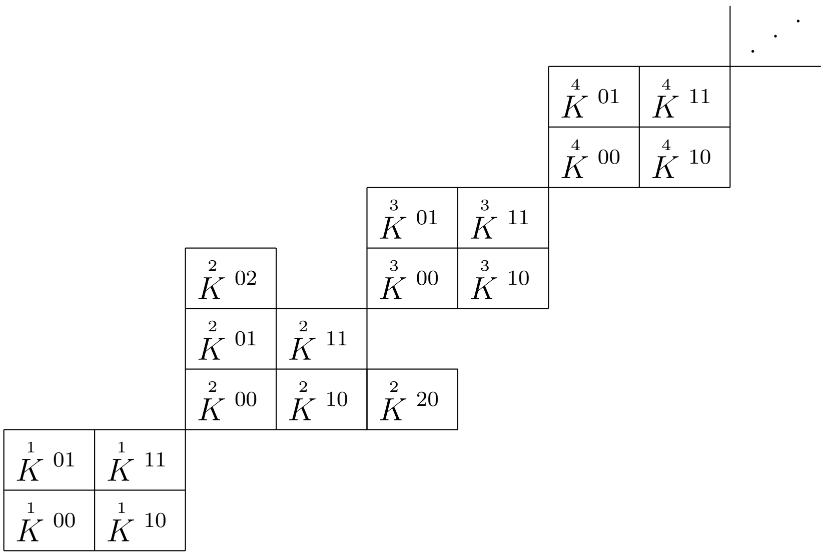


Рис. 11. Все возможные определители, лежащие в основании физики и геометрии.

Литература к главе 9

[1]. *Кокстер Г.С.М.*, Введение в геометрию, “Наука”, – М:, 1966, С. 13.

[2]. *Клейн Феликс* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. Геометрия, - М.: Наука. 1987. - С. 220.

Глава 10.

РАЗДЕЛЕНИЕ НЕЧИСЛОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Hereditas jacens[49]

Возможно, что самым замечательным является то, что при всей своей красоте и очевидной математической ценности преподавание теории определителей представляет настоящую проблему [1].

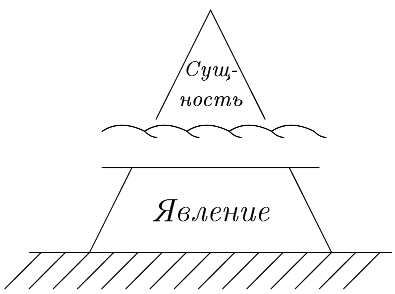
— *У.У. Сойер*

§ 1. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях.

§ 2. Ко- и контравариантные координатные определители.

§ 3. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях $\overset{N}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$.

§ 4. Разделение нечисловых переменных в определителях Михайличенко.



[49]Лежачее наследство, то есть наследство, во владение которым не вступил никто из наследников.

Наша геометрия – это абстрактная геометрия. Наш разум может следовать за бестелесным духом, не связанным с идеей физической точки, так же как слепой от рождения человек может понять электромагнитную теорию света [2].

— *Х.Г.Фордер*

§ 1. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях.

Задача состоит в том, чтобы представить матрицы фундаментальных определителей
$$\overset{N}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+p};\,i_1\ldots i_N i_{N+q}}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq}),$$
где $p=0,1;\quad q=0,1;$
$$\overset{n}{\varphi}{}^{pq}=ps(i)+\xi(\alpha)_1x^1(i)+\ldots+\xi(\alpha)_nx^n(i)+q\sigma(\alpha)$$
в виде произведения двух координатных матриц $\Xi_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+p}}(\xi,\sigma)$ и $X_{i_1\ldots i_N i_{N+q}}(x,s)$, одна из которых зависит от переменных $\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\alpha_{N+p}$, а другая – от переменных $i_1,\ldots,i_N,i_{N+q}$.

В качестве простейшего примера рассмотрим неокаймлённый определитель Грама
$$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\,i_1\ldots i_n}(\overset{n}{a}_{**})=\begin{vmatrix}\overset{n}{a}_{\alpha_1i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_1i_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \overset{n}{a}_{\alpha_ni_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_ni_n}\end{vmatrix},\tag{1}$$
где $\overset{n}{a}_{\alpha i}=\xi(\alpha)_1x^1(i)+\ldots+\xi(\alpha)_nx^n(i).$

Легко видеть, что матрица этого определителя может быть представлена в виде произведения следующих двух координатных матриц:
$$\begin{pmatrix}\overset{n}{a}_{\alpha_1i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_1i_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \overset{n}{a}_{\alpha_ni_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_ni_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, определитель Грама (1) может быть представлен в виде произведения двух координатных определителей

$$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\,i_1\ldots i_n}(\overset{n}{a}_{**}) = \begin{vmatrix} \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \overset{n}{a}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_n i_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) \end{vmatrix}.$$

В качестве следующего примера рассмотрим дважды окаймлённый определитель

$$\overset{n}{A}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};\,i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{w}_{**}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

где $\overset{n}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha).$

Матрица этого определителя также может быть представлена в виде произведения следующих двух координатных матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \sigma(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & -s(i_1) & \ldots & -s(i_n) & -s(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так что фундаментальный определитель (2) также может быть представлен в виде произведения двух координатных определителей

$$\overset{n}{A}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};\, i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{w}_{**}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \sigma(\alpha_{n+1}) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & -s(i_1) & \ldots & -s(i_n) & -s(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & 1 \\ \xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1})_n & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что дополнительные параметры $\sigma(\alpha)$ и $s(i)$, играющие роль "хвостов" в скалярном произведении $\overset{n}{w}_{\alpha i}$ и существенным образом входящие в координатные матрицы, никак не проявляют себя в соответствующих координатных определителях, что даёт основание называть их "скрытыми параметрами".

Однако в принципе нельзя подобным образом разложить на множители фундаментальные определители

$$\overset{n}{A}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\, i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{u}) = \begin{vmatrix} \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{u}_{\alpha_n i_1} & \cdots & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где $\quad \overset{n}{u}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha) \qquad$ и

$$\overset{n}{A}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};\, i_1\ldots i_n}(\overset{n}{v}) = \begin{vmatrix} \overset{n}{v}_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \overset{n}{v}_{\alpha_1 i_n} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{v}_{\alpha_n i_1} & \cdots & \overset{n}{v}_{\alpha_n i_n} & 1 \\ \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1} i_1} & \cdots & \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1} i_n} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{где} \quad \overset{n}{v}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i).$$

Однако разделение переменных можно легко осуществить во всех четырёх случаях, если от определителей $\overset{n}{A}{}^{00}, \overset{n}{A}{}^{01}, \overset{n}{A}{}^{10}, \overset{n}{A}{}^{11}$ перейти к эквивалентным дважды окаймлённым фундаментальным определителям $\overset{n}{K}{}^{00}, \overset{n}{K}{}^{01}, \overset{n}{K}{}^{10}, \overset{n}{K}{}^{11}$.

В самом деле, легко убедиться в существовании следующих четырёх матричных тождеств:

Матричное тождество 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_n} & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \overset{n}{a}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_n i_n} & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где} \quad \overset{n}{a}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i);$$

Матричное тождество 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где} \quad \overset{n}{u}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha);$$

Матричное тождество 3:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
-1 & \overset{n}{v}_{\alpha_1 i_1} & \dots & \overset{n}{v}_{\alpha_1 i_n} & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
-1 & \overset{n}{v}_{\alpha_n i_1} & \dots & \overset{n}{v}_{\alpha_n i_n} & 0 \\
-1 & \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1} i_1} & \dots & \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1} i_n} & 0
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
-1 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
-1 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & 0 \\
-1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & \xi(\alpha_{n+1})_n & 0
\end{pmatrix} \times
\begin{pmatrix}
1 & -s(i_1) & \dots & -s(i_n) & 0 \\
0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
\text{где} \qquad \overset{n}{v}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i);
$$

Матричное тождество 4:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
-1 & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_1} & \dots & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
-1 & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_1} & \dots & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_{n+1}} \\
-1 & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_1} & \dots & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}}
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
-1 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
-1 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\
-1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \sigma(\alpha_{n+1})
\end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
1 & -s(i_1) & \dots & -s(i_n) & -s(i_{n+1}) \\
0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\
0 & 1 & \dots & 1 & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
\text{где} \qquad \overset{n}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha).
$$

Все эти четыре тождества можно записать в виде одной формулы, содержащей два целочисленных параметра: $p=0,1$ и $q=0,1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & q & \dots & q & 1 \\ -p & \overset{n}{\varphi}_{\alpha_1 i_1} & \dots & \overset{n}{\varphi}_{\alpha_1 i_n} & q\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -p & \overset{n}{\varphi}_{\alpha_n i_1} & \dots & \overset{n}{\varphi}_{\alpha_n i_n} & q\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & p\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_{n+1} i_1} & \dots & p\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_{n+1} i_n} & pq\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & q\sigma(\alpha_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -p & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & q\sigma(\alpha_n) \\ -1 & p\xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & p\xi(\alpha_{n+1})_n & pq\sigma(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & -ps(i_1) & \dots & -ps(i_n) & -pqs(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & qx^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & qx^n(i_{n+1}) \\ 0 & q & \dots & q & 1 \end{pmatrix},$$

где $\quad \overset{n}{\varphi}{}^{pq}_{\alpha i} = ps(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + q\sigma(\alpha).$

§ 2. Ко- и контравариантные координатные определители.

Итак, каждый фундаментальный определитель $\overset{n}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$ может быть представлен в виде произведения двух координатных $(pq)-$ и $(qp)-$ определителей:

1. Фундаментальный (00)-определитель.

$$\overset{n}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\,i_1\ldots i_n}(\overset{n}{a}\,) = \overset{00}{\Xi}\,(\alpha_1\ldots\alpha_n)\cdot \overset{00}{X}\,(i_1\ldots i_n),$$

где $\quad \overset{00}{\Xi}\,(\alpha_1\ldots\alpha_n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

– ковариантный координатный (00)-определитель,

$$\overset{00}{X}(i_1 \dots i_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}; \text{ –}$$

– контравариантный координатный (00)-определитель,

2. Фундаментальный (01)-определитель.

$$\overset{n}{K}{}^{01}_{\alpha_1\dots\alpha_n;\, i_1\dots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{u}) = \overset{01}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_n) \cdot \overset{10}{X}(i_1 \dots i_n i_{n+1});$$

где $$\overset{01}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ –}$$

– ковариантный координатный (01)-определитель,

$$\overset{10}{X}(i_1 \dots i_n i_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ –}$$

– контравариантный координатный (10)-определитель,

3. Фундаментальный (10)-определитель.

$$\overset{n}{K}{}^{10}_{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1};\, i_1\dots i_n}(\overset{n}{v}) = \overset{10}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_n\alpha_{n+1}) \cdot \overset{01}{X}(i_1 \dots i_n);$$

где $$\overset{10}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_n\alpha_{n+1}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & 0 \\ -1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & \xi(\alpha_{n+1})_n & 0 \end{vmatrix} \text{ –}$$

– ковариантный координатный (10)-определитель,

$$\overset{01}{X}(i_1\dots i_n) = \begin{vmatrix} 1 & -s(i_1) & \dots & -s(i_n) & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

– контравариантный координатный (01)-определитель.

4. Фундаментальный (11)-определитель.

$$\overset{n}{K}{}^{11}_{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1};\, i_1\dots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{w}) = \overset{11}{\Xi}(\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1}) \cdot \overset{11}{X}(i_1\dots i_n i_{n+1});$$

где $$\overset{11}{\Xi}(\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \sigma(\alpha_{n+1}) \end{vmatrix}$$

– ковариантный координатный (11)-определитель,

$$\overset{11}{X}(i_1\dots i_n i_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & -s(i_1) & \dots & -s(i_n) & -s(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

– контравариантный координатный (11)-определитель,

Все, приведённые выше, четыре координатных определителя можно записать в виде одной формулы, содержащей два целочисленных параметра: $p = 0, 1$ и $q = 0, 1$.

Фундаментальные (pq)-определители.

$$\overset{n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\dots\alpha_{n+p};\, i_1\dots i_{n+q}}(\overset{n}{w}) = \overset{pq}{\Xi}(\alpha_1\dots\alpha_{n+p}) \cdot \overset{qp}{X}(i_1\dots i_{n+q}),$$

где $$\overset{pq}{\Xi}(\alpha_1\dots\alpha_{n+p}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & q\sigma(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & q\sigma(\alpha_n) \\ -1 & p\xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & p\xi(\alpha_{n+1})_n & pq\sigma(\alpha_{n+1}) \end{vmatrix}$$

– ковариантный координатный (pq)-определитель,

$$\overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{n+q}) = \begin{vmatrix} 1 & -ps(i_1) & \dots & -ps(i_n) & -pqs(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & qx^1(i_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & qx^n(i_{n+1}) \\ 0 & q & \dots & q & 1 \end{vmatrix}$$

– контравариантный координатный (qp)-определитель,

§ 3. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях $\overset{N}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$.

В предыдущем параграфе мы убедились в том, что все фундаментальные определители вида $\overset{n}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$ могут быть представлены в виде произведения двух координатных определителей $\overset{pq}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_{n+p})_{-p;\xi_1\dots\xi_n;q\sigma}$ и $\overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{n+q})^{-ps;x^1\dots x^n;q}$.

Рассмотрим теперь фундаментальные определители вида $\overset{N}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$, у которых $N \neq n$.

Но прежде рассмотрим три простейших примера:

$$\overset{2}{A}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} \xi_\alpha x_i & \xi_\alpha x_k \\ \xi_\beta x_i & \xi_\beta x_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_\alpha & 0 \\ \xi_\beta & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\overset{2}{A}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{2}{a}) = \begin{vmatrix} \xi_\alpha x_i + \eta_\alpha y_i & \xi_\alpha x_k + \eta_\alpha y_k \\ \xi_\beta x_i + \eta_\beta y_i & \xi_\beta x_k + \eta_\beta y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \eta_\alpha \\ \xi_\beta & \eta_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}$$

$$\overset{2}{A}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{3}{a}) = \begin{vmatrix} \xi_\alpha x_i + \eta_\alpha y_i + \zeta_\alpha z_i & \xi_\alpha x_k + \eta_\alpha y_k + \zeta_\alpha z_k \\ \xi_\beta x_i + \eta_\beta y_i + \zeta_\beta z_i & \xi_\beta x_k + \eta_\beta y_k + \zeta_\beta z_k \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} \xi_\alpha & \eta_\alpha \\ \xi_\beta & \eta_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \zeta_\alpha \\ \xi_\beta & \zeta_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_\alpha & \zeta_\alpha \\ \eta_\beta & \zeta_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} \right)$$

Опираясь на эти примеры, привожу без доказательства следующие разложения:

$$\overset{N>n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\dots\alpha_{N+p};\,i_1\dots i_{N+q}}(\overset{n}{\varphi}) = \overset{pq}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_{N+p})_{-p;\,\xi_1 \dots \xi_n \underbrace{0 \dots 0}_{N-n};\, q\sigma} \cdot$$

$$\cdot\, \overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{N+q})^{-ps;\, x^1 \dots x^n \underbrace{0 \dots 0}_{N-n};\, q} \equiv 0,$$

$$\overset{N=n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\dots\alpha_{n+p};\,i_1\dots i_{n+q}}(\overset{n}{\varphi}) = \overset{pq}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_{n+p})_{-p;\,\xi_1 \dots \xi_n;\, q\sigma} \cdot$$

$$\cdot\, \overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{n+q})^{-ps;\, x^1;\, \dots x^n;\, q}$$

$$\overset{N<n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_{N+p};\,i_1\ldots i_{N+q}}(\overset{n}{\varphi}) = \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant\lambda_1<\ldots<\lambda_N\leqslant n} \overset{pq}{\Xi}(\alpha_1\ldots\alpha_{N+p})_{-p;\,\xi_{\lambda_1}\ldots\xi_{\lambda_N};\,q\sigma}\cdot$$

$$\cdot\overset{qp}{X}(i_1\ldots i_{N+q})_{-ps;\,x^{\lambda_1}\ldots x^{\lambda_N};\,q},$$

где

1. координатные ко- и контравариантные определители, тождественно равные нулю, в случае $N>n$:

$$\overset{pq}{\Xi}(\alpha_1\ldots\alpha_{N+p})_{-p;\,\xi_1\ldots\xi_N\underbrace{0\ldots0}_{N-n};\,q\sigma}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots\, 0 & 0\,\ldots\,0 & 1\\ -p & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots\,\xi(\alpha_1)_N & 0\,\ldots\,0 & q\sigma(\alpha_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -p & \xi(\alpha_N)_1 & \ldots\,\xi(\alpha_N)_n & 0\,\ldots\,0 & q\sigma(\alpha_N)\\ -1 & p\xi(\alpha_{N+1})_1 & \ldots\,p\xi(\alpha_{N+1})_n & \underbrace{0\,\ldots\,0}_{N-n} & pq\sigma(i_{N+1}) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \xi(\alpha_1)_1 & \ldots\,\xi(\alpha_1)_N & 0\,\ldots\,0 & p\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \xi(\alpha_N)_1 & \ldots\,\xi(\alpha_N)_n & 0\,\ldots\,0 & p\\ p\xi(\alpha_{N+1})_1 & \ldots\,p\xi(\alpha_{N+1})_n & \underbrace{0\,\ldots\,0}_{N-n} & 1 \end{vmatrix}\equiv 0$$

$$\overset{qp}{X}(i_1\ldots i_{N+q})^{-ps;\,x^1\ldots x^n\underbrace{0\ldots0}_{N-n};\,q}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -ps(i_1) & \ldots & -ps(i_N) & -pqs(i_{N+1})\\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_N) & qx^1(i_{N+1})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_N) & qx^n(i_{N+1})\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & q & \ldots & q & 1 \end{vmatrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}{\overset{=}{N-n}}$$

$$
= \left| \begin{array}{cccc} x^1(i_1) & \dots & x^1(i_N) & qx^1(i_{N+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n(i_1) & \dots & x^n(i_N) & qx^n(i_{N+1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & \dots & q & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} {\scriptstyle N-n} \\ \\ \end{array} \equiv 0.
$$

2. многокомпонентные ко- и контравариартные координатные определители в случае $N < n$ отличны от нуля и имеют следующий вид:

$$
\overset{pq}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_{N+p})_{-p;\xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_N};q\sigma} =
$$

$$
= \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p & \xi(\alpha_1)_{\lambda_1} & \dots & \xi(\alpha_1)_{\lambda_N} & q\sigma(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p & \xi(\alpha_N)_{\lambda_1} & \dots & \xi(\alpha_N)_{\lambda_N} & q\sigma(\alpha_N) \\ -1 & p\xi(\alpha_{N+1})_{\lambda_1} & \dots & p\xi(\alpha_{N+1})_{\lambda_N} & pq\sigma(\alpha_{N+1}) \end{array} \right| =
$$

$$
= \left| \begin{array}{cccc} \xi(\alpha_1)_{\lambda_1} & \dots & \xi(\alpha_1)_{\lambda_N} & p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi(\alpha_N)_{\lambda_1} & \dots & \xi(\alpha_N)_{\lambda_N} & p \\ p\xi(\alpha_{N+1})_{\lambda_1} & \dots & p\xi(\alpha_{N+1})_{\lambda_N} & 1 \end{array} \right|
$$

$$
\overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{N+q})^{-ps;x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_N};q} =
$$

$$
= \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -ps(i_1) & \dots & -ps(i_N) & -pqs(i_{N+1}) \\ 0 & x^{\lambda_1}(i_1) & \dots & x^{\lambda_1}(i_N) & qx^{\lambda_1}(i_{N+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^{\lambda_N}(i_1) & \dots & x^{\lambda_N}(i_N) & qx^{\lambda_N}(i_{N+1}) \\ 0 & q & \dots & q & 1 \end{array} \right| =
$$

$$
= \left| \begin{array}{cccc} x^{\lambda_1}(i_1) & \dots & x^{\lambda_1}(i_N) & qx^{\lambda_1}(i_{N+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{\lambda_N}(i_1) & \dots & x^{\lambda_N}(i_N) & qx^{\lambda_N}(i_{N+1}) \\ q & \dots & q & 1 \end{array} \right|.
$$

§ 4. Разделение нечисловых переменных в определителях Михайличенко.

Сначала покажем, что определитель

$$\overset{1}{K}{}^{02}_{\alpha;\,iab}(p_{**}) = \Gamma_{\alpha;\,i}(Q_{*;\,*ab}) = |Q_{\alpha;\,iab}|$$

может быть представлен в виде произведения двух определителей.

Так как

$$Q_{\alpha;\,iab} = \frac{p_{\alpha i} - p_{\alpha a}}{p_{\alpha i} - p_{\alpha b}},$$

где

$$p_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha},$$

то

$$\boxed{Q_{\alpha;\,iab} = \zeta_\alpha(a\,b) \cdot x_i(a\,b),}$$

где

$$\zeta_\alpha(a\,b) = \frac{\zeta_\alpha + x_b}{\zeta_\alpha + x_a}$$

$$x_i(a\,b) = \frac{x_i - x_a}{x_i - x_b}.$$

Таким образом, легко доказывается следующее сакральное тождество:

$$\overset{2}{K}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\varphi_{**}) = \frac{M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{**})}{Q_{\alpha;in}Q_{\alpha;kn}Q_{\beta;in}Q_{\beta;kn}} = \begin{vmatrix} Q_{\alpha;imn} & Q_{\alpha;kmn} \\ Q_{\beta;imn} & Q_{\beta;kmn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \zeta_\alpha(a\,b) & 0 \\ \zeta_\beta(a\,b) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i(a\,b) & x_k(a\,b) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Аналогичным образом, легко показать, что определитель

$$\overset{1}{K}{}^{20}_{\alpha\mu\nu;\,i}(q_{**}) = \Gamma_{\alpha;\,i}(Q_{*\mu\nu;\,*}) = |Q_{\alpha\mu\nu;\,i}|$$

представляет собой произведение двух множителей.

Так как

$$Q_{\alpha\mu\nu;\,i} = \frac{q_{\alpha i} - q_{\mu i}}{q_{\alpha i} - q_{\nu i}},$$

где

$$q_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + y_i}{\xi_\alpha + z_i},$$

то

$$\boxed{Q_{\alpha\mu\nu;\,i} = \xi_\alpha(\mu\,\nu) \cdot z_i(\mu\,\nu),}$$

где

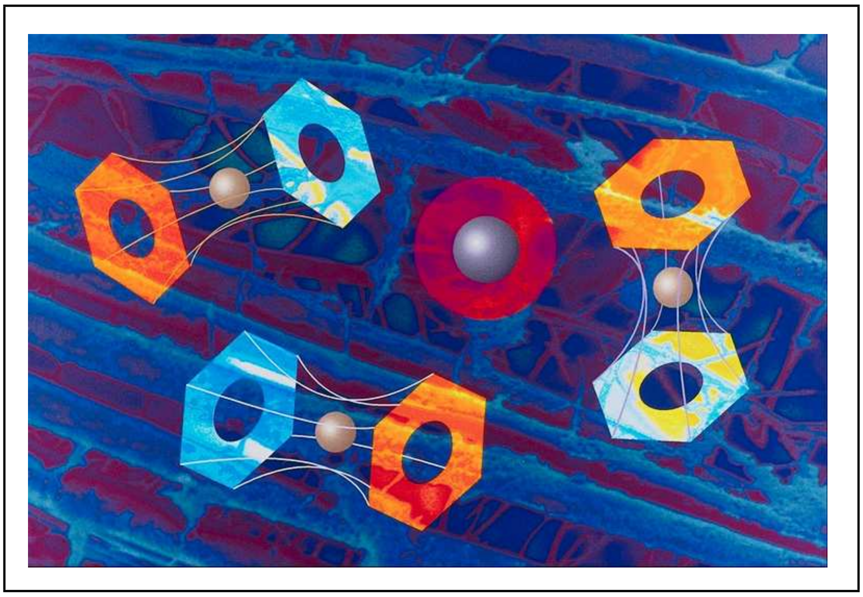
$$\xi_\alpha(\mu\,\nu) = \frac{\xi_\alpha - \xi_\mu}{\xi_\alpha - \xi_\nu}$$

$$z_i(\mu\,\nu) = \frac{z_i + \xi_\nu}{z_i + \xi_m u}.$$

Таким образом, имеем

$$\overset{2}{K}{}^{20}_{\alpha\beta\mu\nu;\,ik}(q_{**}) = \frac{M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{**})}{Q_{\alpha\delta;i}Q_{\alpha\delta;k}Q_{\beta\delta;i}Q_{\beta\delta;k}} = \begin{vmatrix} Q_{\alpha\mu\nu;\,i} & Q_{\alpha\mu\nu;\,k} \\ Q_{\beta\mu\nu;\,i} & Q_{\beta\mu\nu;\,k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_\alpha(\mu\,\nu) & 0 \\ \xi_\beta(\mu\,\nu) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_i(\mu\,\nu) & z_k(\mu\,\nu) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$



Разделение нечисловых переменных

Литература к главе 10

[1]. *Сойер У.У.* Прелюдия к математике. - М.: Просвещение. 1965. - С. 199.

[2]. *Forder H.G.*, The Foundations of Eucliden Geometry, Cambridge – London, 1927, N.Y., 1956, p. 43.

Цитируется по книге *Кокстер Г.С.М.*, Введение в геометрию, “Наука”, – М:, 1966, С. 369.

Часть IV [50]

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Исчисление кортов)

Seire leges non hoc est verba earum tenere,

sed vim ae potestatem [51]

Я обращаюсь не к завтрашнему дню, а к векам грядущим. Понимание моих идей предполагает изменение структуры сознания. Эта структура может быть у совсем молодых людей и отсутствовать у знаменитых учёных и философов [1].

— *Николай Бердяев*

Глава 11. Основные понятия Теории физических структур первого поколения (1961 – 1997)

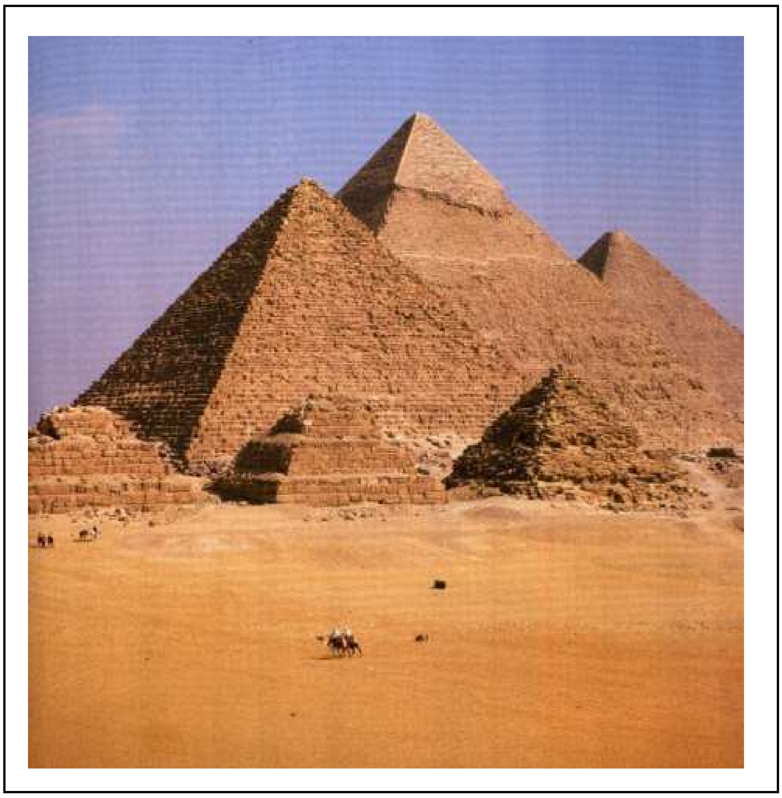
Глава 12. Основные понятия Теории физических структур второго поколения (1998 – 2002)

Глава 13. Сакральные уравнения

Глава 14. Строгие доказательства

[50] Музыкальным прообразом этой Части является Concerto No. 2 in C for trumpet, Adagio of HAYDN.

[51] Знание законов – не значит держаться их буквы, а значит постигать их смысл.



Пирамида Хеопса стоит на краю пустыни к западу от Нила. Она была построена фараоном Хуфу (2590 – 2568 годы до н.э.). Его имя по-гречески звучало: Хеопс. Два царя из следующих династий, Хефрен и Микерин, построили совсем рядом с этой другие пирамиды. Три пирамиды вместе составляют самый, наверное, известный в мире комплекс построек, на который вот уже в течение многих столетий смотрят с восхищением и благоговением.

Благоговение весьма оправдано. Высота пирамиды Хеопса – 138 метров (а изначально была даже 147 метров), она выстроена из 2 500 000 известковых блоков, каждый весом две с половиной тонны. Общий вес более 6 000 000 тонн. Пирамида стоит на специально подготовленной плоскости, которая по горизонтали даёт отклонение меньше двух сантиметров. Основание пирамиды – точный квадрат со стороной 227,5 метра с огромной точностью ориентированный по странам света.

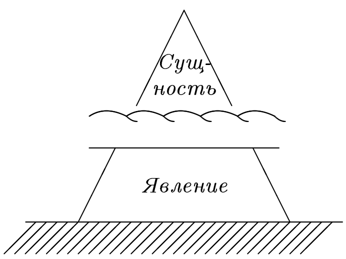
Известный журналист и путешественник Ярослав Голованов рассказывает:
“Когда я вернулся из Египта, друзья спрашивали:
— Пирамиды видел? Что, действительно огромные?
Ну, что сказать? я подумал и ответил:
— Они в три раза больше чем вы себе представляете”. [2]
Нечто подобное можно сказать и о Физических структурах:
— Они, действительно, в три раза более глубокие и содержательные, чем вы себе представляете.

Аннотация к Части IV

Теория физических структур представляет собой универсальную теорию отношений между объектами произвольной природы, предназначенную прежде всего для создания надёжного фундамента современной физики. Эта теория возникла из необходимости "бурбакизации" физики, то есть пересмотра её оснований с единой точки зрения, в основу которой вместо нескольких различных полуинтуитивных понятий, таких как пространство и время, взаимодействие, частицы и поля, положено одно единственное понятие – **физическая структура**, дополненная соответствующей физической интерпретацией. Утверждается, что, подобно тому как свойства всякого вещества определяются свойствами составляющих его атомов, так и свойства фундаментальных физических законов определяются свойствами "атомарных" физических структур.

По сути дела, Теория физических структур представляет собой особый раздел теоретической физики, в котором изучается специальный вид симметрии, накладывающий существенные ограничения на возможный вид физических законов. Благодаря этому Теория физических структур позволяет, при соответствующей интерпретации, рассматривать с единой точки зрения самые различные физические теории, такие как геометрия, механика, термодинамика, электродинамика, теория относительности, квантовая механика. Она не решает конкретных проблем теории элементарных частиц, однако понятие физической структуры может оказаться здесь весьма полезным.

Таким образом, Теория физических структур оказалась как бы предназначенной для тех, кто "... хотел бы не только знать, как устроена природа и как происходят природные явления, но и по возможности достичь цели, может утопической и дерзкой на вид, – узнать, почему природа является именно такой, а не иной. Но именно в этом находят физики наивысшее удовлетворение. В этом и состоит прометеевский элемент научного творчества"(Альберт Эйнштейн). Поэтому, развивая и совершенствуя Теорию физических структур, я вижу свою главную задачу в том, чтобы, разрабатывая проблемы физических основ Мироздания, способствовать сохранению свежести, внутренней стройности и эстетического богатства физики, помочь полюбить её, увидеть в ней не только набор полезных рецептов для "покорения сил природы", но и мощный инструмент духовного развития человека, не дать ей превратиться в высохший скелет, состоящий из определённого набора различных уравнений и методов их решения.



Глава 11.

Основные понятия Теории физических структур первого поколения (1961 – 1997)

Ad augusta per angusta[52]

Может быть эта модель Мира будет совсем простой математически, и лишь привычки инертного ума мешают нам угадать её сейчас [3].

— *Ю.И. Манин*

§ 1. К истории термина “физическая структура”

§ 2. Концепция двух миров. Физические объекты и их прообразы

§ 3. Элементарные субэйдосы – исходные понятия Мира высшей реальности

§ 4. Ко- и контравариантные координаты

§ 5. Корт – исходное понятие Теории физических структур

§ 6. Отношение между кортами – первый шаг на пути понимания сущности физических законов

§ 7. Сакральное тождество – фундаментальный закон Мироздания

§ 8. От сакрального тождества к сакрально-функциональному уравнению

§ 9. Сведе́ние сакрального тождества к функциональному уравнению

§ 10. Постановка задачи в Теории физических структур

[52]К вершинам через теснины.

§ 11. Физическая структура ранга $(1,1)$

§ 12. Физические структуры рангов $(1,2)$ и $(2,1)$

§ 13. Физическая структура ранга $(2,2)$

§ 14. Физические структуры рангов $(2,3)$ и $(3,2)$

§ 15. Theorema egregium Михайличенко

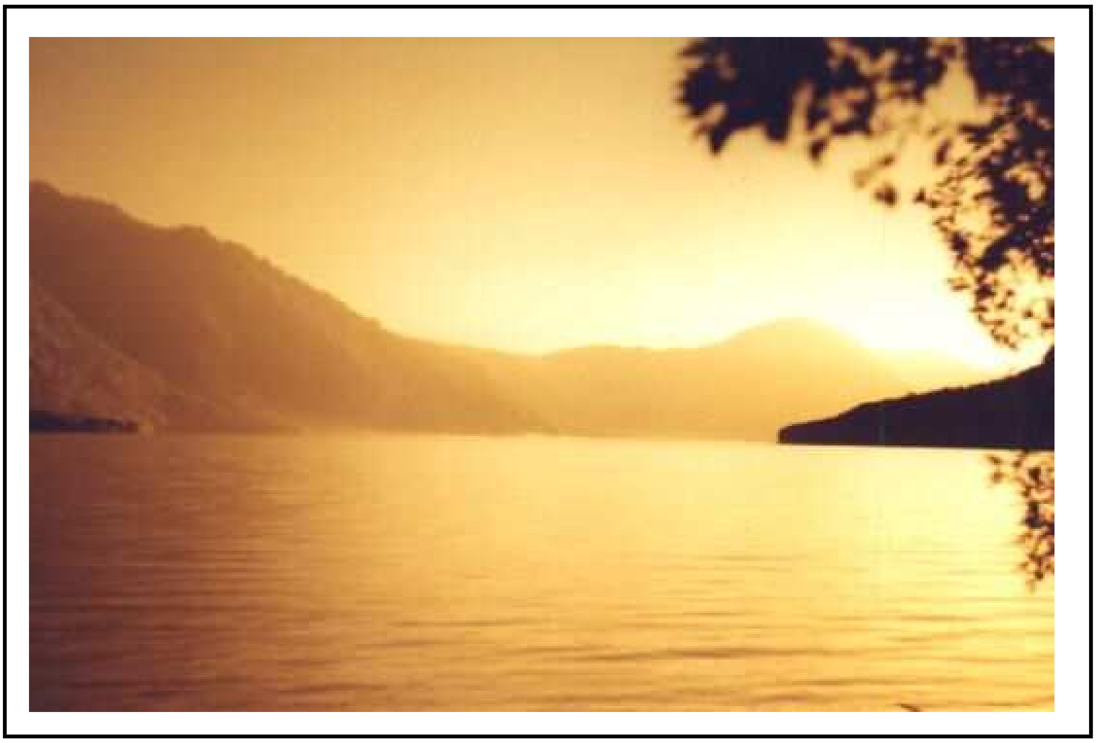
§ 16. Секстет Михайличенко

§ 17. Научный подвиг Михайличенко

§ 18. Полное решение задачи Г.Г. Михайличенко

§ 19. Феномен рождения Мира из ничего

§ 20. Заключение



Телецкое озеро

Основные понятия Теории физических структур первого поколения (1961 – 1997)

§ 1. К истории термина "физическая структура"

С момента появления на свет Теории физических структур (весна 1961 года[53]) прошло сорок с лишним лет. К настоящему времени Теория физических структур, пройдя период детства и отрочества, превратилась в вполне сформировавшуюся физико-математическую теорию (точнее в метатеоретическую физику) со своими исходными принципами, понятиями и тщательно разработанным специально для этой цели математическим аппаратом. Образно говоря, Теория физических структур – это результат брачного союза строгой и респектабельной дамы – математики и несколько легкомысленного баловня судьбы – физика-теоретика.

И подобно тому, как женщина при замужестве, меняет, как правило, свою фамилию, так и в случае Теории физических структур наступил момент, когда возник вопрос: нужно ли менять её девичью фамилию на новую, с которой ей предстоит жить в новом тысячелетии.

Я хорошо помню время и место возникновения в моём сознании термина "Теория физических структур" (Это случилось летом 1964 г. в пригородном поезде на полпути между Таганрогом и Ростовом).

В то время этот термин достаточно точно отражал сущность создаваемой мною физико-математической теории.

Эта теория возникла из анализа различных физических законов и из попытки ответить на некоторые "школьные" вопросы:

что такое закон Ньютона? что такое закон Ома? что такое физическая величина, и в частности, масса, сила, сопротивление и т.п.? имеется ли что-то общее между первым и вторым началами термодинамики и принципом постоянства скорости света?

Первоначальная задача, из которой возникла Теория физических структур, выглядела весьма скромно – выяснить, оставаясь в рамках традиционной физики, в какой степени Второй закон механики Ньютона является экспериментально проверяемым физическим законом, а в какой – определением силы, массы и инерциальной системы отсчёта.

При этом возникла необходимость дать такие определения исходным понятиям – силе, массе, инерциальной системе отсчёта, которые, в отличие от туманных, расплывчатых и неконструктивных определений, вроде "масса есть мера инерции тела, а сила – мера механического воздействия на это тело" или "инерциальная система отсчёта – это такая система, в которой справедливы законы Ньютона"[4], были бы конструктивны, логически безупречны и позволяли бы определить чис-

[53] Время моего переезда из Москвы (из Московского физико-технического института) в Новосибирск (в Новосибирский государственный университет).

ленные значения вводимых физических величин экспериментальным путём.

Цель была достигнута: выяснилось, что Второй закон механики Ньютона одновременно является и экспериментально проверяемым физическим законом, и содержит в себе при этом три определения – определения массы, силы и инерциальной системы отсчёта. Однако, как это иногда бывает, наряду с решением поставленной весьма частной задачи было получено нечто гораздо большее.

Оказалось, что ход рассуждений, с помощью которого удалось получить индивидуальную характеристику тела i – массу m_i и характеристику акселератора[54] α – силу f_α, исходя лишь из соответствующих ускорений, может быть перенесён и на другие фундаментальные физические законы.

Более того, оказалось, что за таким, хорошо известным ещё со школы, законом, как Второй закон механики Ньютона, стоит целая неисследованная область **особых отношений** между физическими объектами различной природы, порождающих, в частности, фундаментальные законы физики и геометрии.

Возникающая при этом теория, названная мною **Теорией физических структур**, сначала обращается к хорошо известным физическим законам и к основным уравнениям и выделяет из них нечто общее, универсальное, присущее всем фундаментальным физическим законам независимо от конкретной "физической природы" изучаемых объектов и используемых при этом измерительных приборов. Оказывается, что с каждым физическим законом тесно связан определённый тип устойчивых отношений (структура определённого ранга), не зависящий ни от "физической природы" изучаемого физического объекта, ни от выбора конкретного измерительного прибора.

Строгая математическая формулировка понятия физической структуры делает возможным изучение **общих свойств физических законов** до их конкретной физической интерпретации, подобно тому, как решению школьных задач, взятых из реальной действительности, предшествует изучение абстрактных законов элементарной алгебры.

Именно Теория физических структур позволяет обнаружить глубокое единство самых различных разделов физики. Опираясь на методы, разработанные в рамках этой Теории, можно показать, что такие, внешне не похожие друг на друга разделы физики, как механика, теория относительности, электродинамика, теория электрических цепей, равновесная термодинамика как бы вырастают из единого корня, реализуя тем самым физические структуры различных рангов.

Что же касается термина **структура**, то он в данном контексте означает не "взаиморасположение и связь составных частей, характеризующее строение чего-либо"[5], а рассматривается как математическое понятие, лежащее в основании многотомника "Начала математики" Н.Бурбаки [6].

В общем случае под **математической структурой** понимается родовое название различных понятий, общей чертой которых является то, что они применимы к множествам элементов, "природа" которых заранее не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых нахо-

[54] Под акселераторами ("ускорителями") мы будем понимать всевозможные поля или ускоряющие механизмы, сообщающие телам определённые ускорения.

дятся элементы некоторого множества (в случае групп — это отношение $x \otimes y = z$ между тремя произвольными элементами); затем постулируют, что данное отношение (или данные отношения) удовлетворяют некоторым условиям, которые перечисляют и которые являются *аксиомами* рассматриваемой структуры. Построить аксиоматическую теорию данной структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, *отказавшись от каких-либо других предположений* относительно рассматриваемых элементов (в частности, от всяких гипотез относительно их "природы")

Так что термин "физическая структура" здесь был вполне уместен.

Однако к настоящему времени стало ясно, что построенная мною и моими учениками Г.Г.Михайличенко, В.Х.Львом и др., Теория физических структур выходит далеко за рамки первоначально поставленной задачи – переизложить всю существующую теоретическую физику на новом, более надёжном основании – на основе *принципа сакральной симметрии.*

Теория физических структур оказалась прежде всего теоретическим фундаментом **Мира высшей Реальности**, тенью которого является тот самый мир материальной действительности, в котором мы живём. Благодаря этому она явилась тем самым идеальным инструментом, который позволяет объединить в единое целое не только различные, на первый взгляд совершенно не похожие друг на друга, разделы теоретической физики, но и взглянуть с новой и неожиданной точки зрения на происхождение фундаментальных для всей математики двух операций – *аддитивности* и *мультипликативности* и на происхождение тесно связанных с этими операциями элементарных функций.

Более того, оказывается, что физические структуры имеют непосредственное отношение к проблеме оснований математики и, в частности, к проблеме оснований геометрии и теории групп [7], [8].

Таким образом, опираясь на чрезвычайно общие понятия **субэйдоса** и **корта**, лежащие в основании Теории физических структур, стало возможным взглянуть на физику и математику как на части единого целого.

Короче говоря, выяснилось, что сущность Теории физических структур состоит не столько в открытии *единого, универсального языка*, на котором написаны все известные физические законы, сколько в установлении факта существования принципиально новых универсальных, **сакральных отношений** между **субэйдосами**, являющимися прообразами физических объектов.

Необходимость особого "целостного" подхода при осмыслении и описании Мира была осознана некоторыми философами в 30-х годах прошедшего столетия и привела к созданию **холизма** – "философии целостности".

Холизм исходит из понятия целостности Мира как высшей и всеохватывающей идеи, пронизывающей собой области физики, биологии, психологии. Однако холизм не получил дальнейшего развития из-за отсутствия необходимой поддержки со стороны официальной науки.

Дело в том, что материалистически ориентированная академическая наука продолжает идти в направлении всё большей специализации, и учёные, знания которых в других областях заметно сокращаются, с иронией отзываются о тех, кто вторгается в чужие сферы деятельности, и не терпят их вмешательства. При этом многие доктрины вырастают в убеждения и преподносятся уже как факты. А что касается фундаментальных проблем, то они, как правило, замалчиваются и откладываются на неопределённое время.

Современная наука, разъединённая на локальные дисциплинарные "вотчины", надёжно ограждённые друг от друга высотами профессионализма и охранными грамотами специальных языков, нелегко вырабатывает интеграционный стиль познания. Познание структурных законов с трудом преодолевает исторически накопившуюся инерцию методов исследования строго определённых "форм движения", каждый из которых применим лишь в пределах узкой частнонаучной области знания [9].

Но Мир сам по себе не знает таких барьеров. Учёные обязаны обеспечить *согласованность представлений*, причём не только в пределах собственной специализации, но и по отношению к другим областям знаний. Для решения наиболее фундаментальных проблем требуется приток информации из различных источников. Именно на стыке разных наук лежит ключ к важнейшим новым открытиям.

Поиск общих закономерностей Мира является наиболее увлекательной областью познания. В этих закономерностях и проявляется единство Мира и науки. Идея такого единства, отражённая в наличии общих количественных отношений, в существовании общих формул и чисел, сохраняет свою актуальность от Пифагора (576 – 496 до н.э.) и Платона (428 – 347 до н.э.) до наших дней.

В этом плане *Теория физических структур* представляет собой, по сути дела, надёжный теоретический фундамент *холизма.*

В связи с новым, более глубоким пониманием сущности физических структур, казалось бы целесообразным заменить термин "физическая структура" на термин "сакральная структура".

Однако термин "физическая структура" стал уже общепрнятым (по Теории физических структур опубликовано более ста пятидесяти работ), и поэтому, сохраняя этот термин, мы предлагаем использовать следующую терминологию:

В работах по основанию физики мы по-прежнему будем употреблять традиционный термин **Теория физических структур,**

В чисто математических работах мы будем употреблять термины

теория сакральных структур,

алгебраическая теория сакральных структур,

аналитическая теория сакральных структур,

аналитическая теория моно-сакральных структур.

Последний термин мы будем использовать для обозначения теории особых "моно-сакральных функциональных уравнений", близких по своей форме к сакральным уравнениям, но тем не менее отличающиеся от них по своей сути[55].

[55]Теория моно-сакральных структур возникла на спределённом этапе поисков универсально-

Что же касается употребления термина "Теория физических структур" в работах по основам мироздания, то и в этом случае мы сохраним его.

Далее вместо термина *феноменологическая (или фундаментальная) симметрия* мы будем использовать термин **сакральная симметрия;**

вместо термина *феноменологический инвариант* мы будем использовать термин **сакральный инвариант.**

вместо термина *фундаментальное функциональное уравнение* мы будем использовать термин **сакрально-функциональное уравнение.**

Кроме того мы введём новый термин – **холономия** – учение об Универсуме, рассматриваемом как Единое целое. Итак, необходимость введения нового термина "сакральная структура" наряду с привычной "физической структурой" связана прежде всего с тем, что термин "Теория физических структур" отражает главным образом историю происхождения этого понятия, перенося при этом весь акцент на хорошо всем известные физические законы. Что же касается термина "теория сакральных структур", то в этом случае центр тяжести переносится на новое понятие "целостности", в результате чего все сакральные структуры могут рассматриваться в трёх дополняющих друг друга аспектах – как чисто математические структуры, как прообразы фундаментальных физических законов и, наконец, как реализация важной философской категории "целостности", лежащей в основе Мироздания.

Итак, *Теория физических структур* (ТФС) представляет собой новое научное направление, главная цель которого – обнаружение и описание общего фундамента, лежащего в основании теории линейных пространств, глобальных метрических геометрий и фундаментальных законов теоретической физики. Кроме того Теория физических структур лежит в основе *теоретической холономии*, изучающей общие законы и строение Мира как единого целого, то есть области знания, промежуточной между математикой, естествознанием и современной онтологией[56].

Общая черта всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определённым классам, **равноправны** по отношению к рассматриваемому закону.

Ниже излагается **исчисление кортов** – математический аппарат, позволяющий естественным образом сформулировать это равноправие.

Оказывается, что из одного только требования равноправия перед законом конечной совокупности физических объектов, то есть двух так называемых

го языка, на котором написаны фундаментальные физические законы, и привела к постановке трудных и в то же самое время содержательных математических задач. Но лишь дальнейшее её развитие может показать, являются ли моно-сакральные функциональные уравнения лишь недоопределённой, "недоношенной", засохшей веточкой на живом дереве сакральных уравнений, либо новой полноправной и самостоятельной математической структурой.

[56] Современная онтология представляет собой мировоззренческое учение о сущности и первоосновах Бытия, естественным образом совмещающее в себе научное и теологическое познание Мира.

кортов, можно получить явный вид того или иного фундаментального физического закона до его конкретной физической интерпретации.

Общий принцип (принцип сакральной симметрии), лежащий в основе первоначальной формулировки физического закона, сводится к функциональному уравнению специального вида, для решения которого предлагается эффективный метод. В дальнейших главах будет показано, каким образом этот принцип может быть положен в основание различных геометрий и применён к обоснованию ряда известных физических теорий. Этот же подход позволяет предвидеть некоторые структурные особенности ещё не построенных, но принципиально возможных физических теорий.

§ 2. Концепция двух миров. Физические объекты и их прообразы

Та особая цель в области теоретической физики, которая кажется мне особенно важной, состоит в логической унификации теории.

— Альберт Эйнштейн

Прежде всего уточним природу тех объектов, отношения между которыми лежат в основании Теории физических структур.

Первоначально, на самом первом этапе создания Теории физических структур, предполагалось, что речь идёт о физических объектах окружающей нас материальной действительности.

Так, например, говоря о законе Ома, мы говорили, – рассмотрим множество проводников $\mathfrak{M} = \{i,\ k, \ldots\}$ и множество источников тока $\mathfrak{N} = \{\alpha,\ \beta, \ldots\}$, понимая под i – реальный проводник, а под α – реальный источник тока.

Однако впоследствии выяснилось, что так называемые "сакральные" отношения между объектами материальной действительности не могут быть описаны непосредственно, а только **опосредованно** через сакральные отношения между идеальными, более фундаментальными и первичными **субэйдосами** – прообразами материальных объектов.

Так согласно "концепции двух миров", составляющей методологический фундамент Теории физических структур, у каждого физического объекта $\tilde{\alpha},\ \tilde{i}, \ldots$, принадлежащего к дискретному миру материальной действительности, имеется свой **прообраз – субэйдос** $\alpha,\ i, \ldots$ в гораздо более информационно ёмком, континуальном Мире высшей реальности (См. рис. 1).

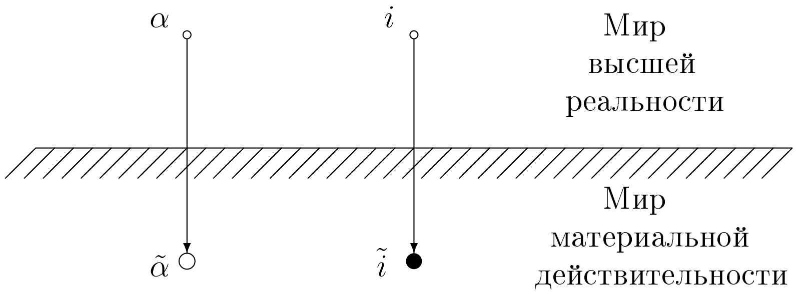


Рис. 1. Образы $\tilde{\alpha}, \tilde{i}$ в Мире материальной действительности и их прообразы (субэйдосы) α, i в Мире высшей реальности.

Итак, объективно существующий Универсум не исчерпывается миром эмпирической материальной действительности – вещным миром, воспринимаемым нашими органами чувств. Наряду с миром материальной действительности существует некая иная Реальность с иной формой бытия, лежащая вне области существования материального мира – Мир высшей реальности. Наблюдаемый физический мир является **вторичным, производным;** образно говоря, является "тенью" (в платоновском смысле слова) Мира высшей реальности, существующего объективно, независимо от нашего сознания (См. рис.1).

В отличие от антропной физики первого поколения, где нет необходимости рассматривать различные множества физических объектов как единое целое, понятие **множества** является одним из центральных в Теории физических структур. Дело в том, что любой физический закон, а он-то и является основным предметом её изучения, – это особое свойство всего множества физических объектов, а не какого-то отдельного его элемента.

Поэтому, стремясь понять глубинное содержание различных физических законов, мы должны отчётливо представлять себе, какая пропасть лежит между дискретными и, более того, конечными множествами физических объектов

$$\tilde{\mathfrak{N}} = \{\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta}, \ldots\}$$
$$\tilde{\mathfrak{M}} = \{\tilde{i},\ \tilde{k}, \ldots\}$$

и *многомерными многообразиями* их прообразов (n и m – размерности соответствующих многообразий) (См. рис. 2.):

$$\mathfrak{N}(n) = \{\alpha,\ \beta, \ldots\}$$
$$\mathfrak{M}(m) = \{i,\ k, \ldots\}$$

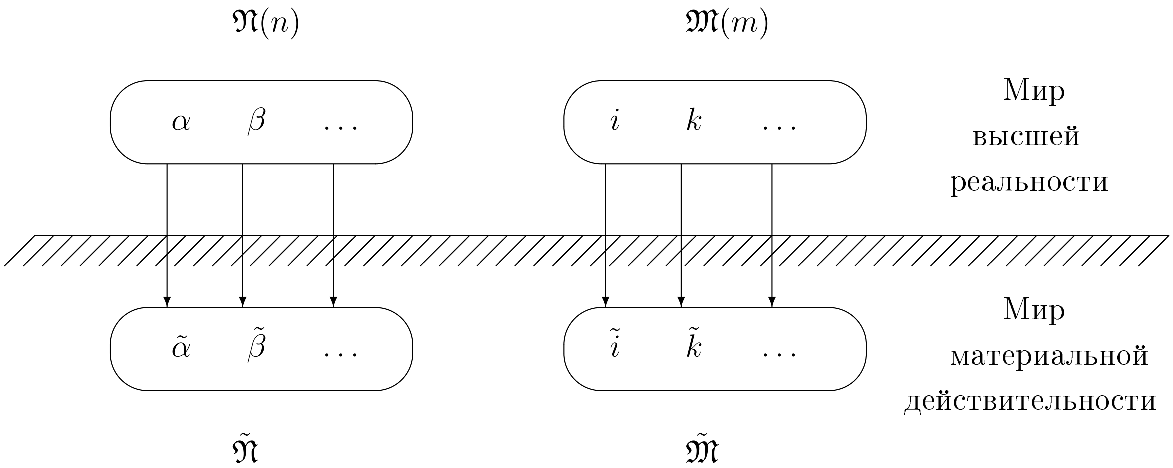


Рис. 2. Дискретные множества $\tilde{\mathfrak{N}}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$ являются "редкими тенями" своих континуальных прообразов $\mathfrak{N}(n)$ и $\mathfrak{M}(m)$.

§ 3. Элементарные субэйдосы – исходные понятия Мира высшей реальности

Среди всевозможных платоновских эйдосов – элементов Мира высшей реальности, выделим элементарные субэйдосы, идеальным образом описывающие самый нижний слой Мироздания:

Субэйдосы существуют в двух сопряжённых состояниях:

в состоянии *бра* $\langle\, i \,|$ и
в состоянии *кет* $|\, i \rangle$.

Для их обозначения удобно использовать пророчески универсальные символы, введённые Полем Дираком [10]. Разделив слово bracket (англ. – *скобка*) на две части, Дирак образовал термины

$\langle\, i \,|$ – *бра* и
$|\, i \rangle$ – *кет*

для обозначения двух сопряжённых векторов состояния Ψ_i^+ и Ψ_i .

Как мы убедимся в дальнейшем, к дираковским обозначениям $\langle\, i \,|$ и $|\, i \rangle$ в полной мере применимо замечание Вигнера, что *о глубине идеи, заложенной в формулировке математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искусно удаётся использовать это понятие* [11].

Чтобы подчеркнуть двойственную и дополнительную природу сопряжённых субэйдосов $\langle\, i \,|$ и $|\, i \rangle$, будем считать субэйдос $\langle\, i \,|$ левым идеальным объектом, а субэйдос $|\, i \rangle$ правым идеальным объектом.

Итак, фундамент Мира высшей реальности составляют сопряжённые друг с другом и дополнительные друг к другу левый и правый субэйдосы:

$$|\,\alpha\rangle,\ \langle\,\alpha\,|\,; \quad |\,\beta\rangle,\ \langle\,\beta\,|\,;\ \ldots$$
$$|\,i\rangle,\ \langle\,i\,|\,; \quad |\,k\rangle,\ \langle\,k\,|\,;\ \ldots$$ (См. рис. 4.):

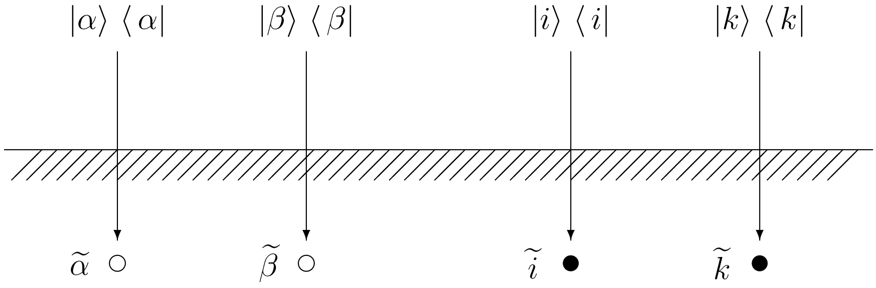


Рис. 4. Каждый прообраз (субэйдос) – есть пара, состоящая из правого (*кет*) и левого (*бра*) идеального математического объекта.

Обозначим многообразие левых субэйдосов *бра* через

$$\underline{\mathfrak{M}} = \{\ \langle\, i\,|,\ \langle\, k\ |, \ldots\}$$
$$\underline{\mathfrak{N}} = \{\ \langle\,\alpha\,|,\ \langle\,\beta\,|, \ldots\}$$

и аналогично обозначим многообразие правых субэйдосов *кет* через

$$\overline{\mathfrak{N}} = \{\ |\,\alpha\rangle,\ |\,\beta\rangle, \ldots\},$$
$$\overline{\mathfrak{M}} = \{\ |\,i\rangle,\ |\,k\rangle, \ldots\}. \qquad \text{(См. рис. 5.):}$$

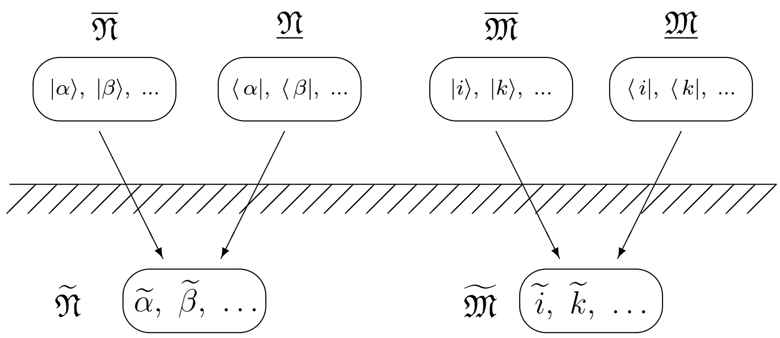


Рис. 5. Две пары дуально-сопряженных многообразий $(\overline{\mathfrak{N}},\ \underline{\mathfrak{N}})$ и $(\overline{\mathfrak{M}},\ \underline{\mathfrak{M}})$.

§ 4. Ко- и контравариантные координаты

Итак, мы постоянно будем иметь дело с двумя парами многообразий:

$$\underline{\mathfrak{N}} = \{\ \langle\,\alpha\,|,\ \langle\,\beta\,|, \ldots\}$$
$$\overline{\mathfrak{N}} = \{\ |\,\alpha\rangle,\ |\,\beta\rangle, \ldots\},$$
$$\underline{\mathfrak{M}} = \{\ \langle\, i\,|,\ \langle\, k\ |, \ldots\}$$
$$\overline{\mathfrak{M}} = \{\ |\,i\rangle,\ |\,k\rangle, \ldots\}.$$

В связи с этим введём две пары координат.

Элементарные левые субэйдосы $\langle\, i\,|$ и $\langle\,\alpha\,|$ характеризуются набором *ковариантных координат*, то есть с самого начала предполагается, что существуют унарные отображения

$$\underline{x} : \underline{\mathfrak{M}} \ \longrightarrow\ \mathbb{R}^m \ \ (\text{или}\ \ \mathbb{C}^m)$$

$$\langle\, i\,| \quad\mapsto\quad x_1(i),\ldots,\ x_n(i)$$

и аналогично

$$\begin{aligned}\underline{\xi}:\underline{\mathfrak{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \ \ (\text{или}\ \ \mathbb{C}^n)\\ \langle\,\alpha\,| &\mapsto\ \ \xi_1(\alpha),\ldots,\ \xi_n(\alpha);\end{aligned}$$

С другой стороны, элементарные правые субэйдосы $|\,i\rangle$ и $|\,\alpha\rangle$ характеризуются набором *контравариантных координат*, то есть существуют унарные отображения

$$\begin{aligned}\overline{x}:\overline{\mathfrak{M}} &\longrightarrow \mathbb{R}^m\ (\ \mathbb{C}^m)\\ |\,i\rangle &\mapsto\ \ x^1(i),\ldots,\ x^m(i)\end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}\overline{\xi}:\overline{\mathfrak{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^n\ (\ \mathbb{C}^n)\\ |\,\alpha\rangle &\mapsto\ \ \xi^1(\alpha),\ldots,\ \xi^n(\alpha);\end{aligned}$$

§ 5. Корт – исходное понятие Теории физических структур

Три понятия лежат в основании Теории физических структур. Это

корт, **верификатор** и **репрезентатор.**

Корт играет роль Слова, из которого с помощью верификатора и репрезентатора формируется понятие *фундаментального физического закона.*

Как уже отмечалось выше, любой физический закон – это особое свойство всего множества физических объектов, а не отдельного его элемента. Однако для точной формулировки фундаментального физического закона нет необходимости рассматривать всё множество физических объектов целиком.

Оказывается для этой цели нужно взять *конечное число* физических объектов и, рассматривая их как независимые нечисловые переменные, построить по определённому правилу некоторую **общезначимую формулу (тавтологию)**, подобно тому как это делается, например, в исчислении высказываний, в исчислении предикатов или в абстрактной алгебре Буля.

Далее на многочисленных примерах можно убедиться в том, что полученное таким образом “сакральное тождество” и есть фундаментальный закон, лежащий в основании физики и геометрии.

Сам термин “корт” представляет собой сокращённую форму слова “кортеж”. При этом под кортежем мы будем понимать конечную последовательность или упорядоченный набор элементов, взятых из какого-либо множества.

Вообще говоря, Теория физических структур имеет дело с двумя множествами различной природы

$$\widetilde{\mathfrak{N}}=\{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\ldots\}\quad\text{и}\quad\widetilde{\mathfrak{M}}=\{\widetilde{i},\widetilde{k}\ldots\},$$

однако в силу существования универсального *принципа двойственности*, каждое из множеств $\widetilde{\mathfrak{N}}$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}$ расщепляется на два – на правое многообразие $\overline{\mathfrak{N}}$ или $\overline{\mathfrak{M}}$ и левое многообразие $\underline{\mathfrak{N}}$ и $\underline{\mathfrak{M}}$ (см. рис. 5)

Таким образом, имеем следующий набор кортов:

$$\begin{array}{llll} |\beta_1\rangle & \langle\,\alpha_1| & |i_1\rangle & \langle\,k_1| \\ |\beta_1\beta_2\rangle & \langle\,\alpha_1\alpha_2| & |i_1 i_2\rangle & \langle\,k_1k_2| \\ |\beta_1\beta_2\beta_3\rangle & \langle\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3| & |i_1i_2i_3\rangle & \langle\,k_1k_2k_3| \end{array}$$

где

$$|\beta_1\ldots\beta_v\rangle \in \overline{\mathfrak{N}}^v \qquad \langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,| \in \underline{\mathfrak{N}}^v$$

$$|\,i_1\ldots i_u\rangle \in \overline{\mathfrak{M}}^u \qquad \langle\,k_1\ldots k_u\,| \in \underline{\mathfrak{M}}^u$$

При этом возможны следующие отношения между кортами одной природы:

$$\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,| \quad \text{и} \quad |\beta_1\ldots\beta_v\rangle \qquad\qquad \langle\,k_1\ldots k_u| \quad \text{и} \quad |\,i_1\ldots i_u\rangle \text{ –}$$

то есть эти два варианта описывают отношения между многообразиями $\underline{\mathfrak{N}}$ и $\overline{\mathfrak{N}}$ или $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ *одной и той же природы* (См. рис. 6.):

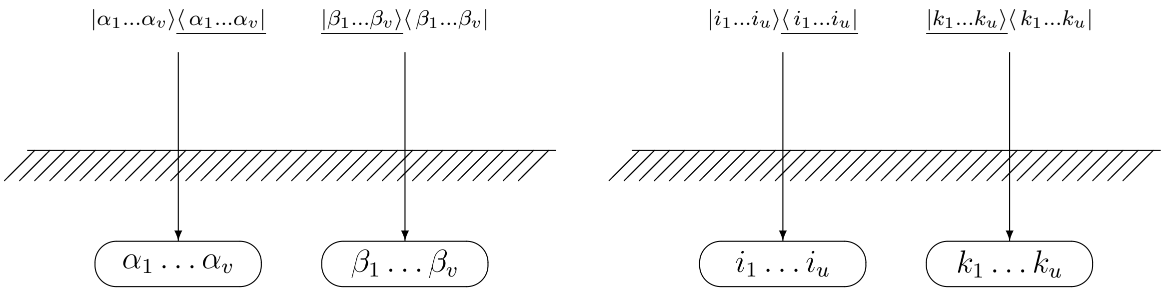


Рис. 6. Отношения между кортами одной и той же природы.

Кроме того, возможны следующие отношения между кортами разной природы:

$$\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,| \quad \text{и} \quad |\,i_1\ldots i_u\rangle \qquad\qquad \langle\,k_1\ldots k_u\,| \quad \text{и} \quad |\,\beta_1\ldots\beta_v\rangle \text{ –}$$

то есть эти два варианта описывают отношения между многообразиями $\underline{\mathfrak{N}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ или $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{N}}$ *разной природы* (См. рис. 7.):

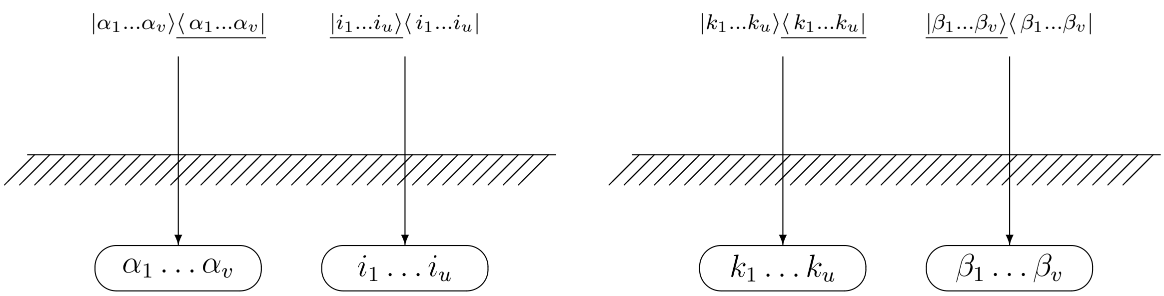


Рис. 7. Отношения между кортами различной природы.

Но при этом необходимо различать отношения между реальными физическими *объектами* или между их идеальными прообразами – *субэйдосами* и отношения между *кортами*

Отношения между двумя физическими объектами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{i}$ характеризуются числовой вещественнозначной функцией двух нечисловых переменных:

$$\tilde{\varphi} : \tilde{\mathfrak{N}} \times \tilde{\mathfrak{M}} \to \mathbb{R}$$

$$(\tilde{\alpha}, \tilde{i}) \mapsto \tilde{\varphi}_{\alpha i},$$

которая называется **эмпирическим репрезентатором** (от фр. représentant – представитель).

Что же касается отношений между идеальными прообразами – субэйдосами $\langle\alpha|$ и $|i\rangle$, то они и только они рассматриваются в Теории физических структур (как, кстати говоря, и в любой физической теории). Они характеризуются числовой вещественно- или комплекснозначной функцией двух нечисловых переменных:

$$\varphi : \underline{\mathfrak{N}} \times \overline{\mathfrak{M}} \to \mathbb{R} \quad (\text{или } \mathbb{C})$$

$$(\alpha,\, i) \mapsto \varphi_{\alpha i} = \langle\, \alpha \,|\, i \rangle,$$

которая называется **идеальным**[57] **репрезентатором**.

В частности, если $\langle\alpha|$ и $|i\rangle$ – векторы, то репрезентатор $\varphi_{\alpha i}$ имеет смысл *скалярного произведения двух векторов;*

если же $\langle\alpha|$ и $|i\rangle$ – точки евклидова пространства, то $\varphi_{\alpha i}$ имеет смысл *квадрата расстояния между ними.*

Существенно, что элементарные отношения между реальными физическими объектами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{i}$ неизбежно размыты из-за постоянно присутствующей в Мире материальной действительности "метаморфии", являются вторичными, опосредованными и определяются элементарными отношениями между их идеальными прообразами α и i (См. рис. 8).

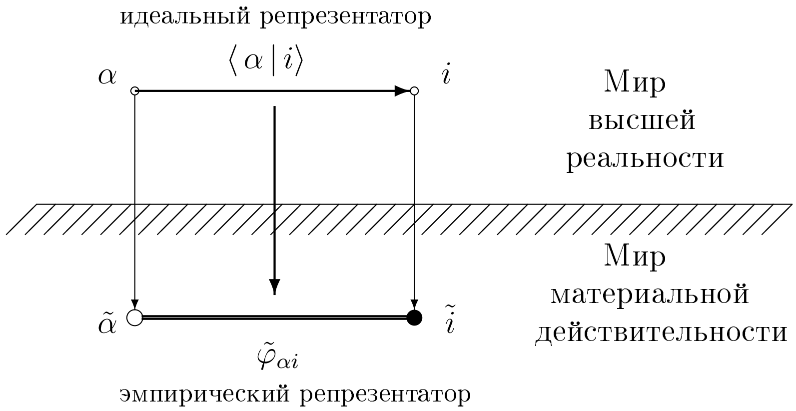


Рис. 8. Соответствие между точным идеальным репрезентатором $\langle\, \alpha \,|\, i \rangle$ и размытым эмпирическим репрезентатором $\tilde{\varphi}_{\alpha i}$.

[57]В дальнейшем прилагательное "идеальный" мы будем, как правило, опускать.

§ 6. Отношения между кортами – первый шаг на пути к пониманию сущности физического закона

В отличие от традиционной теоретической физики, где рассматриваются лишь отношения между отдельными физическими объектами α и i, в Теории физических структур рассматриваются отношения между кортами $\langle\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_v\,|$ и $|\,i_1\,\ldots i_u\rangle$.

Отношение между двумя кортами $\langle\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_v\,|$ и $|\,i_1\,\ldots\,i_u\rangle$ характеризуется числовой функцией, называемой **верификатором** $\langle\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_v\,|\,i_1\,\ldots\,i_u\rangle$ (См. рис. 9.)

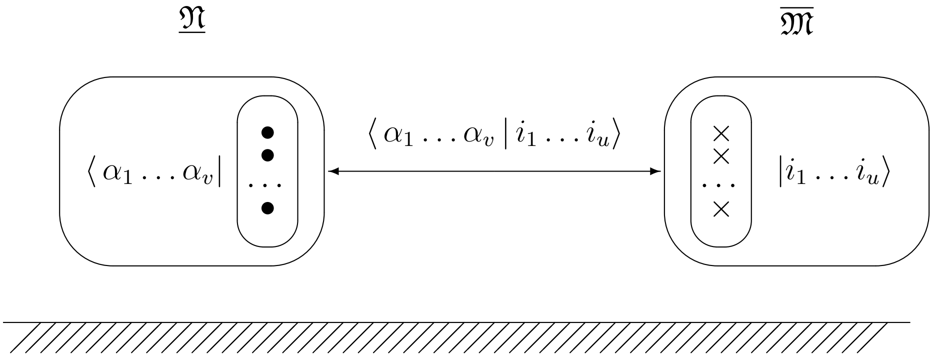


Рис. 9. Верификатор $\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,|\,i_1\ldots i_u\rangle$, характеризующий отношения между двумя кортами $\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,|$ и $|\,i_1\ldots i_u\rangle$

Два корта $\langle\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_v\,|$ и $|\,i_1\,\ldots\,i_u\rangle$, отношения между которыми описываются верификатором $\langle\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_v\,|\,i_1\,\ldots\,i_u\rangle$, мы будем называть **бикортом**.

Итак, мы подходим к самому главному эпизоду Теории физических структур, основным действующим лицом которого является великолепное трио – бикорт, репрезентатор и верификатор. Именно в результате их согласованного взаимодействия возникает весьма эффективный самодостаточный математический аппарат Теории физических структур.

Первый шаг состоит в утверждении, что

отношение между двумя кортами определяется через отношение между их субэйдосами.

Это значит, что верификатор $\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,|\,i_1\ldots i_u\rangle$, описывающий отношения между двумя произвольными кортами $\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,|$ и $|\,i_1\ldots i_u\rangle$, имеет вид (См. рис. 10.):

$$\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,|\,i_1\ldots i_u\rangle = \begin{array}{c} \Phi(\langle\,\alpha_1|\,i_1\rangle,\ \ \ldots,\ \ \langle\,\alpha_1|\,i_u\rangle, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle\,\alpha_v|\,i_1\rangle,\ \ \ldots,\ \ \langle\,\alpha_v|\,i_u\rangle) \end{array},$$

где $\begin{array}{c} \Phi(\varphi_{11},\ \ \ldots,\ \ \varphi_{1u}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{v1},\ \ \ldots,\ \ \varphi_{vu} \end{array}$ некоторая числовая функция vu числовых переменных.

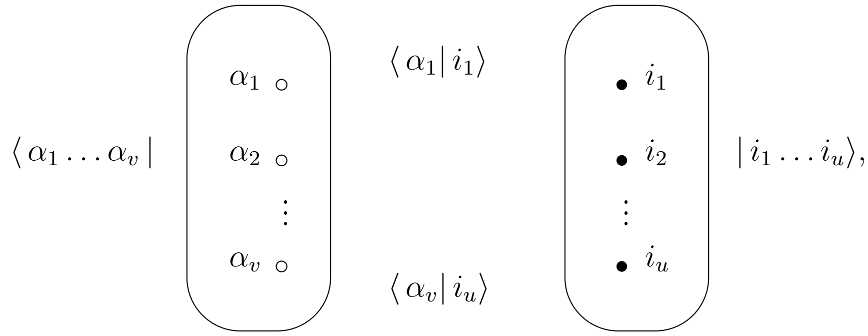


Рис. 10. Отношения между двумя кортами $\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,|$ и $|\,i_1\ldots i_u\rangle$, сводятся к попарным отношениям между физическими объектами, принадлежащими к этим кортам.

Как будет показано ниже, верификатор $\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,|\,i_1\ldots i_u\rangle$ имеет простой геометрический смысл – он равен произведению объёмов, построенных на кортах $\langle\,\alpha_1\ldots\alpha_v\,|$ и $|\,i_1\ldots i_u\rangle$.

Так, например, если под $\mathfrak{M}=\{i,r,m,\ldots\}$ понимать множество точек евклидова пространства, то верификаторы $\langle\,i_1,i_2,\ldots i_u\,|\,i_1,i_2,\ldots i_u\rangle$ имеют, с точностью до множителя, смысл квадрата объёма соответствующего симплекса:

$$\langle\,i\,|\,i\rangle=(-1)^o\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}=2^0\;(0!)^2\;(v_i)^2;$$

$$\langle\,i\,k\,|\,i\,k\rangle=(-1)^1\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&0&\ell^2_{ik}\\-1&\ell^2_{ik}&0\end{vmatrix}=2^1\;(1!)^2\;(\ell_{ik})^2;$$

$$\langle\,i\,k\,m\,|\,i\,k\,m\rangle=(-1)^2\begin{vmatrix}0&1&1&1\\-1&0&\ell^2_{ik}&\ell^2_{im}\\-1&\ell^2_{ik}&0&\ell^2_{km}\\-1&\ell^2_{im}&\ell^2_{km}&0\end{vmatrix}=2^2\;(2!)^2\;(S_{ikm})^2;$$

$$\langle\,i\,k\,m\,p\,|\,i\,k\,m\,p\rangle=(-1)^3\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\-1&0&\ell^2_{ik}&\ell^2_{im}&\ell^2_{ip}\\-1&\ell^2_{ik}&0&\ell^2_{km}&\ell^2_{kp}\\-1&\ell^2_{im}&\ell^2_{km}&0&\ell^2_{mp}\\-1&\ell^2_{ip}&\ell^2_{kp}&\ell^2_{mp}&0\end{vmatrix}=2^3\;(3!)^2\;(V_{ikmp})^2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\langle\,i_1\ldots i_u\,|\,i_1\ldots i_u\rangle=(-1)^{u-1}\begin{vmatrix}0&1&1&\ldots&1\\-1&0&\ell^2_{i_1i_2}&\ldots&\ell^2_{i_1i_u}\\-1&\ell^2_{i_1i_2}&0&\ldots&\ell^2_{i_2i_u}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\-1&\ell^2_{i_1i_u}&\ell^2_{i_2i_u}&\ldots&0\end{vmatrix}=2^{u-1}\;((u-1)!)^2\;{V_{i_1\ldots i_u}}^2,$$

где $v_i = 1$ – объём точки[58]
ℓ_{ik} – длина отрезка между точками i и k;
S_{ikm} – площадь треугольника с вершинами в точках i, k, m;
V_{ikmp} – объём тетраэдра с вершинами в точках i, k, m, p;
$V_{i_1\ldots i_u}$ – объём $u-1$-мерного симплекса с вершинами в точках $i_1, \ldots, i_u$;

С другой стороны, если под $\mathfrak{M} = \{\vec{i},\ \vec{k},\ \vec{m}, \ldots\}$ понимать множество векторов, то верификаторы $\langle\, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots \vec{i}_u \,|\, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots \vec{i}_u \rangle$ имеют смысл квадрата объёмов соответствующих параллелотопов, построенных на векторах $\vec{i}_1,\ \vec{i}_2, \ldots \vec{i}_u$:

$$\langle\, \vec{i} \,|\, \vec{i} \rangle = |\vec{i}^{\,2}| = \ell_i^{\,2}$$

$$\langle\, \vec{i}\,\vec{k} \,|\, \vec{i}\,\vec{k} \rangle = \begin{vmatrix} \vec{i}^{\,2} & \vec{i}\,\vec{k} \\ \vec{k}\,\vec{i} & \vec{k}^{\,2} \end{vmatrix} = (S_{ik})^2$$

$$\langle\, \vec{i}\,\vec{k}\,\vec{m} \,|\, \vec{i}\,\vec{k}\,\vec{m} \rangle = \begin{vmatrix} \vec{i}^{\,2} & \vec{i}\,\vec{k} & \vec{i}\,\vec{m} \\ \vec{k}\,\vec{i} & \vec{k}^{\,2} & \vec{k}\,\vec{m} \\ \vec{m}\,\vec{i} & \vec{m}\,\vec{k} & \vec{m}^{\,2} \end{vmatrix} = (V_{ikm})^2$$

$$\langle\, \vec{i}\,\vec{k}\,\vec{m}\,\vec{p} \,|\, \vec{i}\,\vec{k}\,\vec{m}\,\vec{p} \rangle = \begin{vmatrix} \vec{i}^{\,2} & \vec{i}\,\vec{k} & \vec{i}\,\vec{m} & \vec{i}\,\vec{p} \\ \vec{k}\,\vec{i} & \vec{k}^{\,2} & \vec{k}\,\vec{m} & \vec{k}\,\vec{p} \\ \vec{m}\,\vec{i} & \vec{m}\,\vec{k} & \vec{m}^{\,2} & \vec{m}\,\vec{p} \\ \vec{p}\,\vec{i} & \vec{p}\,\vec{k} & \vec{p}\,\vec{m} & \vec{p}^{\,2} \end{vmatrix} = (V_{ikmp})^2$$

. . . .

где ℓ_i – длина вектора $\vec{i}$;
S_{ik} – площадь параллелограмма, построенного на двух векторах $\vec{i}$ и $\vec{k}$;
V_{ikm} – объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах $\vec{i}, \vec{k}, \vec{m}$;
V_{ikmp} – объём четырёхмерного параллелотопа, построенного на четырёх векторах $\vec{i}, \vec{k}, \vec{m}, \vec{p}$;

§ 7. Сакральное тождество – фундаментальный закон Мироздания

Итак, отношение между кортами $\langle\, \alpha_1 \ldots \alpha_v \,|$ и $|\, i_1 \ldots i_u \rangle$ характеризуется числом $\langle\, \alpha_1 \ldots \alpha_v \,|\, i_1 \ldots i_u \rangle$. Для одних кортов это число больше, для других – меньше. Таким образом, оно говорит о неоднородности и неравноправии кортов. В случае подлинного равноправия кортов это число не должно зависеть от их

[58] Обращает на себя внимание несколько неожиданное утверждение, что объём точки v_i равен 1. Прежде всего возникает вопрос – в каких единицах? Мы хорошо знаем, что длина измеряется, например, в метрах (m^1), площадь – в метрах квадратных (m^2), объём – в метрах кубических (m^3). Следовательно, объём нульмерного объекта – точки должен измеряться в m^o , то есть быть безразмерным, или, другими словами, должен измеряться в “естественных” единицах, не зависящих от выбора эталона длины.

выбора, то есть должно быть постоянной величиной. Не нарушая общности его можно положить равным нулю.

Итак, **фундаментальный закон Мироздания** формулируется следующим образом:

Существуют такие числа s *и* $r \geqslant 2$, *называемые рангом, при которых верификатор* $\langle \alpha_1 \ldots \alpha_s \,|\, i_1 \ldots i_r \rangle$ *остаётся равным нулю при любом выборе кортов* $\langle \alpha_1 \ldots \alpha_s \,|$ *и* $|\, i_1 \ldots i_r \rangle$.

Отсюда следует, что исходное соотношение

$$\langle \alpha_1 \ldots \alpha_v \,|\, i_1 \ldots i_u \rangle = \begin{array}{c} \Phi(\langle \alpha_1 | \, i_1 \rangle, \quad \ldots, \quad \langle \alpha_1 | \, i_u \rangle, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle \alpha_v | \, i_1 \rangle, \quad \ldots, \quad \langle \alpha_v | \, i_u \rangle) \end{array}$$

превращается в следующее **сакральное тождество** (общезначимую формулу, тавтологию) относительно выбора нечисловых переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \,;\, i_1, \ldots, i_r$.

$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \,;\, \forall i_1, \ldots, i_r.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Phi(\langle \alpha_1 | \, i_1 \rangle, \quad \ldots, \quad \langle \alpha_1 | \, i_r \rangle, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle \alpha_s | \, i_1 \rangle, \quad \ldots, \quad \langle \alpha_s | \, i_r \rangle) \end{array} \equiv 0.} \qquad (1)$$

Напомним, что изначально каждый левый субэйдос $\langle \alpha \,|$ характеризуется n ковариантными координатами $\xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_n$, а каждый правый субэйдос $|\, i \rangle$ – m контравариантными координатами $x^1(i), \ldots, x^m(i)$.

В связи с этим каждый репрезентатор $\langle \alpha \,|\, i \rangle$, характеризующий отношения между двумя субэйдосами $\langle \alpha \,|$ и $|\, i \rangle$, с одной стороны, является числовой функцией двух нечисловых переменных $\langle \alpha \,|$ и $|\, i \rangle$, а с другой стороны, является числовой функцией

$$\langle \alpha \,|\, i \rangle = \varphi_{\alpha i} = \varphi(\, \boldsymbol{\xi}_{\,\alpha}, \, \boldsymbol{x}_{\,i})$$

$n + m$ числовых переменных

$$\boldsymbol{\xi}_{\,\alpha} = \xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_n,$$
$$\boldsymbol{x}_{\,i} = x^1(i), \ldots, x^m(i).$$

Точно так же верификатор $\langle \alpha_1 \ldots \alpha_s \,|\, i_1 \ldots i_r \rangle$, характеризующий отношения между двумя кортами $\langle \alpha_1 \ldots \alpha_s \,|$ и $|\, i_1 \ldots i_r \rangle$,

с одной стороны, является числовой функцией $s{+}r$ нечисловых переменных $\langle \alpha_1 \,|, \ldots, \langle \alpha_s \,|; \,|\, i_1 \rangle, \ldots, \,|\, i_r \rangle$,

с другой стороны, является числовой функцией

$$\langle \alpha_1 \ldots \alpha_s \,|\, i_1 \ldots i_r \rangle = \begin{array}{c} \Phi(\varphi_{\alpha_1 i_1}, \quad \ldots, \quad \varphi_{\alpha_1 i_r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{\alpha_s i_1}, \quad \ldots, \quad \varphi_{\alpha_s i_r}) \end{array}$$

$s \cdot r$ числовых переменных

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{\alpha_1 i_1}, & \dots, & \varphi_{\alpha_1 i_r}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_s i_1}, & \dots, & \varphi_{\alpha_s i_r} \end{array}$$

и наконец, с третьей стороны, является числовой функцией

$$\langle\, \alpha_1 \dots \alpha_s \,|\, i_1 \dots i_r \rangle = \begin{array}{c} \Phi(\varphi_{\alpha_1 i_1}, \ \dots, \ \varphi_{\alpha_1 i_r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{\alpha_s i_1}, \ \dots, \ \varphi_{\alpha_s i_r}) \end{array} = \begin{array}{c} \Phi(\varphi(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_1}, \boldsymbol{x}_{i_1}), \ \dots, \ \varphi(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_1}, \boldsymbol{x}_{i_r}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_s}, \boldsymbol{x}_{i_1}), \ \dots, \ \varphi(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_s}, \boldsymbol{x}_{i_r})) \end{array}$$

$n\,s + m\,r$ числовых переменных:

$$\begin{array}{ccc} \xi(\alpha_1)_1 \ \dots \ \xi(\alpha_1)_n & & x^1(i_1) \ \dots \ x^1(i_r) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \text{и} & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi(\alpha_1)_1 \ \dots \ \xi(\alpha_1)_n & & x^m(i_1) \ \dots \ x^m(i_r) \end{array}$$

Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что фундаментальный закон Мироздания является сакральным тождеством (общезначимой формулой, тавтологией) относительно $s+r$ нечисловых переменных $\langle\,\alpha_1\,|, \dots, \langle\,\alpha_s\,|; \,|\,i_1\rangle, \dots, |\,i_r\rangle$, и одновременно относительно выбора $n\,s + m\,r$ числовых переменных

$$\boldsymbol{\xi}_{\ \alpha_1}, \dots, \ \boldsymbol{\xi}_{\ \alpha_s}; \ \boldsymbol{x}_{\ i_1}, \dots, \ \boldsymbol{x}_{\ i_r}$$

мы перепишем **фундаментальный закон Мироздания** (1) в новых“промежуточных” обозначениях:

$$\forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_s \ ; \ \forall i_1, \dots, i_r.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Phi(\varphi_{\alpha_1 i_1}, \ \dots, \ \varphi_{\alpha_1 i_r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{\alpha_s i_1}, \ \dots, \ \varphi_{\alpha_s i_r}) \end{array}} \qquad (2)$$

§ 8. От сакрального тождества к сакральному уравнению

Рассмотрим два специальных корта:

$$\text{корт} \qquad \langle\,\alpha; \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{s-1}\,|,$$

содержащий один произвольно выбранный физический объект α и $s-1$ фиксированных “эталонных” физических объектов из множества $\underline{\mathfrak{N}}$,

$$\text{и корт} \qquad |\,i; \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{r-1}\rangle,$$

содержащий один произвольно выбранный физический объект i и $r-1$ фиксированных “эталонных” физических объектов из множества $\overline{\mathfrak{M}}$ (См. рис.5)

В этом случае тождество (2) будет выглядеть следующим образом:

$$\Phi\begin{array}{llll}(\varphi_{\alpha i}, & \varphi_{\alpha\bar{1}}, & \ldots, & \varphi_{\alpha\overline{s-1}}, \\ \varphi_{\underline{1}i}, & \varphi_{\underline{1}\bar{1}}, & \ldots, & \varphi_{\underline{1}\overline{s-1}}, \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \varphi_{\underline{r-1}i}, & \varphi_{\underline{r-1}\bar{1}}, & \ldots, & \varphi_{\underline{r-1}\overline{s-1}}) \end{array} \equiv 0 \tag{3}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{array}{lcl} \varphi_{\alpha\bar{1}} = \xi(\alpha)_1 & \qquad & \varphi_{\underline{1}i} = x^1(i), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{\alpha,\overline{s-1}} = \xi(\alpha)_{s-1} & & \varphi_{\underline{r-1},i} = x^{r-1}(i); \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \varphi_{\underline{1}\bar{1}} & \cdots & \varphi_{\underline{1}\overline{s-1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \varphi_{\underline{r-1}\bar{1}} & \cdots & \varphi_{\underline{r-1}\overline{s-1}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1,s-1} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ c_{r-1,1} & \cdots & c_{r-1,s-1} \end{array}\right).$$

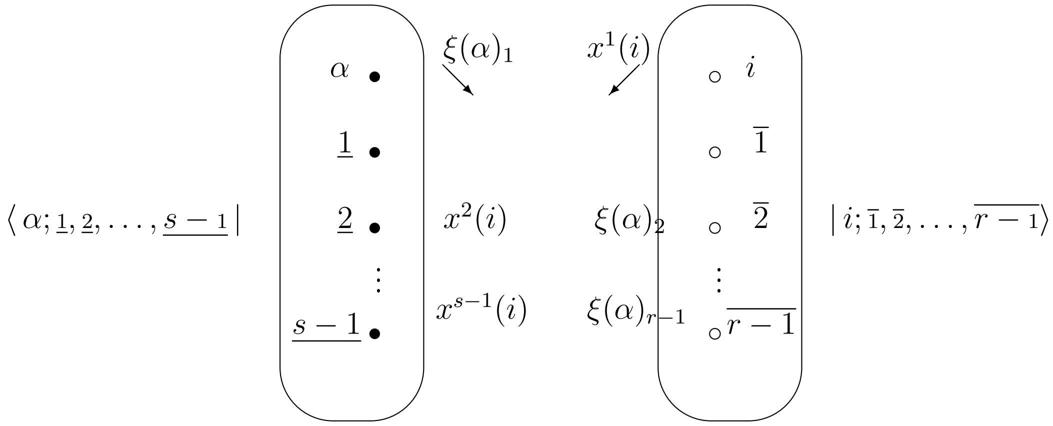


Рис. 5. Введение $r-1$ параметров $\xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_{r-1}$, характеризующих физический объект α и $s-1$ параметров $x^1(i), \ldots, x^{s-1}(i)$, характеризующих физический объект i.

Переменные $\xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_{r-1}$ являются параметрами, характеризующими физический объект α и, соответственно, переменные $x^1(i), \ldots, x^{s-1}(i)$ – параметрами, характеризующими физический объект i.

В новых обозначениях вместо тождества (3) будем иметь:

$$\Phi\begin{array}{llll}(\varphi_{\alpha i}, & \xi(\alpha)_1, & \ldots, & \xi(\alpha)_{r-1}, \\ x^1(i), & c_{11}, & \ldots, & c_{1,r-1}, \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ x^{s-1}(i), & c_{s-1,1}, & \ldots, & c_{s-1,r-1}) \end{array} \equiv 0. \tag{4}$$

Разрешая тождество (4) относительно $\varphi_{\alpha i}$, получим:

$$\varphi_{\alpha i} = f\Big(\xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_{r-1};\ x^1(i), \ldots, x^{s-1}(i);\ c_{11}, \ldots, c_{s-1,r-1}\Big)$$

Но поскольку аргументы $c_{11}, \ldots, c_{s-1,r-1}$ от α и i не зависят, то можно утверждать, что в самом общем случае репрезентатор $\varphi_{\alpha i}$, характеризующий отношения между физическими объектами α и i, имеет следующий вид:

$$\varphi_{\alpha i} = \varphi\Big(\xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_{r-1};\ x^1(i), \ldots, x^{s-1}(i)\Big), \tag{5}$$

где $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1};\ x^1, \ldots, x^{s-1})$ – неизвестная функция, существенным образом зависящая от всех своих переменных.

Связь между рангом и размерностью.

Таким образом, из соотношения (5) получаем очень важные равенства, связывающие между собой **ранг** физической структуры (s, r) и **размерности** (n,m) многообразий $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} n & = & r-1 \\ m & = & s-1 \end{array}} \tag{6}$$

§ 9. Свед́ение сакрального тождества (2) к функциональному уравнению

Итак, возвращаясь к тождеству (2) и подставляя в него репрезентаторы, выраженные через **одну и ту же неизвестную функцию**, но от **различных групп переменных**, получаем следующее тождество относительно $s(r-1) + r(s-1)$ независимых переменных:

$$\begin{array}{cc} \xi(\alpha_1)_1, \ldots, \xi(\alpha_1)_{r-1}, & x^1(i_1), \ldots, x^1(i_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi(\alpha_s)_1, \ldots, \xi(\alpha_s)_{r-1}, & x^{s-1}(i_1), \ldots, x^{s-1}(i_r). \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Phi\bigg(\varphi\Big(\xi(\alpha_1)_1, \ldots, \xi(\alpha_1)_{r-1};\ x^1(i_1), \ldots, x^{s-1}(i_1)\Big), \ldots \\ \ldots, \varphi\Big(\xi(\alpha_1)_1, \ldots, \xi(\alpha_1)_{r-1};\ x^1(i_r), \ldots, x^{s-1}(i_r)\Big), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi\Big(\xi(\alpha_s)_1, \ldots, \xi(\alpha_s)_{r-1};\ x^1(i_1), \ldots, x^{s-1}(i_1)\Big), \ldots \\ \ldots, \varphi\Big(\xi(\alpha_s)_1, \ldots, \xi(\alpha_s)_{r-1};\ x^1(i_r), \ldots, x^{s-1}(i_r)\Big)\bigg) \end{array} \equiv 0$$

или короче

$$\begin{array}{c} \Phi\left(\varphi\left(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_1}, \boldsymbol{x}_{i_1}\right), \ldots, \varphi\left(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_1}, \boldsymbol{x}_{i_r}\right), \right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left. \varphi\left(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_s}, \boldsymbol{x}_{i_1}\right), \ldots, \varphi\left(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_s}, \boldsymbol{x}_{i_r}\right)\right) \end{array} \equiv 0, \tag{7}$$

где
$$\boldsymbol{\xi}_{\alpha} = \xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_{r-1}$$
$$\boldsymbol{x}_{i} = x^1(i), \ldots, x^{s-1}(i)$$

Итак, мы получили тождество (7) , которое можно рассматривать как необычное функциональное уравнение относительно двух неизвестных функций: функции $s \cdot r$ - переменных

$$\begin{array}{l} \Phi\ (u_{11}, \ \ldots, \ u_{1r}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad u_{s1}, \ \ldots, \ u_{sr}) \end{array}$$

и функции $r-1+s-1$ - переменных

$$\varphi\,(\,\boldsymbol{\xi}\,,\,\boldsymbol{x}\,) = \varphi\,(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1};\ x^1, \ldots, x^{s-1}),$$

существенным образом зависящей от всех своих аргументов.

§ 10. Постановка задачи в Теории физических структур

Задача, поставленная мною в общем виде в 1967 году, состоит в следующем:

найти все ранги (r,s) *, при которых существуют решения сакрального уравнения* (2) *, и для каждого такого ранга найти невырожденные репрезентатор*

$$\varphi\big(\xi_1(\alpha), \ldots, \xi_n(\alpha); x^1(i), \ldots, x^m(i)\big)$$

и верификатор

$$\begin{array}{l} \Phi\ (\ \varphi_{11}, \ \ldots, \ \varphi_{1s}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \varphi_{r1}, \ \ldots, \ \varphi_{rs}), \end{array}$$

обращающие соотношение (2) *в тождественный ноль относительно всех* $sn + rm$ *переменных.*

§ 11. Физическая структура ранга $(1,1)$

В этом тривиальном случае сакральное уравнение имеет вид:

$$\Phi_{11}\big(\varphi(\alpha_1, i_1)\big) \equiv 0$$

Оно имеет единственное решение:

$$\Phi^{(1)}_{11}(a) = |a_{11}| \qquad \overset{(1)}{\varphi}_{\alpha i} = a_{\alpha i} \equiv 0$$

§ 12. Физические структуры рангов $(1,2)$ и $(2,1)$

В случае физической структуры ранга $(1,2)$ сакральное уравнение имеет вид:

$$\Phi_{12}\big(\varphi(\alpha_1,i_1),\varphi(\alpha_1,i_2)\big)\equiv 0.$$

Оно имеет единственное решение:

$$\Phi_{12}(u)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u_{11} & u_{12} \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{\alpha i}=u_{\alpha i}=\xi_0(\alpha),$$

где $\xi_0(\alpha)$ – скрытый параметр, зависящий от нечисловой переменной α.

В случае физической структуры ранга $(2,1)$ сакральное уравнение имеет вид:

$$\begin{matrix}\Phi_{21}\big(\varphi(\alpha_1,i_1), \\ \qquad\varphi(\alpha_2,i_1)\big)\end{matrix}\equiv 0.$$

Оно имеет единственное решение:

$$\Phi_{21}(v)=\begin{vmatrix} v_{11} & 1 \\ v_{21} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{\alpha i}=v_{\alpha i}=x^0(i),$$

где $x^0(i)$ – скрытый параметр, зависящий от нечисловой переменной i.

§ 13. Физическая структура ранга $(2,2)$

В случае ранга (2,2) – простейшем нетривиальном случае, задача состояла в том, чтобы найти две функции

$$\varphi(\xi;x)$$

и

$$\begin{matrix}\Phi\ (u_{11}, & u_{12}, \\ \quad u_{21}, & u_{22}),\end{matrix}$$

такие, чтобы при любых $\xi,\ \eta;\ x,\ y$ имело место следующее тождество:

$$\Phi\ \begin{pmatrix}\varphi(\xi,x), & \varphi(\xi,y), \\ \varphi(\eta,x), & \varphi(\eta,y)\end{pmatrix}\equiv 0.$$

Эта задача была впервые решена мною в 1967 году [12], [13].

Оказалось, что с точностью до несущественных переобозначений имеется два решения:

мультипликативное:

$$\overset{(1)}{\Phi}_{22}(a) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{\alpha i} = a_{\alpha i} = \xi_1(\alpha) x^1(i)$$

и **аддитивное:**

$$\overset{(2)}{\Phi}_{22}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & w_{11} & w_{12} \\ -1 & w_{21} & w_{22} \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{\alpha i} = w_{\alpha i} = x^0(i) + \xi_0(\alpha),$$

где $x^0(i)$ и $\xi_0(\alpha)$ – скрытые параметры.

§ 14. Физические структуры рангов $(2,3)$ и $(3,2)$

В случае следующей по сложности физической структуры ранга $(2,3)$ сакральное уравнение имеет вид:

$$\Phi_{23}\big(\begin{matrix} \varphi(\alpha_1,i_1), & \varphi(\alpha_1,i_2), & \varphi(\alpha_1,i_3) \\ \varphi(\alpha_2,i_1), & \varphi(\alpha_2,i_2), & \varphi(\alpha_2,i_3) \end{matrix}\big) \equiv 0.$$

Оно имеет единственное решение:

$$\Phi_{23}(u) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{\alpha i} = u_{\alpha i} = \xi_1(\alpha) x^1(i) + \xi_0(\alpha)$$

И аналогично, в случае физической структуры ранга $(3,2)$ сакральное уравнение имеет вид:

$$\Phi_{21}\big(\begin{matrix} \varphi(\alpha_1,i_1), & \varphi(\alpha_1,i_2) \\ \varphi(\alpha_2,i_1), & \varphi(\alpha_2,i_2) \\ \varphi(\alpha_3,i_1), & \varphi(\alpha_3,i_2) \end{matrix}\big) \equiv 0.$$

Оно имеет единственное решение:

$$\Phi_{32}(v) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & 1 \\ v_{21} & v_{22} & 1 \\ v_{31} & v_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{\alpha i} = v_{\alpha i} = x^0(i) + \xi_1(\alpha) x^1(i),$$

где $x^0(i)$ и $\xi_0(\alpha)$ – скрытые параметры.

§ 15. Theorema egregium Михайличенко [15]

Сакральное уравнение Теории физических структур (7) имеет отличные от нуля решения только в случае следующих рангов:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & (r,s) = & & \\
 & (2,1), & (1,1), & (1,2), & \\
(4,2), & (3,2), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\
 & (4,3), & (3,3), & (3,4), & \\
 & (5,4), & (4,4), & (4,5), & \\
 & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} &
\end{array}
$$

то есть для

(r,r) – диагональных, аддитивных и мультипликативных структур;
$(r+1,r)$ – нижних квазидиагональных структур;

$(r,r+1)$ – верхних квазидиагональных структур;

$(4,2)$ – нижних проективных структур и

$(2,4)$ – верхних проективных структур.

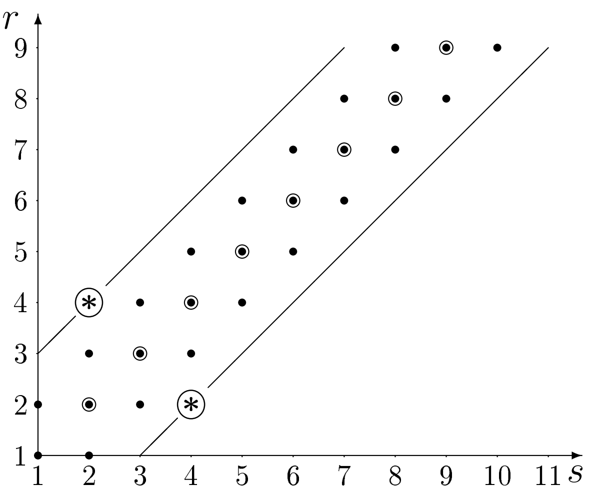


Рис. 5. *Значения рангов (s,r), при которых существуют решения сакрального уравнения (2)*

⊙ – имеется два регулярных решения: мультипликативное и аддитивное;
• – имеется единственное регулярное решение;
⊛ – имеется единственное спорадическое решение.

§ 16. Секстет Михайличенко

I. Сакральное уравнение ранга (r, r)

$$\Phi_{r,r}\begin{pmatrix}\varphi_{\alpha_1 i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_1 i_r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{\alpha_r i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_r i_r}\end{pmatrix} \equiv 0$$

имеет два регулярных решения. Такими решениями являются:

1. Регулярная мультипликативная физическая структура ранга (r, r)

$$\Phi^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_r; i_1\ldots i_r}(a) = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 i_1} & \ldots & a_{\alpha_1 i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha_r i_1} & \ldots & a_{\alpha_r i_r} \end{vmatrix}$$

$$a_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)x^1(i) + \ldots + \xi_{r-1}(\alpha)x^{r-1}(i)$$

2. Регулярная аддитивная физическая структура ранга (r, r)

$$\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_r; i_1\ldots i_r}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & w_{\alpha_1 i_1} & \ldots & w_{\alpha_1 i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & w_{\alpha_r i_1} & \ldots & w_{\alpha_r i_r} \end{vmatrix}$$

$$w_{\alpha i} = x^o(i) + \xi_1(\alpha)x^1(i) + \ldots + \xi_{r-2}(\alpha)x^{r-2}(i) + \xi_o(\alpha)$$

II. Сакральное уравнение ранга $(r, r+1)$

$$\begin{array}{l} \Phi_{r,r+1}(\varphi_{\alpha_1 i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_1 i_r}, \varphi_{\alpha_1 i_{r+1}}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \varphi_{\alpha_r i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_r i_r}, \varphi_{\alpha_r i_{r+1}}) \end{array} \equiv 0$$

имеет одно единственное решение. Таким решением является

3. Регулярная физическая структура ранга $(r, r+1)$

$$\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_r; i_1\ldots i_r i_{r+1}}(u) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ u_{\alpha_1 i_1} & \ldots & u_{\alpha_1 i_r} & u_{\alpha_1 i_{r+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\alpha_r i_1} & \ldots & u_{\alpha_r i_r} & u_{\alpha_r i_{r+1}} \end{vmatrix}$$

$$u_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)x^1(i) + \ldots + \xi_{r-1}(\alpha)x^{r-1}(i) + \xi_o(\alpha)$$

III. Сакральное уравнение ранга $(r+1, r)$

$$\begin{array}{l} \Phi_{r+1,r}(\varphi_{\alpha_1 i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_1 i_r}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \varphi_{\alpha_r i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_r i_r} \\ \qquad \varphi_{\alpha_{r+1} i_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_{r+1} i_r}) \end{array} \equiv 0$$

имеет одно единственное решение. Таким решением является

4. Регулярная физическая структура ранга $(r+1, r)$

$$\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_r\alpha_{r+1}; i_1\ldots i_r}(v) = \begin{vmatrix} v_{\alpha_1 i_1} & \ldots & v_{\alpha_1 i_r} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{\alpha_r i_1} & \ldots & v_{\alpha_r i_r} & 1 \\ v_{\alpha_{r+1} i_1} & \ldots & v_{\alpha_{r+1} i_r} & 1 \end{vmatrix}$$

$$v_{\alpha i} = x^o(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_{r-1} x^{r-1}(i).$$

IV. Сакральное уравнение ранга $(2, 4)$

$$\begin{matrix} \Phi_{2,4}(\varphi_{\alpha i},\ \varphi_{\alpha k},\ \varphi_{\alpha m},\ \varphi_{\alpha n}, \\ \varphi_{\beta i},\ \varphi_{\beta k},\ \varphi_{\beta m},\ \varphi_{\beta n}) \end{matrix} \equiv 0$$

имеет одно единственное решение. Таким решением является

5. Спорадическая физическая структура ранга $(2, 4)$

$$\Phi_{\alpha\beta;ikmn}(p) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha i} & p_{\alpha k} & p_{\alpha m} & p_{\alpha n} \\ p_{\beta i} & p_{\beta k} & p_{\beta m} & p_{\beta n} \\ p_{\alpha i}p_{\beta i} & p_{\alpha k}p_{\beta k} & p_{\alpha m}p_{\beta m} & p_{\alpha n}p_{\beta n} \end{vmatrix}$$

$$p_{\alpha i} = \frac{\xi(\alpha)x(i) + \eta(\alpha)}{x(i) + \zeta(\alpha)}$$

V. Сакральное уравнение ранга $(4, 2)$

$$\begin{matrix} \Phi_{4,2}(\varphi_{\alpha i},\ \varphi_{\alpha k}, \\ \varphi_{\beta i},\ \varphi_{\beta k}, \\ \varphi_{\gamma i},\ \varphi_{\gamma k}, \\ \varphi_{\delta i},\ \varphi_{\delta k}) \end{matrix} \equiv 0$$

имеет одно единственное решение. Таким решением является

6. Спорадическая физическая структура ранга $(4, 2)$

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(q) = \begin{vmatrix} 1 & q_{\alpha i} & q_{\alpha k} & q_{\alpha i}q_{\alpha k} \\ 1 & q_{\beta i} & q_{\beta k} & q_{\beta i}q_{\beta k} \\ 1 & q_{\gamma i} & q_{\gamma k} & q_{\gamma i}q_{\gamma k} \\ 1 & q_{\delta i} & q_{\delta k} & q_{\delta i}q_{\delta k} \end{vmatrix}$$

$$q_{\alpha i} = \frac{\xi(\alpha)x(i) + y(i)}{\xi(\alpha) + z(i)}$$

§ 17. Научный подвиг Михайличенко

Эти примеры показывают, как сильно усложняется решение задачи по мере увеличения ранга искомой физической структуры.

И тем не менее, благодаря титаническим усилиям моего талантливого ученика Геннадия Григорьевича Михайличенко, задача нахождения и доказательство единственности физических структур была им полностью решена.

При этом возникла удивительная ситуация: постановка совершенно новой задачи проста и легко поддаётся строгой формализации: окончательный результат так же очень прост и легко обозрим (См. рис. 5.), но путь от постановки задачи до её окончательного решения чрезвычайно сложен и трудно обозрим. (Нечто подобное имеет место в теории чисел. Так, например, постановка Великой задачи Ферма очень проста – найти все целочисленные решения x, y, z, p уравнения $x^p+y^p = z^p$. Ответ предельно прост – целочисленные решения x, y, z существуют лишь при двух значениях $p = 1, 2$. Что же касается доказательств этой теоремы, то последние из них до сих пор не являются общепризнанным достоянием математики.).

Путь, проделанный Г.Г. Михайличенко, можно уподобить тропе по сильно пересечённой местности через заросли колючих и вьющихся растений. Повидимому, это связано с тем, что основным его инструментом является простейший алгоритм: “разрешим – продифференцируем – переобозначим – подставим”.

Я надеюсь, что в рамках современной математики существуют методы, позволяющие воспроизвести результат Г.Г. Михайличенко более простым, более коротким и изящным путём. Однако этот путь ещё нужно найти. Заслуга Михайличенко состоит в том, что он, как первопроходец, пробил тропу к ещё мало кому известным физическим структурам, лежащим в основании самодостаточных законов Мироздания.

Но хорошо известно, если у какой-либо задачи известен ответ, то найти её решение намного проще, чем без него.

Вполне возможно, что поиск новых, более простых, методов доказательства существования и единственности физических структур произвольного ранга (s, r) может привести к созданию новой области математики – математическому анализу двухиндексных (или вообще говоря, многоиндексных) вещественных и комплексных переменных.

Ещё в самом конце XVII века Иоганн Бернулли (1667 – 1748) писал: “Как показывает опыт, ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знаний, как постановка трудной и в то же время полезной задачи”. Я надеюсь, что это высказывание Иоанна Бернулли остаётся справедливым и в наш прагматический век, когда, как показывает опыт, по-прежнему мало людей, склонных волноваться из-за вопросов – как бы они ни были уместны, которые они задают не сами.

§ 18. Полное решение задачи Г.Г. Михайличенко

Итак, полное доказательство существования и единственности физических структур при специальных значениях ранга (s,r) было впервые блестяще осуществлено моим талантливым учеником Геннадием Григорьевичем Михайличенко (ныне доктор физ.-мат. наук, профессор Горно-Алтайского университета), использовавшим для этой цели разработанный им "функциональный метод".

Вслед за ним другой мой ученик Владимир Хананович Лев (ныне старший научный сотрудник Института ядерной физики СОРАН) получил те же самые результаты, применив иной – "параметрический метод"[14].

Строгое доказательство существования и единственности физических структур при специально выбранном ранге (s,r) явилось темой кандидатской диссертации Г.Г. Михайличенко "Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона"[**?**] и изложено им в отдельно изданной монографии "Математический аппарат теории физических структур"[15].

Значение этой теоремы трудно переоценить. Она составляет сущность всей Теории физических структур. Поэтому сформулируем её ещё один раз.

Теорема Михайличенко:

Сакральное уравнение Теории физических структур

$$\begin{array}{c}\Phi\,\big(\varphi\,(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_1},\boldsymbol{x}_{i_1}),\ldots,\varphi\,(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_1},\boldsymbol{x}_{i_r}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi\,(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_s},\boldsymbol{x}_{i_1}),\ldots,\varphi\,(\boldsymbol{\xi}_{\alpha_s},\boldsymbol{x}_{i_r})\big)\end{array} \equiv 0, \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{\xi}_{\ \alpha}=\xi_1(\alpha),\ldots,\xi_{r-1}(\alpha)$$

$$\boldsymbol{x}_{\ i}=x^1(i),\ldots,x^{s-1}(i)$$

имеют отличные от нуля решения только в случае следующих рангов:

(r,r) — *два семейства решений* $\Phi^{(1)}_{r,r}$ и $\Phi^{(2)}_{r,r}$
$(r,r+1)$ — *одно семейство решений* $\Phi_{r,r+1}$
$(r+1,r)$ — *одно семейство решений* $\Phi_{r,r+1}$, *где* $r=1,2,\ldots$

$(2,4)$ — *одно единственное решение* $\Phi_{2,4}$
$(4,2)$ — *одно единственное решение* $\Phi_{4,2}$ (См. рис. 5)

При остальных (s,r) *решений соответствующего сакрального уравнения* (8) *не существует.*

Всё это похоже на чудо, подобное сотворению Вселенной "из ничего", когда из весьма общего функционального сакрального уравнения (8), связывающего между собой две неизвестные функции φ и Φ, как бы сами собой возникают

- допустимые значения ранга (r,s),
- верификатор Φ и
- репрезентатор φ,

имеющие, как мы увидим в дальнейшем, простой геометрический и физический смысл, и определяющие в конечном итоге вид всех известных (и ещё неизвестных) фундаментальных физических законов.

§ 19. Феномен рождения Мира из ничего

Итак, *феномен рождения Мира из ничего* состоит в том, что сакральное уравнение (2), непосредственно вытекающее из Принципа сакральной симметрии, **самодостаточно**[59], то есть, не делая никаких дополнительных предположений можно прежде всего найти те значения ранга (s, r), при которых это уравнение имеет отличные от нуля решения. Далее, для каждого из возможных рангов можно найти конкретный вид функций Φ и φ и доказать их единственность.

Трудно переоценить полученный Г.Г. Михайличенко результат.

Во-первых, здесь мы имеем дело с теоремой, в которой доказывается *невозможность существования* других физических структур кроме перечисленных.

Большинство математических теорем относится к двум типам: в одних доказывается существование тех или иных свойств у хорошо известных и строго определённых структур, в других – доказывается невозможность существования порой совершенно "очевидных" математических объектов. Как известно, теоремы второго типа относятся к числу наиболее трудных, но зато и наиболее фундаментальных теорем математики.

Вспомним, например, *Великую теорему Ферма*(1630) о невозможности существования целочисленных решений уравнения

$$x^n + y^n = z^n \qquad \text{при} \quad n > 2\,;$$

классические теоремы Гаусса (1801) и Галуа (ок. 1830) о *невозможности построения циркулём и линейкой правильного n-угольника*, если

$$n \neq 2^m p_0 p_1 \dots p_k, \quad p_k = 2^{2^k} + 1 \quad \text{где} \quad m, k = 0, 1, 2, \dots;$$

теорему Линдемана (1882) о *квадратуре круга*, то есть о невозможности построения с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу,

или теоремы Абеля (1826) и Галуа (1830) о *невозможности разрешения* в радикалах алгебраических уравнений пятой и более высоких степеней,

и наконец, теорему Гёделя о *неполноте арифметики* (1931) утверждающую факт существования таких предложений формальной арифметики, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть, пользуясь конечными методами самой арифметики.

Во-вторых, доказательство существования и единственности перечисленных выше физических структур представляет собой весьма содержательную и трудную математическую задачу принципиально нового типа. Действительно, сам результат не может не поражать воображения – исходя из самых общих требований какой-либо заранее неизвестной функциональной зависимости между заранее неизвестными функциями от $m+n$ переменных получен, с точностью до несущественных переобозначений, конкретный вид этой зависимости в виде спе-

[59]как самодостаточен только Бог!

циального типа определителей и функций $m+n$ переменных в виде линейных (в общем случае) и дробно-линейных (в двух специальных случаях) выражений.

Ведь обычно "линейность" вносится в математику "руками" в виде специальных аксиом как *наиболее простая зависимость*, а здесь она возникает сама собой как *единственно возможная зависимость*, вытекающая из чрезвычайно общего требования равноправия элементов, принадлежащих к двум многообразиям $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, вообще говоря, различной природы.

В-третьих, и возможно, что это обстоятельство является самым важным - физические структуры возникли из анализа самых различных фундаментальных физических законов, и потому строго математическое доказательство существования и единственности перечисленных выше физических структур, возникших из самых общих предположений, имеет самое непосредственное отношение к основам мироздания и затрагивает наиболее глубинные слои физической реальности, но не на привычном уровне элементарных частиц, а на непривычном уровне первичных элементарных отношений.

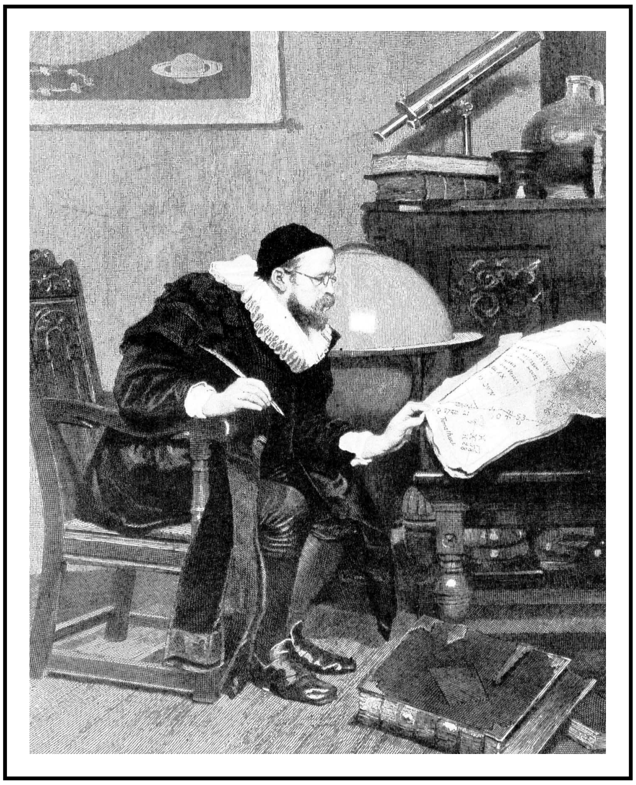
§ 20. Заключение

Исторически физика, как и самые ранние разделы математики, такие как арифметика и геометрия, строилась и продолжает строиться как "модель" эмпирической материальной действительности. Но к настоящему времени, когда в физике накоплен достаточно богатый арсенал всевозможных теоретических конструкций, абстрактных физических понятий и чисто математических структур, возникает возможность совершенно по-новому взглянуть на теоретическую физику и математику как на особый объективно существующий мир – мир иной **высшей реальности**, построенный по единому проекту, в основе которого лежит некоторый универсальный принцип.

Требование сакральной симметрии, которое приводит к существовнию приведённых выше физических структур, играющих роль первичных, "атомарных" отношений, лежащих в основе мироздания, накладывает весьма жёсткие ограничения на формальное строение физических законов, ограничения гораздо более сильные, чем хорошо известное требование сохранения физической размерности[60] в соотношениях, связывающих между собой различные физические величины.

Как показывает мой 50-летний опыт, приведённые выше формальные физические структуры, в силу своей чрезвычайной общности и при этом удивительной эффективности, являются наиболее подходящим аппаратом для построения надёжного фундамента всей теоретической физики.

[60] Кстати говоря, само понятие *физической размерности*, которое характерно именно для физики и практически отсутствует в математике, является следствием существования простейшей физической структуры ранга (2,2).



Квинт Гораций Флакк, *"Эподы"*

Beatus ille qui procul negotiis,
Ut prisca gens mortalium.
Paterna rura bubus exercet suis
Solutus omni faenore,
Neque excitatur classico miles truci
Neque horret iratum mare,
Forumque vitat et superba civium
Potentiorum limina.

Блажен, кто вдалеке от всех житейских зол,
Как род людей первоначальный,
На собственных волах отцовский пашет дол,
Не зная алчности печальной.
Ни море злобное, ни труб воинских звон
Не возбуждают в нём тревоги
Бежит он Форума, не обивает он
Гражда́н значительных пороги.

Перевод *А.А. Фета*

Литература к главе 11

[1] *Н. Бердяев* Самосознание. М.: Мысль, 1990. С. 293.

[2] *Голованов Ярослав.* Этюды о великом. – М.: Раритет, 1997, С. 230 – 252.

[3] *Манин Ю.И.* Математика и физика. – М.: Знание. 1979. С.4.

[4] Физический энциклопедический словарь. - М.: Советская энциклопедия, 1963. Т. III, С. 135; 1965. Т. IV, С. 522; 1962. Т. II, С. 181.

[5] Современный словарь иностранных слов. -М.: Русский язык, 1992. С. 584.

[6] Бурбаки Н. Очерки по истории математики. - М.: Изд-во Иностранная литература, 1963. - С. 251.

[7] *Ионин В.К.* Абстрактные группы как физические структуры // Системология и методологические проблемы информационнологических систем. Вычислительные системы. Новосибирск. Изд-во Института математики СОАН СССР, 1990. Вып. 135. С. 40 – 43.

[8] *Симонов А.А.* Групповые решения функциональных уравнений физической структуры // Математические заметки ЯГУ. Т. 5, Вып. 2. Якутск. Изд-во Якутского университета. 1999. С. 52 – 58

[9] Сороко Э.М. Структурная гармония систем. - Минск.: Наука и техника, 1984. - С. 246.

[10] *Поль Дирак* Принципы квантовой механики. Физматгиз, - М.: 1960, С. 33. The Principles of Quantum Mechanics by P.A.M. Dirac. Oxford, At the Clarendon Press. 1958.

[11] *Друкарев Г.Ф.* Квантовая механика, Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1988. С. 18.

[12] *Кулаков Ю.И.* Математическая формулировка теории физических структур.//Сиб. мат. журн. 1971. Т.12, № 5. - С. 1142-1144.

[13] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. /Дополнение Г.Г.Михайличенко. Новосибирск. Изд-во Новосибирского университета, 1968. 228 с.

[14] *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3). //Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. - Новосибирск.: Институт математики СОАН СССР, 1984. С. 91 - 113.

[15] *Михайличенко Г.Г.*“Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона”. Дисс.канд. ф.м.н. Новосибирск, НГУ, 1973.

Новосибирский государственный университет,

где создавалась Теория физических структур

Глава 12.

Основные понятия Теории физических структур второго поколения (1998 – 2002)

Sans phrases[61]

Если не выработать новых точек зрения, не ставить новых целей, то математика со всеми ее строгими, логическими доказательствами вскоре исчерпает себя и в ней иссякнет запас питающих ее веществ.

— Феликс Клейн

§ 1. Квартет дважды окаймлённых определителей

§ 2. Единая формула для дважды окаймлённых определителей

§ 3. Гипергеометрические заряды ковариантных и контравариантных кортов

§ 4. Род физической структуры

§ 5. Новая классификация физических структур рода $\overset{N}{K}{}^{pq}$

§ 6. Квартет регулярных репрезентаторов. Разложение на множители

§ 7. Четыре возможных состояния левых и правых субэйдосов

§ 8. Представление левых субэйдосов в виде матриц-строк

---

[61]Без лишних слов.

§ 9. Представление правых субэйдосов в виде матриц-столбцов

§ 10. Спорадические левые и правые субэйдосы

§ 11. Секстет репрезентаторов Михайличенко в адекватных обозначениях

§ 12. Схема возникновения квартета регулярных репрезентаторов

§ 13. Единая формула для репрезентаторов. Правило отбора

§ 14. Секстет дважды окаймлённых и спорадических верификаторов в адекватных обозначениях

§ 15. Квартет репрезентативных матриц в адекватных обозначениях

§ 16. Разделение нечисловых переменных

§ 17. Квартет ковариантных (левых) координатных матриц

§ 18. Квартет контравариантных (правых) координатных матриц

§ 19. Левые корты

§ 20. Правые корты

§ 21. Ковариантные объёмы левых кортов

§ 22. Контравариантные объёмы правых кортов

§ 23. Скалярное произведение двух кортов как произведение их объёмов

Основные понятия Теории физических структур второго поколения (1998 – 2002)

Вот уже 25 веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки; это дает им право смотреть в будущее спокойно.

— Никола Бурбаки

§ 1. Квартет дважды окаймлённых верификаторов

Дальнейший принципиально новый шаг на пути к пониманию сущности физических законов состоит в двойном окаймлении четырёх регулярных верификаторов, полученных Г.Г. Михайличенко, то есть в переходе от квартета определителей Михайличенко

$$\Phi^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_r;i_1\ldots i_r}(\varphi)$$

$$\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_r;i_1\ldots i_r i_{r+1}}(\varphi)$$

$$\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_r\alpha_{r+1};i_1\ldots i_r}(\varphi)$$

$$\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_r\alpha_{r+1};i_1\ldots i_r i_{r+1}}(\varphi)$$

к квартету равных им дважды окаймлённых определителей:

1. $$\overset{n}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_n;i_1\ldots i_n}(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_1 i_n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \varphi_{\alpha_n i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_n i_n} & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. $$\overset{n}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_n;i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_1 i_n} & \varphi_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \varphi_{\alpha_n i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_n i_n} & \varphi_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3. $$\overset{n}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n}(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_1 i_n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \varphi_{\alpha_n i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_n i_n} & 0 \\ -1 & \varphi_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_{n+1} i_n} & 0 \end{vmatrix}$$

4. $$\overset{n}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_1 i_n} & \varphi_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \varphi_{\alpha_n i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_n i_n} & \varphi_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & \varphi_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_{n+1} i_n} & \varphi_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{vmatrix}$$

§ 2. Единая формула для квартета дважды окаймлённых верификаторов

$$\boxed{\overset{n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+p};i_1\ldots i_n i_{n+q}}(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & q & \ldots & q & 1 \\ -p & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_1 i_n} & q\varphi_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p & \varphi_{\alpha_n i_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_n i_n} & q\varphi_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & p\varphi_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & p\varphi_{\alpha_{n+1} i_n} & pq\varphi_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{vmatrix}} \qquad (1)$$

§ 3. Гипергеометрические заряды ковариантного и контравариантного кортов

Два целочисленных параметра $p, q = 0, 1$, возникающие в общей формуле (1), являются фундаментальными характеристиками кортов: $p = 0, 1$ – гипергеометрический заряд левого корта;

$q = 0, 1$ – гипергеометрический заряд правого корта;

§ 4. Род физической структуры

Поскольку при заданном ранге (r, r) существуют два решения

$$\Phi^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_r;i_1\ldots i_r}(a)$$

$$\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_r;i_1\ldots i_r}(w),$$

то есть имеет место вырождение, то это означает, что для классификации физических структур недостаточно двух параметров – ранга (s,r).

Вместо ранга для классификации регулярных физических структур введём **род физической структуры,** представляющий собой тройку целых положительных чисел (N,p,q), где

$N = s - p = r - q$ – главное число физической структуры;

p – гипергеометрический заряд левого корта;

q – гипергеометрический заряд правого корта.

Таким образом, введём следующие переобозначения:

$$\boxed{\begin{array}{rr} \overset{1}{K}{}^{01} = \Phi_{\alpha_1;i_1i_2}(u) & \quad \overset{1}{K}{}^{11} = \Phi^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2;i_1i_2}(w) \\ \overset{1}{K}{}^{00} = \Phi^{(1)}_{\alpha_1;i_1}(a) & \quad \overset{1}{K}{}^{10} = \Phi_{\alpha_1\alpha_2;i_1}(v) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rr} \overset{2}{K}{}^{01} = \Phi_{\alpha_1\alpha_2;i_1i_2i_3}(u) & \quad \overset{2}{K}{}^{11} = \Phi^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3;i_1i_2i_3}(w) \\ \overset{2}{K}{}^{00} = \Phi^{(1)}_{\alpha_1\alpha_2;i_1i_2}(a) & \quad \overset{2}{K}{}^{10} = \Phi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3;i_1i_2}(v) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rr} \overset{3}{K}{}^{01} = \Phi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3;i_1i_2i_3i_4}(u) & \quad \overset{3}{K}{}^{11} = \Phi^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4;i_1i_2i_3i_4}(w) \\ \overset{3}{K}{}^{00} = \Phi^{(1)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3;i_1i_2i_3}(a) & \quad \overset{3}{K}{}^{10} = \Phi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4;i_1i_2i_3}(v) \end{array}}$$

. . . .

§ 5. Новая классификация физических структур рода $\overset{N}{K}{}^{pq}$

								$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\overset{2}{K}{}^{00}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Все возможные физические структуры рода $\overset{N}{K}{}^{pq}$

§ 6. Квартет регулярных репрезентаторов. Разложение на множители

Разложение на множители – весьма важная операция. Именно здесь в Теории физических структур из квартета репрезентаторов, полученных Г.Г. Михайличенко, рождаются четыре фундаментальных математических объекта: **ординарный (обычный) вектор, криптовектор, ординарная (обычная) точка** и **криптоточка.**

$$\overset{n}{a}_{\alpha i}= \xi_1(\alpha)x^1(i)+\ldots+\xi_n(\alpha)x^n(i) = \Big(0;\xi_1(\alpha)\ldots\xi_n(\alpha);0\Big)\cdot\begin{pmatrix}0\\ x^1(i)\\ \ldots\\ x^n(i)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overset{n}{u}_{\alpha i}= \xi_1(\alpha)x^1(i)+\ldots+\xi_n(\alpha)x^n(i)+\xi_0(\alpha) = \Big(0;\xi_1(\alpha)\ldots\xi_n(\alpha);\xi_0(\alpha)\Big)\cdot\begin{pmatrix}0\\ x^1(i)\\ \ldots\\ x^n(i)\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\overset{n}{v}_{\alpha i}= x^0(i)+\xi(\alpha)_1x^1(i)+\ldots+\xi(\alpha)_nx^n(i) = \Big(1;\xi_1(\alpha)\ldots\xi_n(\alpha);0\Big)\cdot\begin{pmatrix}x^0(i)\\ x^1(i)\\ \ldots\\ x^n(i)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overset{n}{w}_{\alpha i}=x^0(i)+\xi_1(\alpha)x^1(i)+\ldots+\xi_n(\alpha)x^n(i)+\xi_0(\alpha)=\Big(1;\xi_1(\alpha)\ldots\xi_n(\alpha);\xi_0(\alpha)\Big)\cdot\begin{pmatrix}x^0(i)\\ x^1(i)\\ \ldots\\ x^n(i)\\ 1\end{pmatrix}$$

§ 7. Четыре возможных состояния левых и правых субэйдосов

Левый субэйдос $\langle\alpha|$ может находиться в одном из следующих четырёх состояний:

$$p[\mu]=\begin{cases}0[0]\longrightarrow\langle\overleftarrow{\alpha}\,| \text{ — ординарный (обычный) левый вектор}\\ 0[1]\longrightarrow\langle\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}| \text{ — левый криптовектор}\\ 1[0]\longrightarrow\langle\,\alpha\,| \text{ — ординарная (обычная) левая точка}\\ 1[1]\longrightarrow\langle\boldsymbol{\alpha}| \text{ — левая криптоточка}\end{cases}$$

где $\quad p = 0,1$ — гипергеометрический заряд и
$[\mu] = 0,1$ — криптометрический заряд левого субэйдоса.

Правый субэйдос $|i\rangle$ может находиться в одном из следующих четырёх состояний:

$$q[\nu] = \begin{cases} 0[0] \longrightarrow |\vec{i}\,\rangle \text{ — ординарный (обычный) правый вектор} \\ 0[1] \longrightarrow |\vec{\boldsymbol{i}}\,\rangle \text{ — правый криптовектор} \\ 1[0] \longrightarrow |\,i\,\rangle \text{ — ординарная (обычная) правая точка} \\ 1[1] \longrightarrow |\,\boldsymbol{i}\,\rangle \text{ — правая криптоточка} \end{cases}$$

где $\quad q = 0,1$ — гипергеометрический заряд и
$[\nu] = 0,1$ — криптометрический заряд правого субэйдоса.

Таким образом, введение гипергеометрических эарядов $p, q = 0,1$ позволяет разбить оба множества левых и правых субэйдосов на множество “векторов” $(p, q = 0)$ и множество “точек” $p, q = 1$.

С другой стороны, введение криптометрических зарядов $[\mu], [\nu] = 0,1$ позволяет разбить эти множества на множество “обычных” векторов и точек $([\mu], [\nu] = 0)$ и множество “криптовекторов“ и “криптоточек“, обладающих скрытыми параметрами (дополнительной степенью свободы) $([\mu], [\nu] = 1)$.

§ 8. Представление левых субэйдосов в виде матриц-строк

Левые субэйдосы допускают следующие четыре представления в виде *матриц-строк*:

$$\langle \overleftarrow{\alpha}\,| \longrightarrow \Big(0\,; \xi_1(\overleftarrow{\alpha}) \ldots \xi_n(\overleftarrow{\alpha});\; 0\Big)$$ – матрица-строка n-мерного ординарного левого вектора

$$\langle \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}| \longrightarrow \Big(0\,; \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}) \ldots \xi_n(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}); \xi_0(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})\Big)$$ – матрица-строка n-мерного левого криптовектора

$$\langle\,\alpha\,| \longrightarrow \Big(1\,; \xi_1(\alpha) \ldots \xi_n(\alpha); 0\Big)$$ – матрица-строка n-мерной ординарной левой точки

$$\langle \boldsymbol{\alpha}| \longrightarrow \Big(1\,; \xi_1(\boldsymbol{\alpha}) \ldots \xi_n(\boldsymbol{\alpha}); \xi_0(\boldsymbol{\alpha})\Big)$$ – матрица-строка n-мерной левой криптоточки

где $\xi_0(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})$ и $\xi_0(\boldsymbol{\alpha})$ – *скрытые параметры* левого криптовектора и левой криптоточки.

В общем случае имеем:

$$\langle \boldsymbol{\alpha} | \longrightarrow \Big(p\,; \xi_1(\boldsymbol{\alpha}) \ldots \xi_n(\boldsymbol{\alpha}); \mu\xi_0(\boldsymbol{\alpha}) \Big)$$ – матрицы-строки n-мерных ковариантных субэйдосов

§ 9. Представление правых субэйдосов в виде матриц-столбцов

Правые субэйдосы допускают следующие четыре представления в виде *матриц-столбцов*:

$$|\,\vec{i}\,\rangle \;\longrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ x^1(\vec{i}\,) \\ \cdots \\ x^n(\vec{i}\,) \\ 0 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец n-мерного ординарного правого вектора

$$|\,\vec{\boldsymbol{i}}\,\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} x^0(\vec{\boldsymbol{i}}) \\ x^1(\vec{\boldsymbol{i}}) \\ \cdots \\ x^n(\vec{\boldsymbol{i}}) \\ 0 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец n-мерного правого криптовектора

$$|\,i\,\rangle \;\longrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ x^1(i) \\ \cdots \\ x^n(i) \\ 1 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец n-мерной ординарной правой точки

$$|\,\boldsymbol{i}\,\rangle \;\longrightarrow\; \begin{pmatrix} x^0(\boldsymbol{i}) \\ x^1(\boldsymbol{i}) \\ \cdots \\ x^n(\boldsymbol{i}) \\ 1 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец n-мерной правpй криптоточки

где $x^0(\vec{\boldsymbol{i}})$ и $x^0(\boldsymbol{i})$ – *скрытые параметры* правого криптовектора и правой криптоточки.

В общем случае имеем:

$$|\,\boldsymbol{i}\,\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} \nu x^0(\boldsymbol{i}) \\ x^1(\boldsymbol{i}) \\ \cdots \\ x^n(\boldsymbol{i}) \\ q \end{pmatrix}$$ – матрицы-столбцы n-мерных контравариантных субэйдосов

§ 10. Спорадические левые и правые субэйдосы

В одном особом случае прообразами реального физического объекта $\tilde{a}$ являются (спорадические [62]) левые и правые субэйдосы:

$\langle\,\hat{a}\,|$ – левый спорадический субэйдос:

$|\,\hat{a}\,\rangle$ – правый спорадический субэйдос.

§ 11. Секстет репрезентаторов Михайличенко в адекватных обозначениях

Из Теории физических структур следует, что *репрезентаторы* $\langle\alpha\,|\,i\rangle$ (скалярные произведения двух субэйдосов) – числовые функции двух *нечисловых переменных*, характеризующие отношения между двумя левыми и правыми субэйдосами, могут быть только следующих шести видов:

$$\langle\overleftarrow{\alpha}|\overrightarrow{i}\rangle = a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \xi_1(\overleftarrow{\alpha})x^1(\overrightarrow{i}) + \ldots + \xi_n(\overleftarrow{\alpha})x^n(\overrightarrow{i}),$$

$$\langle\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\,|\,i\,\rangle = u_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\,i} = \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})x^1(i) + \ldots + \xi_n(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})x^n(i) + \xi_0(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}),$$

$$\langle\alpha|\overrightarrow{\boldsymbol{i}}\rangle = v_{\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{i}}} = x^0(\overrightarrow{\boldsymbol{i}}) + \xi_1(\alpha)x^1(\overrightarrow{\boldsymbol{i}}) + \ldots + \xi_n(\alpha)x^n(\overrightarrow{\boldsymbol{i}}),$$

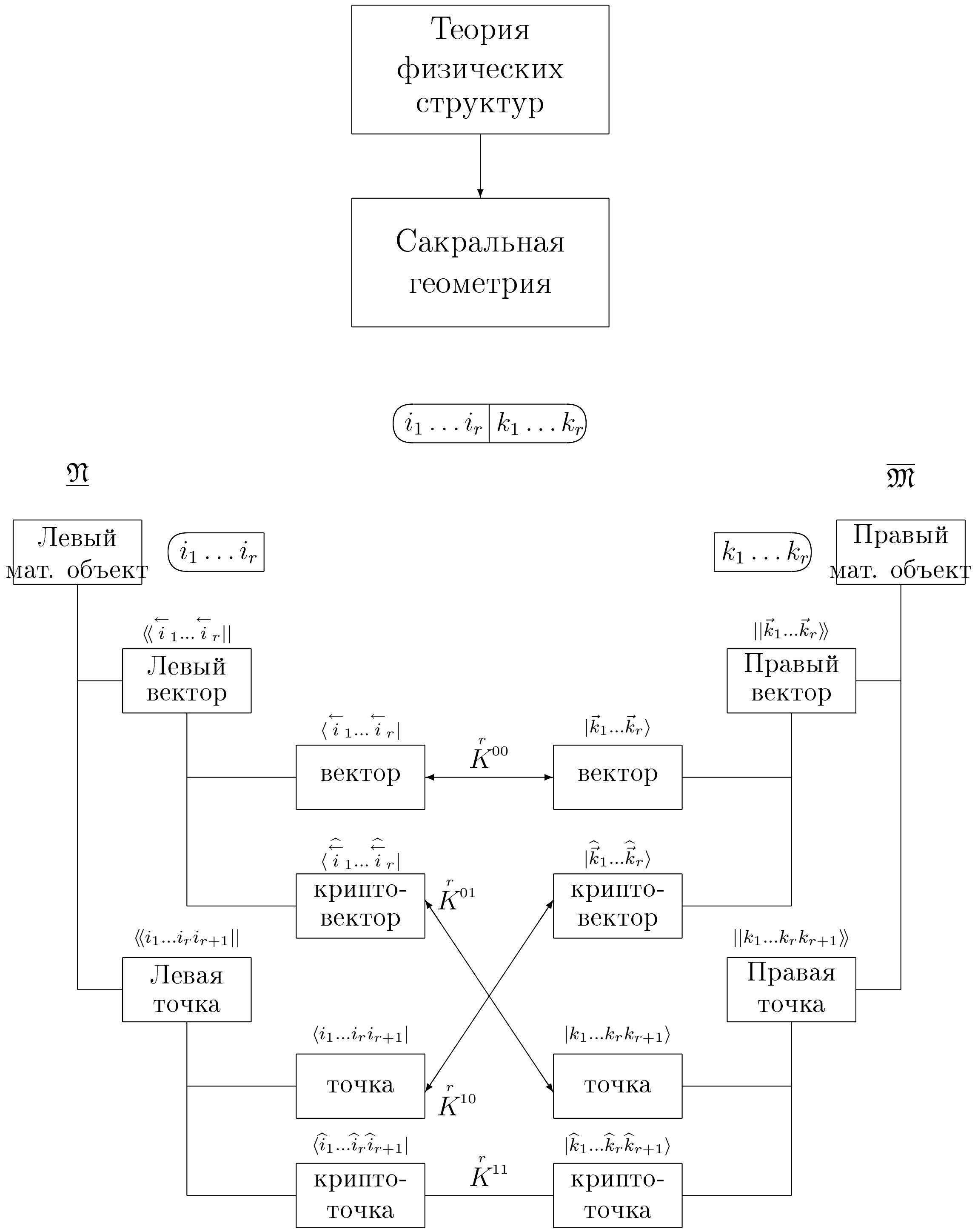
$$\langle\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{i}\rangle = w_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{i}} = x^0(\boldsymbol{i}) + \xi_1(\boldsymbol{\alpha})x^1(\boldsymbol{i}) + \ldots + \xi_n(\boldsymbol{\alpha})x^n(\boldsymbol{i}) + \xi_0(\boldsymbol{\alpha}),$$

$$\langle\,\hat{\alpha}\,|\,\overrightarrow{i}\,\rangle = p_{\hat{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \frac{\xi(\hat{\alpha})x(\overrightarrow{i}) + \eta(\hat{\alpha})}{x(\overrightarrow{i}) + \zeta(\hat{\alpha})}$$

$$\langle\,\overleftarrow{\alpha}\,|\,\hat{i}\,\rangle = q_{\overleftarrow{\alpha}\,\hat{i}} = \frac{\xi(\overleftarrow{\alpha})x(\hat{i}) + y(\hat{i})}{\xi(\overleftarrow{\alpha}) + z(\hat{i})}$$

[62] *спорадический* [от греч. sporadikos] – единичный, случайный

§ 12. Схема возникновения квартета регулярных репрезентаторов



§ 13. Единая формула для репрезентаторов. Правило отбора

Скалярное произведение двух регулярных субэйдосов $\langle\,\alpha\,|$ и $|\,i\,\rangle$ может быть записано в виде единой формулы:

$$\overset{n}{\omega}_{\alpha i}= p\,\nu\,x^0(i)+\xi_1(\alpha)x^1(i)+\ldots+\xi_n(\alpha)x^n(i)+\mu\,q\,\xi_0(\alpha).$$

В принципе, можно построить 16 видов скалярных произведений, но поскольку имеется всего 4 вида регулярных решений сакрального уравнения (Глава 11, стр. 275, формула (8)), то имеет место следующее правило отбора:

$$\mu=q;\qquad \nu=p$$

и единая формула для квартета регулярных репрезентаторов приобретает следующий вид:

$$\overset{n}{\omega}_{\alpha i}= p\,x^0(i)+\xi_1(\alpha)x^1(i)+\ldots+\xi_n(\alpha)x^n(i)+q\,\xi_0(\alpha).$$

§ 14. Секстет дважды окаймлённых и спорадических верификаторов в адекватных обозначениях

Квартет регулярных бесконечных семейств дважды окаймлённых верификаторов:

$$\overset{N}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}_1\ldots\overleftarrow{\alpha}_N;\,\overrightarrow{i}_1\ldots\overrightarrow{i}_N}(\varphi)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & \varphi_{\overleftarrow{\alpha}_1\overrightarrow{i}_1} & \ldots & \varphi_{\overleftarrow{\alpha}_1\overrightarrow{i}_N} & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \varphi_{\overleftarrow{\alpha}_N\overrightarrow{i}_1} & \ldots & \varphi_{\overleftarrow{\alpha}_N\overrightarrow{i}_N} & 0\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{vmatrix};$$

$$\overset{N}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\ldots\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_N;\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & \varphi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1 i_1} & \ldots & \varphi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1 i_N} & \varphi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1 i_{N+1}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \varphi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_N i_1} & \ldots & \varphi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_N i_N} & \varphi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_N i_{N+1}}\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{vmatrix};$$

$$\overset{N}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}}_1..\overrightarrow{\boldsymbol{i}}_N}(\varphi)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -1 & \varphi_{\alpha_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}_N} & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -1 & \varphi_{\alpha_N\overrightarrow{\boldsymbol{i}}_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_N\overrightarrow{\boldsymbol{i}}_N} & 0\\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1}\overrightarrow{\boldsymbol{i}}_1} & \ldots & \varphi_{\alpha_{N+1}\overrightarrow{\boldsymbol{i}}_N} & 0\end{vmatrix};$$

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{\alpha}_1\ldots\boldsymbol{\alpha}_N\boldsymbol{\alpha}_{N+1};\,\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_N\boldsymbol{i}_{N+1}}(\varphi)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ -1 & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{i}_1} & \ldots & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{i}_N} & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{i}_{N+1}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -1 & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_N\boldsymbol{i}_1} & \ldots & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_N\boldsymbol{i}_N} & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_N\boldsymbol{i}_{N+1}}\\ -1 & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_{N+1}\boldsymbol{i}_1} & \ldots & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_{N+1}\boldsymbol{i}_N} & \varphi_{\boldsymbol{\alpha}_{N+1}\boldsymbol{i}_{N+1}} \end{vmatrix};$$

и дублет спорадических верификаторов Михайличенко:

$$M_{\hat\alpha\,\hat\beta;\,\vec i\,\vec k\,\vec m\,\vec n}(\varphi)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \varphi_{\hat\alpha\vec i} & \varphi_{\hat\alpha\vec k} & \varphi_{\hat\alpha\vec m} & \varphi_{\hat\alpha\vec n}\\ \varphi_{\hat\beta\vec i} & \varphi_{\hat\beta\vec k} & \varphi_{\hat\beta\vec m} & \varphi_{\hat\beta\vec n}\\ \varphi_{\hat\alpha\vec i}\varphi_{\hat\beta\vec i} & \varphi_{\hat\alpha\vec k}\varphi_{\hat\beta\vec k} & \varphi_{\hat\alpha\vec m}\varphi_{\hat\beta\vec m} & \varphi_{\hat\alpha\vec n}\varphi_{\hat\beta\vec n} \end{vmatrix}$$

$$M_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma}\,\overleftarrow{\delta};\,\hat i\,\hat k}(\varphi)=\begin{vmatrix} 1 & \varphi_{\overleftarrow{\alpha}\hat i} & \varphi_{\overleftarrow{\alpha}\hat k} & \varphi_{\overleftarrow{\alpha}\hat i}\varphi_{\overleftarrow{\alpha}\hat k}\\ 1 & \varphi_{\overleftarrow{\beta}\hat i} & \varphi_{\overleftarrow{\beta}\hat k} & \varphi_{\overleftarrow{\beta}\hat i}\varphi_{\overleftarrow{\beta}\hat k}\\ 1 & \varphi_{\overleftarrow{\gamma}\hat i} & \varphi_{\overleftarrow{\gamma}\hat k} & \varphi_{\overleftarrow{\gamma}\hat i}\varphi_{\overleftarrow{\gamma}\hat k}\\ 1 & \varphi_{\overleftarrow{\delta}\hat i} & \varphi_{\overleftarrow{\delta}\hat k} & \varphi_{\overleftarrow{\delta}\hat i}\varphi_{\overleftarrow{\delta}\hat k} \end{vmatrix}$$

§ 15. Квартет репрезентативных матриц в адекватных обозначениях

Для того, чтобы выявить глубинную сущность полученных результатов, необходимо от дважды окаймлённых **определителей** перейти к соответствующим "репрезентативным" **матрицам**:

$$\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}_1\ldots\overleftarrow{\alpha}_n;\,\vec i_1\ldots\vec i_n}(\overset{n}{a})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{\alpha}_1\vec i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{\alpha}_1\vec i_n} & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{\alpha}_n\vec i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{\alpha}_n\vec i_n} & 0\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\ldots\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n;\,i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{u})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & \overset{n}{u}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{u}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1 i_n} & \overset{n}{u}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1 i_{n+1}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \overset{n}{u}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n i_1} & \ldots & \overset{n}{u}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n i_n} & \overset{n}{u}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n i_{n+1}}\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};\,\vec{\boldsymbol{i}}_1\ldots\vec{\boldsymbol{i}}_n}(\overset{n}{v})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -1 & \overset{n}{v}_{\alpha_1\vec{\boldsymbol{i}}_1} & \ldots & \overset{n}{v}_{\alpha_1\vec{\boldsymbol{i}}_n} & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -1 & \overset{n}{v}_{\alpha_n\vec{\boldsymbol{i}}_1} & \ldots & \overset{n}{v}_{\alpha_n\vec{\boldsymbol{i}}_n} & 0\\ -1 & \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1}\vec{\boldsymbol{i}}_1} & \ldots & \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1}\vec{\boldsymbol{i}}_n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{01}_{\boldsymbol{\alpha}_1\ldots\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_{n+1};\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_n\boldsymbol{i}_{n+1}}(\overset{n}{w}) = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{i}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{i}_n} & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{i}_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{i}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{i}_n} & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{i}_{n+1}} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\boldsymbol{i}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\boldsymbol{i}_n} & \overset{n}{w}_{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\boldsymbol{i}_{n+1}} \end{array}\right)$$

$$\boxed{\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+p};i_1\ldots i_n i_{n+q}}(\overset{n}{\omega}) = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & q & \ldots & q & 1 \\ -p & \overset{n}{\omega}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{\omega}_{\alpha_1 i_n} & q\,\overset{n}{\omega}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -p & \overset{n}{\omega}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{\omega}_{\alpha_n i_n} & q\,\overset{n}{\omega}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & p\,\overset{n}{\omega}_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & p\,\overset{n}{\omega}_{\alpha_{n+1} i_n} & pq\,\overset{n}{\omega}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{array}\right)}$$

§ 16. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}_1\ldots\overleftarrow{\alpha}_n;\vec{i}_1\ldots\vec{i}_n}(\overset{n}{a}) = \overset{0[0]}{\mathbb{X}}(\overleftarrow{\alpha}_1\ldots\overleftarrow{\alpha}_n)_{1\ldots n}\cdot\overset{0[0]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\vec{i}_1\ldots\vec{i}_n)$$

$$\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\ldots\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n;i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{u}) = \overset{0[1]}{\mathbb{X}}(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\ldots\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n)_{1\ldots n}\cdot\overset{1[0]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(i_1\ldots i_n i_{n+1})$$

$$\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};\vec{\boldsymbol{i}}_1\ldots\vec{\boldsymbol{i}}_n}(\overset{n}{v}) = \overset{1[0]}{\mathbb{X}}(\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1})_{1\ldots n}\cdot\overset{0[1]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\vec{\boldsymbol{i}}_1\ldots\vec{\boldsymbol{i}}_n)$$

$$\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{11}_{\boldsymbol{\alpha}_1\ldots\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_{n+1};\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_n\boldsymbol{i}_{n+1}}(\overset{n}{w}) = \overset{1[1]}{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\alpha}_1\ldots\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_{n+1})_{1\ldots n}\cdot\overset{1[1]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_n\boldsymbol{i}_{n+1})$$

$$\boxed{\overset{n}{\mathbb{K}}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{\omega}) = \overset{p[q]}{\mathbb{X}}(\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1})_{1\ldots n}\cdot\overset{q[p]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(i_1\ldots i_n i_{n+1})}$$

§ 17. Квартет ковариантных (левых) координатных матриц

$$\overset{0[0]}{\mathbb{X}}(\overleftarrow{\alpha}_1\ldots\overleftarrow{\alpha}_n)_{1\ldots n} = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{\alpha}_1) & \ldots & \xi_n(\overleftarrow{\alpha}_1) & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{\alpha}_n) & \ldots & \xi_n(\overleftarrow{\alpha}_n) & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{0[1]}{\mathbb{X}}(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1 \ldots \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n)_{1\ldots n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1) & \ldots & \xi_n(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1) & \xi_0(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n) & \ldots & \xi_n(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n) & \xi_0(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n) \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{1[0]}{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\alpha}_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1})_{1\ldots n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \xi_1(\alpha_1) & \ldots & \xi_n(\alpha_1) & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \xi_1(\alpha_n) & \ldots & \xi_n(\alpha_n) & 0 \\ -1 & \xi_1(\alpha_{n+1}) & \ldots & \xi_n(\alpha_{n+1}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{1[1]}{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\alpha}_1 \ldots \boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{\alpha}_{n+1})_{1\ldots n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \xi_1(\boldsymbol{\alpha}_1) & \ldots & \xi_n(\boldsymbol{\alpha}_1) & \xi_0(\boldsymbol{\alpha}_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \xi_1(\boldsymbol{\alpha}_n) & \ldots & \xi_n(\boldsymbol{\alpha}_n) & \xi_0(\boldsymbol{\alpha}_n) \\ -1 & \xi_1(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) & \ldots & \xi_n(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) & \xi_0(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overset{p[\lambda]}{\mathbb{X}}(\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+p})_{1\ldots n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p & \xi_1(\alpha_1) & \ldots & \xi_n(\alpha_1) & \lambda\xi_0(\alpha_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -p & \xi_1(\alpha_n) & \ldots & \xi_n(\alpha_n) & \lambda\xi_0(\alpha_n) \\ -1 & p\xi_1(\alpha_{n+1}) & \ldots & p\xi_n(\alpha_{n+1}) & p\lambda\xi_0(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix}}$$

$p = 0, 1; \quad \lambda = 0, 1$

§ 18. Квартет контравариантных (правых) координатных матриц

$$\overset{0[0]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\vec{i}_1 \ldots \vec{i}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(\vec{i}_1) & \ldots & x^1(\vec{i}_n) & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(\vec{i}_1) & \ldots & x^n(\vec{i}_n) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{0[1]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\vec{\boldsymbol{i}}_1 \ldots \vec{\boldsymbol{i}}_n) = \begin{pmatrix} 1 & -x^0(\vec{\boldsymbol{i}}_1) & \ldots & -x^0(\vec{\boldsymbol{i}}_n) & 0 \\ 0 & x^1(\vec{\boldsymbol{i}}_1) & \ldots & x^1(\vec{\boldsymbol{i}}_n) & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(\vec{\boldsymbol{i}}_1) & \ldots & x^n(\vec{\boldsymbol{i}}_n) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{1[0]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(i_1\ldots i_n i_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{1[1]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\boldsymbol{i}_1\ldots\ \boldsymbol{i}_n\ \boldsymbol{i}_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & -x^0(\boldsymbol{i}_1) & \ldots & -x^0(\boldsymbol{i}_n) & -x^0(\boldsymbol{i}_{n+1}) \\ 0 & x^1(\boldsymbol{i}_1) & \ldots & x^1(\boldsymbol{i}_n) & x^1(\boldsymbol{i}_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(\boldsymbol{i}_1) & \ldots & x^n(\boldsymbol{i}_n) & x^n(\boldsymbol{i}_{n+1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overset{q[\mu]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(i_1\ldots i_n i_{n+q}) = \begin{pmatrix} 1 & -\mu x^0(i_1) & \ldots & -\mu x^0(i_n) & -\mu q x^0(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & q x^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & q x^n(i_{n+1}) \\ 0 & q & \ldots & q & 1 \end{pmatrix}}$$

§ 19. Левые корты

Введём следующие обозначения:
$p = 0, 1$ — гипергеометрический заряд левого корта,
$[\lambda] = 0, 1$ — криптогеометрический заряд левого корта,

$$p[\lambda] = \begin{cases} 0[0] & \text{— левый векторный корт} \\ 0[1] & \text{— левый криптовекторный корт (левый векторный корт со скрытыми параметрами)} \\ 1[0] & \text{— левый точечный корт} \\ 1[1] & \text{— левый криптоточечный корт (левый точечный корт со скрытыми параметрами)} \end{cases}$$

$\overset{0[0]}{\mathbb{X}}(\overleftarrow{\alpha}_1\ldots\overleftarrow{\alpha}_n)_{1\ldots n} = \langle\!\langle \overleftarrow{\alpha}_1\ldots\overleftarrow{\alpha}_n \| $ – координатная матрица левого n-векторного корта;

$\overset{0[1]}{\mathbb{X}}(\ \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\ldots\ \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n)_{1\ldots n} = \langle\!\langle\ \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\ldots\ \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n \|$ — координатная матрица левого n-криптовекторного корта;

$\overset{1[0]}{\mathbb{X}} (\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1})_{1\ldots n} = \langle\!\langle \alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1} \|$ — координатная матрица левого $n+1$ -точечного корта;

$\overset{1[1]}{\mathbb{X}} (\boldsymbol{\alpha}_1 \ldots \boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{\alpha}_{n+1})_{1\ldots n} = \langle\!\langle \boldsymbol{\alpha}_1 \ldots \boldsymbol{\alpha}_n \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \|$ — координатная матрица левого $n+1$ -криптоточечного корта.

§ 20. Правые корты

$q = 0, 1$ – гипергеометрический заряд правого корта,
$[\mu] = 0, 1$ – криптогеометрический заряд правого корта,

$$q[\mu] = \begin{cases} 0[0] \text{ — правый векторный корт} \\ 0[1] \text{ — правый криптовекторный корт (правый векторный корт со скрытыми параметрами)} \\ 1[0] \text{ — правый точечный корт} \\ 1[1] \text{ — правый криптоточечный корт (правый точечный корт со скрытыми параметрами)} \end{cases}$$

$\overset{0[0]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\vec{i}_1 \ldots \vec{i}_n) = \| \vec{i}_1 \ldots \vec{i}_n \rangle\!\rangle$ — координатная матрица правого n -векторного корта;

$\overset{0[1]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\vec{\boldsymbol{i}}_1 \ldots \vec{\boldsymbol{i}}_n) = \| \vec{\boldsymbol{i}}_1 \ldots \vec{\boldsymbol{i}}_n \rangle\!\rangle$ — координатная матрица правого n -криптовекторного корта;

$\overset{1[0]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(i_1 \ldots i_n i_{n+1}) = \| i_1 \ldots i_n i_{n+1} \rangle\!\rangle$ — координатная матрица правого $n+1$ -точечного корта;

$\overset{1[1]}{\mathbb{X}}{}^{1\ldots n}(\boldsymbol{i}_1 \ldots \boldsymbol{i}_n \boldsymbol{i}_{n+1}) = \| \boldsymbol{i}_1 \ldots \boldsymbol{i}_n \boldsymbol{i}_{n+1} \rangle\!\rangle$ – координатная матрица правого $n+1$ -криптоточечного корта.

§ 21. Ковариантные объёмы левых кортов

Ковариантный объём левого n -векторного корта
(Объём параллелотопа, построенного на левых n векторах)

$$V(\overleftarrow{\alpha}_1, \ldots, \overleftarrow{\alpha}_n)_{1\ldots n} = \overset{0[0]}{X} (\overleftarrow{\alpha}_1, \ldots, \overleftarrow{\alpha}_n)_{1\ldots n} = \begin{vmatrix} \xi_1(\overleftarrow{\alpha}_1) & \ldots & \xi_n(\overleftarrow{\alpha}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1(\overleftarrow{\alpha}_n) & \ldots & \xi_n(\overleftarrow{\alpha}_n) \end{vmatrix}$$

Ковариантный объём левого n-криптовекторного корта

$$V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ldots,\ \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n)_{1\ldots n} \overset{0[1]}{=X} (\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ldots,\ \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n)_{1\ldots n} = \begin{vmatrix} \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1) & \ldots & \xi_n(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n) & \ldots & \xi_n(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n) \end{vmatrix}$$

$$\boxed{V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ldots,\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n)_{1\ldots n} = V(\overleftarrow{\alpha}_1,\ldots,\overleftarrow{\alpha}_n)_{1\ldots n}}$$

Ковариантный объём левого $n+1$-точечного корта
(Объём симплекса, построенного на $n+1$ левых вершинах)

$$W(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\alpha_{n+1})_{1\ldots n} \overset{1[0]}{=X} (\alpha_1,\ldots,\alpha_n\alpha_{n+1})_{1\ldots n} = \begin{vmatrix} \xi_1(\alpha_1) & \ldots & \xi_n(\alpha_1) & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \xi_1(\alpha_n) & \ldots & \xi_n(\alpha_n) & 1 \\ \xi_1(\alpha_{n+1}) & \ldots & \xi_n(\alpha_{n+1}) & 1 \end{vmatrix}$$

Ковариантный объём левого $n+1$-криптоточечного корта

$$W(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1})_{1\ldots n} \overset{1[1]}{=X} (\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1})_{1\ldots n} = \begin{vmatrix} \xi_1(\boldsymbol{\alpha}_1) & \ldots & \xi_n(\boldsymbol{\alpha}_1) & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \xi_1(\boldsymbol{\alpha}_n) & \ldots & \xi_n(\boldsymbol{\alpha}_n) & 1 \\ \xi_1(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) & \ldots & \xi_n(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{W(\boldsymbol{\alpha_1},\ldots\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_{n+1}})_{1\ldots n} = W(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\alpha_{n+1})_{1\ldots n}}$$

§ 22. Контравариантные объёмы правых кортов

Контравариантный объём правого n-векторного корта
(Объём параллелотопа, построенного на n правых векторах)

$$V^{1\ldots n}(\vec{i}_1,\ldots,\vec{i}_n) \overset{0[0]}{=X}{}^{1\ldots n}(\vec{i}_1,\ldots,\vec{i}_n) = \begin{vmatrix} x^1(i_1) & \ldots & x^n(i_1) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x^1(i_n) & \ldots & x^n(i_n) \end{vmatrix}$$

Контравариантный объём правого n-криптовекторного корта

$$V^{1\ldots n}(\vec{\boldsymbol{i}}_1,\ldots,\ \vec{\boldsymbol{i}}_n) \overset{0[1]}{=X}{}^{1\ldots n}(\vec{\boldsymbol{i}}_1,\ldots,\ \vec{\boldsymbol{i}}_n) = \begin{vmatrix} x^1(i_1) & \ldots & x^n(i_1) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x^1(i_n) & \ldots & x^n(i_n) \end{vmatrix}$$

$$\boxed{V^{1\dots n}(\vec{\boldsymbol{i}}_1,\dots,\vec{\boldsymbol{i}}_n) = V^{1\dots n}(\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n)}$$

Контравариантный объём правого $n+1$ -точечного корта
(Объём симплекса, построенного на $n+1$ правых вершинах)

$$W^{1\dots n}(i_1,\dots,i_n i_{n+1}) = \overset{1[0]}{X}{}^{1\dots n}(i_1,\dots,i_n i_{n+1}) = \begin{vmatrix} x^1(i_1)) & \dots & x^n(i_1) & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x^1(i_n)) & \dots & x^n(i_n) & 1 \\ x^1(i_{n+1})) & \dots & x^n(i_{n+1}) & 1 \end{vmatrix}$$

Контравариантный объём правого $n+1$ -криптоточечного корта

$$W^{1\dots n}(\boldsymbol{i}_1,\dots \boldsymbol{i}_n, \boldsymbol{i}_{n+1}) = \overset{1[1]}{X}{}^{1\dots n}(\boldsymbol{i}_1,\dots \boldsymbol{i}_n, \boldsymbol{i}_{n+1}) = \begin{vmatrix} x^1(\boldsymbol{i}_1)) & \dots & x^n(\boldsymbol{i}_1) & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x^1(\boldsymbol{i}_n)) & \dots & x^n(\boldsymbol{i}_n) & 1 \\ x^1(\boldsymbol{i}_{n+1})) & \dots & x^n(\boldsymbol{i}_{n+1}) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{W^{1\dots n}(\boldsymbol{i}_1,\dots \boldsymbol{i}_n, \boldsymbol{i}_{n+1}) = W^{1\dots n}(i_1,\dots,i_n,i_{n+1})}$$

§ 23. Скалярное произведение двух кортов как произведение их объёмов

$$\overset{n}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}_1\dots\overleftarrow{\alpha}_n;\,\vec{i}_1\dots\vec{i}_n}(\overset{n}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha}_1\dots\overleftarrow{\alpha}_n)_{1\dots n}\cdot V^{1\dots n}(\vec{i}_1\dots\vec{i}_n)$$

$$\overset{n}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\dots\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n;i_1\dots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{u}) = V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\dots\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_n)_{1\dots n}\cdot W^{1\dots n}(i_1\dots i_n i_{n+1})$$

$$\overset{n}{K}{}^{10}_{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1};\vec{\boldsymbol{i}}_1\dots\vec{\boldsymbol{i}}_n}(\overset{n}{v}) = W(\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1})_{1\dots n}\cdot V^{1\dots n}(\vec{\boldsymbol{i}}_1\dots\vec{\boldsymbol{i}}_n)$$

$$\overset{n}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{\alpha}_1\dots\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_{n+1};\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_n\boldsymbol{i}_{n+1}}(\overset{n}{w}) = W(\boldsymbol{\alpha}_1\dots\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_{n+1})_{1\dots n}\cdot W^{1\dots n}(\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_n\boldsymbol{i}_{n+1})$$

При этом следует обратить внимание, что объёмы *векторных и криптовекторных* кортов выражаются через ко- и контравариантные координаты векторов с помощью неокаймлённых определителей:

$$V(\overleftarrow{\alpha}_1,\dots,\overleftarrow{\alpha}_n)_{1\dots n} = \begin{vmatrix} \xi_1(\overleftarrow{\alpha}_1) & \dots & \xi_n(\overleftarrow{\alpha}_1) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \xi_1(\overleftarrow{\alpha}_n) & \dots & \xi_n(\overleftarrow{\alpha}_n) \end{vmatrix}$$

$$V^{1\dots n}(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n) = \begin{vmatrix} x^1(\vec{i}_1) & \dots & x^1(\vec{i}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ x^m(\vec{i}_1) & \dots & x^n(\vec{i}_n) \end{vmatrix},$$

а объёмы *точечных и криптоточечных* кортов выражаются через ко- и контравариантные координаты точек с помощью окаймлённых определителей:

$$W(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})_{1\dots n} = \begin{vmatrix} \xi_1(\alpha_1) & \dots & \xi_n(\alpha_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1(\alpha_n) & \dots & \xi_n(\alpha_n) & 1 \\ \xi_1(\alpha_{n+1}) & \dots & \xi_n(\alpha_{n+1}) & 1 \end{vmatrix}$$

$$W^{1\dots n}(\boldsymbol{i}_1, \dots,\ \boldsymbol{i}_n,\ \boldsymbol{i}_{n+1}) = \begin{vmatrix} x^1(\boldsymbol{i}_1) & \dots & x^1(\boldsymbol{i}_n) & x^1(\boldsymbol{i}_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n(\boldsymbol{i}_1) & \dots & x^n(\boldsymbol{i}_n) & x^n(\boldsymbol{i}_{n+1}) \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В результате приходим к неожиданно простой геометрической интерпретации физического закона:

Любой фундаментальный физический закон рода $\overset{n+1}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\dots\alpha_{n+p+1}\,;\,i_1\dots i_{n+q+1}}(\overset{n}{\omega}) \equiv 0$ *представляет собой тождественное обращение в ноль произведения объёмов соответствующих кортов,* то есть

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}_1\dots\overleftarrow{\alpha}_{n+1};\,\vec{i}_1\dots\vec{i}_{n+1}}(\overset{n}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha}_1, \dots, \overleftarrow{\alpha}_{n+1})_{1\dots n;o} \cdot V^{1\dots n;o}(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_{n+1}) \equiv 0$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_1\dots\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1};\,i_1\dots i_{n+1}i_{n+2}}(\overset{n}{u}) = V(\overleftarrow{\alpha}_1, \dots, \overleftarrow{\alpha}_{n+1})_{1\dots n;o} \cdot W^{1\dots n;o}(i_1, \dots, i_{n+2}) \equiv 0$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha_1\dots\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};\,\vec{\boldsymbol{i}}_1\dots\vec{\boldsymbol{i}}_{n+1}}(\overset{n}{v}) = W(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2})_{1\dots n;o} \cdot V^{1\dots n;o}(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_{n+1}) \equiv 0$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{\alpha}_1\dots\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+2}\,;\,\boldsymbol{i}_1\dots\boldsymbol{i}_{n+1}\boldsymbol{i}_{n+2}}(\overset{n}{w}) = W(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2})_{1\dots n;o} \cdot W^{1\dots n;o}(i_1, \dots, i_{n+2}) \equiv 0$$

Основная цель следующей Части V – показать на многочисленных примерах, взятых из различных разделов общей физики и геометрии, что всякий фундаментальный закон сводится к тождественному обращению в ноль соответствующего верификатора. В символической форме это утверждение записывается следующим образом:

$$\boxed{\overset{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{K}}\ (\overset{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{\omega}}) \equiv \boldsymbol{0}}$$

За этой символической формулой скрывается тождественное обращение в ноль четырёх последовательностей $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ дважды окаймлённых верификаторов

$$\overset{n+1}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+p+1}\,;\,i_1\ldots i_{n+q+1}}(\overset{n}{\omega}) \equiv 0 \qquad p, q = 0, 1$$

то есть

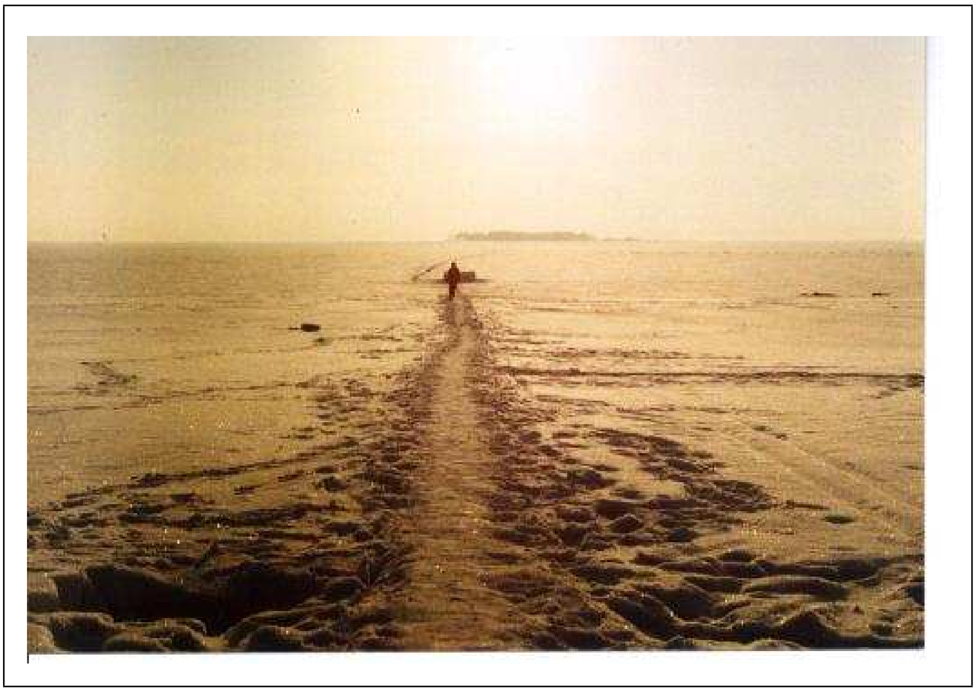
$$\overset{n+1}{K}{}^{00}(\overset{n}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha})_{n;o}V^{n;o}(\overrightarrow{i}\,) \equiv 0$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}(\overset{n}{u}) = V(\,\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\,)_{n;o}W^{n;o}(i) \equiv 0$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{10}(\overset{n}{v}) = W(\alpha)_{n;o}V^{n;o}(\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}}\,) \equiv 0$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}(\overset{n}{w}) = W(\,\boldsymbol{\alpha}\,)_{n;o}W^{n;o}(\,\boldsymbol{i}\,) \equiv 0$$

и двух специальных верификаторов Михайличенко $\overset{2}{M}{}^{02}(p) \equiv 0$ и $\overset{2}{M}{}^{20}(q) \equiv 0$



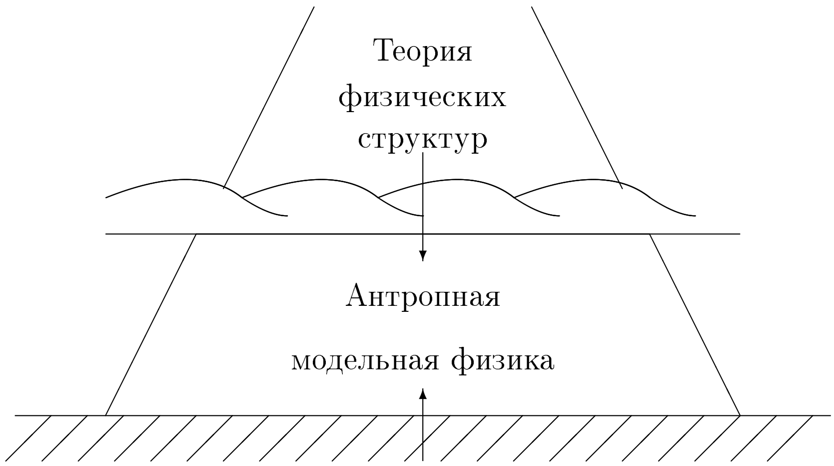
На полпути к Terra incognita [63]

[63] terra incognita – надпись на старинных географических картах и глобусах по белому месту, означающему неизвестную землю.

Литература к главе 12

[1] *Манин Ю.И.* Математика и физика. – М.: Знание. 1979. С.4.

[2] *Клейн Феликс* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. Геометрия. - М.: Наука. 1987. С. 220.



Два уровня физического знания

Принципиальное отличие Теории физических структур от антропной физики.

Эйфелева башня – символ поглощения антропной физики сакральной математикой на высших этажах Мироздания

Глава 13.

САКРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

HYPOTHESES NON FINGO[64]

Новый результат мы ценим в том случае, если, связывая воедино элементы давно известные, но до тех пор рассеянные и казавшиеся чуждыми друг другу, он внезапно вводит порядок там, где до тех пор царил, по-видимому, хаос.

— Анри Пуанкаре

§ 1. Предварительные замечания

§ 2. Сакральные уравнения

§ 3. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию $\varphi(x, y)$ двух однородных переменных x и y

§ 4. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию $\varphi(x; \xi)$ двух неоднородных переменных x и ξ

§ 5. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию $f(x, w, y)$ **трёх** однородных переменных x, w, y

[64] Гипотез не измышляю.

§ 6. Сакральные уравнения “треугольного” типа ранга r, содержащие две неизвестные функции Φ и φ

§ 7. Сакральные уравнения “прямоугольного” типа ранга (s, r), содержащие две неизвестные функции Φ и φ

§ 8. Решение матричных уравнений вида $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

В.М.Малышев 20 февраля 1997 года

Григорий Чорос-Гуркин (1870 – 1937) *Хан-Алтай (1908)*

§ 1. Предварительные замечания

Как известно, в математике постоянно встречаются уравнения самых различных типов:

алгебраические, как например

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

дифференциальные, как например

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0;$$

интегральные, как например

$$y(x) + \int\limits_0^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi = f(x);$$

функциональные, как например

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y).$$

Все эти уравнения содержат в себе различные операции – бинарные операции сложения и умножения, операции дифференцирования и интегрирования и т.п., а также произвольные функции, которые считаются известными и вносятся в уравнение с большой степенью произвола. В результате каждый тип уравнений может быть тиражирован бесчисленным числом способов.

Среди всех известных типов уравнений функциональные уравнения занимают в определённом смысле особое место.

Давно замечено, что функциональные уравнения Коши

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

$$\varphi(x\cdot y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

могут служить эффективным средством для определения следующих функций, являющихся единственными решениями соответствующих уравнений:

$$\varphi(x) = cx$$

$$\varphi(x) = c^x$$

$$\varphi(x) = \lg_c x$$
$$\varphi(x) = x^c,$$

где c – произвольная постоянная.

Однако уравнения Коши уже содержат в себе две основные бинарные операции – сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$, которые вносятся в функциональное уравнение с большой степенью произвола и являются в некотором смысле слова инородным телом, вносимым извне.

Нельзя ли получить эти фундаментальные операции как единственно возможные решения некоторого "первичного" функционального уравнения, не содержащего никаких вносимых извне операций?

Но можно ли представить себе уравнение, не содержащее в себе никаких операций, вносимых в него с неизбежным произволом?

§ 2. Сакральные уравнения

Дело в том, что только среди функциональных уравнений можно найти целый класс уравнений, не содержащих в себе никаких бинарных операций и никаких вносимых извне произвольных функций.

Насколько мне известно, никто таких уравнений не рассматривал, а они существуют и, более того, играют главную роль при определении исходных понятий геометрии и при рассмотрении фундаментальных физических законов.

В связи с этим будем называть такие "первичные" функциональные уравнения **сакральными.**

Простоты ради мы будем рассматривать здесь вещественные функции нескольких вещественных переменных, не забывая при этом о возможности рассмотрения не только комплексных функций нескольких комплексных переменных, но и функций самой общей природы.

Вот несколько примеров таких функциональных уравнений:

§ 3. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию $\varphi(x, y)$ двух однородных переменных x и y

Рассмотрим следующие сакральные уравнения:

$$\varphi(\varphi(x,z),\varphi(y,z)) = \varphi(x,y)$$

$$\varphi(\varphi(z,y),\varphi(z,x)) = \varphi(x,y)$$
$$\varphi(\varphi(z,x),\varphi(z,y)) = \varphi(x,y)$$
$$\varphi(\varphi(y,z),\varphi(x,z)) = \varphi(x,y)$$

Каждое из этих уравнений имеет одно и то же решение, определённое с точностью до произвольной монотонной функции одной переменной $\chi(u)$:

$$\varphi(x,y) = \chi^{-1}(\chi(x) - \chi(y))$$

Что же касается сакральных уравнений вида

$$\varphi(\varphi(x,z),\varphi(z,y)) = \varphi(x,y)$$

$$\varphi(\varphi(z,x),\varphi(y,z)) = \varphi(x,y)$$

$$\varphi(\varphi(y,z),\varphi(z,x)) = \varphi(x,y)$$

$$\varphi(\varphi(z,y),\varphi(x,z)) = \varphi(x,y)$$

то они вообще не имеют решений.

Сравним рассмотренные выше сакральные уравнения с традиционными уравнениями, определяющими решения $\varphi(x,y)$ с точностью до произвольной функции одной переменной $\chi(u)$:

1. Оба традиционных уравнения

$$\varphi(x,z) + \varphi(z,y) = \varphi(x,y)$$

$$\varphi(x,z) - \varphi(y,z) = \varphi(x,y)$$

имеют одно и то же решение:

$$\varphi(x,y) = \chi(x) - \chi(y)$$

2. Оба традиционных уравнения

$$\varphi(x,z) \cdot \varphi(z,y) = \varphi(x,y)$$

$$\frac{\varphi(x,z)}{\varphi(y,z)} = \varphi(x,y)$$

имеют одно и то же решение:

$$\varphi(x,y) = \frac{\chi(x)}{\chi(y)}$$

3. Традиционные уравнения вида

$$\varphi(x,z) + \varphi(y,z) = \varphi(x,y)$$

$$\varphi(x,z) - \varphi(z,y) = \varphi(x,y)$$

$$\varphi(x,z) \cdot \varphi(y,z) = \varphi(x,y)$$

$$\frac{\varphi(x,z)}{\varphi(z,y)} = \varphi(x,y)$$

не имеют решения.

§ 4. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию $\varphi(x;\xi)$ двух неоднородных переменных x и ξ

1. Сакральные уравнения

$$\varphi(\varphi(x,\xi),\varphi(y,\eta)) = \varphi(\varphi(x,\eta),\varphi(y,\xi))$$
$$\varphi(\varphi(x,\xi),\varphi(y,\eta)) = \varphi(\varphi(y,\xi),\varphi(x,\eta))$$

имеют два решения:

$$\varphi_1(x,\xi) = c(x+\xi),$$
$$\varphi_2(x,y) = (x\ \xi)^c;$$

где c – произвольная постоянная.

2. Сакральные уравнения

$$\varphi(\varphi(x,\xi),\varphi(x,\eta)) = \varphi(\varphi(y,\xi),\varphi(y,\eta))$$
$$\varphi(\varphi(x,\xi),\varphi(y,\xi)) = \varphi(\varphi(x,\eta),\varphi(y,\eta))$$

имеют два решения:

$$\varphi_1(x,\xi) = c(x-\xi),$$
$$\varphi_2(x,y) = \left(\frac{x}{\xi}\right)^c;$$

где c – произвольная постоянная.

3. Сакральные уравнения

$$\varphi(\varphi(x,\xi),\varphi(x,\eta)) = \varphi(\varphi(y,\eta),\varphi(y,\xi))$$
$$\varphi(\varphi(x,\xi),\varphi(y,\xi)) = \varphi(\varphi(y,\eta),\varphi(x,\eta))$$

не имеют решений.

§ 5. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию $f(x,w,y)$ **трёх** однородных переменных x,w,y

1. Сакральное уравнение

$$f(f(x,w,y),\ f(z,w,y),\ f(z,w,u)) = f(x,w,u)$$

имеет решение

$$f(x,y,z) = \chi^{-1}(\chi(x)-\chi(y)+\chi(z)),$$

2. Сакральное уравнение

$$f(f(x,w,y),\ f(y,w,z),\ f(z,w,u)) = f(x,w,u)$$

решения не имеет.

В качестве упражнения читателю предлагается доказать существование (или несуществование) и единственность всех приведённых выше сакральных уравнений.

§ 6. Сакральные уравнения "треугольного" типа ранга r, содержащие две неизвестные функции Φ и φ

Рассмотрим r точек в n-мерном арифметическом пространстве

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{x}(1) = (\tilde{x}(1)_1, \cdots, \tilde{x}(1)_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}(r) = (\tilde{x}(r)_1, \cdots, \tilde{x}(r)_n) \end{array}$$

и одну функцию $2n$ переменных $\varphi(p_1, \cdots, p_n; q_1, \cdots, q_n)$.

Эту функцию мы будем называть **однородным репрезентатором**[65], если в качестве n первых аргументов берутся координаты точки i, а в качестве следующих n координат – координаты точки k, то есть

$$\varphi(\boldsymbol{x}(i); \boldsymbol{x}(k)) = \varphi(\tilde{x}(i)_1, \cdots, \tilde{x}(i)_n;\ \tilde{x}(k)_1, \cdots, \tilde{x}(k)_n).$$

Зададим целое натуральное число $r \geqslant 2$ и рассмотрим $\frac{1}{2}r(r-1)$ однородных репрезентаторов $\varphi(\boldsymbol{x}(i); \boldsymbol{x}(k)) \qquad 1 \leqslant i < k \leqslant r$, то есть

$$\begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(2)), & \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(3)), & \cdots, & \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(r)), \\ & \varphi(\boldsymbol{x}(2);\boldsymbol{x}(3)), & \cdots, & \varphi(\boldsymbol{x}(2);\boldsymbol{x}(r)), \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & & \varphi(\boldsymbol{x}(r-1);\boldsymbol{x}(r)) \end{array}$$

Мы будем говорить, что имеет место сакральное уравнение треугольного типа ранга r относительно двух неизвестных функций

$$\Phi\ \begin{pmatrix} u_{12}, & u_{13}, & \cdots, & u_{1r} \\ & u_{23}, & \cdots, & u_{2r} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & u_{r-1,r} \end{pmatrix}$$

и

$$\varphi(p_1, \cdots, p_n;\quad q_1, \cdots, q_n) = \varphi(\boldsymbol{p}\,;\,\boldsymbol{q})$$

если выполняется тождество

$$\Phi\ \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(2)), & \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(3)), & \cdots, & \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(r)), \\ & \varphi(\boldsymbol{x}(2);\boldsymbol{x}(3)), & \cdots, & \varphi(\boldsymbol{x}(2);\boldsymbol{x}(r)), \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & & \varphi(\boldsymbol{x}(r-1);\boldsymbol{x}(r)) \end{pmatrix} = 0$$

относительно всех $r \cdot n$ независимых переменных:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{x}(1)_1, & \cdots, & \tilde{x}(1)_n \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \tilde{x}(r)_1, & \cdots, & \tilde{x}(r)_n \end{array}.$$

[65] от фр. représentatif – представляющий собой что-либо, представительный, характерный.

Задача состоит в том, чтобы при заданных r и n найти неизвестные функции Φ и φ.

Как показывают многочисленные исследования сакральных уравнений треугольного типа, эта задача становится содержательной при

$$r = n + 2.$$

3.1. Сакральное уравнение

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi(\tilde{x}_1;\ \tilde{x}_2), & \varphi(\tilde{x}_1;\ \tilde{x}_3), \\ & \varphi(\tilde{x}_2;\ \tilde{x}_3)\end{pmatrix} = 0$$

имеет решения, которые в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi_{12}, & \varphi_{13}, \\ & \varphi_{23}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\chi^{-1}(\varphi_{12}), & \chi^{-1}(\varphi_{13}), \\ & \chi^{-1}(\varphi_{23})\end{pmatrix},$$

где

$\Phi\begin{pmatrix}\varphi_{12}, & \varphi_{13}, \\ & \varphi_{23}\end{pmatrix}$ – верификатор[66] треугольного типа ранга 3,

$A\begin{pmatrix}a_{12}, & a_{13}, \\ & a_{23}\end{pmatrix}$ – канонический верификатор треугольного типа ранга 3,

$\varphi_{ik} = \varphi(\tilde{x}_i;\ \tilde{x}_k) = \chi(a_{ik})$ – однородный репрезентатор размерности (1,1),

$a_{ik} = a(x_i;\ x_k)$ – канонический однородный репрезентатор размерности (1,1),

$\chi(a)$ – произвольная функция одной переменной (“градуировочная кривая”),

$\tilde{x}_i$ – криволинейная координата,

$x_i = x_1(\tilde{x}_i)$ – декартова координата.

Можно показать, что имеется **два** и только два решения уравнения (3.1):

3.1 (1) – решение антисимметричное и имеет вид:

$$A_1\begin{pmatrix}a_{12}, & a_{13}, \\ & a_{23}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -1 & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -1 & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12} + a_{23} - a_{13})^2, \qquad (1)$$

[66]от фр. vérification < лат. verus истинный + facere делать; — проверка истинности теоретических положений опытным путём; принцип опытной проверки, согласно которому истинность каждого утверждения о мире должна быть в конечном счёте установлена путём сопоставления его с “непосредственным опытом”.

$$a_{1,ik} = a_1(x_i;\quad x_k) = x_i - x_k;$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{1,ik} = x_i - x_k$ в верификатор (1) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ -1 & -a_{ik} & 0 & a_{km} \\ -1 & -a_{im} & -a_{km} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & x_i & 0 & 0 \\ -1 & x_k & 0 & 0 \\ -1 & x_m & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_i & x_k & x_m \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3.1 (2) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_2\ \begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, \\ & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -1 & a_{12} & 0 & a_{23} \\ -1 & a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = \qquad (2)$$

$$= -a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 + 2(a_{12}a_{13} + a_{13}a_{23} + a_{23}a_{12}),$$

$$a_{2,ik} = a_2(x_i;\quad x_k) = (x_i - x_k)^2.$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{2,ik} = (x_i - x_k)^2$ в верификатор (2) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ -1 & a_{ik} & 0 & a_{km} \\ -1 & a_{im} & a_{km} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & x_i^2 & -2x_i & 0 \\ -1 & x_k^2 & -2x_k & 0 \\ -1 & x_m^2 & -2x_m & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -x_i^2 & -x_k^2 & -x_m^2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_i & x_k & x_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3.2. Сакральное уравнение

$$\Phi\begin{pmatrix} \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1;\ \tilde{x}_2, \tilde{y}_2), & \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1;\ \tilde{x}_3, \tilde{y}_3), & \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1;\ \tilde{x}_4, \tilde{y}_4), \\ & \varphi(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2;\ \tilde{x}_3, \tilde{y}_3), & \varphi(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2;\ \tilde{x}_4, \tilde{y}_4), \\ & & \varphi(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3;\ \tilde{x}_4, \tilde{y}_4) \end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

имеет решения, которые в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\Phi\ \begin{pmatrix} \varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \varphi_{14}, \\ & \varphi_{23}, & \varphi_{24}, \\ & & \varphi_{34} \end{pmatrix} = A\ \begin{pmatrix} \chi^{-1}(\varphi_{12}), & \chi^{-1}(\varphi_{13}), & \chi^{-1}(\varphi_{14}), \\ & \chi^{-1}(\varphi_{23}), & \chi^{-1}(\varphi_{24}), \\ & & \chi^{-1}(\varphi_{34}) \end{pmatrix},$$

где

$$\Phi\ \begin{pmatrix} \varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \varphi_{14}, \\ & \varphi_{23}, & \varphi_{24}, \\ & & \varphi_{34} \end{pmatrix}$$ – верификатор треугольного типа ранга 4,

$$A \begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \\ & a_{23}, & a_{24}, \\ & & a_{34} \end{pmatrix}$$ – канонический верификатор треугольного типа ранга 4,

$\varphi_{ik} = \varphi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i;\ \ \tilde{x}_k, \tilde{y}_k) = \chi(a_{ik})$ – однородный репрезентатор размерности (2,2),

$a_{ik} = a(x_i, y_i;\ \ x_k, y_k)$ – канонический однородный репрезентатор размерности (2,2),

$\chi(a)$ – произвольная функция одной переменной (“градуировочная кривая”)

$\tilde{x}_i,\ \tilde{y}_i$ – криволинейные координаты,

$$\begin{aligned} x_i &= x_1(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i), \\ y_i &= x_2(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \end{aligned}$$ – декартовы координаты.

Как показал мой талантливый ученик профессор Геннадий Григорьевич Михайличенко [2], имеется **девять** и только девять различных решений уравнения (3.2):

3.2 (1) – решение антисимметричное и имеет вид:

$$A_1 \begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \\ & a_{23}, & a_{24}, \\ & & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 \tag{4}$$

$$a_{1,ik} = a_1(x_i, y_i;\ \ x_k, y_k) = x_i y_k - x_k y_i;$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{1,ik} = x_i y_k - x_k y_i$ в верификатор(4) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & -y_i & 0 & 0 \\ x_k & -y_k & 0 & 0 \\ x_m & -y_m & 0 & 0 \\ x_n & -y_n & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_k & y_m & y_n \\ x_i & x_k & x_m & x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3.2 (2) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_2 \begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \\ & a_{23}, & a_{24}, \\ & & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -1 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -1 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ -1 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$a_{2,ik} = a_2(x_i, y_i; \quad x_k, y_k) = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2;$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{2,ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2$ в верификатор (5) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_i^2 + y_i^2 & -2x_i & -2y_i & 0 \\ -1 & x_k^2 + y_k^2 & -2x_k & -2y_k & 0 \\ -1 & x_m^2 + y_m^2 & -2x_m & -2y_m & 0 \\ -1 & x_n^2 + y_n^2 & -2x_n & -2y_n & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & -x_i^2 - y_i^2 & -x_k^2 - y_k^2 & -x_m^2 - y_m^2 & -x_n^2 - y_n^2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_i & x_k & x_m & x_n \\ 0 & y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \equiv 0$$

3.2 (3) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_3 \begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \\ & a_{23}, & a_{24}, \\ & & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -1 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -1 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ -1 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

$$a_{3,ik} = a_3(x_i, y_i; \quad x_k, y_k) = (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2;$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{3,ik} = (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2$ в верификатор (6) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn4} \\ -1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_i^2 - y_i^2 & -2x_i & 2y_i & 0 \\ -1 & x_k^2 - y_k^2 & -2x_k & 2y_k & 0 \\ -1 & x_m^2 - y_m^2 & -2x_m & 2y_m & 0 \\ -1 & x_n^2 - y_n^2 & -2x_n & 2y_n & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & -x_i^2 + y_i^2 & -x_k^2 + y_k^2 & -x_m^2 + y_m^2 & -x_n^2 + y_n^2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_i & x_k & x_m & x_n \\ 0 & y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3.2 (4) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_4 \quad \begin{matrix} (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \\ & a_{23}, & a_{24}, \\ & & a_{34}) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$a_{4,ik} = a_4(x_i, y_i; \quad x_k, y_k) = \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2} + x_i x_k + y_i y_k;$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{4,ik}$ в верификатор (7) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ a_{ik} & 1 & a_{km} & a_{kn} \\ a_{im} & a_{km} & 1 & a_{mn} \\ a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2} & 0 \\ x_k & y_k & \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2} & 0 \\ x_m & y_m & \sqrt{1 - x_m^2 - y_m^2} & 0 \\ x_n & y_n & \sqrt{1 - x_n^2 - y_n^2} & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2} & \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2} & \sqrt{1 - x_m^2 - y_m^2} & \sqrt{1 - x_n^2 - y_n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3.2 (5) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_5 \quad \begin{matrix} (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \\ & a_{23}, & a_{24}, \\ & & a_{34}) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$a_{5,ik} = a_5(x_i, y_i; \quad x_k, y_k) = \sqrt{1 - x_i^2 + y_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 + y_k^2} + x_i x_k - y_i y_k;$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{5,ik}$ в верификатор (8) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ a_{ik} & 1 & a_{km} & a_{kn} \\ a_{im} & a_{km} & 1 & a_{mn} \\ a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & -y_i & \sqrt{1 - x_i^2 + y_i^2} & 0 \\ x_k & -y_k & \sqrt{1 - x_k^2 + y_k^2} & 0 \\ x_m & -y_m & \sqrt{1 - x_m^2 + y_m^2} & 0 \\ x_n & -y_n & \sqrt{1 - x_n^2 + y_n^2} & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ \sqrt{1 - x_i^2 + y_i^2} & \sqrt{1 - x_k^2 + y_k^2} & \sqrt{1 - x_m^2 + y_m^2} & \sqrt{1 - x_n^2 + y_n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

3.2 (6) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_6 \begin{array}{l}(a_{12}, \ a_{13}, \ a_{14},\\ \qquad\quad a_{23}, \ a_{24},\\ \qquad\qquad a_{34})\end{array} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$a_{6,ik} = a_6(x_i, y_i; \ \ x_k, y_k) = \sqrt{1 + x_i^2 + y_i^2} \cdot \sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2} - x_i x_k - y_i y_k;$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{6,ik}$ в верификатор (9) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ a_{ik} & 1 & a_{km} & a_{kn} \\ a_{im} & a_{km} & 1 & a_{mn} \\ a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_i & -y_i & \sqrt{1 + x_i^2 + y_i^2} & 0 \\ -x_k & -y_k & \sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2} & 0 \\ -x_m & -y_m & \sqrt{1 + x_m^2 + y_m^2} & 0 \\ -x_n & -y_n & \sqrt{1 + x_n^2 + y_n^2} & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ \sqrt{1 + x_i^2 + y_i^2} & \sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2} & \sqrt{1 + x_m^2 + y_m^2} & \sqrt{1 + x_n^2 + y_n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv .$$

3.2 (7) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_7 \begin{array}{l}(a_{12}, \ a_{13}, \ a_{14},\\ \qquad\quad a_{23}, \ a_{24},\\ \qquad\qquad a_{34})\end{array} \begin{array}{l} \\ - \ \text{через элементарные функции} \\ \quad \text{не выражается,}\end{array}$$

$$a_{7,ik} = a_7(x_i, y_i; \ \ x_k, y_k) = (x_i - x_k)^2 \ e^{\frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}}; \tag{10}$$

Чтобы убедиться в том, что репрезентатор (10) действительно является решением сакрального уравнения (3) необходимо подставить его выражение (10) в якобиан (11) и обнаружить, что ранг этого якобиана равен пяти.

$$\frac{\partial(a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34})}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} & \frac{\partial a_{13}}{\partial x_1} & \frac{\partial a_{14}}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial y_1} & \frac{\partial a_{13}}{\partial y_1} & \frac{\partial a_{14}}{\partial y_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial a_{23}}{\partial x_2} & \frac{\partial a_{24}}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial y_2} & 0 & 0 & \frac{\partial a_{23}}{\partial y_2} & \frac{\partial a_{24}}{\partial y_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial a_{23}}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial a_{34}}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial a_{13}}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial a_{23}}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial a_{34}}{\partial y_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial a_{14}}{\partial x_4} & 0 & \frac{\partial a_{24}}{\partial x_4} & \frac{\partial a_{34}}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & \frac{\partial a_{14}}{\partial y_4} & 0 & \frac{\partial a_{24}}{\partial y_4} & \frac{\partial a_{34}}{\partial y_4} \end{pmatrix} \tag{11}$$

3.2 (8) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_8 \ \begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \\ & a_{23}, & a_{24}, \\ & & a_{34} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{через элементарные функции не выражается,}$$

$$a_{8,ik} = a_8(x_i, y_i;\ \ x_k, y_k) = [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2]\ e^{\gamma\ \arctan \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}}, \tag{12}$$

где γ – произвольная постоянная;

Чтобы убедиться в том, что репрезентатор (12) действительно является решением сакрального уравнения (3) необходимо подставить его выражение (12) в якобиан (11) и обнаружить, что ранг этого якобиана равен пяти.

3.2 (9) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_9 \ \begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \\ & a_{23}, & a_{24}, \\ & & a_{34} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{через элементарные функции не выражается,}$$

$$a_{8,ik} = a_9(x_i, y_i;\ \ x_k, y_k) = [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2]\ e^{\gamma\ Arcth \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}}, \tag{13}$$

где γ – произвольная постоянная.

Чтобы убедиться в том, что репрезентатор (13) действительно является решением сакрального уравнения (3) необходимо подставить его выражение (13) в якобиан (11) и обнаружить, что ранг этого якобиана равен пяти.

3.3. Сакральное уравнение

$$\Phi\begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(2)), & \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(3)), & \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(4)), & \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{x}(5)), \\ & \varphi(\boldsymbol{x}(2);\boldsymbol{x}(3)), & \varphi(\boldsymbol{x}(2);\boldsymbol{x}(4)), & \varphi(\boldsymbol{x}(2);\boldsymbol{x}(5)), \\ & & \varphi(\boldsymbol{x}(3);\boldsymbol{x}(4)), & \varphi(\boldsymbol{x}(3);\boldsymbol{x}(5)), \\ & & & \varphi(\boldsymbol{x}(4);\boldsymbol{x}(5)) \end{pmatrix} = 0 \tag{14}$$

имеет решения, которые в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\Phi\begin{pmatrix} \varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \varphi_{14}, & \varphi_{15}, \\ & \varphi_{23}, & \varphi_{24}, & \varphi_{25}, \\ & & \varphi_{34}, & \varphi_{35}, \\ & & & \varphi_{45} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \chi^{-1}(\varphi_{12}), & \chi^{-1}(\varphi_{13}), & \chi^{-1}(\varphi_{14}), & \chi^{-1}(\varphi_{15}), \\ & \chi^{-1}(\varphi_{23}), & \chi^{-1}(\varphi_{24}), & \chi^{-1}(\varphi_{25}), \\ & & \chi^{-1}(\varphi_{34}), & \chi^{-1}(\varphi_{35}), \\ & & & \chi^{-1}(\varphi_{45}) \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{array}{llll} \Phi\ (\varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \varphi_{14}, & \varphi_{15}, \\ & \varphi_{23}, & \varphi_{24}, & \varphi_{25}, \\ & & \varphi_{34}, & \varphi_{35}, \\ & & & \varphi_{45}) \end{array}$$
– верификатор треугольного типа ранга 5,

$$\begin{array}{llll} A\ (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45}) \end{array}$$
– канонический верификатор треугольного типа ранга 5,

$\varphi_{ik} = \varphi(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i;\ \ \tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k) = \chi(a_{ik})$ - однородный репрезентатор размерности (3,3),

$a_{ik} = a(x_i, y_i, z_i;\ \ x_k, y_k, z_k)$ – канонический однородный репрезентатор размерности (3,3),

$\chi(a)$ – произвольная функция одной переменной (“градуировочная кривая”)

$\tilde{x}_i,\ \tilde{y}_i,\ \tilde{z}_i$ – криволинейные координаты,

$x_i = x_1(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$,
$y_i = x_2(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$,
$z_i = x_3(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$ – декартовы координаты.

Как показал другой мой ученик Владимир Хананович Лев [3], имеется **десять** и только десять различных решений уравнения (14).

Как и в случае уравнения (3) нетрудно выписать аналогичные тождества, из которых непосредственно следует существование всех приведённых ниже решений (за исключением “экзотических” решений (8), (9) и (10)) сакрального уравнения (14).

3.3 (1) – решение антисимметричное и имеет вид:

$$\begin{array}{llll} A_1\ (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45}) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -1 & -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -1 & -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -1 & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -1 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{vmatrix},$$

$$a_{1,ik} = a_1(x_i, y_i, z_i;\ \ x_k, y_k, z_k) = x_i y_k - x_k y_i + z_i - z_k;$$

3.3 (2) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_2\begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -1 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -1 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -1 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & a_{45} \\ -1 & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{vmatrix},$$

$$a_{2,ik} = a_2(x_i, y_i, z_i;\quad x_k, y_k, z_k) = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2$$

3.3 (3) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_3\begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -1 & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -1 & a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -1 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & a_{45} \\ -1 & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{vmatrix},$$

$$a_{3,ik} = a_3(x_i, y_i, z_i;\quad x_k, y_k, z_k) = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 - (z_i - z_k)^2$$

3.3 (4) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_4\begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 1 \end{vmatrix},$$

$$a_{4,ik} = a_4(x_i, y_i, z_i;\quad x_k, y_k, z_k) =$$

$$= \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2} + x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k;$$

3.3 (5) – решение симметричное и имеет вид:

$$A_5\begin{pmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 1 \end{vmatrix},$$

$$a_{5,ik} = a_5(x_i, y_i, z_i;\quad x_k, y_k, z_k) =$$

$$= \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2 + z_k^2} + x_i x_k + y_i y_k - z_i z_k;$$

3.3 (6) – решение симметричное и имеет вид:

$$\begin{matrix} A_6\ (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45}) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 1 \end{vmatrix},$$

$$a_{6,ik} = a_6(x_i, y_i, z_i; \quad x_k, y_k, z_k) =$$
$$= \sqrt{1 - x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} + x_i x_k - y_i y_k - z_i z_k;$$

3.3 (7) – решение симметричное и имеет вид:

$$\begin{matrix} A_7\ (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45}) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 1 \end{vmatrix},$$

$$a_{7,ik} = a_7(x_i, y_i, z_i; \quad x_k, y_k, z_k) =$$
$$= \sqrt{1 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} - x_i x_k - y_i y_k - z_i z_k;$$

3.3 (8) – “экзотическое” решение

$$\begin{matrix} A_8\ (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45}) \end{matrix}$$ – канонический верификатор через элементарные функции не выражается

$$a_{8,ik} = a_8\ (x_i, y_i, z_i;\ x_k, y_k, z_k) =$$
$$= (x_i - x_k)^2\ e^{\frac{y_i - y_k + z_i x_k - z_k x_i}{x_i - x_k}};$$

3.3 (9) – “экзотическое” решение

$$\begin{matrix} A_9\ (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45}) \end{matrix}$$ – канонический верификатор через элементарные функции не выражается

$$a_{9,ik} = a_9\ (x_i, y_i, z_i;\ x_k, y_k, z_k) =$$
$$= [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2]\ e^{\gamma\ arctg \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} + z_i + z_k}$$

где γ – произвольная постоянная.

3.3 (10) – "экзотическое" решение

$$\begin{array}{llll} A_{10}\ (a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, \\ & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, \\ & & a_{34}, & a_{35}, \\ & & & a_{45}) \end{array}$$
– канонический верификатор через элементарные функции не выражается,

$$a_{10,ik} = a_{10}\ (x_i, y_i, z_i;\ x_k, y_k, z_k) =$$
$$= [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2]\ e^{\gamma\ Arcth \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} + z_i + z_k}$$

где γ – произвольная постоянная.

§ 7. Сакральные уравнения "прямоугольного" типа ранга (s, r), содержащие две неизвестные функции Φ и φ

Рассмотрим r точек в одном m-мерном арифметическом пространстве

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{x}(1) = (\tilde{x}(1)_1, \cdots, \tilde{x}(1)_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}(r) = (\tilde{x}(r)_1, \cdots, \tilde{x}(r)_m) \end{array}$$

и s точек в другом арифметическом пространстве размерности n

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{\xi}(1) = (\tilde{\xi}^1(1), \cdots, \tilde{\xi}^n(1)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\xi}(s) = (\tilde{\xi}^1(s), \cdots, \tilde{\xi}^n(s)) \end{array}$$

и одну функцию $m+n$ переменных

$$\varphi(p_1, \cdots, p_m;\ \pi^1, \cdots, \pi^n).$$

Эту функцию мы будем называть **неоднородным репрезентатором**, если в качестве m первых аргументов берутся координаты точки i из первого пространства, а в качестве следующих n координат – координаты точки k из второго пространства, то есть

$$\varphi(\ \boldsymbol{x}\ (i);\ \boldsymbol{\xi}\ (k)) = \varphi(x(i)_1, \cdots, x(i)_m;\ \xi^1(k), \cdots, \xi^n(k))$$

$$1 \leqslant i \leqslant r; \qquad 1 \leqslant k \leqslant s$$

Рассмотрим $r \cdot s$ неоднородных репрезентаторов:

$$\begin{array}{c} \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{\xi}(1)),\cdots,\varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{\xi}(s)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(\boldsymbol{x}(r);\boldsymbol{\xi}(1)),\cdots,\varphi(\boldsymbol{x}(r);\boldsymbol{\xi}(s)). \end{array}$$

Мы будем говорить, что имеет место сакральное уравнение прямоугольного типа ранга (r,s) относительно двух неизвестных функций

$$\begin{array}{l} \Phi\ (u_{11}, \ \cdots, \ u_{1s}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad u_{r1}, \ \cdots, \ u_{rs}) \end{array} = 0$$

и

$$\varphi(\ \boldsymbol{p}\ ;\ \boldsymbol{\pi}\ ) = \varphi(p_1,\cdots,p_m;\ \pi^1,\cdots,\pi^n),$$

если выполняется тождество

$$\begin{array}{l} \Phi\ (\varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{\xi}(1)), \ \cdots, \ \varphi(\boldsymbol{x}(1);\boldsymbol{\xi}(s)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \varphi(\boldsymbol{x}(r);\boldsymbol{\xi}(1)), \ \cdots, \ \varphi(\boldsymbol{x}(r);\boldsymbol{\xi}(s))). \end{array} = 0$$

относительно всех $r \cdot m + s \cdot n$ независимых переменных:

$$\begin{array}{lcl} x(1)_1, \ \cdots, \ x(1)_m & \qquad & \xi^1(1), \ \cdots, \ \xi^n(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x(r)_1, \ \cdots, \ x(r)_m & & \xi^1(s), \ \cdots, \ \xi^n(s) \end{array}$$

Задача состоит в том, чтобы при заданных ранге (r,s) и размерности (m,n) найти неизвестные функции Φ и φ.

Как показывают многочисленные исследования сакральных уравнений прямоугольного типа, эта задача становится содержательной при

$$r = n + 1$$

$$s = m + 1.$$

4.1. Сакральное уравнение

$$\begin{array}{l} \Phi(\varphi(\tilde{x_1};\ \tilde{\xi_1}), \quad \varphi(\tilde{x_1};\ \tilde{\xi_2}), \\ \quad \varphi(\tilde{x_2};\ \tilde{\xi_1}), \ \varphi(\tilde{x_2};\ \tilde{\xi_2})) \end{array} = 0$$

имеет решения, которые в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{array}{l} \Phi\ \ (\varphi_{11}, \ \ \varphi_{12}, \\ \qquad \varphi_{11}, \ \ \varphi_{23}) \end{array} = \begin{array}{l} A\ \ (\chi^{-1}(\varphi_{11}), \ \ \chi^{-1}(\varphi_{12}), \\ \qquad \chi^{-1}(\varphi_{21}), \ \ \chi^{-1}(\varphi_{22})) \end{array},$$

где

$\Phi\,(\varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \varphi_{21},\ \varphi_{22})$ – верификатор квадратного типа (ранга (2,2))

$A\,(a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22})$ – канонический верификатор квадратного типа (ранга (2,2))

$\varphi_{i\alpha} = \varphi(\tilde{x}_i;\ \tilde{\xi}_\alpha) = \chi(a_{i\alpha})$ – неоднородный репрезентатор,

$a_{i\alpha} = a(x_i;\ \xi_\alpha)$ – канонический неоднородный репрезентатор,

$\chi(a)$ – произвольная функция одной переменной (“градуировочная кривая”),

$\tilde{x}_i\ ,\ \tilde{\xi}_\alpha$ – криволинейные координаты,

$x_i = x_1(\tilde{x}_i)\ ,$
$\xi_\alpha = \xi_\alpha(\tilde{\xi}_\alpha)$ – декартовы координаты.

Можно показать, что имеется **два** и только два решения уравнения (4.1):

4.1 (1) – первое **аддитивное** решение имеет вид:

$$A_1\,(a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & a_{11} & a_{12} \\ -1 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}. \tag{15}$$

$$a_{1,i\alpha} = a_1(s_i;\ \sigma_\alpha) = s_i + \sigma_\alpha;$$

Здесь s_i и σ_α – “скрытые параметры”.

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{1,i\alpha} = s_i + \sigma_\alpha$ в верификатор (15) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ -1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & x_i & 0 \\ -1 & x_k & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\xi_\alpha & -\xi_\beta \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

4.1 (2) – второе **мультипликативное** решение имеет вид:

$$A_2\,(a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}. \tag{16}$$

$$a_{2,i\alpha} = a_2(x_i;\ \xi_\alpha) = x_i\ \xi_\alpha.$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{2,i\alpha} = x_i\ \xi_\alpha$ в верификатор (16) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & 0 \\ x_k & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \xi_\beta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

4.2. Сакральное уравнение

$$\begin{array}{l}\Phi(\varphi(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1;\ \ \tilde{\xi}_1,\tilde{\eta}_1),\quad \varphi(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1;\ \ \tilde{\xi}_2,\tilde{\eta}_2),\quad \varphi(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1;\ \ \tilde{\xi}_3,\tilde{\eta}_3),\\ \quad\varphi(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2;\ \ \tilde{\xi}_2,\tilde{\eta}_2),\quad \varphi(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2;\ \ \tilde{\xi}_2,\tilde{\eta}_2),\quad \varphi(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2;\ \ \tilde{\xi}_3,\tilde{\eta}_3),\quad \equiv 0\\ \quad\varphi(\tilde{x}_3,\tilde{y}_3;\ \ \tilde{\xi}_1,\tilde{\eta}_1),\quad \varphi(\tilde{x}_3,\tilde{y}_3;\ \ \tilde{\xi}_2,\tilde{\eta}_2),\quad \varphi(\tilde{x}_3,\tilde{y}_3;\ \ \tilde{\xi}_3,\tilde{\eta}_3))\end{array} \tag{17}$$

имеет решения, которые в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{array}{llll}\Phi\ \ (\varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \\ \quad\ \ \varphi_{21}, & \varphi_{22}, & \varphi_{23}, & = \\ \quad\ \ \varphi_{31}, & \varphi_{32}, & \varphi_{33}) & \end{array} \begin{array}{llll} A\ \ (\chi^{-1}(\varphi_{11}), & \chi^{-1}(\varphi_{12}), & \chi^{-1}(\varphi_{13}), & \\ \quad\ \ \chi^{-1}(\varphi_{21}), & \chi^{-1}(\varphi_{22}), & \chi^{-1}(\varphi_{23}), & , \\ \quad\ \ \chi^{-1}(\varphi_{31}), & \chi^{-1}(\varphi_{32}), & \chi^{-1}(\varphi_{33})) & \end{array}$$

где

$$\begin{array}{lll}\Phi\ \ (\varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \varphi_{13}, \\ \quad\ \ \varphi_{21}, & \varphi_{22}, & \varphi_{23}, \\ \quad\ \ \varphi_{31}, & \varphi_{32}, & \varphi_{33})\end{array}$$ – верификатор квадратного типа (ранга (3,3))

$$\begin{array}{lll}A\ \ (a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ \quad\ \ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ \quad\ \ a_{31}, & a_{32} & a_{33})\end{array}$$ – канонический верификатор квадратного типа (ранга (3,3))

$\varphi_{i\alpha} = \varphi(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i;\ \ \tilde{\xi}_\alpha,\tilde{\eta}_\alpha) = \chi(a_{i\alpha})$ – неоднородный репрезентатор,

$a_{i\alpha} = a(x_i,y_i;\ \ \xi_\alpha,\eta_\alpha)$ – канонический неоднородный репрезентатор,

$\chi(a)$ – произвольная функция одной переменной ("градуировочная кривая")

$\tilde{x}_i,\ \tilde{y}_i;\quad \tilde{\xi}_\alpha,\ \tilde{\eta}_\alpha$ – криволинейные координаты,

$$\begin{array}{l}x_i = x_1(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i),\\ y_i = x_2(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)\end{array}$$

.

$$\begin{array}{l}\xi_\alpha = \xi_\alpha(\tilde{\xi}_\alpha,\tilde{\eta}_\alpha)\\ \eta_\alpha = \eta_\alpha(\tilde{\xi}_\alpha,\tilde{\eta}_\alpha)\end{array}$$ – декартовы координаты.

4.2 (1) – первое **аддитивное** решение имеет вид:

$$\begin{array}{lll}A_1\ \ (a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ \quad\ \ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ \quad\ \ a_{31}, & a_{32}, & a_{33})\end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$a_{1,i\alpha} = a_1(x_i,s_i;\ \xi_\alpha,\sigma_\alpha) = x_i\ \xi_\alpha + s_i + \sigma_\alpha;$$

Здесь s_i и σ_α – "скрытые параметры".

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{1,i\alpha} = x_i\ \xi_\alpha + s_i + \sigma_\alpha$ в верификатор (18) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ -1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ -1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & s_i & x_i & 0 \\ -1 & s_k & x_k & 0 \\ -1 & s_m & x_m & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\sigma_\alpha & -\sigma_\beta & -\sigma_\gamma \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta & \xi_\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

4.2 (2) – второе **мультипликативное** решение имеет вид:

$$A_2 \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

$$a_{2,i\alpha} = a_2(x_i, y_i;\ \xi_\alpha, \eta_\alpha) = x_i\ \xi_\alpha + y_i\ \eta_\alpha$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{2,i\alpha} = x_i\ \xi_\alpha + y_i\ \eta_\alpha$ в верификатор (19) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 \\ x_k & y_k & 0 \\ x_m & y_m & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \xi_\beta & \xi_\gamma \\ \eta_\alpha & \eta_\beta & \eta_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

§ 8. Решение матричных уравнений вида $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$

В.М.Малышев

20 февраля 1997 года

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

где $\varphi(x)$ - матрица размерности $n \times n$, $x \in \mathbf{C}$, $\varphi_{ik}(x) \in \mathbf{C}$.

Будем искать решение в классе аналитических функций, т.е. предполагать, что каждый элемент матрицы $\varphi_{ik}(x)$ - аналитическая функция на $\mathbf{C}$.

Тогда мы можем разложить $\varphi(x)$ в ряд:

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k,$$

где A_k - постоянные матрицы.

Используя это разложение, получим:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_k A_m x^k y^m.$$

С другой стороны,

$$\varphi(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x+y)^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^m y^{k-m}, \text{ где } C_k^m = \frac{k!}{m!(m-k)!}.$$

Приравнивая коэффициенты, находим:

$$A_m A_n = C_{n+m}^m A_{n+m}.$$

Таким образом, получаем условия:

$$1.\ A_0^2 = A_0$$

$$2.\ A_0 A_1 = A_1 A_0 = C_1^0 A_1 = A_1$$

$$3.\ A_1 A_1 = C_2^1 A_2 = 2A_2$$

$$4.\ A_1 A_2 = A_2 A_1 = C_3^1 A_3 = 3A_3$$

$$5.\ A_0 A_3 = A_3 A_0 = C_3^0 A_3 = A_3$$

....

Рассмотрим теперь различные решения.

1. $A_0 = 0 \ \Rightarrow\ A_k = 0$ - тривиальное решение.

2. $A_0 = 1 \ \Rightarrow\ A_1$ - произвольная матрица;

$$A_2 = \frac{{A_0}^2}{C_2^1} = \frac{{A_1}^2}{2!};$$

$$A_3 = \frac{A_1 A_2}{C_3^1} = \frac{A_1 {A_1}^2}{C_3^1 C_2^1} = \frac{{A_1}^3}{3!};$$

$$A_4 = \frac{A_1 A_3}{C_4^1} = \frac{A_1 {A_1}^3}{C_4^1 3!} = \frac{{A_1}^4}{4!};$$

....

$$A_k = \frac{{A_1}^k}{k!}.$$

Таким образом, в этом случае получаем решение

$$\varphi(x) = 1 + A_1 + \frac{{A_1}^2}{2!}x^2 + ... = e^{A_1 x} = Bx,$$

где $B = e^{A_1}$, A_1 - произвольная матрица.

Матрица B будет невырожденной, т. к. собственные числа η_i матрицы B связаны с собственными числами ξ_i матрицы A соотношением $\eta_i = e^{\xi_i}$, т. е. $\eta_i \neq 0$. С другой стороны, уравнение $e^A = B$ имеет решение, если B - произвольная невырожденная матрица.

Итак, в этом случае общее решение записывается в виде

$$\varphi(x) = B^x,$$

где B - произвольная невырожденная матрица.

3. Пусть теперь A_0 -вырожденная матрица.

A_0 удовлетворяет уравнению ${A_0}^2 = A_0$, то есть является идемпотентной.

Как известно (см. [1]), общее решение для такой матрицы записывается в виде

$$A_0 = T\bar{A}_0 T^{-1},$$

где T - произвольная невырожденная матрица размерности $n \times n$,

$$\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1_m - единичная матрица размерности $m \times m$, $m < n$.

Перейдём теперь от матриц A_k к матрицам $\bar{A}_k = T^{-1} A_k T$.

Для них имеем те же уравнения, что и для A_k:

$$1.\ {\bar{A}_0}^2 = \bar{A}_0,$$

$$2.\ \bar{A}_0 \bar{A}_1 = \bar{A}_1 \bar{A}_0 = \bar{A}_1,$$

$$3.\ \bar{A}_0 \bar{A}_2 = \bar{A}_2 \bar{A}_0 = \bar{A}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Но поскольку $\bar{A}_0$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то матрицы $\bar{A}_k$ должны иметь вид

$$\bar{A}_k = \begin{pmatrix} \tilde{A}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A}_k$ - матрица размерности $m \times m$.

Таким образом, для матриц $\bar{A}_k$ задача сводится к случаю меньшей размерности m, и решение задачи в случае вырожденной матрицы A_0 будет выглядеть в общем случае как

$$\varphi(x) = T \begin{pmatrix} B^x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

где T – произвольная невырожденная матрица размерности $n \times n$,
B – произвольная невырожденная матрица размерности $m \times m, \ m < n$.

Рассмотрим теперь случаи разных n .

I. $n = 1$.

Решением будет $\varphi(x) = b^x, b \neq 0$.

II. $n = 2$.

$a \neq 0 \quad \varphi(x) = B^x = e^{Ax}$, где A – произвольная 2×2 матрица.

Запишем A с помощью σ – матриц Паули в виде

$$A = a_0 + \vec{a}\vec{\sigma} = a_0 + a\vec{n}\vec{\sigma},$$

где $\vec{n} = \dfrac{\vec{a}}{a}, \quad a = \sqrt{\vec{a}^2}, \quad a \neq 0$.

Тогда

$$e^{Ax} = e^{(a_0 + \vec{a}\vec{\sigma})x} = e^{a_0 x} e^{ax\vec{n}\vec{\sigma}} = e^{a_0 x}(\cosh ax + \vec{n}\vec{\sigma} \sinh ax).$$

Если же a=0, то имеем решение

$$e^{Ax} = e^{a_0 x}(1 + \vec{a}\vec{\sigma}x),$$

которое получается из предыдущего при $a \to 0$.

Итак, имеем два решения:

$$\varphi_1(x) = e^{a_0 x}(\cosh ax + \vec{n}\vec{\sigma} \sinh ax) = e^{a_0 x} \begin{pmatrix} \cosh ax + \vec{n}_3 \sinh ax & (n_1 - in_2) \sinh ax \\ (n_1 + in_2) \sinh ax & \cosh ax - \vec{n}_3 \sinh ax \end{pmatrix},$$

где a_0 – произвольное комплексное число;
a – произвольное $\neq 0$ комплексное число;
$\vec{n}$ - произвольный комлексный вектор, такой, что $\vec{n}^2 = 1$;

$$\varphi_2(x) = e^{a_0 x} \begin{pmatrix} 1 + \vec{a}_3 x & (a_1 - ia_2)x \\ (a_1 + ia_2)x & 1 - \vec{a}_3 x \end{pmatrix},$$

где a_0 – произвольное комплексное число;
$\vec{a}$ – произвольный комлексный вектор, такой, что $\vec{a}^2 = 0$.

Если ограничиться решениями в поле вещественных чисел, то общий вид решения будет

$$\varphi(x) = e^{Ax},$$

где A – произвольная вещественная матрица,

$$A = a_0 + \vec{a}\vec{\sigma}\,, \quad a_0 \in R, \quad \vec{a} = (a_1, ia_2, a_3), \quad a_k \in R\,.$$

Получаем следующие решения:

$$\varphi_1(x) = e^{a_0 x} \begin{pmatrix} ch\,ax + \dfrac{a_3}{a}\,sh\,ax & \dfrac{a_1 + a_2}{a}\,sh\,ax \\ \dfrac{a_1 - a_2}{a}\,sh\,ax & ch\,ax - \dfrac{a_3}{a}\,sh\,ax \end{pmatrix}; \; a = \sqrt{{a_1}^2 + {a_3}^2 - {a_2}^2} > 0,$$

$$\varphi_2(x) = e^{a_0 x} \begin{pmatrix} \cos ax + \dfrac{a_3}{a}\sin ax & \dfrac{a_1 + a_2}{a}\sin ax \\ \dfrac{a_1 - a_2}{a}\sin ax & \cos ax - \dfrac{a_3}{a}\sin ax \end{pmatrix}; \; a = \sqrt{{a_2}^2 - {a_1}^2 - {a_3}^2} > 0,$$

$$\varphi_3(x) = e^{a_0 x} \begin{pmatrix} 1 + a_3 x & (a_1 + a_2)x \\ (a_1 - a_2)x & 1 - a_3 x \end{pmatrix}; \quad {a_1}^2 + {a_3}^2 = {a_2}^2.$$

Выбрав $a_0 = 0, \;\; \vec{a} = (a_1, 0, 0)$, получим решение

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} ch\,ax & \dfrac{a_1}{a}\,sh\,ax \\ \dfrac{a_1}{a}\,sh\,ax & ch\,ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\,a_1 x & sh\,a_1 x \\ sh\,a_1 x & ch\,a_1 x \end{pmatrix},$$

то есть в этом случае $B = e^A = e^{\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} ch\,a_1 & sh\,a_1 \\ sh\,a_1 & ch\,a_1 \end{pmatrix}$.

Выбрав $a_0 = 0, \; \vec{a} = (0, ia_2, 0)$, получим решение

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \cos ax & \dfrac{a_2}{a}\sin ax \\ -\dfrac{a_2}{a}\sin ax & \cos ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_2 x & \sin a_2 x \\ -\sin a_2 x & \cos a_2 x \end{pmatrix},$$

то есть в этом случае $B = e^A = e^{\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos a_2 & \sinh a_2 \\ -\sin a_2 & \cosh a_2 \end{pmatrix}$.

Выбрав $a_0 = 0, \; \vec{a} = (1, i\sqrt{2}, 1)$, получим решение

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 + x & (1 + \sqrt{2})x \\ (1 - \sqrt{2})x & 1 - x \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим "вырожденное" решение:

$$\varphi(x) = T\begin{pmatrix} b^x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{b^x}{\Delta}\begin{pmatrix} \alpha\delta & -\alpha\beta \\ \gamma\delta & -\gamma\beta \end{pmatrix},$$

где $\Delta = det(T) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.

Таким образом, в этом случае $\varphi(x) = b^x A$, где A - произвольная идемпотентная вырожденная матрица размерности 2×2 .

Решим теперь эту задачу при $n = 2$ по-другому, чтобы можно было обобщить на случай $n > 2$.

Рассмотрим только случай типа a), то есть $\varphi(x) = B^x,\ det(B) \neq 0$, так как случай b) $det(B) \equiv 0$ не интересен.

Итак,

$$\varphi(x) = B^x = e^{Cx} = e^{a_0 x + Ax} = e^{a_0 x} e^{Ax},$$

где A – произвольная бесследная матрица.

Приведём её к жордановой форме:

$$A = T\bar{A}T^{-1},$$

где $\bar{A}$ имеет вид $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим сначала случай $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$.

Имеем

$$e^{Ax} = e^{T\bar{A}T^{-1}x} = Te^{\bar{A}x}T^{-1} = T\begin{pmatrix} e^{ax} & 0 \\ 0 & e^{-ax} \end{pmatrix}T^{-1} =$$

$$= T(e^{ax}\frac{1+\sigma_3}{2} + e^{-ax}\frac{1-\sigma_3}{2})T^{-1} = ch\,ax + sh\,ax T\sigma_3 T^{-1} = ch\,ax + \vec{n}\vec{\sigma}\,sh\,ax;$$

где $\vec{n}^2 = 1$.

Действительно, поскольку след матрицы σ_3 равен 0, то $T\sigma_3T^{-1} = \vec{b}\vec{\sigma}$,
где $\vec{b}$ – некоторый вектор.
Кроме того, поскольку $det(\sigma_3) = -1$, то и

$$det(\vec{b}\vec{\sigma}) = -\vec{b}^2 = -1 \ \Rightarrow\ \vec{b}^2 = 1.$$

Таким образом, мы получили решение $\varphi_1(x) = ch\,ax + \vec{n}\vec{\sigma}\,sh\,ax$.

В случае, когда $\bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, будем иметь

$$\bar{A}x=\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ (\bar{A}x)^2=0,\ ...,\ \ (\bar{A}x)^k=0,$$

то есть

$$e^{\bar{A}x}=1+\bar{a}x=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Te^{\bar{A}x}T^{-1}=T(1+\bar{A}x)T^{-1}=1+xT\bar{A}T^{-1}=1+xT\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}=1+\vec{a}\vec{\sigma}x,$$

где $\vec{a}^2=0$.

Действительно,

$$det(T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1})=0=-\vec{a}^2.$$

С другой стороны, для произвольного $\vec{a}$, такого, что $\vec{a}^2=0$, матрица $\vec{a}\vec{\sigma}$ должна сводиться к виду

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

с некоторой матрицей $T,\ det(T)\neq 0$.

Таким образом, мы получили решение

$$\varphi_3(x)=e^{a_0x}\begin{pmatrix} 1+a_3x & (a_1+a_2)x \\ (a_1-a_2)x & 1-a_3x \end{pmatrix};$$

$${a_1}^2+{a_3}^2={a_2}^2.$$

III $n=3$.

Снова рассмотрим только случай, когда $\varphi(x)=B^x$, где B - произвольная невырожденная матрица размерности 3×3.

Аналогично случаю $n=2$ запишем B^x в виде $B^x=e^{Cx}=e^{a_0x}e^{Ax}$, где A - произвольная бесследная матрица. Приведя её к жордановой форме, получим:

$$e^{Ax}=e^{T\bar{A}T^{-1}}=Te^{\bar{A}x}T^{-1}.$$

Снова имеем несколько случаев для матрицы $\bar{A}$.

1.) $\bar{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \sum a_i=0$.

В этом случае $e^{\bar{A}x}=\begin{pmatrix} e^{a_1x} & & \\ & e^{a_2x} & \\ & & e^{a_3x} \end{pmatrix}$, а для элементов матрицы e^{Ax} получаем:

$$\left(e^{Ax}\right)_{ik} = \left(Te^{\bar{A}x}T^{-1}\right)_{ik} = \sum_m t_{im}T_{mk}e^{a_m x},$$

где t_{ik} – элементы матрицы T ,
T_{ik} – элементы матрицы T^{-1} .

Ясно, что при подходящем выборе T в качестве элемента может получиться любая функция вида $\alpha_1 e^{a_1 x} + \alpha_2 e^{a_2 x} + \alpha_3 e^{a_3 x}$, где $\sum\limits_k \alpha_k = \{0 \text{ или } 1\}$.

2.) $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad 2a_1 + a_2 = 0$.

В этом случае $\bar{A}^2 = \begin{pmatrix} {a_1}^2 & 2a_1 & 0 \\ 0 & {a_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {a_2}^2 \end{pmatrix}; \quad \bar{A}^3 = \begin{pmatrix} {a_1}^3 & 3{a_1}^2 & 0 \\ 0 & {a_1}^3 & 0 \\ 0 & 0 & {a_2}^3 \end{pmatrix}; \quad \ldots \quad ;$

$$\bar{A}^m = \begin{pmatrix} {a_1}^m & m{a_1}^{m-1} & 0 \\ 0 & {a_1}^m & 0 \\ 0 & 0 & {a_2}^m \end{pmatrix}.$$

Значит, $e^{\bar{A}x} = \begin{pmatrix} e^{a_1 x} & xe^{a_1 x} & 0 \\ 0 & e^{a_1 x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ax} & xe^{ax} & 0 \\ 0 & e^{ax} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2ax} \end{pmatrix}$
(заменили $a_1 \to a$).

Отсюда $A = T\bar{A}T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ax} & xe^{ax} & 0 \\ 0 & e^{ax} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2ax} \end{pmatrix} T^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} t_{11}e^{ax} & (xt_{11}+t_{12})e^{ax} & t_{13}e^{-2ax} \\ t_{21}e^{ax} & (xt_{21}+t_{22})e^{ax} & t_{23}e^{-2ax} \\ t_{31}e^{ax} & (xt_{31}+t_{32})e^{ax} & t_{33}e^{-2ax} \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11}(T_{11}+xT_{21})e^{ax} + t_{12}T_{21}e^{ax} + t_{13}T_{31}e^{-2ax} & \ldots \\ t_{21}(T_{11}+xT_{21})e^{ax} + t_{22}T_{21}e^{ax} + t_{23}T_{31}e^{-2ax} & \ldots \\ \ldots & \end{pmatrix},$$

то есть в качестве элементов матрицы A получаются функции вида

$$(\alpha_1 + \alpha_2 x)e^{ax} + \alpha_3 e^{-2ax},$$

где $\alpha_1 + \alpha_3 = \{0 \text{ или } 1\}$.

3.)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\bar{A}^2 = 0, ..., \bar{A}^m = 0.$
Тогда

$$e^{\bar{A}x} = 1 + \bar{A}x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Te^{\bar{A}x}T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & xt_{11} + t_{12} & xt_{12} + t_{13} \\ t_{21} & xt_{21} + t_{22} & xt_{22} + t_{23} \\ t_{31} & xt_{31} + t_{32} & xt_{32} + t_{33} \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + x(t_{11}T_{21} + t_{12}T_{31}) & x(t_{11}T_{22} + t_{12}T_{32} & ... \\ ... & & \\ ... & & \end{pmatrix},$$

то есть в этом случае в качестве элементов получим функции вида ax, $1 + ax$.

Итак, теперь понятно, что и в случае $n > 3$ мы будем получать лишь суммы экспонент, может быть, домноженных ещё на x, и никаких новых "элементарных" функций не возникнет.

Прообраз Мироздания

Литература к Главе 13

[1] *Герт Айленбергер.* Свобода, наука и эстетика. //Х.О.Пайтген, П.Х.Рихтер. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: "Мир", 1993. С. 155.

[2] *Михайличенко Г.Г.* Математический аппарат теории физических структур. - Горно-Алтайск.: Изд-во ГАГУ, 1997. 144 с.

[3] *Лев В. Х.* Трёхмерные геометрии в теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. — Новосибирск, 1988. Вып **125**: Вычислительные системы. с.90–103.

В лесу, в Академгородке, стоит церковь из розового кедра

В лесу, в Академгородке, родилась ёлочка...

Глава 14

СТРОГИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Hic Rhodus, hic salta! [67]

Даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов человеческой деятельности, в ней достало бы на столетия пищи для размышления над большими проблемами, которые мы могли бы еще решать в собственной науке.

— Жан Дьедонне

§ 1. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) (для пешеходов)

§ 2. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) (для математиков)

§ 3. Ещё одно “функциональное” доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2), принадлежащее Михайличенко

§ 4. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (3,2), принадлежащее Льву

§ 5. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (4,2), принадлежащее Льву

[67] *Здесь Родос, здесь прыгай!* Употребляется в значении: самое сложное, самое важное – в этом; здесь следует доказать, убедить и т.п.
Источник выражения – басня Эзопа (VII - VI вв. до н.э.) “Хвастун”; ссылаясь на очевидцев, герой басни утверждает, что на острове Родосе он совершал огромные прыжки. В ответ на похвальбу один из слушателей говорит, что можно вообразить, будто находишься на Родосе и сейчас же на деле доказать свои возможности.

Общая черта всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определённым классам, **равноправны** по отношению к рассматриваемому закону.

В предыдущей главе излагалось элементарное введение в *теорию кортов* – введение в математический аппарат, позволяющий естественным образом сформулировать это равноправие.

Оказывается, что из одного только требования равноправия кортов перед законом, можно получить явный вид того или иного фундаментального физического закона до его конкретной физической интерпретации.

Это похоже на чудо, но тем не менее это действительно так!

В этой главе мы (Ю.И. Кулаков, Г.Г. Михайличенко и В.Х. Лев) рассмотрим несколько конкретных примеров и покажем, как из чрезвычайно общих сакральных уравнений, не зная ничего заранее, кроме ранга[68] (s, r) (неизвестны ни **репрезентатор** φ, ни **верификатор** Φ), как бы сами собой – буквально "из ничего", получаются единственные (с точностью до несущественных переобозначений) канонические решения, допускающие ту или иную физическую интерпретацию.

§ 1. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) (для пешеходов)

Итак, рассмотрим физическую структуру наименьшего возможного ранга $(2, , 2)$. На этом простейшем примере мы увидим, какие методы применяются при решении поставленной задачи.
Мы ищем такую бесконечную матрицу
$A = \|\varphi_{\alpha i}\|$ и такую функцию от четырёх переменных $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, чтобы элементы любой квадратной подматрицы A_{22}, построенной на двух произвольных строках α и β и двух произвольных столбцах i и k, были бы связанны между собой соотношением

$$\Phi(\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\beta k}, \varphi_{\beta k}) = 0 \tag{1}$$

От функции $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ мы потребуем лишь, чтобы она была дифференцируемой, и чтобы уравнение $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ было разрешимо относительно любой из переменных.

Прежде всего, из всех элементов множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ выделим по одному элементу $\underline{0} \in \mathfrak{N}$ и $\overline{0} \in \mathfrak{M}$, которые назовём "эталонами" в соответствующих множествах.

[68]Из фундаментальной теоремы Михайличенко, формулировка которой будет дана в следующей главе, следует, что и сам ранг не может быть выбран произвольно – его допустимые значения лежат в узком коридоре на плоскости целочисленных значений (s, r).

Затем, разрешив уравнение (1) относительно $\varphi_{\alpha i}$ и подставляя в (1) вместо β и k соответственно $\underline{0}$ и $\overline{0}$, получим:

$$\varphi_{\alpha i} = f\,(\varphi_{\alpha\overline{0}},\ \varphi_{\underline{0}i},\ \varphi_{\underline{0}\overline{0}}) = \varphi\,(\xi_\alpha, x_i), \tag{2}$$

где $x_i = \varphi_{\underline{0}i}$ и $\xi_\alpha = \varphi_{\alpha\overline{0}}$ – числовые параметры, характеризующие, соответственно, элементы множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$.

Итак, задача нахождения матрицы $A = \|\varphi_{\alpha i}\|$ или, что одно и то же, одной числовой функции от двух нечисловых аргументов α и i и одной функции от четырёх переменных $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, свелась к нахождению $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и одной числовой функции $\varphi(x, \xi)$ от двух числовых переменных ξ и x таких, что

$$\Phi\,(\varphi(\xi, x),\ \varphi(\xi, y),\ \varphi(\eta, x),\ \varphi(\eta, y)) \equiv 0 \tag{3}$$

Подчеркнём, что равенство (3) является тождеством относительно переменных $\xi,\ \eta,\ x,\ y$, обозначающих соответственно $\xi_\alpha,\ \xi_\beta,\ x_i,\ x_k$.

Дифференцируя тождество (3) по $\xi_\alpha,\ \xi_\beta,\ x_i,\ x_k$, мы получим систему четырёх однородных уравнений относительно четырёх неизвестных

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_4}$$

.

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} u(\xi, x) & u(\xi, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u(\eta, x) & u(\eta, y) \\ v(\xi, x) & 0 & v(\eta, x) & 0 \\ 0 & v(\xi, y) & 0 & v(\eta, y) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{4}$$

где

$$u(\xi, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi, x), \qquad\qquad v(\xi, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi, x),$$

или

$$\begin{vmatrix} w(\xi, x) & w(\xi, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w(\eta, x) & w(\eta, y) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} w(\xi, x) & w(\xi, y) \\ w(\eta, x) & w(\eta, y) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{5}$$

где

$$w(\xi, x) = \frac{u(\xi, x)}{v(\xi, x)}$$

Чтобы удовлетворить тождеству (5), необходимо и достаточно положить

$$u(\xi, x) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi, x)}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi, x)} = A(\xi)B(x),$$

где $A(\xi)$ и $B(x)$ – произвольные функции одного переменного.

Таким образом, задача сводится к решению следующего уравнения в частных производных

$$\frac{1}{A(\xi)} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi, x) - B(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi, x) = 0 \qquad (6)$$

Легко видеть, что общее уравнение уравнения (6) имеет вид

$$\varphi(\xi, x) = \chi(R(\xi) \cdot S(x)),$$

где $\chi(\xi)$ – произвольная функция одной переменной, а

$$R(\xi) = exp\int A(\xi)d\xi \qquad \text{и} \qquad S(x) = exp\int\frac{dx}{B(x)}.$$

Но так как (ξ) и $B(x)$ произвольны, то

$$a_{\alpha i} = \varphi(\xi_\alpha, x_i) = \chi(R(\xi) \cdot S(x)), \qquad (7)$$

где $\chi(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ – произвольные функции.

Чтобы найти вид функции $\Phi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$, перепишем (7) в виде

$$\chi^{-1}(a_{\alpha i}) = R(\xi) \cdot S(x),$$

откуда легко получаем, что

$$\Phi\left(\varphi_{\alpha i},\, \varphi_{\alpha k},\, \varphi_{\beta i},\, \varphi_{\beta k}\right) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(\varphi_{\alpha i}) & \chi^{-1}(\varphi_{\alpha k}) \\ \chi^{-1}(\varphi_{\beta i}) & \chi^{-1}(\varphi_{\beta k}) \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, мы показали, что матрица $A = \|a_{\alpha i}\|$ и функция $\Phi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$, удовлетворяющие принципу *сакральной симметрии* , определены с точностью до произвольной функции $\chi(x)$ одной переменной и имеют вид

$$\varphi_{\alpha i} = \chi(R_\alpha \cdot S_i),$$

где R_α и S_i – произвольные числа, и

$$\Phi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(x_1) & \chi^{-1}(x_2) \\ \chi^{-1}(x_3) & \chi^{-1}(x_4) \end{vmatrix}$$

Весна. 2001 год

§ 2. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) (для математиков)

Характерная черта для всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определенным классам, равноправны по отношению к рассматриваемому закону. Факт существования особого вида отношений – "отношений равноправия" – кажется нам имеющим существенное значение в качестве исходной физической идеи.

Прежде всего, придадим интуитивной идее "равноправия" строгую математическую формулировку. В этой статье мы дадим лишь частную формулировку принципа сакральной симметрии, не претендуя на слишком большую общность (это будет сделано в следующих работах).

Рассмотрим два произвольных множества: множество $\mathfrak{M}$, элементы которого будем обозначать через $i_1, i_2, \ldots,$ и множество $\mathfrak{N}$ с элементами, обозначаемыми через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Допустим, что каждой паре $(i, \alpha) \in \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ сопоставляется вещественное число $u_{i,\alpha}$, т. е. на множестве $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ определена некоторая функция $u : (i, \alpha) \to u_{i\alpha}$. Пусть m и n — натуральные числа и $\mathfrak{M}_m = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $\mathfrak{N}_n = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\}$. Подмножества $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ определяют некоторую матрицу из m строк и n столбцов:

$$u(i_1, i_2, \ldots, i_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \|u_{i_k\alpha_l}\|_{\substack{k=1,2,\ldots,m\\ l=1,2,\ldots,n}}. \tag{8}$$

Каждую такую матрицу будем рассматривать как точку mn-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^{mn}$. Изменение нумерации точек множества $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ ведет к преобразованиям матрицы (8), сводящимся к перестановкам ее строк и столбцов. $m!n!$ преобразований пространства $\mathbb{R}^{mn}$, соответствующих перестановкам строк и столбцов матрицы (8), будем называть каноническими перестановками $\mathbb{R}^{mn}$.

Будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана *физическая структура ранга* (m, n), если выполнены следующие условия

А) Существуют аналитическая функция mn переменных $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{mn})$, инвариантная относительно канонических перестановок пространства $\mathbb{R}^{mn}$ и такая, что множество $M \subset \mathbb{R}^{mn}$, определяемое уравнением $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{mn}) = 0$, есть непустое связное множество, и градиент Φ отличен от нуля в каждой точке M.

Б) Совокупность всех точек $u(i_1, i_2, \ldots, i_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ пространства $\mathbb{R}^{mn}$, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} = \mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{N}$ образует открытое относительно M подмножество M. В частности,

$$\Phi(u_{i_1\alpha_1}, u_{i_1\alpha_2}, \ldots, u_{i_m\alpha_n}) = 0 \tag{9}$$

при любых $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$.

В) Если уравнение (9) может быть однозначно разрешено относительно $u_{i_k\alpha_\lambda}$ и $u_{i_s\alpha_\lambda}$, где $u_{i_k\alpha_\nu}$ и $\nu \neq \lambda$ $s \neq k$, то, как две группы независимых параметров, они входят в Φ существенным образом [2].

Г) Для всякой системы из n чисел u_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Phi(u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{m-1,1}, u_{m-1,2}, \ldots, u_{m-1,n}, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

где

$$u_{p\lambda} = u_{i_p\alpha_\lambda} \quad (p = 1, 2, \ldots, m-1; \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n), \quad i_p \in \mathfrak{M}_{m-1}, \quad \alpha_\lambda \in \mathfrak{N}_n$$

найдется такой элемент i, что $u_1 = u_{i,\alpha_1}$, $u_2 = u_{i,\alpha_2}, \ldots, u_n = u_{i,\alpha_n}$. Аналогично, для всякой системы из m чисел v_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Phi(u_{11}, \ldots, u_{i,n-1}, v_1, u_{21}, \ldots, u_{2,n-1}, v_2, \ldots, u_{m1}, \ldots, u_{m,n-1}, v_m) = 0$$

найдется такое $\alpha \in \mathfrak{N}$, что $v_p = u_{i_p,\alpha}$.

Обсуждение физического и геометрического содержания введенного здесь понятия дается в [2], [7].

Рассмотрим случай физической структуры наименьшего возможного ранга (2,2).

Теорема. *Пусть тройка* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N},\ u : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R})$ *образует физическую структуру ранга* (2,2). *Тогда многообразие* M *может быть представлено уравнением*

$$\Theta[\chi(u_{i\alpha})\chi(u_{k\beta}) - \chi(u_{i\beta})\chi(u_{k\alpha})] = 0$$

где χ *и* Θ *— строго монотонные функции.*

Доказательство. Положим $v_{i\alpha} = \partial\Phi/\partial u_{i\alpha}$. При канонических перестановках в $\mathbb{R}^4$ вектор $v = (v_{i\alpha}, v_{i\beta}, v_{k\alpha}, v_{k\beta})$, очевидно, также подвергается каноническим перестановкам. Если $v \neq 0$, то среди канонических перестановок v есть хоть одна, для которой отлична от нуля первая координата. Это означает, что для любых двух подмножеств $\{i, k\} = \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$ и $\{\alpha, \beta\} = \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$ обозначения для элементов $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{N}_2$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, u_{k\alpha}, u_{k\beta}) \neq 0.$$

Фиксируем произвольно подмножества $\{i_0, k_0\} = \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$ и $\{\alpha_0\beta_0\} = \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$ так, чтобы в точке

$$u_0 = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_{i_0\alpha_0}, u_{i_0\beta_0}, u_{k_0\alpha_0}, u_{k_0\beta_0})$$

была отлична от нуля частная производная $(\partial\Phi/\partial u_1)(u_0)$. В силу сказанного это возможно. Ввиду того, что $(\partial\Phi/\partial u_1)(u_0) \neq 0$, найдутся числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что уравнение $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ однозначно разрешимо в области

$$|u_1 - {u_1}^0| < \varepsilon, \quad |u_i - {u_i}^0| < \delta \quad (i = 2, 3, 4) \tag{10}$$

Решая (8) относительно u_1, получим $u_1 = f(u_2, u_3, u_4)$.

Рассмотрим частные производные $(\partial f/\partial u_2)(u_2, u_3, u_4)$, $(\partial f/\partial u_3)(u_2, u_3, u_4)$. Если $(\partial f/\partial u_2)(u_2, u_3, u_4)$ обращается в нуль на множестве положительной меры в области $|u_i - {u_i}^0| < \delta$ $(i = 2, 3, 4)$, то ввиду аналитичности $(\partial f/\partial u_2)(u_2, u_3, u_4) = 0$ для всех (u_2, u_3, u_4), откуда следует, что $u_1 = F(u_3, u_4)$. Это, однако, противоречит условию существенности параметров u_2 и u_3. Аналогично получаем, что частная производная $(\partial f/\partial u_3)(u_2, u_3, u_4)$ не может обращаться в нуль на множестве положительной меры.

В силу сказанного можно выбрать точки $i_0,\ k_0,\ \alpha_0,\ \beta_0$ таким образом, чтобы производные $\partial f/\partial u_2,\ \partial f/\partial u_3$ были отличны от нуля для всех u_2, u_3, u_4, удовлетворяющих неравенствам (10). Для упрощения записи вместо k_0 и β_0 будем писать просто 0 и $\overline{0}$ соответственно.

Пусть x и ξ таковы, что

$$|x - {u_2}^0| < \delta, \quad |\xi - {u_3}^0| < \delta. \tag{11}$$

Положим $u = f(x,\xi,u_{0\bar{0}}) = \varphi(x,\xi)$.

Применяя условие Г), можно показать, что найдутся i и α такие, что

$$\varphi(x_1,\xi_1) = u_{i\alpha}, \quad \varphi(x_1,\xi_2) = u_{i\beta}, \quad \varphi(x_2,\xi_1) = u_{k\alpha}, \quad \varphi(x_2,\xi_2) = u_{k\beta}$$

Отсюда получаем функциональное уравнение

$$\Phi[\varphi(x,\xi),\varphi(x,\eta),\varphi(y,\xi),\varphi(y,\eta)] = 0,$$

где $x = x_1,\ y = x_2,\ \xi = \xi_1,\ \eta = \xi_2$.

Дифференцируя уравнение по $x,\ y,\ \xi,\ \eta,$ получим систему из четырех однородных линейных уравнений относительно неизвестных $\partial\Phi/\partial u_1$, $\partial\Phi/\partial u_2$, $\partial\Phi/\partial u_3$, $\partial\Phi/\partial u_4$. В силу условия А) хотя бы одна из величин $\partial\Phi/\partial u_i$ отлична от нуля и, значит, определитель системы равен нулю. Матрица коэффициентов рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\partial\varphi/\partial x)(x,\xi) & (\partial\varphi/\partial x)(x,\eta) & 0 & 0 \\ (\partial\varphi/\partial\xi)(x,\xi) & 0 & (\partial\varphi/\partial\xi)(y,\xi) & 0 \\ 0 & 0 & (\partial\varphi/\partial x)(y,\xi) & (\partial\varphi/\partial x)(y,\eta) \\ 0 & (\partial\varphi/\partial\xi)(x,\eta) & 0 & (\partial\varphi/\partial\xi)(y,\eta) \end{pmatrix}.$$

Приравнивая нулю определитель этой матрицы, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y,\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(y,\eta) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(y,\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\eta) = 0.$$

Фиксируя y и η, данное равенство можно переписать в виде

$$A(x)B(\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi) - C(x)D(\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi) = 0. \tag{12}$$

Если $x,\ y,\ \xi,\ \eta$ таковы, что

$$|x - {u_1}^0| < \delta, \quad |y - {u_2}^0| < \delta, \quad |\xi - {u_3}^0| < \delta, \quad |\eta - {u_4}^0| < \delta,$$

то ни один из коэффициентов в (12) не обращается в нуль, оно может быть переписано в виде

$$P(\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi) - Q(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi) = 0. \tag{13}$$

Отсюда нетрудно заключить, что φ представимо в виде $\varphi(x,\xi) = \chi[R(x)S(\xi)]$, где $\chi,\ R$ и S — произвольные монотонные функции данной переменной.

Имеем $u_{i\alpha} = \varphi(x_i,\xi_\alpha) = \chi(R(x_i)S(\xi_\alpha))$, откуда $R(x_i)S(\xi_\alpha) = \chi^{-1}(u_{i\alpha})$. Выписывая аналогичные соотношения для $u_{i\beta},\ u_{k\alpha},\ u_{k\beta}$, получим, что эти величины связаны соотношением

$$\Psi(u_{i\alpha},\ u_{i\beta},\ u_{k\alpha},\ u_{k\beta}) = \chi^{-1}(u_{i\alpha})\chi^{-1}(u_{k\beta}) - \chi^{-1}(u_{i\beta})\chi^{-1}(u_{k\alpha}).$$

В силу аналитичности и связности M равенство (13) выполняется всюду на M. Теорема доказана.

§ 3. Ещё одно "функциональное" доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2), принадлежащее Г.Г. Михайличенко [6]

Уравнение для физической структуры ранга $(2,2)$ конструируется по общей схеме [2]. Прямое произведение двух множеств $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots, l, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$ однозначно отображается на множество действительных чисел, то есть каждому элементу $(i, \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется некоторое число $a_{i\alpha}$

$$(i, \alpha) \to a_{i\alpha} \tag{14}$$

Будем говорить, что на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ отображение (14) реализует физическую структуру ранга (2, 2), если существует такая вещественная функция четырёх переменных $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, что

$$\forall i, k \in \mathfrak{M}, \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N} \Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0. \tag{15}$$

Предположим, что (15) однозначно разрешимо относительно хотя бы одного из четырёх аргументов, и функция Φ в (15) достаточное число раз дифференцируема. Соотношение (15) представляет собой функциональное уравнение специального вида для Φ . Это уравнение было решено, как мы уже отмечали, с использованием метода параметризации. Здесь мы применим второй из отмеченных во вступлении способов решения.

Выделим в множестве $\mathfrak{M}$ произвольное подмножество $\{i, k, l\}$, содержащее три элемента, и запишем (15) для любых двух элементов этого подмножества

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0,$$
$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0,$$
$$\Phi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0.$$

Разрешим каждое из этих соотношений относительно третьего аргумента

$$a_{k\alpha} = f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\beta}), \tag{16}$$

$$a_{l\alpha} = f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{l\beta}), \tag{17}$$

$$a_{l\alpha} = f(a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{l\beta}). \tag{18}$$

Подставим (16) в (18) и приравняем к (17)

$$f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{l\beta}) = f[f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\beta}), a_{k\beta}, a_{l\beta}]. \tag{19}$$

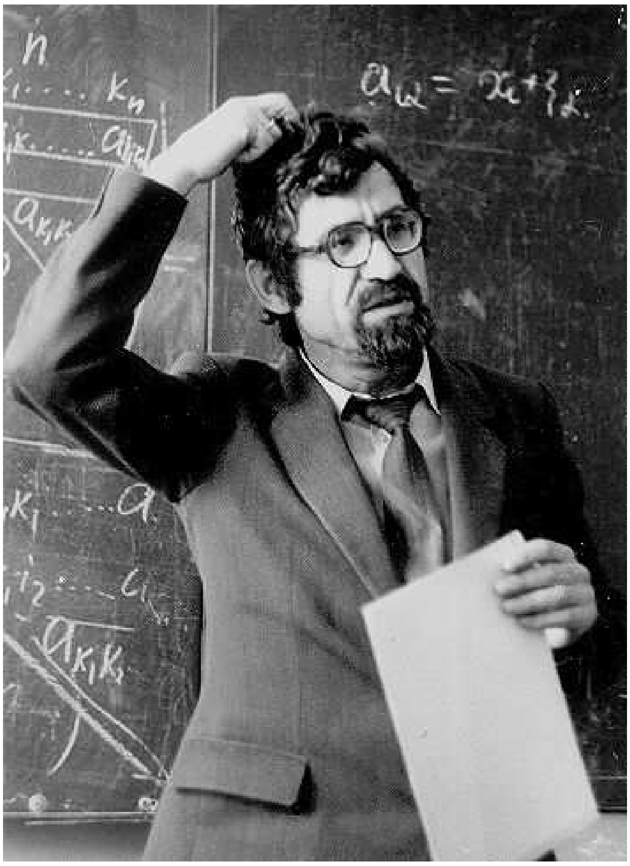
Соотношение (19) является тождеством. Переобозначим переменные в (19):

$$x = a_{i\alpha},\ y = a_{i\beta},\ z = a_{l\beta},\ s = a_{k\beta},$$

и имеем

$$f(x, y, z) = f[f(x, y, z), s, z]. \tag{20}$$

Таким образом, мы получили обычное функциональное уравнение, совпадающее с уравнением одномерного нестационарного движения [8].



Трудный вопрос

Ниже предлагается способ решения уравнения (20). Продифференцируем (20) отдельно по каждому из четырёх аргументов

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial f[\ldots]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f[\ldots]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial f[\ldots]}{\partial z},$$
$$0 = \frac{\partial f[\ldots]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial z} + \frac{\partial f[\ldots]}{\partial s}.$$

Выписанные четыре равенства можно рассматривать как систему четырёх линейных неоднородных уравнений относительно трёх неизвестных

$$\frac{\partial f[\ldots]}{\partial f(x,y,s)}, \quad \frac{\partial f[\ldots]}{\partial z}, \quad \frac{\partial f[\ldots]}{\partial s}.$$

Для совместности системы уравнений необходимо, чтобы определитель расширенной матрицы этой системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial s} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x} = 0. \tag{21}$$

Положим в (21) $s = const$. Тогда имеем

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \cdot A(x,y) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot B(x,y) = 0. \tag{22}$$

(22) легко интегрируется методом характеристик

$$f(x,y,z) = \chi[\varphi(x,y), z]. \tag{23}$$

Подставим (23) в (16)

$$a_{k\alpha} = \chi[\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}), a_{k\beta}] \tag{24}$$

Разрешим (24) относительно $\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta})$ и запишем соотношения (16), (17), (18) в новом виде

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) + \psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0,$$

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) + \psi(a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0,$$

$$\varphi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) + \psi(a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0,$$

откуда следует

$$\varphi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = -\psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}).$$

Таким образом, соотношение структуры (15) может быть представлено в виде

$$\psi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) - \psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0. \tag{25}$$

Аналогично, из справедливости условия (15) для любых двух элементов из подмножества $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathfrak{N}$ имеем другую возможную форму записи соотношения структуры (15)

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{k\alpha}) - \varphi(a_{i\beta}, a_{k\beta}) = 0. \tag{26}$$

Реализация двух возможных вариантов (25) и (26) налагает некоторые ограничения на функции двух переменных φ и ψ . Обозначим $x = a_{i\alpha}, y = a_{i\beta}, s = a_{k\alpha}, t = a_{k\beta}$. В новых обозначениях перепишем (25) и (26)

$$\psi(x,y) - \psi(s,t) = 0 \tag{27}$$

$$\varphi(x,s) - \varphi(y,t) = 0 \tag{28}$$

(27) и (28) задают в неявном виде, например, t как одну и ту же функцию переменных x, y, s

$$t = \chi_1[\psi(x, y), s] = \chi_2[\varphi(x, s), y]. \tag{29}$$

По переменным x, y, s (29) является тождеством. Продифференцируем (29) отдельно по x, y, s:

$$\frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial\psi(x,y)} \cdot \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial\varphi(x,s)} \cdot \frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial\psi(x,y)} \cdot \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial s} = \frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial\varphi(x,s)} \cdot \frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial s}.$$

Рассмотрим эти три равенства как систему трёх линейных неоднородных уравнений относительно следующих двух неизвестных

$$\frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial\varphi(x,s)}, \ \frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial y}.$$

Для совместности уравнений необходимо, чтобы определитель расширенной матрицы системы был равен нулю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial\psi(x,y)} \cdot \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial\psi(x,y)} \cdot \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} & 0 & 1 \\ \frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial s} & \frac{\partial\psi(x,s)}{\partial s} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Положим в (30) $x = a = const, \quad \psi(a, y) = u$

$$\psi_x(a, y) = A(u), \quad \frac{\varphi_x(a,s)}{\varphi_s(a,s)} = -B(s).$$

Раскрывая определитель (30), можем записать

$$\frac{\partial\chi_1(u,s)}{\partial u}A(u) + \frac{\partial\chi_1(u,s)}{\partial s}B(s) = 0.$$

Решение этого линейного уравнения может быть найдено методом характеристик

$$\chi_1(u, s) = \chi[\varphi(u) + \psi(s)] \tag{31}$$

Подставим (31) в (29) и введём некоторые переобозначения функций

$$t = \chi[\psi(x, y) + \psi(s)]$$

или

$$\psi(x, y) = \varphi(t) - \psi(s) \tag{32}$$

Из сравнения (27) и (32) следует

$$\psi(s,t) = -\psi(s) + \varphi(t)$$

и вместо (27) имеем

$$-\psi(x) + \varphi(y) + \psi(s) - \varphi(t) = 0. \tag{33}$$

Но, с другой стороны, (33) может быть записано в виде (28), то есть

$$\varphi(x,s) = -\psi(x) + \psi(s)$$

$$\varphi(y,t) = -\varphi(y) + \varphi(t)$$

откуда

$$\varphi(x) = \psi(x).$$

Таким образом, получаем окончательную формулу записи соотношенния структуры ранга (2,2)

$$\psi(a_{i\alpha}) - \psi(a_{i\beta}) - \psi(a_{k\alpha}) + \psi(a_{k\beta}) = 0. \tag{34}$$

(34) можно рассматривать как самое общее и единственное решение уравнения (15) бинарной физической структуры ранга (2,2). Обычная мультипликативная форма записи решения (34) получается при следующей замене функций

$$\psi(x) = ln\lambda(x)$$

$$ln\lambda(a_{i\alpha})\lambda(a_{k\beta}) - ln\lambda(a_{k\alpha})\lambda(a_{i\beta}) = 0$$

или

$$\lambda(a_{i\alpha}) \cdot \lambda(a_{k\beta}) - \lambda(a_{k\alpha}) \cdot \lambda(a_{i\beta}) = 0.$$

§ 4. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (3,2), принадлежащее Льву [4]

Пусть имеется два множества объектов $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$. И пусть дана функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, которая каждой паре элементов сопоставляет вещественное число $f(i\alpha) \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим $\mathfrak{M}^3 = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$. Построим функцию $F : \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2 \to \mathbb{R}^6$, которая каждому кортежу $< ijk, \alpha\beta > \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2$ сопоставляет шесть чисел $f(i\alpha), \ldots, f(k\beta)$, которые будем рассматривать как координаты точки пространства $\mathbb{R}^6$.

Потребуем выполнение следующих аксиом:

I. Множество $\mathfrak{M}$ является арифметическим пространством $\mathbb{R}^1$, а множество $\mathfrak{N}$ является арифметическим пространством $\mathbb{R}^2$.

Тогда каждый элемент из $\mathfrak{M}$ характеризуется одним параметром $(i) \to x_i$, а элемент из $\mathfrak{N}$ — двумя параметрами: $(\alpha) \to \xi_\alpha, h_\alpha$. Следовательно, двухточечная функция $f(i\alpha)$ будет иметь локальное координатное представление в виде:

$$f(i\alpha) = f(x_i; \xi_\alpha, h_\alpha).$$

II. Функция $f(x_i; \xi_\alpha, h_\alpha)$ — гладкая класса C^k (где k — достаточно большое) и существенным образом зависит от каждой группы координат (по Эйзенхарту [11]). То есть нельзя найти такую функцию $\varphi(\xi_\alpha, h_\alpha)$, чтобы имело место соотношение $f(x_i; \xi_\alpha, h_\alpha) = \Theta(x_i, \varphi(\xi_a, h_\alpha))$.

Производные функции $f(x_i; \xi_\alpha, h_\alpha)$ по каждому аргументу не равны нулю тождественно.

Определение. Будем говорить, что тройка $< \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, f >$ задает физическую структуру ранга (3,2), если кроме аксиом I, II выполняется следующая аксиома:
III. Для $\forall i, j, k \in \mathfrak{M}$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ существует такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, что $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ и выполняется соотношение:

$$\Phi[f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)] = 0. \tag{35}$$

Задача состоит в том, чтобы найти явный вид функций f и Φ таких, чтобы для любых трех элементов из $\mathfrak{M}$ и для двух элементов из $\mathfrak{N}$ выполнялось соотношение (35). Продифференцируем соотношение (35) по всем семи параметрам x_i, x_j, x_k, ξ_α, h_α, ξ_β, h_β. Получим систему из семи уравнений относительно шести частных производных функции Φ по каждому своему аргументу. Матрица коэффициентов имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} f_{x_i}(i\alpha) & f_{x_i}(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{x_j}(j\alpha) & f_{x_j}(j\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{x_k}(k\alpha) & f_{x_k}(k\beta) \\ f_{\xi_\alpha}(i\alpha) & 0 & f_{\xi_\alpha}(j\alpha) & 0 & f_{\xi_\alpha}(k\alpha) & 0 \\ f_{h_\alpha}(i\alpha) & 0 & f_{h_\alpha}(j\alpha) & 0 & f_{h_\alpha}(k\alpha) & 0 \\ \hline 0 & f_{\xi_\beta}(i\beta) & 0 & f_{\xi_\beta}(j\beta) & 0 & f_{\xi_\beta}(k\beta) \\ 0 & f_{h_\beta}(i\beta) & 0 & f_{h_\beta}(j\beta) & 0 & f_{h_\beta}(k\beta) \end{array} \right\| \tag{36}$$

где $f_{x_i}(i\alpha) = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}$, $f_{\xi_i}(i\alpha) = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_i}$ и т. д.

Так как $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ (аксиома III), то система имеет нетривиальное решение. Следовательно, ранг матрицы (36) меньше шести. Можно доказать, что определитель пятого порядка, отмеченный линией в матрице, не равен нулю (используя аксиому II). То есть ранг матрицы (36) равен пяти. По теории [7] все определители шестого порядка, окаймляющие не равный нулю определитель пятого порядка, равны нулю. Таких определителей будет два.

Раскрывая их по первому столбцу и фиксируя элементы i, j, k, получим систему из двух уравнений:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}A_1(x_i) + \frac{f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha}B_1(\xi_\alpha, h_\alpha) + \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial h_\alpha}B_2(\xi_\alpha, h_\alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}A_2(x_i) + \frac{f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha}B_3(\xi_\alpha, h_\alpha) + \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial h_\alpha}B_4(\xi_\alpha, h_\alpha) = 0. \tag{37}$$

Можно доказать (используя аксиому II), что эти уравнения линейно независимы.

Решаем первое уравнение методом характеристик:

$$\frac{dx_i}{A_1(x_i)} = \frac{d\xi_\alpha}{B_1(\xi_\alpha, h_\alpha)} = \frac{dh_\alpha}{B_2(\xi_\alpha, h_\alpha)}.$$

Его интегралы: $\psi_2(\xi_\alpha, h_\alpha) = C_1$; $\varphi(x_i) - \psi_1(\xi_\alpha, h_\alpha) = C_2$. Делаем замену переменных:

$$\psi_2(\xi_\alpha, h_\alpha) = \rho_1; \quad \varphi(x_i) - \psi_1(\xi_\alpha, h_\alpha) = \rho_2; \quad x = \rho_0.$$

Тогда из первого уравнения $\partial f(i\alpha)/\partial\rho_0 = 0$, а второе уравнение примет вид:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \rho_1}[\psi_{2\xi_\alpha}B_3(\xi_\alpha, h_\alpha) + \psi_{2h_\alpha}B_4(\xi_\alpha, h_\alpha)] + \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \rho_2}[\varphi_{x_i}A_2(x_i) - (\psi_{1\xi_\alpha}B_3 + \psi_{1h_\alpha}B_4)] = 0.$$

Перейдем к переменным: $\varphi(x) = \overline{x}$; $\psi_1(\xi, h) = \overline{\xi}$; $\psi_2(\xi, h) = \overline{h}$:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \rho_1}R_1(\overline{\xi}, \overline{h}) + \frac{\partial(i\alpha)}{\partial \rho_2}[T(\overline{x}) - R_2(\overline{\xi}, \overline{h})] = 0, \tag{38}$$

$$f(i\alpha) = f(\overline{h}, \overline{x} - \overline{\xi}) = f(\rho_1, \rho_2).$$

Из уравнения (38) находим:

$$T(\overline{x}) \cdot \frac{1}{R_1(\overline{\xi}, \overline{h})} - \frac{R_2}{R_1}(\overline{\xi}, \overline{h}) = -\frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} \Bigg/ \frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} = \chi(\overline{x} - \overline{\xi}, \overline{h}).$$

или

$$T(\overline{x})E_1(\overline{\xi}, \overline{h}) - E_2(\overline{\xi}, \overline{h}) = \chi(\underbrace{\overline{x} - \overline{\xi}}_{\rho_2}, \underbrace{\overline{h}}_{\rho_1}).$$

Штрихи в дальнейшем опустим.

Продифференцируем полученное соотношение по x, затем его же — по ξ и сложим два полученных соотношения. Получим:

$$T_x(x)E_1(\xi, h) + T(x)E_{1\xi}(\xi, h) - E_{2\xi}(\xi, h) = 0. \tag{39}$$

Фиксируя ξ, h, имеем:

$$T_x(x) = K_1T(x) + K_2. \tag{40}$$

Отметим, что K_1 и K_2 не равны одновременно нулю. Действительно, в противном случае $T(x) = \text{const} = C_1$ и из (38) находим:

$$C_1 E_1(\xi, h) - E_2(\xi, h) = M(h)M(\rho_1).$$

Уравнение (38) примет вид:

$$\frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} + \frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} M(\rho_1) = 0.$$

Его интеграл: $-\overline{M}(\rho_1) + \rho_2 = C$. То есть решение системы будет иметь вид: $f(i\alpha) = \Theta(\rho_2 - \overline{M}(\rho_1))$. Возвращаясь к старым переменным, получаем:

$$f(x_i, \xi_\alpha, h_\alpha) = \Theta(\varphi(x) - \psi_1(\xi, h) - \overline{M}(\xi, h)) = \Theta(\varphi(x) - \lambda(\xi, h)).$$

То есть функция $f(x, \xi, h)$ несущественным образом зависит от переменных ξ, h, что противоречит аксиоме II.

Итак, имеем: $T_x(x) = K_1 T(x) + K_2$, где K_1, K_2 не равны нулю одновременно. Подставляя это соотношение в (39), получим:

$$T(x)(K_1 + E_{1\xi}/E_1) + (K_2 - E_{2\xi}/E_1) = 0.$$

Если круглые скобки не равны нулю, то отсюда получим: $T(x) = \text{const}$, что приводит (как показано выше) к противоречию с аксиомой II. То есть,

$$E_{1\xi} = -K_1 E_1; \quad E_{2\xi} = K_2 E_1. \tag{41}$$

Возможны два случая: $K_1 \neq 0$; $K_1 = 0$.
Рассмотрим случай $\underline{K_1 \neq 0}$.
Тогда из (40), (41) находим:

$$T(x) = C_1 e^{K_1 x} - \frac{K_2}{K_1}; \quad E_1 = \mu_1(h) e^{-K_1 \xi}; \quad E_2 = \frac{-K_2}{K_1} e^{-K_1 \xi} \mu_1(h) + \mu_2(h).$$

$$T(x)E_1(\xi, h) - E_2(\xi, h) = C_1 \mu_1(h) e^{K_1(x-\xi)} - \mu_2(h) = \overline{\mu}_1(\rho_1) e^{K_1 \rho_2} - \mu_2(\rho_1).$$

Уравнение (38) запишется в виде:

$$\frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} + \frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} \left[\overline{\mu}_1(\rho_1) e^{K_1 \rho_2} - \mu_2(\rho_2)\right] = 0.$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{d\rho_2}{\overline{\mu}_1(\rho_1) e^{K_1 \rho_2} - \mu_2(\rho_1)} = \frac{d\rho_1}{1}.$$

Введем новую переменную: $u = e^{-K_1 \rho_2}$. Тогда $du = -K_1 u d\rho_2$. Отсюда $d\rho_2 = -\frac{du}{K_1 u}$. Подставляя в уравнение характеристик, имеем:

$$\frac{du}{d\rho_1} \sigma_1(\rho_1) \cdot u + \sigma_2(\rho_1) \text{ — линейное уравнение.}$$

Его решение: $u = e^{\int \sigma_1(\rho_1)d\rho_1} + \left(\int \sigma_2(\rho_1)e^{-\int \sigma_1(\rho_1)d\rho_1}d\rho_1 + C\right)$. Отсюда интеграл всей системы равен:

$$C = ue^{-\int \sigma_1(\rho_1)d\rho_1} - \int \sigma_2(\rho_1)e^{-\int \sigma_1(\rho_1)d\rho_1}d\rho_1.$$

Возвращаясь к старым переменным, имеем:

$$C = e^{-K_1[\varphi(x)-\psi_1(\xi,h)]} \cdot \nu_1(\xi, h) - \nu_2(\xi, h) = \widetilde{x} \cdot \widetilde{\xi} + \widetilde{h}.$$

И решение имеет вид: $f(\widetilde{x}, \widetilde{\xi}, \widetilde{h}) = \chi(\widetilde{x} \cdot \widetilde{\xi} + \widetilde{h})$.

Рассмотрим случай $\underline{K_1 = 0 \quad (K_2 \neq 0)}$. Из (40), (41) находим: $T(x) = K_2x + K_3$, $E_1 = M_1(h)$, $E_2 = K_2\xi \cdot M_1(h) + M_2(h)$.

$$T(x)E_1(\xi, h) - E_2(\xi, h) = K_2\mu_1(h)\rho_2 - \mu_2(h).$$

Уравнение (38) запишется в виде:

$$\frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} + \frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2}[\sigma_1(\rho_1) \cdot \rho_2 + \sigma_2(\rho_1)] = 0$$

Решая его получим:

$$\underline{f(x, \xi, h) = \chi(x \cdot \xi + h)},$$

то есть такое же решение, как и в случае $K_1 \neq 0$.

Итак, одна часть задачи решена: найден явный вид функции $f(x_i, \xi_\alpha, h_\alpha)$:

$$f(x_i, \xi_\alpha, h_\alpha) = \chi(x_i \cdot \xi_\alpha + h_\alpha), \tag{42}$$

где χ — произвольная монотонная функция. Найдем явный вид функции Φ . Удобно перейти от функции $f(i\alpha)$ к функции $\chi^{-1}(f(i\alpha)) = a_{i\alpha} = x_i \cdot \xi_\alpha + h_\alpha$. Будем искать функцию

$$\Phi(\underbrace{a_{i\alpha}}_{u_1}, \underbrace{a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}, a_{k\alpha}}_{\dots}, \underbrace{a_{k\beta}}_{u_6}) = 0, \tag{43}$$

для которой $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$.

Можно выписать все шесть функций $a_{i\alpha}, \dots, a_{k\beta}$ в явном виде и, комбинируя их, освободиться от всех семи параметров $x_i, \dots, h_\beta$, найдя таким образом, связь между функциями $a_{i\alpha}, \dots, a_{k\beta}$.

Можно найти эту связь и аналитически. Используя условие $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$, можно доказать, что все частные производные $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial u_6}$ не равны нулю. Продифференцируем (9) по ξ_α и по h_α :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}x_i + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}x_j + \frac{\partial\Phi}{\partial u_5}u_k = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial u_5} = 0 \tag{44}$$

Умножая первое уравнение на ξ_α , второе — на h_α и сложим. Получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}a_{i\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}a_{j\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_5}a_{k\alpha}=0.$$

Умножая первое уравнение из (44) на ξ_β , второе —на h_β и складывая, получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}a_{i\beta}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}a_{j\beta}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_5}a_{k\beta}=0.$$

Выпишем второе уравнение из (44):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_5}=0$$

Имеем три уравнения относительно трех “неизвестных" $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$ $\frac{\partial\Phi}{\partial u_5}$, не равных нулю. Следовательно, определитель, составленный из коэффициентов системы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{j\alpha} & a_{k\alpha} \\ a_{i\beta} & a_{j\beta} & a_{k\beta} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Это и есть функция $\Phi(a_{i\alpha},\dots,a_{k\beta})=0$. Задача решена полностью.

§ 5. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (4,2), принадлежащее Льву [4]

В теории физических структур, разрабатываемой Ю. И. Кулаковым и его учениками, исследуется вопрос о существовании и единственности физических структур, определенных на одном, двух и более множествах физических объектов [2], [5].

Задача о существовании физических структур на двух множествах полностью решена Г. Г. Михайличенко в его диссертации. Им же были исследованы физические структуры ранга $r=3$, $r=4$, определенные на одном множестве. При решении этих задач применялся разработанный им специальный функциональный метод. Но решить вопрос о существовании структур на одном множестве ранга $r>4$ функциональным методом не удавалось.

Для исследования физических структур на одном множестве ранга $r>4$ автором разработан общий параметрический метод, который является достаточно универсальным. С его помощью можно исследовать структуры, определенные на двух и более множествах [4]. Применение параметрического метода позволило внести интересные уточнения, связанные с единственностью решения для структур ранга (r,r) , определенных на двух множествах.

В данной работе этим методом исследуется физическая структура ранга $(4,2)$ и дается геометрическая интерпретация полученных результатов.

Приведем краткую постановку задачи. Пусть имеются два множества объектов $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$. Выберем из множества $\mathfrak{M}$ любые четыре элемента, а из $\mathfrak{N}$ — любые два элемента. Поставим в соответствие каждой паре элементов (по одному из каждого множества) (i, α) вещественное число $f(i\alpha)$. Всего таких чисел будет восемь.

Будем говорить, что элементы множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ находятся в отношении феноменологической симметрии (или существует физическая структура ранга $(4, 2)$), если имеет место зависимость:

$$\Phi[f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta), f(l\alpha), f(l\beta)] = 0 \qquad (45)$$

для $\forall i, j, k, l \in \mathfrak{M}$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$. На множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и функции f и Φ вводятся достаточно естественные ограничения.

1. Множеству $\mathfrak{M}$ соответствует многообразие размерности m; множеству $\mathfrak{N}$ соответствует многообразие размерности n.

В [10] и [9] показано, что содержательными задачи в теории физических структур являются те, для которых выполняются условия: $m = s - 1,\ n = r - 1$, где (r, s) и есть ранг физической структуры; т. е. в рассматриваемом случае $m = 1;\ n = 3$.

Таким образом, это требование означает, что каждый элемент множества $\mathfrak{M}$ характеризуется одним параметром $(i) \to x_i$, а элемент из $\mathfrak{N}$ — тремя параметрами $(\alpha) \to \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha$. Двухточечная функция $f(i\alpha)$ имеет локальное координатное представление в виде:

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha).$$

2. Функция $f(i\alpha)$ — гладкая класса c^k (где k — достаточно большое) и существенным образом зависящая от своих координат (по Эйзенхарту [?, стр. 16]).

3. Функция Φ — достаточно гладкая, и $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$. Рассмотрим соотношение (1). Продифференцируем его по всем десяти параметрам x_i, x_j, x_k, x_l, ξ_α, η_α, ζ_α, ξ_β, η_β, ζ_β. Получаем систему из десяти уравнений относительно восьми частных производных функции Φ по каждому аргументу. Матрица коэффициентов имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c}
f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(l\alpha) & f_x(l\beta) \\
f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 & f_\xi(l\alpha) & 0 \\
f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 & f_\eta(l\alpha) & 0 \\
f_\zeta(i\alpha) & 0 & f_\zeta(j\alpha) & 0 & f_\zeta(k\alpha) & 0 & f_\zeta(l\alpha) & 0 \\
\hline
0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) & 0 & f_\xi(l\beta) \\
0 & f_\eta(i\beta) & 0 & f_\eta(j\beta) & 0 & f_\eta(k\beta) & 0 & f_\eta(l\beta) \\
0 & f_\zeta(i\beta) & 0 & f_\zeta(j\beta) & 0 & f_\zeta(k\beta) & 0 & f_\zeta(l\beta)
\end{array} \right\|, \qquad (46)$$

где

$$f_x(i\alpha) = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}; \quad f_x(j\alpha) = \frac{\partial f(j\alpha)}{\partial x_j}; \quad f_\xi(i\alpha) = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha}; \quad f_\xi(i\beta) = \frac{\partial f(i\beta)}{\partial \xi_\beta}$$

и т. д..

Так как по третьей аксиоме в постановке задачи $\mathrm{grad}\phi \neq 0$, то система имеет нетривиальное решение. Следовательно, ранг матрицы (46) меньше восьми. Можно показать, что определитель седьмого порядка, отмеченный линией в (2) не равен нулю, т. е. ранг матрицы равен семи. Выпишем все три окаймляющие его определителя восьмого порядка, равные нулю. Раскрывая их по первому столбцу и фиксируя элементы i , k , α , β , получим систему из трех уравнений относительно функции $f(i\alpha)$:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}B_\mu(i)+\frac{\partial f(j\alpha)}{\partial \xi_\alpha}C^1_\mu(\alpha)+\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \eta_\alpha}C^2_\mu(\alpha)+\frac{\partial f(i\beta)}{\partial \zeta_\alpha}C^3_\mu(\alpha)=0, \tag{47}$$

где $\nu=1,2,3;\quad B_\mu(i)=B_\mu(x_i)\quad C^1_\mu(\alpha)=C^1_\mu(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)$ и т. д. Можно показать, что ранг системы равен трем, т. е. все уравнения линейно-независимы.

Решаем первое уравнение методом характеристик:

$$\frac{dx_i}{B_1(i)}=\frac{d\xi_\alpha}{C^1_1(\alpha)}=\frac{d\eta_\alpha}{C^2_1(\alpha)}=\frac{d\zeta_\alpha}{C^3_1(\alpha)}.$$

Его интегралы: $\psi_1(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)=k_1$; $\psi_2(\alpha)=k_2$; $\varphi_1(i)-\psi_3(\alpha)=k_3$. Делаем замену переменных: $k_1=y_1$; $k_2=y_2$; $k_3=y_3$; $x=y_0$. Тогда из первого уравнения $f_{y_0}(i\alpha)=0$, а второе и третье уравнения системы (3) запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} f_{y_3}[A_1(x_i)-R_3(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)]+f_{y_1}R_1(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)+f_{y_2}R_2(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)=0,\\ f_{y_3}[A_2(x_i)-R_6(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)]+f_{y_1}R_4(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)+f_{y_2}R_5(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)=0,\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

где

$$f_{y_1}=\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_1};\quad f_{y_2}=\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_2};\quad f_{y_3}=\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_3}.$$

Для удобства перейдем к переменным $\overline{x}_i=\varphi_1(i)$; $\overline{\xi}_\alpha=\psi_1(\alpha)$; $\overline{\eta}_\alpha=\psi_2(\alpha)$; $\overline{\zeta}_\alpha=\psi_3(\alpha)$. Тогда $f(i\alpha)=f(\overline{\xi}_\alpha,\overline{\eta}_\alpha,\overline{x}_i-\overline{\zeta}_\alpha)$. В дальнейшем штрихи и индексы у переменных опускаем.

Рассмотрим первое уравнение системы (48). Продифференцируем его по x , затем его же по ζ и сложим полученные соотношения. Получаем

$$f_{y_1}R_{1\zeta}+f_{y_2}R_{2\zeta}+f_{y_3}(A_{1x}-R_{3\zeta})=0. \tag{49}$$

Такую же процедуру проделаем и с полученным уравнением. Получаем:

$$f_{y_1}R_{1\zeta\zeta}+f_{y_2}R_{2\zeta\zeta}+f_{y_3}(A_{1xx}-R_{3\zeta\zeta})=0. \tag{50}$$

Полученные два соотношения вместе с первым уравнением системы (48) образуют систему уравнений относительно трех "неизвестных" f_{y_1} , f_{y_2} , f_{y_3} . Так как ни одно из неизвестных не равно нулю (по второй аксиоме в постановке задачи), то определитель, составленный из коэффициентов системы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} R_1 & R_2 & A_1-R_3\\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} & A_{1x}-R_{3\zeta}\\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} & A_{1xx}-R_{3\zeta\zeta}\end{vmatrix}=0.$$

Раскроем его по третьему столбцу:

$$A_1\begin{vmatrix} R_{1\zeta} & R_{2\zeta} \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta}\end{vmatrix} - A_{1x}\begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta}\end{vmatrix} + A_{1xx}\begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} & R_{3\zeta} \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} & R_{3\zeta\zeta}\end{vmatrix} = 0.$$

Фиксируя переменные $\xi,\ \eta,\ \zeta$, получаем

$$a_0 A_{1xx} + a_1 A_{1x} + a_2 A_1 = h_0 \tag{51}$$

Здесь возмозны два случая:

1) все коэффициенты равны нулю;
2) не все коэффициенты равны нулю.

Рассмотрим случай 1. Пусть $a_0 = a_1 = a_2 = h_0 = 0$.
Рассмотрим

$$a_0 = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta}\end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $\frac{R_{1\zeta}}{R_1} = \frac{R_{2\zeta}}{R_2}$. Решая, получаем: $R_2 = \Theta_1(\xi,\eta)R_1 = \Theta_1(y_1,y_2)R_1$. Подставляя значение R_2 в первое уравнение системы (4) и сокращая на R_1 , имеем:

$$f_{y_1} + f_{y_2}\Theta_1(y_1,y_2) + f_{y_3}\left(A_1\frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1}\right) = 0.$$

Отсюда

$$A_1\frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1} = \chi(\underbrace{\xi}_{y_1}, \underbrace{\eta}_{y_2}, \underbrace{x-\zeta}_{y_3}).$$

Это функциональное уравнение легко решается:

$$\chi = \Theta_2(y_1,y_2)\exp k_1 y_3 - \Theta_3(y_1,y_2).$$

Подставляя χ в первое уравнение, получаем:

$$f_{y_1} + f_{y_2}\Theta_1(y_1,y_2) + f_{y_3}[\Theta_2(y_1,y_2)\exp k_1 y_3 - \Theta_3(y_1,y_2)] = 0. \tag{52}$$

Рассмотрим случай 2. Не все коэффициенты $a_0,\ a_1,\ a_2,\ h_0$ равны нулю.

Умножим первое уравнение системы (48) на a_2 , (49) — на a_1 , (50) — на a_0 и сложим их. Учитывая (51), получаем:

$$f_{y_1}[a_2R_1 + a_1R_{1\zeta} + a_0R_{1\zeta\zeta}] + f_{y_2}[a_2R_2 + a_1R_{2\zeta} + a_0R_{2\zeta\zeta}] + f_{y_3}[h_0 - (a_2R_2 + a_1R_{3\zeta}a_0R_{3\zeta\zeta})] = 0.$$

Если не все скобки равны нулю, то производим деление, например, на скобку при f_{y_1} , получаем:

$$f_{y_1} + f_{y_2}\Phi_1(\xi,\eta,\zeta) + f_{y_3}\Phi_3(\xi,\eta,\zeta) = 0.$$

Можно показать, что такое уравнение ведет к потере существенного аргумента, что не допускается по аксиоме 2 в постановке задачи т. е. все скобки равны нулю, и окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} a_0A_{1xx}+a_1A_{1x}+a_2A_1=h_0;\quad a_0R_{1\zeta\zeta}+a_1R_{1\zeta}+a_2R_1=0;\\ a_0R_{3\zeta\zeta}+a_1R_{3\zeta}+a_2R_3=h_0;\quad a_0R_{2\zeta\zeta}+a_1R_{2\zeta}+a_2R_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

В общем случае можно считать, что ни один из коэффициентов a_0, a_1, a_2, h_0 не равен нулю. При равенстве нулю одного из коэффициентов получающиеся решения будут являться частными случаями общего решения. Пусть $\underline{\Delta = a_1^2-4a_2a_0\neq 0}$. Из (53) находим:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1\exp k_1x+C_2\exp k_2x+h_0/a_2;\\ R_1 &= \psi_1(\xi,\eta)\exp k_1\zeta+\psi_2(\xi,\eta)\exp k_2\zeta;\\ R_2 &= \psi_3(\xi,\eta)\exp k_1\zeta+\psi_4(\xi,\eta)\exp k_2\zeta;\\ R_3 &= \psi_5(\xi,\eta)\exp k_1\zeta+\psi_6(\xi,\eta)\exp k_2\zeta+h_0/a_2;\\ k_{1,2} &= \frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_0}.\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (48) и разделив его на $\exp k_2\zeta$, получаем:

$$\begin{aligned}&[f_{y_1}\psi_1+f_{y_2}\psi_3+f_{y_3}(C_1\exp k_1y_3-\psi_5)]\exp(k_1-k_2)\zeta+\\ &\qquad+[f_{y_1}\psi_2+f_{y_2}\psi_4+f_{y_3}(C_2\exp k_2y_3-\psi_6)]=0.\end{aligned}$$

Так как $\Delta = a_1^2-4a_2a_0=0$, то $k_1\neq k_2$ и можно показать, что выражения в квадратных скобках равны нулю. В результате получаем два уравнения, аналогичных уравнению (52).

Если $\underline{\Delta = a_1^2-4a_2a_0=0}$, то $k_1=k_2$ и коэффициенты A_1, R_1, R_2, R_3 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1=(C_1x+C_2)\exp k_1x+H_0/a_2;\qquad R_1=(\psi_1\zeta+\psi_2)\exp k_1\zeta;\\ R_3=(\psi_5\zeta+\psi_6)\exp k_1\zeta+h_0/a_2;\qquad R_2=(\psi_3\zeta+\psi_4)\exp k_1\zeta.\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (48) и разделив его на $\exp k_1\zeta$, получаем:

$$f_{y_3}C_1x\cdot\exp k_1y_3+\zeta[f_{y_1}\psi_1+f_{y_2}\psi_3-f_{y_3}\psi_5]+[f_{y_1}\psi_2+f_{y_2}\psi_4-f_{y_3}\psi_6]=0. \tag{54}$$

Продифференцируем это соотношение по x, затем его же по ζ и, сложив, получаем:

$$f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2)+f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2)+f_{y_3}[C_1\exp k_1y_3-\psi_5(y_1,y_2)]=0.$$

Подставляя его в (54), получаем:

$$f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2)+f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2)+f_{y_3}[(C_1y_3+C_2)\exp k_1y_3-\psi_6(y_1,y_2)]=0. \tag{55}$$

И, наконец, последний вариант: $\underline{k_1 = k_2 = 0}$. Перепишем уравнение, корнями которого являются k_1 и k_2: $a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$. Если $k_1 = k_2 = 0$, то и $a_2 = 0$. Тогда $k(a_0k + a_1) = 0$. Отсюда $k_1 = 0$, $a_0k + a_1 = 0$. Если $a_0 = 0$, то возвращаясь к случаю I для уравнения (51). При $a_0 \neq 0$ имеем $k_2 = -a_1/a_0 = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = 0$. Тогда $a_0A_{1xx} = h_0$; $R_{1\zeta\zeta} = 0$; $R_{2\zeta\zeta} = 0$; $a_0R_{3\zeta\zeta} = h_0$. Отсюда получаем:

$$A_1 = \frac{h_0}{2a_0}x^2 + C_1x + C_2; \qquad R_1 = \psi_1(\xi,\eta)\zeta + \psi_2(\xi,\eta);$$

$$R_2 = \psi_3(\xi,\eta)\zeta + \psi_4(\xi,\eta); \qquad R_3 = \frac{h_0}{2a_0}\zeta^2 + \psi_5(\xi,\eta)\zeta + \psi_6(\xi,\eta).$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (48) получаем:

$$[f_{y_1}\psi_2+f_{y_2}\psi_4+f_{y_3}(C_2-\psi_6)]+\zeta[f_{y_1}\psi_1+f_{y_2}\psi_3-f_{y_3}\psi_5]+f_{y_3}\left[\frac{h_0}{2a_0}x^2 - C_1x - \frac{h_0}{2a_0}\zeta^2\right] = 0. \tag{56}$$

Дифференцируя (56) по x, затем его же по ζ и, складывая, получаем:

$$f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2) + f_{y_3}\left[\frac{h_0}{a_0}y_3 + C_1 - \psi_5(y_1,y_2)\right] = 0$$

Используя полученное уравнение, из (56) получаем:

$$f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2) + f_{y_3}\left[\frac{h_0}{2a_0}y_3 + C_1y_3 + C_2 - \psi_6(y_1,y_2)\right] = 0 \tag{57}$$

Таким образом, первое уравнение системы (48) исследовано полностью. Возможны три варианта: (52), (55), (57).

Аналогичным образом исследуются и второе уравнение системы (48); для него также имеем три варианта.

Исследуя все возможные комбинации для уравнений системы (48), приходим к двум возможным вариантам, приводящим к невырожденным решениям.

Вариант 1:

$$\left.\begin{aligned} f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2) + f_{y_3}[\exp k_1y_3 - \psi_5(y_1,y_2)] = 0,\\ f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2) + f_{y_3}[\exp k_2y_3 - \psi_6(y_1,y_2)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Вариант 2:

$$\left.\begin{aligned} f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2) + f_{y_3}[C_1y_3 - \psi_5(y_1,y_2)] = 0,\\ f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2) + f_{y_3}\left[\tfrac{C_1}{2}y_3^2 + y_3 - \psi_6(y_1,y_2)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Рассмотрим вариант 1.

Для упрощения введем переменные $\overline{y}_1 = \overline{y}_1(y_1,y_2)$ и $\overline{y}_2 = \overline{y}_2(y_1,y_2)$ такие, что $\overline{y}_{2y_1}\psi_1 + \overline{y}_{2y_2}\psi_2 = 0$; $\overline{y}_{1y_1}\psi_2 + \overline{y}_{1y_2}\psi_4 = 0$. В новых переменных система (58) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} f_{\overline{y}_1} + f_{y_3}[\overline{\psi}_1(\overline{y}_1,\overline{y}_2)\exp k_1y_3 - \overline{\psi}_5(\overline{y}_1,\overline{y}_2)] = 0,\\ f_{\overline{y}_2} + f_{y_3}[\overline{\psi}_2(\overline{y}_1,\overline{y}_2)\exp k_2y_3 - \overline{\psi}_6(\overline{y}_1,\overline{y}_2)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

(Далее штрихи опускаем.)

Запишем систему в операторном виде: $X_\mu f(i\alpha) = 0$, $\mu = 1, 2$. По теории [9. с. 61], если система дифференциальных уравнений в частных производных имеет решение, то оно должно удовлетворять также уравнениям:

$$(X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu) f(i\alpha) = [X_\mu, X_\nu] f(i\alpha) = 0$$

Если систему $X_\mu f(i\alpha) = 0$ записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{3} \varphi^{\mu k}(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_k} = 0,$$

то $[X_\mu, X_\nu] f(i\alpha) = 0$ запишутся в виде:

$$\sum_{\rho}^{3} \left\{ \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi^{\nu\rho}}{\partial x_k} \varphi^{\nu\rho} - \frac{\partial \varphi^{\nu\rho}}{\partial y_k} \varphi^{\mu\rho} \right) \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_k} \right\} = 0. \tag{61}$$

Составим уравнение (61) для системы (60) $(\mu, \nu = 1, 2)$. Получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (\psi_1\psi_3)(y_1, y_2)(k_1 - k_2) \exp(k_1 + k_2) y_3 + [\psi_{1y_2} - k_1(\psi_1\psi_4)(y_1, y_2)] \exp k_1 y_3 - \\ - [\psi_{3y_1} - k_2(\psi_2\psi_3)(y_1, y_2)] \exp k_2 y_3 + \psi_{4y_1} - \psi_{2y_2} = 0. \end{aligned} \tag{62}$$

Если $k_1 + k_2 \neq 0$, то $\psi_1\psi_3 = 0$ (т. к. $k_1 \neq k_2$). Но равенство нулю ψ_1 или ψ_3 приводит к потере существенного аргумента, что не допускается, т. е. $k_1 + k_2 = 0$. Тогда из (62) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1y_2} - k_1\psi_1\psi_4 = 0; \quad \psi_{3y_1} - k_2\psi_2\psi_3 = 0; \\ 2k_1\psi_1\psi_3 + \psi_{4y_1} - \psi_{2y_2} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{63}$$

Решаем первое уравнение системы (60) методом характеристик:

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dy_3}{\psi_1 \exp k_1 y_3 - \psi_2} = \frac{dy_2}{0}.$$

Его интегралы: $y_2 = \mathrm{const}$; $T_1(y_1, y_2) \exp(-k_1 y_3) + T_2(y_1, y_2) = \mathrm{const}$. Делаем замену переменных: $y_2 = \rho_1$; $T_1(y_1, y_2) \exp(-k_1 y_3) + T_2(y_1, y_2) = \rho_2$.

Второе уравнение из (60) после замены:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}\{T_{1y_2} \exp(-k_1 y_3) + T_{2y_2} + T_1(-k_1)[\psi_3 \exp(-k_1 y_3) - \psi_4] \exp(-k_1 y_3)\} = 0.$$

Коэффициент при f_{ρ_2}:

$$\begin{aligned} -k_1(T_1\psi_3)(y_1, y_2) \exp(-2k_1 y_3) + (k_1 T_1 \psi_4 + T_{1y_2})(y_1, y_2) \exp(-k_1 y_3) + T_{2y_2} = \\ = \chi[\underbrace{y_2}_{\rho_1} : \underbrace{T_1(y_1, y_2) \exp(-k_1 y_3) + T_2(y_1, y_2)}_{\rho_2}]. \end{aligned} \tag{64}$$

Можно, используя явный вид T_1 и T_2 и условия (63), выразить коэффициент при f_{ρ_2} через переменные ρ_1 и ρ_2. Можно и непосредственно исследовать выражение (64). Продифференцируем (64) по $(\exp(-k_1 y_3))$:

$$2\exp(-k_1y_3)(-k_1)T_1\psi_3 + k_1T_1\psi_4 + T_{1y_2} = \chi_{\rho_2}T_1$$

Поделим соотношение на T_1 $(T_1 \neq 0)$ и продифференцируем еще раз по $(\exp(-k_1y_3))$:

$$-2k_1\psi_3 = \chi_{\rho_2\rho_2}T_1,$$

т. е. $\chi_{\rho_2\rho_2} = \Phi(y_1, y_2)$. Легко показать, что $\Phi(y_1, y_2) = \Phi(y_2) = \Phi(\rho_1)$. Тогда, интегрируя полученное соотношение, получим второе уравнение в виде:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[\Phi_1(\rho_1)\rho_2^2 + \Phi_2(\rho_1)\rho_2 + \Phi_3(\rho_1)] = 0. \tag{65}$$

Уравнение характеристики имеет вод:

$$\frac{d\rho_2}{d\rho_1} = \Phi_1(\rho_1)\rho_2^2 + \Phi_2(\rho_1)\rho_2 + \Phi_3(\rho_1).$$

Это уравнение Рикатти.

Выберем какое-нибудь частное решение: $\overline{\rho}_2(\rho_1)$. Тогда общее решение [10 с. 47]:

$$\rho_2 = \overline{\rho}_2(\rho_1) + \frac{1}{GA_1(\rho_1) + A_2(\rho_1)}.$$

Отсюда

$$G = \frac{1 - A_2(\rho_1)\rho_2 + A_2(\rho_1)\varphi_1(\rho_1)}{A_1(\rho_1)\rho_2 - A_1(\rho_1)\varphi_1(\rho_1)}.$$

Возвращаясь к старым переменным, имеем:

$$G = \frac{\exp[-k_1(x-\zeta)]F_1(\xi,\eta,\zeta) + F_2(\xi,\eta,\zeta)}{\exp[-k_1(x-\zeta)]F_3(\xi,\eta,\zeta) + F_4(\xi,\eta,\zeta)}.$$

Сокращая на $F_3(\xi,\eta,\zeta)\exp k_1\zeta$, окончательно получаем интеграл системы (60) в виде:

$$G = \Psi(i\alpha) = \frac{\overline{x}_i\overline{\xi}_\alpha + \overline{\eta}_\alpha}{\overline{x}_i + \overline{\zeta}_\alpha} \tag{66}$$

Общее решение имеет вид: $f(i\alpha) = \chi[\Psi(i\alpha)]$, где ξ — строго монотонная функция.

Рассмотрим вариант 2 (система (59)).

Как и в варианте 1, вводим те же новые переменные $\overline{y}_1(y_1, y_2)$, $\overline{y}_2(y_1, y_2)$ и после упрощений получаем систему:

$$\left.\begin{array}{l} f_{\overline{y}_1} + f_{y_3}[C_1y_3\overline{\psi}(\overline{y}_1,\overline{y}_2) + \overline{\psi}(\overline{y}_1,\overline{y}_2)] = 0 \\ f_{\overline{y}_1} + f_{y_3}\left[\left(\frac{C_1}{2}y_3^2 + y_3\right)\overline{\psi}_3(\overline{y}_1,\overline{y}_2) + \overline{\psi}_4(\overline{y}_1,\overline{y}_2)\right] = 0. \end{array}\right\} \tag{67}$$

Решаем первое уравнение (штрихи опускаем):

$$\frac{dy_3}{dy_1} = C_1\psi_1(y_1, y_2)y_3 + \psi_2(y_1, y_2); \qquad y_2 = \text{const}.$$

Это линейное уравнение. Его интеграл: $T_1(y_1, y_2)y_3 + T_2(y_1, y_2) = \text{const}$.

Производим замену переменных: $y_2 = \rho_1$; $T_1 y_3 + T_2 = \rho_2$. Второе уравнение системы (67) после замены имеет вид:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[\Phi_1(y_1, y_2)y_3^2 + \Phi_2(y_1, y_2)y_3 + \Phi_3(y_1, y_2)] = 0.$$

Как и в варианте 1, можно показать, что функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 зависят только от y_2 . И уравнение принимает вид:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[\Phi_1(\rho_1)\rho_2^2 + \Phi_2(\rho_1)\rho_2 + \Phi_3(\rho_1)] = 0,$$

т. е. такой же, как и в варианте 1.

Итак, решение системы (48), соответствующей физической структуре ранга (4,2), имеет вид:

$$f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) = \chi\left(\frac{x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}\right), \qquad (68)$$

где χ — строго монотонная функция одного аргумента.

В Теории физических структур одним из важных вопросов является вопрос физической интерпретации полученных результатов. В работах Ю. И. Кулакова [2] и [7] было показано, что структура (2,2), например, связана с законом Ньютона, (3,2) — с электродинамикой постоянных токов и т. д. В работах Г. Г. Михайличенко [8] и автора [3], [4] показано, что физическая структура ранга $r = 4$ описывает все возможные двумерные геометрии, $r = 5$ — трехмерные и т. д.

Как же можно интерпретировать результат (68) для физической структуры (4,2)? Напомним одно замечательное свойство частных решений уравнения Рикатти: ангармоническое отношение любых четырех частных решений уравнения Рикатти равно постоянному [15, стр. 50]. Таким образом, если уравнение Рикатти записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

а частные решения обозначить y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , то

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = G, \quad \text{где } G = \text{const}.$$

Хорошо известно, что ангармоническое отношение (или сложное отношение) есть инвариант проективных отображений. Это отношение, позволяющее охарактеризовать проективную эквивалентность, “является основным инвариантом проективной геометрии, подобно тому, как расстояние между точками, характеризующее конгруэнтность, есть основной инвариант элементарной геометрии" [12].

Таким образом, видно, что структура (4,2) связана с проективной геометрией.

В своей диссертации Г. Г. Михайличенко [13] нашёл решение (68) и указал явный вид функции Φ, связывающей все восемь функций $f(i\alpha),\ldots,f(l\beta)$:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{69}$$

Интересно, что точно такой же определитель (в других обозначениях) приведен в “шестом мемуаре о формах" А. Кэли как условие проективного соответствия двух четверок точек [14, стр. 278].

Определитель (69) можно преобразовать следующим образом. Прибавим к (24) два определителя 4-го порядка, равные нулю, у которых 1,2,4 столбцы совпадают с 1,2,4 столбцами в (69), третий столбец в первом определителе есть первый из (24), умноженный на $(-f(l\beta))$, и третий столбец во втором есть второй из (69), умноженный на $(-f(l\alpha))$. Складывая определители, получаем:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & [f(i\alpha)f(i\beta)-f(l\alpha)f(i\alpha)-f(l\alpha)f(i\beta)] & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & [f(j\alpha)f(j\beta)-f(l\alpha)f(j\alpha)-f(l\alpha)f(j\beta)] & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & [f(k\alpha)f(k\beta)-f(l\alpha)f(k\alpha)-f(l\alpha)f(k\beta)] & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & [f(l\alpha)f(l\beta)-f(l\alpha)f(l\alpha)-f(l\alpha)f(l\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычтем последнюю строчку из первых трех. Разлагая по последнему столбцу и группируя члены, получаем:

$$\begin{vmatrix} [f(i\alpha)-f(l\alpha)] & [f(i\beta)-f(l\beta)] & [f(i\alpha)-f(l\alpha)][f(i\beta)-f(l\beta)] \\ [f(j\alpha)-f(l\alpha)] & [f(j\beta)-f(l\beta)] & [f(j\alpha)-f(l\alpha)][f(j\beta)-f(l\beta)] \\ [f(k\alpha)-f(l\alpha)] & [f(k\beta)-f(l\beta)] & [f(k\alpha)-f(l\alpha)][f(k\beta)-f(l\beta)] \end{vmatrix} = 0.$$

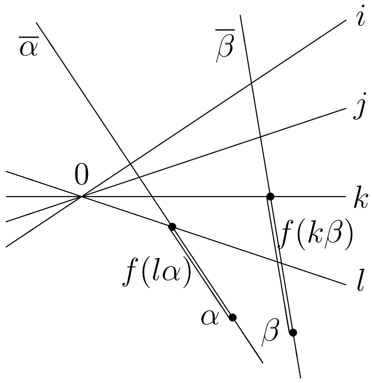
Разделим на произведение скобок в каждой строчке:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{[f(i\beta)-f(l\beta)]} & \frac{1}{[f(i\alpha)-f(l\alpha)]} & 1 \\ \frac{1}{[f(j\beta)-f(l\beta)]} & \frac{1}{[f(j\alpha)-f(l\alpha)]} & 1 \\ \frac{1}{[f(k\beta)-f(l\beta)]} & \frac{1}{[f(k\alpha)-f(l\alpha)]} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая третью строчку из первой и второй и преобразуя полученное соотношение, окончательно получаем:

$$\frac{f(k\alpha)-f(i\alpha)}{f(k\alpha)-f(j\alpha)} : \frac{f(l\alpha)-f(i\alpha)}{f(l\alpha)-f(j\alpha)} = \frac{f(k\beta)-f(i\beta)}{f(k\beta)-f(j\beta)} : \frac{f(l\beta)-f(i\beta)}{f(l\beta)-f(j\beta)}. \tag{70}$$

Как видно, левая и правая части равенства не зависят от α и от β.



Геометрическая интерпретация решения для физической ранга (4,2) может быть следующей. Пусть элементами множества $\mathfrak{M}$ являются всевозможные прямые из плоского пучка прямых с центром 0, а элементами множества $\mathfrak{N}$ являются любые другие прямые этой плоскости, пересекающие прямые пучка. Выберем их $\mathfrak{M}$ любые четыре прямые из пучка i, j, k, l, а из $\mathfrak{N}$ — любые две прямые, пересекающие их, $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$. Введем на прямых $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ проективные системы координат [14, стр. 278], т. е. определим начало системы координат: на прямой $\overline{\alpha} - \alpha$, на прямой $\overline{\beta} - \beta$. Обозначим расстояния от начала координат до точек пересечения прямых i, j, k, l с прямыми $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ соответственно через $f(i\alpha), \ldots, f(l\alpha), f(i\beta), \ldots, f(l\beta)$. Тогда для любых четырех прямых из пучка и любых двух их пересекающих прямых выполняется соотношение (70), которое и определяет инвариантность сложного отношения для четырех элементов из множества $\mathfrak{M}$.

Участники Всесоюзной школы-семинара по Теории физических структур в Пущино-на-Оке

Литература к главе 14

[1] *Н. Бердяев* Самосознание. М.: Мысль, 1990. С. 293.

[2] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. /Дополнение Г.Г.Михайличенко. Новосибирск. Изд-во Новосибирского университета, 1968. 228 с.

[3] *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3). //Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. - Новосибирск.: Институт математики СОАН СССР, 1984. С. 91 - 113.

[4] *Лев В.Х.* Двумерные и трёхмерные геометрии в теории физических структур // Машинный анализ сложных структур. Выпуск 118. Вычислительные системы. – Новосибирск. Институт математики СОАН СССР, 1986, С. 28-36.

[5] *Лев В.Х.* Трёхмерные геометрии в теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 125. – Новосибирск. Институт математики СОАН СССР, 1988, С. 90-103.

[6] *Михайличенко Г.Г.* Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. С. 175–226. // Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. (Дополнение Г.Г.Михайличенко). Новосибирск. Изд.-во НГУ, 1968. 226 с.

[7] *Кулаков Ю. И.* О новом виде симметрии, лежащей в основании теории феноменологического типа // Докл. АН СССР. — 1971. Т. 201, № **3**. с. 570–572.

[8] *Михайличенко Г. Г.* Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 260, № **4**. с. 803–805.

[9] *Михайличенко Г. Г.* Методы решения некоторых уравнений теории физических структур // Вопросы теории и методики преподавания физики. (Научные труды. Вып. 71) — Новосибирск, 1971. с. 3–12.

[10] *Кулаков Ю. И.* О теории физических структур // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. — Л.: Наука, 1983. — Т. 127, вып. № **15**. с. 103–151. (Зап. научного семинара ЛОМИ.)

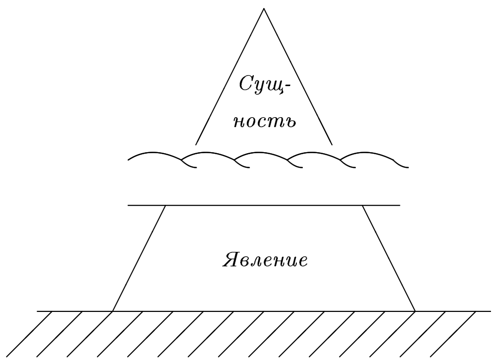
[11] *Эйзенхарт Л. П.*, Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947. — 40с.

[12] *Кэли А.* Шестой мемуар о формах // Об основаниях геометрии: Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитие ее идей. — М.: ГИТТЛ, 1956. — с. 222 – 252.

[13] *Михайличенко Г. Г.* Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 и 01.04.02. — Новосибирск, 1973. — 13 с.

[14] *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. — М.: Наука, 1971. — 576 с.

[15] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. - М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. - 468 с.



Отсюда, начиная с Галилея, началось победоносное шествие экспериментальной физики.

Часть V.

П Р И М Е Р Ы,

ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЕ ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ТФС

(Взгляд снизу вверх)

Современный математик предпочитает определять предмет своей науки как изучение общих абстрактных схем, каждая из которых представляет собой здание, построенное из вполне определенных абстрактных элементов, скрепленных произвольными, но однозначно определенными соотношениями.

— Маршалл Стоун

Глава 15. Примеры сакральных законов первого рода, не содержащих произвольных параметров.

Глава 16. Примеры сакральных законов второго рода, содержащих произвольные параметры.

Глава 17. Взгляд со стороны.

Глава 15

Примеры сакральных законов первого рода, не содержащих произвольных параметров

Exempla docent [69]

До сих пор оказывалось, что там, где наша логика наиболее абстрактна, там она всегда даёт правильные результаты, теория согласуется с опытом [2].
— Р. Фейнман

Введение

Пример 1 **Закон Ньютона.**

Пример 2 **Закон Ома для участка цепи.**

Пример 3 **Закон Ома для всей цепи.**

Пример 4 **Закон Ома для переменного тока.**

Пример 5 **Универсальный закон аддитивности.**

Пример 6 **Основной закон хронометрии.**

Пример 7 **Термодинамика.**

Пример 8 **Векторная алгебра.**

Пример 9 **Евклидова геометрия.**

Пример 10 **Геометрия пространств постоянной кривизны.**

---

[69] Примеры учат.

Пример 11 **Малые колебания.**

Пример 12 **Ангармоническое отношение.**

Пример 13 **Тонкие и толстые линзы.**

Пример 14 **Пространственная кинеметика.**

Пример 15 **Сакральные потенциалы.**

Пример 16 **Термодинамические потенциалы.**

Пример 17 **Механика Гамильтона – Якоби.**

Пример 18 **Механика Лагранжа и механика Гамильтона.**

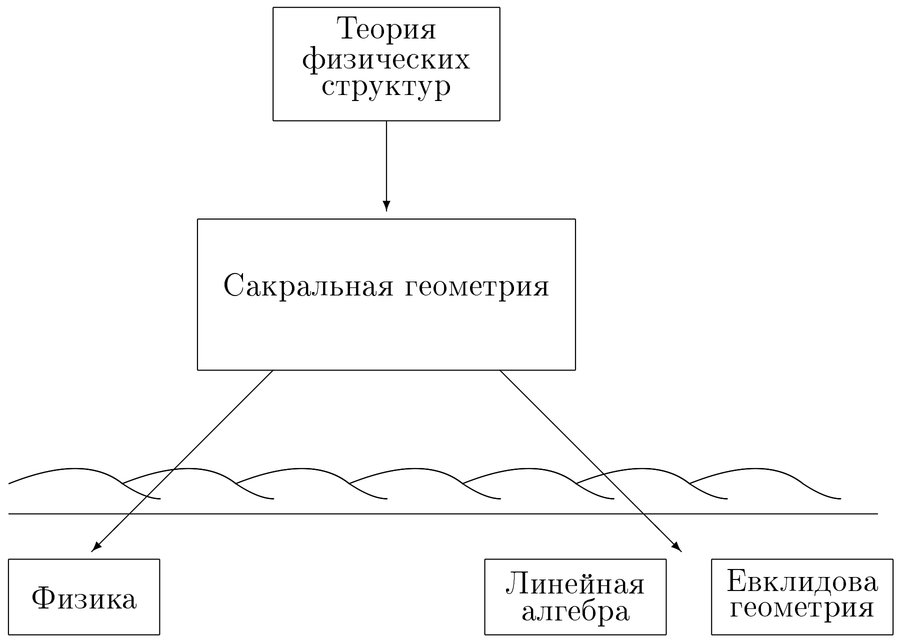
Пример 19 **Канонические преобразования.**

Пример 20 **Теория размерности.**

Всё перекаты, да перекаты...

Введение

Любой фундаментальный физический закон в конце концов сводится к законам сакральной геометрии, к которой сводятся также аксиомы традиционной линейной алгебры и традиционной евклидовой геометрии.



Сакральная геометрия – вершина, на которой физика
и геометрия сливаются в одно единое целое.

Так, за каждым фундаментальным физическим законом и за аксиомами линейной алгебры и евклидовой геометрии стоит обращение в ноль объёма некоторого абстрактного симплекса при любом выборе его вершин.

В этой главе мы рассмотрим ряд примеров, взятых из самых различных разделов общей физики и геометрии, иллюстрирующих факт существования универсальных соотношений, связывающих между собой результаты измерений, относящихся к конкретным физическим системам.

И подобно тому, как законы арифметики описывают свойства конечных множеств независимо от природы их элементов, так и аксиомы Теории физических структур, лежащие в основании этих специфических отношений и выражающие идею равноправия физических объектов по отношению к тому или иному физическому закону, позволяют описывать всё разнообразие фундаментальных физических законов с единой точки зрения, не заслоняя смысл последних несущественными деталями.

На конкретных примерах мы можем убедиться в том, что самые различные и, на первый взгляд, не имеющие ничего общего, физические законы путём элементарных преобразований могут быть записаны в так называемой сакрально-инвариантной форме. В этой форме особенно отчётливо проявляется тот тип отношений, который мы называем физической структурой и который составляет сущность любого фундаментального физического закона. Дело в том, что этот тип отношений между физическими объектами накладывает на вид фундаментальных физических законов настолько жёсткие ограничения, что позволяет с большой степенью однозначности написать конкретное выражение для любого фундаментального физического закона, как уже известного, так и ещё неизвестного.

Эти сакрально-инвариантные соотношения мы будем получать как достаточно тривиальные следствия из известных физических и геометрических законов. Мы увидим, что получаемые соотношения содержат лишь измеряемые на опыте численные значения одной и той же физической величины, нумеруемые двумя индексами, относящимися к произвольным подмножествам физических объектов с фиксированным числом элементов, и что они имеют между собой много общего, так как всегда могут быть записаны в виде равенства $K = 0$, где K – некоторый определитель того или иного порядка и строения.

Что такое физический закон? Не закон Ньютона и не закон Ома, а физический закон вообще? Чтобы ответить на этот вопрос, начнём с простейшего примера – с законов, лежащих в основании геометрии евклидовой прямой, геометрии евклидовой плоскости и геометрии трёхмерного евклидова пространства.

Возьмём две произвольные точки, лежащие на прямой – двухточечный корт – и измерим расстояние между ними. Это расстояние ничем не ограничено и может меняться от нуля до бесконечности. Никакого закона ещё нет. Но если мы возьмём трёхточечный корт и измерим три расстояния между его тремя точками, то мы столкнёмся с качественно новой ситуацией. Три точки на прямой можно рассматривать как вершины “сплюснутого” треугольника, площадь которого равна нулю при любом расположении точек. Но с другой стороны, площадь треугольника зависит от длин трёх его сторон (формула Герона). Следовательно, между тремя расстояниями существует определённая связь, которая и есть простейший закон одномерной евклидовой геометрии. Рассмотрим теперь трёхточечный корт на евклидовой плоскости и измерим три расстояния между его тремя точками. В этом случае площадь треугольника может меняться от нуля до бесконечности и, следовательно, между тремя расстояниями нет никакой связи.

Но если мы рассмотрим четырёхточечный корт и измерим шесть расстояний между его четырьмя точками, то мы столкнёмся с ситуацией, подобной той, которая наблюдалась на прямой. А именно, четыре точки на плоскости можно рассматривать как вершины “сплюснутого” тетраэдра, объём которого равен нулю при любом расположении точек. Но с другой стороны, объём тетраэдра зависит от длин его шести рёбер (формула Тартальи). Следовательно, между шестью расстояниями между четырьмя точками, произвольно расположенными на плоскости, имеет место вполне определённая связь, которая и есть простейший закон двумерной евклидовой геометрии.

Рассмотрим теперь четырёхточечный корт в трёхмерном евклидовом пространстве и измерим шесть расстояний между его четырьмя точками. В этом случае объём тетраэдра может меняться от нуля до бесконечности и, следовательно, между шестью расстояниями нет никакой связи.

Но если мы рассмотрим пятиточечный корт и измерим десять расстояний между его пятью точками, то мы обнаружим существование вполне определённой связи между десятью расстояниями пятиточечного корта. Эта связь и есть простейший закон трёхмерной евклидовой геометрии.

Аналогичным свойством возникновения закона при достижении векторного корта определённой длины обладает множество векторов в n-мерном линейном пространстве: если длина корта меньше или равна размерности линейного пространства, то векторы этого корта линейно независимы и между их скалярными произведениями нет никакой связи; если же длина векторного корта больше размерности линейного пространства, то векторы этого корта линейно зависимы и между их скалярными произведениями есть вполне определённая связь (обращение в ноль определителя Грама). А это и есть простейший закон, которому подчиняются векторы n-мерного линейного пространства.

Однако множества точек евклидовой прямой, евклидовой плоскости и трёхмерного евклидова пространства обладают ещё одним замечательным свойством. Если в случае евклидовой прямой взять не один трёхточечный корт, как в предыдущем случае, а два произвольных трёхточечных корта и измерить девять расстояний между каждой точкой первого корта и каждой точкой второго корта, то все эти девять расстояний окажутся связанными между собой одним, вполне определённым соотношением, которое является фундаментальным законом, лежащим в основании одномерной евклидовой геометрии.

Точно так же поступим в случае евклидовой плоскости. Рассмотрим два произвольных четырёхточечных корта и измерим шестнадцать расстояний между каждой точкой первого корта и каждой точкой второго корта. Можно показать, что все эти шестнадцать расстояний связаны между собой одним, вполне определённым соотношением, которое является фундаментальным законом, лежащим в основании двумерной геометрии.

В случае трёхмерного евклидова пространства рассмотрим два произвольных пятиточечных корта и измерим двадцать пять соответствующих расстояний. Можно показать, что все эти расстояния связаны между собой одним соотношением, представляющим собой фундаментальный закон, лежащий в основании трёхмерной евклидовой геометрии.

Итак, мы можем сказать, что фундаментальный закон, лежащий в основании n-мерной евклидовой геометрии, представляет собой определённый вид отношений между двумя $(n+2)$ -точечными кортами.

В случае векторной алгебры мы можем сказать почти то же самое: фундаментальный закон, лежащий в основании n -мерного векторного пространства, представляет собой определённый вид отношений между двумя $(n+1)$ -векторными кортами.

Если мы перейдём от евклидовой геометрии и векторной алгебры к рассмотрению фундаментальных физических законов, лежащих в основании самых различных разделов физики, то мы всюду обнаружим одно и то же:

два множества физических объектов различной или одной и той же природы;

репрезентатор – прообраз квадрата расстояния между двумя точками в евклидовой геометрии или прообраз скалярного произведения двух векторов в линейной алгебре;

два корта конечной длины, состоящие, соответственно, из s произвольных элементов первого множества и r произвольных элементов второго множества,

и **верификатор** - функцию $s\,r$ числовых переменных, связывающую между собой $s\,r$ репрезентаторов.

Оказывается, с точностью до физической интерпретации **все фундаментальные физические законы – законы механики, теории относительности, термодинамики, электродинамики, квантовой механики и даже статфизики, а также многие разделы чистой математики построены по одному и тому же проекту, по которому построены евклидова геометрия, геометрии Лобачевского и Римана и векторная алгебра.**

Другими словами, можно сказать, что вся физика может быть изложена на едином языке сакральной геометрии.

В отличие от традиционной "антропной" геометрии на одном множестве, сакральная геометрия с самого начала строится на двух множествах различной природы. И, как и следовало ожидать, **общеизвестная антропная геометрия представляет собой особый случай вырождения сакральной геометрии, когда исходные два множества сливаются в одно.**

Естественно, что при таком вырождении многие разделы более богатой и содержательной **сакральной геометрии** (например, геометрии криптовекторов и криптоточек, имеющие самое прямое отношение к физике) оказываются утраченными.

Но самое главное, граничащее с чудом, является это –

возникновение в сакральной геометрии неизвестных ранее сакральных самодостаточных функциональных уравнений.

В отличие от всех хорошо известных в математике уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных, функциональных), содержащих различные операции (сложение, умножение, возведение в степень, дифференцирование, интегрирование и т.п.), в сакральных уравнениях **нет никаких операций кроме подстановки одной неизвестной функции - репрезентатора в другую неизвестную функцию - верификатор.**

И самое удивительное состоит в том, что эти уравнения имеют единственные решения, представляющие собой фундаментальные законы, лежащие в основании всех разделов физики, геометрии и некоторых разделов чистой математики. (Смотрите три монографии доктора ф.-м. наук, профессора Горно-Алтайского университета Михайличенко Геннадия Григорьевича "Математический аппарат теории физических структур" (1997 год, 143 стр.) "Полиметрические геометрии" (2001 год, 144 стр.) и "Групповая симметрия физических структур" (2003 год, 204 стр.).

Будучи переведённым на обычный человеческий язык, это утверждение означает следующее: если у вас имеется некий фундаментальный закон, то он должен иметь такую и только такую форму. То есть, где бы вы ни оказались, на Земле или далеко за пределами Солнечной системы, например, на Альфа Центавры, или где-то ещё, если там существует какой-либо универсальный закон, то можно заранее написать возможные его формы. Оказалось, что всего существует только четыре решения. И вот всё многообразие физических законов механики, термодинамики, электродинамики, квантовой механики, теории относительности – всё в конечном итоге сводится к одному из этих четырех решений.

Представляете, как гениально просто выглядит сакральный План Творения, предшествующий Большому взрыву!

Другими словами, нам удалось найти то единственное зёрнышко, из которого вырастают разные разделы физики, – механика, термодинамика, теория относительности, квантовая механика. Нужно задать только ранг соответствующих кортов – единственный свободный целочисленный параметр – и вы получаете формальное выражение для того или иного фундаментального закона. А дальше вы должны дать для этого выражения соответствующую физическую интерпретацию.

Математика, чем выше она возносится в горные области всё более абстрактной мысли, неизменно возвращается на землю, обретая всё большее значение для анализа конкретного факта. – *Альфред Норт Уайтхед*

Наука родилась из веры в математическую интерпретацию природы. – *Джон Герман Рэндалл*

Для мыслящего учёного математическое описание всегда было неиссякаемым источником удивления, рождённого тем, что природа проявлет столь высокую степень соответствия математическим формулам. – *Морис Клайн*

Неужели природа столь нелепа, как представляется нам в наших экспериментах? – *Нильс Бор*

Здравый смысл – это толща предрассудков, успевших отложиться в нашем сознании к восемнадцати годам. – *Альберт Эйнштейн*

Эксперимент вообще ничего не значит, пока он не интерпретирован теорией. – *Макс Борн*

Именно предельные абстракции являются тем истинным оружием которое правит осмыслением конкретного факта. – *Альфред Норт Уайтхед*

Ныне представляется бесспорным, что природа теснее связана с понятиями чистой математики, чем с понятиями биологии и техники. – *Джеймс Джинс*

Глава 15

Примеры сакральных законов первого рода, не содержащих произвольных параметров

Пример 1. Закон Ньютона

Счастливый Ньютон, счастливое детство науки! Природа для него была открытой книгой, которую он читал без усилий. Концепции, которыми он пользовался для упорядочения данных опыта, кажутся вытекающими спонтанно из самого опыта, из замечательных экспериментов, заботливо описываемых им со множеством деталей и расставленных по порядку, подобно игрушкам [1].

— Альберт Эйнштейн

Закон Ньютона $ma = f$ явился первым физическим законом, на примере которого я в 1960 году обнаружил существование простейшей физической структуры ранга $(2, 2)$. Так что механику Ньютона можно рассматривать как "царский путь" в мир физических структур.

Итак, задача состоит в том, чтобы перейти с хорошо известного языка механики Ньютона на универсальный язык Теории физических структур и установить соответствие между законом Ньютона и фундаментальным соотношением, лежащим в основании сакральной геометрии, возникшей в рамках Теории физических структур.

Прежде всего имеем два множества физических объектов различной природы:

$\overleftarrow{\mathfrak{N}} = \{\overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta}, \ldots\}$ – множество акселераторов (ускорителей) и

$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \ldots\}$ – множество ускоряемых тел [70].

Перепишем хорошо известный закон Ньютона $ma = f$ в виде с выделенными нечисловыми переменными

$$m_{\overrightarrow{i}} a_{\overleftarrow{\alpha}\overrightarrow{i}} = f_{\overleftarrow{\alpha}},$$

где $a_{\overleftarrow{\alpha}\overrightarrow{i}}$ – репрезентатор (ускорение тела $\overrightarrow{i}$ под действием акселератора $\overleftarrow{\alpha}$),

$f_{\overleftarrow{\alpha}}$ – сила, действующая со стороны акселератора $\overleftarrow{\alpha}$,

$m_{\overrightarrow{i}}$ – масса тела $\overrightarrow{i}$.

[70]Использование "векторных" обозначений $\leftarrow$ и $\rightarrow$ для акселераторов и ускоряемых тел обусловлено тем, что и акселераторы, и тела являются одномерными векторами в так называемых сакральных векторных пространствах.

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством левых акселераторов $\overleftarrow{\mathfrak{N}}$ и множеством правых ускоряемых тел $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$, является $a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$ – ускорение тела $\overrightarrow{i}$ под действием акселератора (ускорителя) $\overleftarrow{\alpha}$.

2. Каждый акселератор – левый субэйдос $\overleftarrow{\alpha}$ характеризуется одномерным ковариантным вектором-строкой:

$$\overleftarrow{\alpha} \longleftrightarrow \Big(0\ ;\ \xi_1(\overleftarrow{\alpha});\ 0\Big) = \Big(0\ ;\ f(\overleftarrow{\alpha});\ 0\Big)\ .$$

Каждое тело – правый субэйдос $\overrightarrow{i}$ характеризуется одномерным контравариантным вектором-столбцом:

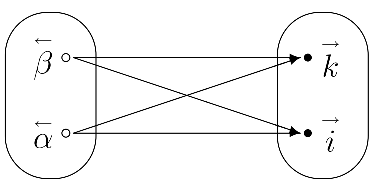
$$\overrightarrow{i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ x^1(\overrightarrow{i}) \\ \cdot\,, \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ 1/m(\overrightarrow{i}) \\ \cdot\,, \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Таким образом, $a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$ представляет собой скалярное произведение двух одномерных векторов, один из которых (ковариантный) характеризует акселератор $\overleftarrow{\alpha}$, а другой (контравариантный) – ускоряемое тело $\overrightarrow{i}$:

$$a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \Big(0;\ \xi_1(\overleftarrow{\alpha});\ 0\Big)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ x^1(\overrightarrow{i}) \\ \cdot\,, \\ 0 \end{pmatrix} = \Big(0;\ f(\overleftarrow{\alpha});\ 0\Big)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ 1/m(\overrightarrow{i}) \\ \cdot\,, \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \xi_1(\overleftarrow{\alpha})\, x^1(\overrightarrow{i}) = f(\overleftarrow{\alpha})/m(\overrightarrow{i}).$$

4. Фундаментальный закон механики Ньютона как **сакральное отношение** между 2-векторным кортом акселераторов $\langle\,\overleftarrow{\alpha}\ \overleftarrow{\beta}\,|$ и 2-векторным кортом тел $|\,\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\,\rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\,\overleftarrow{\alpha}\ \overleftarrow{\beta}\,|$ $\qquad\qquad$ $|\,\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\,\rangle$

5. Фундаментальный закон в сакрально-инвариантной форме, лежащий в основании механики Ньютона, формулируется следующим образом:

для любых двух акселераторов $\overleftarrow{\alpha},\ \overleftarrow{\beta} \in \overleftarrow{\mathfrak{N}}$ и любых двух тел $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k} \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{k}} & 0 \\ 0 & a_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{i}} & a_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{k}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0}$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{2}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = \mathbb{X}(\overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta})_{1;\,0} \cdot \mathbb{X}^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$$

7. Координатная матрица ковариантного 2-векторного акселераторного корта $\langle \overleftarrow{\alpha}\ \overleftarrow{\beta}\ |$

$$\mathbb{X}(\overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta})_{1;\,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{\alpha}) & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{\beta}) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & f(\overleftarrow{\alpha}) & 0 & 0 \\ 0 & f(\overleftarrow{\beta}) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Ковариантный объём 1-векторного акселераторного корта $\langle \overleftarrow{\alpha}\,|$

$$V(\overleftarrow{\alpha})_1 = \left|\ \xi_1(\overleftarrow{\alpha})\ \right| = \left|\ f(\overleftarrow{\alpha})\ \right|$$

9. Ковариантный объём 2-векторного акселераторного корта $\langle \overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\ |$

$$V(\overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta})_{1;\,0} = \begin{vmatrix} \xi_1(\overleftarrow{\alpha}) & 0 \\ \xi_1(\overleftarrow{\beta}) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(\overleftarrow{\alpha}) & 0 \\ f(\overleftarrow{\beta}) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

10. Координатная матрица контравариантного 2-векторного корта ускоряемых тел $|\ \overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\ \rangle$

$$\mathbb{X}^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^1(\overrightarrow{i}) & x^1(\overrightarrow{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m(\overrightarrow{i}) & 1/m(\overrightarrow{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Контравариантный объём 1-векторного корта ускоряемого тела $|\ \overrightarrow{i}\ \rangle$

$$V^1(\overrightarrow{i}) = \left|\ x^1(\overrightarrow{i})\ \right| = \left|\ 1/m(\overrightarrow{i})\ \right|$$

12. Контравариантный объём 2-векторного корта ускоряемых тел $|\ \overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\rangle$

$$V^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = \begin{vmatrix} x^1(\overrightarrow{i}) & x^1(\overrightarrow{k}) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/m(\overrightarrow{i}) & 1/m(\overrightarrow{k}) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

13. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha};\overrightarrow{i}}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha})_1\ V^1(\overrightarrow{i})$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\overleftarrow{\beta};\overrightarrow{i}\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;0}\ V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) \equiv 0$$

Итак, на множестве тел $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ и множестве акселераторов $\overleftarrow{\mathfrak{N}}$ обнаруживается физическая структура рода $\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\overleftarrow{\beta};\overrightarrow{i}\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) \equiv 0$ (мультипликативная физическая структура ранга (2,2)), если в качестве репрезентатора $a_{\overleftarrow{\alpha}\overrightarrow{i}}$ взять измеряемое на опыте ускорение $a_{\overleftarrow{\alpha}\overrightarrow{i}}$, с которым движется тело $\overrightarrow{i}$ под действием акселератора $\overleftarrow{\alpha}$.

Можно сказать, что закон Ньютона, записанный в хорошо известной традиционной форме

$$ma = f,$$

представляет собой внешнюю сторону механики (её “явление”). Что же касается её глубинного содержания (её “сущности”), то оно заключено в её структуре – в существовании репрезентатора

$$\overset{1}{a}_{\overleftarrow{\alpha}\overrightarrow{i}} = \xi(\overleftarrow{\alpha})\, x(\overrightarrow{i}) = f(\overleftarrow{\alpha})/m(\overrightarrow{i}),$$

верификатора

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\overleftarrow{\beta};\overrightarrow{i}\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;0}\cdot V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) = 0,$$

и двух объёмов $V(\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;0}$ и $V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$ 2-векторых кортов $\langle\overleftarrow{\alpha}\overleftarrow{\beta}\,|$ и $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\rangle$, тождественно обращающихся в нуль:

Подведём итоги:

Из всего сказанного следует, что

1. **Хорошо известный закон Ньютона – это фундаментальное соотношение, лежащее в основании сакральной одномерной векторной геометрии на двух множествах разной природы.**

2. Акселератор (ускоритеь) $\overleftarrow{\alpha}$ представляет собой левый субъэйдос из множества акселераторов $\overleftarrow{\mathfrak{N}}$.

Ускоряемое тело $\overrightarrow{i}$ представляет собой правый субэйдос из множества тел $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ [71].

3. Акселератор – левый субэйдос – является одномерным ковариантным субвектором $\overleftarrow{\alpha}$. Его единственная ковариантная координата имеет простой физический смысл силы акселератора:

$$\xi_1(\overleftarrow{\alpha}) = f_{\overleftarrow{\alpha}}.$$

[71] Ситуация симметрична: можно было бы взять в качестве акселератора $\overrightarrow{\alpha}$ правый субэйдос из множества $\overrightarrow{\mathfrak{N}}$, но тогда пришлось бы взять в качестве ускоряемого тела $\overleftarrow{i}$ левый субэйдос из множества $\overleftarrow{\mathfrak{M}}$.

Ускоряемое тело – правый субэйдос – является одномерным контравариантным субвектором $\vec{i}$. Его единственная контравариантная координата имеет физический смысл обратной величины массы тела:

$$x^1(\vec{i}) = 1/m(\vec{i}).$$

4. Репрезентатором, характеризующим отношения между акселератором $\overleftarrow{\alpha}$ и телом $\vec{i}$, является общековариантное ускорение $a_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}}$, которое приобретает тело $\vec{i}$ под действием акселератора $\overleftarrow{\alpha}$.

5. Фундаментальный закон механики – закон Ньютона определяется отношением между двумя кортами – левым 2-векторным кортом $\langle \overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,|$ и правым 2-векторным кортом $|\,\vec{i}\,\vec{k}\,\rangle$.

6. Скалярное произведение этих кортов $\langle \overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,|$ и $|\,\vec{i}\,\vec{k}\,\rangle$ равно верификатору, тождественно равному нулю –

$$\langle \overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,|\,\vec{i}\,\vec{k}\,\rangle = \overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\vec{i}\,\vec{k}}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{k}} & 0 \\ 0 & a_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{i}} & a_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{k}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0-$$

и определяющему сакрально-инвариантную форму закона Ньютона.

7. Поскольку верификатор $\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\vec{i}\,\vec{k}}(\overset{1}{a})$ расщепляется на произведение двух объёмов:

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\vec{i}\,\vec{k}}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0}\; V^{1;\,0}(\vec{i},\vec{k}) \equiv 0,$$

то в конечном итоге, фундаментальный закон, лежащий в основании механики – закон Ньютона, сводится к равенству нулю ковариантного объёма 2-векторного корта акселераторов –

$$V(\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0} \equiv 0-$$

и контравариантного объёма 2-векторного корта ускоряемых тел

$$V^{1;\,0}(\vec{i},\vec{k}) \equiv 0.$$

Заметки на полях.

Заметим, что из равенства

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha};\,\overrightarrow{i}}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha})_1\; V^1(\overrightarrow{i}\,)$$

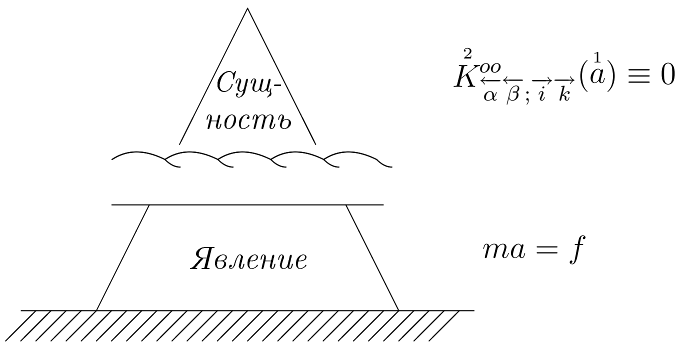
вытекает следующее важное сакральное тождество:

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha};\,\overrightarrow{i}}(\overset{1}{a}) = \overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha};\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) \cdot \overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a})^{-1} \cdot \overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}}(\overset{1}{a})$$

Сакральная формулировка Второго закона Ньютона

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{a}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \xi(\overleftarrow{\alpha})_1\, x^1(\overrightarrow{i}\,) = \frac{f(\alpha)}{m(i)}}$$



Явление и сущность Второго закона механики Ньютона

								$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место физической структуры, выражающей сущность Второго закона механики Ньютона, среди всех возможных физических структур

Итак, сущность механики состоит в существовании сакральных отношений между множеством левых акселераторов $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством правых ускоряемых тел $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждый акселератор $\overleftarrow{\alpha}$ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждое ускоряемое тело $\overrightarrow{i}$ является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.

Другими словами, механика является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность закона Ньютона состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухвекторного корта акселераторов на двухвекторный корт ускоряемых тел, объёмы каждого из которых равны нулю.

Другими словами, **сущность Второго закона механики Ньютона состоит в наличии таких отношений между 2-векторным кортом акселераторов $\langle \overleftarrow{\alpha}\overleftarrow{\beta} |$** *и* **2-векторным кортом ускоряемых тел $| \overrightarrow{i}\overrightarrow{k} \rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\overleftarrow{\beta};\overrightarrow{i}\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;0}\; V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) \equiv 0$$

Пифагор (580 – 500 до н.э.)

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Литература к Примеру 1

[1]. *Эйнштейн Альберт*, Предисловие к “Оптике” Ньютона. //Сб. “Физика и реальность”, - М.: Наука. 1965, С. 34.

[2]. *Ричард Фейнман,* Фейнмановские лекции по физике, том 8, С. 85.

Мировоззренческая концепция существенно отличается от вре́менных и частных антропных представлений ортодоксальной модельной науки. К сожалению, современное состояние знаний о мире и человеке представляет собой некий калейдоскоп парадигм, соединённых между собой ухищрениями здравого смысла в некоторую псевдореальность. Сейчас в науке и в философии создалась редкая ситуация, которую можно назвать мировоззренческим коллапсом, когда во всём мире не оказалось строго очерченных мировоззренческих контуров Бытия.

Пример 2. Закон Ома для участка цепи.

Из некоторых экспериментов, о которых я собираюсь доложить Королевскому обществу, вытекает, что медная проволока проводит примерно в четыреста миллионов раз лучше, чем дождевая или дистиллированная вода (1775) [1].

— *Кавендиш*

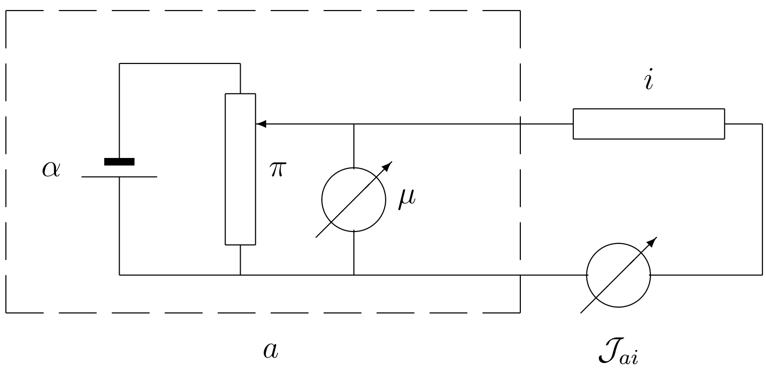
Задача состоит в том, чтобы перейти с хорошо известного языка электродинамики постоянных токов на универсальный язык Теории физических структур.

Рассмотрим два множества:

$\underline{\underline{\mathfrak{A}}} = \{a, b, \ldots\}$ – множество источников постоянного напряжения и

$\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \{i, k, \ldots\}$ – множество проводников.

Под источником постоянного напряжения a мы будем понимать источник постоянного тока α, снабжённый потенциометром π (См. схему).



Схема, поясняющая устройство источника постоянного напряжения.

При подключении источника напряжения a к проводнику i напряжение на выходе источника a падает, но с помощью потенциометра π доводится до некоторого, раз и навсегда заданного для данного источника, значения $\pi(a)$.

Утверждается, что если взять два произвольных проводника i и k и два произвольных источника напряжения a и b и измерить четыре значения сил токов $\mathcal{J}_{ai}$, $\mathcal{J}_{ak}$, $\mathcal{J}_{bi}$, $\mathcal{J}_{bk}$, то соответствующие значения сил токов

$$\mathcal{J} = \frac{U}{R}$$

или значения величин, им обратных,

$$I = \mathcal{J}^{-1} = \frac{R}{U},$$

оказываются связанными между собой следующими соотношениями:

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{ab;ik}(\mathcal{J}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathcal{J}_{ai} & \mathcal{J}_{ak} & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_{bi} & \mathcal{J}_{bk} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{J}_{ai} & \mathcal{J}_{ak} \\ \mathcal{J}_{bi} & \mathcal{J}_{bk} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и соответственно:

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{ab;ik}(I) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{ai} & I_{ak} & 0 \\ 0 & I_{bi} & I_{bk} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{ai} & I_{ak} \\ I_{bi} & I_{bk} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Мы выбираем в качестве репрезентатора, характеризующего отношения между множеством источников напряжения $\underline{\mathfrak{A}}$ и множеством проводников $\overline{\mathfrak{B}}$, не силу тока $\mathcal{J}_{ai}$, а величину ей обратную – $I_{ai} = \frac{1}{\mathcal{J}_{ai}}$, чтобы сохранить эти обозначения при сакрально-инвариантной формулировке закона Ома для всей цепи, где этот выбор определяется однозначно.

Итак,

1. В случае закона Ома для участка цепи *репрезентатором* является

$$I_{ai} = \frac{1}{\mathcal{J}_{ai}}$$

– величина, обратная силе тока $\mathcal{J}_{ai}$, протекающего через проводник i при подключении к нему источника напряжения a.

2. Каждый источник постоянного напряжения – левый субэйдос $\overleftarrow{a}$ – характеризуется одномерным ковариантным вектором-строкой:

$$\overleftarrow{a} \longleftrightarrow \Big(0 \; ; \; \xi_1(\overleftarrow{a}) \; ; \; 0 \Big) = \left(0 \; ; \; \frac{1}{U(\overleftarrow{a})} \; ; \; 0 \right).$$

Каждый проводник – правый субэйдос $\overrightarrow{i}$ – характеризуется одномерным контравариантным вектором-столбцом:

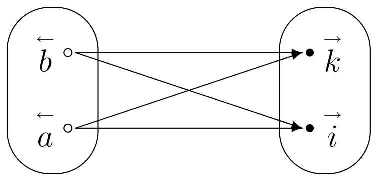
$$\overrightarrow{i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ x^1(\overrightarrow{i}) \\ \cdot\,, \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ R(\overrightarrow{i}) \\ \cdot\,, \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Таким образом, обратное значение тока $I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}}$ представляет собой скалярное произведение двух одномерных векторов, один из которых (ковариантный) характеризует источник напряжения $\overleftarrow{a}$, а другой (контравариантный) – проводник $\overrightarrow{i}$:

$$I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}} = \Big(0;\ \xi_1(\overleftarrow{a});\ 0\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ x^1(\overrightarrow{i}) \\ \cdot\,, \\ 0 \end{pmatrix} = \Big(0;\ \frac{1}{U(\overleftarrow{a})};\ 0\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ R(\overrightarrow{i}) \\ \cdot\,, \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \xi_1(\overleftarrow{a})\, x^1(\overrightarrow{i}) = \frac{1}{U(\overleftarrow{a})}\ R(\overrightarrow{i}).$$

4. Закон Ома для участка цепи как **сакральное отношение** между двухвекторным кортом источников напряжения $\langle\, \overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\, |$ и двухвекторным кортом проводников $|\, \overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\, \rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\, \overleftarrow{a}\, \overleftarrow{b}\, |$ $\qquad\qquad$ $|\, \overrightarrow{i}\, \overrightarrow{k}\, \rangle$

5. Закон Ома для участка цепи в сакрально-инвариантной форме формулируется следующим образом:

для любых двух источников напряжения $\overleftarrow{a},\ \overleftarrow{b} \in \underline{\mathfrak{A}}$ и любых двух проводников $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k} \in \overline{\mathfrak{B}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}} & I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{k}} & 0 \\ 0 & I_{\overleftarrow{b}\,\overrightarrow{i}} & I_{\overleftarrow{b}\,\overrightarrow{k}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0}$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{2}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = \mathbb{X}(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;\,0} \cdot \mathbb{X}^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$$

7. Координатная матрица ковариантного двухвекторного корта источников напряжения $\langle\, \overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\, |$

$$\mathbb{X}(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;\,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{a}) & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{b}) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{U(\overleftarrow{a})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{U(\overleftarrow{b})} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Ковариантный объём одновекторного корта источника напряжения $\langle \overleftarrow{a} \,|$

$$V(\overleftarrow{a})_1 = \left|\ \xi_1(\overleftarrow{a})\ \right| = \left|\ \tfrac{1}{U(\overleftarrow{a})}\ \right|$$

9. Ковариантный объём двухвекторного корта источников напряжения $\langle \overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b} \,|$

$$V(\overleftarrow{a},\overleftarrow{b})_{1;0} = \begin{vmatrix} \xi_1(\overleftarrow{a}) & 0 \\ \xi_1(\overleftarrow{b}) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{U(\overleftarrow{a})} & 0 \\ \frac{1}{U(\overleftarrow{b})} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

10. Координатная матрица контравариантного двухвекторного корта проводников $|\, \overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k} \,\rangle$

$$\mathbb{X}^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^1(\overrightarrow{i}) & x^1(\overrightarrow{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R(\overrightarrow{i}) & R(\overrightarrow{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Контравариантный объём одновекторного корта проводника $|\, \overrightarrow{i} \,\rangle$

$$V^1(\overrightarrow{i}) = \left|\ x^1(\overrightarrow{i})\ \right| = \left|\ R(\overrightarrow{i})\ \right|$$

12. Контравариантный объём двухвекторного корта проводников $|\, \overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k} \,\rangle$

$$V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) = \begin{vmatrix} x^1(\overrightarrow{i}) & x^1(\overrightarrow{k}) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R(\overrightarrow{i}) & R(\overrightarrow{k}) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

13. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,;\,\overrightarrow{i}}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{a})_1\ V^1(\overrightarrow{i})$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{a},\overleftarrow{b})_{1;0}\ V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) \equiv 0$$

Итак, на множестве проводников $\overline{\mathfrak{B}}$ и множестве источников напряжения $\underline{\mathfrak{A}}$ обнаруживается физическая структура рода $\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) \equiv 0$ (мультипликативная физическая структура ранга (2,2)), если в качестве репрезентатора $I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}}$ взять измеряемую на опыте обратную величину силы тока $I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}}$, проходящего через проводник i при подключении к нему источника напряжения a.

Можно сказать, что закон Ома, записанный в хорошо известной традиционной форме

$$\mathcal{J} = \frac{U}{R},$$

представляет собой внешнюю сторону электродинамики постоянных токов (её “явление”). Что же касается её глубинного содержания (её “сущности”), то оно заключено в её структуре – в существовании репрезентатора

$$\overset{1}{I}_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}} = \xi_{\overleftarrow{a}}\, x_{\overrightarrow{i}} = \frac{1}{U_{\overleftarrow{a}}} R_{\overrightarrow{i}},$$

верификатора

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;0} \cdot V^{1;0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = 0$$

и двух объёмов $V(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;0}$ и $V^{1;0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ двухвекторых кортов $\langle \overleftarrow{a}\, \overleftarrow{b} \,|$ и $|\, \overrightarrow{i}\, \overrightarrow{k} \rangle$, тождественно обращающихся в ноль.

Подведём итоги:

Из всего сказанного следует, что хорошо известный ещё из средней школы **закон Ома для участка цепи – это фундаментальный закон сакральной одномерной векторной геометрии на двух множествах существенно различной природы с репрезентатором**

$$I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}} = \xi_1(\overleftarrow{a})\, x^1(\overrightarrow{i}) = \frac{1}{U(\overleftarrow{a})}\, R(\overrightarrow{i}),$$

допускающей следующую физическую интерпретацию:

$\underline{\mathfrak{A}}$ – множество источников постоянного напряжения;

$\overline{\mathfrak{B}}$ – множество проводников;

1. Источник постоянного напряжения $\overleftarrow{a}$ представляет собой левый субэйдос из множества $\underline{\mathfrak{A}}$

Проводник $\overrightarrow{i}$ представляет собой правый субэйдос из множества проводников $\overline{\mathfrak{B}}$ [72].

2. Источник постоянного напряжения – левый субэйдос – является одномерным ковариантным субвектором $\overleftarrow{a}$. Его единственная ковариантная координата имеет простой физический смысл величины, обратной напряжению:

$$\xi_1(\overleftarrow{a}) = 1/U(\overleftarrow{a}).$$

Проводник – правый субэйдос – является одномерным контравариантным субвектором $\overrightarrow{i}$. Его единственная контравариантная координата имеет физический смысл сопротивления:

$$x^1(\overrightarrow{i}) = R(\overrightarrow{i}).$$

3. Репрезентатором, характеризующим отношения между источником постоянного напряжения $\overleftarrow{a}$ и проводником $\overrightarrow{i}$, является величина, обратная силе

[72] Ситуация симметрична: можно было бы взять в качестве источника постоянного напряжения $\overrightarrow{\alpha}$ правый субэйдос из множества $\underline{\mathfrak{A}}$, но тогда пришлось бы взять в качестве проводника $\overleftarrow{i}$ левый субэйдос из множества $\overline{\mathfrak{B}}$.

тока $I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}} = 1/\mathcal{J}_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}}$, протекающего через проводник $\overrightarrow{i}$ при подключении к нему источника постоянного напряжения $\overleftarrow{a}$.

4. Фундаментальный закон электродинамики постоянных токов – закон Ома для участка цепи – определяется отношением между двумя кортами – левым 2-векторным кортом $\langle\, \overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\,|$ и правым 2-векторным кортом $|\,\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\,\rangle$.

5. Скалярное произведение этих кортов $\langle\, \overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\,|$ и $|\,\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\,\rangle$ равно верификатору, тождественно равному нулю –

$$\langle\, \overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\,|\,\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\,\rangle = \overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}} & I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{k}} & 0 \\ 0 & I_{\overleftarrow{b}\,\overrightarrow{i}} & I_{\overleftarrow{b}\,\overrightarrow{k}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0-$$

и определяющему сакрально-инвариантную форму закона Ома для участка цепи.

6. Поскольку верификатор $\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a})$ расщепляется на произведение двух объёмов:

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;\,0}\ V^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) \equiv 0,$$

то в конечном итоге фундаментальный закон, лежащий в основании электродинамики постоянных токов – закон Ома для участка цепи – сводится к равенству нулю ковариантного объёма 2-векторного корта источников постоянного напряжения

$$V(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;\,0} \equiv 0$$

и контравариантного объёма 2-векторного корта проводников

$$V^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) \equiv 0.$$

Заметки на полях

Заметим, что из равенства

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,;\,\overrightarrow{i}}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{a})_1\ V^1(\overrightarrow{i})$$

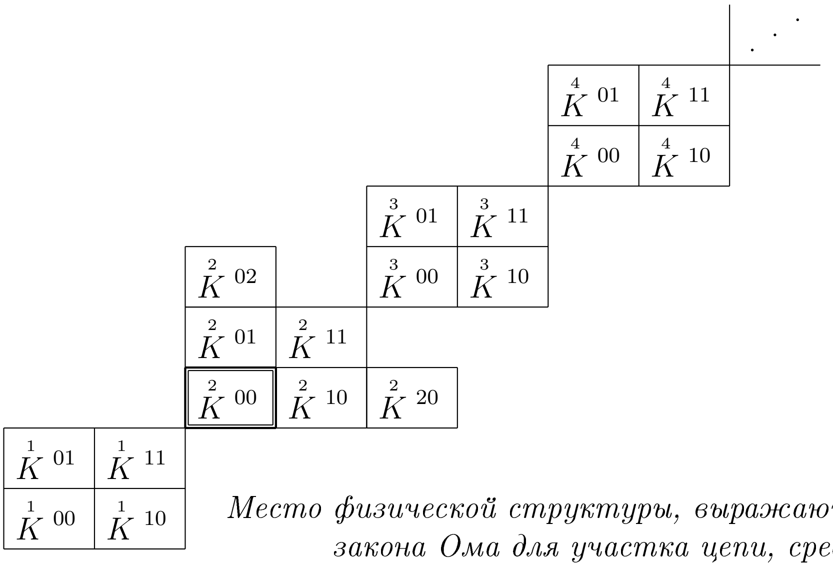
вытекает следующее важное сакральное тождество:

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,;\,\overrightarrow{i}}(\overset{1}{I}) = \overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,;\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) \cdot \overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I})^{-1} \cdot \overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}}(\overset{1}{I}).$$

Сакральная формулировка закона Ома для участка цепи

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{I}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \xi(\overleftarrow{\alpha})_1\, x^1(\overrightarrow{i}\,) = \frac{R(i)}{U(\alpha)}}$$



Место физической структуры, выражающей сущность закона Ома для участка цепи, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность электродинамики постоянных токов для участка цепи состоит в существовании сакральных отношений между множеством источников постоянного напряжения $\underline{\mathfrak{A}}$ и множеством проводников $\overline{\mathfrak{B}}$. При этом каждый источник постоянного напряжения $\overleftarrow{a}$ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждый проводник $\overrightarrow{i}$ является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.

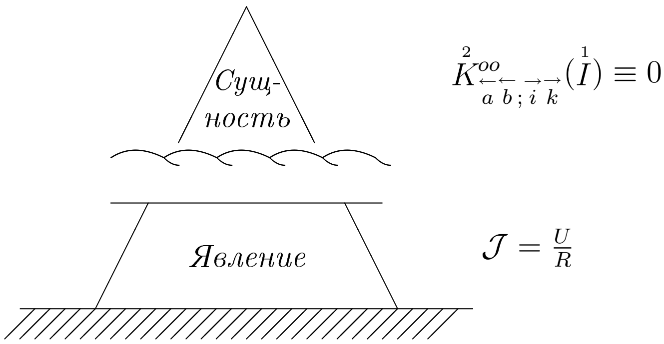
Другими словами, электродинамика постоянных токов для участка цепи является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность закона Ома для участка цепи состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухвекторного корта источников постоянного напряжения

$\langle \overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,|$ на двухвекторный корт проводников $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\rangle$, объёмы каждого из которых тождественно равны нулю.

Другими словами, **сущность закона Ома для участка цепи состоит в наличии таких отношений между 2-векторным кортом источников постоянного напряжения $\langle \overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,|$ и 2-векторным кортом проводников $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{a},\overleftarrow{b})_{1;0}\; V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) \equiv 0,$$



Явление и сущность закона Ома для участка цепи.

Литература к Примеру 2

[1]. *H. Cavendish.* The Electrical Researches of H. Cavendish, ed. by C. Maxwell, London, 1879.

Пример 3.

Закон Ома для всей цепи.

Так как в открытии тайн и исследовании скрытых причин вещей от точных опытов и доказанных положений получаются более прочные выводы, нежели от вероятных догадок и мнений рутинных философов, то для лучшего понимания неизвестной доселе славной субстанции, мы поставили себе задачей начать с обыкновенной каменной или железной материи, а также с тел, которые можно трогать руками и воспринимать чувствами, а затем уже идти далее через очевидные опыты и впервые проникнуть в сокровенную глубь Земли (1600) [1].

— Вильям Гильберт

Мы только что видели, что закон Ома для участка цепи

$$\mathcal{J} = \frac{U}{R}$$

с точностью до обозначений и физической интерпретации имеет то же самое строение или, другими словами, ту же самую физическую структуру, что и рассмотренный в самом начале закон Ньютона.

Что же касается закона Ома для всей цепи

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}\,, \tag{1}$$

то его строение – его физическая структура – существенно отличается от физической структуры закона Ома для участка цепи и потому мы рассмотрим его более подробно.

Входящие в (1) физические величины – сила тока $\mathcal{J}$, сопротивление проводника R, электродвижущая сила $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r источника тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ – имеют, как и в законе Ньютона, различную математическую природу.

Так, сопротивление R_i является числовой функцией одной нечисловой переменной – проводника i, то есть

$$R : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$$
$$i \mapsto R_i,$$

где $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество различных проводников $i, k, \ldots$.

Электродвижущая сила $\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}$ и внутреннее сопротивление $r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}$ являются двумя компонентами другой функции одной нечисловой переменной – источника тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$, то есть

$$\Psi : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}^2$$
$$\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} \mapsto \mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}},\ r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}},$$

где $\mathfrak{N} = \{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}, \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}, \ldots\}$ — множество источников тока;
сила же тока $\mathcal{J}$ является новой числовой функцией двух нечисловых переменных – источника тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ и проводника i, то есть

$$\mathcal{J} : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$$
$$\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}},\ i \mapsto \mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i}.$$

Итак, специально выделяя независимые нечисловые переменные

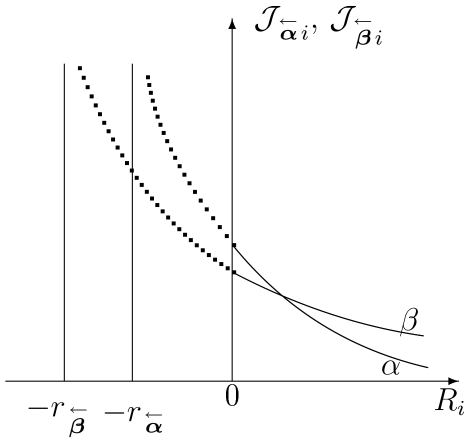
$$\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathfrak{N} \quad \text{и} \quad i \in \mathfrak{M}$$

перепишем закон Ома (1) в виде

$$\mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\, i} = \frac{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}{R_i + r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}. \tag{2}$$

Таким образом, закон Ома в форме (2) представляет собой связь между существенно разнородными физическими величинами – одноиндексными сопротивлением R_i проводника i, электродвижущей силой $\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}$ и внутренним сопротивлением $r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}$ источника тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$, с одной стороны, и двухиндексной силой тока $\mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i}$ — с другой, т. е.

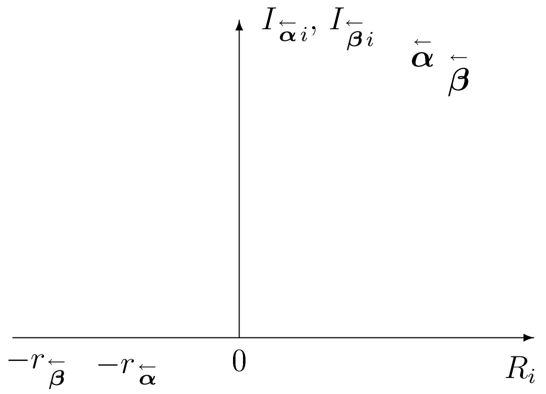
$$\mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i} = \varphi(R_i; \mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}, r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}})$$



Зависимость силы тока $\mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i}$ от сопротивления проводника R_i и внутреннего сопротивления $r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}$ источника тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$.

Удобно вместо силы тока $\mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i}$ рассматривать величину, ей обратную

$$\frac{1}{\mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i}} = I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i} = \frac{R_i + r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}$$



Зависимость величины $I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i}$ *, равной обратной величине силы тока* $\mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i}$ *, от сопротивления проводника* R_i *и внутреннего сопротивления* $r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}$ *источника тока* $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ *.*

Итак, закон Ома для всей цепи в форме с явно выделенными нечисловыми переменными имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\mathcal{J}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i}} = I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i} = \frac{R_i}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}} + \frac{r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}$$

или

$$\boxed{I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}} i} = \xi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}} x_i + \sigma_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}} \quad , \tag{3}$$

где

$$x_i = R_i; \qquad \xi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{1}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}, \quad \sigma_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}.$$

Однако, в отличие от закона Ома для участка цепи, когда источник напряжения a описывался одномерным вектором с одной единственной координатой $\xi(\overleftarrow{a}) = \dfrac{1}{U(\overleftarrow{a})}$, в законе Ома для всей цепи источник тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ характеризуется двумя физическими величинами – электродвижущей силой $\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}$ и внутренним сопротивлением $r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}$ – и описывается одномерным **криптовектором** $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ с одной координатой $\xi(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}) = \dfrac{1}{\mathcal{E}(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})}$ и с одним скрытым параметром $\sigma(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}) = \dfrac{r(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})}{\mathcal{E}(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})}$.

Далее, в отличие от закона Ома для участка цепи, когда проводник i описывался одномерным **вектором** с одной единственной координатой $x(\overleftarrow{i}) = R(\overleftarrow{i})$, в законе Ома для всей цепи проводник i по-прежнему характеризуется одной физической величиной – сопротивлением $x(i) = R(i)$, но при этом описывается одномерной **точкой** без внутренней степени свободы.

Итак, **подведём итоги**:

1. В случае закона Ома для всей цепи *репрезентатором* является

$$I_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}} i} = \frac{1}{\mathcal{J}_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}} i}}$$

– величина обратная силе тока $\mathcal{J}_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}} i}$, протекающего через проводник i при подключении к нему источника тока α.

2. Каждый левый источник тока $\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}$ характеризуется одномерным ковариантным **1-криптовектором**-строкой:

$$\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}} \longleftrightarrow \Big(0;\ \xi_1(\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}});\ \sigma_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}\ \Big) = \left(0;\ \frac{1}{\mathcal{E}_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}};\ \frac{r_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}}{\mathcal{E}_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}}\ \right).$$

Каждый правый проводник i характеризуется одномерной контравариантной **1-точечной** матрицей-столбцом:

$$i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x^1(i) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

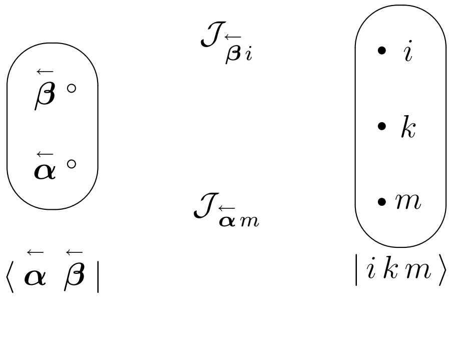
3. Таким образом, обратное значение тока $I_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}} i}$ представляет собой скалярное произведение двух матриц, одна из которых (**1-криптовекторная**) характеризует источник тока $\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}$, а другая (**1-точечная**) – проводник i:

$$I_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}} i} = \Big(0;\ \xi_1(\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}});\ \sigma_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}\ \Big)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ x^1(i) \\ 1 \end{pmatrix} = \left(0;\ \frac{1}{\mathcal{E}_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}};\ \frac{r_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}}{\mathcal{E}_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ R_i \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \xi_1(\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}})\, x^1(i) + \sigma_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{1}{\mathcal{E}_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}}\ R_i + \frac{r_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}}{\mathcal{E}_{\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}}}$$

.

4. Закон Ома для всей цепи как *сакральное отношение* между **2-криптовекторным** кортом источников тока $\langle\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}\ \overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\beta}}|$ и **3-точечным** кортом проводников $|\,i\,k\,m\,\rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



5. Закон Ома для всей цепи в сакрально-инвариантной форме формулируется следующим образом:

для любых двух источников тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$, $\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}} \in \underline{\mathfrak{N}}$ и любых трёх проводников $i,\ k,\ m \in \overline{\mathfrak{M}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{2}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}};\,i\,k\,m}(\overset{1}{I}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}i} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}k} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}m} \\ 0 & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}i} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}k} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}m} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0}$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{2}{\mathbb{K}}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\,\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}};i\,k\,m}(\overset{1}{I}) = \mathbb{X}(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}},\ \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}})_{1;\,0} \cdot \mathbb{X}^{1;\,0}(i,k,m)$$

7. Координатная матрица ковариантного **2-криптовекторного** корта $\langle\, \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\ \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}\,|$ источников тока

$$\mathbb{X}(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}, \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}})_{1;\,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}) & 0 & \sigma_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}} \\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}) & 0 & \sigma_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}} & 0 & \dfrac{r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}} \\ 0 & \dfrac{1}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}}} & 0 & \dfrac{r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}}}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}}} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Ковариантный объём **1-криптовекторного** корта $\langle\, \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\ |$ источника тока

$$V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\,)_1 = \left|\ \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})\ \right| = \left|\ \frac{1}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}\ \right|$$

9. Ковариантный объём **2-криптовекторного** корта $\langle\, \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\ \ \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}\ |$ источников тока

$$V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}, \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}})_{1;\,0} = \begin{vmatrix} \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}) & 0 \\ \xi_1(\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}} & 0 \\ \dfrac{1}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}}} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

10. Координатная матрица контравариантного **3-точечного** корта проводников $|\ i\ k\ m\ \rangle$

$$\mathbb{X}^{1;\,0}(i,k,m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i) & x^1(k) & x^1(m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_i & R_k & R_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Контравариантный объём **2-точечного** корта проводников $|\, i\, k\,\rangle$

$$W^1(i,k)=\begin{vmatrix} x^1(i) & x^1(k)\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} R_i & R_k\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

12. Контравариантный объём **3-точечного** корта проводников $|\, i\ k\ m\,\rangle$

$$W^{1;0}(i,k,m)=\begin{vmatrix} x^1(i) & x^1(k) & x^1(m)\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} R_i & R_k & R_m\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\equiv 0$$

13. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}};\,i\,k}(\overset{1}{I})=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}i} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}k}\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & \xi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}} & \sigma_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & x_i & x_k\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})_1\cdot W^1(i,k)$$

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\ \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}};\,i\,k\,m}(\overset{1}{I})=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}i} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}k} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}m}\\ 0 & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}i} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}k} & I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}m}\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \xi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}} & 0 & \sigma_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}\\ 0 & \xi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}} & 0 & \sigma_{\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}}\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x_i & x_k & x_m\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}},\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}})_{1;0}\cdot W^{1;0}(i,k,m)\equiv 0$$

Итак, на множестве проводников $\overline{\mathfrak{M}}$ и множестве источников тока $\underline{\mathfrak{N}}$ обнаруживается физическая структура рода $\overset{2}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\ \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}};\,i\,k\,m}(\overset{1}{I})\equiv 0$ (физическая структура ранга (2, 3)), если в качестве репрезентатора $I_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}i}$ взять обратную величину измеряемой силы тока, протекающего через проводник i при подключении к нему источника тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$.

Можно сказать, что закон Ома для всей цепи, записанный в хорошо известной традиционной форме

$$\mathcal{J}=\frac{\mathcal{E}}{R+r},$$

представляет собой внешнюю сторону электродинамики постоянных токов (её "явление"). Что же касается её глубинного содержания (её "сущности"), то оно заключено в её структуре – в существовании репрезентатора

$$\overset{1}{I}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}i}=\xi_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}\ x_i+\sigma_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}\ =\frac{1}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}R_i+\frac{r_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}}{\mathcal{E}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}}},$$

верификатора

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\ \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}};\,i\,k\,m}(\overset{1}{I})=V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}},\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}})_{1;0}\cdot W^{1;0}(i,k,m)=0,$$

объёма $V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}},\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}})_{1;0}$ **2-криптовекторного** корта источников тока $\langle\ \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\ \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}\ |$ и объёма $W^{10}(i,k,m)$ **3-точечного** корта проводников $|\, i\,k\,m\,\rangle$, тождественно обращающихся в нуль.

Сакральная формулировка закона Ома для всей цепи

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{01}(\overset{1}{u}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{u}_{\overleftarrow{\alpha} i} = \xi(\overleftarrow{\alpha})_1\, x^1(i) + \sigma_{\overleftarrow{\alpha}} = \frac{R(i)}{\mathcal{E}(\alpha)} + \frac{\rho(\alpha)}{\mathcal{E}(\alpha)}}$$

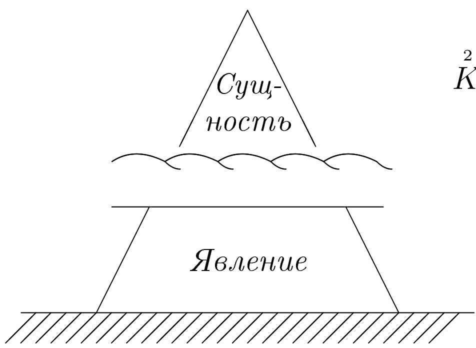
Заметки на полях

Заметим, что из равенства

$$\overset{1}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\alpha};\,ik}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{\alpha})_1\; W^1(i,k)$$

вытекает следующее важное сакральное тождество:

$$\overset{1}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\alpha};\,ik}(\overset{1}{I}) = \overset{1}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\alpha};\,mn}(\overset{1}{I}) \cdot \overset{1}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\beta};\,mn}(\overset{1}{I})^{-1} \cdot \overset{1}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\beta};\,ik}(\overset{1}{I})$$



$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\,\overleftarrow{\boldsymbol{\beta}};\,ikm}(\overset{1}{I}) \equiv 0$$

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Явление и сущность закона Ома для всей цепи

								$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\boxed{\overset{2}{K}{}^{01}}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\overset{2}{K}{}^{00}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место физической структуры, выражающей сущность закона Ома для всей цепи, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность электродинамики постоянных токов для всей цепи состоит в существовании сакральных отношений между множеством левых источников тока $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством правых проводников $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждый источник тока $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптовектором** сакрального одномерного криптовекторного пространства, а каждый проводник i является **точкой** сакрального одномерного точечного пространства.

Другими словами, электродинамика постоянных токов для всей цепи является сакральной криптовектор-точечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность закона Ома для всей цепи состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухкриптовекторного корта источников тока $\langle\, \overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\ \overleftarrow{\boldsymbol{\beta}}\ |$ на трёхточечный корт проводников $|\, i\, k\, m\,\rangle$, объёмы каждого из которых тождественно равны нулю.

Литература к Примеру 3

[1]. *Gilbert.* De Magnete, magneticisque corporibus et de magno magnete tellure. Physiologia nova. Londini, 1600.

Русский перевод: *В. Гильберт.* О магните, магнитных телах и о большом магните – Земле. - М.: Изд-во АН СССР, 1956.

Пример 4. Закон Ома для переменного тока.

Ампер считал необходимым особенно подчеркнуть, что математическая теория электродинамических явлений выведена им исключительно из опыта.

— Вильгельм Вебер

Рассмотрим два множества:

$\overline{\mathfrak{M}} = \{i, k, m, \ldots\}$ – множество правых резисторов $i, k, m, \ldots$, состоящих из последовательно соединённых ёмкостей, индуктивностей и активных проводников, и

$\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ – множество левых генераторов переменного напряжения с различной частотой ω и амплитудой u .

Если к генератору $\alpha \in \mathfrak{N}$ с напряжением

$$\tilde{u}_\alpha(t) = u_\alpha \cos \omega_\alpha t$$

подсоединить резистор i , то в цепи установится переменный ток

$$\tilde{\mathfrak{I}}_{\alpha i}(t) = \mathfrak{I}_{\alpha i} \cos(\omega_\alpha t + \varphi_{\alpha i}),$$

амплитуда $\mathfrak{I}_{\alpha i}$ и фаза $\varphi_{\alpha i}$ которого могут быть измерены с помощью соответствующих приборов.

Рассмотрим все амплитуды тока

$$\begin{matrix} \mathfrak{I}_{\alpha i} & \mathfrak{I}_{\alpha k} & \mathfrak{I}_{\alpha m} & \cdots \\ \mathfrak{I}_{\beta i} & \mathfrak{I}_{\beta k} & \mathfrak{I}_{\beta m} & \cdots \\ \mathfrak{I}_{\gamma i} & \mathfrak{I}_{\gamma k} & \mathfrak{I}_{\gamma m} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

и фазы

$$\begin{matrix} \varphi_{\alpha i} & \varphi_{\alpha k} & \varphi_{\alpha m} & \cdots \\ \varphi_{\beta i} & \varphi_{\beta k} & \varphi_{\beta m} & \cdots \\ \varphi_{\gamma i} & \varphi_{\gamma k} & \varphi_{\gamma m} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix},$$

полученные при подключении каждого резистора $i, k, m, \ldots$ к каждому генератору $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

В этих двух матрицах содержится полная информация об отношениях между резисторами из $\overline{\mathfrak{M}}$ и генераторами из $\underline{\mathfrak{N}}$.

Чтобы обнаружить универсальную закономерность, лежащую в основании этих отношений, рассмотрим две новые величины:

$$a_{\alpha i} = \frac{\cos\varphi_{\alpha i}}{\mathfrak{I}_{\alpha i}}$$

и

$$b_{\alpha i} = \frac{\sin\varphi_{\alpha i}}{\mathfrak{I}_{\alpha i}}$$

Как известно, амплитуда $\mathfrak{I}_{\alpha i}$ и фаза $\varphi_{\alpha i}$ переменного тока следующим образом выражаются через активное сопротивление R_i , ёмкость C_i и индуктивность L_i резистора i и частоту ω_α и напряжение u_α генератора α :

$$\mathfrak{I}_{\alpha i} = \frac{u_\alpha}{\sqrt{R_i^2 + (\frac{1}{\omega_\alpha C_i} - \omega_\alpha L_i)^2}},$$

$$\cos\varphi_{\alpha i} = \frac{R_i}{\sqrt{R_i^2 + (\frac{1}{\omega_\alpha C_i} - \omega_\alpha L_i)^2}},$$

$$\sin\varphi_{\alpha i} = \frac{\frac{1}{\omega_\alpha C_i} - \omega_\alpha L_i}{\sqrt{R_i^2 + (\frac{1}{\omega_\alpha C_i} - \omega_\alpha L_i)^2}}.$$

Таким образом, новые величины $a_{\alpha i}$ и $b_{\alpha i}$ запишутся в виде:

$$a_{\alpha i} = \frac{R_i}{u_\alpha}$$

$$b_{\alpha i} = \frac{1}{u_\alpha \omega_\alpha C_i} - \frac{\omega_\alpha L_i}{u_\alpha}$$

или

$$a_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i$$

$$b_{\alpha i} = \eta_\alpha y_i + \zeta_\alpha z_i,$$

где

$$\begin{array}{ll} x_i = R_i & \xi_\alpha = \frac{1}{u_\alpha} \\ y_i = \frac{1}{C_i} & \eta_\alpha = \frac{1}{u_\alpha \omega_\alpha} \\ z_i = L_i & \zeta_\alpha = -\frac{\omega_\alpha}{u_\alpha} \end{array} .$$

Итак, в отличие от электрических цепей постоянного тока, в этом случае существуют два соотношения, одно из которых связывает между собой измеряемые на опыте величины $a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$, а другое — величины $b_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$.

Таким образом, если взять два произвольных резистора $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k} \in \overline{\mathfrak{M}}$ и два произвольных генератора $\overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta} \in \underline{\mathfrak{N}}$ и измерить четыре значения

$$\begin{array}{cc} a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{k}} \\ a_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{i}} & a_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{k}} \end{array} ,$$

то они окажутся связанными между собой следующим сакрально-инвариантным соотношением:

$$\forall\ \vec{i},\vec{k}\in\mathfrak{M} \qquad\qquad \forall\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta}\in\mathfrak{N}$$

$$\begin{vmatrix} a_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{k}} \\ a_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{i}} & a_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{k}} \end{vmatrix} = 0.$$

С другой стороны, если взять три произвольных резистора $\vec{i},\vec{k},\vec{m}\in\mathfrak{M}$ и три произвольных генератора $\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta},\overleftarrow{\gamma}\in\mathfrak{N}$ и измерить девять значений

$$\begin{matrix} b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{m}} \\ b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{m}} \\ b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{m}} \end{matrix},$$

то они окажутся связанными между собой следующим сакрально-инвариантным соотношением:

$$\forall\ \vec{i},\vec{k},\vec{m}\in\mathfrak{M} \qquad\qquad \forall\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta},\overleftarrow{\gamma}\in\mathfrak{N}$$

$$\begin{vmatrix} b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{m}} \\ b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{m}} \\ b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{m}} \end{vmatrix} = 0.$$

В самом деле, если

$$b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} = \eta_\alpha y_i + \zeta_\alpha z_i,$$

то имеет место следующее тождество:

$$\forall\ \vec{i},\vec{k},\vec{m}\in\mathfrak{M} \qquad\qquad \forall\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta},\overleftarrow{\gamma}\in\mathfrak{N}$$

$$\begin{vmatrix} b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{m}} \\ b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{m}} \\ b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{m}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta_\alpha & \zeta_\alpha & 0 \\ \eta_\beta & \zeta_\beta & 0 \\ \eta_\gamma & \zeta_\gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_k & y_m \\ z_i & z_k & z_m \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Итак, мы видим, что новые матрицы

$$a = \begin{pmatrix} a_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{k}} & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{m}} & \dots \\ a_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{i}} & a_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{k}} & a_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{m}} & \dots \\ a_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{i}} & a_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{k}} & a_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{m}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и

$$b = \begin{pmatrix} b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{m}} & \dots \\ b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\vec{m}} & \dots \\ b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{i}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{k}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\vec{m}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

составленные из измеряемых на опыте амплитуд $\mathfrak{I}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$ и фаз $\varphi_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$, обнаруживают простую закономерность:

ранг матрицы a **равен единице**, а **ранг матрицы** b **равен двум**.

Но эти матрицы не являются полностью независимыми, так как координата $\xi_\alpha = \frac{1}{u_\alpha}$ матрицы a связана с координатами $\eta_\alpha = \frac{1}{u_\alpha \omega_\alpha}$ и $\zeta_\alpha = -\frac{\omega_\alpha}{u_\alpha}$ из матрицы b тождеством

$$\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha \zeta_\alpha = 0.$$

Итак,

1. В случае закона Ома для переменного тока имеется *два репрезентатора*:

$$a_{\alpha i} = \frac{\cos \varphi_{\alpha i}}{\mathfrak{I}_{\alpha i}}$$

и

$$b_{\alpha i} = \frac{\sin \varphi_{\alpha i}}{\mathfrak{I}_{\alpha i}}$$

2. Каждый левый генератор переменного напряжения α характеризуется двумя ковариантными векторами:

одномерным вектором-строкой:

$$\overleftarrow{\alpha} \longleftrightarrow \Big(0;\ \xi_\alpha;\ 0\Big) = \Big(0;\ \frac{1}{u_\alpha};\ 0\Big)$$

и двумерным вектором-строкой:

$$\overleftarrow{\alpha} \longleftrightarrow \Big(0;\ \eta_\alpha,\ \zeta_\alpha;\ 0\Big) = \Big(0;\ \frac{1}{u_\alpha\,\omega_\alpha},\ -\frac{\omega_\alpha}{u_\alpha};\ 0\Big)$$

Каждый правый резистор i характеризуется двумя контравариантными векторами:

одномерными вектором-столбцом:

$$\overrightarrow{i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

и двумерным вектором-столбцом:

$$\overrightarrow{i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y_i \\ z_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{C_i} \\ L_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Таким образом, первый репрезентатор $a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$ представляет собой скалярное произведение двух одномерных векторов, один из которых (ковариантный)

характеризует генератор переменного напряжения $\overleftarrow{\alpha}$, а другой (контравариантный) – резистор $\overrightarrow{i}$:

$$a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \Big(0;\ \xi_\alpha;\ 0\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \Big(0;\ \frac{1}{u_\alpha};\ 0\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R_i \\ 0 \end{pmatrix} = \xi_\alpha\, x_i = \frac{1}{u_\alpha}\ R_i.$$

Второй репрезентатор $b_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$ представляет собой скалярное произведение двух двумерных векторов, один из которых (ковариантный) характеризует генератор переменного напряжения $\overleftarrow{\alpha}$, а другой (контравариантный) – резистор $\overrightarrow{i}$:

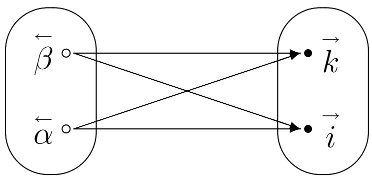
$$b_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \Big(0;\ \eta_\alpha,\ \zeta_\alpha;\ 0\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_i \\ z_i \\ 0 \end{pmatrix} = \Big(0;\ \frac{1}{u_\alpha\omega_\alpha},\ \ -\frac{\omega_\alpha}{u_\alpha};\ 0\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{C_i} \\ L_i \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \eta_\alpha\, y_i + \zeta_\alpha\, z_i = \frac{1}{u_\alpha\omega_\alpha C_i} - \frac{\omega_\alpha L_i}{u_\alpha}.$$

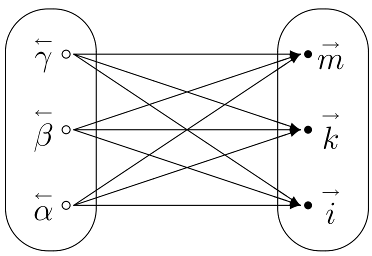
4. Закон Ома для переменного тока как **сакральное отношение** между двухвекторным кортом генераторов переменного напряжения $\langle\, \overleftarrow{\alpha}\, \overleftarrow{\beta}\, |$ и двухвекторным кортом резисторов $|\, \overrightarrow{i}\, \overrightarrow{k}\, \rangle$, с одной стороны,

и между трёхвекторным кортом генераторов переменного напряжения $\langle\, \overleftarrow{\alpha}\, \overleftarrow{\beta}\, \overleftarrow{\gamma}\, |$ и трёхвекторным кортом резисторов $|\, \overrightarrow{i}\, \overrightarrow{k}\, \overrightarrow{m}\, \rangle$ – с другой,

описывается следующими двумя сакральными диаграммами:



$\langle\, \overleftarrow{\alpha}\, \overleftarrow{\beta}\, |$ $\qquad$ $|\, \overrightarrow{i}\, \overrightarrow{k}\, \rangle$



$\langle\, \overleftarrow{\alpha}\, \overleftarrow{\beta}\, \overleftarrow{\gamma}\, |$ $\qquad$ $|\, \overrightarrow{i}\, \overrightarrow{k}\, \overrightarrow{m}\, \rangle$

5. Закон Ома для переменного тока в сакрально-инвариантной форме формулируется следующим образом:

для любых трёх генераторов переменного напряжения $\overleftarrow{\alpha}$, $\overleftarrow{\beta}$, $\overleftarrow{\gamma} \in \underline{\mathfrak{N}}$ и любых трёх резисторов $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{m} \in \overline{\mathfrak{M}}$ имеют место следующие два сакральных тождества:

$$\boxed{\begin{gathered}\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} & a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{k}} & 0 \\ 0 & a_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{i}} & a_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{k}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \\ \overset{3}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}}(\overset{2}{b}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{k}} & b_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{m}} & 0 \\ 0 & b_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{i}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{k}} & b_{\overleftarrow{\beta}\,\overrightarrow{m}} & 0 \\ 0 & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\overrightarrow{i}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\overrightarrow{k}} & b_{\overleftarrow{\gamma}\,\overrightarrow{m}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0\end{gathered}}$$

6. Разложение первой фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{2}{\mathbf{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = \mathbf{X}(1;\,\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0} \cdot \mathbf{X}^{1;\,0}(1;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$$

7. Координатная матрица первого ковариантного двухвекторного корта $\langle\,\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,|$ генераторов переменного напряжения

$$\mathbf{X}(1;\,\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \xi_\beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{u_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u_\beta} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Ковариантный объём первого одновекторного корта $\langle\,\alpha\,|$ генератора переменного напряжения

$$V(1;\,\overleftarrow{\alpha})_1 = \left|\ \xi_\alpha\ \right| = \left|\ \frac{1}{u_\alpha}\ \right|$$

9. Ковариантный объём первого двухвекторного корта $\langle\,\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,|$

$$V(1;\,\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0} = \begin{vmatrix} \xi_\alpha & 0 \\ \xi_\beta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{u_\alpha} & 0 \\ \dfrac{1}{u_\beta} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

10. Координатная матрица первого контравариантного двухвекторного корта резисторов $|\,\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\,\rangle$

$$\mathbf{X}^{1;\,0}(1;\ \overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i & x_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_i & R_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Контравариантный объём первого одновекторного корта резистора $|\,\overrightarrow{i}\,\rangle$

$$V^{1}(1;\ \overrightarrow{i}) = \left|\ x_i\ \right| = \left|\ R_i\ \right|$$

12. Контравариантный объём первого двухвекторного корта резисторов $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\rangle$

$$V^{1;\,0}(1;\ \overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_i & R_k \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

13. Разложение второй фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{3}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}}(\overset{1}{b}) = \mathbb{X}(2;\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta},\overleftarrow{\gamma})_{12;\,0}\cdot\mathbb{X}^{12;\,0}(2;\ \overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{m})$$

14. Координатная матрица второго ковариантного трёхвекторного корта $\langle\,\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma}\,|$ генераторов переменного напряжения

$$\mathbf{X}(2;\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta},\overleftarrow{\gamma})_{12;\,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \eta_\alpha & \zeta_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \eta_\beta & \zeta_\beta & 0 & 0 \\ 0 & \eta_\gamma & \zeta_\gamma & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{u_\alpha\omega_\alpha} & -\dfrac{\omega_\alpha}{u_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u_\beta\omega_\beta} & -\dfrac{\omega_\beta}{u_\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u_\gamma\omega_\gamma} & -\dfrac{\omega_\gamma}{u_\gamma} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Ковариантный объём второго двухвекторного корта $\langle\,\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,|$ генераторов переменного напряжения

$$V(2;\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{12} = \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \eta_\alpha \\ \xi_\beta & \eta_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{u_\alpha\omega_\alpha} & -\dfrac{\omega_\alpha}{u_\alpha} \\ \dfrac{1}{u_\beta\omega_\beta} & -\dfrac{\omega_\beta}{u_\beta} \end{vmatrix}$$

16. Ковариантный объём второго трёхвекторного корта $\langle\,\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma}\,|$ генераторов переменного напряжения

$$V(2;\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta},\overleftarrow{\gamma})_{12;\,0} = \begin{vmatrix} \eta_\alpha & \zeta_\alpha & 0 \\ \eta_\beta & \zeta_\beta & 0 \\ \eta_\gamma & \zeta_\gamma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{u_\alpha\omega_\alpha} & -\dfrac{\omega_\alpha}{u_\alpha} & 0 \\ \dfrac{1}{u_\beta\omega_\beta} & -\dfrac{\omega_\beta}{u_\beta} & 0 \\ \dfrac{1}{u_\gamma\omega_\gamma} & -\dfrac{\omega_\gamma}{u_\gamma} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

17. Координатная матрица второго контравариантного трёхвекторного корта резисторов $|\ \vec{i}\ \vec{k}\ \vec{m}\ \rangle$

$$\mathbb{X}^{12;\,0}(2;\ \vec{i},\vec{k},\vec{m}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_i & y_k & y_m & 0 \\ 0 & z_i & z_k & z_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{C_i} & \dfrac{1}{C_k} & \dfrac{1}{C_m} & 0 \\ 0 & L_i & L_k & L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Контравариантный объём второго двухвекторного корта $|\ \vec{i}\ \vec{k}\ \rangle$ резистора

$$V^{12}(2;\ \vec{i},\vec{k}) = \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{C_i} & \dfrac{1}{C_i} \\ L_i & L_k \end{vmatrix}$$

19. Контравариантный объём второго трёхвекторного корта $|\ \vec{i}\,\vec{k}\,\vec{m}\rangle$ резисторов

$$V^{12;\,0}(2;\ \vec{i},\vec{k},\vec{m}) = \begin{vmatrix} y_i & y_k & y_m \\ z_i & z_k & z_m \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{C_i} & \dfrac{1}{C_i} & \dfrac{1}{C_i} \\ L_i & L_k & L_m \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

20. Разделение нечисловых переменных в случае репрезентатора

$$\overset{1}{a}_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} = \xi_\alpha\, x_i = \frac{1}{u_\alpha}\, R_i.$$

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha};\ \vec{i}}(\overset{1}{a}) = V(1;\ \overleftarrow{\alpha})_1\ V^1(1;\ \vec{i});$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\ \vec{i}\ \vec{k}}(\overset{1}{a}) = V(1;\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0}\ V^{1;\,0}(1;\ \vec{i},\vec{k}) \equiv 0$$

21. Разделение нечисловых переменных в случае репрезентатора

$$\overset{2}{b}_{\overleftarrow{\alpha}\,\vec{i}} = \xi_\alpha\, y_i + \zeta_\alpha\, z_i = \frac{1}{u_\alpha \omega_\alpha C_i} - \frac{\omega_\alpha}{u_\alpha}\, L_i.$$

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha};\ \vec{i}}(\overset{2}{b}) = V(2;\ \overleftarrow{\alpha})_1 \cdot V^1(2;\ \vec{i}) + V(2;\ \overleftarrow{\alpha})_2 \cdot V^2(2;\ \vec{i});$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\ \vec{i}\ \vec{k}}(\overset{2}{b}) = V(2;\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{12}\ V^{12}(2;\ \vec{i},\vec{k});$$

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma};\ \vec{i}\ \vec{k}\ \vec{m}}(\overset{2}{b}) = V(2;\ \overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta},\overleftarrow{\gamma})_{12;\,0}\ V^{12;\,0}(2;\ \vec{i},\vec{k},\vec{m}) \equiv 0.$$

Итак, на множестве резисторов $\overline{\mathfrak{M}}$ и множестве генераторов переменного напряжения $\underline{\mathfrak{N}}$ обнаруживаются две физические структуры –

рода $\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) \equiv 0$ (мультипликативная физическая структура ранга (2,2)) и рода $\overset{3}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}}(\overset{2}{b}) \equiv 0$ (мультипликативная физическая структура ранга (3,3)), если в качестве репрезентаторов взять $a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$ и $b_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$.

Можно сказать, что закон Ома для переменного тока, записанный в хорошо известной традиционной форме

$$\mathfrak{I}_{\alpha i} = \frac{U_\alpha}{\sqrt{R_i^2 + (\frac{1}{\omega_\alpha C_i} - \omega_\alpha L_i)^2}},$$

$$tg\,\varphi_{\alpha i} = \frac{\frac{1}{\omega_\alpha C_i} - \omega_\alpha L_i}{R_i}$$

представляет собой внешнюю сторону электродинамики переменных токов (её "явление"). Что же касается её глубинного содержания (её "сущности"), то оно заключено в её структуре – в существовании двух репрезентаторов:

$$a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \frac{\cos\varphi_{\alpha i}}{\mathfrak{I}_{\alpha i}} \qquad \text{и} \qquad b_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = \frac{\sin\varphi_{\alpha i}}{\mathfrak{I}_{\alpha i}},$$

двух верификаторов:

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = V(1;\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0}\cdot V^{1;\,0}(1;\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) = 0$$

$$\overset{3}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}}(\overset{2}{b}) = V(2;\alpha,\beta,\gamma)_{12;\,0}\cdot V^{12;\,0}(2;i,k,m) = 0,$$

двух объёмов

$$V(1;\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0} \equiv 0 \qquad V^{1;\,0}(1;\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) \equiv 0$$

двухвекторых кортов генераторов $\langle\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,|$ и резисторов $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\rangle$, тождественно обращающихся в ноль,

и двух объёмов

$$V(2;\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta},\overleftarrow{\gamma})_{12;\,0} \equiv 0 \qquad V^{12;\,0}(2;\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{m}) \equiv 0$$

трёхвекторых кортов генераторов $\langle\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma}\,|$ и резисторов $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}\,\rangle$, тождественно обращающихся в ноль:

Сакральная формулировка закона Ома для переменного тока

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}(\overset{1}{a}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{a}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = x(\overleftarrow{\alpha})_1 x^1(\overrightarrow{i}\,)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{3}{K}{}^{00}(\overset{2}{b}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{2}{b}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}} = x(\overleftarrow{\alpha})_1 x^1(\overrightarrow{i}\,) + x(\overleftarrow{\alpha})_2 x^2(\overrightarrow{i}\,)}$$

								$\iddots$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\boxed{\overset{3}{K}{}^{00}}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место физических структур, выражающих сущность закона Ома для переменного тока, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность электродинамики переменного тока состоит в существовании сакральных отношений между множеством генераторов переменного тока $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством резисторов $\overline{\mathfrak{M}}$.

При этом каждый генератор переменного тока $\overleftarrow{\alpha}$ является **вектором** сакрального, в одном случае – одномерного, а в другом случае – двумерного, векторного пространства, а каждый резистор $\overrightarrow{i}$ является **вектором** другого сакрального, в одном случае – одномерного, а в другом случае – двумерного, векторного пространства.

Другими словами, электродинамика переменного тока является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность сакрально-инвариантного закона Ома для переменного тока состоит в равенстве нулю двух скалярных произведений:

в одном случае – скалярного произведения двухвекторного корта генераторов переменного тока $\langle\,\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,|$ на двухвекторный корт $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\rangle$ резисторов, объёмы каждого из которых тождественно равны нулю,

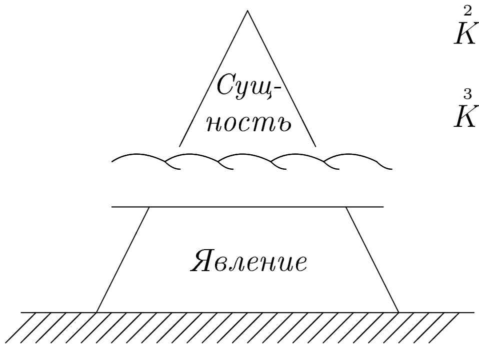
и в другом случае – скалярного произведения трёхвекторного корта генераторов $\langle\,\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma}\,|$ на трёхвекторный корт $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}\,\rangle$ резисторов, объёмы каждого из которых тождественно равны нулю.

Другими словами, **сущность сакрально-инвариантного закона Ома для переменного тока состоит, с одной стороны, в наличии таких отношений между 2-векторным кортом генераторов переменного напряжения $\langle\,\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,|$ и 2-векторным кортом резисторов $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) = V(1;\overleftarrow{\alpha},\overleftarrow{\beta})_{1;\,0}\cdot V^{1;\,0}(1;\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) = 0,$$

и, с другой стороны – в наличии таких отношений между 3-векторным кортом генераторов переменного напряжения $\langle\,\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,\overleftarrow{}\,|$ и 3-векторным кортом резисторов $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}\,\rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:

$$\overset{3}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}}(\overset{2}{b}) = V(2;\alpha,\beta,\gamma)_{12;\,0}\cdot V^{12;\,0}(2;i,k,m) = 0.$$



$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{a}) \equiv 0$$

$$\overset{3}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{\alpha}\,\overleftarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma};\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{m}}(\overset{2}{b}) \equiv 0$$

$$\mathfrak{I}_{\alpha i} = \frac{U_\alpha}{\sqrt{R_i^2+(\frac{1}{\omega_\alpha C_i}-\omega_\alpha L_i)^2}}$$

$$tg\,\varphi_{\alpha i} = \frac{\frac{1}{\omega_\alpha C_i}-\omega_\alpha L_i}{R_i}$$

Явление и сущность закона Ома для переменного тока.

Пример 5.

Универсальный закон аддитивности.

Аддитивность и мультипликативность – две фундаментальные бинарные операции, лежащие в основании всей современной математики.

—

Рассмотрим множество тел $\mathfrak{M} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и измерительный прибор для измерения масс (весы).

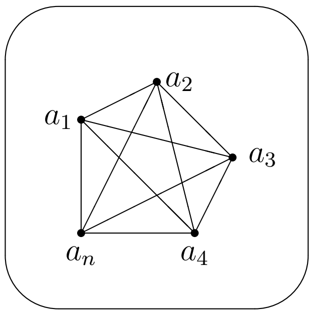
Сопоставим каждому телу a измеренную на опыте массу m_a ; получим совокупность чисел

$$m_{a_1}, m_{a_2}, m_{a_3}, \ldots,$$

не содержащую никакой закономерности.

Образуем множество парных тел, полученных путем слияния двух тел a_i и a_k и измерим их массы

$$\begin{array}{llll} m_{a_1a_2}, & m_{a_1a_3}, & m_{a_1a_4}, & \ldots \\ & m_{a_2a_3}, & m_{a_2a_4}, & \ldots \\ & & m_{a_3a_4}, & \ldots \end{array}$$



Но и в этом случае мы не сможем заметить какую-либо закономерность.

В самом деле, можно легко показать, что если

$$m_{ik} = m_i + m_k, \qquad m_{ij} = m_i + m_j, \qquad m_{kj} = m_k + m_j,$$

то **не существует** какой-либо связи

$$\Phi(m_{ik}, m_{ij}, m_{kj}) \equiv 0,$$

Действительно, дифференцируя тождество

$$\Phi(m_i + m_k,\ m_i + m_j,\ m_k + m_j) \equiv 0$$

по m_i, m_k, m_j, получаем систему трёх линейных уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial v} + \ 0 \ = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \ 0 \ + \frac{\partial\Phi}{\partial w} = 0$$

$$0\ + \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0,$$

из которой следует

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0,$$

то есть

$$\Phi(u, v, w) \equiv 0.$$

Чтобы установить явную закономерность, которой подчиняются массы парных (объединённых) тел, разобьём исходное множество $\mathfrak{M}$ на две произвольные части $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ и для наглядности покрасим тела, принадлежащие к первому множеству $\underline{\mathfrak{M}}$ в белый цвет, а тела, принадлежащие ко второму множеству $\overline{\mathfrak{M}}$ – в чёрный цвет[73]. Итак, будем иметь два множества:

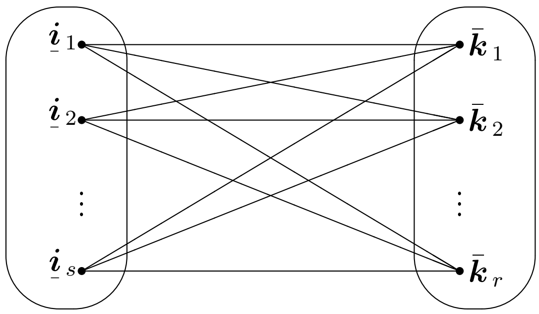
$$\underline{\mathfrak{M}} = \{\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2, \ldots\}\ \text{— множество “белых” тел},$$

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2, \ldots\}\ \text{— множество “чёрных” тел}.$$

Рассмотрим закон отношений между “белыми” и “чёрными” телами.

Образуем пары, состоящие из “белых” и “чёрных” тел, и измерим их массы:

$\underline{\mathfrak{M}} \backslash \overline{\mathfrak{M}}$	$\bar{\boldsymbol{k}}_1$	$\bar{\boldsymbol{k}}_2$	$\bar{\boldsymbol{k}}_3$	$\cdots$
$\underline{\boldsymbol{i}}_1$	$m_{\boldsymbol{i_1 k_1}}$	$m_{\boldsymbol{i_1 k_2}}$	$m_{\boldsymbol{i_1 k_3}}$	$\cdots$
$\underline{\boldsymbol{i}}_2$	$m_{\boldsymbol{i_2 k_1}}$	$m_{\boldsymbol{i_2 k_2}}$	$m_{\boldsymbol{i_2 k_3}}$	$\cdots$
$\underline{\boldsymbol{i}}_3$	$m_{\boldsymbol{i_3 k_1}}$	$m_{\boldsymbol{i_3 k_2}}$	$m_{\boldsymbol{i_3 k_3}}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	



Так как

$$m_{\boldsymbol{ik}} = m_{\boldsymbol{i}} + m_{\boldsymbol{k}}\ ,$$

где $m_{\boldsymbol{ik}}$ — двухиндексный репрезентатор, характеризующий отношение между “белыми” и “чёрными” телами, равный массе нового тела, полученного в результате слияния двух тел $\underline{\boldsymbol{i}}$ и $\bar{\boldsymbol{k}}$;

$m_{\boldsymbol{i}}$ и $m_{\boldsymbol{k}}$ — массы тел, $\underline{\boldsymbol{i}}$ и $\bar{\boldsymbol{k}}$ – одноиндексные величины, характеризующие свойства тел $\underline{\boldsymbol{i}}$ и $\bar{\boldsymbol{k}}$,

то имеем очевидное тождество, содержащее четыре репрезентатора

$$m_{\boldsymbol{i_1 k_1}} - m_{\boldsymbol{i_1 k_2}} = m_{\boldsymbol{i_2 k_1}} - m_{\boldsymbol{i_2 k_2}}\ .$$

Это тождество может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\boldsymbol{i_1 k_1}} & m_{\boldsymbol{i_1 k_2}} \\ -1 & m_{\boldsymbol{i_2 k_1}} & m_{\boldsymbol{i_2 k_2}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

[73]Нечто подобное делают генетики, подкрашивая бесцветные хромосомы при гистологической обработке.

1. Существование связи между четырьмя массами $m_{\boldsymbol{i_1 k_1}}$, $m_{\boldsymbol{i_1 k_2}}$, $m_{\boldsymbol{i_2 k_1}}$, $m_{\boldsymbol{i_2 k_2}}$ вида (1) указывает на то, что каждое “белое” тело $\tilde{\underline{i}}$ характеризуется нульмерной левой криптоточкой

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1;\ ;\ x(\underline{\boldsymbol{i}})_o\Big) = \Big(1;\ ;\ m(\underline{\boldsymbol{i}})\Big)$$

со скрытым параметром $x(\underline{\boldsymbol{i}})_o = m(\underline{\boldsymbol{i}})$,

а каждое “чёрное” тело $\tilde{\boldsymbol{k}}$ характеризуется нульмерной правой криптоточкой

$$\bar{\boldsymbol{k}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^o(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ .\,, \\ .\,, \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ .\,, \\ .\,, \\ 1 \end{pmatrix}$$

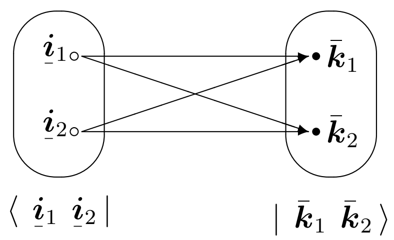
со скрытым параметром $x^o(\bar{\boldsymbol{k}}) = m(\bar{\boldsymbol{k}})$.

2. Таким образом, репрезентатор $m_{\boldsymbol{ik}}$ представляет собой произведение двух матриц, одна из которых (матрица-строка) характеризует нульмерную криптоточку $\underline{\boldsymbol{i}}$, а другая (матрица-столбец) – нульмерную криптоточку $\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$m_{\boldsymbol{i\,k}} = \Big(1;\ ;\ x(\underline{\boldsymbol{i}})_o\Big) \cdot \begin{pmatrix} x^o(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ .\,, \\ .\,, \\ 1 \end{pmatrix} = \Big(1;\ ;\ m(\underline{\boldsymbol{i}})\Big) \cdot \begin{pmatrix} m(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ .\,, \\ .\,, \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= x^o(\bar{\boldsymbol{k}}) + x(\underline{\boldsymbol{i}})_o = m(\bar{\boldsymbol{k}}) + m(\underline{\boldsymbol{i}}).$$

3. Фундаментальный закон аддитивности как **сакральное отношение** между левым 2-криптоточечным кортом $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ |$ и правым 2-криптоточечным кортом $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



4. Фундаментальный закон аддитивности в сакрально-инвариантной форме формулируется следующим образом:

для любых двух ковариантных нульмерных левых криптоточек $\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \in \underline{\mathfrak{M}}$ и любых двух контравариантных нульмерных правых криптоточек $\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2 \in \overline{\mathfrak{M}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_2} \end{vmatrix} \equiv 0}$$

5. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{1}{\mathbb{K}}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{w}) = \mathbb{X}(\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 \cdot \mathbb{X}^0(\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2)$$

6. Ковариантная координатная матрица левого 2-криптоточечного корта $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\,|$

$$\mathbb{X}(\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_1)_o \\ -1 & 0 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_2)_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & m(\underline{\boldsymbol{i}}_1) \\ -1 & 0 & m(\underline{\boldsymbol{i}}_2) \end{pmatrix},$$

где $x(\underline{\boldsymbol{i}})_o = m(\underline{\boldsymbol{i}})$ – скрытые параметры.

7. Контравариантная координатная матрица правого 2-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\rangle$

$$\mathbb{X}^{10}(\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -x^o(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & -x^o(\bar{\boldsymbol{k}}_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & -m(\bar{\boldsymbol{k}}_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $x^o(\bar{\boldsymbol{k}}) = m(\bar{\boldsymbol{k}})$ – скрытые параметры.

8. Ковариантный объём левого 2-криптоточечного корта $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2\,|$

$$W(\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

9. Контравариантный объём правого 2-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$

$$W^0(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

10. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{w}) = W(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0\ W^0(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) \equiv 0.$$

Итак, отношение между “белым” телом $\underline{\boldsymbol{i}}$ и “чёрным” телом $\bar{\boldsymbol{k}}$ характеризуется двухиндексным *репрезентатором* – числовой функцией двух нечисловых переменных

$$m : \underline{\mathfrak{M}} \times \overline{\mathfrak{M}} \to \mathbb{R}$$

$$(\underline{\boldsymbol{i}} \, , \, \bar{\boldsymbol{k}} \,) \mapsto m_{\boldsymbol{ik}} \, .$$

Имеем два корта

$$\langle \, \underline{\boldsymbol{i}}_1 \ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \, | \in \underline{\mathfrak{M}}^2 \qquad \text{и} \qquad | \, \bar{\boldsymbol{k}}_1 \ \bar{\boldsymbol{k}}_2 \rangle \in \overline{\mathfrak{M}}^2.$$

Отношение между ними характеризуется *верификатором* – числовой функцией четырёх числовых переменных – репрезентаторов:

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \underline{\boldsymbol{i}}_2 ; \bar{\boldsymbol{k}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_2} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Она равна нулю при любом выборе кортов $\langle \, \underline{\boldsymbol{i}}_1 \, \underline{\boldsymbol{i}}_2 |$ и $| \, \bar{\boldsymbol{k}}_1 \, \bar{\boldsymbol{k}}_2 \rangle$.

Введём понятие скалярного произведения между кортами $\langle \, \underline{\boldsymbol{i}}_1 \ldots \, \underline{\boldsymbol{i}}_r |$ и $| \, \bar{\boldsymbol{k}}_1 \ldots \, \bar{\boldsymbol{k}}_r \rangle$

$$\langle \, \underline{\boldsymbol{i}}_1 | \, \bar{\boldsymbol{k}}_1 \rangle = \overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 ; \bar{\boldsymbol{k}}_1}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_1} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\langle \, \underline{\boldsymbol{i}}_1 \, \underline{\boldsymbol{i}}_2 | \, \bar{\boldsymbol{k}}_1 \, \bar{\boldsymbol{k}}_2 \rangle = \overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \underline{\boldsymbol{i}}_2 ; \bar{\boldsymbol{k}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_2} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$\langle \, \underline{\boldsymbol{i}}_1 \, \underline{\boldsymbol{i}}_2 \, \underline{\boldsymbol{i}}_3 | \, \bar{\boldsymbol{k}}_1 \, \bar{\boldsymbol{k}}_2 \, \bar{\boldsymbol{k}}_3 \rangle = \overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \underline{\boldsymbol{i}}_2 \underline{\boldsymbol{i}}_3 ; \bar{\boldsymbol{k}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_3}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_3} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_2} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_3} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_3 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_3 \bar{\boldsymbol{k}}_2} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_3 \bar{\boldsymbol{k}}_3} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Введённые верификаторы допускают разложение на множители:

$$\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 ; \bar{\boldsymbol{k}}_1}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \underline{\boldsymbol{i}}_2 ; \bar{\boldsymbol{k}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1} \\ -1 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_1} & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \underline{\boldsymbol{i}}_2 \underline{\boldsymbol{i}}_3 ; \bar{\boldsymbol{k}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_3}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_3} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_2} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_3} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_3 \bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_3 \bar{\boldsymbol{k}}_2} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_3 \bar{\boldsymbol{k}}_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1} \\ -1 & 0 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2} \\ -1 & 0 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_1} & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_2} & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Итак, каждому левому корту $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1 \,|$, $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\, \underline{\boldsymbol{i}}_2 \,|$, $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\, \underline{\boldsymbol{i}}_2\, \underline{\boldsymbol{i}}_3 \,|$ и т. д. соответствует своя координатная ковариантная матрица:

$$\mathbb{X}(\, \underline{\boldsymbol{i}}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_1)_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}(\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\, \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_1)_o \\ -1 & 0 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_2)_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1} \\ -1 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}(\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\, \underline{\boldsymbol{i}}_2\, \underline{\boldsymbol{i}}_3)_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_1)_o \\ -1 & 0 & 0 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_2)_o \\ -1 & 0 & 0 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_3)_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1} \\ -1 & 0 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2} \\ -1 & 0 & 0 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_3} \end{pmatrix},$$

где $\quad x(\underline{\boldsymbol{i}}\,)_o = m_{\underline{\boldsymbol{i}}}$ – скрытые параметры,

а каждому правому корту $|\, \bar{\boldsymbol{k}}_1\rangle$; $|\, \bar{\boldsymbol{k}}_1\, \bar{\boldsymbol{k}}_2\rangle$; $|\, \bar{\boldsymbol{k}}_1\, \bar{\boldsymbol{k}}_2\, \bar{\boldsymbol{k}}_3\rangle$ и т. д. соответствует своя координатная контравариантная матрица:

$$\mathbb{X}(\, \bar{\boldsymbol{k}}_1) = \begin{pmatrix} 1 & -x^o(\bar{\boldsymbol{k}}_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}^0(\, \bar{\boldsymbol{k}}_1\, \bar{\boldsymbol{k}}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -x^o(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & -x^o(\bar{\boldsymbol{k}}_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_1} & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}^{00}(\, \bar{\boldsymbol{k}}_1\, \bar{\boldsymbol{k}}_2\, \bar{\boldsymbol{k}}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -x^o(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & -x^o(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & -x^o(\bar{\boldsymbol{k}}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_1} & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_2} & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\quad x^o(\bar{\boldsymbol{k}}\,) = m_{\bar{\boldsymbol{k}}}$ – скрытые параметры.

Получим теперь выражение для репрезентатора $m_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}}$ из сакрального тождества:

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\,\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_1} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_2} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Введём два эталонных тела $\underline{0}$ и $\bar{0}$:

$$\underline{\mathfrak{M}} = \{\underline{0},\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2, \ldots\}$$

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{\bar{0},\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2, \ldots\}$$

и получим выражение для репрезентатора из сакрального тождества:

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}\ \underline{0};\ \bar{\boldsymbol{k}}\ \bar{0}}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & m_{\boldsymbol{ik}} & m_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{0}} \\ -1 & m_{\underline{0}\bar{\boldsymbol{k}}} & m_{\underline{0}\bar{0}} \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$m_{i\,k} = m_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{0}} + m_{\underline{0}\,\bar{\boldsymbol{k}}} - m_{\underline{0}\,\bar{0}} = (m_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{0}} - m_{\underline{0}\,\bar{0}}) + (m_{\underline{0}\,\bar{\boldsymbol{k}}} - m_{\underline{0}\,\bar{0}}) + m_{\underline{0}\,\bar{0}}$$

или

$$m_{\boldsymbol{ik}} = M_{\underline{\boldsymbol{i}}\underline{0}} + M_{\bar{\boldsymbol{k}}\bar{0}} + m_{\underline{0}\,\bar{0}}$$

где $M_{\underline{\boldsymbol{i}}\underline{0}} = m_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{0}} - m_{\underline{0}\,\bar{0}}$ — масса тела $\underline{\boldsymbol{i}}$ относительно эталона $\underline{0}$;
$M_{\bar{\boldsymbol{k}}\bar{0}} = m_{\underline{0}\bar{\boldsymbol{k}}} - m_{\underline{0}\bar{0}}$ — масса тела $\bar{\boldsymbol{k}}$ относительно эталона $\bar{0}$;

Если в качестве эталонов $\underline{0}$ и $\bar{0}$ взять “пылинки”, для которых $m_{\underline{\mathbf{0}}\,\bar{\mathbf{0}}} = 0$, то

$$m_{\boldsymbol{ik}} = M_{\underline{\boldsymbol{i}}\ \bar{0}} + M_{\bar{\boldsymbol{k}}\bar{0}},$$

где $M_{\underline{\boldsymbol{i}}\underline{0}} = m_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{0}}$, $M_{\bar{\boldsymbol{k}}\bar{0}} = m_{\underline{0}\bar{\boldsymbol{k}}}$.

Всё сказанное здесь по поводу аддитивности масс, может быть совершенно естественным образом воспроизведено по поводу аддитивности сил, сопротивлений, проводимостей, ёмкостей, индуктивностей, электродвижущих сил и тому подобных физических величин.

Подведём итоги.

Откуда возникает универсальный закон аддитивности

$$m_{\boldsymbol{ik}} = m_{\boldsymbol{i}} + m_{\boldsymbol{k}}\,?$$

Универсальный закон аддитивности физических объектов $\underline{\boldsymbol{i}}$ и $\bar{\boldsymbol{k}}$

$$m_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} = m_{\underline{\boldsymbol{i}}} + m_{\bar{\boldsymbol{k}}}$$

возникает в криптоточечной нульмерной сакральной геометрии как аддитивное решение сакрально-функционального уравнения

$$\forall\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \in \underline{\mathfrak{M}};\quad \forall\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(w_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_1}, w_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}, \\ \quad w_{\underline{\boldsymbol{i}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_1}, w_{\underline{\boldsymbol{i}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_2})\end{array}\right. \equiv 0$$

$$w_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} = x^o(\bar{\boldsymbol{k}}) + x(\underline{\boldsymbol{i}})_o$$

при одном дополнительном условии – **симметрии,**

$$\boxed{\overset{s}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} = \overset{s}{w}_{\underline{\boldsymbol{k}}\,\bar{\boldsymbol{i}}}}$$

$$\overset{s}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} = x^o(\bar{\boldsymbol{k}}) + x^o(\bar{\boldsymbol{i}})$$

Вводя следующие обозначения для репрезентатора $\overset{s}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} = m_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}}$ и скрытых параметров

$$x^o(\bar{\boldsymbol{i}}) = m_{\underline{\boldsymbol{i}}}\,; \qquad x^o(\bar{\boldsymbol{k}}) = m_{\bar{\boldsymbol{k}}}\,,$$

получим окончательное выражение для универсального закона аддитивности:

$$m_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} = m_{\underline{\boldsymbol{i}}} + m_{\bar{\boldsymbol{k}}}\,.$$

Итак, на множествах "белых" и "чёрных" тел $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ обнаруживается физическая структура рода $\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\,\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{m}) \equiv 0$ (аддитивная физическая структура ранга (2,2)), если в качестве репрезентатора $m_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}}$ взять измеряемую на опыте массу тела $\underline{\boldsymbol{i}} \oplus \bar{\boldsymbol{k}}$, полученного соединением "белого" тела $\underline{\boldsymbol{i}}$ с "чёрным" телом $\bar{\boldsymbol{k}}$.

В конечном итоге фундаментальный закон, лежащий в основании универсального закона аддитивности, сводится к равенству нулю ковариантного объёма левого 2-криптоточечного корта

$$W(\underline{\boldsymbol{i}}_1, \underline{\boldsymbol{i}}_2)_o \equiv 0$$

и контравариантного объёма правого 2-криптоточечного корта

$$W^o(\bar{\boldsymbol{k}}_1, \bar{\boldsymbol{k}}_2) \equiv 0$$

Заметки на полях.

Заметим, что из равенства

$$\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1;\,\bar{\boldsymbol{k}}_1}(\overset{0}{m}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m_{\underline{\boldsymbol{i}}_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -m_{\bar{\boldsymbol{k}}_1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = W(\underline{\boldsymbol{i}}_1)_1 \cdot W^1(\bar{\boldsymbol{k}}_1)$$

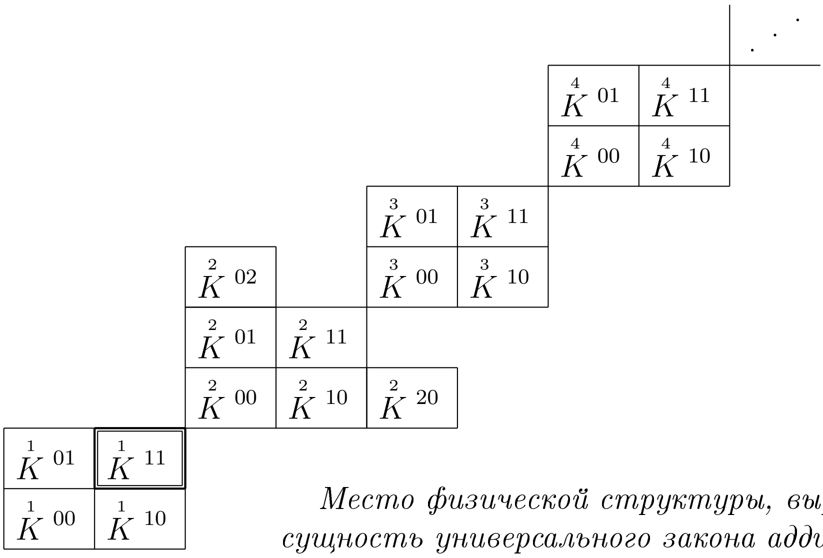
вытекает следующее важное сакральное тождество:

$$\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1;\,\bar{\boldsymbol{k}}_1}(\overset{0}{m}) = \overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1;\,\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{m}) \cdot \overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_2;\,\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{m})^{-1} \cdot \overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_2;\,\bar{\boldsymbol{k}}_1}(\overset{0}{m}).$$

Сакральная формулировка универсального закона аддитивности

$$\boxed{\overset{1}{\boldsymbol{K}}{}^{\boldsymbol{11}}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{\boldsymbol{m}}) \equiv \boldsymbol{0}}$$

$$\overset{o}{\boldsymbol{m}}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = \boldsymbol{x}^o(\bar{\boldsymbol{k}}) + \boldsymbol{x}^o(\bar{\boldsymbol{i}}) = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{i}}$$

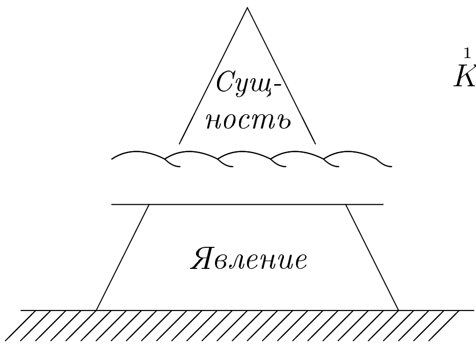


Место физической структуры, выражающей сущность универсального закона аддитивности, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность теории универсальной аддитивности состоит в существовании сакральных отношений между множеством “белых” левых тел $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством “чёрных” правых тел $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое “белое” тело $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптоточкой** сакрального нульмерного криптоточечного пространства, а каждое “чёрное” тело $\bar{\boldsymbol{i}}$ является **криптоточкой** другого сакрального нульмерного криптоточечного пространства.

Другими словами, теория универсальной аддитивности является сакральной криптоточечно-криптоточечной геометрией с симметричной метрикой на двух множествах одной и той же природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность универсального закона аддитивности состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухкриптоточечного корта “белых” левых тел $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\,|$ на двухкриптоточечный корт “чёрных” правых тел $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$, объёмы которых одновременно тождественно равны нулю.



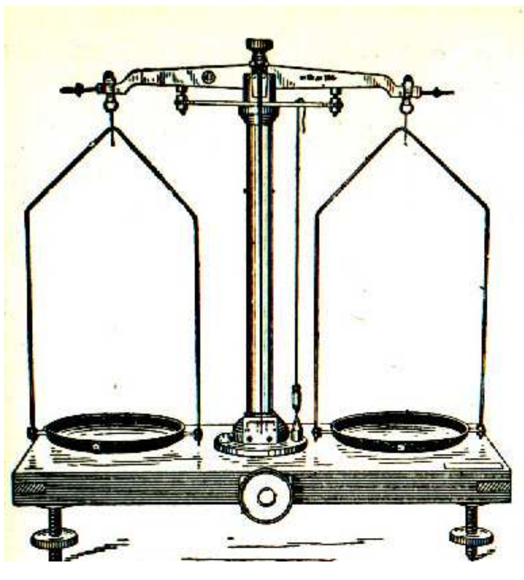
$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{o}{m}) \equiv 0$$

$$m_{12} = m_1 + m_2$$

Явление и сущность универсального закона аддитивности.

Другими словами, **сущность универсального закона аддитивности состоит в наличии таких отношений между двухкриптоточечным кортом “белых” тел $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \,|$ и двухкриптоточечным кортом “чёрных” тел $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{w}) = W(\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0\ W^0(\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) \equiv 0.$$



Пример 6.

Основной закон хронометрии

Это чрезвычайно просто и логично, хотя и удивительно для многих, привыкших к классическому понятию универсального времени [1].

— *Р. Бойер*

В хронометрии необходимо различать три множества событий:
1. Множество нейтральных событий

$$\mathfrak{M} = \{0, i, k, \ldots\},$$

примером которого может служить множество вспышек в детекторе элементарных частиц (см. рис. 1.)

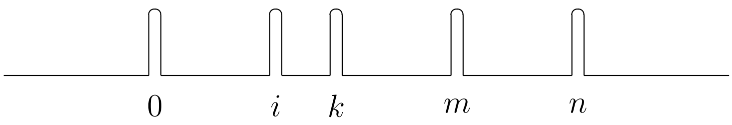


Рис. 1. *Множество нейтральных событий* $\mathfrak{M}$

2. Множество левых событий “включения” (см. рис. 2.)

$$\underline{\mathfrak{M}} = \{\, \underline{\mathbf{0}}\,,\ \underline{\boldsymbol{i}}\,,\ \underline{\boldsymbol{k}}\,, \ldots\}$$

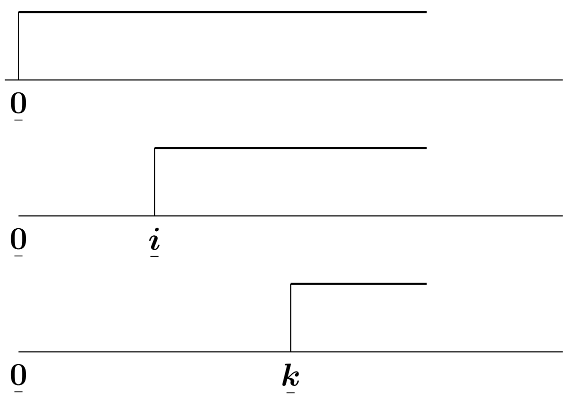


Рис. 2. *Множество левых· событий “включения”* $\underline{\mathfrak{M}}$

3. Множество правых событий "выключения" (см. рис. 3):

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{\, \bar{\boldsymbol{i}}\,,\ \bar{\boldsymbol{k}}\,, \ldots \}$$

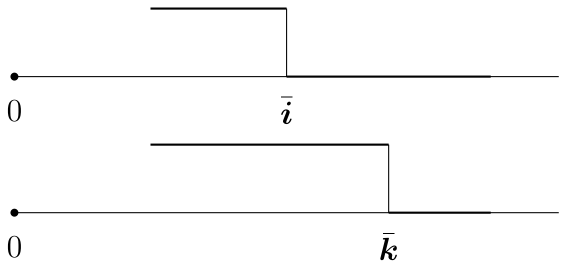


Рис. 3. *Множество правых событий "выключения"* $\overline{\mathfrak{M}}$

Каждое нейтральное событие i представляет собой своеобразный диполь $i = (\, \bar{\boldsymbol{i}}\,,\ \underline{\boldsymbol{i}}\,)$, состоящий из двух компонент:

из компоненты $\bar{\boldsymbol{i}} = |\, \bar{\boldsymbol{i}}\, \rangle$ – "выключение",
и из компоненты $\underline{\boldsymbol{i}} = \langle\, \underline{\boldsymbol{i}}\, |$ – "включение".

Мы будем различать два понятия:

1. **разность временны́х координат** двух нейтральных событий i и k (см. рис. 4)

$$t_{ik} = t_{0k} - t_{0i},$$

где $t_{0i} = \tau_{\underline{\mathbf{0}}\,\bar{\boldsymbol{i}}}$ — временна́я координата события i,
$t_{0k} = \tau_{\underline{\mathbf{0}}\,\bar{\boldsymbol{k}}}$ — временна́я координата события k.

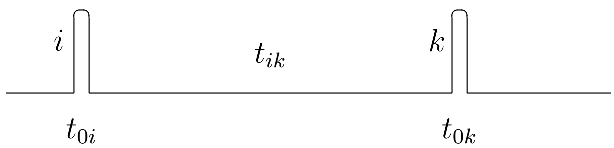


Рис. 4. *Разность временны́х координат двух нейтральных событий* i *и* k.

2. непосредственно измеряемый **промежуток времени** (продолжительность, длительность процесса) между левым событием "включения" $\underline{\boldsymbol{i}}$ и правым событием "выключения" $\bar{\boldsymbol{k}}$ $\tau_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}}$ (см. рис. 5).

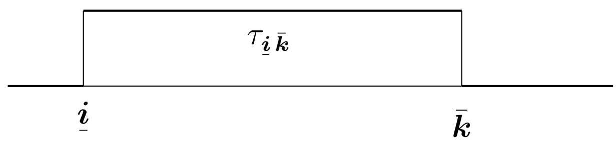


Рис. 5. *Промежуток времени между событием “включения”* $\underline{\boldsymbol{i}}$ *и событием “выключения”* $\bar{\boldsymbol{k}}$.

Промежуток времени между событием “включения” $\underline{\boldsymbol{i}}$ и событием “выключения” $\bar{\boldsymbol{k}}$ является **репрезентатором**, описывающим отношения между множеством событий “включения” $\underline{\mathfrak{M}}$ и множеством событий “выключения” $\overline{\mathfrak{M}}$:

$$\tau : \underline{\mathfrak{M}} \times \overline{\mathfrak{M}} \to \mathbb{R}$$

$$(\, \underline{\boldsymbol{i}} \, , \, \bar{\boldsymbol{k}} \,) \mapsto \tau_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} \, .$$

Всякий физический закон — это сакральное отношение между двумя кортами – левым и правым, – при котором произведение их объёмов тождественно равно нулю.

Как показывает опыт, имеет место следующий полностью детерминированный физический закон, связывающий между собой сакральным образом четыре произвольных события — два события “включения” $\underline{\boldsymbol{i}}_{\,1}, \ \underline{\boldsymbol{i}}_{\,2} \in \underline{\mathfrak{M}}$ и два события “выключения” $\bar{\boldsymbol{k}}_{\,1}, \ \bar{\boldsymbol{k}}_{\,2} \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Если взять эти события и измерить обычным секундомером четыре промежутка времени (см. рис. 6)

$$\tau_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_1}, \quad \tau_{\underline{\boldsymbol{i}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2}, \quad \tau_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_1}, \quad \tau_{\underline{\boldsymbol{i}}_2 \bar{\boldsymbol{k}}_2},$$

то они оказываются связанными между собой следующим соотношением:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \tau_{i_1 k_1} & \tau_{i_1 k_2} \\ -1 & \tau_{i_2 k_1} & \tau_{i_2 k_2} \end{vmatrix} = \tau_{i_1 k_1} + \tau_{i_2 k_2} - \tau_{i_1 k_2} - \tau_{i_2 k_1} \equiv 0.$$

Этот экспериментально проверяемый факт означает, что на множестве событий “включения” $\underline{\mathfrak{M}}$ и множестве событий “выключения” $\overline{\mathfrak{M}}$ имеет место **аддитивная физическая структура ранга (2, 2):**

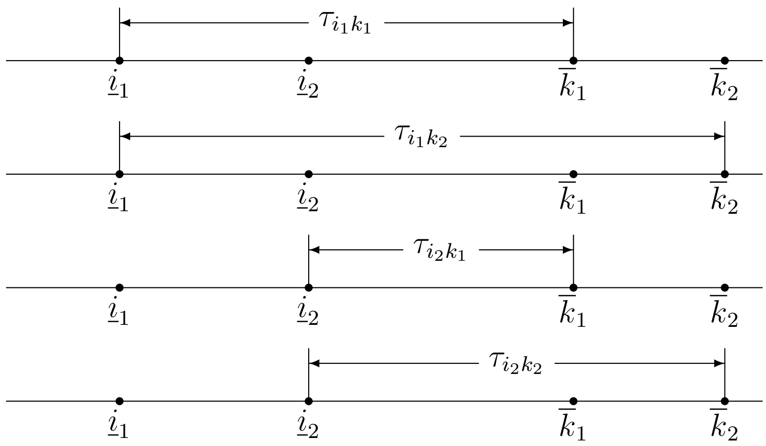


Рис. 6. *К процедуре измерения четырёх промежутков времени* $\tau_{i_1k_1}, \tau_{i_1k_2}, \tau_{i_2k_1}, \tau_{i_2k_2}$.

Для фундаментального закона хронометрии существенное значение имеет дополнительное условие (опция) — требование **антисимметрии**:

$$\tau_{\underline{i}\overline{k}} = -\tau_{\underline{k}\bar{i}}.$$

При этом условии из общего сакрального тождества

$$\tau_{\underline{i}_1\overline{k}_1} = \tau_{\underline{i}_1\overline{k}_2} + \tau_{\underline{i}_2\overline{k}_1} - \tau_{\underline{i}_2\overline{k}_2} \tag{1}$$

получим закон хронометрии в каноническом виде. Полагая в (1)

$\underline{i}_1 = \underline{i}$; $\overline{k}_1 = \overline{k}$; $\underline{i}_2 = \underline{0}$; $\overline{k}_2 = \overline{0}$, получим

$$\tau_{\underline{i}\overline{k}} = \tau_{\underline{i}\overline{0}} + \tau_{\underline{0}\overline{k}} - \tau_{\underline{0}\overline{0}}.$$

Но так как $\tau_{\underline{i}\overline{0}} = -\tau_{\underline{0}\bar{i}}$ и $\tau_{\underline{0}\overline{0}} = -\tau_{\underline{0}\overline{0}}$, то $\tau_{\underline{0}\overline{0}} = 0$ и, следовательно,

$$\tau_{\underline{i}\overline{k}} = \tau_{\underline{0}\overline{k}} - \tau_{\underline{0}\bar{i}} = t_{0k} - t_{0i}.$$

Итак,

1. В случае фундаментального закона хронометрии *репрезентатором* является

$$\tau_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} = t_{ok} - t_{oi}.$$

2. Каждое левое событие "включения" $\underline{\boldsymbol{i}}$ характеризуется нульмерной ковариантной криптоточечной матрицей-строкой:

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1; \quad ; s_i\Big) = \Big(1; \quad ; -t_{oi}\Big) .$$

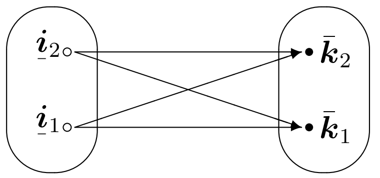
Каждое правое событие "выключения" $\bar{\boldsymbol{k}}$ характеризуется нульмерной контравариантной криптоточечной матрицей-столбцом:

$$\overline{k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s_k \\ \cdot, \\ \\ \cdot, \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{ok} \\ \cdot, \\ \\ \cdot, \\ 1 \end{pmatrix} .$$

3. Таким образом, промежуток времени между событием “включения” и событием “выключения” представляет собой скалярное произведение двух нульмерных криптоточечных матриц, одна из которых (*ковариантная*) характеризует событие “включения” $\underline{\boldsymbol{i}}$, а другая (*контравариантная*) – событие “выключения” $\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$\tau_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}} = \Big(1; \quad ; s_i\Big) \cdot \begin{pmatrix} s_k \\ ., \\ \\ ., \\ 1 \end{pmatrix} = \Big(1; \quad ; -t_i\Big) \cdot \begin{pmatrix} t_k \\ ., \\ \\ ., \\ 1 \end{pmatrix} = s_k + s_i = t_{ok} - t_{oi}.$$

4. Фундаментальный закон хронометрии как **сакральное отношение** между двухкриптоточечным кортом событий “включения” $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \,|$ и двухкриптоточечным кортом событий “выключения” $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2 \,\rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \,|$ $\qquad$ $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2 \,\rangle$

5. Фундаментальный закон хронометрии в сакрально-инвариантной форме формулируется следующим образом:

для любых двух событий “включения” $\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \in \underline{\mathfrak{N}}$ и любых двух событий “выключения” $\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2 \in \overline{\mathfrak{M}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{1}{K}{}^{11}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\overset{0}{\tau}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \tau_{i_1 k_2} & \tau_{i_1 k_2} \\ -1 & \tau_{i_2 k_2} & \tau_{i_2 k_2} \end{vmatrix} \equiv 0}$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{1}{\mathbf{K}}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2;\ \bar{\boldsymbol{k}}_1 \bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{\tau}) = \mathbb{X}(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 \cdot \mathbb{X}^0(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) \equiv 0.$$

7. Координатная матрица ковариантного двухкриптоточечного корта $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \,|$ левых событий “включения”

$$\mathbb{X}(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \bar{\boldsymbol{i}}_2)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & s(i_1) \\ -1 & 0 & s(i_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -t_{0i_1} \\ -1 & 0 & -t_{0i_2} \end{pmatrix},$$

где $s(i_1) = -t_{0i_1}$, $s(i_2) = -t_{0i_2}$ – скрытые параметры.

8. Ковариантный объём левого двухкриптоточечного корта $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\,|$:

$$W(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

9. Координатная матрица контравариантного правого двухкриптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$:

$$\mathbb{X}^0(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -s(k_1) & -s(k_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t_{0k_1} & -t_{0k_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $s(k_1) = t_{0k_1}$, $s(k_2) = t_{0k_2}$ – скрытые параметры.

10. Контравариантный объём правого двухкриптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$:

$$W^0(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

11. Разделение нечисловых переменных:

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\overset{0}{\tau}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \tau_{i_1 k_2} & \tau_{i_1 k_2} \\ -1 & \tau_{i_2 k_2} & \tau_{i_2 k_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -t_{0i_1} \\ -1 & 0 & -t_{0i_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t_{0k_1} & -t_{0k_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = W(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 \cdot W^0(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) \equiv 0.$$

Итак, на множестве событий “включения” $\underline{\mathfrak{N}}$ и множестве событий “выключения” $\overline{\mathfrak{M}}$ обнаруживается физическая структура рода $\overset{1}{K}{}^{11}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\overset{0}{\tau}) \equiv 0$ (аддитивная физическая структура ранга (2, 2)), если в качестве репрезентатора τ_{ik} взять измеряемый на опыте промежуток времени между левым событием “включения” $\underline{\boldsymbol{i}}$ и правым событием “выключения” $\bar{\boldsymbol{k}}$.

Можно сказать, что фундаментальный закон хронометрии, записанный в хорошо известной традиционной форме $\tau_{ik} = t_{ok} - t_{oi}$, представляет собой внешнюю сторону хронометрии (её “явление”). Что же касается её глубинного содержания (её “сущности”), то оно заключено в её структуре – в существовании репрезентатора

$$\overset{0}{\tau}_{ik} = t_{ok} - t_{oi},$$

верификатора

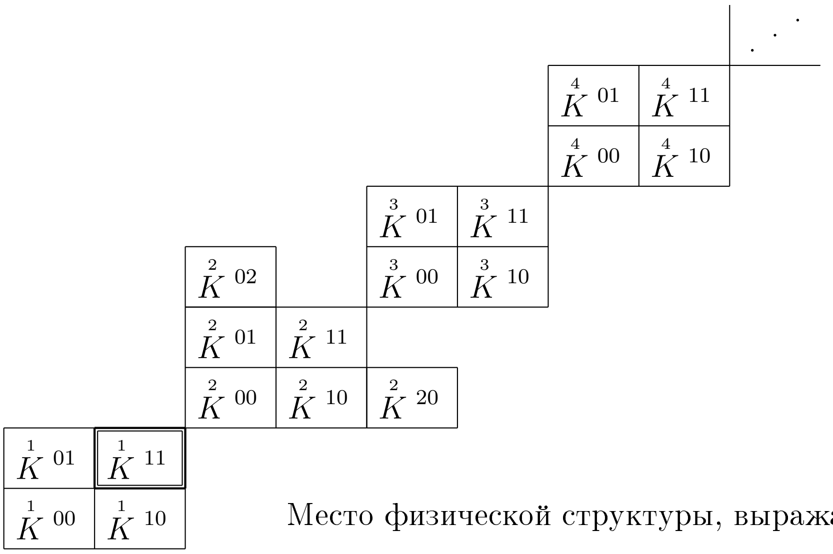
$$\overset{1}{K}{}^{11}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\overset{0}{\tau}) = W(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 \cdot W^0(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) = 0,$$

объёма $W(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0$ двухкриптоточечного корта $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\,|$ левых событий “включения” и объёма $W^0(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2)$ двухкриптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$ правых событий “выключения”, тождественно обращающихся в нуль:

Сакральная формулировка основного закона хронометрии

$$\boxed{\overset{1}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{11}}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\overset{\mathbf{0}}{\boldsymbol{\tau}}) \equiv \mathbf{0}}$$

$$\overset{o}{\boldsymbol{\tau}}_{\underline{i}\bar{k}} = s^o(\bar{k}) + s^o(\underline{i}) = t(k) - t(i)$$



Место физической структуры, выражающей сущность времени, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность хронометрии состоит в существовании сакральных отношений между множеством левых событий “включения” $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством правых событий “выключения” $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое событие “включения” $\underline{i}$ является **криптоточкой** сакрального нульмерного криптоточечного пространства, а каждое событие “выключения” $\bar{k}$ является **криптоточкой** другого сакрального нульмерного криптоточечного пространства.

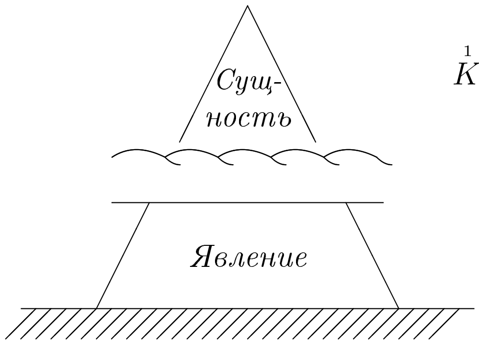
Другими словами, хронометрия является сакральной криптоточечно-криптоточечной геометрией с антисимметрической метрикой на двух множествах одной и той же природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность основного закона хронометрии состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухкриптоточечного корта событий “включения” на двухкриптоточечный корт событий “выключения”, объёмы которых одновременно тождественно равны нулю.

Другими словами, **сущность основного закона хронометрии состоит в существовании таких отношений между двумя кортами** $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \,|$ **и** $|\, \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2 \,\rangle$ **, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{1}{\mathbf{K}}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2;\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{\tau}) = \mathbb{X}(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_0 \cdot \mathbb{X}^0(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) \equiv 0$$

$$\overset{o}{\tau}_{\underline{i}\bar{k}} = t_{0k} - t_{0i}.$$



$$\overset{1}{K}{}^{11}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\tau) \equiv 0$$

$$t_{12} = t_2 - t_1$$

Явление и сущность времени.

Заметки на полях

Заметим, что из равенства

$$\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1;\,\bar{\boldsymbol{k}}_1}(\overset{0}{\tau}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \tau_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\,\bar{\boldsymbol{k}}_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -t_{\underline{\boldsymbol{i}}_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t_{\bar{\boldsymbol{k}}_1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1)_1 \cdot W^1(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1)$$

вытекает следующее сакральное тождество:

$$\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1;\,\bar{\boldsymbol{k}}_1}(\overset{0}{\tau}) = \overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1;\,\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{\tau}) \cdot \overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_2;\,\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{\tau})^{-1} \cdot \overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_2;\,\bar{\boldsymbol{k}}_1}(\overset{0}{\tau}).$$

Литература к Примеру 6

[1]. Эйнштейновский сборник, М., Наука, 1968. С. 240.

Отзыв о статье Ю. И. Кулакова "Что такое время? (время как физическая структура)"

Проблема времени по праву считается одной из самых загадочных и малоразработанных в науке. Можно выделить два основных подхода к исследованию времени: 1) субстанциональный подход (поиск специфического "субстрата" времени, понимание "течения" времени на основе едва ли не гидродинамических аналогий); 2) реляционный подход, базирующийся на теории отношений и видящий во времени прежде всего особую реляционную структуру, а не квазивещественное образование.

Если первый подход можно назвать классическим, то второй явно выходит за традиционные рамки. Ю. И. Кулаков блестяще представляет именно второе направление, – собственно, он является одним из его зачинателей и основоположников.

Основу работы составляет *творческое приложение* Теории физических структур Ю. И. Кулакова к проблеме времени. О продуктивности такого подхода свидетельствует эта работа, отличающаяся оригинальностью идей, свежестью в постановке вопроса, – и удивительно ясным, глубоко обаятельным стилем изложения.

Опираясь на разработанную им теорию сакральной симметрии, а также на логико-методологические соображения и эксперименты (обычно это мысленные эксперименты, что не лишает их доказательности и убедительности), автор приходит к выводу:
"Время – это структурно-физические отношения между событиями".

Однако Ю. И. Кулаков полагает, что в случае более сложных множеств структура времени видоизменится. В частности, показана возможность существования неканонического многомерного времени, для описания которого необходимы структуры более высокого ранга. Конечно, это спорный вывод, – но он увлекает логико-философскими перспективами, выводящими нас за рамки существующей парадигмы.

Работы Ю. И. Куланова по исследованию природы времени представляются нам выдающимся явлением в жизни современной науки.

Нет никаких сомнений, что эти пионерские исследования, отмеченные высокой культурой научной мысли, нуждаются во всяческой поддержке и должны быть изданы.

Ю. В. Линник, доктор философских наук,
профессор кафедры философии Карельского
государственного педагогического института.
21.12.1979 г. Петрозаводск

Что же такое время?

s r

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Пример 7. Термодинамика

Одним из самых замечательных результатов, полученных в исследованиях прошлого столетия по термодинамике, следует считать вывод, что эту дисциплину можно обосновать, прибегая только к гипотезам, проверяемым экспериментально.

— Константин Каратеодори (1873 – 1950)

Возьмём произвольное реальное тело и рассмотрим множество его термодинамических состояний $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$. Простоты ради изолируем наше тело от воздействия электрических и магнитных полей и будем считать, что его термодинамическое состояние i определяется заданием его объёма V_i и давления p_i . Изменяя p и V (при этом, естественно, должна соответствующим образом меняться и температура $T = T(p, V)$), мы можем перевести это тело из одного состояния в другое.

При этом необходимо различать два множества термодинамических состояний:

$\underline{\mathfrak{M}} = \{ \underline{\boldsymbol{i}} , \underline{\boldsymbol{k}} , \ldots \}$ – множество левых состояний, означающих *начало* того или иного процесса;

$\overline{\mathfrak{M}} = \{ \bar{\boldsymbol{i}} , \bar{\boldsymbol{k}} , \ldots \}$ – множество правых состояний, означающих *конец* процесса.

Таким образом, каждое состояние $\boldsymbol{i} = (\bar{\boldsymbol{i}} , \underline{\boldsymbol{i}})$ представляет собой пару: состояние $\bar{\boldsymbol{i}}$ – конец предыдущего процесса, и состояние $\underline{\boldsymbol{i}}$ – начало нового процесса. (Le roi est mori, vive le roi! [74])

Итак, задача состоит в том, чтобы выбрать в качестве измеряемой характеристики пары состояний $\underline{\boldsymbol{i}}$ и $\bar{\boldsymbol{k}}$ такую величину $A_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}}$, которая играла бы роль “расстояния” между двумя состояниями $\underline{\boldsymbol{i}}$ и $\bar{\boldsymbol{k}}$.

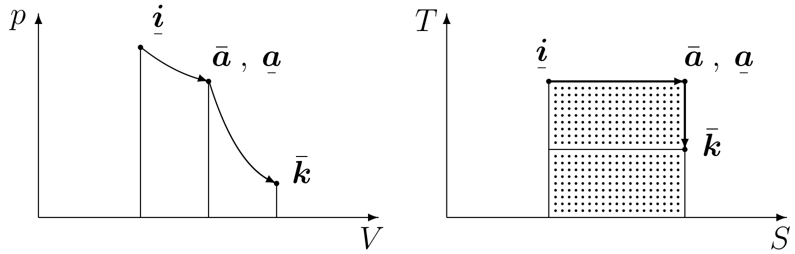


Рис. 1. *Произведённая работа и количество поглощённого тепла при переходе* $\underline{\boldsymbol{i}} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{a}} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{k}}$.

Возьмём два произвольных термодинамических состояния – одно $\underline{\boldsymbol{i}}$ из $\underline{\mathfrak{M}}$, а другое $\bar{\boldsymbol{k}}$ из $\overline{\mathfrak{M}}$ и измерим работу $\overset{TS}{A}_{\underline{\boldsymbol{i}}\,\bar{\boldsymbol{k}}}$, которую нужно совершить над системой, чтобы перевести её из начального состояния $\underline{\boldsymbol{i}}$ в конечное состояние

[74]Король умер, да здравствует король!

$\bar{\boldsymbol{k}}$ сначала по изотерме $T_{\boldsymbol{i}} = const$ до промежуточного состояния $\bar{\boldsymbol{a}}$, а затем по адиабате $S_{\boldsymbol{k}} = const$ из промежуточного состояния $\underline{\boldsymbol{a}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$ (см. рис. 1). Эта работа равна величине заштрихованной площади на рис. 1.

Изотермический процесс осуществляется в **термостате,** в качестве которого может быть использована большая плита с идеальной теплопроводностью, состояние которой поддерживается при постоянной температуре.

Адиабатический процесс осуществляется в **адиабате,** в качестве которого берётся сосуд с идеально теплонепроводящими стенками – дьюар. Обозначим через

$$\overset{T}{A}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{a}}} = -\int_{\underline{\boldsymbol{i}}}^{\bar{\boldsymbol{a}}} p_{(T_i=const)} dV$$

работу, производимую над системой при изотермическом переходе из начального состояния $\underline{\boldsymbol{i}}$ в промежуточное состояние $\bar{\boldsymbol{a}}$, и через

$$\overset{S}{A}_{\underline{a}\bar{k}} = -\int_{\underline{\boldsymbol{a}}}^{\bar{\boldsymbol{k}}} p_{(S_k=const)} dV$$

работу, производимую над системой при адиабатическом переходе из промежуточного состояния $\underline{\boldsymbol{a}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$.

Воспользуемся основным законом равновесной термодинамики для систем постоянного состава (при отсутствии электрических и магнитных полей)

$$dU = TdS - pdV$$

и проинтегрируем его указанным выше образом:

$$\overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = \overset{T}{A}_{\underline{i}\bar{a}} + \overset{S}{A}_{\underline{a}\bar{k}} = \int_{\underline{i}}^{\bar{a}} (dU - TdS) + \int_{\underline{a}}^{\bar{k}} (dU - TdS) =$$

$$= U_{\boldsymbol{a}} - U_{\boldsymbol{i}} - T_{\boldsymbol{i}}\,(S_{\boldsymbol{a}} - S_{\boldsymbol{i}}) + U_{\boldsymbol{k}} - U_{\boldsymbol{a}} = U_{\boldsymbol{k}} - U_{\boldsymbol{i}} - T_{\boldsymbol{i}}\,S_{\boldsymbol{k}} + T_{\boldsymbol{i}}\,S_{\boldsymbol{i}}\,.$$

Итак, работа $\overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ имеет следующий вид:

$$\boxed{\overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = U_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}} S_{\boldsymbol{k}} - F_{\boldsymbol{i}}}\;, \tag{1}$$

где $F_{\boldsymbol{i}} = U_{\boldsymbol{i}} - T_{\boldsymbol{i}}\,S_{\boldsymbol{i}}$ – свободная энергия.

Легко убедиться в том, что девять работ

$$\begin{array}{ccc} \overset{TS}{A}_{i_1k_1}, & \overset{TS}{A}_{i_1k_2}, & \overset{TS}{A}_{i_1k_3}, \\ \overset{TS}{A}_{i_2k_1}, & \overset{TS}{A}_{i_2k_2}, & \overset{TS}{A}_{i_2k_3}, \\ \overset{TS}{A}_{i_3k_1}, & \overset{TS}{A}_{i_3k_2}, & \overset{TS}{A}_{i_3k_3}, \end{array}$$

совершаемые при переходе из трёх произвольных *начальных* состояний $\underline{\boldsymbol{i}}_1$, $\underline{\boldsymbol{i}}_2$, $\underline{\boldsymbol{i}}_3 \in \underline{\mathfrak{M}}$ в каждое из трёх произвольных *конечных* состояний $\bar{\boldsymbol{k}}_1$, $\bar{\boldsymbol{k}}_2$, $\bar{\boldsymbol{k}}_3 \in \overline{\mathfrak{M}}$ связаны между собой следующим сакрально-инвариантным соотношением:

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}\Big(\overset{1}{\overset{TS}{A}}\Big) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_1k_1} & \overset{TS}{A}_{i_1k_2} & \overset{TS}{A}_{i_1k_3} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_2k_1} & \overset{TS}{A}_{i_2k_2} & \overset{TS}{A}_{i_2k_3} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_3k_1} & \overset{TS}{A}_{i_3k_2} & \overset{TS}{A}_{i_3k_3} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

В самом деле, если

$$A_{\boldsymbol{ik}} = U_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}}\, S_{\boldsymbol{k}} - F_{\boldsymbol{i}}\,,$$

то

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} & A_{i_1k_3} \\ -1 & A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} & A_{i_2k_3} \\ -1 & A_{i_3k_1} & A_{i_3k_2} & A_{i_3k_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_1} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_1} \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_2} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_2} \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_3} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -U_{\boldsymbol{k}_1} & -U_{\boldsymbol{k}_2} & -U_{\boldsymbol{k}_3} \\ 0 & -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} & -S_{\boldsymbol{k}_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Аналогичным образом рассмотрим работу $\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$, совершаемую над той же термодинамической системой при переходе её из начального состояния $\underline{\boldsymbol{i}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$ сначала по адиабате $S_{\boldsymbol{i}} = const$ до промежуточного состояния $\bar{\boldsymbol{b}}$, а затем из этого промежуточного состояния $\underline{\boldsymbol{b}}$ по изотерме $T_{\boldsymbol{k}} = const$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$ (см. рис.2).

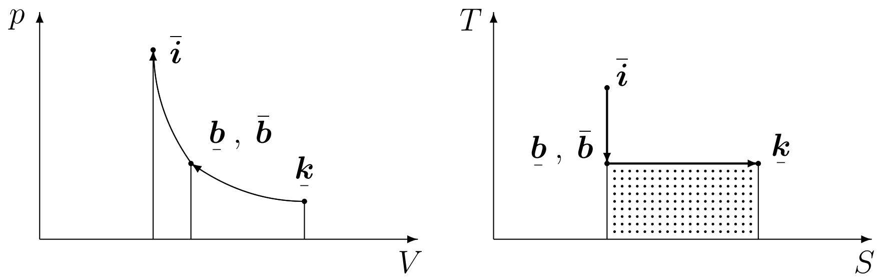


Рис. 2. *Произведённая работа и количество поглощённого тепла при переходе* $\underline{\boldsymbol{i}} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{b}}$, $\underline{\boldsymbol{b}} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{k}}$.

Обозначим через

$$\overset{S}{A}_{\underline{i}\bar{b}} = -\int_{\underline{i}}^{\bar{b}} p_{(S_i=const)}dV$$

работу, производимую над системой при адиабатическом переходе из начального состояния $\underline{\boldsymbol{i}}$ в промежуточное состояние $\bar{\boldsymbol{b}}$, и через

$$\overset{T}{A}_{\underline{b}\bar{k}} = -\int_{\underline{b}}^{\bar{k}} p_{(T_k=const)}dV$$

работу, производимую над системой при изотермическом переходе из промежуточного состояния $\underline{\boldsymbol{b}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$.

В этом случае для $\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ получается следующее выражение:

$$\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = \overset{S}{A}_{\underline{i}\bar{b}} + \overset{T}{A}_{\underline{b}\bar{k}} = \int_{\underline{i}}^{\bar{b}} (dU - TdS) + \int_{\underline{b}}^{\bar{k}} (dU - TdS) =$$

$$= U_{\boldsymbol{b}} - U_{\boldsymbol{i}} + U_{\boldsymbol{k}} - U_{\boldsymbol{b}} - T_{\boldsymbol{k}} (S_{\boldsymbol{k}} - S_{\boldsymbol{i}}) = U_{\boldsymbol{k}} - U_{\boldsymbol{i}} - T_{\boldsymbol{k}} (S_{\boldsymbol{k}} - S_{\boldsymbol{i}}).$$

Итак, работа $\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ имеет следующий вид:

$$\boxed{\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = F_{\boldsymbol{k}} + T_{\boldsymbol{k}} S_{\boldsymbol{i}} - U_{\boldsymbol{i}}} \tag{3}$$

Таким образом, наряду с соотношением (2) имеет место ещё одно сакрально-инвариантное соотношение:

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\, \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{\overset{1}{ST}}{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{ST}{A}_{i_1k_1} & \overset{ST}{A}_{i_1k_2} & \overset{ST}{A}_{i_1k_3} \\ -1 & \overset{ST}{A}_{i_2k_1} & \overset{ST}{A}_{i_2k_2} & \overset{ST}{A}_{i_2k_3} \\ -1 & \overset{ST}{A}_{i_3k_1} & \overset{ST}{A}_{i_3k_2} & \overset{ST}{A}_{i_3k_3} \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Итак, факт связи (2) между девятью работами $\overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ с одной стороны и связи (4) между девятью работами $\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ – с другой, означает, что на множестве *начальных* термодинамических левых состояний $\underline{\mathfrak{M}}$ и множестве *конечных* правых состояний $\overline{\mathfrak{M}}$ имеют место две эквивалентные **асимметричные физические структуры рода** $\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{1}{A})$ (аддитивные физические структуры ранга (3,3)).

В течение почти сорока лет я считал, что в основании термодинамики лежат два репрезентатора – симметрический $\overset{sim}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$, имеющий простой физический смысл работы, совершаемой по циклу Карно, и антисимметрический $\overset{anti}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$, не имеющий простого физического смысла. Теперь я вижу, что это был ошибочный путь: для наиболее адекватного изложения оснований термодинамики достаточно взять один асимметрический репрезентатор – работу $\overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ (или эквивалентную работу $\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$)

Чтобы пояснить, в чём состоит преимущество нового подхода, перейдём от двух асимметричных структур с репрезентаторами

$$\overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = U_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}} S_{\boldsymbol{k}} - F_{\boldsymbol{i}}$$

$$\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = F_{\boldsymbol{k}} + T_{\boldsymbol{k}} S_{\boldsymbol{i}} - U_{\boldsymbol{i}}$$

к симметричному и антисимметричному репрезентаторам:

$$\overset{sim}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = \overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}} - \overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}} =$$

$$= (T_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}})(S_{\boldsymbol{k}} - S_{\boldsymbol{i}}) = \overset{sim}{A}_{\underline{k}\bar{i}}$$

$$\overset{anti}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = \overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}} + \overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}} =$$

$$= F_{\boldsymbol{k}} + U_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}} S_{\boldsymbol{k}} + T_{\boldsymbol{k}} S_{\boldsymbol{i}} - F_{\boldsymbol{i}} - U_{\boldsymbol{i}} = - \overset{anti}{A}_{\underline{k}\bar{i}},$$

являющимися в какой-то степени производными от первоначальных асимметричных репрезентаторов.

Заметим, что $\overset{sim}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ есть не что иное, как работа по циклу Карно (См. рис. 3)

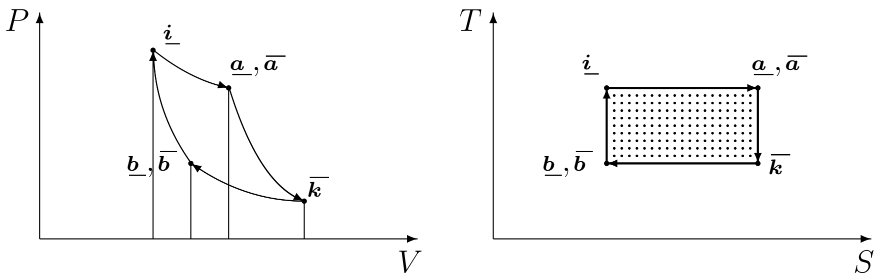


Рис. 3. *Репрезентатор* $\overset{sim}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ *как работа по циклу Карно.*

Далее, следует обратить внимание на тот факт, что репрезентатор $\overset{sim}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ имеет то же самое строение, как и у квадрата интервала в теории относительности. В самом деле

$$\overset{sim}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = (T_{\boldsymbol{i}} - T_{\boldsymbol{k}})(S_{\boldsymbol{i}} - S_{\boldsymbol{k}}) = (x_{\boldsymbol{i}} - x_{\boldsymbol{k}})^2 - (y_{\boldsymbol{i}} - y_{\boldsymbol{k}})^2,$$

где

$$x = \frac{1}{2}(T + S) \qquad y = \frac{1}{2}(T - S).$$

Легко убедиться в том, что шестнадцать **симметрических** работ $\overset{sim}{A}_{ik}$, совершаемых при переходе из четырёх произвольных состояний $\underline{\boldsymbol{i}}_1, \underline{\boldsymbol{i}}_2, \underline{\boldsymbol{i}}_3, \underline{\boldsymbol{i}}_4 \in \underline{\mathfrak{M}}$ в каждое из четырёх произвольных состояний $\bar{\boldsymbol{k}}_1, \bar{\boldsymbol{k}}_2, \bar{\boldsymbol{k}}_3, \bar{\boldsymbol{k}}_4 \in \overline{\mathfrak{N}}$ по циклу Карно, связаны между собой следующим сакрально-инвариантным соотношением:

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4;\,\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}(\overset{2}{\overset{sim}{A}}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{sim}{A}_{i_1k_1} & \overset{sim}{A}_{i_1k_2} & \overset{sim}{A}_{i_1k_3} & \overset{sim}{A}_{i_1k_4} \\ -1 & \overset{sim}{A}_{i_2k_1} & \overset{sim}{A}_{i_2k_2} & \overset{sim}{A}_{i_2k_3} & \overset{sim}{A}_{i_2k_4} \\ -1 & \overset{sim}{A}_{i_3k_1} & \overset{sim}{A}_{i_3k_2} & \overset{sim}{A}_{i_3k_3} & \overset{sim}{A}_{i_3k_4} \\ -1 & \overset{sim}{A}_{i_4k_1} & \overset{sim}{A}_{i_4k_2} & \overset{sim}{A}_{i_4k_3} & \overset{sim}{A}_{i_4k_4} \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

В самом деле, если

$$A_{\boldsymbol{ik}} = (T_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}})(S_{\boldsymbol{k}} - S_{\boldsymbol{i}}) = T_{\boldsymbol{k}} S_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}} S_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{k}} S_{\boldsymbol{i}} + T_{\boldsymbol{i}} S_{\boldsymbol{i}} =$$

$$= x_{\boldsymbol{k}}^2 - y_{\boldsymbol{k}}^2 - 2x_{\boldsymbol{i}} x_{\boldsymbol{k}} + 2y_{\boldsymbol{i}} y_{\boldsymbol{k}} + x_{\boldsymbol{i}}^2 - y_{\boldsymbol{i}}^2,$$

то имеем очевидное тождество:

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}(\overset{2}{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} & A_{i_1k_3} & A_{i_1k_4} \\ -1 & A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} & A_{i_2k_3} & A_{i_2k_4} \\ -1 & A_{i_3k_1} & A_{i_3k_2} & A_{i_3k_3} & A_{i_3k_4} \\ -1 & A_{i_14_1} & A_{i_4k_2} & A_{i_4k_3} & A_{i_4k_4} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & S_{\boldsymbol{i}_1} & T_{\boldsymbol{i}_1} & 0 & S_{\boldsymbol{i}_1}T_{\boldsymbol{i}_1} \\ -1 & S_{\boldsymbol{i}_2} & T_{\boldsymbol{i}_2} & 0 & S_{\boldsymbol{i}_2}T_{\boldsymbol{i}_2} \\ -1 & S_{\boldsymbol{i}_3} & T_{\boldsymbol{i}_3} & 0 & S_{\boldsymbol{i}_3}T_{\boldsymbol{i}_3} \\ -1 & S_{\boldsymbol{i}_4} & T_{\boldsymbol{i}_4} & 0 & S_{\boldsymbol{i}_4}T_{\boldsymbol{i}_4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -S_{\boldsymbol{k}_1}T_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2}T_{\boldsymbol{k}_3} & -S_{\boldsymbol{k}_3}T_{\boldsymbol{k}_4} & -S_{\boldsymbol{k}_4}T_{\boldsymbol{k}_4} \\ 0 & -T_{\boldsymbol{k}_1} & -T_{\boldsymbol{k}_2} & -T_{\boldsymbol{k}_3} & -T_{\boldsymbol{k}_4} \\ 0 & -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} & -S_{\boldsymbol{k}_3} & -S_{\boldsymbol{k}_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

или – то же самое тождество, но записанное в других переменных:

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}(\overset{2}{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} & A_{i_1k_3} & A_{i_1k_4} \\ -1 & A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} & A_{i_2k_3} & A_{i_2k_4} \\ -1 & A_{i_3k_1} & A_{i_3k_2} & A_{i_3k_3} & A_{i_3k_4} \\ -1 & A_{i_14_1} & A_{i_4k_2} & A_{i_4k_3} & A_{i_4k_4} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_{\boldsymbol{i}_1} & y_{\boldsymbol{i}_1} & 0 & x_{\boldsymbol{i}_1}^2 - y_{\boldsymbol{i}_1}^2 \\ -1 & x_{\boldsymbol{i}_2} & y_{\boldsymbol{i}_2} & 0 & x_{\boldsymbol{i}_2}^2 - y_{\boldsymbol{i}_2}^2 \\ -1 & x_{\boldsymbol{i}_3} & y_{\boldsymbol{i}_3} & 0 & x_{\boldsymbol{i}_3}^2 - y_{\boldsymbol{i}_3}^2 \\ -1 & x_{\boldsymbol{i}_4} & y_{\boldsymbol{i}_4} & 0 & x_{\boldsymbol{i}_4}^2 - y_{\boldsymbol{i}_4}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -x_{\boldsymbol{k}_1}^2 + y_{\boldsymbol{k}_1}^2 & -x_{\boldsymbol{k}_2}^2 + y_{\boldsymbol{k}_2}^2 & -x_{\boldsymbol{k}_3}^2 + y_{\boldsymbol{k}_3}^2 & -x_{\boldsymbol{k}_4}^2 + y_{\boldsymbol{k}_4}^2 \\ 0 & -2x_{\boldsymbol{k}_1} & -2x_{\boldsymbol{k}_2} & -2x_{\boldsymbol{k}_3} & -2x_{\boldsymbol{k}_4} \\ 0 & 2y_{\boldsymbol{k}_1} & 2y_{\boldsymbol{k}_2} & 2y_{\boldsymbol{k}_3} & 2y_{\boldsymbol{k}_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Эмпирически проверяемый факт существования сакрального тождества (5) означает, что отношения между множеством начальных левых состояний и множеством конечных правых состояний описываются физической структурой рода $\overset{3}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}(\overset{\overset{2}{sim}}{A}) \equiv 0$, **то есть двумерной симметричной аддитивной физической структурой ранга (4, 4).**

Совершенно аналогично можно показать, что шестнадцать **антисимметрических** работ $\overset{anti}{A}_{ik}$, совершаемых при переходе из четырёх произвольных начальных состояний $\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3,\ \underline{\boldsymbol{i}}_4 \in \underline{\mathfrak{N}}$ в каждое из четырёх произвольных конечных состояний $\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3,\ \bar{\boldsymbol{k}}_4 \in \overline{\mathfrak{M}}$ связаны между собой следующим сакрально-инвариантным соотношением, аналогичным соотношению (5):

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4;\ \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}(\overset{2}{\overset{anti}{A}}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{anti}{A}_{i_1k_1} & \overset{anti}{A}_{i_1k_2} & \overset{anti}{A}_{i_1k_3} & \overset{anti}{A}_{i_1k_4} \\ -1 & \overset{anti}{A}_{i_2k_1} & \overset{anti}{A}_{i_2k_2} & \overset{anti}{A}_{i_2k_3} & \overset{anti}{A}_{i_2k_4} \\ -1 & \overset{anti}{A}_{i_3k_1} & \overset{anti}{A}_{i_3k_2} & \overset{anti}{A}_{i_3k_3} & \overset{anti}{A}_{i_3k_4} \\ -1 & \overset{anti}{A}_{i_4k_1} & \overset{anti}{A}_{i_4k_2} & \overset{anti}{A}_{i_4k_3} & \overset{anti}{A}_{i_4k_4} \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (6)$$

В самом деле, если

$$A_{\boldsymbol{ik}} = F_{\boldsymbol{k}} + U_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}}\, S_{\boldsymbol{k}} + T_{\boldsymbol{k}}\, S_{\boldsymbol{i}} - F_{\boldsymbol{i}} - U_{\boldsymbol{i}}\,,$$

то имеем очевидное тождество:

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}(\overset{2}{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & A_{i_1k_1} & A_{i_1k_2} & A_{i_1k_3} & A_{i_1k_4} \\ -1 & A_{i_2k_1} & A_{i_2k_2} & A_{i_2k_3} & A_{i_2k_4} \\ -1 & A_{i_3k_1} & A_{i_3k_2} & A_{i_3k_3} & A_{i_3k_4} \\ -1 & A_{i_14_1} & A_{i_4k_2} & A_{i_4k_3} & A_{i_4k_4} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & S_{\boldsymbol{i}_1} & T_{\boldsymbol{i}_1} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_1}-U_{\boldsymbol{i}_1} \\ -1 & S_{\boldsymbol{i}_2} & T_{\boldsymbol{i}_2} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_2}-U_{\boldsymbol{i}_2} \\ -1 & S_{\boldsymbol{i}_3} & T_{\boldsymbol{i}_3} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_3}-U_{\boldsymbol{i}_3} \\ -1 & S_{\boldsymbol{i}_4} & T_{\boldsymbol{i}_4} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_4}-U_{\boldsymbol{i}_4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -F_{\boldsymbol{k}_1}-U_{\boldsymbol{k}_1} & -F_{\boldsymbol{k}_2}-U_{\boldsymbol{k}_3} & -F_{\boldsymbol{k}_3}-U_{\boldsymbol{k}_4} & -F_{\boldsymbol{k}_4}-U_{\boldsymbol{k}_4} \\ 0 & T_{\boldsymbol{k}_1} & T_{\boldsymbol{k}_2} & T_{\boldsymbol{k}_3} & T_{\boldsymbol{k}_4} \\ 0 & -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} & -S_{\boldsymbol{k}_3} & -S_{\boldsymbol{k}_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Итак, мы видим, что наряду с простейшими репрезентаторами

$$\overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = U_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}}\, S_{\boldsymbol{k}} - F_{\boldsymbol{i}}$$

$$\overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = F_{\boldsymbol{k}} + T_{\boldsymbol{k}}\, S_{\boldsymbol{i}} - U_{\boldsymbol{i}}$$

можно рассматривать их симметрическую разность

$$\overset{sim}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = \overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}} - \overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}} =$$

$$= (T_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}})(S_{\boldsymbol{k}} - S_{\boldsymbol{i}}) = \overset{sim}{A}_{\underline{k}\bar{i}}$$

и их антисимметрическую сумму

$$\overset{anti}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = \overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{k}} + \overset{ST}{A}_{\underline{i}\bar{k}} =$$

$$= F_{\boldsymbol{k}} + U_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}}\, S_{\boldsymbol{k}} + T_{\boldsymbol{k}}\, S_{\boldsymbol{i}} - F_{\boldsymbol{i}} - U_{\boldsymbol{i}} = - \overset{anti}{A}_{\underline{k}\bar{i}},$$

обращающие в тождественный ноль соответствующие верификаторы (5) и (6).

Однако этих фактов явно недостаточно, чтобы рассматривать термодинамику как “физическую структуру с двумя расстояниями $\overset{sim}{A}_{ik}$ и $\overset{anti}{A}_{ik}$”.

Теперь стало ясно, что равновесная термодинамика постоянного состава представляет собой физическую структуру рода

$$\overset{2}{\boldsymbol{K}}{}^{11}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(\overset{\overset{1}{TS}}{\boldsymbol{A}})$$

с асимметрическим репрезентатором

$$\overset{1}{w}_{\boldsymbol{ik}} = \overset{\overset{1}{TS}}{A}_{\boldsymbol{ik}} = \overline{s}_{\boldsymbol{k}} + x_1(\,\boldsymbol{i}\,)x^1(\,\boldsymbol{k}\,) + \underline{s}_{\boldsymbol{i}} = U_{\boldsymbol{k}} - T_{\boldsymbol{i}}\, S_{\boldsymbol{k}} - F_{\boldsymbol{i}}\,,$$

работой, которую нужно совершить над системой, чтобы перевести её из начального состояния $\underline{\boldsymbol{i}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$ сначала по изотерме $T_{\boldsymbol{i}} = const$ до промежуточного состояния $\bar{\boldsymbol{a}}$, а затем по адиабате $S_{\boldsymbol{i}} = const$ из промежуточного состояния $\underline{\boldsymbol{a}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$.

Итак, имеем:

1. Два множества термодинамических состояний:

$\underline{\mathfrak{M}} = \{\,\underline{\boldsymbol{i}}\,,\,\underline{\boldsymbol{k}}\,,\ldots\}$ – множество левых состояний, означающих *начало* того или иного процесса;

$\overline{\mathfrak{M}} = \{\,\bar{\boldsymbol{i}}\,,\,\bar{\boldsymbol{k}}\,,\ldots\}$ – множество правых состояний, означающих *конец* процесса.

2. Каждое начальное левое состояние термодинамической системы $\underline{\boldsymbol{i}}$ характеризуется одномерной ковариантной криптоточечной матрицей-строкой:

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1;\; x_1(\,\boldsymbol{i}\,);\; \underline{s}(\,\boldsymbol{i}\,)\,\Big) = \Big(1;\; T_{\boldsymbol{i}}\,;\; -F_{\boldsymbol{i}}\,\Big)\,.$$

Каждое конечное правое состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$ характеризуется одномерной контравариантной криптоточечной матрицей-столбцом:

$$\bar{\boldsymbol{k}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{s}(\boldsymbol{k}) \\ \because \\ x^1(\boldsymbol{k}) \\ \because \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\boldsymbol{k}} \\ \because \\ -S_{\boldsymbol{k}} \\ \because \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, ковариантной координатой одномерной криптоточки начального состояния является температура: $x_1(\,\boldsymbol{i}\,) = T_{\boldsymbol{i}}$;

скрытым параметром является свободная энергия, взятая со знаком минус $\underline{s}(\,\boldsymbol{i}\,) = -F_{\boldsymbol{i}}$.

Контравариантной координатой одномерной криптоточки конечного состояния является энтропия, взятая со знаком минус: $x^1(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) = -S_{\boldsymbol{k}}$;

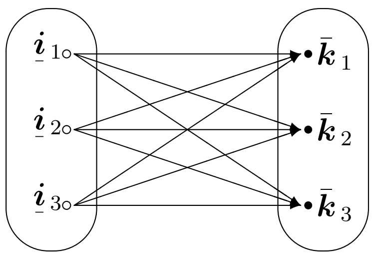
скрытым параметром является внутренняя энергия: $\overline{s}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) = U_{\boldsymbol{k}}$.

3. Таким образом, репрезентатор $\overset{1}{w}_{\boldsymbol{ik}} = \overset{\overset{1}{TS}}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ представляет собой произведение двух матриц, одна из которых (*ковариантная*) характеризует начальное состояние термодинамической системы $\underline{\boldsymbol{i}}$, а другая (*контравариантная*) – конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$\overset{\overset{1}{TS}}{A}_{\underline{i}\bar{k}} = \Big(1;\ x_1(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,);\ \underline{s}(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ \Big) \cdot \begin{pmatrix} \overline{s}(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot, \\ x^1(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot, \\ 1 \end{pmatrix} = \Big(1;\ T_{\boldsymbol{i}}\,;\ -F_{\boldsymbol{i}}\ \Big) \cdot \begin{pmatrix} U_{\boldsymbol{k}} \\ \cdot, \\ -S_{\boldsymbol{k}} \\ \cdot, \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \overline{s}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + x_1(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)x^1(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + \underline{s}(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) = U_{\boldsymbol{k}}\ - T_{\boldsymbol{i}}\,S_{\boldsymbol{k}}\ - F_{\boldsymbol{i}}\,.$$

4. Основной закон термодинамики как **сакральное отношение** между 3-криптоточечным кортом начальных состояний термодинамической системы $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_3|$ и 3-криптоточечным кортом конечных состояний $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_3|$ $\qquad\qquad$ $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_3\rangle$

5. Основной закон термодинамики в сакрально-инвариантной форме формулируется следующим образом:

для любых трёх начальных состояний термодинамической системы $\underline{\boldsymbol{i}}_1$, $\underline{\boldsymbol{i}}_2$, $\underline{\boldsymbol{i}}_3 \in \underline{\mathfrak{M}}$ и любых трёх конечных состояний $\bar{\boldsymbol{k}}_1$, $\bar{\boldsymbol{k}}_2$, $\bar{\boldsymbol{k}}_3 \in \overline{\mathfrak{M}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{\overset{1}{TS}}{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_1k_1} & \overset{TS}{A}_{i_1k_2} & \overset{TS}{A}_{i_1k_3} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_2k_1} & \overset{TS}{A}_{i_2k_2} & \overset{TS}{A}_{i_2k_3} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_3k_1} & \overset{TS}{A}_{i_3k_2} & \overset{TS}{A}_{i_3k_3} \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad (2)}$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{2}{\mathbb{K}}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{\overset{1}{TS}}{A}) = \mathbb{X}(\,\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_3)_{1;0} \cdot \mathbb{X}^{1;0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3).$$

7. Координатная матрица ковариантного 3-криптоточечного корта $\langle\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_3|$ начальных состояний

$$\mathbb{X}(\,\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_3)_{1;0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_1(\boldsymbol{i}_1) & 0 & s_o(\boldsymbol{i}_1) \\ -1 & x_1(\boldsymbol{i}_2) & 0 & s_o(\boldsymbol{i}_2) \\ -1 & x_1(\boldsymbol{i}_3) & 0 & s_o(\boldsymbol{i}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_1} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_1} \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_2} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_2} \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_3} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_3} \end{pmatrix},$$

где $s_o(\,\boldsymbol{i}_1) = -F_{\boldsymbol{i}_1},\ \ s_o(\,\boldsymbol{i}_2) = -F_{\boldsymbol{i}_2},\ \ s_o(\,\boldsymbol{i}_3) = -F_{\boldsymbol{i}_3}$ – скрытые параметры.

8. Ковариантный объём 2-криптоточечного корта $\langle\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2\ |$ начальных состояний термодинамической системы:

$$W(\,\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2)_1 = \begin{vmatrix} x_1(\boldsymbol{i}_1) & 1 \\ x_1(\boldsymbol{i}_2) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{\boldsymbol{i}_1} & 1 \\ T_{\boldsymbol{i}_2} & 1 \end{vmatrix}$$

9. Ковариантный объём 3-криптоточечного корта $\langle\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_3|$ начальных состояний

$$W(\,\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_3)_{1;0} = \begin{vmatrix} x_1(\boldsymbol{i}_1) & 0 & 1 \\ x_1(\boldsymbol{i}_2) & 0 & 1 \\ x_1(\boldsymbol{i}_3) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{\boldsymbol{i}_1} & 0 & 1 \\ T_{\boldsymbol{i}_2} & 0 & 1 \\ T_{\boldsymbol{i}_3} & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

10. Координатная матрица контравариантного 3-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\,\rangle$ конечных состояний термодинамической системы

$$\mathbb{X}^{1;0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -s^o(\boldsymbol{k}_1) & -s^o(\boldsymbol{k}_2) & -s^o(\boldsymbol{k}_3) \\ 0 & x^1(\boldsymbol{k}_1) & x^1(\boldsymbol{k}_2) & x^1(\boldsymbol{k}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -U_{\boldsymbol{k}_1} & -U_{\boldsymbol{k}_2} & -U_{\boldsymbol{k}_3} \\ 0 & -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} & -S_{\boldsymbol{k}_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $s^o(\boldsymbol{k}_1) = U_{\boldsymbol{k}_1},\ \ s^o(\boldsymbol{k}_2) = U_{\boldsymbol{k}_2},\ \ s^o(\boldsymbol{k}_3) = U_{\boldsymbol{k}_3}$ – скрытые параметры.

11. Контравариантный объём 2-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$ конечных состояний

$$W^1(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) = \begin{vmatrix} x^1(\boldsymbol{k}_1) & x^1(\boldsymbol{k}_2) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

12. Контравариантный объём 3-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\,\rangle$

$$W^{1;0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3) = \begin{vmatrix} x^1(\boldsymbol{k}_1) & x^1(\boldsymbol{k}_2) & x^1(\boldsymbol{k}_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} & -S_{\boldsymbol{k}_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

13. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}(\overset{\overset{1}{TS}}{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_1k_1} & \overset{TS}{A}_{i_1k_2} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_2k_1} & \overset{TS}{A}_{i_2k_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_1} & -F_{\boldsymbol{i}_1} \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_2} & -F_{\boldsymbol{i}_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -U_{\boldsymbol{k}_1} & -U_{\boldsymbol{k}_2} \\ 0 & -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_1 \cdot W^1(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2);$$

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{\overset{1}{TS}}{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_1k_1} & \overset{TS}{A}_{i_1k_2} & \overset{TS}{A}_{i_1k_3} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_2k_1} & \overset{TS}{A}_{i_2k_2} & \overset{TS}{A}_{i_2k_3} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_3k_1} & \overset{TS}{A}_{i_3k_2} & \overset{TS}{A}_{i_3k_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_1} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_1} \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_2} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_2} \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_3} & 0 & -F_{\boldsymbol{i}_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -U_{\boldsymbol{k}_1} & -U_{\boldsymbol{k}_2} & -U_{\boldsymbol{k}_3} \\ 0 & -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} & -S_{\boldsymbol{k}_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3)_{1;0} \cdot W^{10}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_3) \equiv 0.$$

Итак, на множестве начальных состояний термодинамических систем $\underline{\mathfrak{M}}$ и множестве конечных состояний $\overline{\mathfrak{M}}$ обнаруживается физическая структура рода $\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{\overset{1}{TS}}{A})$ (аддитивная физическая структура ранга (3, 3)), если в качестве репрезентатора $\overset{1}{w}_{\boldsymbol{ik}} = \overset{\overset{1}{TS}}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$ взять работу, которую нужно совершить над системой, чтобы перевести её из начального состояния $\underline{\boldsymbol{i}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$ сначала по изотерме $T_{\boldsymbol{i}} = const$ до промежуточного состояния $\bar{\boldsymbol{a}}$, а затем по адиабате $S_{\boldsymbol{k}} = const$ из промежуточного состояния $\underline{\boldsymbol{a}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$.

Можно сказать, что основной закон классической моновариантной термодинамики [1], записанный в хорошо известной традиционной форме

$$dU = TdS - pdV$$

представляет собой внешнюю сторону термодинамики (её “явление”). Что же касается её глубинного содержания (её “сущности”), то оно заключено в её структуре – в существовании репрезентатора $\overset{1}{w}_{\boldsymbol{ik}} = \overset{\overset{1}{TS}}{A}_{\underline{i}\bar{k}}$, верификатора $\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{\overset{1}{TS}}{A})$ и объёмов $W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3)_{1;0}$ и $W^{1;0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\,)$ 3-криптоточечных кортов $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_3 |$ и $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \rangle$, начальных и конечных состояний термодинамической системы, тождественно обращающихся в нуль.

Из всего сказанного следует, что **моновариантная термодинамика – это сакральная одномерная криптоточечно-криптоточечная геометрия с асимметрической метрикой**

$$\overset{1}{\boldsymbol{w}}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{o}}(\ \bar{\boldsymbol{k}}\ ) + \boldsymbol{x}(\ \underline{\boldsymbol{i}}\ )_1 \boldsymbol{x}^1(\ \bar{\boldsymbol{k}}\ ) + \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{o}}(\ \underline{\boldsymbol{i}}\ )$$

$$= \boldsymbol{U}_{\underline{\boldsymbol{k}}} - \boldsymbol{T}_{\underline{\boldsymbol{i}}}\, \boldsymbol{S}_{\bar{\boldsymbol{k}}} - \boldsymbol{F}_{\bar{\boldsymbol{i}}}\ ,$$

допускающая следующую физическую интерпретацию:

$\underline{\boldsymbol{i}} \in \underline{\mathfrak{M}}$ – множество начальных состояний;

$\bar{\boldsymbol{k}} \in \overline{\mathfrak{M}}$ – множество конечных состояний;

$\overset{1}{\boldsymbol{w}}_{\underline{i}\bar{k}} = \overset{TS}{\boldsymbol{A}}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}}$ – работа, которую нужно совершить над системой, чтобы перевести её из начального состояния $\underline{\boldsymbol{i}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$ сначала по изотерме $T_{\boldsymbol{i}} = const$ до промежуточного состояния $\bar{\boldsymbol{a}}$, а затем по адиабате $S_{\boldsymbol{k}} = const$ из промежуточного состояния $\underline{\boldsymbol{a}}$ в конечное состояние $\bar{\boldsymbol{k}}$.

$\boldsymbol{x_1}(\ \underline{\boldsymbol{i}}\ ) = \boldsymbol{T}_{\underline{\boldsymbol{i}}}$ – температура;

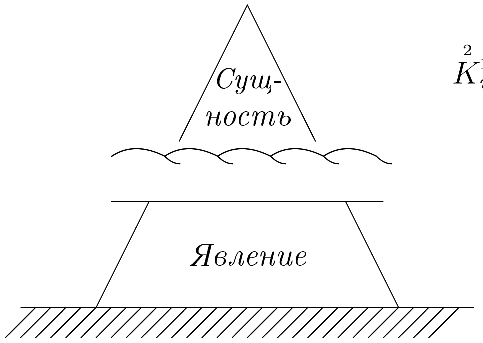
$\boldsymbol{x^1}(\ \bar{\boldsymbol{k}}\ ) = -\boldsymbol{S}_{\bar{\boldsymbol{k}}}$ – энтропия;

$\boldsymbol{s_o}(\underline{\boldsymbol{i}}) = -\boldsymbol{F}_{\underline{\boldsymbol{i}}}$ – свободная энергия (скрытый параметр);

$\boldsymbol{s^o}(\bar{\boldsymbol{k}}) = \boldsymbol{U}_{\bar{\boldsymbol{k}}}$ – внутренняя энергия (скрытый параметр).

Основное уравнение термодинамики в сакрально-инвариантной форме:

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{1}{\overset{TS}{A}}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_1k_1} & \overset{TS}{A}_{i_1k_2} & \overset{TS}{A}_{i_1k_3} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_2k_1} & \overset{TS}{A}_{i_2k_2} & \overset{TS}{A}_{i_2k_3} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_3k_1} & \overset{TS}{A}_{i_3k_2} & \overset{TS}{A}_{i_3k_3} \end{vmatrix} \equiv 0$$



$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{1}{\overset{TS}{A}}) \equiv 0$$

$$dU = TdS - pdV$$

Явление и сущность термодинамики.

								$\iddots$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\boxed{\overset{2}{K}{}^{11}}$					
		$\overset{2}{K}{}^{00}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место среди всех возможных физических структур физической структуры, выражающей сущность основного закона термодинамики, когда в качестве репрезентатора берётся работа $\overset{TS}{A}_{\boldsymbol{i\,k}}$.

Сакральная формулировка фундаментального закона термодинамики

$$\boxed{\boxed{\overset{2}{\boldsymbol{K}}{}^{\boldsymbol{11}}_{\boldsymbol{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}}(\overset{1}{\boldsymbol{w}}) \equiv \boldsymbol{0}}}$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{w}}_{\underline{i}\bar{k}} = \boldsymbol{s^o(\,\bar{k}\,) + x(\,\underline{i}\,)_1 x^1(\,\bar{k}\,) + s_o(\,\underline{i}\,)} =$$

$$= \overset{TS}{\boldsymbol{A}}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = \boldsymbol{U}_{\bar{\boldsymbol{k}}} - \boldsymbol{T}_{\underline{\boldsymbol{i}}}\,\boldsymbol{S}_{\bar{\boldsymbol{k}}} - \boldsymbol{F}_{\underline{\boldsymbol{i}}}$$

Итак, сущность термодинамики состоит в существовании сакральных отношений между множеством начальных левых состояний $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством конечных правых состояний $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое начальное состояние $\underline{i}$ является **криптоточкой** сакрального одномерного криптоточечного пространства, а каждое конечное состояние $\bar{k}$ является **криптоточкой** другого сакрального одномерного криптоточечного пространства.

Другими словами, моновариантная термодинамика является сакральной криптоточечно-криптоточечной геометрией с асимметричной метрикой на двух множествах одной и той же природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность основного закона моновариантной термодинамики состоит в равенстве нулю скалярного произведения трёхкриптоточечного корта начальных состояний на трёхкриптоточечный корт конечных состояний, объёмы которых одновременно тождественно равны нулю.

Другими словами, **сущность основного закона термодинамики состоит в существовании таких отношений между двумя кортами $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3 \,|$ и $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}(\overset{1}{\overset{TS}{A}}) = W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3)_{1;0}\cdot W^{1;0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_3) \equiv 0$$

Заметки на полях.

Заметим, что из равенства

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}(\overset{1}{\overset{TS}{A}}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_1k_1} & \overset{TS}{A}_{i_1k_2} \\ -1 & \overset{TS}{A}_{i_2k_1} & \overset{TS}{A}_{i_2k_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_1} & -F_{\boldsymbol{i}_1} \\ -1 & T_{\boldsymbol{i}_2} & -F_{\boldsymbol{i}_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -U_{\boldsymbol{k}_1} & -U_{\boldsymbol{k}_2} \\ 0 & -S_{\boldsymbol{k}_1} & -S_{\boldsymbol{k}_2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2)_1 \cdot W^1(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2)$$

вытекает следующее важное сакральное тождество:

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}(\overset{1}{\overset{TS}{A}}) = \overset{1}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2;\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}(\overset{1}{\overset{TS}{A}}) \cdot \overset{1}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4;\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4}(\overset{1}{\overset{TS}{A}})^{-1} \cdot \overset{1}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4;\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}(\overset{1}{\overset{TS}{A}}).$$

Литература к Примеру 7

[1]. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. Наука, - М.: 1977, С. 97.

Пример 8. Векторная алгебра

Один из самых приятных моментов в истории математики – это момент, когда выясняется, что два раздела математики, которые ранее рассматривались отдельно и считались несвязанными, в действительности являются двумя скрытыми формами одного и того же [1].

— *У.У. Сойер*

Ключевыми понятиями векторной алгебры являются:

векторное пространство,
вектор,
размерность и
скалярное произведение двух векторов.

Ключевыми понятиями теории физических структур являются:

два множества левых и правых субэйдосов,
репрезентатор,
корты левых и правых субэйдосов,
ранг,
верификатор,
сакральная диаграмма,
сакральное тождество,
координатные матрицы левых и правых кортов,
объёмы левых и правых кортов.

Задача состоит в том, чтобы установить соответствие между хорошо известной векторной алгеброй и универсальной сакральной геометрией, возникшей в рамках Теории физических структур. При этом важно проследить, как из общего принципа сакральной симметрии при наложении простейшего требования симметрии возникают понятия двух типов векторов с ко- и контравариантными координатами, билинейное скалярное произведение, метрический тензор, дважды окаймлённый верификатор, ко- и контравариантные координатные матрицы и объёмы ко- и контравариантных кортов.

В сакральной геометрии необходимо различать три следующих множества:
1. Множество обычных нейтральных векторов:

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{M}} = \{\overleftrightarrow{i},\ \overleftrightarrow{k}, \ldots\}$$

2. Множество ковариантных левых векторов:

$$\overleftarrow{\mathfrak{M}} = \{\overleftarrow{i}, \overleftarrow{k}, \ldots\}$$

3. Множество контравариантных правых векторов:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \{\vec{i}, \vec{k}, \ldots\}.$$

Нейтральный вектор $\overleftrightarrow{i}$ представляет собой своеобразный диполь $\overleftrightarrow{i} \equiv |\vec{i}\rangle\langle\overleftarrow{i}|$, состоящий из двух компонент:

из контравариантного правого вектора $\vec{i} = |\vec{i}\rangle$

и ковариантного левого вектора $\overleftarrow{i} = \langle\overleftarrow{i}|$.

Особенность векторной алгебры состоит в том, что множества $\overleftarrow{\mathfrak{M}}_n$ и $\vec{\mathfrak{M}}_n$ ковариантных и контравариантных векторов имеют одинаковую природу, в результате чего можно говорить о симметрических (или антисимметрических) репрезентаторах, описывающих отношения между множестами $\overleftarrow{\mathfrak{M}}_n$ и $\vec{\mathfrak{M}}_n$.

Таким образом, репрезентатор представляет собой хорошо известное скалярное произведение двух векторов $\overleftarrow{i} \in \overleftarrow{\mathfrak{M}}_n$ и $\vec{k} \in \vec{\mathfrak{M}}_n$

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\vec{k}} = x_\mu(\overleftarrow{i})x^\mu(\vec{k}),$$

$$\text{где} \quad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

удовлетворяющее одному дополнительному условию – требованию **симметрии**

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\vec{k}} = \overset{n}{a}_{\overleftarrow{k}\,\vec{i}}.$$

Требование симметрии накладывает на ко- и контравариантные координаты $x_\mu(\overleftarrow{i})$ и $x^\mu(\vec{i})$ дополнительное требование линейной зависимости

$$x_\mu(\overleftarrow{i}) = g_{\mu\nu}x^\nu(\vec{i});$$

в результате чего в сакральной геометрии (и соответственно – в векторной алгебре) возникает симметрический метрический тензор $g_{\mu\nu}$.

Итак, симметрический репрезентатор имеет вид

$$\begin{aligned}\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\vec{k}} &= g_{\mu\nu}x^\mu(\vec{i})x^\nu(\vec{k}) = \\ &= g^{\mu\nu}x_\mu(\overleftarrow{i})x_\nu(\overleftarrow{k}) = \overset{n}{a}_{\overleftarrow{k}\,\vec{i}} \qquad (g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu).\end{aligned}$$

Как Легко убедиться в том, что если взять произвольный корт[75], состоящий из $n+1$ ковариантных левых векторов $\langle\, \overleftarrow{i}_1\, \overleftarrow{i}_2 \ldots \overleftarrow{i}_{n+1}\,|$, и произвольный корт, состоящий из $n+1$ контравариантных правых векторов $|\, \vec{k}_1\, \vec{k}_2 \ldots \vec{k}_{n+1}\,\rangle$, и рассмотреть пять

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_1\vec{k}_1}, & \ldots, & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_1\vec{k}_{n+1}}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_{n+1}\vec{k}_1}, & \ldots, & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_{n+1}\vec{k}_{n+1}}, \end{array}$$

[75] *корт* – сокращённая форма термина *кортеж* (упорядоченная последовательность конечного числа элементов).

то они окажутся связанными друг с другом следующим соотношением:

$$\begin{vmatrix} \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_{n+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_{n+1}} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

В самом деле, легко убедиться в существовании следующих тождеств:

$$\begin{vmatrix} \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_{n+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_{n+1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{\mu 1}x^\mu(\overrightarrow{i}_1) & \ldots & g_{\mu n}x^\mu(\overrightarrow{i}_1) & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ g_{\mu 1}x^\mu(\overrightarrow{i}_{n+1}) & \ldots & g_{\mu n}x^\mu(\overrightarrow{i}_{n+1}) & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x^1(\overrightarrow{k}_1) & \ldots & x^1(\overrightarrow{k}_{n+1}) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x^n(\overrightarrow{k}_1) & \ldots & x^n(\overrightarrow{k}_{n+1}) \\ 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

и

$$\begin{vmatrix} \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_{n+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_{n+1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^1(\overrightarrow{i}_1) & \ldots & x^n(\overrightarrow{i}_1) & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x^1(\overrightarrow{i}_{n+1}) & \ldots & x^n(\overrightarrow{i}_{n+1}) & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} g_{1\nu}x^\nu(\overrightarrow{k}_1) & \ldots & g_{1\nu}x^\nu(\overrightarrow{k}_{n+1}) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ g_{n\nu}x^\nu(\overrightarrow{k}_1) & \ldots & g_{n\nu}x^\nu(\overrightarrow{k}_{n+1}) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Этот факт связи между $(n+1)^2$ скалярными произведениями означает, что на множестве ковариантных векторов $\overleftarrow{\mathfrak{M}}_n$ и множестве контравариантных векторов $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_n$ имеет место *мультипликативная физическая структура ранга* $(n+1, n+1)$ или, другими словами, *физическая структура рода* $\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\ldots\overleftarrow{i}_{n+1};\overrightarrow{k}_1\ldots\overrightarrow{k}_{n+1}}(\overset{n}{a}) \equiv 0$ с симметрическим репрезентатором

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\overrightarrow{k}} = \overset{n}{a}_{\overrightarrow{k}\overleftarrow{i}} = g_{\mu\nu}x^\mu(\overrightarrow{i})x^\nu(\overrightarrow{k}) = g^{\mu\nu}x_\mu(\overleftarrow{i})x_\nu(\overleftarrow{k}).$$

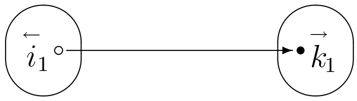
Рассмотрим более подробно сакральные геометрии, лежащие в основании векторных пространств, размерности $n = 0, 1$ и 2.

- Нульмерная векторная алгебра.

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством ковариантных векторов $\overleftarrow{\mathfrak{M}}_0$ и множеством контравариантных векторов $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0$, является скалярное произведение между нульмерным ковариантным вектором $\overleftarrow{i} \in \overleftarrow{\mathfrak{M}}_0$ и нульмерным контравариантным вектором $\overrightarrow{k} \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}_0$

$$\overset{o}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} \equiv 0.$$

2. Фундаментальный закон нульмерной векторной алгебры как **сакральное отношение** между левым 1-векторным кортом $\langle\overleftarrow{i}\,|$ и правым 1-векторным кортом $|\overrightarrow{k}\rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$$\langle\overleftarrow{i}_1| \qquad\qquad\qquad |\overrightarrow{k}_1\rangle$$

3. Фундаментальный закон в сакрально-инвариантной форме, лежащий в основании нульмерной векторной алгебры, формулируется следующим образом:

для любого ковариантного левого вектора $\overleftarrow{i}_1 \in \overleftarrow{\mathfrak{M}}_0$ и любого контравариантного правого вектора $\overrightarrow{k}_1 \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}_0$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1;\,\overrightarrow{k}_1}(\overset{o}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \overset{o}{a}_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0}$$

4. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{1}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1;\,\overrightarrow{k}_1}(\overset{0}{a}) = \mathbb{X}(\overleftarrow{i}_1)_0 \cdot \mathbb{X}^0(\overrightarrow{k}_1)$$

5. Ковариантная координатная матрица левого 1-векторного корта $\langle\overleftarrow{i}_1|$

$$\mathbb{X}(\overleftarrow{i}_1)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Ковариантный объём левого 1-векторного корта $\langle\overleftarrow{i}_1|$

$$V(\overleftarrow{i}_1)_0 = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

7. Контравариантная координатная матрица правого 1-векторного корта $|\overrightarrow{k}_1\rangle$

$$\mathbb{X}^0(\overrightarrow{k}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Контравариантный объём правого 1-векторного корта $|\vec{k}_1\rangle$

$$V^0(\vec{k}_1) = \Big|\ 0\ \Big| \equiv 0$$

9. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1;\vec{k}_1}(\overset{0}{a}) = V(\overleftarrow{i}_1)_0\ V^0(\vec{k}_1) \equiv 0$$

10. Каждый ковариантный левый вектор $\overleftarrow{i}$ характеризуется нульмерным ковариантным вектором-строкой:

$$\overleftarrow{i} \longleftrightarrow \Big(\, 0\,; \quad ;\, 0 \,\Big)\ .$$

Каждый контравариантный правый вектор $\vec{k}$ характеризуется нульмерным контравариантным вектором-столбцом:

$$\vec{k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot, \\ \cdot, \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. Таким образом, $\overset{o}{a}_{\overleftarrow{i}\,\vec{k}}$ представляет собой скалярное произведение двух нульмерных векторов, один из которых (ковариантный) характеризует левый вектор $\overleftarrow{i}$, а другой (контравариантный) – правый вектор $\vec{k}$:

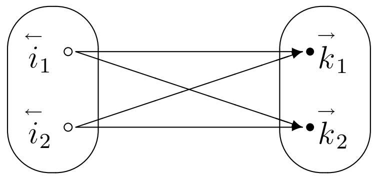
$$\overset{o}{a}_{\overleftarrow{i}\,\vec{k}} = \Big(\, 0\,; \quad ;\, 0 \,\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot, \\ \cdot, \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

- Одномерная векторная алгебра

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством ковариантных векторов $\overleftarrow{\mathfrak{M}}_1$ и множеством контравариантных векторов $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_1$, является скалярное произведение между одномерным ковариантным вектором $\overleftarrow{i} \in \overleftarrow{\mathfrak{M}}_1$ и одномерным контравариантным вектором $\vec{k} \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}_1$:

$$\overset{1}{a}_{\overleftarrow{i}\,\vec{k}} = x_1(\overleftarrow{i})x^1(\vec{k}) = g_{11}x^1(\vec{i})x^1(\vec{k}) = g^{11}x_1(\overleftarrow{i})x_1(\overleftarrow{k}) = \overset{1}{a}_{\overleftarrow{k}\,\vec{i}}.$$

2. Фундаментальный закон одномерной векторной алгебры как **сакральное отношение** между левым 2-векторным кортом $\langle\overleftarrow{i}_1\ \overleftarrow{i}_2|$ и правым 2-векторным кортом $|\vec{k}_1\ \vec{k}_2\rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\, \overleftarrow{i}_1\, \overleftarrow{i}_2 \,|$ $\qquad\qquad$ $|\, \overrightarrow{k}_1\, \overrightarrow{k}_2 \,\rangle$

3. Фундаментальный закон в сакрально-инвариантной форме, лежащий в основании одномерной векторной алгебры, формулируется следующим образом:

для любых двух ковариантных левых векторов $\overleftarrow{i}_1,\ \overleftarrow{i}_2 \in \overleftarrow{\mathfrak{M}}_1$ и любых двух контравариантных правых векторов $\overrightarrow{k}_1,\ \overrightarrow{k}_2 \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}_1$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\, \overleftarrow{i}_2;\, \overrightarrow{k}_1\, \overrightarrow{k}_2}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \overset{1}{a}_{\overleftarrow{i}_1 \overrightarrow{k}_1} & \overset{1}{a}_{\overleftarrow{i}_1 \overrightarrow{k}_2} & 0 \\ 0 & \overset{1}{a}_{\overleftarrow{i}_2 \overrightarrow{k}_1} & \overset{1}{a}{}^{s}_{\overleftarrow{i}_2 \overrightarrow{k}_2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0}$$

4. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{2}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\, \overleftarrow{i}_2;\, \overrightarrow{k}_1\, \overrightarrow{k}_2}(\overset{1}{a}) = \mathbb{X}(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2)_{10} \cdot \mathbb{X}^{10}(\overrightarrow{k}_1, \overrightarrow{k}_2)$$

5. Координатная матрица ковариантного левого 2-векторного корта $\langle \overleftarrow{i}_1\, \overleftarrow{i}_2|$

$$\mathbb{X}(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2)_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{11}x^1(\overleftarrow{i}_1) & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}x^1(\overleftarrow{i}_2) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Ковариантный объём левого 1-векторного корта $\langle\, \overleftarrow{i}_1 \,|$

$$V(\overleftarrow{i}_1)_1 = \begin{vmatrix} g_{11}x^1(\overleftarrow{i}_1) \end{vmatrix}$$

7. Ковариантный объём левого 2-векторного корта $\langle\, \overleftarrow{i}_1\, \overleftarrow{i}_2 \,|$

$$V(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2)_{10} = \begin{vmatrix} g_{11}x^1(\overleftarrow{i}_1) & 0 \\ g_{11}x^1(\overleftarrow{i}_2) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

8. Координатная матрица контравариантного правого 2-векторного корта $|\, \overrightarrow{k}_1\, \overrightarrow{k}_2 \,\rangle$

$$\mathbb{X}^{10}(\overrightarrow{k}_1, \overrightarrow{k}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^1(\overrightarrow{k}_1) & x^1(\overrightarrow{k}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Контравариантный объём правого 1-векторного корта $|\ \vec{k}_1\ \rangle$

$$V^1(\vec{k}_1) = \left|\ x^1(\vec{k}_1)\ \right|$$

10. Контравариантный объём правого 2-векторного корта $|\ \vec{k}_1\ \vec{k}_2\ \rangle$

$$V^{10}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \begin{vmatrix} x^1(\vec{k}_1) & x^1(\vec{k}_2) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

11. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1;\,\vec{k}_1}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{i}_1)_1\ V^1(\vec{k}_1)$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\,\overleftarrow{i}_2;\,\vec{k}_1\vec{k}_2}(\overset{1}{a}) = V(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2)_{10}\ V^{10}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \equiv 0$$

12. Каждый ковариантный левый вектор $\overleftarrow{i}$ характеризуется одномерным ковариантным вектором-строкой:

$$\overleftarrow{i} \longleftrightarrow \Big(0\ ;\ x_1(\overleftarrow{i})\ ;\ 0\Big) = \Big(0\ ;\ g_{11}x^1(\overleftarrow{i})\ ;\ 0\Big)$$

Каждый контравариантный правый вектор $\vec{k}$ характеризуется одномерным контравариантным вектором-столбцом:

$$\vec{k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot, \\ x^1(\vec{k}) \\ \cdot, \\ 0 \end{pmatrix}$$

13. Таким образом, $\overset{1}{a}_{\overleftarrow{i}\,\vec{k}}$ представляет собой скалярное произведение двух одномерных векторов, один из которых (ковариантный) характеризует левый вектор $\overleftarrow{i}$, а другой (контравариантный) – правый вектор $\vec{k}$:

$$\overset{1}{a}_{\overleftarrow{i}\,\vec{k}} = \Big(\ 0\ ;\ g_{11}x^1(\overleftarrow{i})\ ;\ 0\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot, \\ x^1(\vec{k}) \\ \cdot, \\ 0 \end{pmatrix} = g_{11}x^1(\overleftarrow{i})x^1(\vec{k})$$

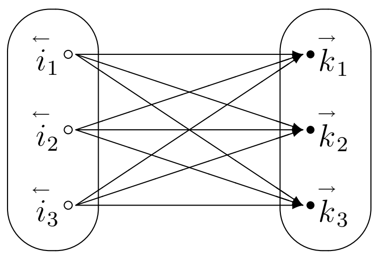
- Двумерная векторная алгебра

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством ковариантных векторов $\overleftarrow{\mathfrak{M}}_2$ и множеством контравариантных векторов $\vec{\mathfrak{M}}_2$, является

скалярное произведение между двумерным ковариантным вектором $\overleftarrow{i} \in \overleftarrow{\mathfrak{M}}_2$ и двумерным контравариантным вектором $\overrightarrow{k} \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}_2$:

$$\overset{2}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = x_1(\overleftarrow{i})x^1(\overrightarrow{k}) + x_2(\overleftarrow{i})x^2(\overrightarrow{k}) = g_{\mu\nu}x^{\mu}(\overleftarrow{i})\nu(\overrightarrow{k}) = g^{\mu\nu}x_{\mu}(\overleftarrow{i})x_{\nu}(\overleftarrow{k}) = \overset{2}{a}_{\overleftarrow{k}\,\overrightarrow{i}}.$$

2. Фундаментальный закон двумерной векторной алгебры как **сакральное отношение** между левым 3-векторным кортом $\langle \overleftarrow{i}_1\ \overleftarrow{i}_2\ \overleftarrow{i}_3|$ и правым 3-векторным кортом $|\overrightarrow{k}_1\ \overrightarrow{k}_2\ \overrightarrow{k}_3\rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\, \overleftarrow{i}_1\, \overleftarrow{i}_2\, \overleftarrow{i}_3\, |$ $\qquad$ $|\, \overrightarrow{k}_1\, \overrightarrow{k}_2\, \overrightarrow{k}_3\, \rangle$

3. Фундаментальный закон в сакрально-инвариантной форме, лежащий в основании двумерной векторной алгебры, формулируется следующим образом:

для любых трёх ковариантных левых векторов $\overleftarrow{i}_1,\ \overleftarrow{i}_2,\ \overleftarrow{i}_3 \in \overleftarrow{\mathfrak{M}}_2$ и любых трёх контравариантных правых векторов $\overrightarrow{k}_1,\ \overrightarrow{k}_2,\ \overrightarrow{k}_3 \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}_2$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{3}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\overleftarrow{i}_2\overleftarrow{i}_3;\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{k}_2\overrightarrow{k}_3}(\overset{2}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_1} & a_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_2} & a_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_3} & 0 \\ 0 & a_{\overleftarrow{i}_2\overrightarrow{k}_1} & a_{\overleftarrow{i}_2\overrightarrow{k}_2} & a_{\overleftarrow{i}_2\overrightarrow{k}_3} & 0 \\ 0 & a_{\overleftarrow{i}_3\overrightarrow{k}_1} & a_{\overleftarrow{i}_3\overrightarrow{k}_2} & a_{\overleftarrow{i}_3\overrightarrow{k}_3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0}$$

4. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{3}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\overleftarrow{i}_2\overleftarrow{i}_3;\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{k}_2\overrightarrow{k}_3}(\overset{2}{a}) = \mathbb{X}(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2, \overleftarrow{i}_3)_{120} \cdot \mathbb{X}^{120}(\overrightarrow{k}_1, \overrightarrow{k}_2, \overrightarrow{k}_3)$$

5. Координатная матрица ковариантного левого 3-векторного корта $\langle\, \overleftarrow{i}_1\, \overleftarrow{i}_2\, \overleftarrow{i}_3\, |$

$$\mathbb{X}(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2, \overleftarrow{i}_3)_{120} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_1(\overleftarrow{i}_1) & x_2(\overleftarrow{i}_1) & 0 & 0 \\ 0 & x_1(\overleftarrow{i}_2) & x_2(\overleftarrow{i}_2) & 0 & 0 \\ 0 & x_1(\overleftarrow{i}_3) & x_2(\overleftarrow{i}_3) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Ковариантный объём левого 1-векторного корта $\langle \overleftarrow{i}_\mu \mid$, где $\mu = 1, 2$

$$V(\overleftarrow{i}_1)_\mu = \begin{vmatrix} x_\mu(\overleftarrow{i}_1) \end{vmatrix}$$

7. Ковариантный объём левого 2-векторного корта $\langle \overleftarrow{i}_1 \; \overleftarrow{i}_2 \mid$

$$V(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2)_{12} = \begin{vmatrix} x_1(\overleftarrow{i}_1) & x_2(\overleftarrow{i}_1) \\ x_1(\overleftarrow{i}_2) & x_2(\overleftarrow{i}_2) \end{vmatrix}$$

8. Ковариантный объём левого 3-векторного корта $\langle \overleftarrow{i}_1 \; \overleftarrow{i}_2 \; \overleftarrow{i}_3 \mid$

$$V(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2, \overleftarrow{i}_3)_{120} = \begin{vmatrix} x_1(\overleftarrow{i}_1) & x_2(\overleftarrow{i}_1) & 0 \\ x_1(\overleftarrow{i}_2) & x_2(\overleftarrow{i}_2) & 0 \\ x_1(\overleftarrow{i}_3) & x_2(\overleftarrow{i}_3) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

9. Координатная матрица контравариантного правого 3-векторного корта $|\vec{k}_1 \; \vec{k}_2 \; \vec{k}_3\rangle$

$$\mathbb{X}^{120}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^1(\vec{k}_1) & x^1(\vec{k}_2) & x^1(\vec{k}_3) & 0 \\ 0 & x^2(\vec{k}_1) & x^2(\vec{k}_2) & x^2(\vec{k}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Контравариантный объём правого 1-векторного корта $\mid \vec{k}_1 \rangle$

$$V^\mu(\vec{k}_1) = \begin{vmatrix} x^\mu(\vec{k}_1) \end{vmatrix}$$

11. Контравариантный объём правого 2-векторного корта $\mid \vec{k}_1 \; \vec{k}_2 \rangle$

$$V^{12}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \begin{vmatrix} x^1(\vec{k}_1) & x^1(\vec{k}_2) \\ x^2(\vec{k}_1) & x^2(\vec{k}_2) \end{vmatrix}$$

12. Контравариантный объём правого 3-векторного корта $|\vec{k}_1 \; \vec{k}_2 \; \vec{k}_3\rangle$

$$V^{120}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = \begin{vmatrix} x^1(\vec{k}_1) & x^1(\vec{k}_2) & x^1(\vec{k}_3) \\ x^2(\vec{k}_1) & x^2(\vec{k}_2) & x^2(\vec{k}_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

13. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1; \vec{k}_1}(\overset{2}{a}) = V(\overleftarrow{i}_1)_\mu \; V^\mu(\vec{k}_1) = V(\overleftarrow{i}_1)_1 \; V^1(\vec{k}_1) + V(\overleftarrow{i}_1)_2 \; V^2(\vec{k}_1)$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\overleftarrow{i}_2;\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{k}_2}(\overset{2}{a}) = V(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2)_{12}\ V^{12}(\overrightarrow{k}_1, \overrightarrow{k}_2)$$

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\overleftarrow{i}_2\overleftarrow{i}_3;\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{k}_2\overrightarrow{k}_3}(\overset{2}{a}) = V(\overleftarrow{i}_1, \overleftarrow{i}_2, \overleftarrow{i}_3)_{120}\ V^{120}(\overrightarrow{k}_1, \overrightarrow{k}_2, \overrightarrow{k}_3) \equiv 0$$

14. Каждый ковариантный левый вектор $\overleftarrow{i}$ характеризуется двумерным ковариантным вектором-строкой:

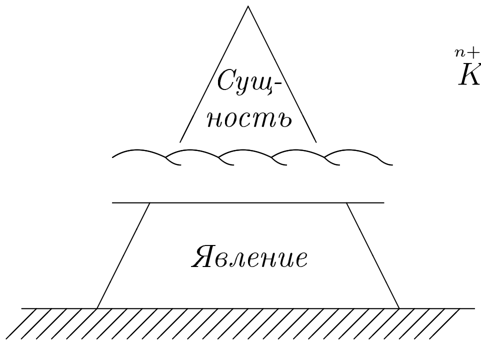
$$\overleftarrow{i} \longleftrightarrow \Big(0\ ;\ x_1(\overleftarrow{i}),\ x_2(\overleftarrow{i})\ ;\ 0\Big) = \Big(0\ ;\ g_{\mu 1}x^{\mu}(\overrightarrow{i}),\ g_{\mu 2}x^{\mu}(\overrightarrow{i})\ ;\ 0\Big)$$

Каждый контравариантный правый вектор $\overrightarrow{k}$ характеризуется двумерным контравариантным вектором-столбцом:

$$\overrightarrow{k} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ ., \\ x^1(\overrightarrow{k}) \\ x^2(\overrightarrow{k}) \\ ., \\ 0 \end{pmatrix}$$

15. Таким образом, $\overset{2}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}}$ представляет собой скалярное произведение двух двумерных векторов, один из которых (ковариантный) характеризует левый вектор $\overleftarrow{i}$, а другой (контравариантный) – правый вектор $\overrightarrow{k}$:

$$\overset{2}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = \Big(\ 0\ ;\ g_{\mu 1}x^{\mu}(\overrightarrow{i}),\ g_{\mu 2}x^{\mu}(\overrightarrow{i})\ ;\ 0\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ ., \\ x^1(\overrightarrow{k}) \\ x^2(\overrightarrow{k}) \\ ., \\ 0 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}x^{\mu}(\overrightarrow{i})\nu(\overrightarrow{k})$$



$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\overleftarrow{i}_2\ldots\overleftarrow{i}_{n+1};\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{k}_2\ldots\overrightarrow{k}_{n+1}}(\overset{n}{a}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = x_1(\overleftarrow{i})x^1(\overrightarrow{k}) + \ldots + x_n(\overleftarrow{i})x^n(\overrightarrow{k})$$

Явление и сущность n -мерной векторной алгебры.

Другими словами, *сущность* n *-мерной векторной алгебры состоит в наличии таких отношений между двумя* $n+1$ *-векторными кортами* $\langle \overleftarrow{i}_1, \ldots, \overleftarrow{i}_{n+1}|$ *и* $|\overrightarrow{k}_1, \ldots, \overrightarrow{k}_{n+1}\rangle$, *при которых имеет место физическая структура рода:*

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\overleftarrow{i}_2\ldots\overleftarrow{i}_{n+1};\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{k}_2\ldots\overrightarrow{k}_{n+1}}(\overset{n}{a}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = x_\mu(\overleftarrow{i})x^\mu(\overrightarrow{k}) = g_{\mu\nu}x^\mu(\overrightarrow{i})x^\nu(\overrightarrow{k})$$

$$\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$$

удовлетворяющее одному дополнительному условию – требованию *симметрии*:

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = \overset{n}{a}_{\overleftarrow{k}\,\overrightarrow{i}}.$$

Подведём итоги:

Из всего сказанного следует, что

1. **Обычная n -мерная векторная алгебра – это сакральная n -мерная векторная геометрия с однородным симметрическим репрезентатором**

2. В её основании лежат два множества одной и той же природы: множество ковариантных левых векторов:

$$\overleftarrow{\mathfrak{M}} = \{\overleftarrow{i}, \overleftarrow{k}, \ldots\}$$

и множество контравариантных правых векторов:

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \ldots\}$$

3. Заметим далее, что обычный ковариантный вектор

$$\overset{*}{i} = \Big(\ x_1(\overleftarrow{i}), \ldots x_n(\overleftarrow{i}) \ \Big) = \Big(\ 0 \ ; \ x_1(\overleftarrow{i}), \ldots x_n(\overleftarrow{i}) \ ; \ 0 \ \Big)$$

представляет собой ковариантный левый вектор с $p = 0$ и $\mu = 0$

$$i \ = \ \Big(\ p \ ; \ x_1(\overleftarrow{i}), \ldots x_n(\overleftarrow{i}) \ ; \ \mu \ \Big) \ ,$$

а контравариантный вектор

$$\overset{*}{k} = \begin{pmatrix} x^1(\vec{k}) \\ \cdots \\ x^n(\vec{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot, \\ x^1(\vec{k}) \\ \cdots \\ x^n(\vec{k}) \\ \cdot, \\ 0 \end{pmatrix}$$

есть контравариантный правый вектор с $q = 0$ и $\nu = 0$,

$$k = \begin{pmatrix} \nu \\ \cdot, \\ x^1(\vec{k}) \\ \cdots \\ x^n(\vec{k}) \\ \cdot, \\ q \end{pmatrix},$$

где p и q – гипергеометрические заряды соответственно левого и правого математического объекта, μ и ν – соответствующие криптометрические заряды.

4. Из Теории физических структур следует существование репрезентатора

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = x_\mu(\overleftarrow{i})x^\mu(\vec{k}),$$

билинейного относительно ковариантных и контравариантных координат $x_\mu(\overleftarrow{i})$ и $x^\mu(\vec{k})$.

5. Из условия симметрии $\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = \overset{n}{a}_{\overleftarrow{k}\,\overrightarrow{i}}$ с неизбежностью вытекает существование метрического тензора $g_{\mu\nu}$, связывающего линейной зависимостью ко- и контравариантные координаты

$$x_\mu(\overleftarrow{i}) = g_{\mu\nu}x^\nu(\vec{i}).$$

6. В итоге получаем следующее выражение для однородного симметричного репрезентатора

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = g_{\mu\nu}x^\mu(\vec{i})x^\nu(\vec{k}).$$

Здесь следует отметить, что хорошо известное скалярное произведение двух векторов $\overleftarrow{i} \in \overleftarrow{\mathfrak{M}}_n$ и $\vec{k} \in \overrightarrow{\mathfrak{M}}_n$ как однородная билинейная функция двух групп переменных

$$\overset{n}{a}_{\overleftarrow{i}\,\overrightarrow{k}} = x_\mu(\overleftarrow{i})x^\mu(\vec{k}),$$

которая в векторной алгебре вносится "руками" по определению, в сакральной геометрии возникает с неизбежностью как **одно из четырёх возможных решений сакрального уравнения**, лежащего в основании Теории физических структур.

7. Дважды окаймлённый верификатор

$$\boxed{\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{i}_1\overleftarrow{i}_2\ldots\overleftarrow{i}_{n+1};\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{k}_2\ldots\overrightarrow{k}_{n+1}}(\overset{n}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & a_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_1} & \ldots & a_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_{n+1}} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_1} & \ldots & a_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_{n+1}} & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0}\ ,$$

естественным образом возникающий в рамках Теории физических структур и лежащий в основании n-мерной векторной сакральной геометрии, в обычной векторной алгебре есть не что иное, как хорошо известный обобщённый определитель Грама:

$$\overset{n+1}{\Gamma}_{\overleftarrow{i}_1\overleftarrow{i}_2\ldots\overleftarrow{i}_{n+1};\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{k}_2\ldots\overrightarrow{k}_{n+1}}(\overset{n}{a}) = \begin{vmatrix} a_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_1} & \ldots & a_{\overleftarrow{i}_1\overrightarrow{k}_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_1} & \ldots & a_{\overleftarrow{i}_{n+1}\overrightarrow{k}_{n+1}} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

8. В конечном итоге фундаментальный закон, лежащий в основании векторной алгебры, сводится к равенству нулю ковариантного объёма левого $n+1$-векторного корта

$$V(\overleftarrow{i}_1, \ldots, \overleftarrow{i}_n, \overleftarrow{i}_{n+1})_{1\ldots n0} \equiv 0$$

и контравариантного объёма правого $n+1$-векторного корта

$$V^{1\ldots n0}(\overrightarrow{k}_1, \ldots, \overrightarrow{k}_n, \overrightarrow{k}_{n+1}) \equiv 0.$$

Сакральная формулировка векторной алгебры

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{n+1}{K}{}^{00}(\overset{n}{a}) \equiv 0}}$$

$$\overset{n}{a} = g_{\mu\nu}x^{\mu}(\overrightarrow{i})x^{\nu}(\overrightarrow{k})$$

								$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\boxed{\overset{4}{K}{}^{00}}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\boxed{\overset{3}{K}{}^{00}}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\boxed{\overset{1}{K}{}^{00}}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Местá физических структур, выражающих сущность 0-мерных, 1-мерных, 2-мерных и т. д. векторных алгебр, среди всех возможных физических структур.

Литература к Примеру 8

[1]. *Сойер У.У.* Прелюдия к математике. Просвещение, М.: 1965, С. 90.

Пример 9. Евклидова геометрия

Евклидова геометрия должна считаться физической наукой. С точки зрения физика, существенное значение евклидовой геометрии состоит в том, что её законы не зависят от специфической природы тел, относительные положения которых она изучает.

— *Альберт Эйнштейн*

Ключевыми понятиями евклидовой геометрии являются:

евклидово пространство,
точка,
размерность,
декартовы координаты и
квадрат расстояния между двумя точками.

Задача состоит в том, чтобы установить соответствие между хорошо известной евклидовой геометрией и криптоточечной сакральной геометрией, возникшей в рамках Теории физических структур. При этом важно проследить, как из общего **принципа сакральной симметрии** при наложении двух простейших требований – требования **симметрии** и **рефлексии** – возникают два типа криптоточек с ко- и контравариантными координатами, дважды неоднородное билинейное скалярное произведение двух криптоточек, хорошо известный ещё из средней школы квадрат расстояния между двумя точками, метрический тензор, дважды окаймлённый верификатор, ко- и контравариантные координатные матрицы, объёмы ко- и контравариантных кортов и объёмы n -мерных симплексов.

В криптоточечной сакральной геометрии необходимо различать три множества точек:

1. Множество обычных точек (точек среднего рода):

$$\mathfrak{M} = \{p_1, p_2, \ldots\}$$

2. Множество левых субэйдосов – ковариантных криптоточек:

$$\underline{\mathfrak{M}} = \{\, \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2, \ldots\}$$

3. Множество правых субэйдосов – контравариантных криптоточек:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{\, \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2, \ldots\}$$

Каждая точка среднего рода p представляет собой своеобразный “диполь” $p = |\,\bar{\boldsymbol{p}}\,\rangle\,\langle\,\underline{\boldsymbol{p}}\,|$, состоящий из двух компонент:

из правой контравариантной криптоточки $\bar{\boldsymbol{p}} = |\,\bar{\boldsymbol{p}}\,\rangle$

и левой ковариантной криптоточки $\underline{\boldsymbol{p}} = \langle\, \underline{\boldsymbol{p}} \,|$.

Казалось бы, естественно, в качестве репрезентатора взять хорошо известный квадрат расстояния между двумя криптоточками $\ell^2_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}}$. Однако, в Теории физических структур существует более фундаментальное понятие – "обобщённое скалярное произведение".

Как известно, понятие скалярного произведения широко используется в линейной алгебре в качестве скалярного произведения двух векторов, но оно никогда не использовалось в евклидовой геометрии. Однако понятия "скалярное произведение двух криптоточек" и "скалярное произведение точки на криптовектор" с необходимостью возникают в качестве репрезентаторов в сакральной геометрии, содержащей в себе как частные случаи **линейную алгебру** и **евклидову геометрию**.

Итак, мы будем исходить из фундаментального понятия в Теории физических структур – репрезентатора $w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}}$, который в рамках евклидовой геометрии имеет смысл "скалярного произведения двух криптоточек".

Можно показать, что при дополнительном условии симметрии $w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = w_{\underline{\boldsymbol{k}}\bar{\boldsymbol{i}}}$ и рефлексии $w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{i}}} \equiv 0$, скалярное произведение $w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}}$ является, с точностью до множителя $-\frac{1}{2}$, квадратом расстояния между двумя криптоточками, то есть

$$w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{\bar{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} .$$

В самом деле, согласно основной теореме Теории физических структур – теореме Михайличенко – среди единственно возможных четырёх регулярных семейств физических структур, удовлетворяющих всеобщему **принципу сакральной симметрии**, имеется семейство физических структур рода

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\ldots\,\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2};\,\bar{\boldsymbol{k}}_1\ldots\,\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

с репрезентатором

$$\overset{n}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = s^0(\bar{\boldsymbol{k}}) + x_\mu(\underline{\boldsymbol{i}})x^\mu(\bar{\boldsymbol{k}}) + s_0(\underline{\boldsymbol{i}}).$$

Если наложить дополнительное условие симметрии

$$\overset{n}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = \overset{n}{w}_{\underline{\boldsymbol{k}}\bar{\boldsymbol{i}}} ,$$

то мы должны потребовать, чтобы

$$s_0(\underline{\boldsymbol{i}}) = s^0(\bar{\boldsymbol{i}}) = s(\bar{\boldsymbol{i}})$$

и

$$x_\mu(\underline{\boldsymbol{i}}) = g_{\mu\nu}x^\nu(\bar{\boldsymbol{i}}),$$

где $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ – симметрический тензор.

Тогда репрезентатор будет иметь вид:

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + g_{\mu\nu}x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{i}})x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\bar{\boldsymbol{i}}).$$

Если к тому же наложить ещё одно требование рефлексии $\overset{n}{w}_{\underline{i}\bar{i}} \equiv 0$, , то получим окончательное выражение для симметричного и рефлексивного репрезентатора

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + g_{\mu\nu}x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{i}})x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\bar{\boldsymbol{i}}), \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$s(\bar{\boldsymbol{i}}) = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{i}})x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{i}})$$

$$s(\bar{\boldsymbol{k}}) = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{k}})x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{k}})$$

– “скрытые параметры”.

Итак, в случае евклидовой геометрии репрезентатором, описывающим отношение между множеством ковариантных криптоточек $\underline{\mathfrak{M}}$ и множеством контравариантных криптоточек $\overline{\mathfrak{M}}$ является симметричное $(w_{\underline{i}\bar{k}} = w_{\underline{k}\bar{i}})$ и рефлексивное $(w_{\underline{i}\bar{i}} \equiv 0)$ скалярное произведение двух криптоточек:

$$\overset{n}{w}_{\,\underline{i}\,\bar{k}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + g_{\mu\nu}x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{i}})x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\bar{\boldsymbol{i}}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\left(x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{i}}) - x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{k}})\right)\left(x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{i}}) - x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{k}})\right) = -\frac{1}{2}\, \ell^{2}_{\,\underline{i}\,\bar{k}}\,.$$

Легко убедиться в том, что если взять произвольный корт, состоящий из $n{+}2$ ковариантных криптоточек $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\, \underline{\boldsymbol{i}}_2 \ldots \underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}\,|$, и произвольный корт, состоящий из $n+2$ контравариантных криптоточек $|\, \bar{\boldsymbol{k}}_1\, \bar{\boldsymbol{k}}_2 \ldots \bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}\,\rangle$, и рассмотреть

$(n+2)^2$ скалярных произведений между двумя криптоточками:

$$\begin{matrix} \overset{n}{w}_{\underline{i}_1\bar{k}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\underline{i}_1\bar{k}_{n+2}} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \overset{n}{w}_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_{n+2}} \end{matrix}\,,$$

то они окажутся связанными между собой следующими соотношениями:

$$\boxed{\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+2};\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{n+2}}(\overset{n}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\underline{i}_1\bar{k}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\underline{i}_1\bar{k}_{n+2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \overset{n}{w}_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_{n+2}} \end{vmatrix} \equiv 0}$$

В самом деле имеет место следующее очевидное тождество

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\underline{i}_1\bar{k}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\underline{i}_1\bar{k}_{n+2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \overset{n}{w}_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_{n+2}} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_1(\underline{i}_1) & \ldots & x_n(\underline{i}_1) & 0 & s(\underline{i}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & x_1(\underline{i}_{n+2}) & \ldots & x_n(\underline{i}_{n+2}) & 0 & s(\underline{i}_{n+2}) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -s(\bar{k}_1) & \ldots & -s(\bar{k}_{n+2} \\ 0 & x^1(\bar{k}_1) & \ldots & x^1(\bar{k}_{n+2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x^n(\bar{k}_1) & \ldots & x^n(\bar{k}_{n+2}) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Так как

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{\bar{i}\bar{k}}\ ,$$

то наряду с тождественным обращением в ноль дважды окаймлённого верификатора $\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\,\underline{i}_{n+2};\,\bar{k}_1\ldots\,\bar{k}_{n+2}}(\overset{n}{w})$ тождественно обращается в ноль определитель Кэли-Менгера:

$$\boxed{\mathcal{K}_{\bar{i}_1\ldots\bar{i}_{n+2};\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{n+2}}(\overset{n}{\ell}{}^2) = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{k}_1} & \ldots & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{k}_{n+2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_{n+2}\bar{k}_1} & \ldots & \ell^2_{\bar{i}_{n+2}\bar{k}_{n+2}} \end{vmatrix} \equiv 0}\ ,$$

связанный с дважды окаймлённым верификатором следующим равенством:

$$\mathcal{K}_{\,\bar{i}_1\ldots\,\bar{i}_{n+2};\,\bar{k}_1\ldots\,\bar{k}_{n+2}}(\overset{n}{\ell}{}^2) = 2^{n+1}\,\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\,\underline{i}_{n+2};\,\bar{k}_1\ldots\,\bar{k}_{n+2}}(\overset{n}{w}).$$

Этот факт связи между $(n+2)^2$ скалярными произведениями между двумя криптоточками $\overset{n}{w}_{\underline{i}\bar{k}}$ (или квадратами расстояний между ними $\overset{n}{\ell}{}^2_{\bar{i}\bar{k}}$) означает, что на множестве ковариантных криптоточек $\underline{\mathfrak{M}}$ и множестве контравариантных криптоточек $\overline{\mathfrak{M}}$ имеет место физическая структура рода

$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\boldsymbol{i}_1\ldots\,\boldsymbol{i}_{n+2};\,\boldsymbol{k}_1\ldots\,\boldsymbol{k}_{n+2}}(\overset{n}{w})$ или, другими словами, аддитивная физическая структура ранга $(n+2,n+2)$.

• Нульмерная евклидова геометрия

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством ковариантных криптоточек $\underline{\mathfrak{M}}_0$ и множеством контравариантных криптоточек $\overline{\mathfrak{M}}_0$, является “скалярное произведение двух криптоточек” $w_{\underline{i}\bar{k}}$

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = s^0(\bar{k}) + s_0(\underline{i}) = s(\bar{k}) + s(\bar{i}) = 0 + 0 = 0.$$

2. Каждая ковариантная криптоточка $\underline{\boldsymbol{i}}$ характеризуется нульмерной ковариантной матрицей-строкой:

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1\,;\ ;s(\underline{\boldsymbol{i}})\ \Big) = \Big(1\,;\ ;0\Big)\,.$$

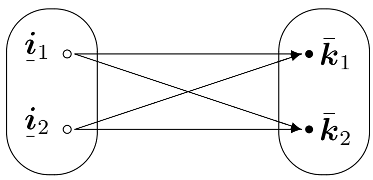
Каждая контравариантная криптоточка $\bar{\boldsymbol{k}}$ характеризуется нульмерной контравариантной матрицей-столбцом:

$$\bar{\boldsymbol{k}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Таким образом, $w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}}$ представляет собой произведение двух матриц, одна из которых (матрица-строка) характеризует криптоточку $\underline{\boldsymbol{i}}$, а другая (матрица-столбец) – криптоточку $\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = \Big(1\,;\ ;s(\underline{\boldsymbol{i}})\ \Big)\cdot\begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix} = \Big(1\,;\ ;0\ \Big)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\,, \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\underline{\boldsymbol{i}}) = 0 + 0 = 0.$$

4. Фундаментальный закон нульмерной евклидовой геометрии как **сакральное отношение** между левым 2-криптоточечным кортом $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ |$ и правым 2-криптоточечным кортом $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\,|$ $\qquad$ $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$

5. Фундаментальный закон в сакрально-инвариантной форме, лежащий в основании нульмерной евклидовой геометрии, формулируется следующим образом:

для любых двух ковариантных криптоточек
$\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \in \underline{\mathfrak{M}}_0$ и любых двух контравариантных криптоточек $\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2 \in \overline{\mathfrak{M}}_0$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{\circ}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & w_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_1} & w_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ -1 & w_{\underline{\boldsymbol{i}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_1} & w_{\underline{\boldsymbol{i}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_2} \end{vmatrix} \equiv 0}$$

или

$$\mathcal{K}_{\underset{\sim}{i}_1\underset{\sim}{i}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\ell^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underset{\sim}{i}_1\bar{\boldsymbol{k}}_1} & \ell^2_{\underset{\sim}{i}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2} \\ -1 & \ell^2_{\underset{\sim}{i}_2\bar{\boldsymbol{k}}_1} & \ell^2_{\underset{\sim}{i}_2\bar{\boldsymbol{k}}_2} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{1}{\mathbb{K}}{}^{11}_{\underset{\sim}{i}_1\underset{\sim}{i}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{o}{w}) = \mathbb{X}(\,\underset{\sim}{i}_1,\ \underset{\sim}{i}_2)_0 \cdot \mathbb{X}^0(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2).$$

7. Ковариантная координатная матрица левого 2-криптоточечного корта $\langle\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2\ |$

$$\mathbb{X}(\,\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & s(\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1) \\ -1 & 0 & s(\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2) \end{pmatrix},$$

где $s(\,\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}\,) = 0$ — “скрытые” параметры.

8. Контравариантная координатная матрица правого 2-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\rangle$

$$\mathbb{X}^0(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $s(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) = 0$ – “скрытые” параметры.

9. Ковариантный объём левого 2-криптоточечного корта $\langle\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2\ |$

$$W(\,\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2)_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

10. Контравариантный объём правого 2-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \rangle$

$$W^0(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

11. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\underset{\sim}{i}_1\underset{\sim}{i}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{o}{w}) = W(\,\underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2)_0\ W^0(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2) \equiv 0.$$

Другими словами, *сущность нульмерной евклидовой геометрии состоит в наличии таких отношений между двумя 2-криптоточечными кортами* $\langle\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_1\ \underset{\sim}{\boldsymbol{i}}_2\,|$ *и* $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\,\rangle$, *при которых имеет место физическая структура рода:*

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\underset{\sim}{i}_1\underset{\sim}{i}_2;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2}(\overset{0}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{0}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\underline{\boldsymbol{i}}) = 0$$

или

$$\mathcal{K}_{\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2;\bar{k}_1\bar{k}_2}(\ell^2) \equiv 0,$$
$$\ell^2_{\bar{\imath}\bar{k}} = 0.$$

- Одномерная евклидова геометрия

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством ковариантных криптоточек $\underline{\mathfrak{M}}$ и множеством контравариантных криптоточек $\overline{\mathfrak{M}}$, является "скалярное произведение двух криптоточек" $w_{\underline{i}\bar{k}}$:

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + x(\underline{\boldsymbol{i}})x(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\underline{\boldsymbol{i}}) = -\frac{1}{2}\,x(\bar{\boldsymbol{k}})^2 + x(\bar{\boldsymbol{\imath}})x(\bar{\boldsymbol{k}}) - \frac{1}{2}\,x(\bar{\boldsymbol{\imath}})^2 = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{\bar{\imath}\bar{k}}\,.$$

2. Каждая ковариантная криптоточка $\underline{\boldsymbol{i}}$ характеризуется одномерной ковариантной матрицей-строкой:

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1;\; x(\underline{\boldsymbol{i}})\,;\; s(\underline{\boldsymbol{i}})\Big) = \Big(1;\; x(\underline{\boldsymbol{i}})\,;\; -\frac{1}{2}\,x(\bar{\boldsymbol{\imath}})^2\Big)\,.$$

Каждая контравариантная криптоточка $\bar{\boldsymbol{k}}$ характеризуется одномерной контравариантной матрицей-столбцом:

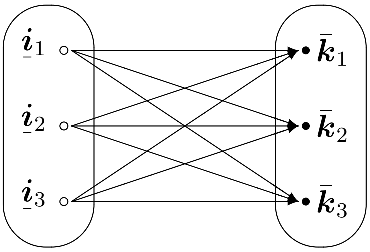
$$\bar{\boldsymbol{k}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ x(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,x(\bar{\boldsymbol{k}})^2 \\ \cdot\,, \\ x(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Таким образом, $w_{\underline{i}\bar{k}}$ представляет собой произведение двух матриц, одна из которых (матрица-строка) характеризует криптоточку $\underline{\boldsymbol{i}}$, а другая (матрица-столбец) – криптоточку $\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = \Big(1;\; x(\underline{\boldsymbol{i}})\,;\; s(\underline{\boldsymbol{i}})\Big)\cdot\begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ x(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix} = \Big(1;\; x(\underline{\boldsymbol{i}})\,;\; -\frac{1}{2}\,x(\bar{\boldsymbol{\imath}})^2\Big)\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,x(\bar{\boldsymbol{k}})^2 \\ \cdot\,, \\ x(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= s(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + x(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,x(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) = -\frac{1}{2}\,x(\bar{\boldsymbol{k}})^2 + x(\underline{\boldsymbol{i}})\,x(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) - \frac{1}{2}\,x(\bar{\boldsymbol{\imath}})^2 =$$
$$= -\frac{1}{2}\,(x(\bar{\boldsymbol{\imath}}) - x(\bar{\boldsymbol{k}}))^2 = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{\bar{\imath}\bar{k}}\,.$$

4. Фундаментальный закон одномерной евклидовой геометрии как **сакральное отношение** между левым 3-криптоточечным кортом $\langle\; \underline{\boldsymbol{i}}_1\;\; \underline{\boldsymbol{i}}_2\;\; \underline{\boldsymbol{i}}_3 \;|$ и правым 3-криптоточечным кортом $|\; \bar{\boldsymbol{k}}_1\;\; \bar{\boldsymbol{k}}_2\;\; \bar{\boldsymbol{k}}_3\;\rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3 \,|$ $\qquad$ $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3 \,\rangle$

5. Фундаментальный закон в сакрально-инвариантной форме, лежащий в основании одномерной евклидовой геометрии, формулируется следующим образом:

для любых трёх ковариантных криптоточек
$\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3 \in \underline{\mathfrak{M}}_1$ и любых трёх контравариантных криптоточек $\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3 \in \overline{\mathfrak{M}}_1$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}(\overset{1}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & w_{\underline{i}_1\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_3} \\ -1 & w_{\underline{i}_2\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_3} \\ -1 & w_{\underline{i}_3\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_3} \end{vmatrix} \equiv 0}$$

или

$$\mathcal{K}_{\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}(\ell^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{k}_1} & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{k}_2} & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_2\bar{k}_1} & \ell^2_{\bar{i}_2\bar{k}_2} & \ell^2_{\bar{i}_2\bar{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_3\bar{k}_1} & \ell^2_{\bar{i}_3\bar{k}_2} & \ell^2_{\bar{i}_3\bar{k}_3} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{2}{\mathbb{K}}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}(\overset{1}{w}) = \mathbb{X}(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3)_{10} \cdot \mathbb{X}^{10}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3).$$

7. Ковариантная координатная матрица левого 3-криптоточечного корта $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3 \,|$

$$\mathbb{X}(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3)_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & 0 & s(\underline{\boldsymbol{i}}_1) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & 0 & s(\underline{\boldsymbol{i}}_2) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & 0 & s(\underline{\boldsymbol{i}}_3) \end{pmatrix},$$

где $s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) = -\frac{1}{2}\,x(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)^2$ — “скрытые” параметры.

8. Контравариантная координатная матрица правого 3-криптоточечного корта $|\,\bar{\boldsymbol{k}}_1\,\bar{\boldsymbol{k}}_2\,\bar{\boldsymbol{k}}_3\rangle$:

$$\mathbb{X}^{10}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_3) \\ 0 & x(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $s(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) = -\frac{1}{2}\,x(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,)^2$ – “скрытые” параметры.

9. Ковариантный объём левого 3-криптоточечного корта $\langle\,\underline{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_3\,|$:

$$W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3)_{10} = \begin{vmatrix} x(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

10. Контравариантный объём правого 3-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_3\,\rangle$:

$$W^{10}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3) = \begin{vmatrix} x(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

11. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}(\overset{1}{w}) = W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3)_{10}\ W^{10}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3) \equiv 0.$$

Другими словами, *сущность одномерной евклидовой геометрии состоит в наличии таких отношений между двумя 3-криптоточечными кортами* $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3\,|$ *и* $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_3\,\rangle$, *при которых имеет место физическая структура рода:*

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}(\overset{1}{w}) \equiv 0$$
$$\overset{1}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + x(\underline{\boldsymbol{i}})\,x(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\underline{\boldsymbol{i}})$$

или

$$\mathcal{K}_{\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}(\ell^2) \equiv 0.$$
$$\ell^2_{\bar{i}\bar{k}} = (x_{\bar{i}} - x_{\bar{k}}\,)^2.$$

• Двумерная евклидова геометрия

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством ковариантных криптоточек $\underline{\mathfrak{M}}$ и множеством контравариантных криптоточек $\overline{\mathfrak{M}}$, является “скалярное произведение двух криптоточек” $w_{\underline{i}\bar{k}}$:

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + x(\underline{\boldsymbol{i}})\, x(\bar{\boldsymbol{k}}) + y(\underline{\boldsymbol{i}})\, y(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\underline{\boldsymbol{i}}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,[x(\bar{\boldsymbol{k}})^2 + y(\bar{\boldsymbol{k}})^2] + x(\bar{\boldsymbol{i}})\, x(\bar{\boldsymbol{k}}) + y(\bar{\boldsymbol{i}})\, y(\bar{\boldsymbol{k}}) - \frac{1}{2}\,[x(\bar{\boldsymbol{i}})^2 + y(\bar{\boldsymbol{i}})^2] = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{\bar{i}\bar{k}}\ .$$

2. Каждая ковариантная криптоточка $\underline{\boldsymbol{i}}$ характеризуется двумерной ковариантной матрицей-строкой:

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1;\ x(\underline{\boldsymbol{i}})\ \ y(\underline{\boldsymbol{i}});\ s(\underline{\boldsymbol{i}})\Big)\ .$$

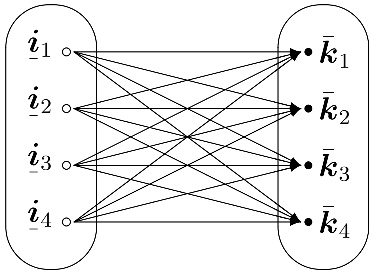
Каждая контравариантная криптоточка $\bar{\boldsymbol{k}}$ характеризуется двумерной контравариантной матрицей-столбцом:

$$\bar{\boldsymbol{k}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ x(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ y(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

3. Таким образом, $w_{\underline{i}\bar{k}}$ представляет собой произведение двух матриц, одна из которых (матрица-строка) характеризует криптоточку $\underline{\boldsymbol{i}}$, а другая (матрица-столбец) – криптоточку $\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = \Big(1;\ x(\underline{\boldsymbol{i}}), y(\ \underline{\boldsymbol{i}});\ s(\underline{\boldsymbol{i}})\Big) \cdot \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ x(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ y(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + x(\underline{\boldsymbol{i}})\, x(\bar{\boldsymbol{k}}) + y(\underline{\boldsymbol{i}})\, y(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\underline{\boldsymbol{i}}).$$

4. Фундаментальный закон двумерной евклидовой геометрии как **сакральное отношение** между левым 4-криптоточечным кортом $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_3\ \ \underline{\boldsymbol{i}}_4 \mid$ и правым 4-криптоточечным кортом $\mid\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \ \bar{\boldsymbol{k}}_4\ \rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой



$\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3\ \underline{\boldsymbol{i}}_4\,|\qquad |\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \bar{\boldsymbol{k}}_4\,\rangle$

5. Фундаментальный закон в сакрально-инвариантной форме, лежащий в основании двумерной евклидовой геометрии, формулируется следующим образом:

для любых четырёх ковариантных криптоточек

$\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3,\ \underline{\boldsymbol{i}}_4 \in \underline{\mathfrak{M}}$ и любых четырёх контравариантных криптоточек $\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3,\ \bar{\boldsymbol{k}}_4 \in \overline{\mathfrak{M}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4}(\overset{2}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & w_{\underline{i}_1\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_4} \\ -1 & w_{\underline{i}_2\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_4} \\ -1 & w_{\underline{i}_3\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_4} \\ -1 & w_{\underline{i}_4\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_4\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_4\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_4\bar{k}_4} \end{vmatrix} \equiv 0}$$

или

$$\mathcal{K}_{\bar{\imath}_1\bar{\imath}_2\bar{\imath}_3\bar{\imath}_4;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\bar{\imath}_1\bar{k}_1} & \ell^2_{\bar{\imath}_1\bar{k}_2} & \ell^2_{\bar{\imath}_1\bar{k}_3} & \ell^2_{\bar{\imath}_1\bar{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\bar{\imath}_2\bar{k}_1} & \ell^2_{\bar{\imath}_2\bar{k}_2} & \ell^2_{\bar{\imath}_2\bar{k}_3} & \ell^2_{\bar{\imath}_2\bar{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\bar{\imath}_3\bar{k}_1} & \ell^2_{\bar{\imath}_3\bar{k}_2} & \ell^2_{\bar{\imath}_3\bar{k}_3} & \ell^2_{\bar{\imath}_3\bar{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\bar{\imath}_4\bar{k}_1} & \ell^2_{\bar{\imath}_4\bar{k}_2} & \ell^2_{\bar{\imath}_4\bar{k}_3} & \ell^2_{\bar{\imath}_4\bar{k}_4} \end{vmatrix} \equiv 0$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{3}{\mathbb{K}}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4} = \mathbb{X}(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3,\ \underline{\boldsymbol{i}}_4)_{120} \cdot \mathbb{X}^{120}(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3,\ \bar{\boldsymbol{k}}_4).$$

7. Ковариантная координатная матрица левого 4-криптоточечного корта $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3\ \underline{\boldsymbol{i}}_4\ |$

$$\mathbb{X}(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3,\ \underline{\boldsymbol{i}}_4)_{120} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & 0 & s(\underline{\boldsymbol{i}}_1) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & 0 & s(\underline{\boldsymbol{i}}_2) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & 0 & s(\underline{\boldsymbol{i}}_3) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & 0 & s(\underline{\boldsymbol{i}}_4) \end{pmatrix},$$

где $s(\underline{\boldsymbol{i}}) = -\frac{1}{2}\left[x^2(\underline{\boldsymbol{i}}) + y^2(\underline{\boldsymbol{i}})\right]$ – “скрытые” параметры.

8. Контравариантная координатная матрица правого 4-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \bar{\boldsymbol{k}}_4\ \rangle$

$$\mathbb{X}^{120}(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3,\ \bar{\boldsymbol{k}}_4) = \begin{pmatrix} 1 & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & -s(\bar{\boldsymbol{k}}_4) \\ 0 & x(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_4) \\ 0 & y(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $s(\bar{\boldsymbol{k}}) = -\frac{1}{2}\left[x^2(\bar{\boldsymbol{k}}) + y^2(\bar{\boldsymbol{k}})\right]$ – “скрытые” параметры.

9. Ковариантный объём левого 4-криптоточечного корта $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3\ \underline{\boldsymbol{i}}_4\ |$

$$W(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3,\ \underline{\boldsymbol{i}}_4)_{120} = \begin{vmatrix} x(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

10. Контравариантный объём правого 4-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \bar{\boldsymbol{k}}_4\ \rangle$:

$$W^{120}(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3,\ \bar{\boldsymbol{k}}_4) = \begin{vmatrix} x(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_4) \\ y(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

11. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4}(\overset{2}{w}) = W(\ \underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3,\ \underline{\boldsymbol{i}}_4)_{120}\ W^{120}(\ \bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3,\ \bar{\boldsymbol{k}}_4) \equiv 0.$$

Другими словами, *сущность двумерной евклидовой плоскости состоит в наличии таких отношений между двумя 4-криптоточечными кортами* $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3\ \underline{\boldsymbol{i}}_4\ |$ *и* $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \bar{\boldsymbol{k}}_4\ \rangle$, *при которых имеет место физическая структура рода:*

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4}(\overset{2}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{2}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = -s(\bar{\boldsymbol{k}}) + (\underline{\boldsymbol{i}})x(\bar{\boldsymbol{k}}) + y(\underline{\boldsymbol{i}})y(\bar{\boldsymbol{k}}) - s(\underline{\boldsymbol{i}})$$

или

$$\mathcal{K}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4}(\ell^2) \equiv 0$$

$$\ell^2_{\underline{i}\bar{k}} = (x_{\,\underline{i}} - x_{\,\bar{k}})^2 + (y_{\,\underline{i}} - y_{\,\bar{k}})^2.$$

- Трёхмерная евклидова геометрия.

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством ковариантных криптоточек $\underline{\mathfrak{M}}_3$ и множеством контравариантных криптоточек $\overline{\mathfrak{M}}_3$, является “скалярное произведение двух криптоточек”:

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = s(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + x(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,x(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + y(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,y(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + z(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,z(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,[\,x(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,)^2 + y(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,)^2 + z(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,)^2\,] + x(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)\,x(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + y(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)\,y(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + z(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)\,z(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) -$$

$$-\frac{1}{2}\,[\,x(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)^2 + y(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)^2 + z(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)^2\,] =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\left[\,(x(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - x(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))^2 + (y(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - y(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))^2 + (z(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - z(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))^2\,\right] = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{\bar{i}\,\bar{k}}\,.$$

2. Каждая ковариантная криптоточка $\underline{\boldsymbol{i}}$ характеризуется трёхмерной ковариантной матрицей-строкой:

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1;\ x(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ y(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ z(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,);\ \ s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\Big)\,.$$

Каждая контравариантная криптоточка $\bar{\boldsymbol{k}}$ характеризуется трёхмерной контравариантной матрицей-столбцом:

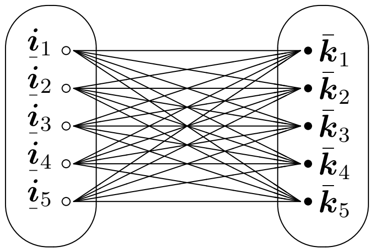
$$\bar{\boldsymbol{k}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ x(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ y(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ z(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Таким образом, $w_{\underline{i}\bar{k}}$ представляет собой произведение двух матриц, одна из которых (матрица-строка) характеризует криптоточку $\underline{\boldsymbol{i}}$, а другая (матрица-столбец) – криптоточку $\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = \Big(1;\ x(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ y(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ z(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,);\ \ s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\Big) \cdot \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ x(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ y(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ z(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\,, \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= s(\bar{\boldsymbol{k}}) + x(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,x(\bar{\boldsymbol{k}}) + y(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,y(\bar{\boldsymbol{k}}) + z(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,z(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,).$$

4. Фундаментальный закон трёхмерной евклидовой геометрии как **сакральное отношение** между левым 5-криптоточечным кортом $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3\ \underline{\boldsymbol{i}}_4\ \underline{\boldsymbol{i}}_5 \mid$ и правым 5-криптоточечным кортом $\mid \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \bar{\boldsymbol{k}}_4\ \bar{\boldsymbol{k}}_5 \,\rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$$\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3\ \underline{\boldsymbol{i}}_4\ \underline{\boldsymbol{i}}_5 \mid \qquad \mid \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \bar{\boldsymbol{k}}_4\ \bar{\boldsymbol{k}}_5 \,\rangle$$

5. Фундаментальный закон в сакрально-инвариантной форме, лежащий в основании трёхмерной евклидовой геометрии, формулируется следующим образом:

для любых пяти ковариантных криптоточек $\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\boldsymbol{i}}_3,\ \underline{\boldsymbol{i}}_4,\ \underline{\boldsymbol{i}}_5 \in \underline{\mathfrak{M}}$ и любых пяти контравариантных криптоточек $\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2,\ \bar{\boldsymbol{k}}_3,\ \bar{\boldsymbol{k}}_4,\ \bar{\boldsymbol{k}}_5 \in \overline{\mathfrak{M}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{4}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4\underline{i}_5;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4\bar{k}_5}(\overset{3}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & w_{\underline{i}_1\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_4} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_5} \\ -1 & w_{\underline{i}_2\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_4} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_5} \\ -1 & w_{\underline{i}_3\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_4} & w_{\underline{i}_3\bar{k}_5} \\ -1 & w_{\underline{i}_4\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_4\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_4\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_4\bar{k}_4} & w_{\underline{i}_4\bar{k}_5} \\ -1 & w_{\underline{i}_5\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_5\bar{k}_2} & w_{\underline{i}_5\bar{k}_3} & w_{\underline{i}_5\bar{k}_4} & w_{\underline{i}_5\bar{k}_5} \end{vmatrix} \equiv 0}$$

или

$$\mathcal{K}_{\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3\bar{i}_4\bar{i}_5;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_3\bar{\boldsymbol{k}}_4\bar{\boldsymbol{k}}_5}(\ell^2) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{\boldsymbol{k}}_1} & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2} & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{\boldsymbol{k}}_3} & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{\boldsymbol{k}}_4} & \ell^2_{\bar{i}_1\bar{\boldsymbol{k}}_5} \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_2\bar{\boldsymbol{k}}_1} & \ell^2_{\bar{i}_2\bar{\boldsymbol{k}}_2} & \ell^2_{\bar{i}_2\bar{\boldsymbol{k}}_3} & \ell^2_{\bar{i}_2\bar{\boldsymbol{k}}_4} & \ell^2_{\bar{i}_2\bar{\boldsymbol{k}}_5} \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_3\bar{\boldsymbol{k}}_1} & \ell^2_{\bar{i}_3\bar{\boldsymbol{k}}_2} & \ell^2_{\bar{i}_3\bar{\boldsymbol{k}}_3} & \ell^2_{\bar{i}_3\bar{\boldsymbol{k}}_4} & \ell^2_{\bar{i}_3\bar{\boldsymbol{k}}_5} \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_4\bar{\boldsymbol{k}}_1} & \ell^2_{\bar{i}_4\bar{\boldsymbol{k}}_2} & \ell^2_{\bar{i}_4\bar{\boldsymbol{k}}_3} & \ell^2_{\bar{i}_4\bar{\boldsymbol{k}}_4} & \ell^2_{\bar{i}_4\bar{\boldsymbol{k}}_5} \\ -1 & \ell^2_{\bar{i}_5\bar{\boldsymbol{k}}_1} & \ell^2_{\bar{i}_5\bar{\boldsymbol{k}}_2} & \ell^2_{\bar{i}_5\bar{\boldsymbol{k}}_3} & \ell^2_{\bar{i}_5\bar{\boldsymbol{k}}_4} & \ell^2_{\bar{i}_5\bar{\boldsymbol{k}}_5} \end{vmatrix} \equiv 0$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{4}{\mathbb{K}}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4\underline{i}_5;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4\bar{k}_5}(\overset{3}{w}) = \mathbb{X}(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\underline{\boldsymbol{i}}_2,\underline{\boldsymbol{i}}_3,\underline{\boldsymbol{i}}_4,\underline{\boldsymbol{i}}_5)_{1230} \cdot \mathbb{X}^{1230}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\bar{\boldsymbol{k}}_2,\bar{\boldsymbol{k}}_3,\bar{\boldsymbol{k}}_4\bar{\boldsymbol{k}}_5).$$

7. Ковариантная координатная матрица левого 5-криптоточечного корта $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\, \underline{\boldsymbol{i}}_2\, \underline{\boldsymbol{i}}_3\, \underline{\boldsymbol{i}}_4\, \underline{\boldsymbol{i}}_5 \,|$:

$$\mathbb{X}(\, \underline{\boldsymbol{i}}_1,\underline{\boldsymbol{i}}_2,\underline{\boldsymbol{i}}_3,\underline{\boldsymbol{i}}_4,\underline{\boldsymbol{i}}_5)_{1230} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & 0 & -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}_1) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & 0 & -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}_2) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & 0 & -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}_3) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & 0 & -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}_4) \\ -1 & x(\underline{\boldsymbol{i}}_5) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_5) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_5) & 0 & -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}_5) \end{pmatrix},$$

где $s(\underline{\boldsymbol{i}}) = -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}) = -\frac{1}{2}\{x^2(\underline{\boldsymbol{i}}) + y^2(\underline{\boldsymbol{i}}) + z^2(\underline{\boldsymbol{i}})\}$ — “скрытые” параметры.

8. Контравариантная координатная матрица правого 5-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\, \bar{\boldsymbol{k}}_2\, \bar{\boldsymbol{k}}_3\, \bar{\boldsymbol{k}}_4\, \bar{\boldsymbol{k}}_5 \,\rangle$:

$$\mathbb{X}^{1230}(\, \bar{\boldsymbol{k}}_1,\bar{\boldsymbol{k}}_2,\bar{\boldsymbol{k}}_3,\bar{\boldsymbol{k}}_4,\bar{\boldsymbol{k}}_5) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & \frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & \frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & \frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}_4) & \frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}_5) \\ 0 & x(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_4) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_5) \\ 0 & y(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_4) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_5) \\ 0 & z(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & z(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & z(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & z(\bar{\boldsymbol{k}}_4) & z(\bar{\boldsymbol{k}}_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $s(\bar{\boldsymbol{k}}) = -\frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}) = -\frac{1}{2}\{x^2(\bar{\boldsymbol{k}}) + y^2(\bar{\boldsymbol{k}}) + z^2(\bar{\boldsymbol{k}})\}$ — “скрытые” параметры.

9. Ковариантный объём левого 5-криптоточечного корта $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\, \underline{\boldsymbol{i}}_2\, \underline{\boldsymbol{i}}_3\, \underline{\boldsymbol{i}}_4\, \underline{\boldsymbol{i}}_5 \,|$

$$W(\, \underline{\boldsymbol{i}}_1,\underline{\boldsymbol{i}}_2,\underline{\boldsymbol{i}}_3,\underline{\boldsymbol{i}}_4,\underline{\boldsymbol{i}}_5)_{1230} = \begin{vmatrix} x(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_3) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_4) & 0 & 1 \\ x(\underline{\boldsymbol{i}}_5) & y(\underline{\boldsymbol{i}}_5) & z(\underline{\boldsymbol{i}}_5) & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

10. Контравариантный объём правого 5-криптоточечного корта $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\, \bar{\boldsymbol{k}}_2\, \bar{\boldsymbol{k}}_3\, \bar{\boldsymbol{k}}_4\, \bar{\boldsymbol{k}}_5 \,\rangle$

$$W^{1230}(\, \bar{\boldsymbol{k}}_1,\bar{\boldsymbol{k}}_2,\bar{\boldsymbol{k}}_3,\bar{\boldsymbol{k}}_4,\bar{\boldsymbol{k}}_5) = \begin{vmatrix} x(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_4) & x(\bar{\boldsymbol{k}}_5) \\ y(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_4) & y(\bar{\boldsymbol{k}}_5) \\ z(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & z(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & z(\bar{\boldsymbol{k}}_3) & z(\bar{\boldsymbol{k}}_4) & z(\bar{\boldsymbol{k}}_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

11. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{4}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2\underline{\boldsymbol{i}}_3\underline{\boldsymbol{i}}_4\underline{\boldsymbol{i}}_5;\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2\bar{\boldsymbol{k}}_3\bar{\boldsymbol{k}}_4\bar{\boldsymbol{k}}_5}(\overset{3}{w}) = W(\underline{\boldsymbol{i}}_1,\underline{\boldsymbol{i}}_2,\underline{\boldsymbol{i}}_3,\underline{\boldsymbol{i}}_4,\underline{\boldsymbol{i}}_5)_{1230}\ W^{1230}(\bar{\boldsymbol{k}}_1,\bar{\boldsymbol{k}}_2,\bar{\boldsymbol{k}}_3,\bar{\boldsymbol{k}}_4,\bar{\boldsymbol{k}}_5) \equiv 0$$

Другими словами, *сущность трёхмерного евклидова пространства состоит в наличии таких отношений между двумя 5-криптоточечными кортами* $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \underline{\boldsymbol{i}}_3\ \underline{\boldsymbol{i}}_4\ \underline{\boldsymbol{i}}_5 \mid\ u\ \mid \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \bar{\boldsymbol{k}}_3\ \bar{\boldsymbol{k}}_4\ \bar{\boldsymbol{k}}_5 \rangle$, *при которых имеет место физическая структура рода:*

$$\overset{4}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4\underline{i}_5;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4\bar{k}_5}(\overset{3}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{3}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + x(\underline{\boldsymbol{i}})\,x(\bar{\boldsymbol{k}}) + y(\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,y(\,\bar{\boldsymbol{k}}) + z(\underline{\boldsymbol{i}}\,)\,z(\,\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\underline{\boldsymbol{i}})$$

или

$$\mathcal{K}_{\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3\bar{i}_4\bar{i}_5;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4\bar{k}_5}(\ell^2) \equiv 0$$

$$\ell^2_{\bar{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = (x_{\,\bar{\boldsymbol{i}}} - x_{\,\bar{\boldsymbol{k}}})^2 + (y_{\,\bar{\boldsymbol{i}}} - y_{\,\bar{\boldsymbol{k}}})^2 + (z_{\,\bar{\boldsymbol{i}}} - z_{\,\bar{\boldsymbol{k}}})^2$$

- n-мерная евклидова геометрия

1. **Репрезентатором**, описывающим отношения между множеством ковариантных криптоточек $\underline{\mathfrak{M}}_n$ и множеством контравариантных криптоточек $\overline{\mathfrak{M}}_n$, является “скалярное произведение двух криптоточек” $w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}}$

$$w_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = s(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + g_{\mu\nu}x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)\,x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,)\,x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + g_{\mu\nu}x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)\,x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,)\,x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) =$$
$$= -\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\left((x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))\right)\left((x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))\right) = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{\bar{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}}$$
$$\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$$

2. Каждая ковариантная криптоточка $\underline{\boldsymbol{i}}$ характеризуется n-мерной ковариантной матрицей-строкой:

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1;\ x_1(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ x_2(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ \ldots x_n(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,);\ s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\Big)$$

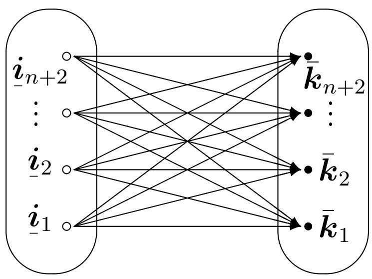
Каждая контравариантная криптоточка $\bar{\boldsymbol{k}}$ характеризуется n-мерной контравариантной матрицей-столбцом:

$$\bar{\boldsymbol{k}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\, , \\ x^1(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ x^2(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \ldots\ldots \\ x^n(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\, , \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Таким образом, $w_{\underline{i}\bar{k}}$ представляет собой произведение двух матриц, одна из которых (матрица-строка) характеризует криптоточку $\underline{\boldsymbol{i}}$, а другая (матрица-столбец) – криптоточку $\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$w_{\underline{i}\bar{k}} = \Big(1;\ x_1(\underline{\boldsymbol{i}}), x_2(\underline{\boldsymbol{i}}), \ldots, x_n(\underline{\boldsymbol{i}});\ s(\underline{\boldsymbol{i}})\Big) \cdot \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\, , \\ x^1(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ x^2(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdots\cdots \\ x^n(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \cdot\, , \\ 1 \end{pmatrix} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + x_\mu(\underline{\boldsymbol{i}})\, x^\mu(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\bar{\boldsymbol{i}}).$$

4. Фундаментальный закон n -мерной евклидовой геометрии как **сакральное отношение** между левым $n+2$ -криптоточечным кортом $\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2 \ldots \underline{\boldsymbol{i}}_{n+2} \,|$ и правым $n+2$ -криптоточечным кортом $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2 \ldots \bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}\, \rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



$\langle\, \underline{\boldsymbol{i}}_1\ \underline{\boldsymbol{i}}_2\ \ldots\ \underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}\,|\qquad |\,\bar{\boldsymbol{k}}_1\ \bar{\boldsymbol{k}}_2\ \ldots\ \bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}\,\rangle$

5. Фундаментальный закон n -мерной евклидовой геометрии в сакрально-инвариантной форме формулируется следующим образом:

для любых $n+2$ ковариантных криптоточек $\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2, \ldots, \underline{\boldsymbol{i}}_{n+2} \in \underline{\mathfrak{M}}$ и любых $n+2$ контравариантных криптоточек $\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{k}}_{n+2} \in \overline{\mathfrak{M}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\boxed{\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\ldots\underline{i}_{n+2};\bar{k}_1\bar{k}_2\ldots\bar{k}_{n+2}}(\overset{n}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & w_{\underline{i}_1\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_1\bar{k}_2} & \ldots & w_{\underline{i}_1\bar{k}_{n+2}} \\ -1 & w_{\underline{i}_2\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_2\bar{k}_2} & \ldots & w_{\underline{i}_2\bar{k}_{n+2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & w_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_1} & w_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_2} & \ldots & w_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_{n+2}} \end{vmatrix} \equiv 0}$$

или

$$\mathcal{K}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\ldots\underline{i}_{n+2};\bar{k}_1\bar{k}_2\ldots\bar{k}_{n+2}}(\ell^2) = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\bar{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\bar{k}_2} & \ldots & \ell^2_{\underline{i}_1\bar{k}_{n+2}} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\bar{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\bar{k}_2} & \ldots & \ell^2_{\underline{i}_2\bar{k}_{n+2}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_2} & \ldots & \ell^2_{\underline{i}_{n+2}\bar{k}_{n+2}} \end{vmatrix} \equiv 0$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{n+1}{\mathbb{K}}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\ldots\underline{i}_{n+2};\bar{k}_1\bar{k}_2\ldots\bar{k}_{n+2}}(\overset{n}{w}) = \mathbb{X}(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\,\underline{\boldsymbol{i}}_2,\ldots,\,\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2})_{12\ldots n0}\cdot\mathbb{X}^{12\ldots n0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\,\bar{\boldsymbol{k}}_2,\ldots,\,\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2})$$

7. Ковариантная координатная матрица левого $n{+}2$ -криптоточечного корта $\langle\,\underline{\boldsymbol{i}}_1\,\underline{\boldsymbol{i}}_2\ldots\,\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}|$:

$$\mathbb{X}(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\,\underline{\boldsymbol{i}}_2,\ldots,\,\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2})_{12\ldots no} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_1(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & x_2(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & \ldots & x_n(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & 0 & -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}_1) \\ -1 & x_1(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & x_2(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & \ldots & x_n(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & 0 & -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}_2) \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ -1 & x_1(\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}) & x_2(\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}) & \ldots & x_n(\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}) & 0 & -\frac{1}{2}r^2(\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}) \end{pmatrix},$$

где $s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) = -\frac{1}{2}r^2(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) = -\frac{1}{2}\{x_1^2(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) + x_2^2(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) + \ldots + x_n^2(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\}$ – “скрытые” параметры.

8. Ковариантный объём левого $n{+}2$ -криптоточечного корта $\langle\,\underline{\boldsymbol{i}}_1\,\underline{\boldsymbol{i}}_2\ldots\,\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}|$:

$$W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\,\underline{\boldsymbol{i}}_2,\ldots,\,\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2})_{12\ldots no} = \begin{vmatrix} x_1(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & x_2(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & \ldots & x_n(\underline{\boldsymbol{i}}_1) & 0 & 1 \\ x_1(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & x_2(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & \ldots & x_n(\underline{\boldsymbol{i}}_2) & 0 & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ x_1(\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}) & x_2(\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}) & \ldots & x_n(\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}) & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

9. Контравариантная координатная матрица правого $n+2$ -криптоточечного корта $|\,\bar{\boldsymbol{k}}_1\,\bar{\boldsymbol{k}}_2\ldots\,\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}\,\rangle$:

$$\mathbb{X}^{12\ldots n0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\,\bar{\boldsymbol{k}}_2,\ldots,\,\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & \frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & \ldots & \frac{1}{2}r^2(\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) \\ 0 & x^1(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x^1(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & \ldots & x^1(\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) \\ 0 & x^2(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x^2(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & \ldots & x^2(\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x^n(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & \ldots & x^n(\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

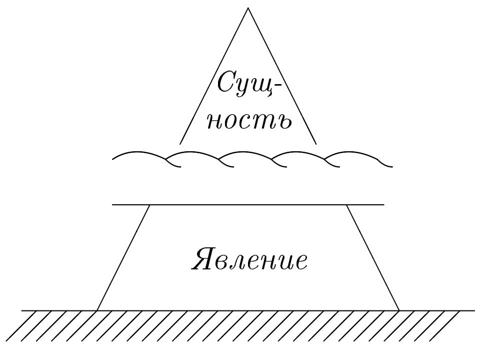
где $s(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) = -\frac{1}{2}r^2(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) = -\frac{1}{2}\{x^{1^2}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + x^{2^2}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,) + \ldots + x^{n2}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,)\}$ – “скрытые” параметры.

10. Контравариантный объём правого $n+2$-криптоточечного корта $|\,\bar{\boldsymbol{k}}_1\,\bar{\boldsymbol{k}}_2 \ldots \bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}\,\rangle$:

$$W^{12\ldots n0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2, \ldots,\ \bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) = \begin{vmatrix} x_1(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x_1(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & \ldots & x_1(\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) \\ x_2(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x_2(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & \ldots & x_2(\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_n(\bar{\boldsymbol{k}}_1) & x_n(\bar{\boldsymbol{k}}_2) & \ldots & x_n(\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

11. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2\ldots\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2};\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2\ldots\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}}(\overset{n}{w}) = W(\,\underline{\boldsymbol{i}}_1,\ \underline{\boldsymbol{i}}_2, \ldots,\ \underline{\boldsymbol{i}}_{n+2})_{12\ldots n0}\ W^{12\ldots n0}(\,\bar{\boldsymbol{k}}_1,\ \bar{\boldsymbol{k}}_2, \ldots\ \bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}) \equiv 0.$$



$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2\ldots\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2};\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2\ldots\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

$$\mathcal{K}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2\ldots\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2};\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2\ldots\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}}(\overset{n}{\ell^2}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{\ell}{}^2_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = (x_\mu(\underline{\boldsymbol{i}}) - x_\mu(\bar{\boldsymbol{k}}))(x^\mu(\underline{\boldsymbol{i}}) - x^\mu(\bar{\boldsymbol{k}}))$$

Рис. 3. Явление и сущность n-мерного евклидова пространства.

Другими словами, *сущность n-мерного евклидова пространства состоит в наличии таких отношений между двумя $n+2$-криптоточечными кортами* $\langle\ \underline{\boldsymbol{i}}_1, \ldots,\ \underline{\boldsymbol{i}}_{n+2}\,|$ *и* $|\ \bar{\boldsymbol{k}}_1, \ldots,\ \bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}\,\rangle$, *при которых имеет место физическая структура рода:*

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2\ldots\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2};\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2\ldots\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = s(\bar{\boldsymbol{k}}) + x_\mu(\underline{\boldsymbol{i}})x^\mu(\bar{\boldsymbol{k}}) + s(\underline{\boldsymbol{i}})$$

$$s(\underline{\boldsymbol{i}}) = -\frac{1}{2}\,x_\mu(\underline{\boldsymbol{i}})\,x^\mu(\underline{\boldsymbol{i}})$$

или

$$\mathcal{K}_{\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2\ldots\underline{\boldsymbol{i}}_{n+2};\bar{\boldsymbol{k}}_1\bar{\boldsymbol{k}}_2\ldots\bar{\boldsymbol{k}}_{n+2}}(\overset{n}{\ell^2}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{\ell}{}^2_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = (x_\mu(\underline{\boldsymbol{i}}) - x_\mu(\bar{\boldsymbol{k}}))(x^\mu(\underline{\boldsymbol{i}}) - x^\mu(\bar{\boldsymbol{k}})) \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n$$

Подведём итоги

Из всего сказанного следует, что

1. **Обычная n-мерная евклидова геометрия – это n-мерная сакральная криптоточечная геометрия с дважды неоднородым симметрическим и рефлексивным репрезентатором.**

2. В её основании лежат два множества одной и той же природы:
множество левых ковариантных субэйдосов

$$\underline{\mathfrak{M}}_n = \{\, \underline{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{1}}\,,\ \underline{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{2}}\,, \ldots\}$$

и множество правых контравариантных субэйдосов

$$\overline{\mathfrak{M}}_n = \{\, \bar{\boldsymbol{k}}_{\,1},\ \bar{\boldsymbol{k}}_{\,2}, \ldots\}.$$

3. Ковариантный субэйдос представляет собой ковариантную криптоточку

$$\underline{\boldsymbol{i}} \longleftrightarrow \Big(1;\ x_1(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ x_2(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\ \ldots\ x_n(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,);\ s(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,)\Big)$$

с гипергеометрическим зарядом $p=1$ и криптометрическим зарядом $\mu=1$.

Контравариантный субэйдос представляет собой контравариантную криптоточку

$$\bar{\boldsymbol{k}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ ., \\ x^1(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ x^2(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ \ldots\ldots \\ x^n(\bar{\boldsymbol{k}}) \\ ., \\ 1 \end{pmatrix}$$

с гипергеометрическим зарядом $q=1$ и криптометрическим зарядом $\nu=1$.

4. Отношение между левыми и правыми криптоточками характеризуется репрезентатором

$$\overset{n}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = s^0(\bar{\boldsymbol{k}}) + x_\mu(\underline{\boldsymbol{i}})\, x^\mu(\bar{\boldsymbol{k}}) + s_0(\underline{\boldsymbol{i}}).$$

5. Дополнительное требование симметрии $\overset{n}{w}_{\underline{\boldsymbol{i}}\bar{\boldsymbol{k}}} = \overset{n}{w}_{\underline{\boldsymbol{k}}\bar{\boldsymbol{i}}}$ накладывает следующее ограничение на вид скрытых параметров:

$$s^0(\bar{\boldsymbol{i}}) = s_0(\underline{\boldsymbol{i}}) = s(\bar{\boldsymbol{i}})$$

$$s^0(\bar{\boldsymbol{k}}) = s_0(\underline{\boldsymbol{k}}) = s(\bar{\boldsymbol{k}})$$

и приводит к появлению симметрического метрического тензора $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

$$x(\underline{\boldsymbol{i}}) = g_{\mu\nu} x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{i}})$$

6. Дополнительное требование рефлексии $\overset{n}{w}_{\underline{i}\bar{i}} \equiv 0$ позволяет найти конкретный вид скрытых параметров:

$$s(\underline{\boldsymbol{i}}) = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{i}}) x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{i}}),$$

$$s(\underline{\boldsymbol{k}}) = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} x^{\mu}(\bar{\boldsymbol{k}}) x^{\nu}(\bar{\boldsymbol{k}}).$$

7. В итоге репрезентатор имеет следующий вид:

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} \big((x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))\big) \big((x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))\big) = -\frac{1}{2} \ell^2_{\bar{i}\bar{k}}\ .$$

8. Таким образом, в рамках сакральной геометрии в результате требования симметрии и рефлексии возникает квадрат расстояния между двумя контравариантными точками

$$\ell^2_{\bar{i}\bar{k}} \ = g_{\mu\nu} \big((x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))\big) \big((x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{i}}\,) - x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol{k}}\,))\big)$$

или двумя соответствующими ковариантными точками

$$\ell^2_{\underline{i}\underline{k}} \ = g^{\mu\nu} \Big((x_{\mu}(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) - x_{\mu}(\,\underline{\boldsymbol{k}}\,))\Big) \Big((x_{\nu}(\,\underline{\boldsymbol{i}}\,) - x_{\nu}(\,\underline{\boldsymbol{k}}\,))\Big)\,.$$

9. После приведения метрического тензора $g_{\mu\nu}$ к диагональному виду получаем для квадрата расстояния следующее выражение:

$$\ell^2_{\underline{i}\underline{k}} \ = \epsilon_1\, (x_1(\underline{\boldsymbol{i}}) - x_1(\underline{\boldsymbol{k}}))^2 + \ldots + \epsilon_n\, (x_n(\underline{\boldsymbol{i}}) - x_n(\underline{\boldsymbol{k}}))^2,$$

где $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = \pm 1$.

Сакральная формулировка евклидовой геометрии

$$\boxed{\overset{n+1}{\boldsymbol{K}}{}^{11}(\overset{n}{\boldsymbol{w}}{}^{s,0}) \equiv \boldsymbol{0}}$$

								$\iddots$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\boxed{\overset{4}{K}{}^{11}}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\boxed{\overset{3}{K}{}^{11}}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\boxed{\overset{2}{K}{}^{11}}$					
		$\overset{2}{K}{}^{00}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\boxed{\overset{1}{K}{}^{11}}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Места физических структур, выражающих сущности 0-мерных, 1-мерных, 2-мерных, 3-мерных евклидовых пространств, среди всех возможных физических структур.

Заметки на полях

Заметим, что из равенства

$$\overset{n}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol i}_1\underline{\boldsymbol i}_2\ldots\underline{\boldsymbol i}_{n+1};\bar{\boldsymbol k}_1\bar{\boldsymbol k}_2\ldots\bar{\boldsymbol k}_{n+1}}(\overset{n}{w}) = W(\,\underline{\boldsymbol i}_1,\ \underline{\boldsymbol i}_2,\ldots,\ \underline{\boldsymbol i}_{n+1})_{12\ldots n}\,W^{12\ldots n}(\,\bar{\boldsymbol k}_1,\ \bar{\boldsymbol k}_2,\ldots\ \bar{\boldsymbol k}_{n+1})$$

вытекает следующее важное сакральное тождество:

$$\overset{n}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol i}_1\underline{\boldsymbol i}_2\ldots\underline{\boldsymbol i}_{n+1};\bar{\boldsymbol k}_1\bar{\boldsymbol k}_2\ldots\bar{\boldsymbol k}_{n+1}}(\overset{n}{w}) =$$

$$=\overset{n}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol i}_1\underline{\boldsymbol i}_2\ldots\underline{\boldsymbol i}_{n+1};\bar{\boldsymbol q}_1\bar{\boldsymbol q}_2\ldots\bar{\boldsymbol q}_{n+1}}(\overset{n}{w})\ \ \overset{n}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol p}_1\underline{\boldsymbol p}_2\ldots\underline{\boldsymbol p}_{n+1};\bar{\boldsymbol q}_1\bar{\boldsymbol q}_2\ldots\bar{\boldsymbol q}_{n+1}}(\overset{n}{w})^{-1}\ \ \overset{n}{K}{}^{11}_{\underline{\boldsymbol p}_1\underline{\boldsymbol p}_2\ldots\underline{\boldsymbol p}_{n+1};\bar{\boldsymbol k}_1\bar{\boldsymbol k}_2\ldots\bar{\boldsymbol k}_{n+1}}(\overset{n}{w}),$$

где

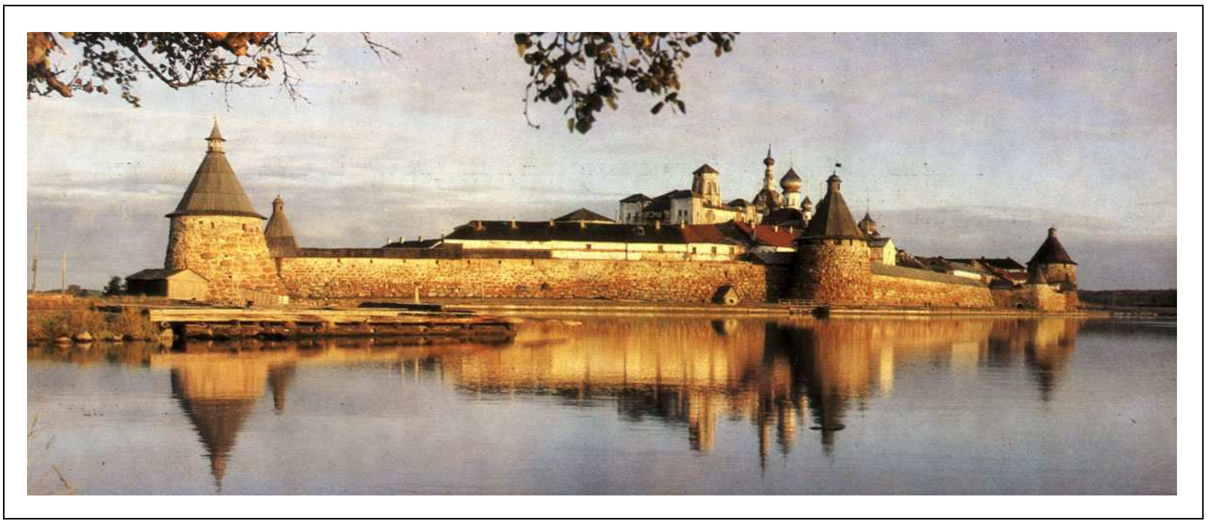
$$\overset{n}{w}_{\underline{\boldsymbol i}\bar{\boldsymbol k}} = s(\,\bar{\boldsymbol k}\,) + g_{\mu\nu}x^{\mu}(\,\bar{\boldsymbol i}\,)x^{\nu}(\,\bar{\boldsymbol k}\,) + s(\,\underline{\boldsymbol i}\,)$$

$$s(\underline{\boldsymbol i}) = -\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}x^{\mu}(\bar{\boldsymbol i})x^{\nu}(\bar{\boldsymbol i}),$$

$$s(\underline{\boldsymbol k}) = -\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}x^{\mu}(\bar{\boldsymbol k})x^{\nu}(\bar{\boldsymbol k}).$$

Трудно назвать выдающегося геометра, который не отдал бы дани основаниям геометрии. Декарт, Лейбниц, Лагранж, Лежандр, Фурье, Гаусс, Коши, Ампер – все эти творцы новой математики – люди, чрезвычайно различные по своим научным, философским, политическим установкам, – все размышляли об основаниях геометрии, старались, по выражению Н. И. Лобачевского, пролить свет на те "тёмные понятия, с которых, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию". Следует заметить при этом, что и объём, и содержание геометрии, а может быть и всей математики, глубоко изменились под влиянием идей, которые принесли с собой размышления над её основаниями, – что эти идеи положили чётко выраженную печать на всё построение теоретического естествознания.

В.Ф. Каган[76]



Соловецкий кремль

[76] *Каган В.Ф.* Основания геометрии. Часть I. М.-Л.: Наука, 1949. С. 16 - 17.

Пример 10. Пространства постоянной кривизны

n -мерные пространства постоянной кривизны являются многообразиями, вложенными в $n+1$ -мерные линейные пространства.

n -мерное пространство постоянной положительной кривизны возникает на основе $n+1$ -мерного линейного пространства ${}^{n+1}\mathbb{R}_{n+1}$ с репрезентатором

$$\overset{n+1}{a}_{ik} = x(i)_1 x(k)_1 + \ldots + x(i)_n x(k)_n + x(i)_{n+1} x(k)_{n+1}$$

при наложении дополнительного условия

$$\overset{n+1}{a}_{ii} = R^2.$$

Таким образом, n -мерное пространство постоянной положительной кривизны S_n^+ (n -мерная эллиптическая геометрия Римана) реализуется на сфере вещественного радиуса R, вложенной в $n+1$ -мерное линейное пространство ${}^{n+1}\mathbb{R}_{n+1}$ с сигнатурой $(\underbrace{+\ldots++}_{n+1})$,

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = R^2.$$

В случае пространства постоянной положительной кривизны репрезентатор a_{ik}, равный скалярному произведению двух векторов $\vec{i}$ и $\vec{k}$, очевидным образом связаны с расстоянием ℓ_{ik}^+ между двумя точками i и k, лежащими на сфере радиуса R:

$$a_{ik} = R^2 \cos\varphi_{ik} = R^2 \cos\frac{\ell_{ik}^+}{R}.$$

Таким образом, в этом случае имеем следующее выражение для расстояния ℓ_{ik}^+ через декартовы координаты точек i и k:

$$R^2 \cos\frac{\ell_{ik}^+}{R} = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{R^2 - x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{R^2 - x(k)_\mu x^\mu(k)}, \tag{1}$$

где $x(i)_\mu x^\mu(k) = x(i)_1 x(k)_1 + \ldots + x(i)_n x^\mu(k)_n$.
Введём понятие кривизны как величины, обратной квадрату радиуса сферы R,

$$K = \frac{1}{R^2}$$

и перепишем соотношение (1) в виде:

$$\frac{1}{K}\cos\sqrt{K}\ell_{ik}^+ = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{\frac{1}{K} - x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{\frac{1}{K} - x(k)_\mu x^\mu(k)}.$$

Чтобы перейти к пространству постоянной отрицательной кривизны, заменим знак кривизны K на обратный $(K \to -K)$. Получим:

$$\frac{1}{-K}\cos\sqrt{-K}\ell_{ik}^- = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{-\frac{1}{K} - x(i)_\mu x^\mu(i)}\sqrt{-\frac{1}{K} - x(k)_\mu x^\mu(k)}$$

или

$$-\frac{1}{K}\cos i\sqrt{K}\ell^{-}_{ik} = x(i)_\mu x^\mu(k) - \sqrt{\frac{1}{K} + x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{\frac{1}{K} + x(k)_\mu x^\mu(k)}.$$

Замечая, что $\cos i\varphi = \operatorname{ch}\varphi$, и переходя от K к R^2, получим выражение для расстояния ℓ^{-}_{ik} между двумя точками i и k через их декартовы координаты в случае пространства постоянной отрицательной кривизны:

$$-R^2 \operatorname{ch}\frac{\ell^{-}_{ik}}{R} = x(i)_\mu x^\mu(k) - \sqrt{R^2 + x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{R^2 + x(k)_\mu x^\mu(k)}. \qquad (2)$$

Полагая в (2) $i = k$, получим уравнение сферы мнимого радиуса, вложенной в линейное пространство ${}^n\mathbb{R}_{n+1}$ с сигнатурой $(\underbrace{+\ldots+-}_{n+1})$:

$$-R^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2,$$

на которой реализуется n-мерное пространство постоянной отрицательной кривизны S^{-}_n (n-мерная гиперболическая геометрия Лобачевского).

Рассмотрим несколько конкретных примеров:

А. Пространства постоянной положительной кривизны (Эллиптические пространства Римана)

1. *Одномерное пространство постоянной положительной кривизны*

Одномерное пространство постоянной положительной кривизны S^{+}_1 вложено в двумерное линейное пространство $\mathbb{R}^2$ с репрезентатором

$$\overset{2}{a}_{ik} = x_i x_k + y_i y_k$$

и верификатором $\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(a)$. Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{2}{a}_{ii} = R^2.$$

Таким образом, пространство S^{+}_1 реализуется на окружности радиуса R:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

вложенной в двумерное линейное пространство $\mathbb{R}^2$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{2}{a}_{ii} = R^2$ репрезентатор $\overset{2}{a}_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{2}{a}_{ik} = R^2 \cos\frac{\ell^{+}_{ik}}{R} = x_i x_k + \sqrt{R^2 - x_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2}.$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ^+_{ik}, измеренные вдоль окружности, между точками i_1, i_2, i_3 с одной стороны и точками k_1, k_2, k_3 — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall i_1, i_2, i_3 \in \underline{\mathfrak{N}} \qquad \forall k_1, k_2, k_3 \in \overline{\mathfrak{M}};$$

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{a}) = R^6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^6 \begin{vmatrix} \cos\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

и в частности –

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;i_1i_2i_3}(\overset{2}{a}) = R^6 \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\ell_{i_1i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1i_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2i_1}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_2i_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3i_2}}{R} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1, i_2, i_3|$ и $|k_1, k_2, k_3\rangle$ приведена на рис. 1

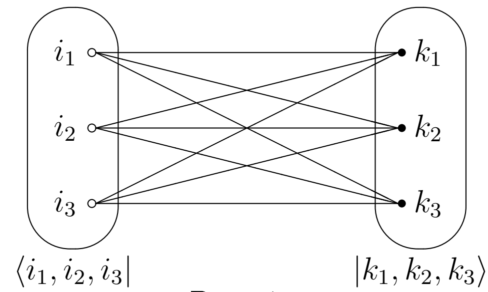


Рис. 1.

Из равенства

$$\cos\frac{\ell^+_{ik}}{R} = \frac{1}{R^2}(x_ix_k + \sqrt{R^2 - x_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2}) \tag{3}$$

получаем квадрат расстояния ds^2 между близкими точками. Так как

$$\cos\frac{\ell^+_{ik}}{R} \approx 1 - \frac{ds^2}{2R^2},$$

то, переписывая соотношение (3) в виде

$$1 - \frac{ds^2}{2R^2} = \frac{1}{R^2}\Big(x(x+dx) + \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{R^2 - (x+dx)^2}\Big),$$

в конце концов получим:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}}. \tag{4}$$

Легко убедиться в том, что

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}} = dx^2 + dy(x)^2 = dx^2 + (d\sqrt{R^2 - x^2})^2.$$

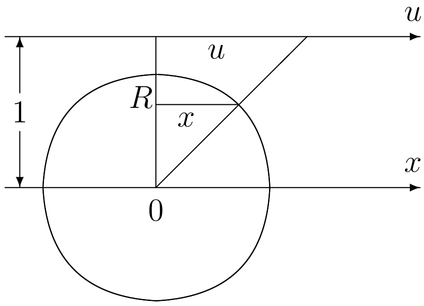


Рис. 2. Модель Кэли.

С помощью центральной проекции перейдём от декартовой координаты x к бельтрамиевой u (см. рис. 2.):

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

и обратно

$$x = R\frac{u}{1+u^2}.$$

В бельтрамиевых координатах метрика (4) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = R^2\frac{du^2}{(1+u^2)^2}}.$$

С помощью стереографической проекции перейдём от декартовой координаты x к координате Пуанкаре ξ (см. рис. 3.):

$$\xi = \frac{x}{R + \sqrt{R^2 - x^2}}$$

и обратно

$$x = R\frac{2\xi}{1+\xi^2}.$$

В координатах Пуанкаре метрика (4) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = R^2\frac{4d\xi^2}{(1+\xi^2)^2}}$$

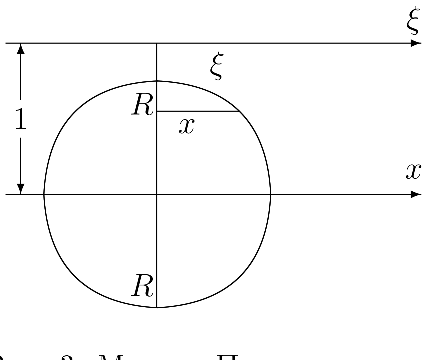


Рис. 3. Модель Пуанкаре.

Итак, имеет место следующая

Сакрально-инвариантная формулировка одномерной эллиптической геометрии Римана

$$\boxed{\overset{3}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3;\; k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{\boldsymbol{a}}) \equiv \mathbf{0}}$$

$$\overset{2}{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ik}} = \boldsymbol{R^2 \cos \frac{\lambda_{ik}}{R} = x_i x_k + \sqrt{R^2 - x_i^2}\,\sqrt{R^2 - x_k^2}}\,.$$

2. *Двумерное пространство постоянной положительной кривизны*

Двумерное пространство постоянной положительной кривизны S_2^+ (двумерная эллиптическая геометрия Римана) вложено в трёхмерное линейное пространство $\mathbb{R}^3$ с репрезентатором

$$\overset{3}{a}_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k$$

и верификатором $\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}(a)$.

Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{3}{a}_{ii} = R^2.$$

Таким образом, пространство S_2^+ реализуется на сфере радиуса R :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

вложенной в трёхмерное линейное пространство $\mathbb{R}^3$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{3}{a}_{ii} = R^2$ репрезентатор $\overset{3}{a}_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{3}{a}_{ik} = R^2 \cos \frac{\ell^+_{ik}}{R} = x_i x_k + y_i y_k + \sqrt{R^2 - x_i^2 - y_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2 - y_k^2}. \tag{5}$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ^+_{ik} , измеренные вдоль сферы между точками $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4$, с одной стороны, и точками $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4$ — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall \underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4 \in \underline{\mathfrak{N}} \qquad \forall \overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4 \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}(\overset{3}{a}) = R^8 \begin{vmatrix} \cos\frac{\ell_{i_1 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2 k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2 k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_4 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4 k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4 k_4}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4; i_1 i_2 i_3 i_4}(\overset{3}{a}) = R^8 \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\ell_{i_1 i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 i_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2 i_1}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_2 i_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2 i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3 i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 i_2}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_3 i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_4 i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4 i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4 i_3}}{R} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$, приведена на рис. 4.

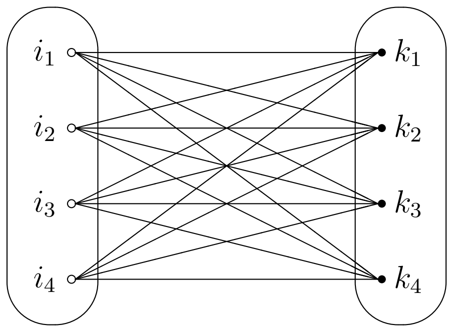


Рис. 4. Сакральная диаграмма отношений между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$.

Из равенства (5) находим метрику в декартовых координатах x и y :

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\Big[(R^2 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (R^2 - x^2)dy^2\Big]}$$

С помощью центральной проекции (см. Рис. 2.) перейдём от декартовых координат x , y к бельтрамиевым u , v :

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad\qquad x = R\frac{u}{1 + u^2 + v^2}$$

и обратно

$$v = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad\qquad y = R\frac{v}{1 + u^2 + v^2}$$

В бельтрамиевых координатах метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}\Big[(1 + v^2)du^2 - 2uvdudv + (1 + u^2)dv^2\Big]}$$

С помощью стереографической проекции (см. рис. 3) перейдём от декартовых координат x , y к изотермическим координатам Пуанкаре ξ , η :

$$\xi = \frac{x}{R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \qquad\qquad x = R\frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2}$$

и обратно

$$\eta = \frac{y}{R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \qquad\qquad y = R\frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2}$$

В изотермических координатах Пуанкаре метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{4R^2}{(1+\xi^2+\eta^2)^2}(d\xi^2+d\eta^2)}$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка двумерной эллиптической геометрии Римана

$$\boxed{\boxed{\overset{4}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4;\ k_1 k_2 k_3 k_4}(\overset{3}{a})\equiv 0}}$$

$$\overset{3}{\boldsymbol{a}}_{ik} = \boldsymbol{R^2\cos\frac{\lambda_{ik}}{R} = x_i x_k + y_i y_k + \sqrt{R^2-x_i^2-y_i^2}\,\sqrt{R^2-x_k^2-y_k^2}}\,.$$

В. Пространства постоянной отрицательной кривизны (Гиперболические геометрии Лобачевского)

1. *Одномерное пространство постоянной отрицательной кривизны*

Одномерное пространство постоянной отрицательной кривизны S_1^- вложено в двумерное линейное пространство ${}^1\mathbb{R}_2$ с репрезентатором

$$\overset{2}{a}_{ik} = x_i x_k - y_i y_k$$

и верификатором $\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(a)$.
Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{2}{a}_{ii}= -R^2$$

Таким образом, пространство S_1^- реализуется на окружности мнимого радиуса iR :

$$x^2 - y^2 = -R^2,$$

вложенной в двумерное линейное пространство ${}^1\mathbb{R}_2$ с сигнатурой $(+-)$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{2}{a}_{ii}= -R^2$, репрезентатор $\overset{2}{a}{}^-_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{2}{a}{}^-_{ik} = -R^2 \operatorname{ch} \frac{\ell^-_{ik}}{R} = x_i x_k - \sqrt{R^2 + x_i^2}\sqrt{R^2 + x_k^2}. \qquad (7)$$

Сакральное тождество, связывающее расстояние ℓ^-_{ik} между точками i_1, i_2, i_3 с одной стороны и точками k_1, k_2, k_3 — с другой, имеет вид:

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{a}) = (-1)^3 R^6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 R^6 \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{a}) == (-1)^3 R^6 \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1 i_2 i_3|$ и $k_1 k_2 k_3\rangle$, приведена на рис. 1.

Из равенства (7) получим квадрат расстояния ds^2 между близкими точками. Так как $\operatorname{ch} \dfrac{\ell^-_{ik}}{R} \approx 1 + \dfrac{ds^2}{2R^2}$, то, переписывая равенство (7) в виде

$$R^2 + ds^2 = \sqrt{R^2 + x^2}\sqrt{R^2 + (x + dx)^2} - x(x + dx),$$

в конце концов получим:

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2}{R^2 + x^2}. \qquad (8)$$

Легко убедиться в том, что

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 + \frac{x^2}{R^2}} = dx^2 - dy(x)^2 = dx^2 - (d\sqrt{R^2 + x^2})^2.$$

Перейдём от декартовой координаты x к бельтрамиевой u :

$$u = \frac{dx^2}{1+\frac{x^2}{R^2}} \quad \text{и обратно} \quad x = R\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

В бельтрамиевых координатах метрика (8) имеет вид:

$$ds^2 = R^2\frac{du^2}{(1-u^2)^2}.$$

Перейдём от декартовой координаты x к координате Пуанкаре ξ :

$$\xi = \frac{x}{R-\sqrt{R^2+x^2}} \quad \text{и обратно} \quad x = R\frac{2\xi}{1-\xi^2}.$$

В координатах Пуанкаре метрика (8) имеет вид:

$$ds^2 = \frac{4R^2d\xi^2}{(1-\xi^2)^2}.$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка одномерной гиперболической геометрии

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{3}{K}}{}^{\mathbf{00}}_{\boldsymbol{i_1i_2i_3;\ k_1k_2k_3}}(\boldsymbol{\overset{2}{a}}) \equiv \mathbf{0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{2}{a}_{ik}} = \ \boldsymbol{-R^2\,\mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ik}}{R} = x_ix_k - \sqrt{R^2-x_i^2}\,\sqrt{R^2-x_k^2}}\,.$$

2. *Двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны*

Двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны S_2^- (двумерная гиперболическая геометрия Лобачевского) вложено в трёхмерное линейное пространство ${}^2\mathbb{R}_3$ с репрезентатором

$$\overset{3}{a}_{ik}= x_ix_k + y_iy_k - z_iz_k$$

и верификатором $\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}(a)$.

Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{3}{a}_{ii} = -R^2.$$

Таким образом, пространство S_2^+ реализуется на сфере мнимого радиуса $i\,R$:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2,$$

вложенной в трёхмерное линейное пространство ${}^2\mathbb{R}_3$ с сигнатурой $(++-)$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{3}{a}_{ii} = -R^2$ репрезентатор $\overset{3}{a}{}^{-}_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{3}{a}_{ik} = -R^2 \operatorname{ch}\frac{\ell^-_{ik}}{R} = x_i x_k + y_i y_k - \sqrt{R^2 + x_i^2 + y_i^2}\,\sqrt{R^2 + x_k^2 + y_k^2}. \tag{5}$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ^-_{ik} , измеренные вдоль сферы мнимого радиуса между точками $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4$ с одной стороны и точками $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4$ — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall \underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4 \in \underline{\mathfrak{N}} \qquad \forall \overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4 \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}\Big(\operatorname{ch}\frac{\ell^-}{R}\Big) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_4}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;i_1i_2i_3i_4}\Big(\operatorname{ch}\frac{\ell^-}{R}\Big) = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_1}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_2}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_3}}{R} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$, приведена на рис. 4

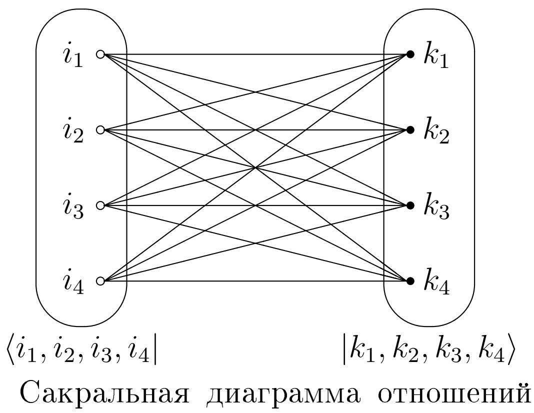


Рис. 4. Сакральная диаграмма отношений между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$.

Из равенства (5) находим метрику в декартовых координатах x и y:

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{R^2+x^2+y^2}\Big[(R^2+y^2)dx^2 - 2xydxdy + (R^2+x^2)dy^2\Big]}$$

С помощью центральной проекции (см. Рис. 2.) перейдём от декартовых координат x, y к бельтрамиевым u, v:

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad\qquad x = R\frac{u}{1-u^2-v^2}$$

и обратно

$$v = \frac{y}{\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad\qquad y = R\frac{v}{1-u^2-v^2}$$

В бельтрамиевых координатах метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{R^2}{(1-u^2-v^2)^2}\Big[(1-v^2)du^2 + 2uvdudv + (1-u^2)dv^2\Big]}$$

С помощью стереографической проекции (см. рис. 3) перейдём от декартовых координат x, y к изотермическим координатам Пуанкаре ξ, η:

$$\xi = \frac{x}{R+\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad\qquad x = R\frac{2\xi}{1-\xi^2-\eta^2}$$

и обратно

$$\eta = \frac{y}{R+\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad\qquad y = R\frac{2\eta}{1-\xi^2-\eta^2}$$

В изотермических координатах Пуанкаре метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{4R^2}{(1-\xi^2-\eta^2)^2}(d\xi^2+d\eta^2)}$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка двумерной геометрии Лобачевского

$$\boxed{\boxed{\overset{4}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{00}}_{i_1i_2i_3i_4;\ k_1k_2k_3k_4}(\overset{3}{\boldsymbol{a}}) \equiv \mathbf{0}}}$$

$$\boldsymbol{\overset{3}{a}_{ik} = -\operatorname{ch}\frac{\lambda_{ik}}{R} = x_ix_k + y_iy_k - \sqrt{R^2 + x_i^2 + y_i^2}\,\sqrt{R^2 + x_k^2 + y_k^2}\ )}\ .$$

								$\iddots$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\boxed{\overset{4}{K}{}^{00}}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\boxed{\overset{3}{K}{}^{00}}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\overset{2}{K}{}^{00}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Места четырёх физических структур, выражающих сущность двух одномерных и двух двумерных пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны, среди всех возможных физических структур.

Итак, мы видим, что геометрии n-мерных пространств постоянной кривизны (эллиптическая геометрия Римана и гиперболическая геометрия Лобачевского) могут быть последовательно и строго получены из Теории физических структур по следующей схеме:

1. Исходим из физической структуры ранга (r, r).

Исходное сакральное тождество имеет вид:

$$\forall i_1 \dots i_n \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \forall k_1 \dots k_n \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\begin{array}{l} \Phi(\varphi_{i_1k_1}, \dots, \varphi_{i_1k_r}, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad \varphi_{i_rk_1}, \dots, \varphi_{i_rk_r}) \end{array} = 0$$

1. У этого сакрального уравнения имеется два, и только два, решения – мультипликативное

$$\varphi_{ik}^{(1)} = \overset{r-1}{a}_{ik} = \varepsilon_1 x(i)_1 x^1(k) + \dots + \varepsilon_{r-1} x(i)_{r-1} x^{r-1}(k)$$

$$\overset{r}{K}{}^{00}_{i_1\dots i_r;k_1\dots k_r}(a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_r} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i_rk_1} & \dots & a_{i_rk_r} & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r}{K}{}^{00}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(\overset{r-1}{a}) \equiv 0$$

и аддитивное

$$\varphi^{(2)}_{ik} = \overset{r-2}{w}_{ik} = x^0(k) + \varepsilon_1 x(i)_1 x^1(k) + \cdots + \varepsilon_{r-2} x(i)_{r-2} x^{r-2}(k) + x(i)_0$$

$$\overset{r-1}{K}{}^{11}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & w_{i_1k_1} & \ldots & w_{i_1k_{r-1}} & w_{i_1k_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & w_{i_{r-1}k_1} & \ldots & w_{i_{r-1}k_r} & 0 \\ -1 & w_{i_rk_1} & \ldots & w_{i_rk_{r-1}} & w_{i_rk_r} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r-1}{K}{}^{11}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(\overset{r-2}{w}) \equiv 0$$

$$\varepsilon = \pm 1$$

3. Выбирая мультипликативное решение $(r-1=n)$ и накладывая дополнительное условие,

$$\overset{n}{a}_{ik} = \overset{n}{a}_{ki},$$

получаем линейную алгебру (геометрию n-мерного линейного пространства) со скалярным произведением

$$\overset{n}{a}_{ik} = g_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(k).$$

4. Накладывая на скалярное произведение ещё одно дополнительное условие,

$$\overset{n}{a}_{ii} = \varepsilon R^2,$$

получим в случае $\varepsilon = 1$ геометрию n-мерного пространства постоянной положительной кривизны, а в случае $\varepsilon = -1$ — геометрию n-мерного пространства постоянной отрицательной кривизны.

Пример 11. Малые колебания

Уверенность в том, что явление природы с необходимостью следует закону причинности, в конечном счете основывается лишь на скромных успехах, достигнутых в результате попыток человеческого разума установить взаимосвязь между явлениями природы.

— Альберт Эйнштейн.

Из приведенных выше примеров может сложиться впечатление, что связь между расстояниями, пройденными различными телами за одни и те же промежутки времени, представляет собой достаточно частное явление и имеет место только в простых "школьных" примерах. Чтобы рассеять это впечатление, рассмотрим ещё два примера:

1. Малые колебания математического маятника

Рассмотрим множество одинаковых маятников $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, приведенных в движение с произвольными начальными отклонениями и скоростями в какой-то общий момент времени t_i, где $i \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество произвольных событий.

Закон движения маятника хорошо известен:

$$\theta_\alpha(i) = a_\alpha \sin(\omega t_i + \varphi_\alpha) = a_\alpha \cos\varphi_\alpha \sin\omega t_i + a_\alpha \sin\varphi_\alpha \cos\omega t_i.$$

И в этом случае можно воспользоваться тем же самым приёмом, с помощью которого мы доказывали существование нужных соотношений в предыдущих примерах. А именно, легко показать, что определитель третьего порядка, составленный из измеряемых на опыте углов отклонений трех произвольных маятников в три произвольные, но общие для всех маятников, моменты времени, представляет собой произведение двух определителей, каждый из которых тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \theta_\alpha(i) & \theta_\alpha(k) & \theta_\alpha(m) \\ \theta_\beta(i) & \theta_\beta(k) & \theta_\beta(m) \\ \theta_\gamma(i) & \theta_\gamma(k) & \theta_\gamma(m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_\alpha \cos\varphi_\alpha & a_\alpha \sin\varphi_\alpha & 0 \\ a_\beta \cos\varphi_\beta & a_\beta \sin\varphi_\beta & 0 \\ a_\gamma \cos\varphi_\gamma & a_\gamma \sin\varphi_\gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin\omega t_i & \sin\omega t_k & \sin\omega t_m \\ \cos\omega t_i & \cos\omega t_k & \cos\omega t_m \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

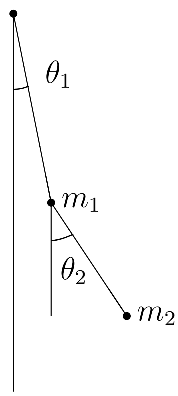
Итак, мы можем утверждать, что между малыми углами отклонения одинаковых маятников, приведенных в движение в один общий момент времени с произвольными начальными отклонениями и скоростями, существует следующая связь:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i, k, m \in \mathfrak{M}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \overset{3}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{\alpha\beta\gamma;ikm}(\overset{2}{\boldsymbol{\theta}}) = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta_\alpha(i)} & \boldsymbol{\theta_\alpha(k)} & \boldsymbol{\theta_\alpha(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta_\beta(i)} & \boldsymbol{\theta_\beta(k)} & \boldsymbol{\theta_\beta(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta_\gamma(i)} & \boldsymbol{\theta_\gamma(k)} & \boldsymbol{\theta_\gamma(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \equiv \mathbf{0} \end{gathered}}$$

2. Малые колебания двойного маятника

В качестве следующего примера рассмотрим колебательную систему α, обладающую двумя степенями свободы, например, двойной маятник [1].



Как известно, движение каждой точки этой системы представляет собой определенную суперпозицию двух нормальных колебаний с собственными частотами ω_1 и ω_2, т. е. малое отклонение какой-либо точки этой системы (от положения равновесия) может быть записано в виде:

$$\theta^1_\alpha(i) = a^1_\alpha \sin(\omega_1 t_i + \varphi^1_\alpha) + b^1_\alpha \sin(\omega_2 t_i + \psi^1_\alpha)$$

$$\theta^2_\alpha(i) = a^2_\alpha \sin(\omega_1 t_i + \varphi^2_\alpha) + b^2_\alpha \sin(\omega_2 t_i + \psi^2_\alpha)$$

или

$$\theta^\mu_\alpha(i) = a^\mu_\alpha \cos\varphi^\mu_\alpha \sin\omega_1 t_i + a^\mu_\alpha \sin\varphi^\mu_\alpha \cos\omega_1 t_i + b^\mu_\alpha \cos\psi^\mu_\alpha \sin\omega_2 t_i + b^\mu_\alpha \sin\psi^\mu_\alpha \cos\omega_2 t_i,$$

где $\mu = 1, 2.$

Тогда можно снова воспользоваться тождеством,

$$\begin{vmatrix} \theta_\alpha(i) & \theta_\alpha(k) & \theta_\alpha(m) & \theta_\alpha(n) & \theta_\alpha(p) \\ \theta_\beta(i) & \theta_\beta(k) & \theta_\beta(m) & \theta_\beta(n) & \theta_\beta(p) \\ \theta_\gamma(i) & \theta_\gamma(k) & \theta_\gamma(m) & \theta_\gamma(n) & \theta_\gamma(p) \\ \theta_\delta(i) & \theta_\delta(k) & \theta_\delta(m) & \theta_\delta(n) & \theta_\delta(p) \\ \theta_\varepsilon(i) & \theta_\varepsilon(k) & \theta_\varepsilon(m) & \theta_\varepsilon(n) & \theta_\varepsilon(p) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_\alpha \cos\varphi_\alpha & a_\alpha \sin\varphi_\alpha & b_\alpha \cos\psi_\alpha & b_\alpha \sin\psi_\alpha & 0 \\ a_\beta \cos\varphi_\beta & a_\beta \sin\varphi_\beta & b_\beta \cos\psi_\beta & b_\beta \sin\psi_\beta & 0 \\ a_\gamma \cos\varphi_\gamma & a_\gamma \sin\varphi_\gamma & b_\gamma \cos\psi_\gamma & b_\gamma \sin\psi_\gamma & 0 \\ a_\delta \cos\varphi_\delta & a_\delta \sin\varphi_\delta & b_\delta \cos\psi_\delta & b_\delta \sin\psi_\delta & 0 \\ a_\varepsilon \cos\varphi_\varepsilon & a_\varepsilon \sin\varphi_\varepsilon & b_\varepsilon \cos\psi_\varepsilon & b_\varepsilon \sin\psi_\varepsilon & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin\omega_1 t_i & \sin\omega_1 t_k & \sin\omega_1 t_m & \sin\omega_1 t_n & \sin\omega_1 t_p \\ \cos\omega_1 t_i & \cos\omega_1 t_k & \cos\omega_1 t_m & \cos\omega_1 t_n & \cos\omega_1 t_p \\ \sin\omega_2 t_i & \sin\omega_2 t_k & \sin\omega_2 t_m & \sin\omega_2 t_n & \sin\omega_2 t_p \\ \cos\omega_2 t_i & \cos\omega_2 t_k & \cos\omega_2 t_m & \cos\omega_2 t_n & \cos\omega_2 t_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

и записать соотношение, связывающее между собой отклонения от положения равновесия какой-либо одной точки у различных систем $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, взятых в различные моменты времени i, k, m, n, p в виде:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i, k, m, n, p \in \mathfrak{M}, \qquad \mu = 1, 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{5}{K}{}^{00}_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon;ikmnp}(\overset{4}{\theta^\mu}) = \\ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \theta^\mu_\alpha(i) & \theta^\mu_\alpha(k) & \theta^\mu_\alpha(m) & \theta^\mu_\alpha(n) & \theta^\mu_\alpha(p) & 0 \\ 0 & \theta^\mu_\beta(i) & \theta^\mu_\beta(k) & \theta^\mu_\beta(m) & \theta^\mu_\beta(n) & \theta^\mu_\beta(p) & 0 \\ 0 & \theta^\mu_\gamma(i) & \theta^\mu_\gamma(k) & \theta^\mu_\gamma(m) & \theta^\mu_\gamma(n) & \theta^\mu_\gamma(p) & 0 \\ 0 & \theta^\mu_\delta(i) & \theta^\mu_\delta(k) & \theta^\mu_\delta(m) & \theta^\mu_\delta(n) & \theta^\mu_\delta(p) & 0 \\ 0 & \theta^\mu_\varepsilon(i) & \theta^\mu_\varepsilon(k) & \theta^\mu_\varepsilon(m) & \theta^\mu_\varepsilon(n) & \theta^\mu_\varepsilon(p) &)0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.}}$$

Легко обобщить этот результат на случай колебательных систем с k степенями свободы:

Для множества

$$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\},$$

состоящего из одинаковых колебательных систем с k степенями свободы, приведенных в движение в какой-то общий для всех момент времени с произвольными начальными координатами $\theta^{\mu}_{\alpha}(0)$ и скоростями $\dot{\theta}^{\mu}_{\alpha}(0)$, существует следующее соотношение, связывающее значение одной и той же μ-й координаты θ^{μ} для различных систем в разные моменты времени

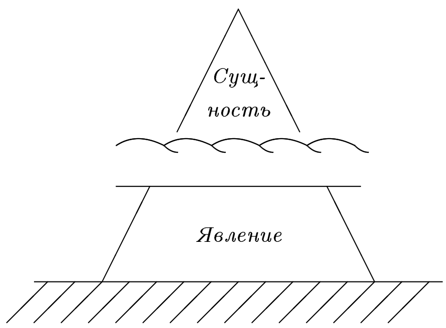
Сакральная формулировка теории колебаний

$$\forall \alpha_1 \ldots \alpha_{2k+1} \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i_1 \ldots i_{2k+1} \in \mathfrak{M}$$

$$\boxed{\overset{2k+1}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{00}}_{\boldsymbol{\alpha_1\ldots\alpha_{2k+1};i_1\ldots i_{2k+1}}}(\overset{2k}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{0}.}$$

Литература к Примеру 11

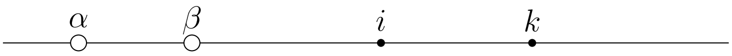
[1]. *Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.* Механика, том I, Наука, М.: 1973, С. 21.



Пример 12. Ангармоническое отношение

Начнём с простейшего понятия, с расстояния между двумя точками i и k, лежащими на прямой:

$$(i\,k) = \ell_{ik}$$



Введём следующие обозначения:

$$(\alpha;\, ik) = \ell_{\alpha;ik} = \ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k}$$
$$(\beta;\, ik) = \ell_{\beta;ik} = \ell_{\beta i} - \ell_{\beta k},$$

где α и β — две фиксированные точки на прямой.

Условие инвариантности расстояния ℓ_{ik} запишется в виде:

$$(\alpha;\, ik) = (\beta;\, ik)$$

или

$$\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k} - \ell_{\beta i} + \ell_{\beta k} = 0. \tag{1}$$

Легко видеть, что сакральное тождество (1) может быть записано в виде:

$$\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k} - \ell_{\beta i} + \ell_{\beta k} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} \\ -1 & \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} \end{vmatrix} =$$
$$= \overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{\circ}{w}) \equiv 0,$$

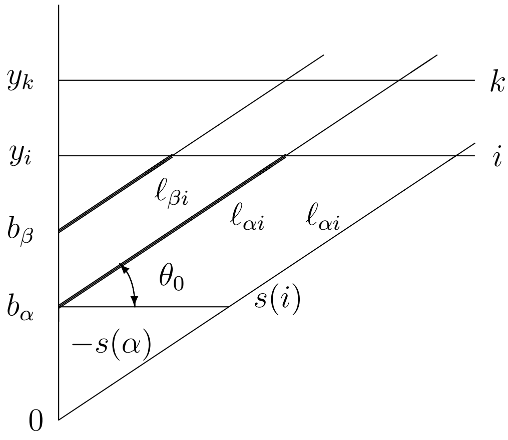
где

$$\overset{\circ}{w}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = \frac{y_i - b_\alpha}{\sin\theta_0} = \overline{s}(i) + \underline{s}(\alpha).$$

$\overline{s}(i) = \dfrac{y_i}{\sin\theta_0}$ – скрытый параметр текущей точки i;

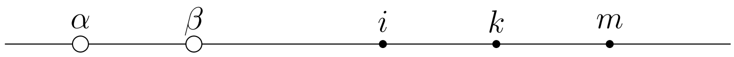
$\underline{s}(\alpha) = \dfrac{-b_\alpha}{\sin\theta_0}$ – скрытый параметр фиксированной точки α.

Тождество (1) допускает следующую геометрическую интерпретацию:



Итак, за понятием расстояния между двумя точками, лежащими на прямой, скрывается свойство аддитивности (см. Пример 5), находящее свое выражение в существовании физической структуры рода $\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;ik}(\overset{\circ}{w}) \equiv 0$.

Рассмотрим далее три точки i, k, m , лежащие на прямой,



и введём новое понятие гармонического (простого) отношения между тремя точками:

$$(i\,k\,m) = \frac{\ell_{im}}{\ell_{mk}}.$$

Что скрывается за гармоническим отношением $(i\,k\,m)$?

Введём следующее обозначение:

$$(\alpha; ikm) = \frac{\ell_{\alpha;im}}{\ell_{\alpha;mk}} = \frac{\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha m}}{\ell_{\alpha m} - \ell_{\alpha k}}.$$

Условие инвариантности гармонического отношения записывается в виде:

$$(\alpha;\, ikm) = (\beta;\, ikm)$$

или

$$\frac{\ell_{\alpha;\,im}}{\ell_{\alpha;\,mk}} - \frac{\ell_{\beta;\,im}}{\ell_{\beta;\,mk}} = \frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\beta;\,mk} - \ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,ik}}{\ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,mk}} = 0. \tag{2}$$

Но легко видеть, что это сакральное тождество (2) можно записать в виде:

$$(\alpha;\, ikm) - (\beta;\, ikm) = \frac{(\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha m})(\ell_{\beta m} - \ell_{\beta k}) - (\ell_{\alpha m} - \ell_{\alpha k})(\ell_{\beta i} - \ell_{\beta k})}{\ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,mk}} =$$

$$= \ell^{-1}_{\alpha;\,km}\ell^{-1}_{\beta;\,km} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} & \ell_{\alpha m} \\ \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} & \ell_{\beta m} \end{vmatrix} \equiv 0$$

То есть

$$\ell_{\alpha;\,km}\ell_{\beta;\,km}\big[(\alpha;\,ikm)-(\beta;\,ikm)\big]=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\0&\ell_{\alpha i}&\ell_{\alpha k}&\ell_{\alpha m}\\0&\ell_{\beta i}&\ell_{\beta k}&\ell_{\beta m}\\-1&0&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;\,ikm}(\overset{1}{u})\equiv 0, \qquad (3)$$

где

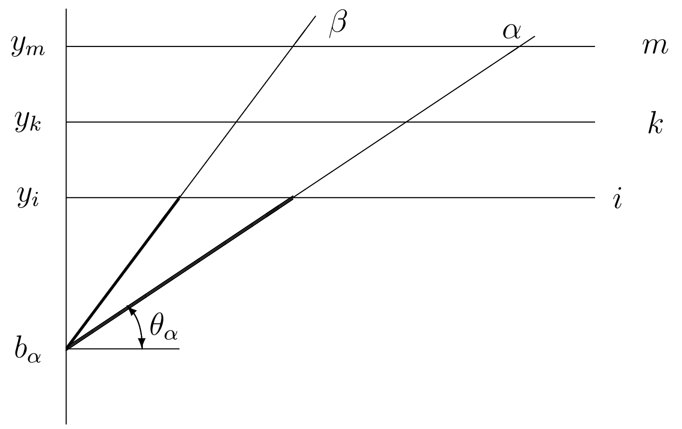
$$\overset{1}{u}_{\alpha i}=\ell_{\alpha i}=\frac{y_i-b_\alpha}{\sin\theta_\alpha}=\xi_\alpha x_i+\underline{s}(\alpha),$$

$$\xi_\alpha=\frac{1}{\sin\theta_\alpha},$$

$$x_i=y_i,$$

$$\underline{s}(\alpha)=\frac{-b_\alpha}{\sin\theta_\alpha}.$$

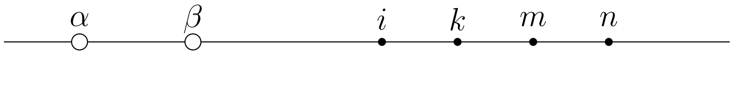
Тождество (3) допускает следующую геометрическую интерпретацию:



Итак, за понятием гармонического отношения трёх точек $(i\,k\,m)$ скрывается свойство аддитивности и подобия, находящее свое выражение в существовании физической структуры рода

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;\,ikm}(\overset{1}{u})\equiv 0.$$

Рассмотрим, наконец, четыре точки i,k,m,n , лежащие на прямой,



и введём новое понятие ангармонического (двойного) отношения между четырьмя точками. Введём следующее обозначение:

$$(\alpha;\,ikmn)=\frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\alpha;\,kn}}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}}.$$

Условие инвариантности ангармонического отношения записывается в виде:

$$(\alpha;\, ikmn) = (\beta;\, ikmn)$$

или

$$\frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\alpha;\,kn}}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}} - \frac{\ell_{\beta;\,im}\ell_{\beta;\,kn}}{\ell_{\beta;\,in}\ell_{\beta;\,km}} =$$

$$\frac{1}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}\ell_{\beta;\,in}\ell_{\beta;\,km}}\big[(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta n})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta m}) -$$
$$-(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta m})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta n})\big] \equiv 0.$$

Выражение в квадратных скобках может быть записано в виде:

$$\begin{gathered}(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta n})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta m}) -\\ -(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta m})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta n}) =\\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} & \ell_{\alpha m} & \ell_{\alpha n} \\ \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} & \ell_{\beta m} & \ell_{\beta n} \\ \ell_{\alpha i}\ell_{\beta i} & \ell_{\alpha k}\ell_{\beta k} & \ell_{\alpha m}\ell_{\beta m} & \ell_{\alpha n}\ell_{\beta n} \end{vmatrix} = \overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Эту связь физической структуры ранга (2, 4) с проективно инвариантным ангармоническим отношением впервые обнаружил мой ученик Владимир Ханович Лев [1].

Сакральное тождество (4) допускает следующую геометрическую интерпретацию:

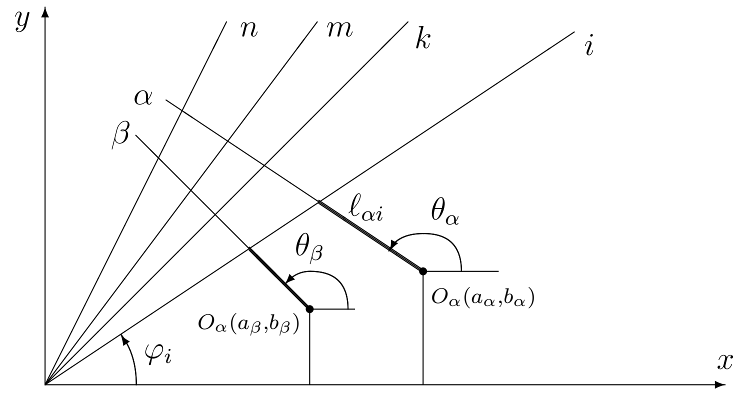


Рис. 1. Два множества прямых $\overline{\mathfrak{M}}$ и $\underline{\mathfrak{N}}$.

В качестве репрезентатора $\ell_{\alpha i}$, характеризующего отношение между прямой $i \in \overline{\mathfrak{M}}$ и прямой $\alpha \in \underline{\mathfrak{N}}$, возьмём расстояние от точки (a_α, b_α) до точки пересечения прямой α с прямой i.

Каждая прямая i из множества $\overline{\mathfrak{M}}$ характеризуется **одним** параметром – углом φ_i, а каждая прямая α из множества $\underline{\mathfrak{N}}$ характеризуется **тремя** параметрами – двумя декартовыми координатами a_α, b_α точки (a_α, b_α) и углом θ_α.

Из рис. 1. следует, что

$$\ell_{\alpha i} = \frac{-\dfrac{a_\alpha}{\cos\theta_\alpha}\operatorname{tg}\varphi_i + \dfrac{b_\alpha}{\cos\theta_\alpha}}{\operatorname{tg}\varphi_i - \operatorname{tg}\theta_\alpha} = \frac{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha},$$

где

$$\xi_\alpha = -\frac{a_\alpha}{\cos\theta_\alpha}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{b_\alpha}{\cos\theta_\alpha}$$

$$\lambda_\alpha = -\operatorname{tg}\theta_\alpha$$

$$x_i = \operatorname{tg}\varphi_i.$$

Итак, за понятием ангармонического (двойного) отношения четырёх точек $(i\,k\,m\,n)$ скрывается проективный инвариант, находящий своё выражение в существовании спорадической физической структуры ранга (2,4):

$$\overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0. \tag{5}$$

Поскольку ангармоническое отношение является инвариантом проективного преобразования

$$\overset{1}{p}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + s_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha} = \frac{\xi'_\alpha x'_i + s'_\alpha}{x'_i + \lambda'_\alpha},$$

где

$$x = \frac{a\,x' + b}{x' + c} \qquad \text{и обратно} \qquad x' = \frac{-c\,x + b}{x - a}$$

$$\xi' = \frac{a\,\xi + \sigma}{\lambda + a}$$

$$\sigma' = \frac{b\,\xi + c\,\sigma}{\lambda + a}$$

$$\lambda' = \frac{c\,\lambda + b}{\lambda + a},$$

появляется возможность построить проективную геометрию плоскости на новых основаниях, а именно, на спорадическом решении Михайличенко (5) сакрального уравнения Теории физических структур:

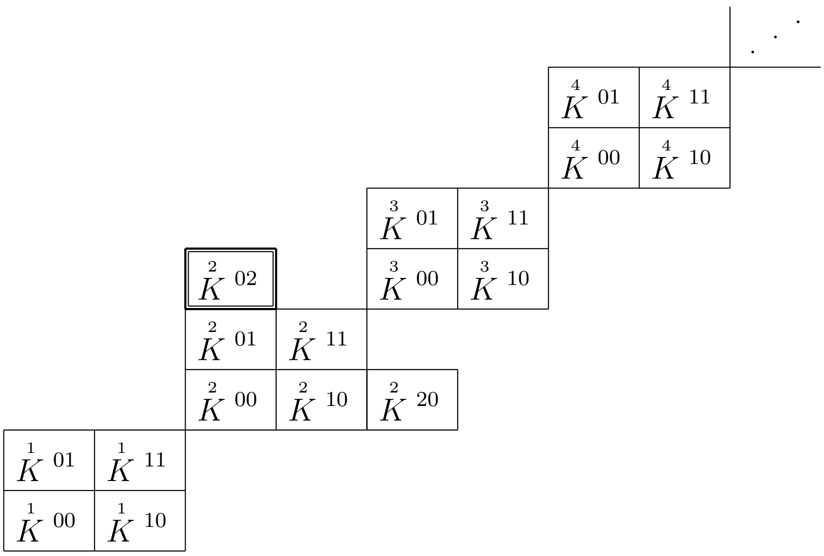
$$\begin{aligned}\Phi_{2,4}(&\varphi_{\alpha i},\ \varphi_{\alpha k},\ \varphi_{\alpha m},\ \varphi_{\alpha n},\\ &\varphi_{\beta i},\ \varphi_{\beta k},\ \varphi_{\beta m},\ \varphi_{\beta n})\end{aligned} \equiv 0.$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка закона, лежащего в основании ангармонического отношения и в основании проективной геометрии

$$\boxed{\overset{2}{\boldsymbol{M}}{}^{\mathbf{02}}_{\boldsymbol{\alpha\beta};\,\boldsymbol{ikmn}}(\overset{1}{\boldsymbol{p}}) \equiv \mathbf{0}}$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\alpha i}} = \boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{\alpha i}} = \frac{\boldsymbol{\xi_\alpha x_i + s_\alpha}}{\boldsymbol{x_i + \lambda_\alpha}}$$



Место физической структуры ранга (2, 4), выражающей сущность ангармонического отношения и тесно связанной с ним проективной геометрии, среди всех возможных физических структур.

Литература к Примеру 12

[1]. *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3). //Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. - Новосибирск.: Институт математики СОАН СССР, 1984. С. 91 - 113.

Пример 13. Тонкие и толстые линзы

Законы геометрической оптики, действующие в толстых линзах, являются наглядной иллюстрацией спорадической физической структуры Михайличенко ранга (2,4),

$$\overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0,$$

лежащей в основании (см. Пример 12) теории ангармонических отношений, инвариантных относительно проективных преобразований

$$x' = \frac{c_1 x + c_2}{x + c_3}.$$

Как известно, формула тонкой линзы имеет следующий вид:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

или

$$\frac{1}{u_{\alpha i}} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f_\alpha},$$

где $a = u_{\alpha i}$ – расстояние от изображения i^* до центра линзы α,
$b = x_i$ — расстояние от предмета i до центра линзы α,
$f = f_\alpha$ – фокусное расстояние тонкой линзы α.
(Заметим, что при $f_\alpha \to \infty \quad u_{\alpha i} \to -x_i$) (см рис. 1)

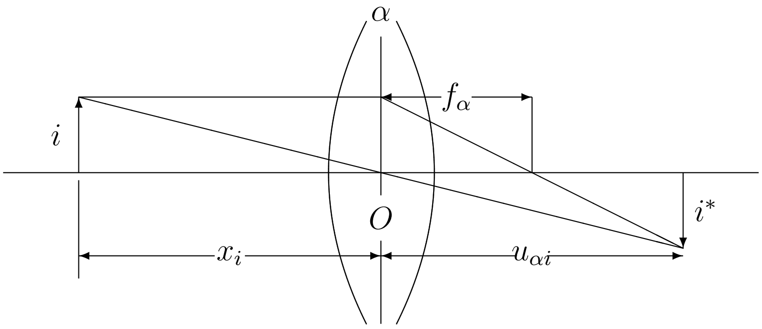


Рис. 1 Основные параметры тонкой линзы.

Заметим, что формула тонкой линзы может быть переписана в виде:

$$\overset{\circ}{w}_{\alpha i} = s_i + s_\alpha,$$

где

$$\overset{\circ}{w}_{\alpha i} = \frac{1}{u_{\alpha i}}$$

$$s_i = -\frac{1}{x_i} \qquad s_\alpha = \frac{1}{f_\alpha}.$$

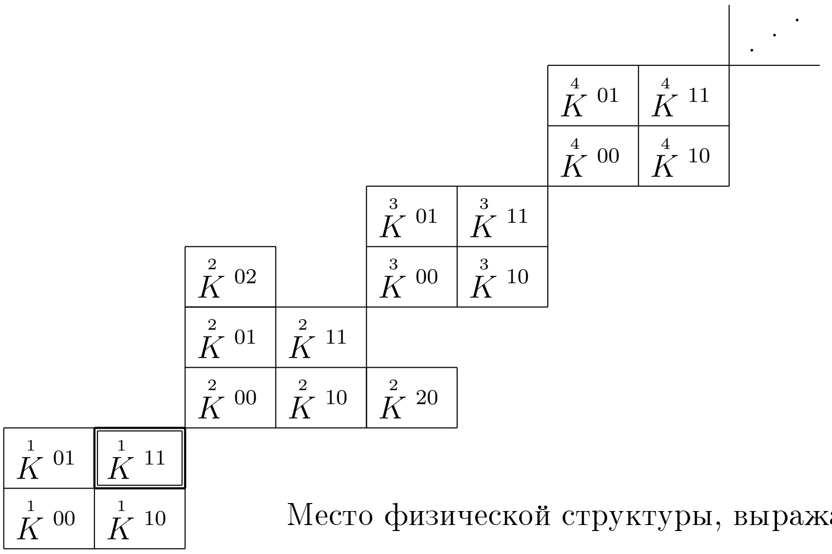
Таким образом,

Сакральная формулировка геометрической оптики тонких линз

имеет следующий вид:

$$\boxed{\overset{1}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{11}}_{\boldsymbol{\alpha\beta;\,ik}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{w}}) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\alpha i}} & \overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\alpha k}} \\ \mathbf{-1} & \overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\beta i}} & \overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\beta k}} \end{vmatrix} \equiv \mathbf{0}}$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\alpha i}} = \boldsymbol{s_i} + \boldsymbol{s_\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u_{\alpha i}}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x_i}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f_\alpha}}$$

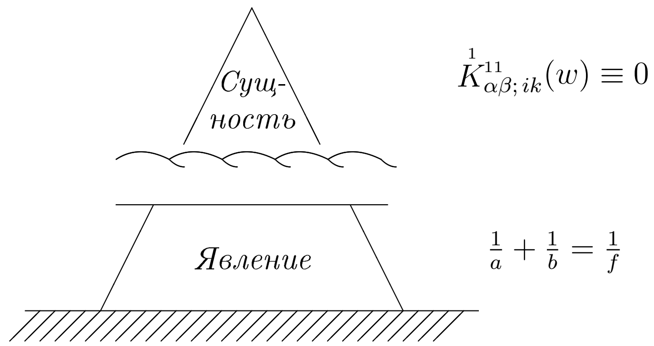


Место физической структуры, выражающей сущность законов геометрической оптики тонких линз, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность законов геометрической оптики тонких линз, состоит в существовании сакральных отношений между множеством тонких линз $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством предметов $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждая линза $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптоточкой** сакрального нульмерного криптоточечного пространства, а каждый предмет $\bar{\boldsymbol{i}}$ является **криптоточкой** другого сакрального нульмерного криптоточечного пространства.

Другими словами, геометрическая оптика тонких линз является сакральной криптоточечно-криптоточечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность закона геометрической оптики тонких линз состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухкриптоточечного корта линз на двухкриптоточечный корт предметов, объёмы которых одновременно тождественно равны нулю.



Явление и сущность закона геометрической оптики тонких линз.

Что же касается закона распределения света в толстых линзах, то формула толстой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \tag{2}$$

по своему физическому смыслу существенно отличается от формулы (1).

Дело в том, что, как известно, толстая линза α характеризуется не только фокусным расстоянием F_α, но и двумя главными плоскостями H_1 и H_2, от которых отсчитываются расстояние a до предмета i и расстояние b до изображения i^*. А так как положение главных плоскостей H_1 и H_2 ничем не выделено, то на опыте измеряются расстояние x_i от предмета i до передней поверхности линзы α и расстояние $u_{\alpha i}$ от изображения i^* до её задней поверхности.

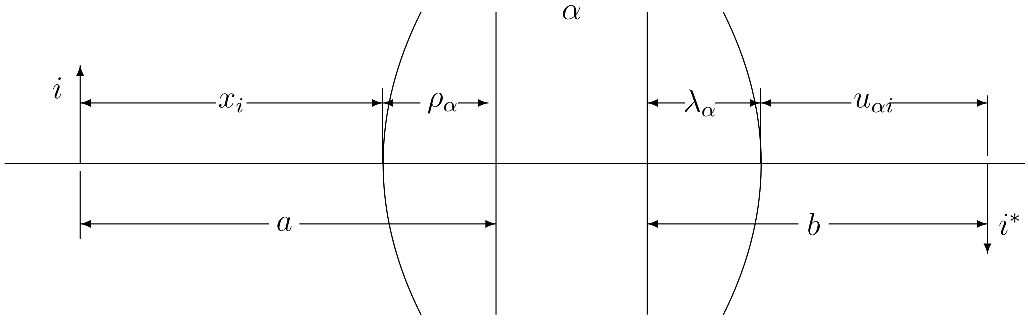


Рис. 2 Основные параметры толстой линзы.

Таким образом, формула толстой линзы может быть записана в виде:

$$\frac{1}{u_{\alpha i} + \lambda_\alpha} + \frac{1}{x_i + \rho_\alpha} = \frac{1}{F_\alpha}, \tag{3}$$

где ρ_α — расстояние от передней поверхности линзы до первой главной плоскости H_1;
λ_α — расстояние от задней поверхности линзы до второй главной плоскости H_2;
x_i — расстояние от предмета i до передней поверхности линзы;
$u_{\alpha i}$ — расстояние от изображения i^* до задней поверхности линзы;
F_α — фокусное расстояние толстой линзы.

Из равенства (3) следует выражение двухиндексного расстояния $u_{\alpha i}$ как функции **одного** параметра x_i, характеризующего предмет i и **трёх** параметров F_α, ρ_α и λ_α, характеризующих толстую линзу α:

$$u_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}, \tag{4}$$

где

$$\xi_\alpha = F_\alpha - \lambda_\alpha$$

$$\sigma_\alpha = (F_\alpha - \lambda_\alpha)\rho_\alpha + F_\alpha\lambda_\alpha$$

$$\zeta_\alpha = \rho_\alpha - F\alpha.$$

Итак, возьмём четыре предмета i, k, m, n из множества предметов $\mathfrak{M}$ и две толстые линзы α, β из множества $\mathfrak{N}$ и запишем восемь однотипных выражений:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha i} &= \frac{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha} & u_{\beta i} &= \frac{\xi_\beta x_i + \sigma_\beta}{x_i + \zeta_\beta}\\
u_{\alpha k} &= \frac{\xi_\alpha x_k + \sigma_\alpha}{x_k + \zeta_\alpha} & u_{\beta k} &= \frac{\xi_\beta x_k + \sigma_\beta}{x_k + \zeta_\beta}\\
u_{\alpha m} &= \frac{\xi_\alpha x_m + \sigma_\alpha}{x_m + \zeta_\alpha} & u_{\beta m} &= \frac{\xi_\beta x_m + \sigma_\beta}{x_m + \zeta_\beta}\\
u_{\alpha n} &= \frac{\xi_\alpha x_n + \sigma_\alpha}{x_n + \zeta_\alpha} & u_{\beta n} &= \frac{\xi_\beta x_n + \sigma_\beta}{x_n + \zeta_\beta}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ясно, что система восьми уравнений (5) относительно десяти неизвестных

$$x_i,\ x_k,\ x_m,\ x_n;\ \xi_\alpha,\ \sigma_\alpha,\ \zeta_\alpha;\ \xi_\beta,\ \sigma_\beta,\ \zeta_\beta$$

должна иметь специальный вид, чтобы можно было исключить из неё все десять неизвестных и получить при этом одно соотношение между восемью однотипными расстояниями

$$u_{\alpha i},\ u_{\alpha k},\ u_{\alpha m},\ u_{\alpha n};\ u_{\beta i},\ u_{\beta k},\ u_{\beta m},\ u_{\beta n}.$$

Итак, исключая из восьми уравнений (5) все параметры x_i, x_k, x_m, x_n, характеризующие четыре предмета i, k, m, n и все параметры $\xi_\alpha, \sigma_\alpha, \zeta_\alpha;\ \xi_\beta, \sigma_\beta, \zeta_\beta$, характеризующие две толстые линзы α и β, получим следующее соотношение между измеряемыми на опыте расстояниями в виде:

Сакральная формулировка геометрической оптики толстых линз

$$\forall \alpha\beta \in \mathfrak{N} \qquad \forall i,k,m,n \in \mathfrak{M}$$

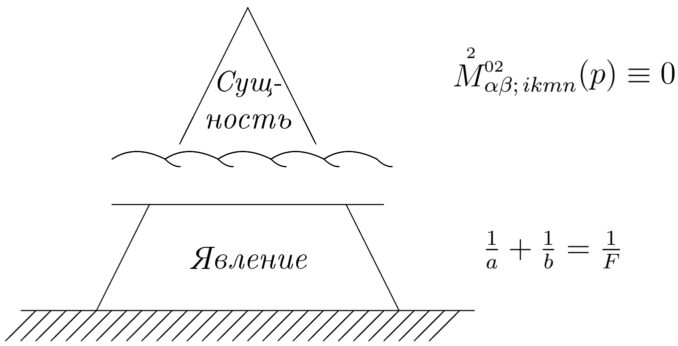
$$\boxed{\begin{gathered} \overset{1}{\boldsymbol{M}}{}^{\mathbf{02}}_{\boldsymbol{\alpha\beta;\,ikmn}}(\overset{1}{\boldsymbol{p}}) = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{p_{\alpha i}} & \boldsymbol{p_{\alpha k}} & \boldsymbol{p_{\alpha m}} & \boldsymbol{p_{\alpha n}} \\ \boldsymbol{p_{\beta i}} & \boldsymbol{p_{\beta k}} & \boldsymbol{p_{\beta m}} & \boldsymbol{p_{\beta n}} \\ \boldsymbol{p_{\alpha i}p_{\beta i}} & \boldsymbol{p_{\alpha k}p_{\beta k}} & \boldsymbol{p_{\alpha m}p_{\beta m}} & \boldsymbol{p_{\alpha n}p_{\beta n}} \end{vmatrix} \equiv \mathbf{0} \end{gathered}}$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\alpha i}} = \boldsymbol{u_{\alpha i}} = \frac{\boldsymbol{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}}{\boldsymbol{x_i + \zeta_\alpha}}$$

								$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\boxed{\overset{2}{K}{}^{02}}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\overset{2}{K}{}^{00}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место физической структуры, выражающей сущность законов геометрической оптики толстых линз, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность законов геометрической оптики толстых линз состоит в существовании сакральных отношений между множеством толстых линз $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством предметов $\overline{\mathfrak{M}}$.



Явление и сущность закона геометрической оптики толстых линз.

Озарение: истина где-то рядом! (Школа ТФС – 2000)

Фото W. Sumner

Пример 14. Пространственная кинематика

Наука родилась из веры в математическую интерпретацию природы.

— Джон Герман Рэндалл

Для мыслящего ученого математическое описание всегда было неиссякаемым источником удивления, рожденного тем, что природа проявлет столь высокую степень соответствия математическим формулам.

— Морис Клайн

Кинеметика – простейший раздел физики и потому наиболее сложный для понимания, так как очень трудно объяснять "очевидные" вещи, хорошо знакомые и привычные с самого детства. В са́мом деле, наверное ни у кого из физиков не возникают следующие вопросы:

В чём сущность поступательного и вращательного движения?

Что скрывается за понятием скорости и ускорения?

Что такое угловая скорость?

Короче говоря, существуют ли объективные законы кинематики поступательного и вращательного движения, подобные тому, который существует в динамике материальной точки, как, например, закон Ньютона?

На первый взгляд эти вопросы относятся к области "философии" и не могут возникнуть у физика, занимающегося конкретными физическими проблемами. Однако, именно из рассмотрения "очевидных" понятий пространства, времени и движения, хорошо известных каждому ещё с детства, как раз и родилась по-настоящему глубокая физическая теория – теория относительности. Так что, может быть, не стоит смотреть свысока на вопросы, возникающие в рамках "школьной" физики.

Ответ на поставленные выше вопросы состоит в том, что сущность и рациональную основу Мироздания составляют *физические структуры того или иного рода*. Именно они, и только они, определяют вид и строение всех фундаментальных физических законов, всех физических величин и понятий. И в частности, основные понятия и соотношения кинематики представляют собой следствия, вытекающие из физических структур, в свою очередь возникающих из универсального Принципа сакральной симметрии.

Итак, что же такое движение? В чём его сущность? Раздел физики, рассматривающий понятие движения, называется кинематикой. К этому понятию можно подойти с двух различных точек зрения. В связи с этим мы будем различать две кинематики: **пространственную** и **пространственно-временну́ю**.

В **пространственной кинематике** рассматриваются два множества: множество тел, движущихся с различными скоростями $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, и множество событий (вспышек) $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$, во время которых осуществляется **одна** измерительная операция: с помощью линейки измеряется путь $\ell_{\alpha i}$, пройденный телом α к моменту вспышки i.

В **пространственно-временно́й кинематике** рассматривается одно движущееся тело и множество событий (вспышек) $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$, во время которых осуществляются **две** измерительные операции: с помощью линейки измеряется одна пространственная координата x_i и с помощью часов – одна временна́я координата t_i.

Законы пространственной кинематики

Как известно, уравнение, описывающее равномерное движение материальной точки, имеет следующий вид:

$$x = b + vt,$$

где b – координата начального положения и v – скорость, которые рассматриваются как постоянные.

Однако, для того, чтобы выявить *сущность* равномерного движения, необходимо рассмотреть два вида *нечисловых переменных* α и i, взятых соответственно из множеств $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ и $\overline{\mathfrak{N}} = \{i, k, \ldots\}$, где $\underline{\mathfrak{N}}$ – множество движущихся тел; $\overline{\mathfrak{M}}$ – множество моментов времени (множество вспышек), во время которых происходит измерение пройденных телами $\alpha, \beta, \ldots$ расстояний $\ell_{\alpha i}, \ell_{\beta i}, \ldots$:

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v_\alpha t_i.$$

Тогда в зависимости от того, какие из двух параметров b и v, игравшие ранее роль постоянных, рассматриваются теперь как *числовые функции нечисловой переменной* α, возникают три, вообще говоря, различные состояния движения системы точек, которые описываются тремя различными физическими структурами.

1. Кинематика покоя множества тел, находящихся в разных точках

Рассмотрим систему неподвижных материальных тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, находящихся в разных точках (см. рис. 1).

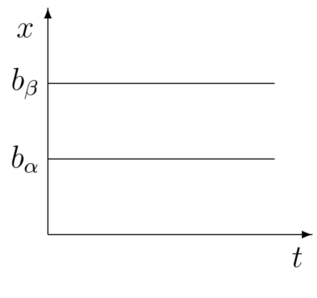


Рис. 1. Законы движения тел, находящихся в состоянии покоя.

Закон движения тела, находящегося в состоянии покоя, описывается физической структурой рода:

$$\overset{1}{K}{}^{01}_{\alpha;\,ik}(\overset{\circ}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \overset{\circ}{u}_{\alpha i} & \overset{\circ}{u}_{\alpha k} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{\circ}{u}_{\alpha i} & \overset{\circ}{u}_{\alpha k} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \overset{\circ}{u}_{\alpha i} - \overset{\circ}{u}_{\alpha k} = 0,$$

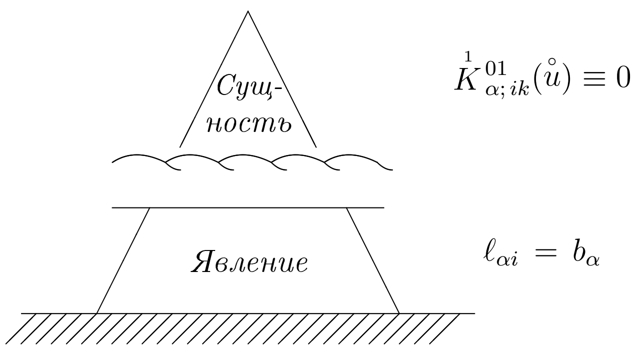
где

$$\overset{\circ}{u}_{\alpha i} = s_\alpha \qquad \text{или} \qquad \overset{\circ}{u}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = s_\alpha = b_\alpha,$$

где s_α – скрытый параметр.

Итак, сущность кинематики покоя состоит в существовании сакральных отношений между множеством неподвижных тел $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое неподвижное тело $\overleftarrow{\alpha}$ является **криптовектором** сакрального одномерного криптовекторного пространства, а каждое событие i является **точкой** другого сакрального одномерного точечного пространства.

Другими словами, кинематика покоя является сакральной криптовекторточечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

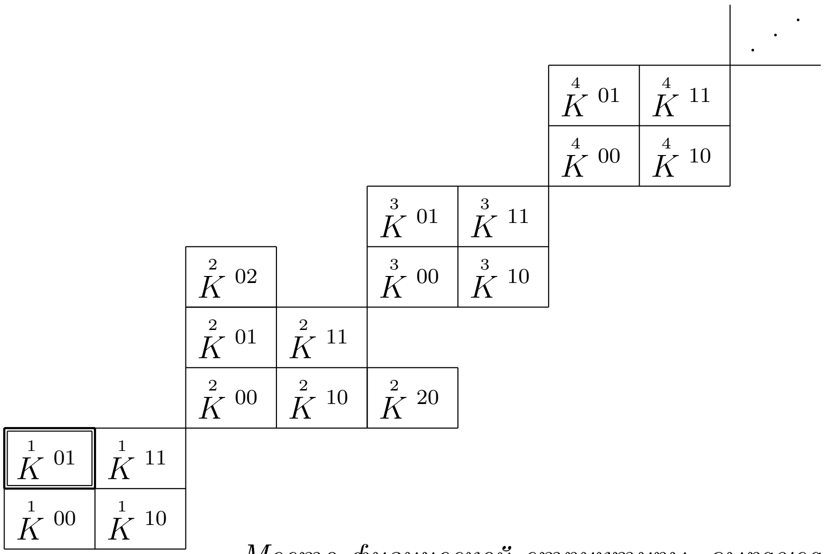


Явление и сущность кинематики покоя.

Сакральная формулировка кинематики покоя

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{1}{K}{}^{01}_{\alpha;ik}(\overset{0}{u}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{0}{u}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = b_\alpha}$$



Место физической структуры, выражающей сущность кинематики покоя, среди всех возможных физических структур.

2. Пространственная кинематика системы тел, стартующих из одной точки с разными скоростями

Рассмотрим систему тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, одновременно стартующих из начала координат $(b = 0)$ с разными постоянными скоростями $v_\alpha, v_\beta, \ldots$ (см. рис. 2).

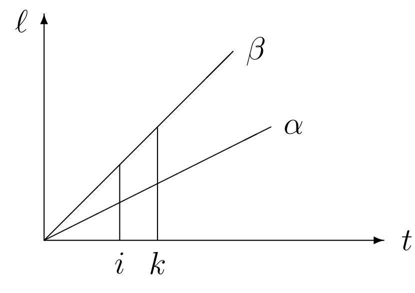


Рис. 2. Законы движения тел, стартующих из одной точки с разными скоростями.

В этом случае

$$\ell_{\alpha i} = v_\alpha t_i,$$

и, следовательно, будет иметь место очевидное тождество:

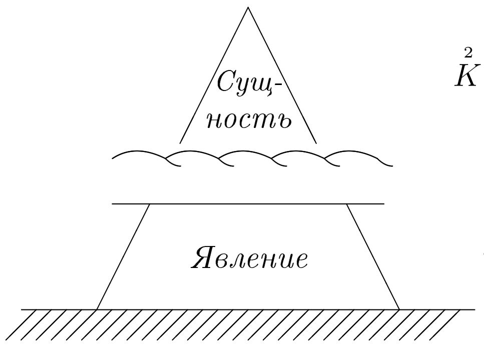
$$\forall\, \alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\, i, k \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;ik}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \overset{1}{a}_{\alpha i} & \overset{1}{a}_{\alpha k} & 0 \\ 0 & \overset{1}{a}_{\beta i} & \overset{1}{a}_{\beta k} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_{\alpha i} & \overset{1}{a}_{\alpha k} \\ \overset{1}{a}_{\beta i} & \overset{1}{a}_{\beta k} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\overset{1}{a}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = v_\alpha t_i.$$

Итак, сущность кинематики равномерного движения из одной и той же точки состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, равномерно движущихся из одной точки и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равномерно движущееся тело $\overleftarrow{\alpha}$ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждое событие $\vec{i}$ является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.



$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} = v_\alpha t_i$$

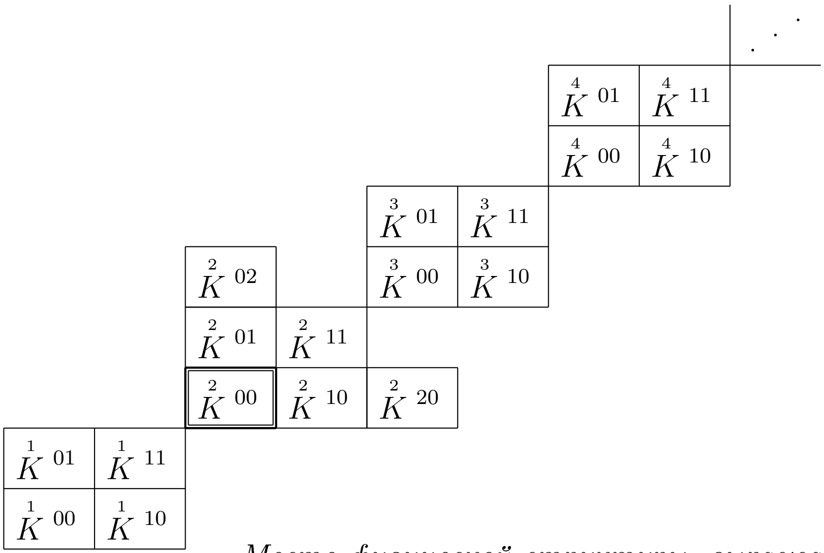
Явление и сущность кинематики равномерного движения из одной и той же точки.

Сакральная формулировка кинематики равномерного движения тел, стартующих из одной точки

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{a}_{\alpha i} = \xi_1 x^1 = \ell_{\alpha i} = v_\alpha t_i}$$

Другими словами, кинематика равномерного движения из одной и той же точки является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



Место физической структуры, выражающей сущность кинематики равномерного движения из одной точки, среди всех возможных физических структур.

3. Пространственная кинематика множества тел, стартующих из разных точек с одной и той же скоростью

Рассмотрим множество тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, одновременно стартующих из различных точек $b_\alpha, b_\beta, \ldots$ на прямой и движущихся дальше с одной и той же постоянной скоростью v (см. рис. 3).

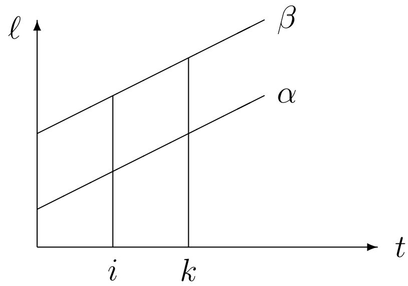


Рис. 3. Законы движения тел, стартующих из разных точек с одними и теми же скоростями.

В этом случае

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v\, t_i,$$

и, как легко убедиться, имеет место следующее тождество:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\, i, k \in \overline{\mathfrak{M}}$$

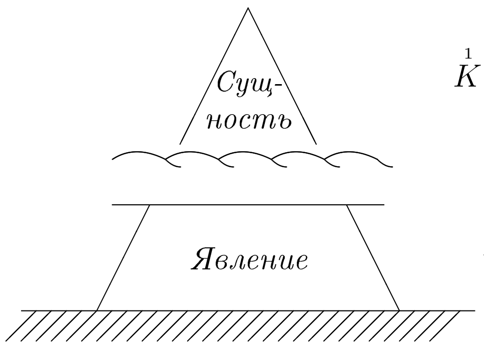
$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;ik}(\overset{0}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{0}{w}_{\alpha i} & \overset{0}{w}_{\alpha k} \\ -1 & \overset{0}{w}_{\beta i} & \overset{0}{w}_{\beta k} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\overset{0}{w}_{\alpha i} = s_i + \sigma_\alpha = \ell_{\alpha i} = v\, t_i + b_\alpha.$$

Итак, сущность кинематики равномерного движения из разных точек с одной и той же скоростью состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, равномерно движущихся с одной и той же скоростью из разных точек и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равномерно движущееся тело α является **криптоточкой** сакрального нульмерного криптоточечного пространства, а каждое событие i является **криптоточкой** другого сакрального нульмерного криптоточечного пространства.

Другими словами, кинематика равномерного движения из различных точек с одной и той же постоянной скоростью является сакральной криптоточечно-криптоточечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{0}{w}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v\, t_i$$

Явление и сущность кинематики равномерного движения из разных точек с одной и той же скоростью v.

Сакральная формулировка кинематики равномерного движения тел, стартующих из разных точек с одной и той же скоростью

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;ik}(\overset{0}{w}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{0}{w}_{\alpha i} = s_i + \sigma_\alpha = \ell_{\alpha i} = v\, t_i + b_\alpha}$$

								$\iddots$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\overset{2}{K}{}^{00}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\boxed{\overset{1}{K}{}^{11}}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место физической структуры, выражающей сущность кинематики движения из разных точек с одними и теми же скоростями, среди всех возможных физических структур.

4. Пространственная кинематика множества тел, стартующих из разных точек с разными скоростями

Рассмотрим множество тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, одновременно стартующих из разных точек $b_\alpha, b_\beta, \ldots$ и движущихся с разными скоростями $v_\alpha, v_\beta, \ldots$ (см. рис. 4).

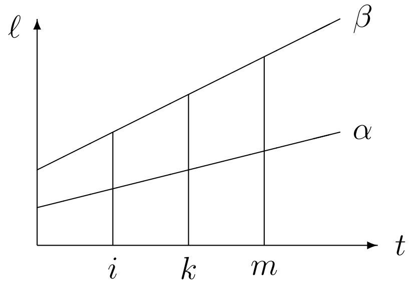


Рис. 4. Законы движения тел, стартующих из разных точек с разными скоростями.

В этом случае

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v_\alpha t_i,$$

и, следовательно, будет иметь место следующее тождество:

$$\forall\ \alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\ i, k, m \in \overline{\mathfrak{M}}$$

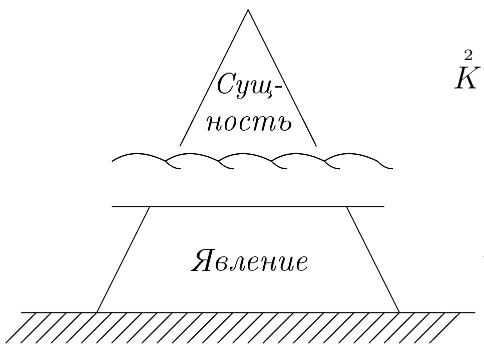
$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{1}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \overset{1}{u}_{\alpha i} & \overset{1}{u}_{\alpha k} & \overset{1}{u}_{\alpha m} \\ 0 & \overset{1}{u}_{\beta i} & \overset{1}{u}_{\beta k} & \overset{1}{u}_{\beta m} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{1}{u}_{\alpha i} & \overset{1}{u}_{\alpha k} & \overset{1}{u}_{\alpha m} \\ \overset{1}{u}_{\beta i} & \overset{1}{u}_{\beta k} & \overset{1}{u}_{\beta m} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\overset{1}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\, x^1(i) + \sigma(\alpha) \;=\; \ell_{\alpha i} \;=\; v_\alpha\, t_i + b_\alpha .$$

Итак, сущность кинематики равномерного движения из разных точек с различными скоростями состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, равномерно движущихся с различными скоростями из разных точек и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равномерно движущееся тело $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптовектором** сакрального одномерного криптовекторного пространства, а каждое событие i является **точкой** другого сакрального одномерного точечного пространства.

Другими словами, кинематика равномерного движения из различных точек с различными скоростями является сакральной криптовекторно-точечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{1}{u}) \equiv 0$$

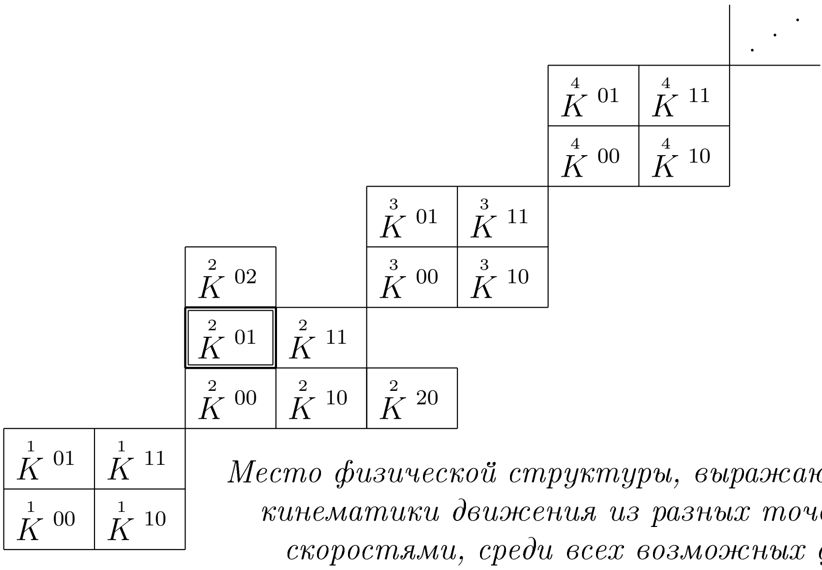
$$\ell_{\alpha i} \;=\; b_\alpha + v_\alpha\, t_i$$

Явление и сущность кинематики равномерного движения из разных точек с различными скоростями v.

Сакральная формулировка кинематики равномерного движения тел, стартующих из разных точек с различными скоростями

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{1}{u}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\, x^1(i) + \sigma(\alpha) \;=\; \ell_{\alpha i} \;=\; v_\alpha\, t_i + b_\alpha}$$



Место физической структуры, выражающей сущность кинематики движения из разных точек с разными скоростями, среди всех возможных физических структур.

5. Пространственная кинематика равноускоренного движения тел, стартующих из одной и той же точки b_o с нулевой начальной скоростью $v_o = o$ с различными ускорениями

Рассмотрим множество тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, стартующих из одной и той же точки b_o с нулевой начальной скоростью $v_o = o$ с различными ускорениями a_α.

В этом случае путь, пройденный телом,

$$\ell_{\alpha i} = b_o + a_\alpha \frac{t_i^2}{2},$$

и, следовательно, будет иметь место следующее тождество:

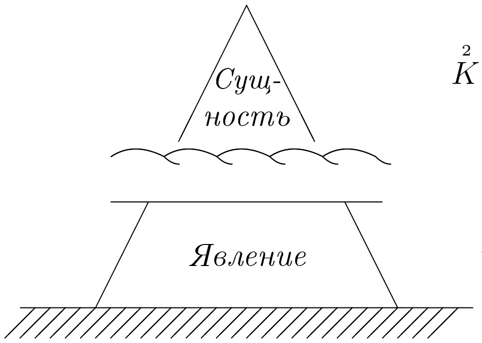
$$\forall\, \alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\, i, k, \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;\, ik}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{\alpha i} & a_{\alpha k} & 0 \\ 0 & a_{\beta i} & a_{\beta k} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$a_{\alpha i} \,=\, \ell_{\alpha i} - b_o \,=\, \xi_1(\alpha) x^1(i) \,=\, a_\alpha \frac{t_i^2}{2}.$$

Итак, сущность кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из одной и той же точки при нулевой начальной скорости состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, движущимися из одной точки с нулевой начальной скоростью и различными ускорениями, и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равномерно движущееся тело $\overleftarrow{\alpha}$ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждое событие $\vec{i}$ является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.



$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} = b_o + a_\alpha \frac{t_i^2}{2}$$

Явление и сущность кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из одной и той же точки с различными ускорениями.

Другими словами, кинематика равноускоренного движения тел, стартующих из одной и той же точки с различными ускорениями, является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сакральная формулировка кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из одной точки с различными ускорениями

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{a}_{\alpha i} = \xi_1 \, x^1 = \ell_{\alpha i} - b_o = a_\alpha \frac{t_i^2}{2}}$$

								$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место физической структуры, выражающей сущность кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из одной точки с различными ускорениями, среди всех возможных физических структур

6. Пространственная кинематика равноускоренного движения тел, стартующих из различных точек с различными начальными скоростями и с различными ускорениями

Рассмотрим множество тел, стартующих из различных точек b_α с различными начальными скоростями v_α и с различными ускорениями a_α .

В этом случае путь, пройденный телом,

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v_\alpha \frac{t_i}{1!} + a_\alpha \frac{t_i^2}{2!},$$

и, следовательно, будет иметь место следующее тождество:

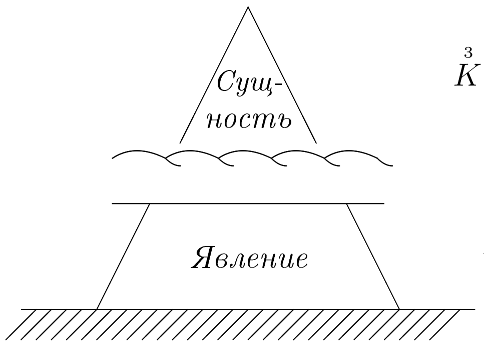
$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;\,ikmn}(\overset{2}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha m} & u_{\alpha n} \\ 0 & u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta m} & u_{\beta n} \\ 0 & u_{\gamma i} & u_{\gamma k} & u_{\gamma m} & u_{\gamma n} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha m} & u_{\alpha n} \\ u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta m} & u_{\beta n} \\ u_{\gamma i} & u_{\gamma k} & u_{\gamma m} & u_{\gamma n} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\overset{2}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\, x^1(i) + \xi_2(\alpha)\, x^2(i) + \sigma(\alpha) \;=\; \ell_{\alpha i} \;=\; b_\alpha + v_\alpha \frac{t_i}{1!} + a_\alpha \frac{t_i^2}{2!}.$$

Итак, сущность пространственной кинематики равноускоренного движения из разных точек при различных начальных скоростях состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\mathfrak{N}$, движущихся из разных точек с разными начальными скоростями и различными ускорениями, и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равноускоренно движущееся тело $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптовектором** сакрального двумерного криптовекторного пространства, а каждое событие i является **точкой** другого сакрального двумерного точечного пространства.

Другими словами, пространственная кинематика равноускоренного движения точек, стартующих с различными начальными скоростями и ускорениями, является сакральной криптовектор-точечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;\,ikmn}(\overset{2}{u}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} \;=\; b_\alpha + v_\alpha \frac{t_i}{1!} + a_\alpha \frac{t_i^2}{2!}$$

Явление и сущность кинематики равноускоренного движения точек, стартующих из разных точек с различными начальными скоростями и ускорениями.

Сакральная формулировка кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из разных точек с различными начальными скоростями и различными ускорениями

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;\,ikmn}(\overset{2}{u}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{2}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\,x^1(i) + \xi_2(\alpha)\,x^2(i) + \sigma(\alpha) \;=}$$

$$\boldsymbol{= \ell_{\alpha i} \;=\; b_\alpha + v_\alpha \frac{t_i}{1!} + a_\alpha \frac{t_i^2}{2!}}$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 & & & & & & & & \iddots \\
 & & & & & & \overset{4}{K}{}^{01} & \overset{4}{K}{}^{11} & \\
 & & & & & & \overset{4}{K}{}^{00} & \overset{4}{K}{}^{10} & \\
 & & & & \boxed{\overset{3}{K}{}^{01}} & \overset{3}{K}{}^{11} & & & \\
 & & \overset{2}{K}{}^{02} & & \overset{3}{K}{}^{00} & \overset{3}{K}{}^{10} & & & \\
 & & \overset{2}{K}{}^{01} & \overset{2}{K}{}^{11} & & & & & \\
 & & \overset{2}{K}{}^{00} & \overset{2}{K}{}^{10} & \overset{2}{K}{}^{20} & & & & \\
\overset{1}{K}{}^{01} & \overset{1}{K}{}^{11} & & & & & & & \\
\overset{1}{K}{}^{00} & \overset{1}{K}{}^{10} & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Место физической структуры, выражающей сущность кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из разных точек с разными скоростями и разными ускорениями, среди всех возможных физических структур.

7. И, наконец, рассмотрим множество тел, закон движения которых описывается полиномом степени n

$$\ell_{\alpha i} = c_o(\alpha) + c_1(\alpha)t_i + c_2(\alpha)\frac{t_i^2}{2!} + c_3(\alpha)\frac{t_i^3}{3!} + \ldots + c_n(\alpha)\frac{t_i^n}{n!}.$$

В этом случае будет иметь место следующее тождество:

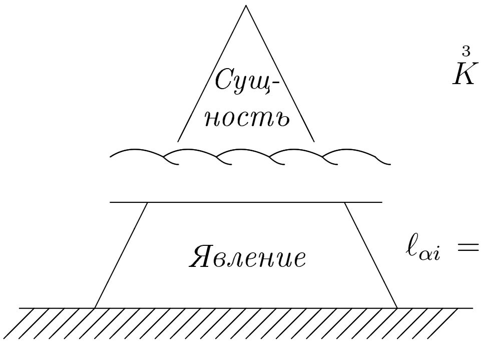
$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\, i_1, \ldots, i_{n+1}, i_{n+2} \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};i_1\ldots i_{n+1}i_{n+2}}(\overset{n}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha_1 i_1} & \ldots & u_{\alpha_1 i_{n+1}} & u_{\alpha_1 i_{n+2}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & u_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & u_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} & u_{\alpha_{n+1} i_{n+2}} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_{\alpha_1 i_1} & \ldots & u_{\alpha_1 i_{n+1}} & u_{\alpha_1 i_{n+2}} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ u_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & u_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} & u_{\alpha_{n+1} i_{n+2}} \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Итак, сущность пространственной кинематики множества тел, закон движения которых описывается полиномом степени n, состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое движущееся тело $\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптовектором** сакрального n-мерного криптовекторного пространства, а каждое событие i является **точкой** другого сакрального n-мерного точечного пространства.

Другими словами, пространственная кинематика множества тел, законы движения которых описываются полиномами степени n, является сакральной криптовектор-точечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;\,ikmn}(\overset{2}{u}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} = c_{o\alpha} + c_{1\alpha}\frac{t_i}{1!} + c_{2\alpha}\frac{t_i^2}{2!} + \cdots + c_{n\alpha}\frac{t_i^n}{n!}$$

Явление и сущность кинематики множества тел, закон движения которых описывается полиномом степени n

Сакральная формулировка кинематики множества тел, законы движения которых описываются полиномами степени n.

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};\,i_1\ldots i_{n+1}i_{n+2}}(\overset{n}{u}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{n}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\,x^1(i) + \ldots \xi_n(\alpha)\,x^n(i) + \sigma(\alpha) = \ell_{\alpha i}}$$

Литература к Примеру 14

[1]. *Эйнштейн Альберт*, Предисловие к “Оптике” Ньютона. //Сб. “Физика и реальность”, - М.: Наука. 1965, С. 34.

Пример 15. Сакральные потенциалы

1. Два множества состояний $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$

Каждая механическая или термодинамическая система может находиться в различных состояниях $i, k, \ldots$

В частности, статическое состояние материальной точки, находящейся под действием механической силы, в простейшем случае характеризуется двойным набором обобщённых координат:

тремя декартовыми координатами $x(i), y(i), z(i)$

и тремя проекциями сил $f_x(i), f_y(i), f_z(i)$.

Вместо того, чтобы изображать статическое состояние i механической системы одной точкой в шестимерном пространстве, мы будем говорить, что состояние i описывается своеобразным "диполем",

$$i = (\bar{i}, \underline{i}) = |i\rangle\langle i|,$$

состоящим из двух **криптоточек** $\bar{i} = |i\rangle$ и $\underline{i} = \langle i|$, каждая из которых характеризуется своим набором координат[77].

Другими словами, каждое состояние системы i мы будем рассматривать как **конец** $|i\rangle$ последовательности предшествующих состояний и **начало** $\langle i|$ новой последовательности:

$$\text{———} \quad \overbrace{|i\rangle\langle i|}^{i} \quad \underset{w_{\underline{i}\bar{k}}}{\text{—————}} \quad \overbrace{|k\rangle\langle k|}^{k} \quad \underset{w_{\underline{k}\bar{m}}}{\text{—————}} \quad \overbrace{|m\rangle\langle m|}^{m} \quad \text{———}$$

Криптоточку $|i\rangle$ мы будем называть правой криптоточкой и приписывать ей координаты, снабжённые верхними индексами $x^1(i), \ldots, x^n(i)$;

криптоточку $\langle i|$ мы будем называть левой криптоточкой и приписывать ей координаты, снабжённые нижними индексами $x_1(i), \ldots, x_n(i)$.

Итак,

$$i = (\bar{i}, \underline{i}) = \begin{cases} |i\rangle \to x^1(i), \ldots, x^n(i) \\ \langle i| \to x_1(i), \ldots, x_n(i) \end{cases}$$

В случае статической механической системы, обладающей потенциальной энергией $U(x, y, z)$, мы будем обозначать декартовы координаты x, y, z одной и той же буквой с индексом вверху, а компоненты силы f_x, f_y, f_z будем обозначать той же самой буквой, но с индексом внизу:

$$x(i), y(i), z(i) \to x^1(i), x^2(i), x^3(i)$$
$$f_x(i), f_y(i), f_z(i) \to x_1(i), x_2(i), x_3(i).$$

Как следует из Теории физических структур, в случае аддитивной физической структуры ранга (5,5) правая криптоточка $\bar{i}$ характеризуется, помимо

---

[77] Вспомним квантовомеханическую систему, состояние которой i описывается двумя различными векторами состояния – бра $\langle i| = \psi^*$ и кет $|i\rangle = \psi$.

трёх верхних координат $x^1(i), x^2(i), x^3(i)$, ещё одним контравариантным скрытым параметром $\overline{s}(i)$, а левая криптоточка $\underline{i}$ характеризуется, помимо трёх нижних координат $x_1(i), x_2(i), x_3(i)$, ещё одним ковариантным скрытым параметром $\underline{s}(i)$, то есть

$$i = (\overline{i}, \underline{i}) = \begin{cases} |i\rangle \to x^1(i), x^2(i), x^3(i); \overline{s}(i) \\ \langle i| \to x_1(i), x_2(i), x_3(i); \underline{s}(i) \end{cases}$$

Отношение между двумя состояниями i и k системы характеризуется репрезентатором $w_{\underline{i}\overline{k}}$, играющим роль расстояния между левой криптоточкой $\underline{i}$ и правой криптоточкой $\overline{k}$.

2. Сакральные потенциалы первого рода

Говорят, что механическая система обладает потенциальной энергией $U(x, y, z)$, если **три** компоненты силы f_x, f_y, f_z следующим образом выражаются через **одну** скалярную функцию трёх переменных:

$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad f_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1}$$

Но что скрывается за этой привычной формулировкой? Что такое потенциал и почему он связан с силой таким образом?

За достаточно тривиальным понятием потенциала скрывается нетривиальный факт существования двух дуально сопряжённых скалярных функций $U^0(x^1, \ldots, x^n)$ и $U^1(x_1, \ldots, x_n)$ и двух групп переменных $x^1, \ldots, x^n$ и $x_1, \ldots, x_n$, связанных между собой билинейным многочленом

$$\boxed{U^0(x^1, \ldots, x^n) + x_1 x^1 + \ldots + x_n x^n - U^1(x_1, \ldots, x_n) = 0} \tag{2}$$

В самом деле, дифференцируя равенство (2), получаем:

$$\left(\frac{\partial U^0}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(-\frac{\partial U^1}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu = 0 \tag{3}$$

Чтобы равенство (2) имело какой-либо смысл и представляло собой **тождество** относительно переменных $x^1, \ldots, x^n$ либо $x_1, \ldots, x_n$, необходимо выразить, например, одну группу переменных $x_1, \ldots, x_n$ через другую группу переменных $x^1, \ldots, x^n$:

$$x_\mu = x_\mu(x^1, \ldots, x^n). \tag{4}$$

Если в качестве функции (4) взять

$$x_\mu = -\frac{\partial U^0}{\partial x^\mu}(x^1, \ldots, x^n), \tag{5}$$

то в этом случае равенство (3) примет вид

$$\left(-\frac{\partial U^1}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu = 0,$$

так как $dx_1, \ldots, dx_n$ — независимые дифференциалы, то отсюда следуют равенства, зеркально симметричные равенствам (5):

$$x^\mu = \frac{\partial U^1}{\partial x_\mu}(x_1, \ldots, x_n). \tag{6}$$

В рассмотренном выше случае $n = 3$

$$x^1, x^2, x^3 \to x, y, z$$
$$x_1, x_2, x_3 \to f_x, f_y, f_z$$

и равенства (5) и (6) принимают вид:

$$\begin{aligned}
f_x &= -\frac{\partial U^0}{\partial x}(x, y, z),\\
f_y &= -\frac{\partial U^0}{\partial y}(x, y, z),\\
f_z &= -\frac{\partial U^0}{\partial z}(x, y, z),\\
x &= \frac{\partial U^1}{\partial f_x}(f_x, f_y, f_z),\\
y &= \frac{\partial U^1}{\partial f_y}(f_x, f_y, f_z),\\
z &= \frac{\partial U^1}{\partial f_z}(f_x, f_y, f_z),
\end{aligned}$$

где

$$U^1(f_x, f_y, f_z) = U^0\big(x(f_x, f_y, f_z), y(f_x, f_y, f_z), z(f_x, f_y, f_z)\big) +$$

$$+ x(f_x, f_y, f_z)f_x + y(f_x, f_y, f_z)f_y + z(f_x, f_y, f_z)f_z.$$

В частности, если $U^0(x) = x^p$, то

$$f(x) = -\frac{\partial U^0}{\partial x} = -px^{p-1},$$

$$x(f) = \left(-\frac{f}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

$$U^1(f) = U^0\big(x(f)\big) + x(f)f = (1-p)\left(-\frac{f}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}},$$

$$\frac{\partial U^1}{\partial f} = \left(-\frac{f}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = x(f).$$

Итак, возникает принципиальный вопрос — откуда берётся равенство (2), содержащее билинейный многочлен?

Легко заметить, что это равенство получается из репрезентатора аддитивной физической структуры ранга $(n+2, n+2)$, у которой верификатор и репрезентатор имеют следующий вид:

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+2};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{n+2}}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \underline{s}(i)$$

при двух дополнительных условиях:

условия зависимости скрытых параметров $\overline{s}$ и $\underline{s}$ от соответствующих координат,

$$\overline{s} = U^0(x^1, \ldots, x^n),$$
$$\underline{s} = -U^1(x_1, \ldots, x_n),$$

и условия рефлексии $\overset{n}{w}_{\underline{i}\overline{i}} = 0$.

Таким образом, получаем равенство (2):

$$U^0(x^1, \ldots, x^n) + x_1x^1 + \ldots + x_nx^n - U^1(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

и $2n$ самосогласованных уравнений:

$$\frac{\partial U^0}{\partial x^\mu}(x^\mu) = -x_\mu,$$

$$\frac{\partial U^1}{\partial x_\mu}(x_\mu) = x^\mu,$$

как следствие teorema egregium Михайличенко.

Заметим, что именно здесь, в рамках Теории физический структур, возникает необходимость введения верхних и нижних индексов для обозначения двух групп переменных и введения правила суммирования Эйнштейна:

$$x_1x^1 + \ldots + x_nx^n \equiv x_\mu x^\mu.$$

Переменные с нижними индексами $x_1, \ldots, x_n$ мы будем называть **ковариантными**, а переменные с верхними индексами $x^1, \ldots, x^n$ — **контравариантными**.

Заметим, что фундаментальное равенство (2), возникающее в рамках Теории физических структур, можно трактовать не только как фундамент теории потенциала, но и как источник двух преобразующих функций $F^0(x^\mu)$ и $F^1(x_\mu)$, осуществляющих преобразование от одних переменных x^μ к другим x_μ и обратно — от x_μ к x^μ:

$$x_\mu = -\frac{\partial F^0}{\partial x^\mu}(x^1, \ldots, x^\nu),$$

$$x^\mu = \frac{\partial F^1}{\partial x_\mu}(x_1, \ldots, x_\nu).$$

3. Сакральные потенциалы второго рода.

Существуют области физики, такие как, например, термодинамика или аналитическая механика, в которых для описания состояния системы используются четыре группы физических величин:

$$
\begin{aligned}
&x^1, \dots, x^n; \qquad && \xi^1, \dots, \xi^n; \\
&x_1, \dots, x_n; \qquad && \xi_1, \dots, \xi_n,
\end{aligned}
$$

и, соответственно, четыре сакральные потенциала, зависящие от двух групп переменных:

$$
\begin{aligned}
&A^{00}(x^1, \dots, x^n; \xi^1, \dots, \xi^n), \qquad && A^{01}(x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n), \\
&A^{10}(x_1, \dots, x_n; \xi^1, \dots, \xi^n), \qquad && A^{11}(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n),
\end{aligned}
$$

и обладающие следующими замечательными свойствами симметрии:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu, \qquad && \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu, \\
&\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu, \qquad && \frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu, \\
&\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu, \qquad && \frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu, \\
&\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu, \qquad && \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu.
\end{aligned}
$$

При этом каждый из трёх потенциалов,

$$
A^{01}(x^\mu, \xi_\nu), \qquad A^{10}(x_\mu, \xi^\nu), \qquad A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)
$$

выражается через один произвольно заданный потенциал $A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$ с помощью следующих соотношений:

$$
\begin{aligned}
A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) &= A^{00}(x^\mu, \xi^\nu), \\
A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) &= A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + \xi_\nu \xi^\nu, \\
A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) &= A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu, \\
A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) &= A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu.
\end{aligned}
$$

Посмотрим, как такого рода потенциалы возникают в рамках Теории физических структур.

Утверждается, что общая теория сакральных потенциалов представляет собой криптоточечную сакральную геометрию на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ с одним “расстоянием”.

Итак, имеем два множества:
$\underline{\mathfrak{M}} = \{\underline{i}_1, \underline{i}_2 \ldots\}$ — множество **начальных** состояний и
$\overline{\mathfrak{M}} = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots\}$ — множество **конечных** состояний,
и соответствующий репрезентатор $w_{\underline{i}\overline{k}}$, играющий в сакральной геометрии роль “расстояния” между левым состоянием системы $\underline{i}$ и правым состоянием системы $\overline{k}$.

Если на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ имеет место физическая структура ранга (r,r) , то это означает, что между r^2 репрезентаторами $w_{\underline{i}_\lambda,\overline{k}_\rho}$ $(\lambda,\rho=1,2,\ldots,r)$ существует какая-то, заранее неизвестная, связь:

$$\begin{array}{l}\Phi(w_{\underline{i}_1\overline{k}_1},\ldots,w_{\underline{i}_1\overline{k}_r}\\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \equiv 0.\\ \quad w_{\underline{i}_r\overline{k}_1},\ldots,w_{\underline{i}_r\overline{k}_r})\end{array}$$

Согласно theorema egregium Михайличенко имеется два, и только два (!), типа решений этого сакрального уравнения.

1. Первый тип решений, лежащих в основании **векторной** сакральной геометрии, имеет следующий вид:
верификатор

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+1};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{n+1}}(\overset{n}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & \overset{n}{a}_{i_1k_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{i_1k_r} & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \overset{n}{a}_{i_rk_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{i_rk_r} & 1\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

репрезентатор

$$\overset{n}{a}_{\underline{i}\overline{k}} = x_1(i)x^1(k)+\ldots+x_n(i)x^n(k) = \Big(0; x_1(i),\ldots,x_n(i); 0\Big) \times \begin{pmatrix} 0\\ x^1(k)\\ \vdots\\ x^n(k)\\ 0 \end{pmatrix},$$

где $n=r-1$.

2. Второй тип решений, лежащих в основании **криптоточечной** сакральной геометрии, имеет следующий вид:
верификатор

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+2};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{n+2}}(\overset{n}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1\\ -1 & \overset{n}{w}_{i_1k_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{i_1k_r}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -1 & \overset{n}{w}_{i_rk_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{i_rk_r} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

репрезентатор

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k)+x_1(i)x^1(k)+\ldots+x_n(i)x^n(k)+\underline{s}(i) = \Big(1; x_1(i),\ldots,x_n(i); \underline{s}(i)\Big) \times \begin{pmatrix} \overline{s}(k)\\ x^1(k)\\ \vdots\\ x^n(k)\\ 1 \end{pmatrix},$$

где $n=r-2$.

Сакральные потенциалы возникают при рассмотрении решений второго типа.

Итак, рассмотрим аддитивную физическую структуру ранга $(m+n+2; m+n+2)$:

верификатор

$$\overset{m+n+2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{m+n+2};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{m+n+2}}(\overset{m+n}{w}) \equiv 0,$$

репрезентатор

$$\overset{m+n}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) + \underline{s}(i) =$$
$$= \big(1; x_1(i), \ldots, x_m(i), \xi_1(i), \ldots, \xi_n(i), \underline{s}(i)\big) \times \begin{pmatrix} \overline{s}(k) \\ x^1(k) \\ \ldots \\ x^m(k) \\ \xi^1(k) \\ \vdots \\ \xi^n(k) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следующий шаг состоит в дополнительном требовании, чтобы скрытые параметры $\underline{s}(i)$ и $\overline{s}(k)$ являлись произвольными функциями соответствующих ко- и контравариантных координат, то есть:

$$\underline{s}(i) = -A^{11}\big(x_1(i), \ldots, x_m(i); \xi_1(i), \ldots, \xi_n(i)\big)$$
$$\overline{s}(k) = A^{00}\big(x^1(k), \ldots, x^m(k); \xi^1(k), \ldots, \xi^n(k)\big).$$

Таким образом, имеем аддитивную физическую структуру ранга $(m+n+2, m+n+2)$ с репрезентатором

$$\overset{m+n}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k), \xi^\nu(k)\big) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) - A^{11}\big(x_\mu(i), \xi_\nu(i)\big).$$

Наложим второе дополнительное условие – условие **рефлексии**:

$$\overset{m+n}{w}{}_{\underline{i}\overline{i}} = 0.$$

В результате дуально сопряжённые потенциалы $A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$ и $A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$ оказываются связанными между собой с помощью **двух билинейных** многочленов:

$$\boxed{A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) \equiv 0} \tag{7}$$

После дифференцирования соотношения (7) получим:

$$\left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu} + \xi_\nu\right) d\xi^\nu +$$
$$+ \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} + \xi^\nu\right) d\xi_\nu = 0. \tag{8}$$

Чтобы равенство (7) представляло собой **тождество** относительно переменных x^μ, ξ^ν (или x_μ, ξ_ν), необходимо выразить переменные x_μ, ξ_ν через x^μ, ξ^ν :

$$x_\mu = x_\mu(x^1, \ldots, x^m; \xi^1, \ldots, \xi^n) \tag{9}$$

$$\xi_\nu = \xi_\nu(x^1, \ldots, x^m; \xi^1, \ldots, \xi^n, \tag{10}$$

(или выразить x^μ, ξ^ν через x_μ, ξ_ν), в результате чего равенство (7) превратится в тождество относительно переменных $x^1, \ldots, x^m; \xi^1, \ldots, \xi^n$:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\mu) + x_\mu(x^\mu, \xi^n)x^\mu + \xi_\nu(x^\mu, \xi^\nu)\xi^\nu - A^{11}\big(x_\mu(x^\mu, \xi^\nu), \xi_\nu(x^\mu, \xi^\nu)\big) \equiv 0.$$

Если в качестве функций (9) и (10) взять

$$x_\mu = -\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu)$$

и

$$\xi_\nu = -\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\nu, \xi^\nu),$$

то в этом случае равенство (7) примет вид:

$$\left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} + \xi^\nu\right) d\xi_\nu = 0. \tag{11}$$

Так как $dx_1, \ldots, dx_m$ и $d\xi_1, \ldots, d\xi_n$ — независимые дифференциалы, то из равенства (11) следует $m+n$ соотношений:

$$\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu \qquad \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu.$$

Итак, из Теории физических структур следует существование двух сакральных дуально сопряжённых потенциалов $A^{00}(x^1, \ldots, x^m; \xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $A^{11}(x_1, \ldots, x_m; \xi_1, \ldots, \xi_n)$, играющих роль скрытых параметров $\overline{s}$ и $-\underline{s}$ и связанных между собой двумя билинейными многочленами:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0.$$

В итоге получаем $2m+2n$ самосогласованных уравнений:

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu, \qquad \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu,$$

$$\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu, \qquad \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu.$$

4. Ещё два дуально сопряжённых потенциала $A^{01}(x^\mu, \xi_\nu)$ и $A^{10}(x_\mu, \xi^\nu)$

Итак, мы видим, что из Теории физических структур следует существование двух фундаментальных сакральных дуально сопряжённых потенциала $A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$ и $A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$, представляющих собой контра- и ковариантные скрытые параметры репрезентатора

$$\overset{m+n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) + \overline{s}(i).$$

Из факта существования потенциала $A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$ (или потенциала $A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$) следует существование ещё двух сакральных потенциалов $A^{10}(x_\mu, \xi^\nu)$ и $A^{01}(x^\mu, \xi_\nu)$.

В самом деле, из равенств

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu \quad \text{и} \quad \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu$$

следует

$$dA^{00} = -x_\mu dx^\mu - \xi_\nu d\xi^\nu. \tag{12}$$

Перепишем равенство (12) в виде:

$$dA^{00} = -d(x_\mu x^\mu) + x^\mu dx_\mu - \xi_\nu d\xi^\nu$$

или

$$d(A^{00} + x_\mu x^\mu) = x^\mu dx_\mu - \xi_\nu d\xi^\nu,$$

то есть

$$dA^{10} = x^\mu dx_\mu - \xi_\nu dx^\nu,$$

где

$$A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu. \tag{13}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu \qquad \frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu.$$

С другой стороны, равенство (12) можно переписать в виде:

$$dA^{00} = -x_\mu dx^\mu - d(\xi_\nu \xi^\nu) + \xi^\nu d\xi_\nu \tag{14}$$

или

$$d(A^{00} + \xi_\nu \xi^\nu) = -x_\mu dx^\mu + \xi^\nu d\xi_\nu,$$

то есть

$$dA^{01} = -x_\mu dx^\mu + \xi^\nu d\xi_\nu,$$

где

$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + \xi_\nu \xi^\nu. \tag{15}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu, \qquad \frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu.$$

Если в качестве исходного взять потенциал $A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$, то из соотношений

$$\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} = x^\mu \qquad \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} = \xi^\nu$$

следует:

$$dA^{11} = x^{\mu}dx_{\mu} + \xi^{\nu}d\xi_{\nu}. \tag{16}$$

Перепишем равенство (16) в виде:

$$dA^{11} = d(x_{\mu}x^{\mu}) - x_{\mu}dx^{\mu} + \xi^{\nu}d\xi_{\nu}$$

или

$$d(A^{11} - x_{\mu}x^{\mu}) = -x_{\mu}dx^{\mu} + \xi^{\nu}d\xi_{\nu},$$

то есть

$$dA^{01} = -x_{\mu}dx^{\mu} + \xi^{\nu}d\xi_{\nu},$$

где

$$A^{01} = (x^{\mu}, \xi_{\nu}) = A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) - x_{\mu}x^{\mu}. \tag{17}$$

Аналогичным образом приходим к соотношению:

$$A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) = A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) - \xi_{\nu}\xi^{\mu}. \tag{18}$$

Заметим, что факт существования соотношений (13) и (15)

$$A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + x_{\mu}x^{\mu} - A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) = 0$$

и

$$A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + \xi_{\nu}\xi^{\nu} - A^{01}(x^{\mu}, \xi_{\nu}) = 0,$$

можно истолковывать как результат операции рефлексии двух репрезентаторов:

$$\overset{m}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^{\mu}(k), \xi^{\nu}(k)\big) + x_{\mu}(i)x^{\mu}(k) - A^{10}\big(x_{\mu}(i), \xi^{\nu}(i)\big)$$

и

$$w\,(2)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^{\mu}(k), \xi^{\nu}(k)\big) + \xi_{\nu}(i)\xi^{\nu}(k) - A^{01}\big(x^{\mu}(i), \xi_{\nu}(i)\big),$$

имеющих, как мы увидим ниже, в термодинамике простой смысл.

Итак, исходя из фундаментальных потенциалов $A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu})$ и $A^{11}(\xi_{\mu}, \xi_{\nu})$, мы получаем ещё два новых дуально сопряжённых потенциала,

$$A^{01}(x^{\mu}, \xi_{\nu}) = A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + \xi_{\nu}\xi^{\nu} = A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) - x_{\mu}x^{\mu}$$

$$A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) = A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + x_{\mu}x^{\mu} = A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) - \xi_{\nu}\xi^{\nu},$$

связанных между собой следующими соотношениями:

$$A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + x_{\mu}x^{\mu} - A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) = 0\,,$$

$$A^{01}(x^{\mu}, \xi_{\nu}) + x_{\mu}x^{\mu} - A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) = 0\,,$$

$$A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + \xi_{\nu}\xi^{\nu} - A^{01}(x^{\mu}, \xi_{\nu}) = 0\,,$$

$$A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) + \xi_{\nu}\xi^{\nu} - A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) = 0$$

или

$$
\begin{aligned}
A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) &= A^{00}(x^\mu,\xi^\nu)\ ,\\
A^{01}(x^\mu,\xi_\nu) &= A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) + \xi_\nu\xi^\nu\ ,\\
A^{10}(x_\mu,\xi^\nu) &= A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) + x_\mu x^\mu\ ,\\
A^{11}(x_\mu,\xi_\nu) &= A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu\xi^\nu
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) &= A^{11}(x_\mu,\xi_\nu) - x_\mu x^\mu - \xi_\nu\xi^\nu\ ,\\
A^{01}(x^\mu,\xi_\nu) &= A^{11}(x_\mu,\xi_\nu) - x_\mu x^\mu\ ,\\
A^{10}(x_\mu,\xi^\nu) &= A^{11}(x_\mu,\xi_\nu) - \xi_\nu\xi^\nu\ ,\\
A^{11}(x_\mu,\xi_\nu) &= A^{11}(x_\mu,\xi_\nu)\ ,
\end{aligned}
$$

то есть

$$\boxed{A^{00} - A^{01} - A^{10} + A^{11} = 0}$$

или

$$\overset{1}{K}{}^{11}(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & A^{00} & A^{01} \\ -1 & A^{10} & A^{11} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

В итоге получаем полную систему $4m+4n$ самосогласованных уравнений, связывающих между собой четыре группы каких-либо физических величин:

$$
\begin{array}{ll}
x^1,\ldots,x^m; & \xi^1,\ldots,\xi^n;\\
x_1,\ldots,x_m; & \xi_1,\ldots,\xi_n;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu,\xi^\nu) = -x_\mu, & \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu,\xi^\nu) = -\xi_\nu,\\[2ex]
\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu,\xi_\nu) = -x_\mu, & \frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu,\xi_\nu) = \xi^\nu,\\[2ex]
\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu,\xi^\nu) = x^\mu, & \frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu,\xi^\nu) = -\xi_\nu,\\[2ex]
\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu,\xi_\nu) = x^\mu, & \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu,\xi_\nu) = \xi^\nu,\\[2ex]
\text{где}\ \ \mu = 1,2,\ldots,m & \nu = 1,2,\ldots,n\ .
\end{array}
$$

Итак, общая теория сакральных потенциалов представляет собой криптоточечную сакральную геометрию на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ с одним “фундаментальным расстоянием”.

Образно говоря, поливариантная термодинамика – это классический балет с участием $m+n$ пар

$$x^1,\dots,x^m; \qquad \xi^1,\dots,\xi^n;$$

$$x_1,\dots,x_m; \qquad \xi_1,\dots,\xi_n;$$

Сакральная формулировка общей теории сакральных потенциалов

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{m+n+1}{K}{}^{11}_{i_1\dots i_{m+n+2};\,k_1\dots k_{m+n+2}}\big(\overset{m+n}{w}\big) = 0.}}$$

$$\overset{m+n}{w}{}_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k),\xi^\nu(k)\big) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \xi_\alpha(i)\xi^\alpha(k) - A^{11}\big(x_\mu(i),\xi_\nu(i)\big)$$

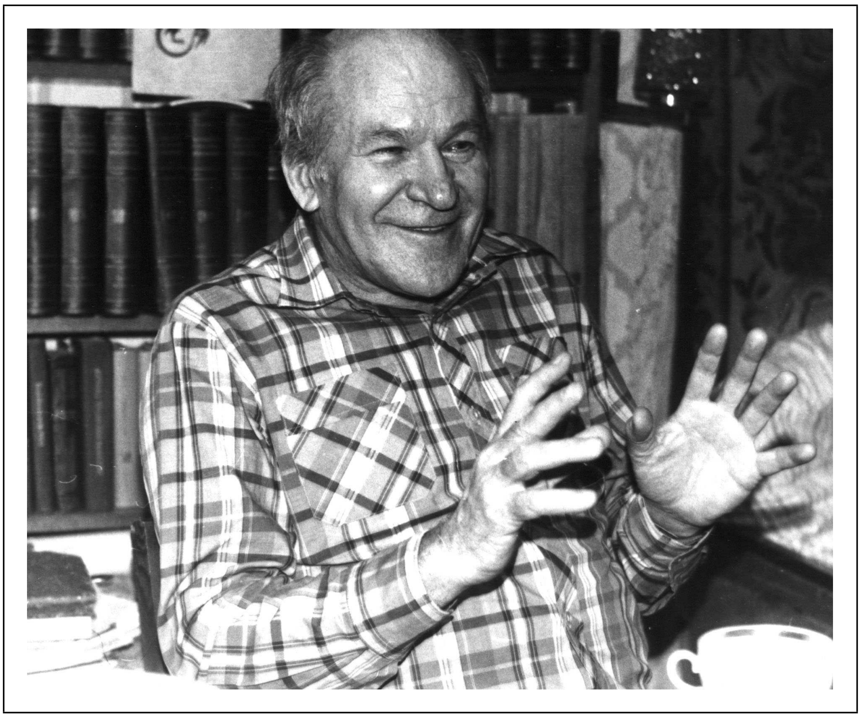
$$\boxed{\overset{m+n}{w}{}_{\underline{i}\bar{i}} = A^{00}\big(x^\mu(i),\xi^\nu(i)\big) + x_\mu(i)x^\mu(i) + \xi_\alpha(i)\xi^\alpha(i) - A^{11}\big(x_\mu(i),\xi_\nu(i)\big) \equiv 0}$$

$$\overset{m}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k),\xi^\nu(k)\big) + x_\mu(i)x^\mu(k) - A^{10}\big(x_\mu(i),\xi^\nu(i)\big)$$

$$\boxed{\overset{m}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{i}} = A^{00}\big(x^\mu(i),\xi^\nu(i)\big) + x_\mu(i)x^\mu(i) - A^{10}\big(x_\mu(i),\xi^\nu(i)\big) \equiv 0}$$

$$\overset{n}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k),\xi^\nu(k)\big) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) - A^{01}\big(x^\mu(i),\xi_\nu(i)\big)$$

$$\boxed{\overset{n}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{i}} = A^{00}\big(x^\mu(i),\xi^\nu(i)\big) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(i) - A^{01}\big(x^\mu(i),\xi_\nu(i)\big) \equiv 0}$$



Термодинамика – это просто!

Пример 16. Аналитическая термодинамика

1. Моновариантная термодинамика

Рассмотрим множество состояний произвольного термодинамического тела. Оно характеризуется четырьмя физическими величинами: температурой T, энтропией S, давлением p, объемом V.

В случае моновариантной термодинамики полная система самосогласованных уравнений, связывающих между собой $T,\ S,\ p,\ V$ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial U}{\partial S}(S,V)=T & \dfrac{\partial U}{\partial V}(S,V)=-p \\ \dfrac{\partial H}{\partial S}(S,p)=T & \dfrac{\partial H}{\partial p}(S,p)=V \\ \dfrac{\partial F}{\partial T}(T,V)=-S & \dfrac{\partial F}{\partial V}(T,V)=-p \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial T}(T,p)=-S & \dfrac{\partial \Phi}{\partial p}(T,p)=V \end{array}, \tag{1}$$

где $U,\ H,\ F,\ \Phi$ — четыре термодинамических потенциала;

$U(S,V)$ — внутренняя энергия,
$H(S,p)$ — энтальпия,
$F(T,V)$ — свободная энергия,
$\Phi(T,p)$ — энергия Гиббса.

Система самосогласованных уравнений (1) получается из основного уравнения термодинамики

$$dU = TdS - pdV \tag{2}$$

следующим образом:

Уравнение (2) может быть переписано в виде:

$$dU = TdS - d(pV) + Vdp$$

или

$$d(U + pV) = TdS + Vdp,$$

то есть

$$dH = TdS + Vdp, \tag{3}$$

где

$$\boxed{H(S,p) = U(S,V) + pV}$$

Уравнение (2) может быть переписано в новом виде:

$$dU = d(TS) - SdT - pdV$$

или

$$d(U - TS) = -SdT - pdV,$$

то есть

$$dF = -SdT - pdV, \tag{4}$$

где

$$\boxed{F(T, V) = U(S, V) - TS.}$$

Уравнение (2) может быть переписано в виде:

$$dU = d(TS) - SdT - d(pV) + Vdp$$

или

$$d(U - TS + pV) = -SdT + Vdp,$$

то есть

$$d\Phi = -SdT + Vdp, \tag{5}$$

где

$$\boxed{\Phi(T, p) = U(S, V) - TS + pV.}$$

Из соотношений (2)–(5) следует полная система самосогласованных уравнений (1).

Но откуда берётся основное уравнение термодинамики (2)?

При рассмотрении Примера 15 было показано, как сакральные потенциалы второго рода возникают в Теории физических структур.

В самом общем случае четыре сакральных потенциала

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu), \quad A^{01}(x^\mu, \xi_\nu), \quad A^{10}(x_\mu, \xi^\nu), \quad A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$$

связаны между собой с помощью двух билинейных многочленов $x_\mu x^\mu$ и $\xi_\nu \xi^\nu$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0,\\
&A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu - A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = 0,\\
&A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + \xi_\nu \xi^\mu - A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) = 0,
\end{aligned}$$

откуда после дифференцирования возникает полная система самосогласованных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu, &&\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu,\\
&\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu, &&\frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu,\\
&\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu, &&\frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu,\\
&\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu &&\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu\\
&\mu = 1, 2, \ldots, m &&\nu = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{6}$$

Полагая $m = n = 1$ и вводя новые обозначения:

$$x^1 = S \qquad \xi^1 = V$$
$$x_1 = -T \qquad \xi_1 = p$$

$$A^{00}(x^1, \xi^1) = U(S, V)$$
$$A^{01}(x^1, \xi_1) = H(S, p)$$
$$A^{10}(x_1, \xi^1) = F(T, V)$$
$$A^{11}(x_1, \xi_1) = \Phi(T, p)$$

перепишем исходную систему самосогласованных уравнений (6) в виде системы уравнений (1), лежащей в основании моновариантной термодинамики.

Заметим, что введённые в теории сакральных потенциалов два репрезентатора,

$$\overset{m}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k), \xi^\nu(k)\big) + x_\mu(i)x^\mu(k) - A^{10}\big(x_\mu(i), \xi^\nu(i)\big)$$
$$\overset{n}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k), \xi^\nu(k)\big) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) - A^{01}\big(x^\mu(i), \xi_\nu(i)\big),$$

в новых обозначениях имеют вид:

$$\overset{1}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}} = U_k - T_i S_k - F_i, \tag{7}$$
$$\overset{1}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}} = U_k + p_i V_k - H_i. \tag{8}$$

С другой стороны, исходя из основного уравнения термодинамики (2), нетрудно показать, что

работа, совершённая системой при переходе из состояния $\underline{i}$ в состояние $\overline{k}$ сначала по изотерме, а потом по адиабате, равна

$$\overset{TS}{A}_{\underline{i}\overline{k}} = U_k - T_i S_k - F_I; \tag{9}$$

аналогичным образом можно показать, что количество тепла, полученное системой при переходе из состояния $\underline{i}$ в состояние $\overline{k}$ сначала по изобаре, а затем по изохоре, равно

$$\overset{pV}{Q}_{\underline{i}\overline{k}} = U_k + p_i V_k - H_i. \tag{10}$$

Сравнивая равенства (7) и (9), можно утверждать, что репрезентатор

$$\overset{1}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}} = \overset{TS}{Q}_{\underline{i}\overline{k}}$$

имеет простой физический смысл работы, совершаемой системой при переходе из состояния $\underline{i}$ в состояние $\overline{k}$ сначала по изохоре, а затем по адиабате.

Точно так же, сравнивая равенство (8) и (10), можем утверждать, что репрезентатор

$$\overset{1}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}} = \overset{pV}{Q}_{\underline{i}\overline{k}}$$

имеет простой физический смысл количества тепла, полученного системой при переходе из состояния $\underline{i}$ в состояние $\overline{k}$ сначала по изобаре, а затем по изохоре.

Итак, устанавливаем, что три термодинамических потенциала $U(S,V)$, $F(T,V)$ и $H(S,p)$ являются скрытыми параметрами двух репрезентаторов $\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\overline{k}}$ и $\overset{1}{w}\,(2)_{\underline{i}\overline{k}}$;

внутренняя энергия $U(S,V)$ играет роль контравариантного скрытого параметра, взятого со знаком минус, первого $\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\overline{k}}$ и второго $\overset{1}{w}\,(2)_{\underline{i}\overline{k}}$ репрезентатора;

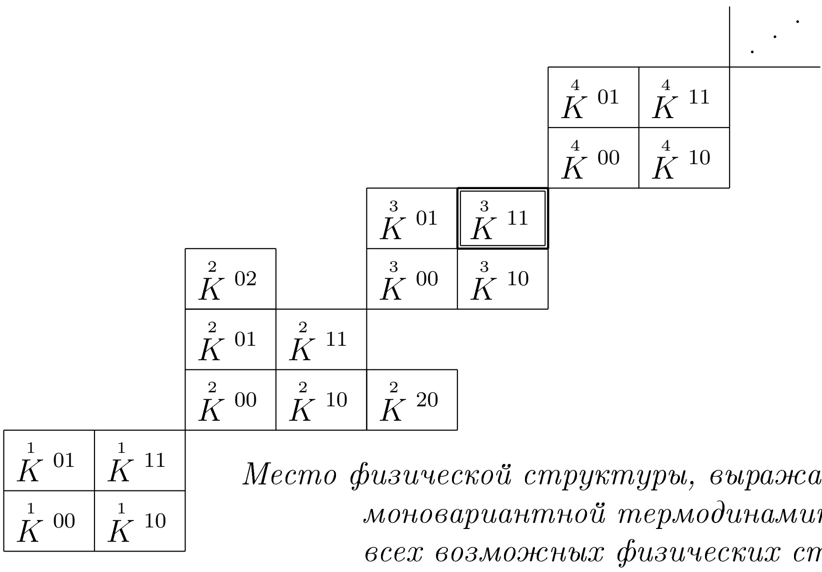
свободная энергия $F(T,V)$ играет роль ковариантного скрытого параметра первого репрезентатора $\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\overline{k}}$;

а энтальпия $H(S,p)$ играет роль ковариантного скрытого параметра второго репрезентатора $\overset{1}{w}\,(2)_{\underline{i}\overline{k}}$.

Оставшийся четвертый термодинамический потенциал – энергия Гиббса $\Phi(T,p)$ – играет роль ковариантного скрытого параметра репрезентатора фундаментальной физической структуры ранга (4,4).

Образно говоря, моновариантная термодинамика – это классический балет с участием двух пар:

$$x^1 = S \qquad \xi^1 = V$$
$$x_1 = -T \qquad \xi_1 = p,$$



Место физической структуры, выражающей сущность моновариантной термодинамики, среди всех возможных физических структур.

Сакральная формулировка моновариантной термодинамики

$$\boxed{\overset{3}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{11}}_{\underline{i}_1\,\underline{i}_2\,\underline{i}_3\,\underline{i}_4;\,\overline{k}_1\,\overline{k}_2\,\overline{k}_3\,\overline{k}_4}(\overset{2}{\boldsymbol{w}}) \equiv \mathbf{0}}$$

$$\overset{2}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^1(k), \xi^1(k)\big) + x_1(i)x^1(k) + \xi_1(i)\xi^1(k) - A^{11}\big(x_1(i), \xi_1(i)\big) =$$
$$= U(S_k, V_k) - T_iS_k + p_iV_k - \Phi(T_i, p_i)$$

$$\boxed{\overset{2}{w}_{\underline{i}\bar{i}} = U_i - T_iS_i + p_iV_i - \Phi_i \equiv 0.}$$

$$\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^1(k), \xi^1(k)\big) + x_1(i)x^1(k) - A^{10}\big(x_1(i), \xi^1(i)\big) =$$
$$= U(S_k, V_k) - T_iS_k - F(T_i, V_i) = \overset{TS}{A}_{\underline{i}\bar{i}}$$

$$\boxed{\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{i}} = U_i - T_iS_i - F_i \equiv 0.}$$

$$\overset{1}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^1(k), \xi^1(k)\big) + \xi_1(i)\xi^1(k) - A^{01}\big(x^1(i), \xi_1(i)\big) =$$
$$= U(S_k, V_k) + p_iV_k - H(S_i, p_i) = \overset{pV}{Q}_{\underline{i}\bar{k}}$$

$$\boxed{\overset{1}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{i}} = U_i + p_iV_i - H_i \equiv 0.}$$

2. Поливариантная термодинамика

Рассмотрим множество состояний произвольного термодинамического тела, находящегося под действием различных обобщённых сил [1]. Оно характеризуется четырьмя группами переменных:

температурой T,
энтропией S,
обобщёнными силами $A_1, \ldots, A_n$ и
обобщёнными координатами $a^1, \ldots, a^n$.

В случае поливариантной термодинамики полная система самосогласованных уравнений, связывающих между собой $T, S.A_1, \ldots, A_n, a^1, \ldots, a^n$, имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial S}(S;a^1,\ldots,a^n)=T && \frac{\partial U}{\partial a^\nu}(S;a^1,\ldots,a^n)=-A_\nu\\
&\frac{\partial H}{\partial S}(S;A_1,\ldots,A_n)=T && \frac{\partial H}{\partial A_\nu}(S;A_1,\ldots,A_n)=a^\nu\\
&\frac{\partial F}{\partial T}(T;a^1,\ldots,a^n)=-S && \frac{\partial F}{\partial a^\nu}(T;a^1,\ldots,a^n)=-A_\nu\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial T}(T;A_1,\ldots,A_n)=-S && \frac{\partial \Phi}{\partial A_\nu}(T;A_1,\ldots,A_n)=a^\nu\ ,
\end{aligned} \tag{11}
$$

где U, H, F, Φ – четыре термодинамических потенциала, связанные между собой следующими соотношениями:

$U(S;a^1,\ldots,a^n)=U(S;a^1,\ldots,a^n)$ — внутренняя энергия,

$H(S;A_1,\ldots,A_n)=U(S;a^1,\ldots,a^n)+A_\mu a^\mu$ — энтальпия,

$F(T;a^1,\ldots,a^n)=U(S;a^1,\ldots,a^n)-TS$ — свободная энергия,

$\Phi(T;A_1,\ldots,A_n)=U(T;A_1,\ldots,A_n)+A_\mu a^\mu-TS$ — энергия Гиббса.

$$\mu=1,2,\ldots,n$$

Полная система $4+4n$ самосогласованных уравнений (11) может быть получена из основного уравнения поливариантной термодинамики:

$$dU=TdS-A_\nu da^\nu. \tag{12}$$

Но откуда берётся основное уравнение (12)?

Утверждается, что поливариантная термодинамика представляет собой $n+1$ -мерную криптоточечную сакральную геометрию на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ с одним “расстоянием”.

При рассмотрении Примера 15 было показано, как сакральные потенциалы второго рода возникают из Теории физических структур.

Утверждается, что поливариантная термодинамика представляет собой криптоточечную сакральную геометрию на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ с одним “расстоянием”.

В основании поливариантной термодинамики лежит фундаментальная физическая структура ранга $(n+3,n+3)$ рода

$$\overset{n+2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+3};\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{n+3}}(\overset{n+1}{w})\equiv 0$$

$$\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{k}}=A^{00}\big(x^1(k),\xi^\alpha(k)\big)+x_1(i)x^1(k)+\xi_\alpha(i)\xi^\alpha(i)-A^{11}\big(x_1(k),\xi_\alpha(k)\big)$$

Полагая $m=1$ при произвольном n, осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{gathered} x^1 = S \qquad \xi^1, \dots, \xi^n = a^1, \dots, a^n \\ x_1 = -T \qquad \xi_1, \dots, \xi_n = A_1, \dots, A_n \\ A^{00}(x^1; \xi^1, \dots, \xi^n) = U(S; a^1, \dots, a^n) \\ A^{01}(x^1; \xi_1, \dots, \xi_n) = H(S; A_1, \dots, A_n) \\ A^{10}(x_1; \xi^1, \dots, \xi^n) = F((T; a^1, \dots, a^n) \\ A^{11}(x_1; \xi_1, \dots, \xi_n) = \Phi(T; A_1, \dots, A_n). \end{gathered}$$

В новых обозначениях репрезентатор $\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{k}}$ примет вид:

$$\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = U\big(S_k; a_k^1, \dots, a_k^n\big) - T_i S_k + A_{\mu(i)} a_k^\mu - \Phi\big(T_i; A_{1(i)}, \dots, A_{n(i)}\big).$$

Воспользуемся требованием рефлексии

$$\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{i}} = 0$$

и получим связь между термодинамическими потенциалами:

$$\boxed{U(S; a^1, \dots, a^n) - TS + A_\mu a^\mu - \Phi(T; A_1, \dots, A_n) = 0.} \tag{13}$$

Дифференцируя равенство (13), получим:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} - T\right) dS + \left(\frac{\partial U}{\partial a^\mu} + A_\mu\right) da^\mu + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial T} - S\right) dT + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial A_\mu} + a^\mu\right) dA_\mu = 0.$$

Если

$$\frac{\partial U}{\partial S}(S, a^\mu) = T \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial a^\mu}(S, a^\mu) = -A_\mu, \tag{14}$$

то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T}(T, A_\mu) = -S \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial A_\mu}(T, A_\mu) = a^\mu.$$

Из равенств (14) следует

$$dU = TdS - A_\mu da^\mu. \tag{15}$$

Перепишем (15) в виде:

$$dU = d(TS) - SdT - A_\mu da^\mu$$

или

$$dF = -SdT - A_\mu da^\mu,$$

где

$$\boxed{F(T; a^\mu) = U(S; a^\mu) - TS.}$$

Перепишем равенство (15) в виде

$$dU = TdS - d(A_\mu a^\mu) + a^\mu dA_\mu$$

или

$$dH = TdS + a^\mu dA_\mu,$$

где

$$\boxed{H(S;A_\mu) = U(S,a^\mu) + A_\mu a^\mu.}$$

И наконец, перепишем равенство (15) в виде:

$$dU = d(TS) - SdT - d(A_\mu a^\mu) + a^\mu dA_\mu$$

или

$$d\Phi = -SdT + a^\mu dA_\mu,$$

где

$$\boxed{\Phi(T;A_\mu) = U(S;a^\mu) - TS + A_\mu a^\mu.}$$

Итак, исходя из физической структуры ранга $(n+3, n+3)$ рода

$$\overset{n+2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+3};\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{n+3}}(\overset{n+1}{w}) \equiv 0,$$

мы получили полный набор четырех сакральных потенциалов:

$$\begin{array}{ll} U(S;a^\mu) & H(A;A_\mu) \\ F(T;a^\mu) & \Phi(T;A_\mu). \end{array}$$

Отсюда, как следствие, обнаруживаются ещё две физические структуры: одна ранга (3,3) рода

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3;\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}(\overset{1}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{1}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = U(S_k, a^\mu_k) - T_i S_k - F(T_i, a^\mu_i),$$

другая — ранга $(n+2, n+2)$ рода

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+3};\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{n+3}}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = U(S_k, a^\mu_k) - A_\mu(i)a^\mu - H(S_i, A^\mu).$$

Итак, в случае поливариантной термодинамики четыре сакральных потенциала,

$$\begin{aligned} A^{00}(x^1, \xi^\nu) &= U(S; a^1, \ldots, a^n), \\ A^{01}(x^1, \xi_\nu) &= H(S; A_1, \ldots, A_n), \\ A^{10}(x_1, \xi^\nu) &= F(T; a^1, \ldots, a^n), \\ A^{11}(x_1, \xi_\nu) &= \Phi(T; A_1, \ldots, A_n) \end{aligned}$$

связаны между собой с помощью двух билинейных многочленов $x_1x^1 = -TS$ и $\xi_\nu\xi^\nu = A_\nu a^\nu$ следующим образом:

$$A^{00}(x^1,\xi^\nu) + x_1x^1 + \xi_\nu\xi^\nu - A^{11}(x_1,\xi_\nu) = 0,$$
$$A^{00}(x^1,\xi^\nu) + x_1x^1 - A^{10}(x_1,\xi^\nu) = 0,$$
$$A^{00}(x^1,\xi^\nu) + \xi_\nu\xi^\nu - A^{01}(x^1,\xi_\nu) = 0,$$

или – в новых обозначениях:

$$U(S;a^1,\dots,a^n) - TS + A_1a^1 + \ldots + A_na^n - \Phi(T;A_1,\dots,A_n) = 0,$$
$$U(S;a^1,\dots,a^n) - TS - F(T;a^1,\dots,a^n) = 0,$$
$$U(S;a^1,\dots,a^n) + A_1a^1 + \ldots + A_na^n - H(S;A_1,\dots,A_n) = 0,$$

откуда после дифференцирования получаем полную систему самосогласованных уравнений (11), лежащих в основании поливариантной термодинамики.

Образно говоря, поливариантная термодинамика – это классический балет с участием $1+n$ пар:

$$\begin{array}{cccc} x^1 = S & \xi^1 = a^1 & \dots & \xi^n = a^n \\ x_1 = -T & \xi_1 = A_1 & \dots & \xi_n = A_n. \end{array}$$

Сакральная формулировка поливариантной термодинамики

$$\boxed{\overset{n+2}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{11}}_{\underline{i}_1\dots\underline{i}_{n+3};\bar{k}_1\dots\bar{k}_{n+3}}(\overset{n+1}{\boldsymbol{w}}) \equiv \mathbf{0}}$$

$$\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^1(k),\xi^\mu(k)\big) + x_1(i)x^1(k) + \xi_\mu(i)\xi^\mu(k) - A^{11}\big(x_1(i),\xi_\mu(i)\big) =$$
$$= U\big(S_k;a^1_k,\dots,a^n_k\big) - T_iS_k + A_{i\mu}a^\mu_k - \Phi\big(T_i;A_{i1},\dots,A_{in}\big).$$

$$\boxed{\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{i}} = U\big(S_i;a^1_i,\dots,a^n_i\big) - T_iS_i + A_{i\mu}a^\mu_i - \Phi\big(T_i;A_{i1},\dots,A_{in}\big) \equiv 0.}$$

$$\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^1(k);\xi^1(k)\big) + x_1(i)x^1(k) - A^{10}\big(x_1(i),\xi^1(i)\big) =$$
$$= U(S_k;a^1_k,\dots,a^n_k) - T_iS_k - F(T_i;a^1_i,\dots,a^n_i)$$

$$\boxed{\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{i}} = U(S_i; a_i^1, \ldots, a_i^n) - T_i S_i - F(T_i; a_i^1, \ldots, a_i^n) \equiv 0.}$$

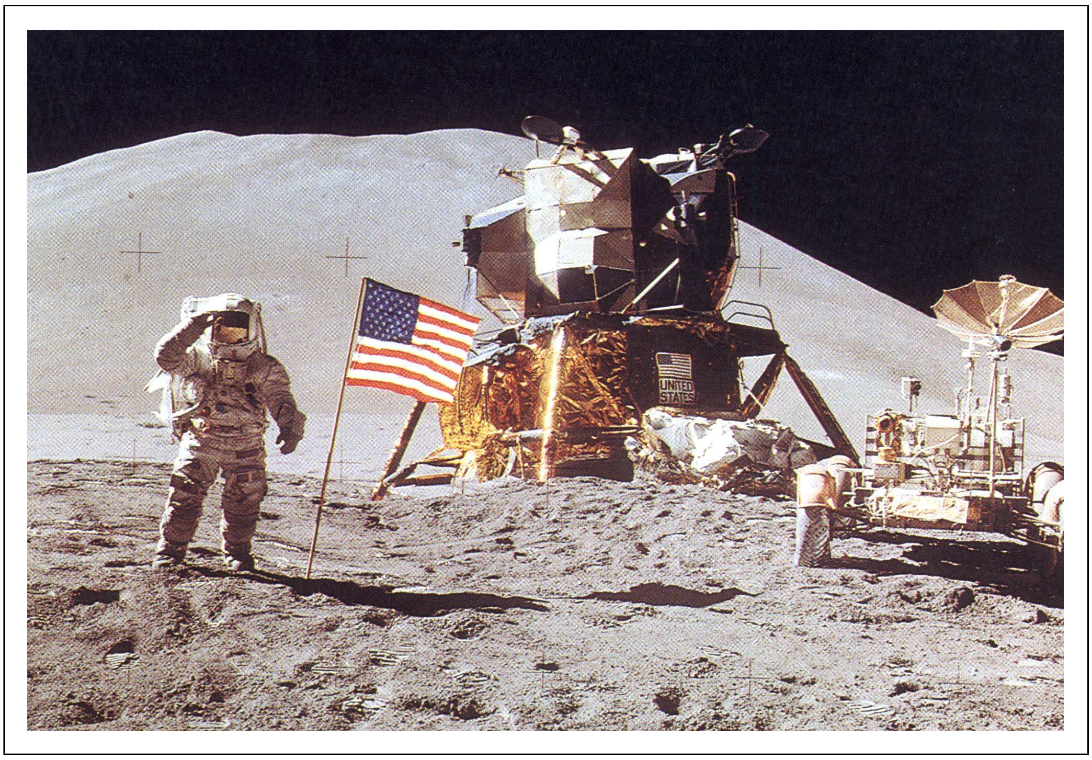
$$\overset{n}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^1(k), \xi^\mu(k)\big) + \xi_\mu(i)\xi^\mu(k) - A^{11}\big(x_1(i), \xi_\mu(i)\big) =$$

$$= U\big(S_k; a_k^1, \ldots, a_k^n\big) + A_{i\mu} a_k^\mu - H\big(S_i; A_{i1}, \ldots, A_{in}\big).$$

$$\boxed{\overset{n}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{i}} = U\big(S_i; a_i^1, \ldots, a_i^n\big) + A_{i\mu} a_i^\mu - H\big(S_i; A_{i1}, \ldots, A_{in}\big) \equiv 0.}$$

Литература к Примеру 16

[1]. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинематика. М.; 1977, с. 97.



Человек на Луне. Следующая станция –
Мир Высшей реальности

Пример 17. Механика Лагранжа и механика Гамильтона

По традиции, идущей от "Теоретической физики" Ландау, в основание механики положен принцип наименьшего действия Гамильтона. Из него вытекает как следствие система дифференциальных уравнений второго порядка – система уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где

$$L(q^\mu, \dot{q}^\mu, t) = L(q^\mu, v^\mu, t) -$$

функция Лагранжа, частные производные которой по q^μ и v^μ имеют простой физический смысл:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\mu, t) = f_\mu, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^\mu}(q^\mu, v^\mu, t) = p_\mu, \tag{3}$$

где q^μ — обобщённая координата,
$v^\mu = \dot{q}^\mu$ — обобщённая скорость,
p_μ — обобщённый импульс,
$f_\mu = \dot{p}_\mu$ — обобщённая сила,
где точка над буквой служит обозначением производной по времени t.

Из равенств (2) и (3) следует:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\nu} v^\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt = f_\mu dq^\mu + p_\nu dv^\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{4}$$

Равенство (4) можно переписать в виде:

$$dL = f_\mu dq^\mu + d(p_\nu v^\nu) - v^\nu dp_\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

или

$$d(-L + p_\mu v^\mu) = dH = \frac{\partial H}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} dp_\mu + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -f_\mu dq^\mu + v^\mu dp_\mu - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{5}$$

где

$$H(q^\mu, p_\nu, t) = -L(q^\mu, v^\mu, t) + p_\mu v^\mu.$$

Равенство (4) может быть переписано в другом виде:

$$dL = d(f_\mu q^\mu) - q^\mu df_\mu + p_\mu dv^\mu + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или

$$d(-L + f_\mu q^m) = q^\mu df_\mu - p_\mu dv^\mu - \frac{\partial L}{\partial t}dt = d\widetilde{H} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}df_\mu + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\mu}dv^\mu - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}dt, \quad (6)$$

где

$$\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu.$$

Наконец, перепишем равенство (4) в виде:

$$dL = d(f_\mu q^\mu) + d(p_\nu v^\nu) - q^\mu df_\mu - v_\nu dp_\nu + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

или

$$d(-L + f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu) = q^\mu df_\mu + v^\nu dp_\nu - \frac{\partial L}{\partial t}dt =$$
$$= d\widetilde{U} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}df_\mu + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}dp_\nu + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t}dt, \quad (7)$$

где

$$\widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu.$$

Таким образом, из равенств:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^\mu}dq^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\nu}dv^\nu + \frac{\partial L}{\partial t}dt = f_\mu dq^\mu + p_\nu dv^\nu + \frac{\partial L}{\partial t}dt,$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^\mu}dq^\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\nu}dp_\nu + \frac{\partial L}{\partial t}dt = -f_\mu dq^\mu + v_\nu dp^\nu + \frac{\partial H}{\partial t}dt,$$

$$d\widetilde{H} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}df_\mu + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}dv^\nu + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}dt = q^\mu df_\mu - p_\nu dv^\nu - \frac{\partial L}{\partial t}dt,$$

$$d\widetilde{U} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}df_\mu + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\mu}dp_\mu + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t}dt = q^\mu df_\mu + v^\nu dp_\nu - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

следует существование следующей системы равенств:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial L}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\nu, t) = f_\mu & \dfrac{\partial L}{\partial v^\nu}(q^\mu, v^\nu, t) = p_\nu \\
\dfrac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -f_\mu & \dfrac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = v^\nu \\
\dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu, v^\nu, t) = q^\mu & \dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\
\dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu, p_\nu, t) = q^\mu & \dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu, p_\nu, t) = v^\nu
\end{array} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

где

$$\begin{aligned} &L(q^\mu, v^\nu, t) = L(q^\mu, v^\nu, t), \\ &H(q^\mu, v_\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) + p_\nu v^\nu, \\ &\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu, \\ &\widetilde{U}(f_\mu, p_\mu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu. \end{aligned} \tag{9}$$

В итоге мы получили полную систему уравнений (8) и систему уравнений (9), обладающих определённой асимметрией.

Для устранения этой асимметрии введём новую функцию — **потенциальную энергию Лагранжа**[78] $U(q^\mu, v^\nu, t)$, равную функции Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$, взятой с обратным знаком:

$$U(q^\mu, v^\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t).$$

После замены функции Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$ на потенциальную энергию Лагранжа $U(q^\mu, v^\nu, t)$ полная система уравнений (8) и система равенств (9) примут следующий симметричный вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\nu, t) = -f_\mu && \frac{\partial U}{\partial v^\nu}(q^\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\ &\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -f_\mu && \frac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = v^\nu \\ &\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu, v^\nu, t) = q^\mu && \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\ &\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu, p_\nu, t) = q^\mu && \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu, p_\nu, t) = v^\nu \end{aligned} \tag{10}$$

[78]Как будет показано ниже, потенциальная энергия Лагранжа $U(q^\mu, v^\nu, t)$ имеет более глубокий физический смысл, нежели функция Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

где

$U(q^m, v^\nu, t)$ — потенциальная энергия Лагранжа (механический аналог внутренней энергии $U(S, V)$,

$H(q^\mu, p_\nu, t)$ — функция Гамильтона (механический аналог энтальпии $H(S, P)$,

$\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ — дуально сопряжённая функция Гамильтона[79] (механический аналог свободной энергии $F(T, V)$),

$\widetilde{U}(f_\mu, p_\mu, t)$ — дуально сопряжённая потенциальная энергия Лагранжа (механический аналог энергии Гиббса $\Phi(T, P)$).

Но откуда берётся принцип наименьшего действия Гамильтона и вытекающее из него уравнение Лагранжа (1)?

Получим полную систему дуально сопряжёных уравнений (10) независимым путём из Теории физических структур.

При рассмотрении Примера 16, исходя из чрезвычайно общего **принципа сакральной симметрии**, лежащего в основании Теории физических структур, и опираясь на teorema egregium Михайличенко, мы смогли убедиться в существовании двух пар дуально сопряжённых сакральных потенциалов:

$$\big(A^{00}(x^\mu, \xi^\nu),\ \ A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)\big) \quad \text{и} \quad \big(A^{01}(x^\mu, \xi_\nu),\ \ A^{10}(x_\mu, \xi^\nu)\big),$$

зависящих от двух групп соответствующих переменных:

$$\begin{array}{ll} x^1, \dots, x^n & \xi^1, \dots, \xi^n \\ x_1, \dots, x_n & \xi_1, \dots, \xi_n, \end{array}$$

связанных между собой тремя соотношениями:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0,$$

$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) + x_\mu x^\mu - \xi_\nu \xi^\nu - A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = 0,$$
$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) - A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) - A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) + A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0,$$

[79] Сакральные потенциалы $\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ и $\widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t)$ неизвестны в традиционной аналитической механике. Они неизбежно возникают в Теории физических структур как проявление сакральной симметрии.

и полученных $4m+4n$ дуально сопряжённых уравнений, связывающих между собой $2m+2n$ переменных $x^\mu,\ x_\mu,\ \xi^\nu,\ \xi_\nu$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu,\xi^\nu) = -x_\mu && \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu,\xi^\nu) = -\xi_\nu \\
&\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu,\xi_\nu) = -x_\mu && \frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu,\xi_\nu) = \xi^\nu \\
&\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu,\xi^\nu) = x^\mu && \frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu,\xi^\nu) = -\xi_\nu \\
&\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu,\xi_\nu) = x^\mu && \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu,\xi_\nu) = \xi^\nu \\
&\mu = 1,2,\ldots,m && \nu = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

Механика Лагранжа и механика Гамильтона возникают как частный случай общей теории сакральных потенциалов, если положить

$$m = n\ (\mu = 1,2,\ldots,n;\ \nu = 1,2,\ldots,n)$$

и дать анонимным физическим величинам $x^\mu,\ x_\mu,\ \xi^\nu,\ \xi_\nu$ и сакральным потенциалам $(A^{00},\ A^{11})$ и $(A^{01},\ A^{01})$ следующую физическую интерпретацию:

$$
\begin{aligned}
&x^1,\ldots,x^n = q^1,\ldots,q^n; && \xi^1,\ldots,\xi^n = v^1,\ldots,v^n,\\
&x_1,\ldots,x_n = f_1,\ldots,f_n; && \xi_1,\ldots,\xi_n = p_1,\ldots,p_n,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{gathered}
q^1,\ldots,q^n \text{ — обобщённые координаты,}\\
f_1,\ldots,f_n \text{ — обобщённые силы,}\\
v^1,\ldots,v^n \text{ — обобщённые скорости,}\\
p_1,\ldots,p_n \text{ — обобщённые импульсы}\\
A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) = U(q^\mu,v^\nu,t),\\
A^{01}(x^\mu,\xi_\nu) = H(q^\mu,p_\nu,t),\\
A^{10}(x_\mu,\xi^\nu) = \widetilde{H}(f_\mu,x^\nu,t),\\
A^{11}(x^\mu,\xi^\nu) = \widetilde{U}(f_\mu,p_\nu,t).
\end{gathered}
$$

Таким образом, сакральные потенциалы $U(q^\mu,v^\nu,t)$, $\widetilde{U}(f_\mu,p_\nu,t)$, $H(q^\mu,p_\nu,t)$,

$\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ связаны между собой тремя соотношениями:

$$U(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu - \widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t) = 0,$$

$$H(q^\mu, p_\nu, t) + f_\mu q^\mu - p_\nu v^\nu - \widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) = 0,$$

$$U(q^\mu, v^\nu, t) - H(q^\mu, p_\nu, t) - \widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) + \widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t) = 0,$$

порождают полную систему $4n+4n$ дуально сопряжённых уравнений, связывающих между собой $2n+2n$ физических величин $q^1, \ldots, q^n$; $f_1, \ldots, f_n$; $v^1, \ldots, v^n$; $p_1, \ldots, p_n$;

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\nu, t) = -f_\mu & \dfrac{\partial U}{\partial v^\nu}(q^\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -f_\mu & \dfrac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = v^\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu, v^\nu, t) = q^\mu & \dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu, p_\mu, t) = q^\mu & \dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu, p_\mu, t) = v^\nu
\end{array} \tag{10}$$

В отличие от термодинамики, не содержащей в себе времени, механика существенным образом включает в себя понятие времени t . Это находит своё выражение в $2n$ дополнительных связей:

$$v^\mu = \dot{q}^\mu$$

и

$$f_\mu = \dot{p}_\mu.$$

В результате система $8n$ алгебраических уравнений (10) превращается в систему $8n$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -\dot{p}_\mu & \dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -\dot{p}_\mu & \dfrac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = -\dot{q}^\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial \dot{p}_\mu}(\dot{p}_\mu, \dot{q}^\nu, t) = q^\mu & \dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial \dot{q}^n u}(\dot{p}_\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial \dot{p}_\mu}(\dot{p}_\mu, p_\nu, t) = q^\mu & \dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(\dot{p}_\mu, p_\nu, t) = \dot{q}^\mu.
\end{array} \tag{11}$$

Поскольку все системы $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, порождаемые каждым сакральным потенциалом U , H , $\widetilde{H}$, $\widetilde{U}$, эквивалентны, то можно ограничиться системой $2n$ уравнений, порождаемой каким-либо одним сакральным потенциалом.

Если в качестве исходного потенциала взять потенциальную энергию Лагранжа $U(q^\mu, \dot{q}^\nu, t)$, то из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -\dot{p}_\mu \qquad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu$$

следует система n дифференциальных уравнений второго порядка – уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial U}{\partial q^\mu} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0.$$

Но если движение механической системы описывается уравнением Лагранжа, то легко показать, что в этом случае получается как следствие принцип наименьшего действия Гамильтона.

Если в качестве исходной взять функцию Гамильтона $H(q^\mu, p_\nu, t)$, то получим систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка — систему канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\mu, t)$$
$$\dot{q}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial p_\mu}(q^\mu, p_\mu, t)$$

Пример 18. Механика Гамильтона–Якоби

Начнём с традиционного изложения. Обычно действие S определяется как интеграл от функции Лагранжа [1]

$$S = \int_{t_0}^{t} L d\tau \tag{1}$$

или

$$\frac{dS}{dt} = \overline{L} \quad \text{и} \quad \frac{dS}{dt_0} = -L_0.$$

Но что скрывается за этими формулами?

Рассмотрим это определение более подробно. Начнём с интеграла.

$$\widetilde{S} = \int_{t_0}^{t} \overline{L}\big(q(q_0, v_0, \tau), v(q_0, v_0, \tau), \tau\big) d\tau = \widetilde{S}(q_0, v_0, t, \tau_0). \tag{2}$$

Из $q^\mu = q^\mu(q_0^\mu, v_0^\mu; t)$ находим

$$v_0^\mu = v_0^\mu(q^\mu, q_0^\mu, t). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) получим окончательное выражение для действия как функции q, q_0, t, t_0 :

$$S = \widetilde{S}\big(q_0, v_0(q, q_0, t), t, t_0\big) = S(q^\mu, t; q_0^\mu, t_0).$$

Чтобы найти частные производные $\frac{\partial S}{\partial q^\mu}$ и $\frac{\partial S}{\partial q_0^\mu}$ рассмотрим вариацию:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \delta L d\tau = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} \delta q^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \delta v^\mu \right) d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} (\dot{p}_\mu \delta q^\mu + p_\mu \delta \dot{q}^\mu) d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}(p_\mu \delta q^\mu) d\tau = p_\mu \delta q^\mu \Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= p_\mu \delta q^\mu - p_\mu(0) \delta q^\mu(0).$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial q^\mu}\big(q^\mu, t; q^n(0), t_0\big) = p_\mu, \qquad \frac{\partial S}{\partial q^\mu(0)}\big(q^\mu, t; q^n(0), t_0\big) = -\, p_\mu(0).$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{dS}{dt} = L \quad \text{и} \qquad \frac{dS}{dt_0} = -\, L_0.$$

Итак, имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \cdot \dot{q}^\mu = \frac{\partial S}{\partial t} + p_\mu \dot{q}^\mu = L = p_\mu \dot{q}^\mu - H$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H.$$

Аналогично

$$\frac{dS}{dt_0} = \frac{\partial S}{\partial t_0} + \frac{\partial S}{\partial q^\mu(0)} \cdot \dot{q}^\mu(0) = \frac{\partial S}{\partial t_0} - p_\mu(0)\dot{q}^\mu(0) = -L_0 = -p_\mu(0)\dot{q}^\mu(0) + H_0$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = H_0.$$

Таким образом, получаем

$$dS = p_\mu dq^\mu - Hdt - p_\mu(0)dq^\mu(0) + H_0 dt_0.$$

В итоге имеем четыре функции действия:

$$dS_1(q, q_0.t, t_0) = p_\mu dq^\mu - p_\mu(0)dq^\mu(0) - Hdt + H_0 dt_0,$$

$$dS_2(q, q_0.t, t_0) = p_\mu dq^\mu + q^\mu(0)dp_\mu(0) - Hdt + H_0 dt_0,$$

$$dS_3(q, q_0.t, t_0) = -q^\mu dp_\mu - p_\mu(0)dq^\mu(0) - Hdt + H_0 dt_0,$$

$$dS_4(q, q_0.t, t_0) = -q^\mu dp_\mu + q^\mu(0)dp_\mu(0) - Hdt + H_0 dt_0,$$

где четыре функции действия S_1, S_2, S_3, S_4 связаны между собой следующими соотношениями:

$$S_1(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0),$$

$$S_2(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) + p_\mu(0)q^\mu(0),$$

$$S_3(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) - p_\mu q^\mu,$$

$$S_4(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) - p_\mu q^\mu + p_\mu(0)q^\mu(0).$$

Используя равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \quad \text{и} \qquad \frac{\partial S}{\partial q^\mu} = p_\mu,$$

получаем уравнение Гамильтона–Якоби

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(q^\mu, \frac{\partial S}{\partial q^\nu}, t\Big) = 0.}$$

Итак, введение функции действия

$$S = \int\limits_{t_0}^{t} L d\tau$$

позволяет свести механику Лагранжа–Гамильтона, в основании которой лежит n уравнений второго порядка — уравнений Лагранжа,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^{\mu}} = 0$$

или $2n$ уравнений первого порядка — система канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial q^{\mu}} \qquad \text{и} \qquad \dot{q}^{\mu} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mu}}$$

к механике Гамильтона–Якоби, в основании которой лежит одно уравнение в частных производных — уравнение Гамильтона–Якоби,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(q^{\mu}, \frac{\partial S}{\partial q^{\nu}}, t\Big) = 0.$$

Получим это уравнение независимым путём как следствие существования на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ аддитивной физической структуры ранга $(2n+4, 2n+4)$.

Согласно theorema egregium Михайличенко в этом случае имеется единственное решение:
верификатор и репрезентатор этого решения имеют следующий вид:

$$\overset{2(n+1)+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{2n+4};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{2n+4}}\big(\overset{2(n+1)}{w}\big) = 0$$

$$\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_{\mu}(i)x^{\mu}(k) + x_{n+1}(i)x^{n+1}(k) + \xi_{\nu}(i)\xi^{\nu}(k) + \xi_{n+1}(i)\xi^{n+1}(k) + \underline{s}(i).$$

Наложим первое дополнительное условие — будем считать скрытый параметр $\overline{s}$ произвольной функцией контравариантных координат:

$$x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \xi^1, \ldots, \xi^n, \xi^{n+1},$$

а скрытый параметр $\underline{s}$ – произвольной функцией ковариантных координат:

$$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1},$$

то есть

$$\overline{s} = A^{00}(x^{\mu}, x^{n+1}, \xi^{\nu}, \xi^{n+1}),$$

$$\underline{s} = -\,A^{11}(x_{\mu}, x_{n+1}, \xi_{\nu}, \xi_{n+1}).$$

Итак, имеем следующее выражение для репрезентатора $\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}}$:

$$\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^{\mu}(k), x^{n+1}(k), \xi^{\nu}(k), \xi^{n+1}(k)\big) + x_{\mu}(i)x^{\mu}(k) + x_{n+1}(i)x^{n+1}(k) + \\ + \xi_{\nu}(i)\xi^{\nu}(k) + \xi_{n+1}(i)\xi^{n+1}(k) - A^{11}\big(x_{\mu}(k), x_{n+1}(k), \xi_{\nu}(k), \xi_{n+1}(k)\big).$$

Наложим второе дополнительное условие — условие рефлексии:

$$\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\bar{i}} = 0.$$

В результате получим следующее соотношение, связывающее между собой два дуально сопряжённых сакральных потенциала A^{00} и A^{11} :

$$A^{00}(x^\mu, x^{n+1}, \xi^\nu, \xi^{n+1}) + x_\mu x^\mu + x_{n+1}x^{n+1} + \xi_\nu \xi^\nu + \xi_{n+1}\xi^{n+1} - \\ - A^{11}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) = 0. \quad (4)$$

После дифференцирования этого равенства получаем:

$$\left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu} + \xi_\nu\right) d\xi^\nu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}} + x_{n+1}\right) dx^{n+1} + \\ + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}} + \xi_{n+1}\right) d\xi^{n+1} + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} + \xi^\nu\right) d\xi_\nu + \\ + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_{n+1}} + x^{n+1}\right) dx_{n+1} + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_{n+1}} + \xi^{n+1}\right) d\xi_{n+1} = 0. \quad (5)$$

Чтобы соотношение (4) имело какой-либо смысл и представляло собой тождество относительно всех переменных, необходимо положить:

$$\begin{aligned} x^\nu &= x^\mu(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}), \\ \xi^\nu &= \xi^\mu(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}), \\ x^{n+1} &= x^{n+1}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}), \\ \xi^{n+1} &= \xi^{n+1}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Если в качестве функций (5) принять

$$x^\mu = \frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}), \quad \xi^\mu = \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\mu}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}),$$

$$x^{n+1} = \frac{\partial A^{11}}{\partial x_{n+1}}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}), \quad \xi^{n+1} = \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_{n+1}}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}),$$

то равенство (5) примет вид:

$$\left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu} + \xi_\nu\right) d\xi^\nu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}} + x_{n+1}\right) dx^{n+1} + \\ + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}} + \xi_{n+1}\right) d\xi^{n+1} = 0.$$

Так как $dx^\mu, d\xi^n, dx^{n+1}, d\xi^{n+1}$ независимы, то имеют место следующие $2(n+1)$ соотношений, связывающих между собой $4(n+1)$ переменных:

$$x^\mu, x^{n+1}; \xi^\nu, \xi^{n+1}; x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{\mu}}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = -x_{\mu}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{\nu}}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = -\xi_{\nu}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = -x_{n+1}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = -\xi_{n+1}.$$

Механика Гамильтона–Якоби возникает в Теории физических структур как результат существования сакральной симметрии, если придать переменным

$$\begin{aligned} &x^1, \dots, x^n, x^{n+1}; \quad \xi^1, \dots, \xi^n \xi^{n+1}; \\ &x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; \qquad \xi_1, \dots, \xi_n \xi_{n+1} \end{aligned}$$

и сакральному потенциалу $A^{00}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1})$ следующую физическую интерпретацию:
$x^1, \dots, x^n = q^1, \dots, q^n$ — обобщённые координаты,
$x^{n+1} = t$ — текущее время,
$-x_1, \dots, -x_n = p_1, \dots, p_n$ — обобщённые импульсы,
$x_{n+1} = H(q, p, t)$ — функция Гамильтона;

$\xi^1, \dots, \xi^n = q^1(0), \dots, q^n(0)$ — начальные значения обобщённых координат,
$\xi^{n+1} = t_0$ — начальный момент времени,
$\xi_1, \dots, \xi_n = p_1(0), \dots, p_n(0)$ — начальные значения обобщённых импульсов,
$-\xi_{n+1} = H(q_0, p_0, t)$ — функция Гамильтона в начальный момент времени.

$$A^{00}(x^{\mu}, x^{n+1}, \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = S_1\big(q^{\mu}, q^{\nu}(0), t, t_0\big).$$

Заметим, что существенным третьим дополнительным условием является требование

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= H = H(q^{\mu}, p_{\nu}, t), \\ -\xi_{n+1} &= H_0 = H(q^{\mu}(0), p_{\nu}(0), t). \end{aligned}$$

В новых обозначениях система $2(n+1)$ уравнений, связывающих между собой $4(n+1)$ переменных,

$$\begin{aligned} &q^1, \dots, q^n, t; \quad q^1(0), \dots, q^n(0), t_0 \\ &p_1, \dots, p_n, H; \quad p_1(0), \dots, p_n(0), H(0), \end{aligned}$$

имеет следующий вид:

$$\frac{\partial S_1}{\partial q^\mu}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = p_\mu, \tag{7}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial q^\mu(0)}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = -p_\mu(0), \tag{8}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = -H(q^\mu, p_\nu, t), \tag{9}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_0}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = H\big(q^\mu(0), p_\nu(0), t_0\big). \tag{10}$$

Если известна функция $S_1(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0)$, то из n уравнений (8) находим:

$$q^\mu = q^\mu\big(t, t_0, q(0), p(0)\big),$$

а затем из n уравнений (8) находим:

$$p_\mu = p_\mu\big(t, t_0, q(0), p(0)\big).$$

Перепишем равенства (7) и (8) в виде:

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu}(q, t),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q^\mu, p_\nu, t) = 0$$

и, в конце концов, получаем уравнение Гамильтона–Якоби относительно неизвестной функции $S(q^1, \ldots, q^\nu, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t}(q^1, \ldots, q^n, t) + H\Big(q^1, \ldots, q^n, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^n}, t\Big)} \tag{11}$$

В данной ситуации основную роль играет не общий интеграл уравнения (11), а так называемый полный интеграл; так называется решение уравнения (1), содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных

$$S = S(t, q^1, \ldots, q^n; \alpha_1 \ldots, \alpha_n) + \alpha_0.$$

Литература к Примеру 18

[1]. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика. (Серия “теоретическая физика” том. 1), М., 1973 г., С. 173.

Новосибирский государственный университет, где создавалась Теория физических структур

Пример 19. Канонические преобразования

Рассмотрим систему канонических уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot p_\mu &= -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\nu, p_\nu, t), \\ \dot q_\mu &= \frac{\partial H}{\partial p^\mu}(q^\nu, p_\nu, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Каким должно быть преобразование старых переменных $q^1, \ldots, q^n$; $p_1, \ldots, p_n$ к новым $Q^1, \ldots, Q^n$; $P_1, \ldots, P_n$

$$q^\mu = q^\mu(Q^\mu, P_\nu, t)$$

$$p_\mu = p_\mu(Q^\mu, P_\nu, t),$$

сохраняющее вид уравнений (1), то есть переводящее систему уравнений (1) в систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot P_\mu &= -\frac{\partial K}{\partial Q^\mu}(Q^\mu, P_\nu, t), \\ \dot Q^\mu &= \frac{\partial K}{\partial P_\nu}(Q^\mu, P_\nu, t) \ ? \end{aligned} \tag{2}$$

Такие преобразования называются **каноническими**. Оказывается, что в основании канонических преобразований лежит рассмотренная выше общая теория сакральных потенциалов:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu),\ A^{01}(x^\mu, \xi_\nu),\ A^{10}(x_\mu, \xi^\nu),\ A^{11}(x_\mu, \xi_\nu).$$

Эти потенциалы порождают систему $4n + 4n$ дуально сопряжённых уравнений, связывающих между собой $4n$ переменных:

$$\begin{array}{ll} x^1, \ldots, x^n; & \xi^1, \ldots, \xi^n \\ x_1, \ldots, x_n; & \xi_1, \ldots, \xi_n : \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu & \dfrac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu \\[2ex] \dfrac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu & \dfrac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu \\[2ex] \dfrac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu & \dfrac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu \\[2ex] \dfrac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu & \dfrac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu \end{array}$$

если потенциалы A_{00}, A^{01}, A^{10}, A^{11} связаны между собой следующими соотношениями:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$$

$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + \xi_\nu \xi^\nu$$

$$A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu$$

$$A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu.$$

Канонические преобразования

$$q^\mu = q^\mu(Q^\mu, P_\nu, t)$$

$$p_\nu = p_\nu(Q^\mu, P_\nu, t)$$

возникают из теории сакральных потенциалов, если придать переменным x^μ , x_μ , ξ^ν , ξ_ν следующий физический смысл:

$$x^1, \dots, x^n = q^1, \dots, q^n; \qquad \xi^1, \dots, \xi^n = Q^1, \dots, Q^n$$
$$x_1, \dots, x_n = -p_1, \dots, -p_n; \qquad \xi_1, \dots, \xi_n = P_1, \dots, P_n$$

и ввести следующие четыре производящие функции:

$$F_1(q^\mu, Q^\nu, t) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu);$$

$$F_2(q^\mu, P_\nu, t) = A^{01}(x^\mu, \xi_\nu);$$

$$F_3(p_\mu, Q^\nu, t) = A^{10}(x_\mu, \xi^\nu);$$

$$F_4(p_\mu, P_\nu, t) = A^{11}(x_\mu, \xi_\nu).$$

В этом случае одно и тоже каноническое преобразование может быть получено одним из следующих четырёх вариантов:
первый вариант:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q^\mu}(q^\mu, Q^\nu, t) = p_\mu; \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q^\nu}(q^\mu, Q^\nu, t) = -P_\nu; \tag{3}$$

второй вариант:

$$\frac{\partial F_2}{\partial q^\mu}(q^\mu, P_\nu, t) = p_\nu; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_\nu}(q^\mu, P_\nu, t) = Q^\nu; \tag{4}$$

третий вариант

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_\mu}(p_\mu, Q^\nu, t) = -q^\mu; \qquad \frac{\partial F_3}{\partial Q^\nu}(p_\mu, Q^\nu, t) = -P_\nu; \tag{5}$$

четвёртый вариант:

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_\mu}(p_\mu, P_\nu, t) = -q^\mu; \qquad \frac{\partial F_4}{\partial P_\nu}(p_\mu, P_\nu, t) = Q^\nu, \tag{6}$$

если четыре производящие функции

$$F_1(q^\mu, Q^\nu, t), \qquad F_2(q^\mu, P_\nu, t), \qquad F_3(p_\mu, Q^\nu, t), \qquad F_4(p_\mu, P_\nu, t)$$

связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
F_1(q^m, Q^\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) \qquad\qquad\qquad ;\\
F_2(q^\mu, P_\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) + P_\nu Q^\nu\\
F_3(p_\mu, Q^\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) - p_\mu q^\mu\\
F_4(p_\mu, P_\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) - p_\mu q^\mu + P_\nu Q^\nu.
\end{aligned}$$

Докажем, что канонические преобразования, заданные в неявном виде каждым из четырёх вариантов (3)–(6), приводят к новой системе канонических уравнений (2).

Из равенств (3)–(6) следуют, соответственно, следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_\mu}{\partial Q^\nu} = -\frac{\partial P_\nu}{\partial q^\mu}; \qquad && \frac{\partial p_\mu}{\partial P_\nu} = \frac{\partial Q^\nu}{\partial q^\mu};\\
&\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\nu} = \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\mu}; \qquad && \frac{\partial q^\mu}{\partial P_\nu} = -\frac{\partial Q^\nu}{\partial p_\mu}.
\end{aligned} \tag{7}$$

В качестве новой функции Гамильтона $K(Q^\mu, P_\nu, t)$ возьмём одну из следующих четырёх функций:
первый вариант:

$$K_1(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = H\big(q(Q, \overline{P}, t), p(Q, \overline{P}, t), t\big) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(\overline{c}, Q^\nu, t); \tag{8}$$

второй вариант:

$$K_2(\overline{Q}P, t, \overline{c}) = H\big(q(\overline{Q}, P, t), p(\overline{Q}, P, t), t\big) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\overline{c}, P_\nu, t); \tag{9}$$

третий вариант:

$$K_3(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = H\big(q(Q, \overline{P}, t), p(Q, \overline{P}, t), t\big) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(\underline{c}, Q^\nu, t); \tag{10}$$

четвёртый вариант:

$$K_4(\overline{Q}, P, t, \underline{c}) = H\big(q(\overline{Q}, P, t), p(\overline{Q}, P, t), t\big) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(\underline{c}, P_\nu, t), \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
Q^\mu &= Q^\mu(q, p, t); \qquad & \overline{Q} &= \overline{Q}^\mu(q, p);\\
P_\nu &= P_\nu(q, p, t); \qquad & \overline{P}_\nu &= \overline{P}_\nu(q, p),
\end{aligned}$$

где $\overline{c} = c^1, \ldots, c^n$ и $\underline{c} = c_1, \ldots, c_n$ – два набора произвольных констант.

Учитывая соотношение (7) и им эквивалентные

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial \overline{Q}^\nu} = -\frac{\partial \overline{P}_\nu}{\partial q^\mu}, \qquad \frac{\partial p_\mu}{\partial \overline{P}_\nu} = \frac{\partial \overline{Q}^\nu}{\partial q^\mu},$$

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial \overline{Q}^\nu} = \frac{\partial \overline{P}_\nu}{\partial p_\mu}, \qquad \frac{\partial q^\mu}{\partial \overline{P}_\nu} = -\frac{\partial \overline{Q}^\nu}{\partial p_\mu}.$$

легко получаем непосредственным дифференцированием равенств (8)–(11) следующие уравнения:

$$\frac{\partial K_1}{\partial Q^\mu}(Q, \overline{P}, y, \overline{c}) = -\dot{P}_\mu; \qquad \frac{\partial K_1}{\partial \overline{P}_\mu}(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = \dot{\overline{Q}}^\mu;$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \overline{Q}^\mu}(\overline{Q}, P, t, \overline{c}) = -\dot{\overline{P}}_\mu; \qquad \frac{\partial K_2}{\partial P_\mu}(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = \dot{Q}^\mu;$$

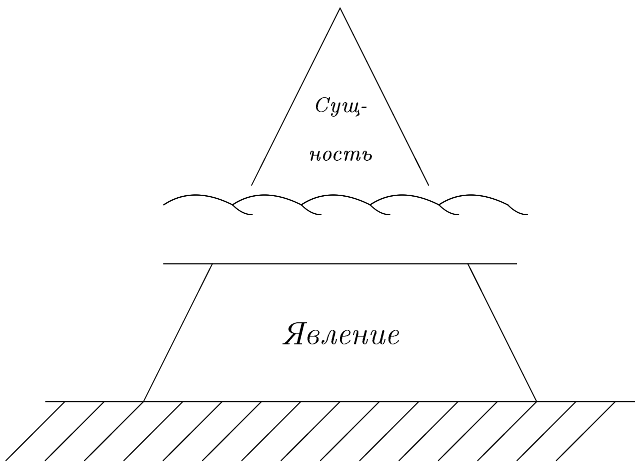
$$\frac{\partial K_3}{\partial Q^\mu}(Q, \overline{P}, y, \underline{c}) = -\dot{P}_\mu; \qquad \frac{\partial K_3}{\partial \overline{P}_\mu}(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = \dot{\overline{Q}}^\mu;$$

$$\frac{\partial K_4}{\partial \overline{Q}^\mu}(\overline{Q}, P, t, \underline{c}) = -\dot{\overline{P}}_\mu; \qquad \frac{\partial K_4}{\partial P_\mu}(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = \dot{Q}^\mu.$$

Итак, в конечном итоге система канонических уравнений Гамильтона в новых переменных Q^μ , P^ν имеет вид:

$$\frac{\partial K}{\partial Q^\mu}(Q, P, t) = -\dot{P}_\mu$$

$$\frac{\partial K}{\partial P_\mu}(Q, P, t) = \dot{Q}^\mu$$



Литература к Примеру 19

[1]. *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* Механика. (Серия “Теоретическая физика” том. 1), М., 1973 г., С. 173.

Московский государственный университет

А вот и дом, куда он так летел –
Старинное святилище науки.
Московских зодчих золотые руки
Здесь положили прочности предел.

Пример 20. Теория размерности

То, что в первую очередь отличает теоретическую физику от математики, это широкое использование *физических величин* — длины, времени, скорости, ускорения, температуры, силы, массы, энергии и т.д. и соответствующих *единиц* — метра, секунды, метра в секунду, метра на секунду в квадрате, кельвина, ньютона, килограмма, джоуля и т.д.

Что же такое физическая величина?

Любая физическая величина зависит прежде всего от самого́ физического объекта i и от соответствующей измерительной процедуры σ, позволяющей выявить те или иные характеристики этого физического объекта.

Обычно, имея перед собой простейшую, наглядную операцию измерения длины стержня, трактуют процедуру измерения любой физической величины как процедуру "откладывания" эталонного физического объекта e на измеряемом объекте i. Эту операцию ещё можно как-то представить и осуществить в случае измерения длины, сложнее — площади, и уже с большим трудом — объёма.

Но что значит "отложить" эталонное состояние на измеряемое состояние того или иного физического тела в случае измерения его температуры, плотности или намагниченности? Как, например, "отложить" один градус Кельвина на состояние нагретого тела?

Дело в том, что при более строгом рассмотрении процедуры измерения с точки зрения теории физических структур выясняется, что универсальный алгоритм измерения любой физической величины не имеет ничего общего с наглядным "откладыванием" эталона.

Процесс измерения физической величины предполагает существование целого множества

$$\mathfrak{S} = \{\sigma, \lambda, \ldots\},$$

различных по своей конструкции приборов с различными равномерными шкалами, предназначенных для измерения одной и той же характеристики рассматриваемого физического объекта i.

Физической величиной называется числовая функция двух нечисловых переменных:

физического объекта $i \in \mathfrak{M}$

и соответствующего измерительного прибора $\sigma \in \mathfrak{S}$, то есть

$$a : \mathfrak{S} \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\sigma, i) \longmapsto a_\sigma(i).$$

Другими словами, произвольно выбранный прибор σ сопоставляет каждому физическому объекту i число $a_\sigma(i)$, называемое физической величиной физического объекта i.

Рассмотрим несколько конкретных примеров:

Между множеством физических объектов $\mathfrak{M}$ и множеством соответствующих измерительных приборов $\mathfrak{S}$ имеют место вполне определённые устойчивые отношения, находящие своё выражение в факте существования простейшей мультипликативной физической структуры ранга (2,2). Это значит, что четыре физические величины:

$$a_\sigma(i),\ \ a_\sigma(k) \qquad \text{и} \qquad a_\lambda(i),\ \ a_\lambda(k),$$

относящиеся к двум различным физическим объектам i и k и полученные в результате двух измерительных операций σ и λ, связаны между собой простейшим соотношением:

$$\begin{vmatrix} a_\sigma(i) & a_\sigma(k) \\ a_\lambda(i) & a_\lambda(k) \end{vmatrix} = a_\sigma(i)\,a_\lambda(k) - a_\sigma(k)\,a_\lambda(i) = 0$$

или

$$\frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(k)} = \frac{a_\lambda(i)}{a_\lambda(k)} = \ldots = a(k,\, i),$$

то есть отношение двух физических величин $\frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(k)} = a(k,\, i)$ не зависит от выбора измерительного прибора σ.

Таким образом, имеем

$$a_\sigma(i) = a_\sigma(k) \cdot a(k,\, i). \tag{1}$$

Если среди всех физических объектов, принадлежащих к множеству $\mathfrak{M}$, выбрать один объект

$$e \in \mathfrak{M}$$

и назвать его *эталонным* физическим объектом, то равенство (1) приобретёт вид:

$$a_\sigma(i) = a_\sigma(e) \cdot a(e,\, i). \tag{2}$$

Итак, любая физическая величина $a_\sigma(i)$ есть произведение двух числовых функций $a_\sigma(e)$ и $a(e,\, i)$.

Первая числовая функция $a_\sigma(e)$ представляет собой физическую величину физического объекта e, принятого в качестве эталона. По традиции эта числовая функция называется *“единицей физической величины”* и обозначается так:

$$a_\sigma(e) = [\,a\,]_\sigma.$$

Она как бы вбирает в себя “ненужную” переменную – произвольную измерительную операцию σ – делая тем самым величину $a(e,\, i)$ инвариантной относительно выбора операции σ.

По традиции числовая функция $a(e,\, i)$ называется *численным значением физического объекта i при выборе в качестве эталона физического объекта e* и обозначается так:

$$a(e,\, i) = \{\,a\,\}.$$

Таким образом, равенство (2) в традиционных обозначениях выглядит следующим образом:

$$a_\sigma = [\,a\,]_\sigma \cdot \{\,a\,\}. \tag{3}$$

В случае, если эталонный физический объект e –"сантиметр"– и $a\,(\textit{см},\, i) \,=\, 12$, то равенство (3) примет знакомый ещё из средней школы вид:

$$\ell_\sigma \,=\, \textit{см}_\sigma \cdot 12 \qquad \text{или} \qquad \ell \,=\, 12\,\textit{см}.$$

По традиции, идущей от наглядной процедуры измерения длины стержня путём откладывания на нём стержня, принятого за эталон, считается, что единица физической величины совпадает с соответствующим физическим объектом, принятым в качестве эталона. Но если это так, то единица скорости должна представлять собой частное от деления отрезка единичной длины на промежуток времени между двумя фиксированными событиями, принятыми за эталон, напоминая при этом нечто несуразное, типа частного от деления пирога на сапоги.

Итак, установление числовой природы физической величины $a_\sigma\,(i)$ и её единицы $a_\sigma\,(e)$ снимает многие проблемы, возникающие при рассмотрении уравнений, описывающих физические законы, а именно:

• отпадает необходимость введения "именованных чисел", имеющих якобы какую-то особую нечисловую природу;

• делает возможным осуществлять с единицами физических величин обычные операции — умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня [80].

• позволяет правильно сформулировать и написать выражение для физического закона в виде, инвариантном относительно выбора эталонов e и процедуры измерения σ.

Сакральная формулировка теории размерности

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}{}_{\mu\nu;\,ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0}}$$

[80] Что же касается операций сложения и вычитания, то в них, в силу специфики физических величин, просто нет необходимости. Дело в том, что физические величины возникают в результате существования особых отношений между множеством физических объектов $\mathfrak{M}$ и множеством измерительных приборов $\mathfrak{S}$, в основании которых лежит *мультипликативная* физическая структура ранга (2,2), обеспечивающая существование инвариантов $a\,(e,\,i) \,=\, \frac{a_\sigma\,(i)}{a_\sigma\,(e)} \,=\, \ldots \,=\, \frac{a_\lambda\,(i)}{a_\lambda\,(e)}$, не зависящих от случайного выбора той или иной измерительной операции σ. Другими словами, физическая величина, имея числовую природу, обладает ещё одним важным свойством: *отношение* двух физических величин инвариантно относительно выбора конкретной измерительной операции.

$$\overset{1}{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\mu i}} = \boldsymbol{\xi(\mu)_1\, x^1(i) = a_\mu(e) a(e, i)}$$

								$\cdot^{\cdot^{\cdot}}$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место физической структуры, выражающей сущность теории размерности, среди всех возможных физических структур.

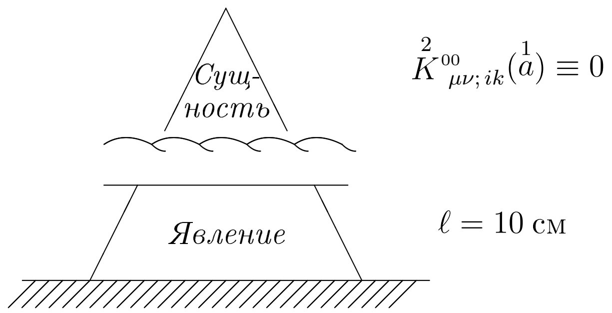
Итак, сущность теории размерности состоит в существовании сакральных отношений между множеством измерительных приборов $\underline{\mathfrak{S}}$ и множеством физических объектов $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждый измерительный прибор μ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждый физический объект i является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.

Другими словами, теория размерности является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность теории размерности состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухвекторного корта измерительных приборов $\langle\,\mu\,\nu\,|$ на двухвекторный корт проводников $|\,i\,k\,\rangle$, объёмы каждого из которых тождественно равны нулю.

Другими словами, **сущность теории размерности состоит в наличии таких отношений между 2-векторным кортом измерительных приборов $\langle\,\mu\,\nu\,|$ и 2-векторным кортом физических объектов $|\,i\,k\,\rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\mu\nu;\,ik}(\overset{1}{a}) = V(\mu,\nu)_{1;\,0}\; V^{1;\,0}(i,k) \equiv 0$$



Явление и сущность теории размерности.

Бесчисленное множество других примеров приходит мне в голову, но мы должны остановиться на этом и сохранить наше повествование в разумных пределах, чтобы не уподобиться тем, о ком трагик Агафон сказал:

Им побочные дела – наиважнейшие,

А настоящие труды – лишь между делом. [1].

[1]. *Климент Александрийский.* Строматы. Том II, (книги 4 - 5). (перевод с древнегреческого Е.В.Афонасина[81]) Санкт-Петербург, 2003.

Изд-во Олега Абышко, С. 224 - 225.

[81]Удивительна и необычна научная карьера самого́ переводчика и комментатора “Стромат”, доктора философских наук, магистра искусств, старшего научного сотрудника Института философии и права СО РАН, преподавателя НГУ – моего ученика **Евгения Афонасина**. Он окончил физический факультет НГУ, но не стал физиком. В своей дипломной работе, посвящённой математическому основанию Теории физических структур, он не смог преодолеть возникших математических трудностей, однако в этой работе он показал себя как мыслитель,

Брюссель. *"Атомиум" – символ веры в научно-технический прогресс.*

поставивший перед собой чрезвычайно трудную задачу – ответить на вопрос "Что есть Истина?". За время обучения в аспирантуре Новосибирского университета, Центрального Европейского (Будапешт) университета, а затем Оксфордского университета, за время работы в Институте классических исследований Бостонского университета и в Научном центре византистики Dumbarton Oaks (Washington, USA) Евгений овладел тремя европейскими языками (английским, французским, немецким), латинским и древнегреческим и во всеоружии пропедевтических исторических и философских знаний взялся за перевод и комментарий огромной, с трудом обозримой и практически неподъёмной глыбы "Строматов" Климента Александрийского. Это поставило его в один ряд с крупнейшими современными византологами.

Область его научных интересов – история философии, классическая филология, западная традиция права, позднеантичная и раннехристианская философия (неопифагорейство, гностицизм, греческая патристика).

(См. в Приложении V отзыв о его кандидатской диссертации крупнейшего российского византолога В.В. Бычкова).

Глава 16

Примеры сакральных законов второго рода, содержащих произвольные параметры

Longum iter est per praecepta, breve
et efficax per exempla [82].

Не следует снова и снова браться за что-то новое и читать все время разное, но нужно вновь и вновь погружаться в нечто действительно великое, пытаясь удержаться там как можно дольше.
— Карл Ясперс (1883–1969)

1. Сакральные законы второго рода, содержащие произвольные параметры

2. Сакральные объёмы первого и второго рода

3*. Сакральная аналитическая геометрия[83]

4*. Пространственно-временна́я кинематика

5*. Теория относительности – сакральный закон второго рода

6*. Мировые постоянные

7*. Основания теории счисления натуральных и рациональных чисел

8*. Сакральные основания линейной алгебры и евклидовой геометрии

9*. Сакральные основания квантовой механики

10*. Сакральные основания теории электромагнитного поля

11*. Сакральные основания статистической физики

12*. Что скрывается за понятием производной?

13*. Откуда возникают полиномы и алгебраические уравнения?

14*. Физическая структура ранга (3,2) – ключ к разгадке чисел e и π

15*. Сакральные основания тригонометрии

[82]Долог путь поучений, краток же и успешен на примерах (Сенека, 4 до н.э – 65 н.э.) "Письма", VI, 5.

[83]Примеры, отмеченные звёздочкой *, и многие другие вопросы будут рассмотрены в следующих изданиях.

1. Сакральные законы второго рода, содержащие произвольные параметры

До сих пор шла речь о **сакральных законах первого рода**

$$\boxed{\overset{n+1}{K}(\overset{n}{q}) \equiv 0},$$

сводящихся к равенству нулю скалярного произведения двух кортов, объёмы каждого из которых равны нулю:

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}(\overset{n}{a}) = V(\overleftarrow{\alpha})_{n_0}V^{n_0}(\overrightarrow{i}) \equiv 0$$
$$\overset{n+1}{K}{}^{01}(\overset{n}{u}) = V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})_{n_0}W^{n_0}(i) \equiv 0$$
$$\overset{n+1}{K}{}^{10}(\overset{n}{v}) = W(\alpha)_{n_0}V^{n_0}(\overrightarrow{\boldsymbol{i}}) \equiv 0$$
$$\overset{n+1}{K}{}^{11}(\overset{n}{w}) = W(\boldsymbol{\alpha})_{n_0}W^{n_0}(\boldsymbol{i}) \equiv 0$$

Однако, существует большой класс **сакральных законов второго рода**

$$\boxed{\overset{n+1}{K}(\overset{n}{q^*}) \equiv 0,}$$

сводящихся к равенству нулю скалярного произведения двух кортов, объём одного из которых (например, левого корта) отличен от нуля,

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}(\overset{n}{a^*}) = V(\overleftarrow{\alpha})_{n}V^{n}(\overrightarrow{i}) \equiv 0$$
$$\overset{n+1}{K}{}^{01}(\overset{n}{u^*}) = V(\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}})_{n}W^{n}(i) \equiv 0$$

Таким образом, требование $\overset{n+1}{K}(\overset{n}{q^*}) \equiv 0$ при условии $V(\alpha), W(\alpha) \neq 0$ сводится к тождественному обращению в нуль объёма правого корта, то есть:

$$V^n(\overrightarrow{i}) = V^n(\overrightarrow{\boldsymbol{i}}) \equiv 0$$

или

$$W^n(i) = W^n(\,\boldsymbol{i}\,) \equiv 0.$$

Итак, наряду с сакральными законами первого рода, связывающих между собой измеримые на опыте репрезентаторы $a_{\overleftarrow{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$, $u_{\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}\,i}$, $v_{\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}$, $w_{\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{i}}$, $p_{\hat{\alpha}\,\overrightarrow{i}}$, $q_{\overleftarrow{\alpha}\hat{i}}$, имеют место сакральные законы второго рода

$$V(\vec{i})_{1\ldots n} = V(\,\vec{\boldsymbol{i}}\,)_{1\ldots n} = \begin{vmatrix} X^1(\vec{i}_1) & \ldots & X^1(\vec{i}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X^n(\vec{i}_1) & \ldots & X^n(\vec{i}_n) \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (1)$$

и

$$W(\vec{i})^{1\dots n} = W(\,\vec{\boldsymbol{i}}\,)^{1\dots n} = \begin{vmatrix} X^1(\vec{i_1}) & \dots & X^1(\vec{i_n}) & X^1(i_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X^n(\vec{i_1}) & \dots & X^n(\vec{i_n}) & X^n(i_{n+1}) \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0, \qquad (2)$$

связывающие между собой измеряемые на опыте сакральные координаты $X^1(i), \dots, X^n(i)$.

Из тождества (1) следует, что связь между сакральными координатами $X^1(i), \dots, X^{n-1}(i), X^n(i) = Y(i)$ содержит $n-1$ произвольных параметров: $c_1, \dots, c_{n-1}$

$$Y(i) = c_1 X^1(i) + \dots + c_{n-1} X^{n-1}(i)$$

Из тождества (2) следует, что связь между сакральными координатами $X^1(i), \dots, X^{n-1}(i), X^n(i) = Y(i)$ содержит n произвольных параметров $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$

$$y(i) = c_0 + c_1 x^1(i) + \dots + c_{n-1} x^{n-1}(i).$$

Доказательство существования однородных и неоднородных сакральных законов второго рода

Физические и геометрические сакральные законы второго рода, в свою очередь, делятся на однородные и неоднородные.

1. В основании однородных сакральных законов второго рода размерности n лежит мультипликативная физическая структура ранга $(n+1, n+1)$.

Исходное сакральное уравнение

$$\Phi^{(1)}_{n+1,n+1}\begin{pmatrix} a_{\alpha_1 i_1}, \dots, a_{\alpha_1 i_{n+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{\alpha_{n+1} i_1}, \dots, a_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{pmatrix} = 0$$

имеет единственное мультипликативное решение:

репрезентатор

$$\overset{n}{a}_{\alpha i} = \xi(\alpha, \boldsymbol{a}_1)_1 \boldsymbol{X}^1(i) + \dots + \xi(\alpha, \boldsymbol{a}_n)_n \boldsymbol{X}^n(i)$$

и верификатор

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1\dots\alpha_{n+1};i_1\dots i_{n+1}}(\overset{n}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a_{\alpha_1 i_1} & \dots & a_{\alpha_1 i_{n+1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{\alpha_{n+1} i_1} & \dots & a_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Легко убедиться в том, что имеет место следующее тождество, возникающее при разделении нечисловых переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ и $i_1, \ldots, i_{n+1}$:

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}; i_1 \ldots i_{n+1}}(\overset{n}{a}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1, \boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1, \boldsymbol{a}_n)_n & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \xi(\alpha_{n+1}, \boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1}, \boldsymbol{a}_n)_n & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X}^1(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^1(i_n) & \boldsymbol{X}^1(i_{n+1}) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \boldsymbol{X}^n(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^n(i_n) & \boldsymbol{X}^n(i_{n+1}) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \xi(\alpha_1, \boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1, \boldsymbol{a}_n)_n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi(\alpha_n, \boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n, \boldsymbol{a}_n)_n & 0 \\ \xi(\alpha_{n+1}, \boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1}, \boldsymbol{a}_n)_n & 0 \end{vmatrix}}_{\equiv 0} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{X}^1(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^1(i_n) & \boldsymbol{X}^1(i_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{X}^n(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^n(i_n) & \boldsymbol{X}^n(i_{n+1}) \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\equiv 0} \equiv 0,$$

где $\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_\mu)_\mu$ — **ненаблюдаемые** ковариантные координаты левого субэйдоса α,
$\boldsymbol{X}^\mu(i)$ — **наблюдаемые** контравариантные координаты правого субэйдоса i.

Чтобы перейти к однородным физическим и геометрическим сакральным законам второго рода, связывающим между собой лишь измеряемые на опыте наблюдаемые сакральные координаты $\boldsymbol{X}^1(i), \ldots, \boldsymbol{X}^n(i)$, необходимо избавиться от ненаблюдаемых координат $\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_1)_1, \ldots, \xi(\alpha,\boldsymbol{a}_n)_n$, входящих в выражение для репрезентатора $\overset{n}{a}_{\alpha i}$.

Для этого осуществим следующее преобразование переменных $\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_\mu)_\mu$ к новым переменным $\xi(\alpha)_\mu$ и $\lambda(\alpha)$:

$$\xi(\alpha, \boldsymbol{a}_\mu)_\mu = \xi(\alpha)_\mu + \lambda(\alpha)\,\boldsymbol{a}_\mu,$$

где $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — наблюдаемые параметры,
$\lambda(\alpha)$ — ненаблюдаемая произвольная числовая функция нечисловой переменной α.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \overset{n}{a}{}^*_{\alpha i} &= \xi(\alpha, \boldsymbol{a}_1)_1 \boldsymbol{X}^1(i) + \ldots + \xi(\alpha, \boldsymbol{a}_n)_n \boldsymbol{X}^n(i) = \\ &= \big[\xi(\alpha)_1 + \lambda(\alpha)\boldsymbol{a}_1\big]\boldsymbol{X}^1(i) + \ldots + \big[\xi(\alpha)_n + \lambda(\alpha)\boldsymbol{a}_n\big]\boldsymbol{X}^n(i) = \\ &= \xi(\alpha)_1 \boldsymbol{X}^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n \boldsymbol{X}^n(i) + \lambda(\alpha)\boldsymbol{Z}(i), \end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{Z}(i) = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{X}^1(i) + \ldots + \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{X}^n(i).$$

Подставляя преобразованный репрезентатор $\overset{n}{a}{}^*_{\alpha i}$ в верификатор $\overset{n+1}{K}{}^{00}(\overset{n}{a}{}^*)$, получим:

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};i_1\ldots i_{n+1}}(\overset{n}{a}{}^*) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & a^*_{\alpha_1 i_1} & \ldots & a^*_{\alpha_1 i_{n+1}} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a^*_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & a^*_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & \lambda(\alpha_1) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & \lambda(\alpha_n) & 0 \\ 0 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \lambda(\alpha_{n+1}) & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X}^1(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^1(i_n) & \boldsymbol{X}^1(i_{n+1}) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \boldsymbol{X}^n(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^n(i_n) & \boldsymbol{X}^n(i_{n+1}) & 0 \\ 0 & \boldsymbol{Z}(i_1) & \ldots & \boldsymbol{Z}(i_n) & \boldsymbol{Z}(i_{n+1}) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & \lambda(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & \lambda(\alpha_n) \\ \xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \lambda(\alpha_{n+1}) \end{vmatrix}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{X}^1(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^1(i_n) & \boldsymbol{X}^1(i_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{X}^n(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^n(i_n) & \boldsymbol{X}^n(i_{n+1}) \\ \boldsymbol{Z}(i_1) & \ldots & \boldsymbol{Z}(i_n) & \boldsymbol{Z}(i_{n+1}) \end{vmatrix}}_{\equiv 0} =$$

$$= \underbrace{V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})_{1\ldots n;\,\lambda}}_{\neq 0} \ \underbrace{\boldsymbol{V}^{1\ldots n\boldsymbol{z}}(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})}_{\equiv 0} \equiv 0,$$

где

$$\boldsymbol{Z}(i) = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{X}^1(i) + \ldots + \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{X}^n(i).$$

Итак, с помощью разделения нечисловых переменных и преобразования переменных $\xi(\alpha, \boldsymbol{a}_{\,\mu})_\mu$ к новым переменным $\xi(\alpha)_\mu$ и $\lambda(\alpha)$, мы выделили все переменные, связанные с левыми субэйдосами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, в отдельный не равный нулю множитель $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})_{1\ldots n;\,\lambda}$, на который можно сократить.

В итоге, вместо тождества

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};i_1\ldots i_{n+1}}(\overset{n}{a}) = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 i_1} & \ldots & a_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & a_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

связывающего между собой ненаблюдаемые репрезентаторы $\overset{n}{a}_{\alpha i}$, получаем эквивалентное тождество

$$\boldsymbol{V}^{\,1\ldots n;\boldsymbol{z}}\,(i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{X}^1(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^1(i_n) & \boldsymbol{X}^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{X}^n(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^n(i_n) & \boldsymbol{X}^n(i_{n+1}) \\ \boldsymbol{Z}(i_1) & \ldots & \boldsymbol{Z}(i_n) & \boldsymbol{Z}(i_{n+1}) \end{vmatrix} \equiv 0$$

или

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{X}_i^1 + \ldots + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{X}_i^n,}$$

связывающее между собой **наблюдаемые** и измеряемые на опыте контравариантные сакральные координаты правого субэйдоса i .

2. В основании неоднородных сакральных законов второго рода размерности n лежит физическая структура ранга $(n+1, n+2)$.

Исходное сакральное уравнение

$$\Phi^{(1)}_{n+1,n+2}\begin{pmatrix} u_{\alpha_1 i_1},\ldots,u_{\alpha_1 i_{n+1}},u_{\alpha_1 i_{n+2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{\alpha_{n+1} i_1},\ldots,u_{\alpha_{n+1} i_{n+1}},u_{\alpha_{n+1} i_{n+2}} \end{pmatrix} = 0$$

имеет единственное решение:

репрезентатор

$$\overset{n}{u}_{\alpha i} = \xi(\alpha,\boldsymbol{a}_1)_1\boldsymbol{X}^1(i) + \ldots + \xi(\alpha,\boldsymbol{a}_n)_n\boldsymbol{X}^n(i) + \xi(\alpha,\boldsymbol{a}_0)_0$$

и верификатор

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};i_1\ldots i_{n+1}i_{n+2}}(\overset{n}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha_1 i_1} & \ldots & u_{\alpha_1 i_{n+1}} & u_{\alpha_1 i_{n+2}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & u_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & u_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} & u_{\alpha_{n+1} i_{n+2}} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Легко убедиться в том, что имеет место следующее тождество, возникающее при разделении нечисловых переменных $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ и $i_1,\ldots,i_{n+1}i_{n+2}$:

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};i_1\ldots i_{n+1}i_{n+2}}(\overset{n}{u}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1,\boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1,\boldsymbol{a}_n)_n & 0 & \xi(\alpha_1,\boldsymbol{a}_0)_0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi(\alpha_{n+1},\boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1},\boldsymbol{a}_n)_n & 0 & \xi(\alpha_{n+1},\boldsymbol{a}_0)_0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X}^1(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^1(i_{n+1}) & \boldsymbol{X}^1(i_{n+2}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \boldsymbol{X}^n(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^n(i_{n+1}) & \boldsymbol{X}^n(i_{n+2}) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi(\alpha_1,\boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1,\boldsymbol{a}_n)_n & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \xi(\alpha_{n+1},\boldsymbol{a}_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1},\boldsymbol{a}_n)_n & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{X}^1(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^1(i_{n+1}) & \boldsymbol{X}^1(i_{n+2}) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{X}^n(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^n(i_{n+1}) & \boldsymbol{X}^n(i_{n+2}) \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})_{1\ldots n;0}}_{\equiv 0} \cdot \underbrace{\boldsymbol{W}^{1\ldots n;0*}(i_1,\ldots,i_{n+1},i_{n+2})}_{\equiv 0} \equiv 0,$$

где $\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_\mu)_\mu$ $(\mu = 1,2,\ldots,n)$ $\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_o)_o$ — **ненаблюдаемые** ковариантные сакральные координаты левого субэйдоса α,

$\boldsymbol{X}^\mu(i)$ — **наблюдаемые** контравариантные сакральные координаты правого субэйдоса i.

Чтобы перейти к неоднородным физическим и геометрическим сакральным законам второго рода, связывающим между собой лишь измеряемые на опыте наблюдаемые сакральные координаты $\boldsymbol{X}^1(i),\ldots,\boldsymbol{X}^n(i)$, необходимо избавиться от ненаблюдаемых координат $\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_1)_1,\ldots,\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_n)_n;\ \xi(\alpha,\boldsymbol{a}_0)_0$, входящих в выражение для репрезентатора $\overset{n}{u}_{\alpha i}$.

Для этого осуществим следующее преобразование переменных $\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_n)_n$, $\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_o)_o$ к новым переменным $\xi(\alpha)_\mu$, $\xi(\alpha)_o$ и $\lambda(\alpha)$:

$$\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_\mu)_\mu = \xi(\alpha)_\mu + \lambda(\alpha)\boldsymbol{a}_\mu,$$
$$\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_o)_o = \xi(\alpha)_\mu + \lambda(\alpha)\boldsymbol{a}_o,$$

где $\boldsymbol{a}_o, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — наблюдаемые параметры,
$\lambda(\alpha)$ — ненаблюдаемая произвольная числовая функция нечисловой переменной α.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}\overset{n}{u}_{\alpha i}=&\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_1)_1\boldsymbol{X}^1(i)+\ldots+\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_n)_n\boldsymbol{X}^n(i)+\xi(\alpha,\boldsymbol{a}_o)_o=\\ =&\big[\xi(\alpha)_1+\lambda(\alpha)\boldsymbol{a}_1\big]\boldsymbol{X}^1(i)+\ldots+\big[\xi(\alpha)_n+\lambda(\alpha)\boldsymbol{a}_n\big]\boldsymbol{X}^n(i)+\xi(\alpha)_o+\lambda(\alpha)\boldsymbol{a}_o=\\ =&\xi(\alpha)_1\boldsymbol{X}^1(i)+\ldots+\xi(\alpha)_n\boldsymbol{X}^n(i)+\lambda(\alpha)\boldsymbol{Z}(i),\end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{Z}(i)=\boldsymbol{a}_o+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{X}^1(i)+\ldots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{X}^n(i).$$

Подставляя преобразованный репрезентатор $\overset{n}{u}_{\alpha i}$ в верификатор $\overset{n+1}{K}{}^{01}(\overset{n}{u})$, получим:

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};i_1\ldots i_{n+1}i_{n+2}}(\overset{n}{a})=\begin{vmatrix}0&1&\ldots&1&1\\0&u_{\alpha_1 i_1}&\ldots&u_{\alpha_1 i_{n+1}}&u_{\alpha_1 i_{n+2}}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&u_{\alpha_{n+1}i_1}&\ldots&u_{\alpha_{n+1}i_{n+1}}&u_{\alpha_{n+1}i_{n+2}}\\-1&0&\ldots&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0&0&\ldots&0&0&1\\0&\xi(\alpha_1)_1&\ldots&\xi(\alpha_1)_n&\lambda(\alpha_1)&\xi(\alpha_1)_0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&\xi(\alpha_n)_1&\ldots&\xi(\alpha_n)_n&\lambda(\alpha_n)&\xi(\alpha_n)_0\\0&\xi(\alpha_{n+1})_1&\ldots&\xi(\alpha_{n+1})_n&\lambda(\alpha_{n+1})&\xi(\alpha_{n+1})_0\\-1&0&\ldots&0&0&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0&\ldots&0&0\\0&\boldsymbol{X}^1(i_1)&\ldots&\boldsymbol{X}^1(i_n)&\boldsymbol{X}^1(i_{n+1})\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&\boldsymbol{X}^n(i_1)&\ldots&\boldsymbol{X}^n(i_n)&\boldsymbol{X}^n(i_{n+1})\\0&\boldsymbol{Z}(i_1)&\ldots&\boldsymbol{Z}(i_n)&\boldsymbol{Z}(i_{n+1})\\0&1&\ldots&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{vmatrix}\xi(\alpha_1)_1&\ldots&\xi(\alpha_1)_n&\lambda(\alpha_1)\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \xi(\alpha_n)_1&\ldots&\xi(\alpha_n)_n&\lambda(\alpha_n)\\ \xi(\alpha_{n+1})_1&\ldots&\xi(\alpha_{n+1})_n&\lambda(\alpha_{n+1})\end{vmatrix}}_{\neq 0}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}\boldsymbol{X}^1(i_1)&\ldots&\boldsymbol{X}^1(i_n)&\boldsymbol{X}^1(i_{n+1})\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \boldsymbol{X}^n(i_1)&\ldots&\boldsymbol{X}^n(i_n)&\boldsymbol{X}^n(i_{n+1})\\ \boldsymbol{Z}(i_1)&\ldots&\boldsymbol{Z}(i_n)&\boldsymbol{Z}(i_{n+1})\\1&\ldots&1&1\end{vmatrix}}_{\equiv 0}=$$

$$=\underbrace{V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})_{1\ldots n;\,\lambda}}_{\neq 0}\ \underbrace{\boldsymbol{W}^{1\ldots n;\,\boldsymbol{z}*}(i_1,\ldots,i_n,i_{n+1},i_{n+2})}_{\equiv 0}\equiv 0,$$

где

$$\boldsymbol{Z}(i)=\boldsymbol{a}_o+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{X}^1(i)+\ldots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{X}^n(i).$$

Итак, с помощью разделения нечисловых переменных и преобразования переменных $\xi(\alpha,\,\boldsymbol{a}_\mu)_\mu$, $\xi(\alpha,\,\boldsymbol{a}_o)_o$ к новым переменным $\xi(\alpha)_\mu$, $\xi(\alpha)_o$ и $\lambda(\alpha)$, мы выделили все переменные, связанные с левым субэйдосом $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, в отдельный, не равный нулю множитель $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})_{1\ldots n;\,\lambda}$, на который можно сократить.

В итоге, вместо тождества

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};i_1\ldots i_{n+1}i_{n+2}}(\overset{n}{u}) = \begin{vmatrix} u_{\alpha_1 i_1} & \ldots & u_{\alpha_1 i_{n+1}} & u_{\alpha_1 i_{n+2}} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ u_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & u_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} & u_{\alpha_{n+1} i_{n+2}} \\ & & & \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

связывающего между собой ненаблюдаемые репрезентаторы $\overset{n}{u}_{\alpha i}$, получаем эквивалентное тождество

$$\boldsymbol{W}^{\,1\ldots n;\boldsymbol{z}\,*}(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} i_{n+2}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{X}^1(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^1(i_{n+1}) & \boldsymbol{X}^1(i_{n+2}) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{X}^n(i_1) & \ldots & \boldsymbol{X}^n(i_{n+1}) & \boldsymbol{X}^n(i_{n+2}) \\ \boldsymbol{Z}(i_1) & \ldots & \boldsymbol{Z}(i_{n+1}) & \boldsymbol{Z}(i_{n+2}) \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

или

$$\boxed{\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{a}_o + \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{X}_i^1 + \ldots + \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{X}_i^n,}$$

связывающее между собой **наблюдаемые** и измеряемые на опыте контравариантные сакральные координаты правого субэйдоса i .

2. Сакральные объёмы первого и второго рода

Мы будем различать два рода расстояний, площадей, объёмов – антропные и сакральные.

Дело в том, что согласно общему принципу, лежащему в основании Теории физических структур, каждому понятию антропной физики (или антропной геометрии) соответствует свой, вполне определённый, прообраз в сакральной физике (и, соответственно, в сакральной геометрии). Заметим, что не для каждого понятия сакрального Мира найдётся его образ в Мире антропном.

Так, например, наглядному образу точки в традиционной (антропной) геометрии, в сакральной геометрии соответствует её прообраз – пара "слипшихся" сакральных точек – левых с ковариантными координатами $X_1(i), \ldots, X_n(i)$ и правых с контравариантными координатами $X^1(i), \ldots, X^n(i)$.

Аналогично, наглядному образу объёма в антропной геометрии, равному числу единичных кубов, на которые разбивается тело внутри замкнутой поверхности, соответствует один из двух сакральных прообразов:

в случае параллелепида, построенного на трёх векторах $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, сакральный объём первого рода имеет вид:

$$V^{123}(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3) = \begin{vmatrix} X^1(\vec{i}_1) & X^1(\vec{i}_2) & X^1(\vec{i}_3) \\ X^2(\vec{i}_1) & X^2(\vec{i}_2) & X^2(\vec{i}_3) \\ X^3(\vec{i}_1) & X^3(\vec{i}_2) & X^3(\vec{i}_3) \end{vmatrix};$$

в случае тетраэдра, построенного на четырёх точках i_1, i_2, i_3, i_4, сакральный объём второго рода имеет вид:

$$W^{123}(i_1, i_2, i_3, i_4) = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} X^1(i_1) & X^1(i_2) & X^1(i_3) & X^1(i_4) \\ X^2(i_1) & X^2(i_2) & X^2(i_3) & X^2(i_4) \\ X^3(i_1) & X^3(i_2) & X^3(i_3) & X^3(i_4) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, будем различать ковариантные сакральные объёмы первого рода n-мерных параллелотопов, построенных на n ковариантных векторах $\vec{i}_1, \ldots, \vec{i}_n$,

$$V_{1\ldots n}(\vec{i}_1, \ldots, \vec{i}_n) = \begin{vmatrix} X_1(\vec{i}_1) & \ldots & X_n(\vec{i}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1(\vec{i}_n) & \ldots & X_n(\vec{i}_n) \end{vmatrix};$$

ковариантные сакральные объёмы второго рода n-мерных симплексов, построенных на $n+1$ ковариантных точках $i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}$,

$$W_{1\ldots n}(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} \begin{vmatrix} X_1(i_1) & \ldots & X_n(i_1) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1(i_n) & \ldots & X_n(i_n) & 1 \\ X_1(i_{n+1}) & \ldots & X_n(i_{n+1}) & 1 \end{vmatrix},$$

и контравариантные сакральные объёмы первого рода n-мерных параллелотопов, построенных на n контравариантных векторах $\vec{i}_1, \ldots, \vec{i}_n$

$$V^{1\ldots n}(\vec{i}_1, \ldots, \vec{i}_n) = \begin{vmatrix} X^1(\vec{i}_1) & \ldots & X^1(\vec{i}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X^n(\vec{i}_1) & \ldots & X^n(\vec{i}_n) \end{vmatrix};$$

контравариантные сакральные объёмы второго рода n-мерных симплексов, построенных на $n+1$ контравариантных точках $i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}$,

$$W^{1\ldots n}(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} \begin{vmatrix} X^1(i_1) & \ldots & X^1(i_n) & X^1(i_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X^n(i_1) & \ldots & X^n(i_n) & X^n(i_{n+1}) \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что понятие сакрального объёма в сакральной физике и геометрии играет такую же важную роль, как молекула ДНК в генетике. Дело в том, что любой фундаментальный закон физики и геометрии есть не что иное, как обращение в нуль либо произведения сакральных объёмов двух кортов (сакральный закон первого рода), либо обращение в нуль одного сакрального объёма одного корта (сакральный закон второго рода).

Образ сакральной физики

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Глава 17

ВЗГЛЯД СО СТОРОНЫ

Vox populi, vox dei [84]

Новый результат мы ценим в том случае, если, связывая воедино элементы давно известные, но до тех пор рассеянные и казавшиеся чуждыми друг другу, он внезапно вводит порядок там, где до тех пор царил, по-видимому, хаос.

— *Анри Пуанкаре*

1. Ладыженская о работах Кулакова
2. Ладыженская о работах Михайличенко
3. Бирюков о работах Кулакова
4. Бугаенко о работах Кулакова
5. Линник о статье Кулакова "Что такое время?"
6. Решетняк о докторской диссертации Михайличенко
7. Решетняк о книге Кулакова "Элементы ТФС"
8. Решетняк о работе Михайличенко
9. Румер о статье Кулакова
10. Фет о дипломной работе Зелова

[84] Глас народа – глас божий.

11. Фет о диссертации Льва
12. Фет о книге Михайличенко
13. Фет о работе Михайличенко
14. Целищев о статье Кулакова
15. Шелехов о докторской диссертации Михайличенко
16. Ширков о лекциях Кулакова по ТФС
17. Владимиров о докторской диссертации Михайличенко
18. Владимиров о работах Кулакова
19. Кулаков о дипломной работе Лозицкого
20. Кулаков о монографии Михайличенко
21. Михайличенко о диссертации Соловьёва
22. Письмо академика Александрова академику Седову
23. Ионин о работе Симонова
24. Письмо Решетняка академику Тихонову
25. Письмо Мельникова Чаптынову
26. Ответ из редакции "Сибирского математического журнала"
27. Выписка из протокола

Фото В.Н. ИЗРАЗЦОВА

Если взглянуть на Теорию физических структур с высоты птичьего полёта, то она открывается взору со стороны как своеобразная *горняя* страна – физическая герменевтика, соединённая с остальным миром узкими, каменистыми тропами. Эта страна представляет собой новую область знания о сущности физических законов со своими понятиями, новой постановкой задачи, новыми законами, новыми уравнениями и новым математическим аппаратом.

Перефразируя известное высказывание Маркса, можно сказать:

Сюда нет широкой столбовой дороги, и только тот достигнет её сияющих вершин, кто не страшась усталости и трудностей упрямо карабкается по её каменистым склонам.

В этой главе я хотел бы предоставить слово тем, кто явно или неявно способствовал развитию, совершенствованию и более глубокому пониманию Теории физических структур.

ВЗГЛЯД СО СТОРОНЫ

1. О.А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ (Заведующая лабораторией математической физики ЛОМИ им. В.А.Стеклова, академик РАН) **об исследованиях Ю.И.Кулакова по теории физических структур :**

Осенью 1980 года Юрий Иванович КУЛАКОВ выступил на семинаре по математической физике в Ленинградском Отделении Института математики АН СССР им. В.А.Стеклова с изложением своей программы – анализа оснований физики и с формулировкой основных положений своей Теории физических структур. Он рассказал какие результаты достигнуты им и его учеником Г.Г Михайличенко в решении задач, относящихся к проблеме пространства и времени, и описал также, что даёт его подход к классической механике, термодинамике, электродинамике и частной теории относительности.

Выступление Ю.И.Кулакова, его подход к анализу основных физических законов, а также полученные строго математически результаты геометрического характера произвели сильное впечатление своей оригинальностью и широтой охвата в духе лучших образцов натурфилософии прошлых веков, когда формировались основы существующих ныне разделов физики. Он не ограничился высказываниями общего характера о необходимости аксиоматизации физики (эта проблема поднималась Давидом Гильбертом и рядом выдающихся физиков прошлого века), а изложил программу исследований, положив в её основу понятие физической структуры, которую он чётко определил. Содержательность такой программы подтверждена теми результатами, которые получены им и Г.Г.Михайличенко в геометрии. Уже одни эти результаты показывают плодотворность идей Ю.И.Кулакова.

Академик Ольга Александровна Ладыженская (1983)

Но оригинальные и глубоко содержательные идеи и планы Ю.И.Кулакова пока недостаточно хорошо известны широким кругам физиков и математиков. Я думаю, что в связи с этим стоило бы организовать Новосибирскому университету Всесоюзную (а ещё лучше Международную) конференцию по аксиоматизации оснований физики, пригласив на неё ведущих учёных, интересующихся этой кардинальной проблемой. При этом заранее, до конференции, целесообразно опубликовать брошюру Ю.И.Кулакова с изложением его точек зрения на эту проблему и разослать её в различные научные физические и математические центры.

Я ознакомилась также с планами Ю.И.Кулакова написать серию книг, в которых он хочет последовательно изложить свою общую концепцию и её применение к различным разделам физики. План этот грандиозен и врят ли под силу одному (пусть очень талантливому) человеку, имеющему лишь одного самоотверженного помошника (Г.Г.Михайличенко). Для его осуществления, мне кажется, надо привлечь талантливых энтузиастов из разных областей физики и математики, которые могли бы начать осуществлять намеченную Ю.И.Кулаковым программу под его руководством.

Физический факультет Новосибирского университета может гордиться, что в его стенах возникло и развивается столь принципиально важное и оригинальное направление.

Участники Первой Школы-семинара ТФС – 1984
на вершине горы Шаман.

Хакассия, оз. Баланкуль.

Concordia parvae res crescunt, discordia maximae dilabuntur. – *При согласии малые дела растут, при несогласии великие дела разрушаются.*

2. $\boxed{\text{О.А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ}}$ о работах Г. Г. Михайличенко:

В конце шестидесятых годов Юрием Ивановичем Кулаковым был предложен оригинальный подход к осмыслению основных понятий и законов теоретической физики, названной им Теорией физических структур. Сформулированный им принцип феноменологической симметрии привёл к постановке интересных математических проблем. Уже решение простейших из них, данное Ю. И. Кулаковым, показало плодотворность его анализа оснований физики. К дальнейшему изучению этих проблем Ю. И. Кулаков привлёк Г. Г. Михайличенко. Геннадием Григорьевичем Михайличенко получены интересные, строго математические результаты по Теории физических структур, составившие его кандидатскую диссертацию и отражённые в целом ряде публикаций. Отметим среди них полное исследование "двумерных геометрий" — результат, привлекший внимание геометров, и установление связи принципа феноменологической симметрии с известным принципом групповой симметрии — результат, обративший на себя внимание специалистов по теории представлений групп.

Геннадий Михайличенко.

Я считаю, что данное направление весьма перспективно и интересно, как с точки зрения теоретической физики, так и точки зрения чистой математики.

Г. Г. Михайличенко зарекомендовал себя как серьёзный и оригинальный исследователь, и весьма желательно перевести его на должность старшего научного сотрудника, чтобы он имел возможность сосредоточить все свои силы на избранном направлении.

Полученные им результаты могут служить основой для докторской диссертации.

3. Б.В. БИРЮКОВ (Доктор философских наук, профессор, член Научного совета АН СССР по комплексной проблеме "Кибернетика") **о работах по Теории физических структур доцента Новосибирского Государственного Университета Ю. И. Кулакова.**

Юрий Иванович Кулаков в течение 20 лет развивает новое направление в теоретической физике, названное им Теорией физических структур (ТФС), имеющее, как мне представляется, большое научно-методологическое значение. По этому вопросу Ю. И. Кулаков опубликовал более 40 работ: в "Докладах Академии Наук СССР", в академических сборниках, вузовских изданиях и иностранных журналах; в издательстве НГУ выпущены две его книги. Ю. И. Кулаков неоднократно выступал на научно-исследовательских семинарах, в том числе в МГУ и в Научном совете по кибернетике АН СССР. Он является одним из соавторов подготовленной в Научном совете книги "Управление, информация, интеллект” (под редакцией академика А. И. Берга).

Виктор Шахов и Юрий Кулаков

Работы Ю. И. Кулакова известны за рубежом, он неоднократно участвовал в международных конгрессах по логике, методологии и философии науки.

Разрабатываемая доцентом Ю. И. Кулаковым ТФС, представляет собой своеобразную алгебру отношений симметрии. Объектом изучений в ней является феноменологическая симметрия — отношение однородности (равноправия) физических объектов в наиболее общем, абстрактном виде. Подобный подход позволил подойти с единой точки зрения к самым разнообразным физическим теориям: хронометрии, релятивистской и нерелятивистской механике, квантовой механике и т. д. Аппарат, основанный на понятии феноменологической симметрии, позволяет получить явные выражения всех известных физических законов, независимо от их конкретной интерпретации. Открывается возможность вскрыть и на строгом физическом уровне описать смысл таких “привычных” понятий, как масса, сила, время и т. д., раскрыть в “чистом” виде сущность пространственно-временных отношений (как специальной, так и общей теорий относительности).

В работах, выполненных Ю. И. Кулаковым в 1983–1986 гг., показано, что, применяя методы Теории физических структур, можно разработать алгоритм, позволяющий отделить информацию, относящуюся к изучаемому физическому объекту, от информации, привносимой измерительным прибором. Оригинальный подход к “очевидным” истинам представляет значительный методологический и общенаучный интерес и, я думаю, он полезен в учебно-методологическом плане, особенно при разработке учебных курсов, базирующихся на достижениях современной теоретической физики.

Под руководством доцента Ю. И. Кулакова большую научную работу в области ТФС ведут его ученики Г. Михайличенко и В. Лев, разрабатывающие математический аппарат теории. В частности, исходя из идей Ю. И. Кулакова, ими установлена эквивалентность феноменологической и групповой симметрии в n-мерной геометрии расстояний, доказано существование ранее неизвестных геометрий.

Исследования, проводимые Ю. И. Кулаковым и его учениками, представляют собой исследования в новой области знания, которые заслуживают всемерной поддержки. Мне кажется, Новосибирский Университет может гордиться принципиально новым направлением в теоретической физике, успешно разрабатываемым в его стенах.

4. Л.Т. БУГАЕНКО (Зав. лабораторией радиационной химии Химического факультета Московского университета, профессор МГУ) и Е.П КАЛЯЗИН (Старший научный сотрудник, доцент МГУ) **о работах доцента Новосибирского государственного университета Ю. И. Кулакова по Теории физических структур ("Записки научного семинара ЛОМИ", Изд-во "Наука", т. 127, 1983.)**

В настоящее время возрастание объёма информации, которым должен овладеть специалист, приходит в резкое противоречие со сроками для его подготовки. Для того, чтобы эти сроки не увеличивались, а, напротив, могли бы быть несколько сокращены (в чём заключается одна из задач готовящейся реформы высшей школы), крайне необходимы подходы, позволяющие максимально свернуть информацию, с тем, чтобы далее из её "сгустков" ("зёрен информации"), студент мог бы по определённому алгоритму развернуть целую цепь научных положений.

Участники Школы по Теории физических структур
в Пущино-на-Оке.

Достижению указанной цели весьма способствуют работы, проводимые в течение ряда лет в НГУ доцентом Ю. И. Кулаковым, в области классификации феноменологических законов на основе Теории физических структур. В этих исследованиях, коротко резюмированных в обзоре, указанном в заголовке, отмечена универсальность законов, охватывающих определённое число физических объектов (свойство феноменологической симметрии законов). В результате, создаются предпосылки для создания набора правил формулировки феноменологических законов для множества объектов независимо от их конкретных физических свойств, подобно тому как для законов арифметики несущественны конкретные свойства исчисляемых объектов. Среди "выводимых" таким образом законов оказываются формулы механики, электродинамики, термодинамики, химии (периодический закон). Вероятно, дальнейшее использование развиваемого аппарата могло бы "вывести" формулы и других научных дисциплин.

Учитывая большие потенциальные возможности повышения эффективности преподавания естественно-научных дисциплин, органично увязываемые с рядом разделов математики и диалектической теории познания, следует высказать сожаление, что рецензируемая работа появилась в относительно мало доступном издании. Интерес к развиваемому Ю. И. Кулаковым подходу велик, как это, в частности, показала динамика посещаемости курса его лекций (в сторону роста числа слушателей к концу) на физическом факультете МГУ в 1978 году.

В свете изложенного представляется целесообразной публикация основных идей Теории физических структур в более доступном изданиях, организация пробного курса лекций, например, в НИИ Минвуза СССР или на ФПК одного из естественных факультетов МГУ (или другого ВУЗа), проведение педагогического эксперимента с участием группы студентов, обсуждение основных положений Теории физических структур на методологическом семинаре Химфака МГУ.

5. Ю.В. ЛИННИК (канд. философских наук (ныне доктор философских наук), доцент кафедры философии Карельского государственного педагогического института.) **о статье Ю.И. Кулакова "Что такое время? (Время как физическая структура)":**

Проблема времени по праву считается одной из самых загадочных и малоразработанных в науке. Можно выделить два основных подхода к исследованию времени: 1) субстанциональный подход (поиск специфического "субстрата" времени, понимание "течения" времени на основе едва ли не гидродинамических аналогий); 2) реляционный подход, базирующийся на Теории отношений и видящий во времени прежде всего особую реляционную структуру, а не квазивещественное образование.

Если первый подход можно назвать классическим, то второй явно выходит за традиционные рамки. Ю. И. Кулаков блестяще представляет именно второе направление, собственно, он является одним из его зачинателей и основоположников. Основу работы составляет *творческое приложение* Теории физических структур Ю. И. Кулакова к проблеме времени. О продуктивности такого подхода свидетельствует эта работа, отличающаяся оригинальностью идей, свежестью в постановке вопроса, и удивительно ясным, глубоко обаятельным стилем изложения.

Опираясь на разработанную им теорию феноменологической симметрии, а также на логико-методологические соображения и эксперименты (обычно это мысленные эксперименты, что не лишает их доказательности и убедительности), автор приходит к выводу: “Время — это тернарные структурно-физические отношения между событиями”.

Однако Ю. И. Кулаков полагает, что в случае более сложных множеств структура времени видоизменится. В частности, показана возможность существования неканонического многомерного времени, для описания которого необходимы полиарные структуры. Конечно, это спорный вывод, но он увлекает логико-философскими перспективами, выводящими нас за рамки существующей парадигмы.

Юрий Владимирович Линник
поэт, философ, естествоиспытатель.

Работы Ю. И. Куланова по исследованию природы времени представляются нам выдающимся явлением в жизни современной науки.

Нет никаких сомнений, что эти пионерские исследования, отмеченные высокой культурой научной мысли, нуждаются во всяческой поддержке и должны быть изданы.

6. Ю.Г. РЕШЕТНЯК (Академик РАН) **о диссертации Г. Г. Михайличенко “Групповые свойства физических структур”, представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология:**

Рецензируемая диссертация является итогом более чем двадцатилетней работы автора. Цель этой работы – решение математических проблем, возникающих в связи с некоторой общей концепцией, предложенной учителем автора, известным физиком Ю. И. Кулаковым. Представленная диссертация является сочинением чисто математическим по своему содержанию, и предполагаемые приложения к физике нашли отражение лишь в использованной автором терминологии. Независимо от тех физических приложений, которые допускают результаты диссертации, её содержание, несомненно, имеет математический интерес. В диссертации получено решение некоторой трудной математической задачи.

По своему содержанию диссертация естественно делится на две части. Первая часть (глава I) может быть отнесена к направлению, известному под наименованием "Геометрия расстояний". Это направление весьма интенсивно развивалось в предыдущие годы. Одним из его основателей был известный тополог К. Менгер. Характер задач, относящихся к этому направлению, состоит, примерно, в следующем. Предположим, что в n -мерном пространстве постоянной кривизны заданы $n+2$ точки. Тогда определено $(n+2)(n+1)/2$ чисел — взаимных расстояний между всеми точками. Эти числа, как известно, не произвольны, они связаны некоторым соотношением. Геометрия расстояний ставит своей целью исследовать все такие метрические пространства, в которых взаимные расстояния между $(n+2)$ -мя точками связаны зависимостью. При этом вид зависимости в известных мне работах по геометрии расстояний обычно задавался заранее. В работах Г .Г. Михайличенко сделан качественно новый шаг в геометрии расстояний. Именно, в ней рассматривается множество, в котором каждой паре элементов x, y сопоставляется некоторое число $r(x, y)$ — "расстояние" между x и y . Выполнение аксиом метрики для $r(x, y)$, в частности, неравенство треугольника, не предполагается, так что $r(x, y)$ есть расстояние в некотором обобщённом смысле. Правильнее, возможно, было бы говорить, что $r(x, y)$ есть некоторый инвариант пары точек (x, y) . Предположим,что для любых $n+2$ точек $x_1, \ldots, x_{n+2}$ данного множества $(n+2)(n+1)/2$ чисел $r(x_i, y_j)$ связаны некоторой зависимостью. Утверждается, что геометрия, определяемая данной функцией $r(x, y)$, имеет весьма специальный характер. При этом, что существенно, заранее не делается никаких предположений о том, какая зависимость связывает величины $r(x_i, y_j)$. Условия, налагаемые на набор чисел $\{r(x_i, y_j)\}$, сводятся к требованиям гладкости рассматриваемых функций и невырожденности — возникающие уравнения должны иметь максимально возможный ранг. Автором полностью описаны все такие геометрии для случая $n = 2$. Их общее число оказалось равным десяти. В общем случае основной результат заключается в следующем. Геометрия вида, рассматриваемого автором, полностью характеризуется наличием некоторой достаточно богатой группы преобразований ("изометрий" в смысле "расстояния" $r(x, y)$). Тем самым "дистанционный" подход к изучению геометрий сводится к теоретико-групповому. Этот результат представляется весьма глубоким и получение его потребовало преодоления существенных трудностей. В общем случае описание всех возникающих таким образом геометрий есть задача, по-видимому, той же степени трудности, что и задача полного описания всех групп Ли для каждой фиксированной размерности.

Вторая часть диссертации (глава II) посвящена изучению так называемых физических структур. Теорию физических структур можно понимать как геометрию пары множеств A, B. При этом каждой паре (x, y), где $x \in A$, $y \in B$, сопоставлено число $r(x, y)$. Следуя Ю. И. Кулакову, автор говорит, что пара (A, B) есть физическая структура типа (n, m), если для любых n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из A и m точек $y_1, y_2, \ldots, y_m$ из B, nm “расстояний” $r(x_i, y_j)$ между ними связаны некоторой зависимостью. Вид этой зависимости заранее не фиксируется. Требования, при которых изучается задача, сводятся к требованию гладкости функций и невырожденности возникающих уравнений. В этом случае, в отличие от рассматриваемого в главе I, все геометрии пары множеств оказывается возможным описать. В диссертации установлено, что геометрии пары множеств допускают характеристики в терминах групп Ли.

Основные результаты получены в терминах локальной дифференциальной геометрии, соответственно, локальной теории групп Ли. Некоторые чисто внешние особенности работы читателю могут показаться непривычными. Сюда относятся используемые автором обозначения и терминология, аппелирующая к физике. Преобладание локальных методов дифференциальной геометрии может произвести впечатление некоторой старомодности. Следует сказать в связи с этим, что привлечение таких методов вызвано существом дела.

Диссертация Г. Г. Михайличенко, на мой взгляд, представляет собой глубокое математическое исследование, безусловно удовлетворяющее требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по математике. Сопоставляя её с работами в области геометрии расстояний, выполнявшимися К. Менгером, Л. Блюменталем и другими, можно сказать, что результат Г. Г. Михайличенко и есть то “жемчужное зерно”, которое указанные авторы не смогли рассмотреть. Если бы мне пришлось писать обзор по геометрии расстояний, то в качестве основных я бы указал именно результаты Г. Г. Михайличенко.

Работа Г. Г. Михайличенко представляет собой серьёзное научное исследование и, несомненно, удовлетворяет требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям. В то же время я считаю, что ознакомление с ней геометров, специалистов по теоретико-групповым методам было бы желательным.

7. Ю.Г. РЕШЕТНЯК (Профессор, доктор физ.-мат. наук (ныне академик РАН)) **о конспекте лекций Ю.И. Кулакова “Элементы Теории физических структур”:**

Данный конспект посвящён изложению основ Теории физических структур, развиваемой Ю. И. Кулаковым совместно с его учениками. Концепция физической структуры, предложенная Ю. И. Кулаковым, даёт единый подход к основанию самых разнообразных физических теорий.

Основу понятия физической структуры составляет выдвинутый Ю. И. Кулаковым принцип феноменологической симметрии. В общих чертах этот принцип состоит в следующем.

Имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ объектов произвольной природы. Каждой паре (i, α), где $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ сопоставляется некоторое число $a_{i\alpha}$. Зададим натуральные числа m и n и будем рассматривать всевозможные системы из

$m \cdot n$ чисел $\|a_{i_r\alpha_s}\|$, где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — произвольные m элементов множества $\mathfrak{M}$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные n элементов множества $\mathfrak{N}$. Эту систему можно рассматривать как точку в $m \cdot n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{mn}$. Вообще говоря, множество всех точек пространства $\mathbb{R}^{mn}$, которое так получается, будет заполнять область пространства $\mathbb{R}^{mn}$. Но при некоторых m и n может оказаться, что указанные точки ложатся в $\mathbb{R}^{mn}$ на многообразие размерности $mn-1$. Условие, что это имеет место, и составляет принцип феноменологической симметрии. В этом случае, согласно Ю. И. Кулакову, мы имеем физическую структуру ранга (m, n).

Оказывается, что указанные многообразия в $\mathbb{R}^{mn}$ могут быть только многообразиями вполне определённых типов. Для некоторых простейших случаев Ю. И. Кулаковым и его учеником Г. Г. Михайличенко эти типы многообразий найдены.

В общем случае (при произвольных m и n) определение физических структур является, по-видимому, весьма трудной математической задачей. Однако уже в тех случаях, которые здесь рассмотрены, её решение приводит к весьма интересным следствиям.

Принцип феноменологической симметрии даёт также новый подход к некоторым вопросам геометрии, в частности, к евклидовой геометрии.

Не касаясь физического содержания данного курса, я должен сказать, что он представляется мне чрезвычайно интересным в том отношении, что содержит ряд весьма интересных и новых по постановке математических задач.

Я считаю, что данный курс безусловно следует опубликовать. В дальнейшем эту книгу, может быть, в несколько изменённом и дополненном виде, следует издать обычным типографским способом (например, в издательстве “Наука”).

8. Ю.Г. РЕШЕТНЯК (Доктор физико-математических наук, профессор (ныне академик РАН)) **о работе Г. Г. Михайличенко “Двумерные геометрии в Теории физических структур”:**

В тридцатые – сороковые годы нашего века появилось большое число исследований, относящихся к направлению, получившему название “геометрии расстояний”. Итоги деятельности этого направления подведены в монографии Блюменталя, цитируемой в работе Михайличенко. Отметим,что к числу основателей геометрии расстояний принадлежит такой известный математик, как Г. Менгер, являющийся автором многих результатов в этой области.

Одна из задач геометрии расстояний – охарактеризовать такие классические геометрии, как евклидову, сферическую и геометрию Лобачевского свойствами расстояний между точками. Известно, что для произвольной четвёрки точек на евклидовой плоскости шесть чисел – расстояний между этими точками не могут быть произвольными, а удовлетворяют некоторому тождеству. Аналогичное утверждение верно для сферической геометрии и геометрии Лобачевского.

В работах по геометрии расстояний (см. цитированную монографию Блюменталя) было установлено, что если метрическое пространство таково, что для любой четвёрки точек этого пространства шесть чисел – расстояний между ними удовлетворяют тому же тождеству, что и расстояния между четырьмя точками на евклидовой плоскости, то при некоторых естественных дополнительных ограничениях это пространство совпадает с обычной евклидовой плоскостью. Иными словами, евклидова плоскость как метрическое пространство полностью характеризуется тождеством, которому удовлетворяют шесть расстояний между точками произвольной четвёрки. Аналогичный результат верен для сферы и для плоскости Лобачевского.

Цитированный результат геометрии расстояний сам по себе представляется не слишком глубоким. Думаю, что данная оценка была бы справедлива также и том случае, если бы она была высказана 30 или 40 лет назад.

В рецензируемой работе Г. Г. Михайличенко получен существенно более сильный результат. Именно, показано, что если расстояния между точками таковы, что для всякой четвёрки шесть расстояний между её точками связаны хоть каким-то соотношением, то геометрия, соответствующая этому расстоянию, определяется достаточно жестко — кроме геометрии плоскостей постоянной кривизны возможны ещё лишь семь геометрий.

Новым по сравнению с результатами геометрии расстояний является то, что вид зависимости между шестью расстояниями в работе Г. Г. Михайличенко не предполагается заранее известным. Ограничения, накладываемые на зависимость, сводятся к некоторым естественным условиям невырожденности.

Работа Г. Г. Михайличенко содержит интересный новый научный результат и заслуживает скорейшего опубликования. Оценивая место этого результата в геометрии, необходимо сказать следующее. По сравнению с тем, что было сделано ранее в геометрии расстояний, Г. Г. Михайличенко получено продвижение принципиального характера, а не просто "некоторое усиление", как пишет автор на первой странице работы. Теорема, доказанная Г. Г. Михайличенко, по сути дела, есть то самое "жемчужное зерно", которое математики, занимающиеся в своё время геометрией расстояний, так и не смогли найти.

Работа Г. Г. Михайличенко относится к направлению, которое он разрабатывает со своим учителем Ю. И. Кулаковым под названием Теории физических структур. Возможно, некоторое недоверие к Теории физических структур, послужило причиной отклонения статьи Г. Г. Михайличенко редакцией "Докладов АН СССР". Я не считаю себя достаточно компетентным, чтобы судить о значении Теории физических структур Ю. И. Кулакова для физики. В математическом отношении, однако, то, что делается Ю. И. Кулаковым и Г. Г. Михайличенко, вполне корректно и приводит к достаточно интересным и содержательным математическим задачам, как можно судить по их работам, опубликованным в "Сибирском математическом журнале".

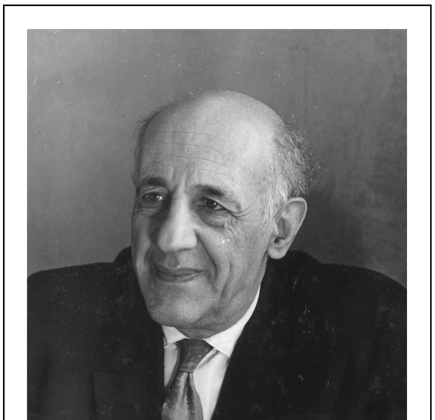
Необходимо отметить, что рецензируемая работа Г. Г. Михайличенко имеет значение и может рассматриваться независимо от общих принципов Ю. И. Кулакова. В связи с этим, название работы следует признать не совсем удачным – читателю, не знакомому с Теорией физических структур, оно ничего не говорит.

В заключении отзыва хочу отметить, что результаты статьи Г. Г. Михайличенко представляют интерес для широкого круга специалистов-геометров. Автором развит принципиально новый подход к введению важного класса геометрий. Поэтому будет более правильным опубликовать данную работу в журнале общенаучного характера, каким является журнал “Доклады Академии наук СССР”, а не в узкоспециальном журнале. Изложение результатов, приведённых в рецензируемой статье, с полными доказательствами, к сожалению, занимает большой объём (более 100 машинописных страниц), ввиду чего оно не может быть быстро опубликовано. По этой причине публикация статьи Г. Г. Михайличенко, содержащей информацию о полученных результатах, весьма желательна.

9. Ю.Б. РУМЕР (Доктор физ. мат. наук, профессор МГУ) **о статье Ю.И. Кулакова “Геометрическая интерпретация основных понятий термодинамики”:**

В рецензируемой работе предлагается новая геометрическая интерпретация термодинамики, а также связанный с этой интерпретацией метод эмпирического обоснования термодинамики.

Исходя из основного уравнения термодинамики, автор выводит “конечное уравнение термодинамики”, в которое входят суммы и разности работ вдоль смежных сторон цикла Карно. (Насколько мне известно, первое из этих соотношений не встречается в литературе). Далее, заменой переменных эти уравнения превращаются в геометрические соотношения, в которые входят симметрические (псевдоевклидовы) и антисимметрические (симплектические) расстояния.



Юрий Борисович Румер.

Поскольку эти расстояния имеют смысл соответствующих работ и потому могут быть непосредственно измерены на опыте, основное содержание термодинамики оказывается, таким образом, поддающимся экспериментальной проверке до введения каких-либо физических понятий, кроме понятия работы, “термостата”, “адиабата” (прибор, осуществляющий тепловую изоляцию), что и сделано во второй части работы.

Экспериментальные значения соответствующих работ удовлетворяют геометрическим соотношениям, аналогичным известному выражению объёма тетраэдра через длины рёбер (определитель Кели-Менгера). Это позволяет ввести в основные величины термодинамики T и S, исходя из опытных данных, как декартовы координаты в соответствующих пространствах, а затем вывести из опытных данных, объединённых “геометрической” формулировкой, основное соотношение термодинамики.

В статье Ю. И. Кулакова обнаружена простая и неожиданная связь между термодинамикой и метрической геометрией и предложен оригинальный подход к обоснованию термодинамики, более непосредственно связанный с экспериментом, чем обычно. При таком подходе введение понятия температуры, энтропии и внутренней энергии производится в рамках единого метода и, на мой взгляд, весьма изящно.

Считаю, что работа Ю. И. Кулакова "Геометрическая интерпретация основных понятий термодинамики" относится к основаниям физики, представляет серьёзный интерес и безусловно заслуживает опубликования.

10. А.И. ФЕТ (Доктор физ.-мат. наук) **о дипломной работе В.А. Зелова "Площади в двумерных геометриях":**

Как известно, Теория физических структур Ю. И. Кулакова позволила, в частности, описать с новой точки зрения все элементарные геометрии в смысле Гельмгольца–Клейна. Исследование двумерного случая, подробно проведённое Г. Г. Михайличенко, прибавило к классическим геометриям (евклидовой, эллиптической, гиперболической, псевдоевклидовой, симплектической) некоторые новые, "экзотические" геометрии, ещё недостаточно изученные. В каждой из элементарных геометрий имеется содержательный набор инвариантов, прежде всего — аналоги расстояний, углов и площадей евклидовой геометрии. Новый подход, возникший из Теории физических структур, позволил внести в эту классическую область геометрии единство и изящество.

Абрам Ильич Фет.

Если рассмотреть расстояние двух точек как функцию координат этих точек, то для таких функций Г. Г. Михайличенко вывел дифференциальные уравнения, решение которых позволяет просто выразить расстояние через надлежащим образом выбранные координаты во всех плоских геометриях. Для углов соответствующая задача решена Е. Л. Лозицким. В рассматриваемой работе изучается общая задача об определении площадей треугольников во всех плоских элементарных геометриях. В отличие от обычного изложения неевклидовых геометрий, при котором все геометрические построения производятся отдельно для каждого случая, В. А. Зелов кладёт в основу своего определения площадей свойство аддитивности, имеющееся во всех случаях. Рассматриваются неориентированные площади, т. е. все площади треугольников положительны, независимо от их ориентации (случай ориентируемых площадей может быть исследован аналогичным способом). Тогда во всех элементарных геометриях площадь четырёхугольника может быть двумя способами представлена как сумма площадей треугольников, на которые он разбивается диагоналями. Это очевидное соотношение приводит к общим дифференциально-функциональным уравнениям, решение которых позволяет выразить площадь треугольника как функцию координат его вершин, и окончательно – как функцию попарных расстояний между вершинами. Для всех элементарных геометрий, в том числе для новых случаев, открытых Г. Г. Михайличенко, получаются изящные формулы площадей, которые в таком виде не встречались в литературе, насколько мне известно, даже в сферической и гиперболической геометрии. Возможно, развитый в работе метод окажется полезным и в соответствующей многомерной задаче: заслуживает внимания, что объём тетраэдра в трёхмерной сферической геометрии до сих пор не удалось выразить в виде функции длин его рёбер. Эта задача была в последние годы предметом исследований ведущих французских математиков школы Бурбаки. Таким образом, "элементарная" геометрия отнюдь не завершена и не бесплодна!

В. А. Зелов продемонстрировал в своей дипломной работе ясное понимание Теории физических структур и немалые вычислительные способности, потребовавшиеся для получения окончательных формул в изящном прозрачном виде. Следует заметить, что он вовсе не ограничен в своих способностях вычислениями и хорошо понимает концепции современной математики. Думаю, что овладение математикой позволит ему затем вернуться к физике во всеоружии, в частности, к дальнейшим задачам, стоящим перед Теорией физических структур. Спешу заметить, что я всегда высоко ценил эту теорию, разделяя в этом мнение наших лучших физиков. Чтобы не было сомнения в том, кого я считаю таковыми, назову И. Е. Тама и М. А. Леонтовича. Что касается математики, то можно было бы сослаться и на мнение некоторых, ныне здравствующих.

По-видимому, у В. А. Зелова было очень мало времени для написания текста работы; отсюда – небольшие описки и некоторые неудачные термины. Это никоим образом не отражается на оценке работы: считаю её удовлетворяющей всем требованиям, предъявляемым к дипломным работам.

11. А.И. ФЕТ (Доктор физико-математических наук) **о диссертации В.Х. Льва, представленной на соискание степени кандидата физико-математических наук:**

Целью Теории физических структур является разыскание фундаментальных структур, лежащих в основании физических теорий. Поскольку геометрия может рассматриваться как специальная (и старейшая) область физики, уже на раннем этапе эта Теория была применена к геометрическим структурам. Обнаружилось, что при этом получаются в точности геометрии в смысле группового определения Феликса Клейна, предложенного им в 1872 году в его исторической "Эрлангенской программе". Можно назвать эти геометрии "элементарными", поскольку из них строятся все известные геометрические системы методом связностей в расслоенных пространствах, принадлежащим Э. Картану. Тем самым устанавливается связь между двумя подходами к "геометрии в смысле Клейна", или – элементарным геометриям. Первый из них, разработанный Гельмгольцем, основан на идее "максимальной подвижности": группа преобразований элементарной геометрии n-мерного пространства должна иметь то же число существенных параметров, что и группа движений евклидова пространства, то есть $\frac{1}{2}n(n+1)$. Второй подход есть "чистая геометрия расстояний", в которой берётся $n+2$ точки n-мерного пространства и налагается соотношение, связывающее их попарные расстояния. Такие соотношения были предметом исследования Кэли, Менгера, Блюменталя и других математиков.

Оба эти подхода оказались эквивалентными. Существенно, что, в отличие от классических работ, Теория физических структур не отправляется от данных, заранее известных геометрических систем, таких как евклидовы , неевклидовы, псевдоевклидовы и симплектические геометрии, а постулирует лишь наличие общего соотношения между попарными расстояниями $n+2$ точек и выводит отсюда все возможные типы элементарных геометрий. Это было впервые продемонстрировано Г. Г. Михайличенко в его известной заметке, опубликованной в Докладах Парижской академии наук в 1981 году. Г. Г. Михайличенко классифицировал двумерные элементарные геометрии, обнаружив, кроме классических, ещё несколько "экзотических" геометрий, изучение которых лишь начинается. Применённый им аппарат исследования — сравнительно мало разработанные функциональные уравнения, решения которых получаются с помощью уравнений в частных производных.

Владимир Лев.

Иной подход, содержащийся в работах В. Х. Льва, использует группы и алгебры Ли. Соотношения между расстояниями дифференцируются по всем координатам точек, и из полученных уравнений выводятся операторы и перестановочные соотношения алгебры Ли соответствующей группы симметрии. Можно сказать, что если Г. Г. Михайличенко исходил из "геометрии расстояний" в смысле Кэли, то В. Х. Лев отправляется от "максимальной подвижности" в смысле Гельмгольца, сразу же переходя к разысканию групп преобразований, сохраняющих расстояния. Как показал диссертант, такой метод оказывается весьма эффективным и применим не только к геометрическим, но и к физическим структурам, позволяя использовать хорошо развитый аппарат теории групп Ли.

В диссертации классифицируются возможные геометрии расстояний в размерности 2, 3, 4, а также намечается программа исследований, обещающая найти все такие геометрии любой размерности. При $n = 2$ получается таким способом геометрия, найденная Г. Г. Михайличенко. В размерностях 3 и 4 результаты диссертации новы и представляют, по моему мнению, значительный интерес. По своему стилю работа производит впечатление естественно-научного исследования, изучающего реальные объекты, а не просто связи между определениями, как это часто случается в современной математике. Диссертант вполне владеет средствами теории групп Ли, и те группы, к которым он приходит, родственны группам преобразований, рассмотренным для плоского случая самим Суфусом Ли.

Я считаю, что диссертация с избытком удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а сам диссертант вполне заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук.

12. А.И. ФЕТ (Доктор физико-математических наук) **о книге Г.Г. Михайличенко "Полиметрические геометрии":**

Метрическая точка зрения на геометрию, возникшая в 19 веке в работах Гельмгольца и Пуанкаре, тесно связана с групповой концепцией геометрии Клейна. Принципиально важная теорема автора книги устанавливает эквивалентность обоих классических подходов к геометрии. Другой традиционной чертой геометрии всегда была симметричность расстояний (как в случае евклидовой, псевдоевклидовой и гиперболической геометрий) или антисимметричность (как в случае симплектической геометрии). Теория феноменологической симметрии Ю.И.Кулакова, создавшая достаточно общую концепцию расстояния, позволила автору доказать, что с точностью до естественной эквивалентности все метрические геометрии симметричны или антисимметричны.

Семинар по Теории физических структур в НГУ.

Далее, с точки зрения теории Ю.И.Кулакова, метрические геометрии вообще составляют частный случай его "физических структур", охватывающих все "элементарные" законы физики. При этом Ю.И.Кулаков заметил, что в основании термодинамики лежат две метрики, к которым Г.Г.Михайличенко прибавил третью. Полученные таким образом три метрики позволяют дать геометрическую аксиоматику термодинамики, принципиально отличную (и, как я полагаю, более простую), чем известная аксиоматика Каратеодори.

Это наблюдение оправдывает интерес к "полиметрическим" геометриям, то есть геометриям, между точками которых есть более одного расстояния. Новая "геометризация" физики, предложенная Ю.И.Кулаковым, позволяет ожидать от таких геометрий необычных физических соотношений.

Автор книги, Г.Г.Михайличенко, дал в свое время полную классификацию "однометрических" физических структур, представляющую выдающееся достижение исчерпывающей математической классификации. Полиметрический случай гораздо труднее, и пока имеются лишь первые результаты, составляющие основное содержание рассматриваемой книги: изучаются простейшие двуметрические и триметрические структуры. Одна из последних составляет логическую основу термодинамики.

Аспирант Г.Г.Михайличенко, В.А.Кыров, написал приложение об алгебрах Ли, связанных с трехмерными геометриями.

Книгу Г.Г.Михайличенко можно смело рекомендовать к изданию, как по её содержанию, так и по математическому мастерству.

13. А.И. ФЕТ (Доктор физ.-мат. наук) **о работе Г.Г. Михайличенко “Простейшие s-метрические геометрии”, ч. I:**

Рецензируемая работа представляет собой, как видно из её заглавия, введение в серию работ, посвящённых классификации s-метрических геометрий. Эта первая часть по содержанию близка к докторской диссертации Геннадия Григорьевича и будет, насколько мне известно, первой подробной публикацией части её результатов. Уже “однометрический” вариант работы имеет важное значение для геометрии, и я начну, для простоты, с объяснения её идейного содержания в однометрическом случае, а потом уже перейду к смыслу “ s-метрики”.

После появления гиперболической и эллиптической геометрий понятие “геометрии постоянной кривизны” было предметом пристального внимания математиков девятнадцатого века. Замечательно, что их общую характеристику открыл физик Гельмгольц, описавший их как геометрии с “наибольшей подвижностью”. Именно он указал, что n-мерная геометрия постоянной кривизны допускает транзитивную группу преобразований, сохраняющих её метрику и зависящую от $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров (в более поздней метрикологии это $\frac{n(n+1)}{2}$-мерная группа Ли). Для простоты мы назовём такие геометрии “элементарными”. С другой стороны, ещё с древности было известно, что евклидова геометрия характеризуется, в размерностях 2 и 3, определенными соотношениями, связывающими попарные расстояния любых трёх (соответственно, четырёх) точек. Но в синтетическом подходе Евклида эти соотношения не привлекали внимания, так как не ставилась задача построить геометрию на единственном её главном понятии – расстоянии. Эту задачу выполнили, уже в 20-м веке, Менгер и Блюменталь, для элементарных геометрий любой размерности. Важные формулы, связывающие в n-мерном пространстве попарные расстояния любых $n+2$ точек, мало известны и обычно не включаются даже в подробные трактаты по "неевклидовой геометрии". Таким образом, элементарные геометрии получили два различных описания: в терминах групп движений и в терминах расстояний. Эквивалентность обоих подходов демонстрировалась просто перечнем конкретных геометрий, известных в то время.

Новый подход к "элементарным геометриям" возник из Теории физических структур Ю.И.Кулакова, широко обобщившего понятие расстояния и перенесшего это понятие на фундаментальные структуры физики. В физике приходится рассматривать численные инварианты двух точек, принадлежащих, как правило, *различным* пространствам и соответствующим взаимодействующим объектам разной природы; обобщённое расстояние является численной характеристикой взаимодействия. Геометрия оказывается при этом специальной отраслью физики, в которой оба упомянутых выше пространства совпадают. Но при этом, конечно, уже не обязательно требовать, чтобы расстояние удовлетворяло обычным аксиомам метрического пространства, например, чтобы было положительно, симметрично или подчинялось неравенству треугольника. Что такие более общие расстояния имеют важное значение, видно из примеров симплектической геометрии, лежащей в основе гамильтоновой механики, или псевдоевклидовой геометрии, лежащей в основе теории относительности.

Возникает вопрос: какие существуют "элементарные геометрии" в таком более широком смысле слова? Два классических подхода, описанных выше, могут быть применены к этому вопросу. Подход Гельмгольца в общем виде состоит в следующем. Пусть на n-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ задана функция двух точек $f(i,j)$ с действительными значениями (или, более общим образом, с комплексными значениями, что в этой работе не рассматривается). Каким образом могут действовать на $\mathfrak{M}$ группы Ли преобразований, сохраняющих функцию $f(i,j)$? Каково максимальное число параметров таких групп?

Подход "метрических соотношений" Менгера, в обобщении Кулакова, состоит в следующем: Пусть на n-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ для каждых $n+2$ точек $i,j,...,v,w$ удовлетворяется соотношение

$$\mathfrak{F}(f(i,j),f(i,k),f(j,k),...,f(v,w))=0,$$

связывающее $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ попарных расстояний между этими точками. Каковы могут быть расстояния $f(i,j)$ и функция $\mathfrak{F}$?

Главный результат рецензируемой работы состоит в доказательстве *эквивалентности двух указанных подходов.* А именно, если существует приведенное выше соотношение между расстояниями, то на многообразии транзитивно действует группа преобразований Ли размерности $\frac{n(n+1)}{2}$, сохраняющая расстояния; и обратно, если существует такая группа, то имеется функциональное соотношение между $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ попарных расстояний любых $n+2$ точек многообразия.

В действительности автор рассматривает более общий случай, когда на многообразии размерности ns (s – целое положительное число) для каждых двух точек i,j определено s чисел $f^{\mu}(i,j)$ $(\mu=1,2,...,s)$, составляющих s расстояний. Соответственно, размерность группы движений в предыдущей эквивалентности равна $\frac{sn(n+1)}{2}$, а число расстояний, связываемых соотношением, равно $\frac{s(n+1)(n+2)}{2}$. Это обобщение нужно в физике. Например, в термодинамике, где Ю.И.Кулаков ввел *два* расстояния – симметричное и антисимметричное – через эти расстояния выражаются основные закономерности равновесных процессов в газах. С этого примера автор и начинает свою работу, мотивируя введение s -расстояний. Несомненно, в следующих частях работы будут их дальнейшие приложения.

Статья написана с классической "локальной" точки зрения, то есть теоремы доказываются в окрестности точек, где ранги некоторых матриц Якоби должны удовлетворять естественным условиям. В открытых автором "экзотических" геометриях такие условия могут нарушаться на подмногообразиях меньшей размерности. Представляло бы интерес, разумеется, глобальное исследование рассмотренных в работе вопросов; но надо заметить, что даже в классической дифференциальной геометрии глобальные результаты до сих пор редки.

Доказательства, содержащиеся в работе, весьма изобретательны. Алгебра Ли группы движений реализуется векторными полями на многообразии, связанными с расстояниями $f(i,j)$ системами дифференциальных уравнений. Автор виртуозно владеет техникой анализа, необходимой для исследования их решений, и применяет её в обстановке, не встречающейся у классиков, поскольку расстояния не могут быть заданы, как это обычно делалось, римановой метрической формой. Ему приходится рассматривать расстояния "далёких" точек i,j , и теория локальна лишь в том смысле, что *каждая* из точек меняется в своей малой окрестности, но окрестности разных точек не пересекаются.

Сжатое изложение работы, в которой читателю предоставляется ряд более простых выкладок, исключает какие-либо требования о её сокращении. Я и прежде читал эти доказательства, но в более кратком изложении я бы их не понял.

Полагаю, что работа Г.Г.Михайличенко удовлетворяет всем требованиям, какие можно предъявить к важному математическому исследованию, и непременно должна быть опубликована.

14. В.В. ЦЕЛИЩЕВ (Зав. сектором логики и теории познания Института истории, филологии и философии СО АН СССР, канд. филос. наук (ныне доктор филос. наук)) **о статье Ю.И. Кулакова "О необходимости новой постановки проблемы в теоретической физике":**

Статья посвящена исследованию философских оснований физики. Автор анализирует пути развития этой науки и те трудности, которые стоят перед физикой в настоящее время. Основным положением статьи является тезис о необходимости унификации физического знания. По мнению автора, одним из возможных путей к построению единой физической теории является переход к такому уровню формулировки физической теории, когда не только основные уравнения, но и сами физические понятия и величины возникают естественным образом как единственно возможные инварианты. В качестве математического аппарата унификации предполагается разрабатываемая автором Теория физических структур, в основе которой лежит так называемый принцип сакральной симметрии.

Оценивая статью в целом, можно сказать, что в ней изложены некоторые результаты большой работы, проделанной Ю. И. Кулаковым за последние годы.

Отзыв дан для предъявления в ВИНИТИ при рассмотрении вопроса о депонировании статьи Ю. И. Кулакова.

15. А.М. ШЕЛЕХОВ (Доктор физико-математических наук) **о диссертации Г.Г.Михайличенко, представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.04 – геометрия и топология:**

Как показывает история, обсуждение вопроса “что такое геометрия?” не раз приводило к возникновению принципиально новых взглядов в математике, к повороту в развитии всей науки. Не раз геометрия как бы рождалась заново, вместе с ней развивалось понятие числа, изменялась концепция пространства и времени, возникали новые течения в философии. Поворотные моменты в истории геометрии отмечены именами Евклида, Декарта, Гаусса, Лобачевского, Клейна, Гильберта, Пуанкаре, Римана. После внушительных успехов геометрии её авторитет в семье естественных наук повысился настолько, что положение можно охарактеризовать, перефразируя известную французскую поговорку: “chercher la géomtrie”. Это особенно заметно в физике: многие современные физические теории имеют естественный геометрический аналог, и именно присоединение к физической идее геометрического обоснования делает задачу более увлекательной и перспективной.

Владимир Лев, Юрий Кулаков, Виктор Шахов и Геннадий Михайличенко.

В диссертации Г.Г.Михайличенко рассматривается круг проблем, являющихся естественным развитием классических идей, лежащих в основании современной геометрии. Кроме того, полученные им результаты имеют непосредственное приложение к физике. Поэтому актуальность выбранной автором тематики несомненна. Основным результатом диссертации, на наш взгляд, является доказательство эквивалентности двух геометрических концепций: геометрии максимальной подвижности и геометрии расстояний, рассматриваемых в самом общем виде. Именно расстоянием между двумя точками называется функция достаточно общего вида, для которой известные аксиомы метрики, вообще говоря, не выполняются. Далее предполагается, что $(n+2)(n+1)/2$ всевозможных расстояний между $n+2$ точками связаны некоторой гладкой функциональной зависимостью, также достаточно общего вида и с минимальными естественными ограничениями. Доказано, что геометрии такого вида и только они обладают максимальной подвижностью, то есть допускают группу преобразований, зависящую от максимально возможного числа параметров (Теоремы 1 и 2 из гл. 1). Этот результат детализируется для двумерного случая в §§ 3 – 5 гл. 1.

В § 3 гл. 1 дана классификация двумерных геометрий рассматриваемого вида. Доказано, что их всего 10. Все метрики указаны явно и для каждой из них найдены соответствующие группы преобразований. При этом, наряду с известными, получились две новые геометрии.

В § 4 приведена классификация трёхмерных алгебр Ли инфинитезимальных операторов группы преобразований плоскости с точностью только до преобразования координат. Используя эту классификацию, автор в § 5 гл. 1 находит двухточечные инварианты для каждой из геометрий. Оказывается, что невырожденные совпадают с плоскими метриками, найденными в § 3. Этот факт даёт непосредственное доказательство основных теорем из §§ 1, 2 гл. 1 об эквивалентности двух геометрических концепций в случае $n=2$.

Во второй главе аналогичная теория развивается для физических структур (в смысле Ю.И.Кулакова). С геометрической точки зрения это геометрия расстояний на двух множествах, то есть расстояние определяется как некоторая функция на прямом произведении $M \times N$, где M и N, вообще говоря, различны. Вводятся аксиомы, определяющие физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s, и аксиомы, определяющие на $M \times N$ геометрию максимальной подвижности. Основной результат главы 2 (теоремы 1 и 2 из § 1) состоит в том, что понятие физической структуры ранга $(n+1, m+1)$ и геометрии ранга smn эквивалентны. В последующих параграфах результаты детализируются.

В § 2 перечислены физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ порядка 1, где $m+1=n=1,2,3$: $m=n \leqslant 2, m=n-1 \leqslant 2$ и для каждой из них найдены соответствующие группы преобразований.

В § 3 гл. 2 автор ещё раз возвращается к теории групп Ли преобразований и обсуждает вопрос о различных отношениях эквивалентности для алгебр инфинитезимальных операторов. Указывается, где проявляется различие между эквивалентностью и слабой эквивалентностью. Дело в том, что группа $\varphi(\lambda, \mu)$ преобразований пространства $M \times N$, на котором задана физическая структура, определяется через действие одной и той же параметрической группы на многообразии M и N (группы преобразований $\varphi(\lambda)$ и $\varphi(\mu)$). Алгебра Ли группы $\varphi(\lambda,\mu)$ называется эквивалентным взаимным расширениям алгебр групп $\varphi(\lambda)$ и $\varphi(\mu)$, если эти алгебры эквивалентны, и неэквивалентны расширениям в противном случае. Для слабоэквивалентных алгебр как эквивалентные так и не эквивалентные расширения. При этом может оказаться (есть примеры), что в случае эквивалентного расширения двухточечный инвариант группы $\varphi(\lambda,\mu)$ — локально не вырожден.

В § 4 приводится классификация четырёхмерных алгебр Ли инфинитезимальных операторов с точностью до эквивалентности, и эта классификация сопоставляется с известной классификацией Софус Ли.

В § 5 рассмотрены физические структуры ранга (3,3) и порядка 1. Установлено, что их всего две, и для них найдены группы преобразований. Показано, как по этим группам найти вид соответствующей метрики.

В § 6 гл. 2 перечислены все физические структуры ранга $(n+1,2)$ и порядка 1. Они существуют только при $n=1,2,3$. Для всех найден вид в локальных координатах, найдены операторы соответствующих групп преобразований.

В заключении дано определение p -арной физической структуры, обобщающее рассмотренные бинарные структуры. Указаны соотношения на размерности, при которых существует нетривиальная группа преобразований, и доказано, что такие группы существуют только для бинарных физических структур.

Большим достоинством работы является тот факт, что весьма глубокие результаты получены с помощью классического математического аппарата: это группы Ли преобразований и функциональные уравнения. Автору удалось сделать тонкое наблюдение и в той и в другой области математики и весьма нетривиальным образом применить их в своей работе.

Другое несомненное достоинство диссертации — хороший язык и ясность изложения. По стилю работа ближе к учебнику, чем к монографии. Например, наиболее важные понятия автор обсуждает неоднократно.

Доказательства подробные, хотя здесь, на мой взгляд, есть некоторая диспропорция. В некоторых местах рассуждения чересчур детализированы (например, на стр. 155–156), хотя в другом месте (§ 2 гл. 2) доказательство заменено ссылкой на соответствующую публикацию. Ещё одно замечание касается расположения материала: непонятно, почему необходимые сведения теории групп Ли преобразований даны в § 3 гл. 2, а не раньше. Наконец, в определении 1 на стр. 122 может лучше было бы сказать, что функция f физическую структуру на $M\times N$, а не на “ M и N ” (то же самое — об определении 2 на стр. 125).

Итак, в работе решена фундаментальная математическая проблема: установлена эквивалентность двух концепций геометрии; дано строгое определение физической структуры и доказано, что её задание эквивалентно заданию геометрии с группой симметрий. Найдены все геометрии максимальной подвижности в двумерном случае, то есть решена задача А.Пуанкаре, найдены некоторые физические структуры порядка 1 и соответствующие им группы преобразований, разработана методика решения описанных задач, которая может быть эффективно использована и при дальнейших исследованиях в этом направлении. Полученные результаты корректны и полностью опубликованы. Автореферат вполне отражает содержание диссертации. Поэтому считаю, что диссертационная работа "Групповые свойства физических структур" соответствует уровню требований, предъявляемых к докторской диссертации, а её автор, Г.Г.Михайличенко заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

16. Д.В. ШИРКОВ (Зав. кафедрой теор. физики НГУ, чл.-корр. АН СССР) **о конспекте лекций Ю.И. Кулакова "Элементы Теории физических структур":**

Данный конспект лекций возник на базе спецкурса, читаемого автором на физическом факультете НГУ в течение нескольких лет.

После лекции в НГУ

Этот спецкурс посвящён строгому анализу основных понятий физики таких как "пространство" и "время", "метрический тензор" и "тензор электромагнитного поля", "масса", "сила", "температура", "энтропия" и т. п. Наряду с ними в Теории физических структур большое внимание уделяется строению физических законов и физических величин. Эти понятия, на базе которых и осуществляется всё построение теоретической физики, с полным правом могут быть названы "предварительными понятиями физики", поскольку физика не столько посвящена изучению этих понятий, сколько строится на их основе.

Основные понятия Теории физических структур состоят, во-первых, в принципиально новом подходе к классификации физических теорий, а во-вторых, в доказательстве того, что (при известных оговорках) только число независимых физических объектов определяет собой (при надлежащем выборе физических шкал) математическую структуру соответствующего физического закона. Эти результаты обсуждались на кафедре теоретической физики в Московском и Ленинградском университетах, в Дубне и ФИАНе и вызывали определённый интерес со стороны многих физиков.

Существенное место в лекциях занимает математическая формулировка принципа феноменологической симметрии, лежащего в основании Теории физических структур, и доказательство единственности физических структур различного типа. Эти результаты тщательно проверены математиками и их научный уровень не вызывает сомнений.

Считаю, что публикация работы Ю. И. Кулакова в виде ротапринтного издания НГУ будет полезной как для целей обсуждения среди научных работников, интересующихся данным кругом проблем, так и для студентов НГУ.

17. Ю.С Владимиров (Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник физического факультета Московского Университета, член секции гравитации НТС Минвуза СССР) **о диссертации Г. Г. Михайличенко "Групповые свойства физических структур", представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.**

Диссертация Г. Г. Михайличенко посвящена разработке и исследованию нового направления в математике и теоретической физике, названного Теорией физических структур. Это направление было начато Ю. И. Кулаковым и получило развёрнутую и строгую математическую формулировку в работах Г. Г. Михайличенко. Так, им найдены все возможные законы физических структур с парными вещественными отношениями на двух множествах элементов, впервые показано, какие возможны, а какие – нет, ранги таких структур. В его работах впервые найдены все решения для физических структур рангов 3 и 4 с вещественными парными отношениями на одном множестве элементов. Им же сделаны важные шаги в исследовании физических структур с несколькими парами отношений и структур с тройными и т. д. отношениями на одном и на двух множествах элементов. На наш взгляд, уже этого достаточно для присуждения Г. Г. Михайличенко степени доктора физико-математических наук. Однако диссертант пошёл значительно дальше. В данной диссертации проведено глубокое исследование соотношения феноменологической симметрии, имеющей место в Теории физических структур, и симметрии, описываемой группами Ли и широко используемой в современной математике и теоретической физике.

Нам представляется, что физические структуры будут играть важную роль в развитии фундаментальной теоретической физики. Это следует хотя бы из следующих соображений. В работах Ю. И. Кулакова, Г. Г. Михайличенко и В. Х. Льва показано, что физическим структурам на одном множестве элементов соответствуют широко известные геометрии: евклидовы, псевдоевклидовы, геометрии Лобачевского, Римана (постоянной положительной кривизны), симплектические и другие. Поскольку структуры на двух множествах элементов строятся таким же образом, что и структуры на одном множестве элементов, то можно утверждать, что им соответствуют новые геометрии, которые можно назвать бинарными.

В современной физике сейчас доминирует тенденция геометризации основных её положений и особенно известных фундаментальных взаимодействий, что выразилось в виде эйнштейновской теории относительности, геометризовавшей гравитационное взаимодействие, в виде многомерных геометрических моделей типа Калуцы-Клейна, теорий Вейля, Эйнштейна-Картана, финслеровых геометрий и т. д. Но в этих теориях используются геометрии на одном множестве элементов (точек). Поскольку открыты бинарные геометрии (структуры), причём они более просты и элементарны, то естественно возникает мысль применить для геометризации физики новые, бинарные геометрии. Такие исследования на базе математических работ Г. Г. Михайличенко и Ю. И. Кулакова ведутся в нашей группе.

Ю.С. Владимиров, Ю.И. Кулаков и Г.Г. Михайличенко.

Уж вырисовались контуры такой новой теории, названной нами бинарной геометрофизикой. Эта теория позволяет на новой основе объединить теорию классического пространства-времени и физических взаимодействий, выйти на решение таких проблем как обоснование размерности и сигнатуры классического пространства-времени, обоснования известных физических взаимодействий и свойства элементарных частиц. Более того, оказалось, что физики давно пользуются понятиями бинарной геометрофизики в виде теории спиноров, квадратичных выражений в квантовой механике и т. д. Среди известных разделов математики к Теории физических структур ближе всего находится теория линейных пространств, однако она может рассматриваться лишь как частный случай физических структур, которые значительно шире её. В Теории физических структур ещё содержатся так называемые бинарные вырожденные структуры рангов $(r \pm 1, r)$, $(2,4)$ и $(4,2)$, ряд геометрий с одним множеством элементов (точек). Всё это говорит об актуальности и чрезвычайной важности диссертационной работы Г. Г. Михайличенко.

Кратко характеризую данную диссертацию. Она состоит из введения, двух глав и заключения. Её объём составляет 251 страницу, библиография содержит 44 названия. Материал изложен чётко, строгим, но доходчивым языком.

Первая глава посвящена исследованию феноменологической и групповой симметрий в рамках Теории физических структур на одном множестве элементов. Как уже отмечено, им соответствуют обычные геометрии, причём их размерность n выражается через ранги r физических структур соотношением $n = r - 2$. Из основных результатов этой главы следует отметить: во-первых, здесь дано наиболее чёткое и корректное определение Теории физических структур на одном множестве элементов; во-вторых, дано определение подвижности (движений) в рамках таких структур; в-третьих, в § 3 выведены все возможные 2-геометрии, соответствующие структуре ранга 4; в-четвёртых, с помощью классификации алгебр Ли, здесь выведены группы Ли в соответствующих структуре геометриях.

Во второй главе аналогичные задачи решены в рамках Теории физических структур с вещественными парными отношениями на двух множествах элементов, т. е., как мы называем, для бинарных геометрий. Здесь опять большое внимание уделено построению аксиоматики бинарных (на двух множествах) структур, определению движений,получению групп Ли, соответствующих феноменологической симметрии. Самое существенное в этой главе — вывод всех законов для физических структур с вещественными парными отношениями на двух множествах.

В качестве замечаний и отчасти пожеланий для дальнейшей работы диссертанта отмечу следующее:

1. В диссертации исследуется вопрос о группах преобразований, оставляющих инвариантными парные отношения соответствующих структур. Однако в такой теории естественным образом возникают объекты, играющие важную роль в теории, и для которых имеют место более широкие группы преобразований. В качестве примера приведу комплексифицированную бинарную структуру ранга (3,3;б) используемую в качестве ключевой в бинарной геометрофизике. В этой теории преобразования, оставляющие инвариантными парные отношения, составляют 4-параметрическую группу $U(2)$, тогда как важный объект, связывающий две пары разноимённых элементов, остаётся инвариантным относительно более широкой 6-параметрической группы $SL(2, C)$. Хотелось бы видеть аналогичные примеры и в рамках Теории структур с вещественными парными отношениями, разработке которой посвящена данная диссертация.

2. Мне представляется, что материал диссертации следовало бы разбить на большее число глав, отнеся в разные главы аксиоматику Теории структур и исследования соответствующих феноменологических и групповых симметрий.

3. Диссертант ограничился слишком узким кругом цитированной литературы. Так, в автореферате он привёл всего 14 своих работ, тогда как им опубликовано значительно больше статей на эту тему; например, даже в диссертации диссертант ссылается на 22 свои работы. Кроме того, в Новосибирской группе Кулакова-Михайличенко выполнено по данной тематике более сотни работ, а весь список литературы содержит лишь 44 названия. В этом

списке, например, нет нашей монографии (Ю. И. Кулаков, Ю. С. Владимиров, А .В. Карнаухов “Введение в Теорию физических структур и бинарную геометрофизику”. М.: Изд-во Архимед. 1992), в которой мы многократно ссылаемся на работы Г. Г. Михайличенко. Уместно было бы сослаться на работы Л. Блюменталя, Э. Маха и других по близкой тематике.

4. В заключении диссертации хотелось бы видеть чёткое перечисление основных результатов, выносимых на защиту. Этого диссертант не сделал.

Несмотря на эти досадные недочёты, диссертация заслуживает самой высокой оценки. В ней получен ряд принципиально новых результатов, отмеченных выше. Она выполнена на достаточно высоком математическом уровне, прошла основательную апробацию на многих авторитетных семинарах Москвы, С-Петербурга, Казани, Новосибирска, на ряде конференций и в печати.

Диссертация Г. Г. Михайличенко удовлетворяет требованиям ВАКа, предъявляемым к докторским диссертациям, а сам диссертант заслуживает присуждения искомой учёной степени доктора физико-математических наук.

Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертации.

Основные результаты своевременно опубликованы в указанных диссертантом 14 работах.

18. Ю.С. ВЛАДИМИРОВ о цикле работ по Теории физических структур доцента Новосибирского государственного университета Ю. И. Кулакова.

В цикле работ Ю. И. Кулакова, опубликованных с середины 60-х годов по настоящее время, предложено и широко развито новое оригинальное направление в теоретической физике, названное им Теорией физических структур. Суть состоит в следующем: на одном или нескольких множествах элементов задаются парные, тройные и т. д. отношения, определяемые вещественными числами. Ставится задача определить возможные законы, связывающие отношения между наборами элементов, которые были бы инвариантны относительно всех допустимых изменений элементов (т. е. которые были бы справедливыми для всех элементов, входящих в множества). Показано, что эта задача может быть решена в общем виде, и указаны конкретные законы для отношений различной кратности и разного числа основных множеств. Доказан ряд теорем, показывающих, что для некоторых кратностей и чисел множеств вообще отсутствуют какие-либо законы. Сформулированная Теория структур в ряде отношений соответствует теории

Ю.С. Владимиров и Ю.И. Кулаков в Пущино-на-Оке.

групп, однако оказывается значительно шире их. В частности, Ю. И. Кулаковым с учениками Г. Г. Михайличенко и В. Львом указаны виды структур, соответствующие группам Ли. Сформированная Теория структур имеет не только математический интерес, а, что самое главное, позволяет с единой точки зрения охватить множество физических законов и используемых в физике соотношений, причём достигаемая степень единства оказывается поразительной. Это, по-видимому, и послужило причиной названия структур физическими. На языке структур Кулакова можно сформулировать законы динамики Ньютона, термодинамику, законы Ома и преломления света и многие другие. При этом даётся не только их переформулировка, но и достигается кристальная ясность многих фундаментальных понятий, входящих в формулировки законов, например таких, как масса, сила, сопротивление и другие. Особое место занимает приложение физических структур к описанию пространственных и пространственно-временных многообразий различной размерности, причём как плоских, так и пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны. Примечательно, что Теория структур выявляет новые виды геометрий, ранее не рассматривавшихся.

Мне представляется, что перечисленные здесь приложения структур Кулакова далеко не исчерпывают всех случаев, где они могут оказаться плодотворными. Есть все основания надеяться на их важность при развитии теории прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа и в других разделах физики.

Полученные результаты Ю. И. Кулаков докладывал на многих авторитетных форумах как физиков-теоретиков, так и математиков. Так, он выступал на всесоюзных конференциях по теории относительности и гравитации, на семинарах в МГУ и в других вузах страны. Неоднократно от выступал на семинаре секции гравитации научно-технического совета Минвуза СССР, работающего на физическом факультете МГУ. Идеи Ю. И. Кулакова вызывали большой резонанс и признание. Они развиваются не только в Новосибирском университете, но и в других научных центрах. Его идеи получили и международное признание. Он избран иностранным членом Академии наук в Болонье (Италия). Свидетельством важности работ Ю. И. Кулакова является также предложение издательства Шпрингер (ФРГ) Кулакову подготовить для издания у них монографии по физическим структурам.

На основании изложенного считаю, что Ю. И. Кулакову нужно предоставить должные условия для оформления всего круга полученных им и его учениками результатов в виде докторской диссертации или монографии (или того и другого). Монография, написанная Ю. И. Кулаковым, способствовала бы закреплению приоритета нашей страны в данном фундаментальном направлении физики и математики.

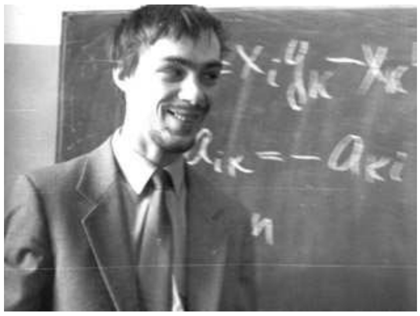
19. Ю.И КУЛАКОВ о дипломной работе студента Тюменского университета Е.Л. Лозицкого.

Физическая наука последних лет всё более и более явно вступает в принципиально новую, качественно своеобразную фазу своего развития. Ещё совсем недавно, какое-нибудь одно или два десятилетия тому назад, основная задача физиков-теоретиков приобрела, казалась бы навсегда, довольно традиционный, стандартный характер: используя концептуальный базис теории относительности и квантовой механики, точно предсказывать, количественно рассчитывать тот или иной конкретный эффект, то или иное явление, наблюдаемое или открываемое физиками-теоретиками.

Понятийные структуры, созданные ещё в первом десятилетии XX века Планком, Эйнштейном, Бором, Борном, Шрёдингером, Гейзенбергом, Дираком и др. служили достаточно надёжным фундаментом для описания огромного количества опытных фактов.

Но дальнейшее развитие современной физики становится невозможным без обновления и совершенствования понятийного аппарата. Однако революция в физике оказывается плодотворной только тогда, когда она позволяет выделить новый математический аппарат, с помощью которого можно сформулировать основные, наиболее глубокие закономерности объективного мира. Физика стоит на пороге открытия нового фундаментального принципа. Чтобы стать проще физика должна стать ещё более нетривиальной.

Открытие Теории физических структур позволило взглянуть на всю теоретическую физику с новой точки зрения, с новых позиций. Евклидова геометрия — старейшая физическая теория – составляет фундамент классической физики и стоит в одном ряду с законами механики Ньютона, уравнениями Максвелла, законами термодинамики, аксиомами квантовой механики.



Евгений Лозицкий.

Что нового можно обнаружить в элементарной геометрии, казалось бы, навсегда исчерпанной Эрлангенской программой Клейна (1872), установившей связь элементарной геометрии с теорией групп, и работами Давида Гильберта (1899), подвергнувшему евклидову геометрию строгому логическому анализу?

Однако с созданием Теории физических структур элементарная геометрия приобрела второе дыхание.

Дипломная работа Евгения Леонидовича Лозицкого представляет собой блестящий пример применения Теории физических структур для построения новых геометрических структур, существенным образом обогащающих общепринятое понимание места, занимаемого элементарными геометриями в математике.

Дело в том, что аксиомы, лежащие в основании Теории физических структур, позволяют получать как следствия, как весьма нетривиальные теоремы, те утверждения, которые обычно принимаются в качестве аксиом при всех существующих к настоящему времени способах построения элементарных геометрий.

В своей дипломной работе Е. Л. Лозицкий совершенно по-новому формулирует проблему построения элементарной геометрии. Опираясь на идею феноменологической симметрии, составляющую основное содержание Теории физических структур, он понимает под построением элементарной геометрии нахождение соответствующей “внутренне симметричной” гиперповерхности, определяющей вид метрики, нахождение всех многоточечных инвариантов и всевозможных их связывающих соотношений.

Прежде всего он отказывается от всякой ссылки на наглядность и определяет основные геометрические понятия как многоточечные инварианты:

$\varphi^2(1, ij)$ — плоский угол,

$\varphi^2(ijk)$ — площадь треугольника,

$\varphi^3(12, ij)$ — двугранный угол,

$\varphi^3(1, ijk)$ — телесный угол,

$\varphi^3(ijkm)$ — объём тетраэдра и т. д.

Такой общий подход позволяет ему строить различные элементарные геометрии (евклидову, псевдоевклидову, геометрии Римана и Лобачевского, симплектическую и открытые Г. Г. Михайличенко и В. Х. Львом новые “экзотические” геометрии) по единому, им разработанному, плану.

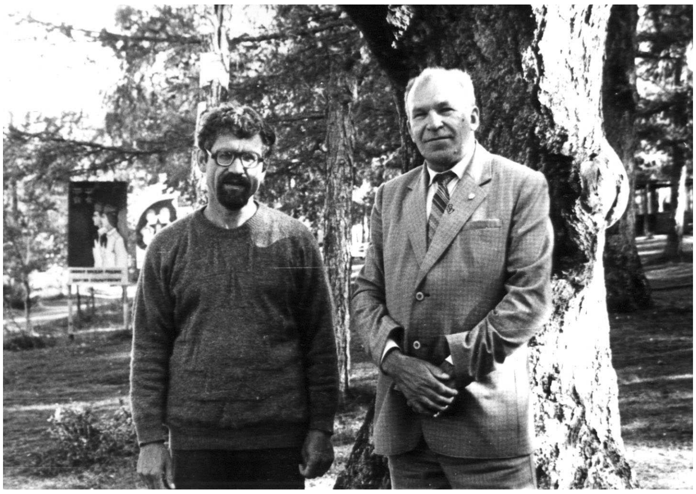
Сама постановка задачи и вся работа, изобилующая блестящими находками, сделаны Е. Л. Лозицким совершенно самостоятельно и демонстрирует высокий творческий потенциал и профессиональный уровень автора. Считаю, что дипломная работа Е. Л. Лозицкого далеко превосходит требования, предъявляемые к дипломной работе, и вполне может претендовать на признание её в качестве кандидатской диссертации.

20. Ю.И. Кулаков о монографии Г. Г. Михайличенко “Полиметрические геометрии”.

Монография Г.Г. Михайличенко представляет собой расширенный вариант первой части его докторской диссертации, защищённой в 1993 году в специализированном совете Института математики СО РАН. В монографии учтены все результаты,полученные автором после защиты, а также (в приложении) результаты, полученные его аспирантом В.А. Кыровым.

Полиметрические геометрии есть геометрии с более чем одним расстоянием, которые допускают содержательную физическую интерпретацию. Автор даёт строгое определение таких геометрий, их феноменологической (холотропной) и групповой симметрий и доказывает эквивалентность этих симметрий. На основе этой эквивалентности осуществляется полная классификация некоторых полиметрических геометрий, в частности, двуметрических и одинометрических геометрий на плоскости и триметрических геометрий в пространстве.

Результаты монографии прошли квалифицированную апробацию и опубликованы в центральных научных журналах. Монография, объединяя их все, придаёт исследованиям новую перспективу. Метод исследования, разработанный автором, достаточно оригинален, особенно оригинален метод классификации групп преобразований. Монография адресована научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов по профилю “геометрия и теоретическая физика”.



На озере Баланкуль (1984).

21. Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО (Доктор физико-математических наук, профессор) **о диссертации А.В.Соловьёва “ N-спинорное исчисление в реляционной теории пространства-времени”, представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика:**

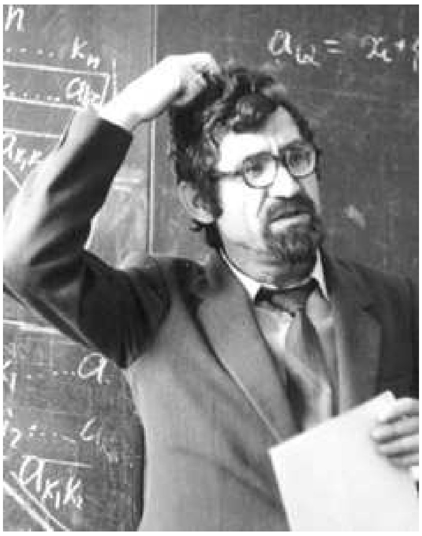
Диссертация А.В.Соловьёва посвящена разработке математических аспектов нового направления исследований в теории физического пространства-времени, названного реляционной теорией. Это направление успешно развивается в течение ряда лет в группе профессора Ю.С.Владимирова на физическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Математический аппарат этой теории представляет собой развитие и обобщение на случай комплексных отношений Теории физических структур, разработанной в Новосибирском университете в наших с Ю.И.Кулаковым работах.

Оказалось, что переход от вещественных отношений к комплексным позволяет значительно расширить возможности Теории физических структур и применить её для описания закономерностей физики микромира. Диссертант в своей работе ограничился комплексифицированными структурами симметричных рангов (r, r), но и это уже привело к богатым следствиям. В диссертации подробно рассмотрена Теория физических структур рангов (3,3), (4,4) и (5,5).

Показано, что такие теории позволяют связать друг с другом многие разработки в современной теоретической физике: теорию твисторов Пенроуза, элементы суперсимметричных теорий, конформные и калибровочные преобразования и ряд других. Но самое важное состоит в том, что в диссертации развит новый канал обобщений понятия спинора. Всё это свидетельствует об актуальности темы диссертации. Диссертация А.В.Соловьёва объёмом в 99 страниц состоит из введения, четырёх глав, заключения и трёх приложений. Список цитированной литературы содержит 93 названия.

Первая глава диссертации носит обзорный характер. В её начале приводится краткая сводка результатов, полученных в теории бинарных физических структур. При этом основное внимание уделено невырожденным бинарным структурам ранга (n, n), где $n > 2$. Комплексифицированные варианты последних, называются бинарными системами комплексных отношений (БСКО), составляют фундамент развиваемой в диссертации теории N-компонентных спиноров.



Что бы это значмло?

Далее изложены те положения бинарной геометрофизики, которые имеют непосредственное отношение к БСКО ранга (3,3). Подробно описана связь меду теорией БСКО ранга (3,3) и алгеброй двухкомпонентных спиноров. В рамках БСКО ранга (3,3) рассматриваются псевдоевклидовы 4-векторы, группа Лоренца и эпиморфизм: $SL(2,\mathbb{C}) \to \mathbf{O}_+^{\uparrow}(1,3)$. Обсуждены свойства 2-мерных комплексных симплектических и унитарных пространств, а также майорановых 4-спиноров. Наконец, из условия, задающего естественный полулинейный автоморфизм 2-мерных симплектических унитарных пространств, выведено уравнение Дирака для свободного фермиона в импульсном представлении.

Вторая глава посвящена систематическому построению теории 3-компонентных спиноров. В рамках БСКО ранга (4,4) естественным образом возникает 3-мерное комплексное линейное пространство с заданным на нём невырожденным антисимметричным 3-линейным функционалом. Это пространство названо пространством 3-спиноров. Рассмотрены свойства пространства 3-спиноров, в частности, вычислена группа его автоморфизмов. Последняя оказалась группой $SL(3,\mathbb{C})$. Показано, что из компонент 3-спиноров можно образовать 9-векторы плоского финслерова пространства с кубической метрикой. В явном виде построен гомоморфизм группы $SL(3,\mathbb{C})$ в группу изометрий данного финслерова пространства. Указаны 3-спинорные преобразования, индуцирующие в подпространствах 9-мерного финслерова пространства преобразования: лоренцева 4-вектора, майорановского 4-спинора, дилатации и абелевы аналоги преобразований $N = 1$-суперсимметрии.

Произведено овеществление пространства 3-спиноров, что позволило ввести понятие майорановского 6-спинора. Исследована геометрия пространства майорановских 6-спиноров и дано детальное описание группы его автоморфизмов.

Установлены $SL(3,\mathbb{C})$ -ковариантные 9-мерные финслеровы обобщения уравнений Дирака и Вейля. Обнаружено, что соответствующие 12-рядные матрицы Дирака удовлетворяют финслеровому варианту алгебры Даффина-Кеммера. Показано, что при переходе к 4-мерному импульсному пространству 9-мерное "уравнение Дирака" распадается на обычные 4-мерные уравнения Дирака и Клейна-Фока.

В третьей главе на основе БСКО ранга (5,5) развита теория обобщённых 4-спиноров. Изучено 4-мерное комплексное линейное пространство с антисимметричным 4-линейным "скалярным умножением" — пространство 4-спиноров. Показано, что группой изометрий этого пространства является группа $SL(4,\mathbb{C})$. Из 4-спиноров конструируются 16-векторы плоского финслерова пространства, метрика которого определяется однородной алгебраической формой 4-ой степени. Построен гомоморфизм группы $SL(4,\mathbb{C})$ в группу изометрий этого пространства. Найдены 4-спинорные преобразования, индуцирующие в подпространствах 16-мерного финслерова пространства преобразования финслерова 9-вектора, майорановского 6-спинора, дилатации и 16-мерные абелевы аналоги преобразований $N=1$ -симметрии.

Сформулированы $SL(4,\mathbb{C})$ -ковариантные 16-мерные уравнения для свободных массивных и безмассовых 4-спинорных частиц в финслеровом импульсном пространстве. Показано, что при переходе к 9-мерному импульсному пространству уравнение, описывающее массивную 4-спинорную частицу, расщепляется на $SL(3,\mathbb{C})$ -ковариантное уравнение для 3-спинорной частицы и 9-мерный финслеров аналог уравнения Клейна-Фока, а при переходе к 4-мерному пространсту — на стандартное уравнение Дирака и два 4-мерных уравнения Клейна-Фока. Кроме того, обнаружено, что как твисторы, так и редуцированные спиноры 6-мерного евклидова пространства являются частными случаями рассматриваемых 4-спиноров.

В четвёртой главе изложены элементы теории N -спиноров, основывающейся на БСКО ранга $(N=1, N=1)$. Теория построена в полной аналогии с предыдущими главами. Рассматриваются геометрические свойства пространства N -спиноров, представляющие собой N -мерное комплексное линейное пространство, снабженное антисимметричным N -линейным "скалярным умножением".

Установлена связь между N -спинорами и векторами N^2 -мерного финслерова пространства с метрикой, задаваемой алгебраической формой N -ой степени. Построен гомоморфизм группы $SL(N,\mathbb{C})$ изометрий N -спинорного пространства в группу изометрий упомянутого финслерова пространства. Получены N^2 -мерные $SL(N,\mathbb{C})$ -ковариантные уравнения для свободных массивных и безмассивных N -спинорных частиц в импульсном представлении.

Сделаем ряд замечаний по данной диссертации:

1. В работе принят индуктивный метод изложения материала – от теории БСКО ранга (3,3) далее, в сторону увеличения ранга (4,4), затем (5,5). Мне представляется, что дедуктивный способ позволил бы изложить материал более компактно.

2. В диссертации ничего не сказано о бинарных структурах наинизшего ранга (2,2), которые играют существенную роль в развиваемой в МГУ бинарной

геометрофизике.

Эти замечания не меняют высокой положительной оценки диссертации, которая выполнена на высоком математическом и теоретическом уровне. В ней получен ряд интересных новых результатов в перспективной области исследований.

Диссертация удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАКом к кандидатским диссертациям, а сам диссертант, несомненно, заслуживает присуждение ему степени кандидата физико-математических наук.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в 9 работах.

Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертации.

22. Письмо Заместителю главного редактора ДАН СССР, академику Л. И. Седову от академика А. Д. Александрова.

Глубокоуважаемый Леонид Иванович!

9 февраля 1978 года я представил в ДАН СССР статью Г. Г. Михайличенко “Двумерные геометрии в Теории физических структур”. Продержав её более года (с 7 марта 1978 года по 11 мая 1979 г.) , редколлегия вернула её без какой-либо рецензии, квалифицируя полученный в статье результат как “узкоспециальный”.

На просьбу Г. Г. Михайличенко повторно рассмотреть эту статью и послать её в случае необходимости квалифицированным рецензентам, статья снова без каких-либо объяснений была возвращена автору.

Отдавая себе отчёт в том, что Г. Г. Михайличенко получен выдающийся результат, представляющий собой принципиально новый подход к введению важного класса геометрий, я обратился к профессору Ю. Г. Решетняку с просьбой высказать своё мнение по поводу работы Г. Г. Михайличенко. В своём отзыве Ю. Г. Решетняк раскрыл действительную ценность работы Г. Г. Михайличенко и пришёл к тому же самому выводу.

4 апреля 1980 года статья Г. Г. Михайличенко с моим вторичным представлением и отзывом Ю. Г. Решетняка была в третий раз направлена в редакцию ДАН СССР.

Однако редакция, выдвинув свой, снова ничем не аргументированный довод об узкоспециальном характере работы, снова отклонила её.

Я считаю такое отношение редколлегии к действительно интересной работе возмутительным и требую ее незамедлительного опубликования.

С уважением
академик /А. Д. Александров/
7 марта 1981 года.

Владимир Кузмич Ионин (1996).

23. В.К. ИОНИН (доктор физико-математических наук, профессор) **о работе А. А. Симонова “Групповые решения функциональных уравнений физической структуры”:**

Физические структуры, введённые Ю. И. Кулаковым, имеют приложения не только в физике, но и в чистой математике.

Рассматриваемая статья представляет пример такого приложения.

В ней показывается как физическая структура ранга 3 может определить структуру абстрактной группы (теорема 1) и структуру абстрактной абелевой

группы (теорема 2) на произвольном, лишённом всяких дополнительных структур, множестве.

Эти результаты дают возможность с самого начала по-новому взглянуть на теорию групп как в математике, так и в физике. Теоремы имеют полные и обстоятельные доказательства. Считаю, что статья может быть опубликована в научном журнале.

24. Письмо чл.-корр. АН СССР Ю.Г. Решетняка академику А. Н. Тихонову:

Глубокоуважаемый Андрей Николаевич!

Ю. И. Кулаков представил в редакцию журнала Доклады АН СССР статью “Об одном принципе, лежащем в основании классической физики”. Статья была отклонена редакцией ДАН. Я хорошо знаком с работами Ю. И. Кулакова и его ученика Г. Г. Михайличенко, статья которого, направленная в ДАН, также отклонена редакцией. Некоторые статьи Ю. И. Кулакова и Г. Г. Михайличенко, относящиеся к той же тематике, приняты к печати редакцией Сибирского математического журнала. Ю. И. Кулаков просил меня написать это письмо.

Отклоняя указанные статьи, редакция ДАН, как мне кажется, совершает ошибку. По-видимому, ввиду некоторой необычности указанных работ рецензенты не смогли их понять. В связи с этим я хотел бы дать некоторые разъяснения.

Ю. И. Кулаковым предлагается некоторый общий принцип (названный им принципом феноменологической симметрии). Устанавливается, во-первых, что значительная часть основных физических законов подчиняется указанному принципу. Во-вторых, выясняется, что требование выполнения этого принципа при данных дискретных параметрах m и n определяют форму закона однозначно.

Первое (выполнение принципа феноменологической симметрии для известных законов) — достаточно просто. Второе — требует преодоления весьма существенных математических трудностей.

Принцип феноменологической симметрии кратко заключается в следующем:

Даны множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Элементы этих множеств можно интерпретировать как некоторые физические объекты. Каждой паре (i, α), где $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ сопоставлено число $a_{i\alpha}$ (Пример: $\mathfrak{M}$ – множество тел, $\mathfrak{N}$ — множество пружин, $a_{i\alpha}$ – ускорение тела i под действием пружины α).

Для сравнения результатов $a_{i\alpha}$, соответствующих различным парам (i, α), предлагается следующая конструкция. Задаются натуральные числа m и n. Пусть $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ – произвольная система m элементов из $\mathfrak{M}$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ – произвольные n элементов из $\mathfrak{N}$. Определим систему из $m \cdot n$ чисел:

$$\{a_{i_k \alpha_l}\} \quad k = 1, 2, \ldots, m \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Будем рассматривать эту систему как точку $m \cdot n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{mn}$. Предположим, что $i_1, i_2, \ldots, i_m$ пробегают независимо $\mathfrak{M}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — независимо пробегают множество $\mathfrak{N}$. Тогда точки (1), отвечающие всем таким наборам, $i_1, i_2, \ldots, i_m$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, заполняют некоторое множество S в $\mathbb{R}^{mn}$.

Принцип феноменологической симметрии заключается в требовании:

S есть $mn - 1$-мерное многообразие в R^{mn}.

Оказывается, что это условие налагает весьма жёсткое ограничение на вид многообразия S. В тех случаях, когда математическую задачу — определить многообразие S – удалось решить до конца, оказалось, что S определено однозначно (с точностью до тривиальных преобразований).

Одной из возможных причин, по которой работы Ю. И. Кулакова отклонялись редакцией ДАН, является, по-видимому, некоторая широковещательность выдвигаемой им программы, которую рецензенты могли расценить как неоправданную претенциозность.

В действительности автор не претендует на открытие, равносильное по своей значимости теории относительности или квантовой механики.

В связи с этим мне кажется уместным пояснить смысл результата Ю. И. Кулакова, относящегося к ньютоновой механике.

Второй закон Ньютона, как известно, имеет вид:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Пусть $a_{i\alpha}$ — ускорение, которое сила F_α сообщает телу с массой m_i. Не составляет никакого труда показать, что для любых пар (i, k), (α, β) выполняется равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Это равенство можно рассматривать как форму записи закона Ньютона, не содержащую величин m и F. Исходя из равенства (2), нетрудно получить, что $a_{i\alpha}$ должно иметь вид:

$$a_{i\alpha} = \frac{F_\alpha}{m_i},$$

где F_α зависит только от объекта α, m_i — зависит только от i.

Аналогичное замечание, независимо от Ю. И. Кулакова, и несколько позже, было сделано американскими авторами.

Всё сказанное достаточно просто. Гораздо интереснее то, что как показал Ю. И. Кулаков (это и составляет основной конкретный результат статьи, упоминавшейся в начале письма), что второй закон Ньютона определяется однозначно требованием, чтобы четыре величины $\widetilde{a}_{i\alpha}, \widetilde{a}_{i\beta}, \widetilde{a}_{k\alpha}, \widetilde{a}_{k\beta}$ были связаны функциональной зависимостью, вид которой заранее неизвестен. Оказалось, что если $\widetilde{a}_{i\alpha}, \widetilde{a}_{i\beta}, \widetilde{a}_{k\alpha}, \widetilde{a}_{k\beta}$ при любых $i, k; \alpha, \beta$ удовлетворяют уравнению вида:

$$\Phi(\widetilde{a}_{i\alpha}, \widetilde{a}_{i\beta}, \widetilde{a}_{k\alpha}, \widetilde{a}_{k\beta}) = 0,$$

то функция Φ обязана иметь вид:

$$\begin{vmatrix} \varphi(\widetilde{a}_{i\alpha}) & \varphi(\widetilde{a}_{i\beta}) \\ \varphi(\widetilde{a}_{k\alpha}) & \varphi(\widetilde{a}_{k\beta}) \end{vmatrix} = 0,$$

где φ — функция одной переменной. Физический смысл φ — это градуировочная шкала измерительного прибора. Если положить $\varphi(\widetilde{a}_{i\alpha}) = a_{i\alpha}$, то мы получим равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0,$$

из которого может быть выведен закон Ньютона в обычной форме.

Я проверил эту часть работы в деталях. Рассуждения Ю. И. Кулакова в этой части вполне корректны, с точностью до того, что автор, как и всякий физик, считает, что якобиан либо тождественно равен нулю, либо везде отличен от нуля. Правда, в данном случае его спасает требование аналитичности функции Φ. В статье, принятой к печати Сибирским математическим журналом, все необходимые оговорки сделаны. Должен сказать что рецензенты ДАН, по-видимому, не добрались до подобных тонкостей.

В исследованиях Ю. И. Кулакова ставится и решается интересная математическая задача, и я считаю, что статьи Кулакова и Михайличенко, о которых говорилось выше, безусловно должны быть опубликованы.

С уважением (Решетняк Ю. Г.)

Юрий Григорьевич Решетняк – чл.-корр. АН СССР, (ныне академик РАН) зав. отделом геометрии Института математики СОАН СССР.

Юрий Кулаков, Виктор Шахов, Андрей Симонов и Геннадий Михайличенко

на Всесоюзной Школе по Теории физических структур в Пущино-на-Оке.

25. ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО

117378, Москва, ул. М. Ульяновой 3, кор. 1.
Телекс 411378 ГОСТ Телефон (095) 138 04 28,
Факс (095) 138 54 46 E-mail: mel@cvsi.uucp.free/net

Президенту Республики Алтай В. М. Чаптынову

Глубокоуважаемый господин Президент!

Российское Гравитационное общество поддерживает создание в городе Горно-Алтайске Научного Центра фундаментальной физики, предназначенного для развития Теории физических структур, представляющей собой принципиально новое направление в теоретической физике. Теория физических структур не имеет зарубежных аналогов. Задачи, стоящие перед созданным Научным Центром, состоят в постановке и решении фундаментальных проблем физики под новым углом зрения. Эффективность нового направления подтверждена важными результатами, полученными в Новосибирском университете Ю. И. Кулаковым и его учеником Г. Г. Михайличенко, а также работами, выполнеными в Московском государственном университете.

Горно-Алтайский Научный Центр фундаментальной физики должен сыграть выжную роль в создании новой образовательной программы в Горно-Алтайском университете и в системе среднего образования Республики Алтай.

Президент Российского Гравитационного Общества
профессор

(В. М. МЕЛЬНИКОВ)

вице-президент Российского Гравитационного
Общества профессор МГУ

(Ю.С. ВЛАДИМИРОВ)

15 октября 1994 г.

26. Рецензия

на статью Ю. И. Кулакова “Исходные понятия Теории физических структур на одном множестве”(№8693) и “Исходные понятия физических структур на двух множествах”(№8692), представленные для публикации в Сибирский математический журнал.

В соответствии с заголовком, обе статьи посвящены Теории физических структур — разделу науки, находящейся на стыке математики и физики и стремящемуся записать фундаментальные законы физики в виде функциональных соотношений с целью последующей их классификации, выяснения симметрий и т. п.

К обоим статьям можно высказать существенное замечание как по форме изложения (например, принятая автором, да и всей этой группой исследователей, терминология и манера изложения будто специально предназначены для того, чтобы сделать недоступным для математиков рациональное зерно Теории физических структур), так и по содержанию (например, цитированные результаты В. Х. Льва представляются недостаточно обоснованными). Но в такой критике нет необходимости.

Дело в том, что обе статьи носят явно выраженный обзорный характер: в них не содержится ни одного доказательства. Это совершенно не соответствует политике редакционной коллегии, о чем она регулярно сообщает авторам на последних страницах журнала: “К публикации в “Сибирском математическом журнале” принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и не носящие обзорного характера”.

Рекомендую редакционной коллегии статьи №8692 и №8693 отклонить как не соответствующие профилю журнала.

27. ВЫПИСКА ИЗ ПРОТОКОЛА №48

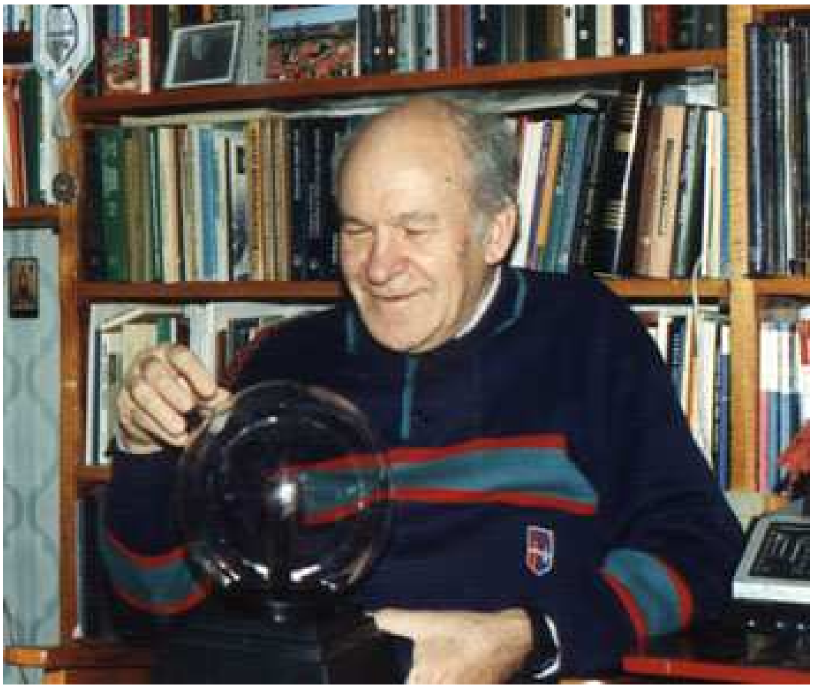
Заседания Учёного Совета математического факультета Новосибирского госуниверситета

от 21 июня 1972 г.

Учёный Совет отклонил кандидатуру лектора по физике (IV курс математического отделения) – доц. Кулакова Ю. И. как читающего слишком специальный курс, тогда как математикам необходим фундаментальный курс физики.

Учёный Совет обращается с просьбой к кафедре общей физики НГУ для назначения лектора по этому курсу. В качестве одной из возможных упоминалась кандидатура доцента кафедры вычислительных методов механики сплошной среды Ю. А. Березина.

Учёный секретарь Совета,
доцент А. А. Атавин



Что скрывается за ...?

Календарь Творения (1 секунда – 500 лет)

Большой взрыв ....1 января 0 часов 00 минут

Образование галактик .... 10 января

Образование Солнечной системы .... 9 сентября

Образование Земли .... 14 сентября

Возникновение жизни .... 25 сентября

Появление бактерий и сине-зелёных водорослей ....9 октября

Возникновение фотосинтеза .... 12 ноября

Первые клетки, обладающие ядрами .... 15 ноября

Обогащение атмосферы кислородом .... 1 декабря

Появление скелетных организмов ....16 декабря

Морской планктон. Трилобиты ....18 декабря

Ордовикский период. Первые рыбы .... 19 декабря

Силурийский период. Растения суши ....20 декабря

Девонский период. Первые насекомые, сухопутные животные .. 21 декабря

Первые земноводные и крылатые насекомые .... 22 декабря

Каменноугольный период. Первые деревья, первые рептилии ...23 декабря

Пермский период. Первые динозавры .... 24 декабря

Триасовый период. Первые млекопитающие ....26 декабря

Юрский период. Первые птицы ....27 декабря

Меловой период. Первые цветковые растения, вымирание динозавров ....28 декабря

Третичный период. Первые приматы ....29 декабря

Первые гоминиды .... 30 декабря

Четвертичный период. Первые люди .... 31 декабря 22 часа 30 минут

Первый снег в Академгородке

Приложение I.

Таблица химических мультиплетов

Лишь в созерцании высшей красоты, дорогой Сократ,
только и может жить человек, её однажды узревший.

— *Платон*

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Аннотация

Рассматривая каждый атом как возбуждённое состояние некоторой протоматерии и умышленно отказываясь от рассмотрения его внутреннего строения, мы можем понять истинную природу квазипериодической закономерности, открытой Менделеевым, если воспользуемся формализмом изотопического спина, тесно связанным с высшими симметриями, описываемыми теорией групп и их представлений. Используя в качестве исходного набора экспериментальных данных хорошо известную таблицу Менделеева, можно показать, что в основе квазипериодической зависимости свойств химических элементов от атомного номера Z, лежат глубокие, и в то же самое время достаточно простые, принципы симметрии, находящие своё выражение в существовании целой иерархии изотопических спинов, описывающих различные уровни самоорганизации. Дело в том, что, когда речь заходит о периодической зависимости свойств каких-либо объектов от их номера, важно найти формализм, описывающий не столько отдельные объекты, сколько всё их семейство в целом. Формализм изотопического спина идеальным образом подходит для этой цели. Из этой теории следует, что все трудности, связанные с "преждевременным" заполнением последующих электронных слоёв, обусловлены, вообще говоря, незаконным перенесением результатов квантовой теории атома водорода на протоматерию, способную находиться в различных возбуждённых состояниях.

ТАБЛИЦА ХИМИЧЕСКИХ МУЛЬТИПЛЕТОВ

§ 1. Некоторые предварительные замечания

Общепризнано, что Периодический закон Менделеева и его графическое выражение – Периодическая таблица химических элементов – нужны для изучения их физико-химических свойств и выявления общих закономерностей их химических взаимодействий между собой, для химического предвидения и предсказания новых фактов.

Однако значение Периодической таблицы химических элементов не ограничивается прикладными и полуприкладными областями физики и химии. Эта таблица может явиться "золотым ключиком", открывающим дверь, ведущую из эмпирического мира материальной действительности в мир новой реальности [1].

Несмотря на то, что с момента открытия Менделеевым Периодического закона химических элементов (1869) прошло почти сто тридцать лет, до сих пор существует немало попыток уточнить и усовершенствовать его таблицу. Многообразие вариантов вызвано стремлением разных авторов найти удовлетворительное решение некоторых спорных моментов в самой структуре Периодической таблицы химических элементов, существующих до сих пор.

С 1921 года, когда Нильс Бор заложил основы квантово-механического объяснения Периодической системы химических элементов Менделеева [2], [3], прошло более восьмидесяти лет. За это время в физике произошли революционные изменения, сравнимые с теми, которые совершались во время создания теории относительности и квантовой механики.

Для современной физики очень важным стало понятие **симметрии**. Именно симметрия стала тем самым инструментом, используя который, удаётся выявить в калейдоскопе физических явлений основные структуры, свести всё разнообразие физического мира к нескольким фундаментальным уравнениям.

Предлагаемая мной Таблица химических мультиплетов представляет собой дальнейшее развитие на полуфеноменологическом уровне оригинальных идей известного советского физика Ю.Б.Румера и математика А.И.Фета, предложивших изучать свойства химических элементов по аналогии с элементарными частицами с точки зрения их "внутренней" симметрии [4], [5].

Следует отметить, что для понимания общего принципа, лежащего в основании предлагаемой Таблицы, нет необходимости в знании квантовой механики. Согласно этому принципу каждый атом рассматривается как возбуждённое состояние некоторой **универсальной протоматерии**. И подобно тому, как в современной теории элементарных частиц ничего не говорится о внутреннем строении частиц, так и здесь, для установления общих свойств атомов и их классификации **нет необходимости рассматривать их электронное строение** [6].

Дело в том, что наиболее общие свойства атомов заложены глубже – в самой их первоначальной симметрии – и могут быть извлечены оттуда с помощью **полуфеноменологического формализма изотопического спина** [7], [8], основные идеи которого могут быть сделаны доступными ученику средней школы.

Заметим, что создание принципиально новой, совершенной Таблицы химических мультиплетов началось в начале семидесятых годов в стенах Новосибирского университета (в работах Ю. Б. Румера, А. И. Фета и Ю. И. Кулакова) и окончательно завершилось в 1995 году в моей работе, сделанной в Горно-Алтайском государственном университете.

Предлагаемая мною Таблица химических мультиплетов опубликована в двух сборниках научных трудов:

Структурный анализ символьных последовательностей (Изд-во Академии наук СССР. Сибирское отделение, Институт математики. 1984 год);

Классическое естествознание и современная наука (Изд-во Новосибирского государственного университета. 1991 год)

Однако малый тираж этих изданий и очень небольшой круг читателей делают практически неизвестной эту Таблицу. Все попытки опубликовать её отдельным изданием, доступным для широкого круга учёных, преподавателей и студентов, в Новосибирском научном центре наталкивались на глухое сопротивление, основным аргументом которого являлось отсутствие денег.

И только в молодой Республике Алтай со стороны ректора Горно-Алтайского университета Ю.В.Табакаева, председателя Комиссии по экологии, природопользованию и промышленности В.В.Кудачина и Государственного Собрания – Эл Курултая было проявлено глубокое понимание необходимости развития фундаментальной науки. В качестве первого шага в этом направлении было создание независимого Научного Центра фундаментальной физики. Следующим шагом явилось многотиражное издание предлагаемой Таблицы для широкой отечественной и международной научной общественности.

§ 2. От периодической таблицы химических элементов к Таблице химических мультиплетов

Согласно традиции, идущей от Менделеева, *рассматриваются свойства каждого химического элемента в отдельности и ищется такая форма классификации элементов, при которой естественным путём выделяются подмно-*

жества элементов с близкими физико-химическими свойствами (главные и побочные подгруппы – столбцы на традиционной таблице Менделеева).

Мы отступаем от этой традиции и *в качестве основных объектов классификации выбираем не отдельные химические элементы,* конкретные свойства которых нас, в отличие от химиков, мало интересуют, *а их совокупности* – **мультиплеты**, *обладающие определённой целостностью, то есть блоки, состоящие из конечного числа рядом расположенных элементов.*

Итак, принципиальное отличие предлагаемой нами таблицы от всех других известных периодических таблиц состоит в том, что наша Таблица – это **не периодическая таблица химических элементов,** а **таблица химических мультиплетов.**

Значение таблицы Менделеева состоит в том, что она предоставляет нам уникальную возможность взглянуть на множество всех химических элементов как на единую систему, состоящую из различных **химических таксонов**[85] или блоков, то есть совокупностей химических элементов с атомными номерами Z, лежащими в конечных интервалах от Z_1 до Z_2. При этом для характеристики тех или иных таксонов необходимо вводить физические величины принципиально иной природы.

В отличие от традиционных, непосредственно измеряемых, физических величин, таких как масса, электропроводность, температура плавления и кипения, потенциал ионизации, магнитная восприимчивость и т.п., существуют такие "коллективные" физические величины как изотопический спин I, странность S, очарование (чарм) C, красота b, истинность t, гиперзаряд Y, барионное B и лептонное L числа и т.п., которые имеют совершенно иную природу, и не могут быть измерены непосредственно традиционными методами.

Чтобы выявить глубинное содержание, скрытое за внешней и далеко не совершенной формой Периодической таблицы химических элементов Менделеева, воспользуемся тем, что лежит буквально на поверхности и давно всем хорошо известно.

§ 3. Естественная эволюция формы таблицы химических элементов

Основная идея, лежащая в основании Периодической системы химических элементов, состоит в следующем: Периодическая таблица Менделеева разбивает естественную последовательность химических элементов на отдельные **мультиплеты**, отмеченные разным цветом.

Отметим особую роль цвета при построении всех последующих таблиц. Дело в том, что цвет в этом случае играет роль некоторого квантового числа, который

[85] *таксон* (от лат. taxare – оценивать) – соподчинённая группа дискретных объектов, связанных между собой той или иной степенью общности свойств. Иерархическая система таксонов позволяет дать полное описание определённой сферы реальности с точки зрения её иерархического строения.

позволяет увидеть[86] на таблице четыре типа мультиплетов: красные, состоящие из **двух** элементов, жёлтые, состоящие из **шести** элементов, зелёные, состоящие из **десяти** элементов, и, наконец, синие, состоящие из **четырнадцати** элементов, и осуществить разделение всего множества химических элементов, соответственно, на четыре (при $Z \leqslant 120$) "химических царства": красное, жёлтое, зелёное, синее.

Короткая периодическая таблица химических элементов Менделеева

		Группы элементов									
Периоды	Ряды	I a b	II a b	III a b	IV a b	V a b	VI a b	VII a b	VIII a b	b 1	b 2
1	1	H							He		
2	2	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne		
3	3	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar		
4	4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni
	5	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr		
5	6	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd
	7	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe		
6	8	Cs	Ba	La–Lu	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt
	9	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn		
7	10	Fr	Ra	Ac–Lr	Ku	Ns	106	107	108	109	110

La–Lu	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
Ac–Lr	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

Термин "химическое царство" введён мною по аналогии с биологической таксономией, где имеется следующая иерархическая структура порядка:

надцарства (прокариоты, эукариоты),

царства (вирусы, дробянки, грибы, растения и животные),

подцарства (..., низшие, высшие, ..., одноклеточные, многоклеточные, ...),

[86]Использование цвета в данном случае можно сравнить с применением специальных красителей в гистологии, позволяющих увидеть в оптический микроскоп *хроматин*, составляющий основу хромосом, который в противоположность *ахроматину* хорошо окрашивается при гистологической обработке.

отделы (*раст.*) (... , цветковые, ...) или типы (*жив.*),
классы (... , однодольные, ...),
порядки (*раст.*) (... , коммлеминовые, ...) или отряды (*жив.*),
семейства(... , злаки, ...),
роды (... , кукуруза, ...), виды (... , кукуруза жёлтозернистая, ...).

На традиционной чёрно-белой таблице разделение всей последовательности химических элементов на мультиплеты затруднено ещё и тем, что длинные мультиплеты, состоящие из десяти элементов, чтобы быть втиснутыми в прямоугольную форму таблицы, оказываются разрезанными в самом неподходящем месте, и вследствие этого сам факт существования химических мультиплетов не бросается в глаза. На цветной же таблице это хорошо видно.

При этом возникает естественный вопрос: как разбить эмпирическую последовательность химических элементов на **мультиплеты**, которые на всех наших таблицах окрашены четырьмя различными цветами — красным, жёлтым, зелёным и синим?

Как будет показано в этом параграфе, наличие мультиплетов уже заложено в самой Периодической таблице элементов Менделеева. Задача в том, чтобы извлечь их оттуда. Как это сделать?

Ответом на этот вопрос служит этот параграф, посвящённый преобразованию традиционной формы Периодической таблицы химических **элементов** в Таблицу химических **мультиплетов**.

Сначала, чтобы иметь хотя бы грубое представление о **химических мультиплетах**, мы будем использовать терминологию, уже сложившуюся в боровской квантово-механической теории периодической таблицы элементов и обозначать

красным цветом — s-элементы ($\ell = 0$),
жёлтым цветом — p-элементы ($\ell = 1$),
зелёным цветом — d-элементы ($\ell = 2$),
синим цветом — f-элементы ($\ell = 3$).

Но потом, в пятом параграфе, мы увидим, что за этим понятием скрывается иная, более глубокая сущность.

Как будет показано в пятом параграфе, элементы, принадлежащие

к “красному” царству, имеют изотопический спин $T = 0$,
к “жёлтому” царству, имеют изотопический спин $T = 1$,
к “зелёному” царству, имеют изотопический спин $T = 2$,
к “синему” царству, имеют изотопический спин $T = 3$.

Отметим, что введение *четырёх* цветов имеет принципиальное значение.

Тем самым указывается на существование четырёх “химических царств”, к одному из которых принадлежит каждый из первых ста двадцати химических элементов.

Заметим, что ещё неоткрытые химические элементы с $121 \leqslant Z \leqslant 138$ принадлежат уже к качественно новому “фиолетовому” химическому царству с изотопическим спином $T = 4$ (по традиционной терминологии к множеству g-элементов с $\ell = 4$).

Появление в короткой таблице химических элементов Менделеева главных и побочных подгрупп a и b, а также неестественной восьмой группы VIII, состоящей из одной главной aVIII и трёх побочных подгрупп, триады VIIIb_1, VIIIb_2, VIIIb_3, является типичным артефактом[87] и связано с желанием сохранить первоначальную прямоугольную форму таблицы, предложенной Менделеевым, что делает её излишне громоздкой и сложной.

Этой неоправданной сложности можно избежать, если перейти от исторически возникшей короткой таблицы Менделеева к Удлинённой периодической таблице химических элементов, раздвинув её на десять столбцов.

Кстати говоря, именно эта Периодическая таблица химических элементов рекомендована в 1985 году Ассоциацией научного образования (ASE) и с тех пор широко используется в мировой физико-химической литературе [9], [10].

Прежде всего в Удлинённой таблице нет рядов, так как каждый период располагается в одной горизонтальной строке.

Далее, в Удлинённой таблице нет необходимости расщеплять группу на главную и побочную, так же как нет необходимости рассматривать неестественную восьмую группу с её триадой побочных подгрупп.

Правда, при этом почти вдвое возрастает число групп, а следовательно, и её горизонтальные размеры, что делает её достаточно громоздкой. По-видимому, из-за этого Удлинённая таблица, несмотря на её очевидные достоинства, не получила широкого распространения в отеческой физической и химической литературе.

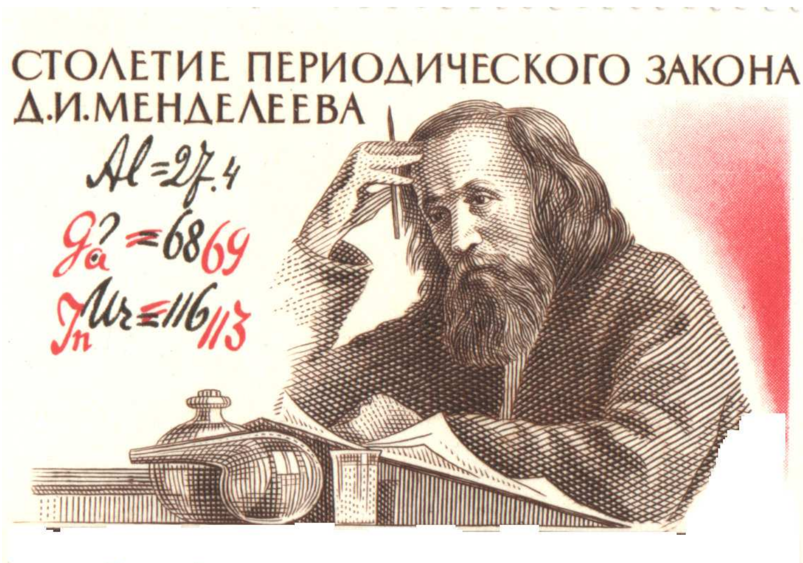
Дмитрий Иванович МЕНДЕЛЕЕВ

[87] *артефакт* (от лат. artefactum – искусственно сделанное) – образование, не свойственное изучаемому объекту и возникающее обычно в ходе его исследования.

Удлинённая таблица химических элементов.

	H																	He
	Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
	Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
	Cs	Ba	⋆	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
	Fr	Ra	⋆⋆	Ku	Ns	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118
		⋆	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	
		⋆⋆	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	

Однако и в этой Удлинённой таблице остаются некоторые неувязки, среди которых прежде всего бросается в глаза необходимость по-прежнему втискивать пятнадцать элементов – лантан и четырнадцать лантаноидов и другие пятнадцать элементов – актиний и четырнадцать актиноидов в соответствующие две клетки.



Чтобы преодолеть и эту трудность, придётся раздвинуть Удлинённую таблицу ещё на 14 клеток и получить Длинную периодическую таблицу химических элементов:

Длинная форма Периодической таблицы химических элементов

H																															He
Li	Be																									B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg																									Al	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca															Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr															Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
Cs	Ba	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
Fr	Ra	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	Ku	Ns	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118

Итак, Длинная таблица стала более совершенной. Однако и здесь осталось три тёмных пятна, которые нарушают желанную симметрию таблицы:

1. В отличие от всех остальных элементов, объединённых в соответствующие мультиплеты, содержащие 2, 6, 10, 14, 18 элементов, **водород** и **гелий** попрежнему остаются "единоличниками".

Существуют хорошо известные трудности с определением положения **водорода** H^1 в таблице. С одной стороны, он возглавляет таблицу и как s-элемент должен находиться в первой главной подгруппе I a вместе с другими s-элементами. С другой стороны, он по своим физико-химическим свойствам должен находиться в седьмой главной подгруппе VII a галогенов.

Подобные же трудности возникают при определении положения в таблице **гелия** He^2. По своим физико-химическим свойствам он должен возглавлять восьмую главную подгруппу VIII a инертных газов. С другой стороны, он является s-элементом, в то время как все остальные инертные газы являются p-элементами.

2. Кажется неестественным такое расположение мультиплетов, при котором возникают пустые места – разрывы между ними. Неестественным кажется существование первого и единственного сверхкороткого периода, состоящего из водорода и гелия, разъединённых пустыми клетками.

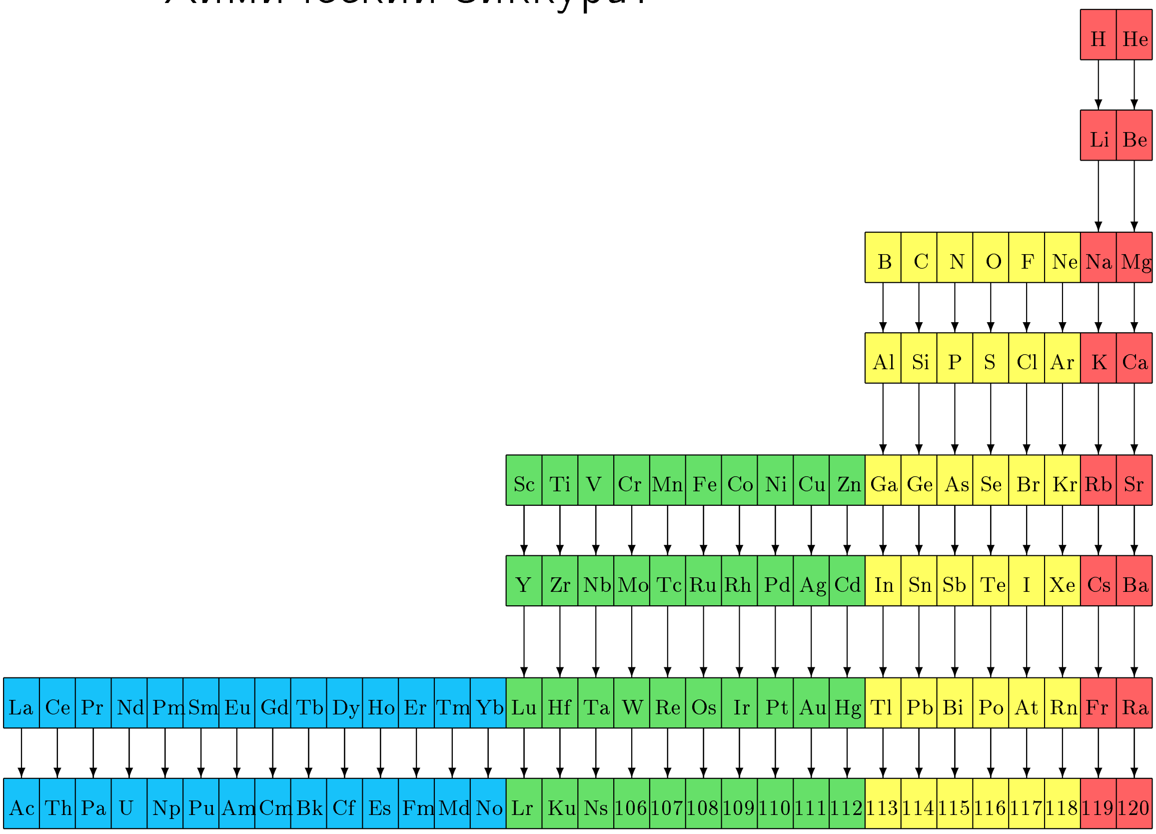
3. Кажется странным и труднообъяснимым наличие **нерегулярного** расположения мультиплетов, начиная с четвёртой строки:

$$\mathbf{1 - 1, \quad 2 - 6, \quad 2 - 6, \quad 2 - 10 - 6, \quad 2 - 10 - 6,}$$
$$\mathbf{2 - 14 - 10 - 6, \quad 2 - 14 - 10 - 6}$$

Чтобы придать Длинной таблице более естественный и симметричный вид, свободный от указанных выше недостатков, преобразуем, сохраняя порядок следования мультиплетов, Длинную таблицу в “Химический зиккурат” по следующей схеме:

объединим **водород** и **гелий** в один двухэлементный мультиплет и переместим все остальные двухэлементные мультиплеты с левого края таблицы на правый край при одновременном их перемещении на одну строку вверх.

“Химический зиккурат”



Следующий шаг – разбиение исходной последовательности химических элементов на дублеты – пары, состоящие из рядом стоящих элементов с нечётными и чётными Z. В результате чего “Химический зиккурат” превращается в Ступенчатую таблицу химических мультиплетов.

Ступенчатая таблица химических мультиплетов

															1 H
															2 He
															3 Li
															4 Be
												5 B	7 N	9 F	11 Na
												6 C	8 O	10 Ne	12 Mg
												13 Al	15 P	17 Cl	19 K
												14 Si	16 S	18 Ar	20 Ca
							21 Sc	23 V	25 Mn	27 Co	29 Cu	31 Ga	33 As	35 Br	37 Rb
							22 Ti	24 Cr	26 Fe	28 Ni	30 Zn	32 Ge	34 Se	36 Kr	38 Sr
							39 Y	41 Nb	43 Tc	45 Rh	47 Ag	49 In	51 Sb	53 I	55 Cs
							40 Zr	42 Mo	44 Ru	46 Pd	48 Cd	50 Sn	52 Te	54 Xe	56 Ba
57 La	59 Pr	61 Pm	63 Eu	65 Tb	67 Ho	69 Tm	71 Lu	73 Ta	75 Re	77 Ir	79 Au	81 Tl	83 Bi	85 At	87 Fr
58 Ce	60 Nd	62 Sm	64 Gd	66 Dy	68 Er	70 Yb	72 Hf	74 W	76 Os	78 Pt	80 Hg	82 Pb	84 Po	86 Rn	88 Ra
89 Ac	91 Pa	93 Np	95 Am	97 Bk	99 Es	101 Md	103 Lr	105 Ns	107	109	111	113	115	117	119
90 Th	92 U	94 Pu	96 Cm	98 Cf	100 Fm	102 No	104 Ku	106	108	110	112	114	116	118	120

Таким образом, оказалось возможным, не строя никаких гипотез (“гипотез не измышляю!”), только лишь за счёт нескольких естественных шагов преобразовать прямоугольную таблицу Менделеева в **треугольную ступенчатую таблицу** – “Химический зиккурат”.

При этом сохраняется общее правило заполнения таблицы химическими элементами при последовательном увеличении их атомного номера Z:

слева $\rightarrow$ направо сверху $\downarrow$ вниз.

Выравнивая Ступенчатую таблицу по левому краю и сдвигая чётные строки на одно деление вправо относительно нечётных, то есть переходя от координат (T,U) к координатам (U,V), получаем окончательную Таблицу химических мультиплетов:

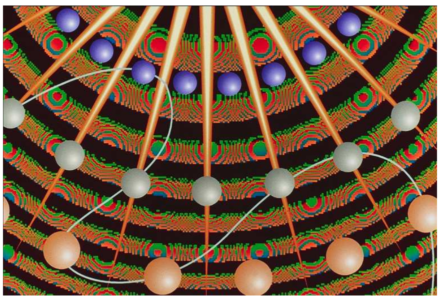
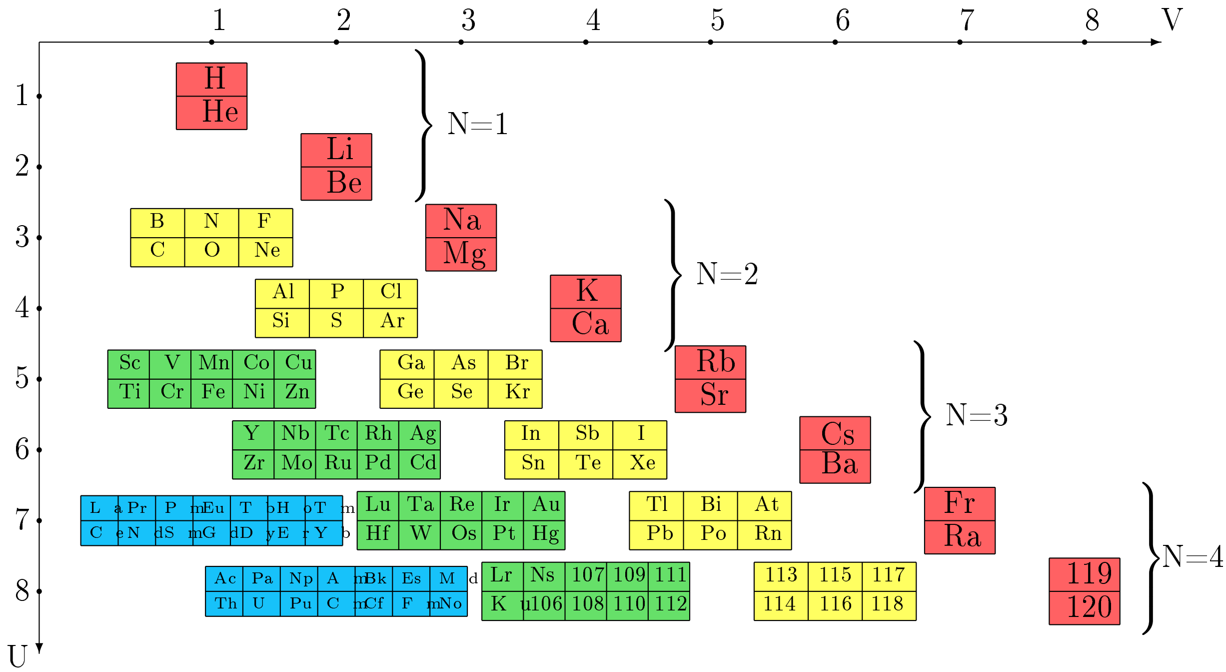


Таблица химических мультиплетов



§ 4. В итоге имеем...

Итак, мы видим, что Периодическая таблица элементов Менделеева разбивает всю последовательность химических элементов на отдельные блоки — **таксоны**:

химические элементы;
химические дублеты, состоящие из двух химических элементов;
химические мультиплеты, состоящие из $2T+1$ химических дублетов;
супермультиплеты, состоящие из N мультиплетов; и, наконец,
гипермультиплеты, состоящие из двух супермультиплетов.

Именно в этом и состоит, на наш взгляд, наиболее важное общенаучное значение Периодической таблицы химических элементов.

Подведём некоторые итоги:

1. Основными таксонами – главными объектами классификации множества химических элементов являются не сами элементы, а химические мультиплеты.

2. Естественной является не традиционная прямоугольная, а **треугольная** форма таблицы.

3. В целом Горно-Алтайская таблица химических мультиплетов KuFeRum напоминает план некоторого “химического” Академгородка, застроенного двухэтажными 1-, 3-, 5-, 7-, 9-подъездными домами-мультиплетами.

4. Этот "химический" Академгородок тщательно распланирован и напоминает шахматную доску, повёрнутую на 45 градусов. Все дома-мультиплеты, расположенные на чёрных клетках, образуют две системы рядов:

⋆ горизонтальные "суперавеню" — химические супермультиплеты с порядковыми номерами $U = 1, 2, 3, \cdots$

⋆ ортогональные к ним вертикальные "улицы" с порядковыми номерами $V = 1, 2, 3, \cdots$

⋆ расположенные по диагонали "проспекты" с порядковыми номерами $T = \frac{1}{2}(U - V)$;

⋆ ортогональные к ним "переулки" с порядковыми номерами $q = \frac{1}{2}(U + V) = 1, 2, 3, \cdots$.

5. Важной особенностью Таблицы химических мультиплетов является существование *гипермультиплетов*, состоящих из двух супермультиплетов, требующих введения **двух новых квантовых чисел** $\Delta = 1/2$ и $\Delta_3 = -1/2,\ 1/2$, **появление которых невозможно с точки зрения традиционной квантово-механической модели атома**.

Итак, два соседних супермультиплета образуют гипермультиплет — своего рода "район" или "зону" химического Академгородка, состоящую из двух параллельных "суперавеню", с порядковыми номерами $N = 1, 2, 3, \cdots$
Верхний супермультиплет (верхняя "суперавеню") характеризуется полуцелым числом $\Delta_3 = -1/2$;
нижний супермультиплет (нижняя "суперавеню") — полуцелым числом
$\Delta_3 = 1/2$.

6. Мультиплеты, входящие в состав верхнего и нижнего супермультиплета, характеризуются **изотопическими спинами**: $T = N - 1,\ N - 2,\ \cdots,\ 1,\ 0$.

7. Каждый мультиплет состоит из $2T + 1$ "двухэтажных" химических дублетов.

8. Каждый химический дублет, входящий в мультиплет с изотопическим спином T , характеризуется целым числом T_3 , принимающим следующие значения:

$$T_3 = -T,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ T.$$

9. Верхний этаж дублета занимает химический элемент с нечётным атомным номером $Z = 2\,W - 1$, который характеризуется полуцелым числом $\sigma_3 = -1/2$; нижний этаж занимает химический элемент с чётным атомным номером
$Z = 2\,W$, который характеризуется полуцелым числом $\sigma_3 = 1/2$:

$$\boxed{\begin{matrix} A^{2W-1} \\ A^{2W} \end{matrix}} \qquad \begin{matrix} \sigma_3 = -1/2 \\ \sigma_3 = 1/2, \end{matrix}$$

где $W = 1, 2, 3, \cdots$ — порядковый номер дублета в исходном множестве химических элементов.

10. Заселение домов-мультиплетов химическими элементами в порядке возрастания атомного номера Z **происходит без единого нарушения установленного правила**, столь характерных для традиционной квантово-

механической трактовки Периодической таблицы химических элементов Менделеева.

Последовательное заселение происходит в мультиплетах, принадлежащих супермультиплетам с фиксированным номером U в порядке возрастания порядковых номеров "улиц" V .

Переход в следующий супермультиплет осуществляется только после **полного** заселения последнего мультиплета на предыдущей "суперавеню".

11. Мультиплет с порядковыми номерами $U = 1$ и $V = 1$ (одиозные **водород** и **гелий**) является единственным химическим мультиплетом, играющим роль выделенного "нулевого дублета".

12. Все химические мультиплеты, имеющие одинаковый изотопический спин T , (то есть число "подъездов" $2T + 1$) **химически подобны**. Это означает, что физико-химические свойства входящих в мультиплет элементов, могут существенно зависеть от чисел T_3 и σ_3 (при фиксированном значении T), но слабо зависеть от порядкового номера "переулка" $q = \frac{1}{2}(U + V)$.

Грубо говоря, для того, чтобы знать свойства всех химических элементов, достаточно знать свойства элементов, входящих в мультиплеты, расположенные в начале каждого супермультиплета, то есть в мультиплеты с $V = 1$.

Другими словами, обнаруженные Менделеевым химические аналоги, расположенные в главных или побочных подгруппах таблицы Менделеева, в Горно-Алтайской таблице химических мультиплетов KuFeRum располагаются на прямых, параллельных главной диагонали $U = V$.

§ 5. Физические величины двух типов: подлинно физические (наблюдаемые) и условно-физические (ненаблюдаемые)

До сих пор периодическая таблица химических элементов Менделеева рассматривалась исключительно с точки зрения периодической зависимости физико-химических свойств элементов от их атомного номера Z .

Однако эта таблица содержит в себе гораздо более важный в принципиальном отношении факт — существование новых **условно-физических (ненаблюдаемых)** величин $N,\ U,\ V,\ T,\ \cdots$, характеризующих *иерархическую структуру порядка* всего множества химических элементов и играющих важную роль при описании общих свойств химических элементов.

Таблица KuFeRum позволяет взглянуть на множество всех химических элементов как на единое целое и увидеть его внутренние законы, которым подчиняется всё множество элементов, и которые **не могут быть получены из квантово-механической модели отдельного атома.**

Для описания этих законов нужны новые физические величины принципиально иной природы.

Все физические величины можно разбить на два класса:

1. подлинно физические (наблюдаемые) и 2. условно-физические (ненаблюдаемые).

Подлинно физические величины характеризуют отношения между физическими объектами и произвольно выбранными соответствующими эталонами.

Произвол выбора эталона находит своё отражение в наличии различных физических единиц измерения. В результате этого для физических величин этого рода характерно существование **размерности** и численных значений, определяемых с конечной **ошибкой измерения.**

Условно-физические величины в конечном итоге связаны с **целыми числами** возможных состояний, в которых может находиться та или иная физическая система.

В связи с этим отпадает необходимость в выборе эталонов и в использовании измерительных приборов. Таким образом условно-физические величины **безразмерны** и имеют **точные** целые или дробные (как правило полуцелые) численные значения.

В качестве примеров такого рода условно-физических величин можно привести

изотопический спин I *и его проекцию* I_3 , *барионный заряд* B , *гиперзаряд* Y , *лептонный заряд* L , *странность (strange)* S , *очарование (charm)* c , *красоту (beauty)* b , *истинность (truth)* t и т. п.

Факт существования двух типов физических величин: *наблюдаемых* и *ненаблюдаемых* можно трактовать в пользу разделения теоретической физики на две части – пространственно-временну́ю или "дольнюю" и структурно-симметрийную или "горнюю".

Понятия дольней теоретической физики допускают интерпретацию на языке наглядных, хотя и не всегда адекватных моделей, в основе которых лежат **пространственно-временны́е и импульсно-энергетические представления.**

Ключевыми словами дольней теоретической физики являются:

координата и время, импульс и энергия, момент импульса, взаимодействие, законы сохранения, группа трёхмерных вращений $SO(3)$, *группа движения* $M(3)$, *группы Лоренца и Пуанкаре, вероятность, волновая функция, гамильтониан, волна, частица, постоянная Планка* $\hbar$, *постоянная скорость света* c *и т.д.*

Абстрактные понятия горней теоретической физики, будучи **прообразами** понятий дольнего мира, требуют для своего описания другого языка, не сводимого к наглядным пространственно-временны́м и энергетическим моделям.

В частности, таким языком является, с одной стороны, язык теории физических (холотропных) структур, а с другой – язык представлений групп симметрии – своеобразной "горней" квантовой механики[88] без гамильтониана и без постоян-

[88]Многие трудности понимания и изложения традиционной ("дольней") квантовой механики отпадут сами собой, если ей будет предшествовать, как это предполагается сделать в Горно-Алтайском курсе теоретической физики, изложение "горней" квантовой механики.

ной Планка $\hbar$.

Применение такого термина будет оправдано, когда мы обнаружим в теории представлений групп все характерные признаки квантово-механического описания:

векторы состояния ψ *в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{R}$ *, эрмитовы операторы условно-физических величин, перестановочные соотношения базисных матриц алгебры Ли, унитарные операторы* T_g *в* $\mathfrak{R}$ *, сохраняющие скалярное произведение* $< T_g\phi|T_g\psi >=< \phi|\psi >$ *.*

Ключевыми словами горней теоретической физики, кроме уже приведённых выше, являются:

абстрактные понятия Теории физических структур, а также *симметрия, калибровочная инвариантность, группы* $SU(2), SU(3), SU(6), SO(4), SO(4,2)$ *и т.п., представления групп, алгебры Ли, матрицы Окубо* A_i^j *и Гелл-Манна* λ_k *, оператор Казимира, обычный и изотопический спины, электрический заряд, странность, очарование, красота и т.д.*

Отметим, что среди ключевых слов горней теоретической физики мы не встретим таких понятий, как энергия, импульс, взаимодействие, гамильтониан.

После всего сказанного возникает естественный вопрос: к какому разделу теоретической физики относится проблема классификации элементарных частиц и химических элементов? Применима ли здесь традиционная квантовая механика?

§ 6. О неприменимости традиционной квантовой механики для классификации химических элементов

Под химическим элементом χ_z мы будем понимать некоторое состояние протоматерии $\mathfrak{P}$.

Каждый химический элемент, в свою очередь, может находиться в основном, $A_{z,0}$, и в возбуждённых состояниях, $A'_z,\ A''_z,\ A'''_z, \cdots$, которые мы будем называть“атомами химического элемента χ_z ”.

Итак, имеем следующие множества:

множество химических элементов $\mathfrak{E} = \{\chi_0,\ \chi_1,\ \chi_2, \cdots\} = \{\mathsf{H},\ \mathsf{He},\ \mathsf{Li},\ \mathsf{Be}, \cdots\}$;

множество атомов водорода $\mathfrak{A}_H = \{A_{1,0},\ A'_1,\ A''_1, \cdots\} = \{\mathsf{H}_0,\ \mathsf{H}',\ \mathsf{H}'', \cdots\}$;

множество атомов гелия $\mathfrak{A}_{He} = \{A_{2,0},\ A'_2,\ A''_2, \cdots\} = \{\mathsf{He}_0,\ \mathsf{He}',\ \mathsf{He}'', \cdots\}$;

множество атомов лития $\mathfrak{A}_{Li} = \{A_{3,0},\ A'_3,\ A''_3, \cdots\} = \{\mathsf{Li}_0,\ \mathsf{Li}',\ \mathsf{Li}'', \cdots\}$;

. . . .

Связь, существующая между множеством химических элементов $\mathfrak{E}$ и множествами возбуждённых состояний атомов водорода $\mathfrak{A}_H$, гелия $\mathfrak{A}_{He}$, лития $\mathfrak{A}_{Li}$ и т.д., показана на следующей диаграмме:

$\mathfrak{E}$ – множество возбуждённых состояний протоматерии (множество химических элементов);
$SU(2) \times SU(2) \times SO(4,2)$ – симметрия

Химические элементы (объекты горней теоретической физики)	H	He	Li	$\cdots$
Множества возбуждённых состояний атомов	$\mathfrak{A}_H$	$\mathfrak{A}_{He}$	$\mathfrak{A}_{Li}$	$\cdots$
	$SU(2) \times SO(4,2)$ – симметрия	нет	нет	нет
Атомы (объекты дольней теоретической физики)	H	He	Li	$\cdots$

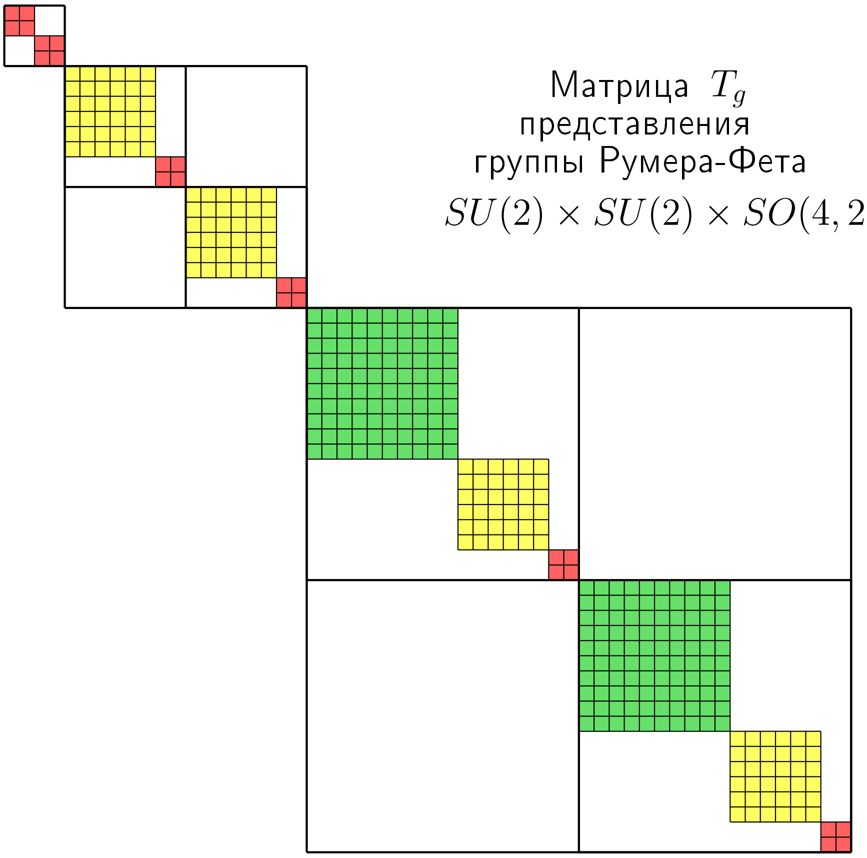
Как показали Малкин и Манько [11], множество атомов водорода $\mathfrak{A}_H$ обладает симметрией, которая описывается группой Малкина и Манько $SU(2) \times SO(4,2)$. Её представление характеризуется хорошо известными из квантовой механики **четырьмя квантовыми числами**:

$$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,$$
$$l = 0,\ 1,\ 2, \cdots,$$
$$m = -l,\ -l+1, \cdots, -1,\ 0,\ 1, \cdots, l-1,\ l,$$
$$m_s = -1/2,\ 1/2.$$

Что же касается атомов гелия, лития, бериллия и т.д., то, по-видимому, множества $\mathfrak{A}_{He}$, $\mathfrak{A}_{Li}$, $\mathfrak{A}_{Be}$, ... вообще не обладают какой-либо групповой симметрией. Возникает ситуация, сходная с той, которая имеет место в классической механике: система, состоящая из двух частиц, взаимодействующих по кулоновскому закону, обладает определённой симметрией и допускает аналитическое решение в явном виде; система, состоящая из трёх и более частиц, такой симметрией не обладает и не имеет явно выраженного аналитического решения. Наличие симметрии в одном случае и отсутствие её в другом является главным свидетельством принципиального различия рассматриваемых систем.

Точно так же множество атомов водорода, обладающее симметрией $SU(2) \times SO(4,2)$, имеет совершенно иную природу, нежели множества всех других многоэлектронных атомов, **не обладающих подобной симметрией.**

Таким образом, в принципе невозможно описывать многоэлектронные атомы по образцу атома водорода "водородными" квантовыми числами n, l, m, m_s. А это значит, что, строго говоря, мы до сих пор не знаем, даже в рамках существующей квантовой механики, как "устроены" любые атомы, за исключением атома водорода. Вместо многоэлектронного атома мы имеем дело с его неадекватной боровской моделью образца 1921 года, которая без каких-либо оснований выдаётся за истинное устройство атома.

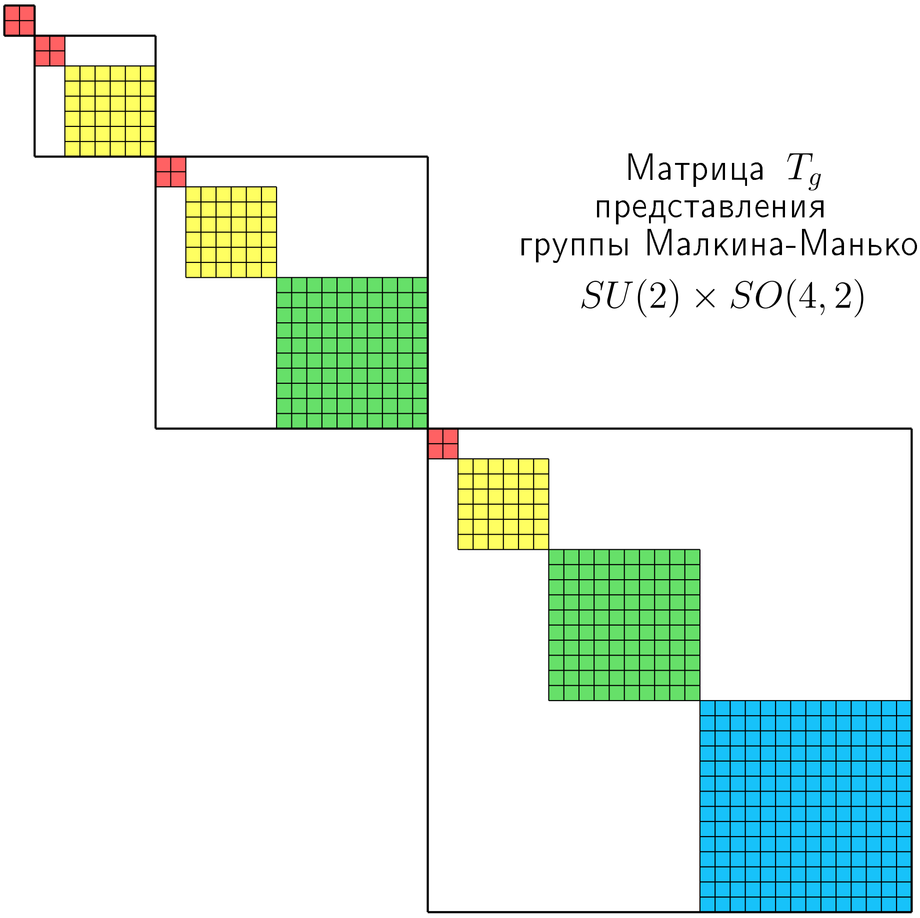


Как установил А.И.Фет [12], множество химических элементов $\mathfrak{E} = \{\mathsf{H},\ \mathsf{He},\ \mathsf{Li}, \cdots\}$ обладает симметрией, которая описывается группой Румера-Фета $SU(2)\times SU(2)\times SO(4,2)$. Её представление характеризуется **пятью квантовыми числами**:

$$N = 1,\ 2,\ 3, \cdots ;$$
$$\Delta_3 = -1/2,\ 1/2\,;$$
$$T = N-1,\ N-2, \cdots ,1,\ 0\,;$$
$$T_3 = -T,\ -T+1, \cdots ,-1,\ 0,\ 1, \cdots ,T-1,\ T\,;$$
$$\sigma_3 = -1/2,\ 1/2.$$

(В работе [12] для этих параметров используются другие обозначения:
$N = \nu,\quad \Delta_3 = \delta,\quad T = \lambda,$
$T_3 = \mu,\quad \sigma_3 = \sigma$.)

Именно из-за этой симметрии всё множество химических элементов $\mathfrak{E}$ разбивается на гипермультиплеты, те в свою очередь разбиваются на пары супермультиплетов, супермультиплеты разбиваются на мультиплеты, мультиплеты – на дублеты и, наконец, дублеты разбиваются на отдельные химические элементы.



Необходимо признать, что “электронные оболочки” с их “водородными” числами n, l, m, m_s , “руками” перенесённые из задачи об атоме водорода, являются типичным артефактом. Они в принципе не адекватны многоэлектронным атомам и, строго говоря, не могут быть получены из квантовой механики, так как только множество состояний водорода $\mathfrak{A}_H$ обладает такой уникальной симметрией, которая порождает квантовые числа n, l, m, m_s .

Но к счастью, проблема строгого решения уравнения Шрёдингера для многоэлектронного атома не имеет прямого отношения к общим физико-химическим свойствам химических элементов.

Дело в том, что свойства химических элементов определяются не строением их “электронных оболочек”, а положением химического элемента в их исходной последовательности, то есть – квантовыми числами N, a, b, c, d , где

$N=1,2,3,\cdots$ – порядковый номер гипермультиплета в исходной последовательности;

$a=1,2$ – порядковый номер супермультиплета в гипермультиплете;

$b=1,2,\cdots,N-1,N$ – порядковый номер мультиплета в супермультиплете;

$c=1,2,\cdots,2(N-b)+1$ – порядковый номер дублета в мультиплете;

$d=1,2$ – порядковый номер химического элемента в дублете;

или – их линейными комбинациями, совпадающими с квантовыми числами представления группы симметрии Румера-Фета:

$N = 1, 2, 3, \cdots$;

$\Delta_3 = a - 3/2 = -1/2, 1/2$ – проекция изотопического спина гипермультиплета;

$T = N - b = N - 1, N - 2, \cdots, 1, 0$ – изотопический спин мультиплета;

$T_3 = c - (N - B) - 1 = -T, -T + 1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, T - 1, T$ – проекция изотопического спина химического мультиплета;

$\delta_3 = d - 3/2 = -1/2, 1/2$ – проекция изотопического спина химического дублета.

Если Q - какая-либо физическая величина (плотность, ионизационный потенциал, температура плавления или кипения, энтальпия испарения и т.п.), то её зависимость от выбора того или иного химического элемента может быть представлена в виде нескольких функций различного числа переменных:

$$Q = Q(N, a, b, c, d) = A(V(a, b), T(N, b), T_3(N, b, c), \sigma_3(d)) = B(Z(N, a, b, c, d)),$$

где $Z(N, a, b, c, d) = \frac{2}{3}N(N + 1)(2N - 1) + 2(a - 1)N^2 + 2(b - 1)(2N - b + 1) + 2(c - 1) + d$.

Как известно, функция $Q = Q(Z)$ ведёт себя в высшей степени нерегулярно, обнаруживая при этом определённую квазипериодичность.

Однако, если вместо одной переменной – атомного номера Z – выбрать четыре наиболее полно характеризующих химический элемент переменных V, T, T_3, σ_3 , то при фиксированных T^*, T_3^*, σ_3^* зависимость

$$Q(V) = A(V, T^*, T_3^*, \sigma_3^*)$$

представляет собой монотонно растущую (или убывающую) функцию, близкую к линейной, что позволяет с большой точностью предсказывать физико-химические свойства ещё неоткрытых элементов.

Итак, все химические элементы делятся на четыре химических царства – красное ($T = 0$), жёлтое ($T = 1$), зелёное ($T = 2$) и синее ($T = 3$).

В основе этого деления лежит не строение “внешней электронной оболочки атома”, а причина более глубокая – факт существования универсальной симметрии Румера-Фета, присущей всему множеству химических элементов $\mathfrak{E}$ как единому целому.

Что же касается общепринятой квантово-механической классификации химических элементов, то, как известно, в её основе лежит тот же принцип, что и в основе классификации возбуждённых атомов водорода. Но множество энергетических уровней водорода $\mathfrak{A}_H$ обладает универсальной симметрией Малкина-Манько, отличной от симметрии Румера-Фета (сравните матрицы T_g представлений групп Румера-Фета и Малкина-Манько, приведённые на стр. 13).

Строение Таблицы химических мультиплетов абсолютно точно соответствует группе симметрии Румера-Фета $SU(2) \times SU(2) \times SO(4, 2)$ и находится в явном противоречии с группой симметрии Малкина-Манько $SU(2) \times SO(4, 2)$, что говорит о неприменимости квантово-механической модели Бора для объяснения периодической системы химических элементов.

РЕЦЕНЗИЯ

на статью Ю.И.Кулакова *"Изотопический спин и Периодическая система химических элементов"*

Как известно, с 1921 года, когда Нильс Бор заложил основы квантово-механического объяснения Периодической системы элементов, прошло почти 70 лет. За это время в физике произошли революционные изменения, сравнимые с теми, которые совершились в период создания теории относительности и квантовой механики.

Путеводной звездой современной физики стало понятие симметрии. Именно симметрия стала тем орудием, используя которое удаётся выявить в калейдоскопе физических явлений основные структуры, свести всё многообразие физического мира к нескольким десяткам фундаментальных формул. Тем более интересна идея взглянуть на привычную и хорошо известную Периодическую систему химических элементов свежим взглядом современного физика-теоретика, отыскивающего в природе всё более скрытые и всё более фундаментальные симметрии.

Работа Ю.И.Кулакова "Изотопический спин и Периодическая система химических элементов" представляет собой дальнейшее развитие на феноменологическом уровне оригинальных идей Ю.Б.Румера, предложившего, по аналогии с элементарными частицами, изучать свойства химических элементов с точки зрения их "внутренней" симметрии. Форма Периодической таблицы химических элементов, предложенная Ю.И.Кулаковым, принципиально отличается от всех ранее предложенных таблиц тем, что здесь объектами классификации являются не отдельные химические элементы, а их целые семейства – мультиплеты с определёнными значениями изотопического спина. В результате чего таблица приобретает исключительно простой вид без каких-либо исключений и открывает новые возможности для изучения зависимости физико-химических свойств эментов от возникающих при этом пяти квантовых чисел. Считаю, что статья Ю.И.Кулакова "Изотопический спин и Периодическая система химических элементов" как нельзя лучше соответствует содержанию сборника "Классика и современность".

Член-корреспондент АН СССР

Н.А.ЖЕЛТУХИН

О т з ы в

на “Естественную таблицу химических элементов",
предложенную к публикации проф. Ю.И.Кулаковым

В своих публикациях (Ю.И.Кулаков, “Естественная таблица химических элементов" // Структурный анализ символьных последовательностей, Академия наук СССР, Новосибирск, 1984, С. 82 - 90; Ю.И.Кулаков, “Классификация химических элементов на новой основе" // Классическое естествознание и современная наука, Изд.-во НГУ, Новосибирск, 1991, С. 97 - 119 .) и неоднократных выступлениях на теоретических семинарах и всесоюзных конференциях проф. Кулаков приводит принципиально новую Периодическую таблицу химических элементов и докладывает о её преимуществах по сравнению с хорошо известной Периодической таблицей Менделеева.

В духе современной теории элементарных частиц Ю.И.Кулаков опирается на идею групповой симметрии и рассматривает каждый атом как бесструктурное возбуждённое состояние некоторой протоматерии. Идея такого рассмотрения, как мне известно, впервые была предложена учеником и сотрудником Борна, профессором НГУ Ю.Б.Румером, и математически детально разработана А.И.Фетом, который, исходя из конформной группы, получил, по аналогии с классификацией адронов, полный набор пяти квантовых чисел, характеризующих состояние химического элемента.

Предлагаемая Кулаковым “Горно-Алтайская периодическая таблица химических элементов" основана на полуэмпирических соображениях. Он исходит из хорошо известной таблицы Менделеева и, используя понятие изотопического спина, вводит соответствующие таксоны – дублеты, мультиплеты, супермультиплеты и гипермультиплеты, то есть семейства химических элементов с соседними монотонно возрастающими атомными номерами Z . В результате этого прямоугольная таблица Менделеева преобразуется в полностью адекватную действительности треугольную Естественную таблицу химических элементов, свободную от всякой “патологии".

Такой нетрадиционный подход к систематизации химических элементов представляет большой интерес для самых широких кругов научной общественности – научных сотрудников, философов, преподавателей и студентов.

Дело в том, что специалисты прекрасно сознают всю ограниченность применения существующей водородоподобной модели Бора к многоэлектронным атомам; а если всё же применяют её (с необходимыми оговорками), то только потому, что какая-никакая, пусть не адекватная действительности, модель всё же лучше, чем её отсутствие. К тому же привычная, более чем столетней давности, форма таблицы Менделеева оказалась вполне удобной для прикладной науки.

Предлагаемая проф. Кулаковым “Естественная таблица химических элементов" адекватно отражает действительность, имеет надёжное современное теоретико-групповое обоснование, сохраняет все преимущества таблицы Менделеева, но в отличие от неё лишена известных “патологий", связанных с заполнением электронных оболочек, и, что является, пожалуй, самым важным, открывает новые возможности для дальнейших исследований.

В связи с этим следует отметить, что публикация Ю.И.Кулаковым треугольной таблицы в малодоступном издании НГУ тем не менее стала известна за рубежом и вызвала там живой интерес. Так профессор из Southern College, USA, Рей Хефферлин, воспользовавшись структурой, заложенной в треугольной форме Периодической таблицы химических элементов, уже сделал следующий шаг и построил треугольную Периодичекую таблицу двухатомных и трёхатомных молекул.

На основании всего сказанного считаю, что высококачественную и общедоступную публикацию Горно-Алтайской периодической таблицы химических элементов следует всячески поддерживать и приветствовать.

Кандидат химических наук,
доцент кафедры аналитической химии НГУ

/И.И.Тычинская/

Р Е Ц Е Н З И Я

на Таблицу химических элементов, предложенную профессором Горно-Алтайского университета Ю.И.Кулаковым

Периодическая таблица химических элементов, предложенная Ю.И.Кулаковым, строится на принципиально новых идеях групповой симметрии, разработанных известным советским физиком Ю.Б.Румером и математиком А.И.Фетом.

Треугольная форма Таблицы, созданной Ю.И.Кулаковым, указывает на её принципиальное отличие от всех других, предложенных ранее. Это отличие состоит в том, что все химические элементы объединяются в особые семейства – *мультиплеты*, своеобразные двухэтажные блоки, каждый из которых располагается в соответствующем месте Таблицы.

Последовательное заполнение блоков с ростом атомного номера Z приводит к очень простому виду Таблицы, наиболее адекватно отражающей свойства химических элементов.

Эта Таблица неоднократно демонстрировалась проф. Кулаковым на Всесоюзных и Международных конференциях и неизменно вызывала всеобщий интерес и самую высокую оценку. Так, в частности, профессор R. Hefferlin (Southern College, USA) уже использовал новые возможности, заложенные в этой Таблице, для объяснения закономерностей в свойствах двухатомных молекул.

Периодическая таблица химических элементов, предложенная профессором Кулаковым, опубликована в двух сборниках научных трудов:

Структурный анализ символьных последовательностей (Изд-во Академии наук СССР, Сибирское отделение, Институт математики. 1984 год) и

Классическое естествознание и современная наука (Изд-во Новосибирского государственного университета. 1991 год).

Однако малый тираж этих изданий и весьма узкий круг читателей делают практически неизвестной для мировой научной общественности эту Таблицу, представляющую собой выдающийся научный результат, чрезвычайно удобный для практического использования в химии и физике и имеющий важное мировоззренческое значение.

Следует отметить, что создание принципиально новой Периодической таблицы химических элементов началось в начале семидесятых годов в стенах Новосибирского университета (в работах Ю.Б.Румера, А.И.Фета и Ю.И.Кулакова) и окончательно завершилось в 1995 году в Горно-Алтайском университете в работе Ю.И.Кулакова. Это обстоятельство служит прекрасной иллюстрацией возникновения глубоких научных связей и преемственности между Новосибирским университетом, уже получившим международное признание, и ещё совсем молодым Горно-Алтайским университетом, которому это признание ещё предстоит.

Инициативу многотиражного издания современной Периодической таблицы химических элементов для широкой отечественной и мировой научной общественности, проявленную Горно-Алтайским университетом и Правительством Республики Алтай, способствующую развитию престижных направлений в области точного естествознания, можно только приветствовать.

Профессор Новосибирского университета,
доктор философских наук / С.С.РОЗОВА /

Письмо директору ОИЯИ, академику В.Г. Кадышевскому

Дорогой Владимир Георгиевич!

В связи с открытием в Дубне “острова стабильности” появляется возможность сравнить свойства вновь открытых элементов с Z=108, 110, 112, 114,116 с тем, что предсказывает наша “Таблица химических мультиплетов”, изданная в 1999 году Правительством Республики Алтай как документ государственного значения.

Дело в том, что традиционная таблица химических элементов приводит к весьма запутанной зависимости свойств химических элементов от их номера Z.

В нашей Таблице вместо номера Z важное значение имеет номер мультиплета V. Оказывается, что зависимость свойств химических элементов от номера V имеет очень простой, регулярный характер и позволяет предсказывать свойства ещё неоткрытых элементов, зная свойства элементов с предыдущими значениями V. Вместе с самой таблицей и описанием к ней привожу графики зависимостей потенциала ионизации, плотности и температуры плавления и кипения от квантового числа V=1,2,...

Из этих графиков легко получить свойства элементов, находящихся на острове Стабильности.

Поздравляю Вас и прошу передать мои поздравления Юрию Оганесяну и всему коллективу ОИЯИ с самым ярким открытием отечественной и мировой науки.

Если метод нахождения физических свойств вновь открытых элементов, основанный на использовании нашей Таблицы химических мультиплетов, показался Вам заслуживающим внимания, то я мог бы приехать в ОИЯИ и выступить с подробным объяснениями перед заинтересованными учёными.

Искренне Ваш

Профессор НГУ Юрий Иванович КУЛАКОВ

12 апреля 2001 г.

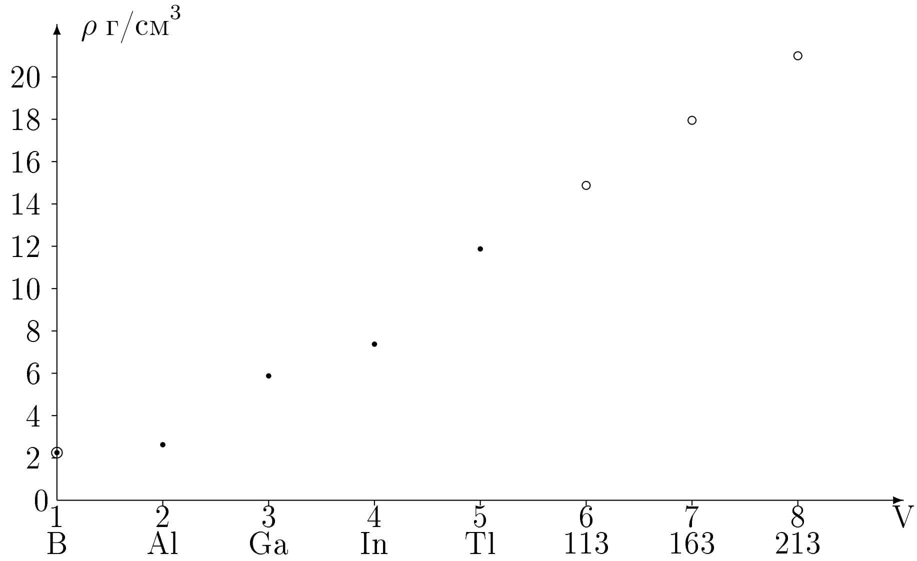


Рис. 1. Зависимость плотности химических элементов бороподобного гомологического ряда $(T = 1, T_3 = -1, \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

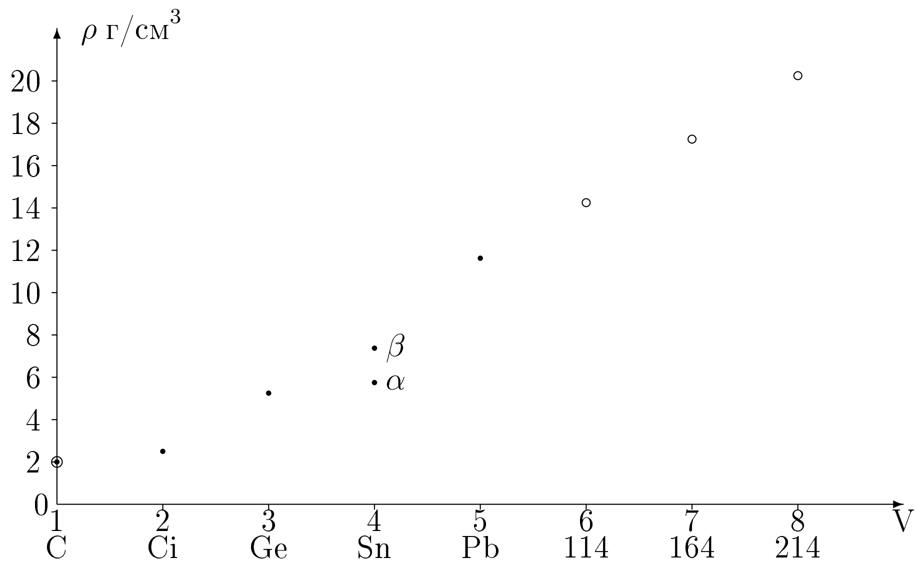


Рис. 2. Зависимость плотности химических элементов углеродного гомологического ряда $(T = 1, T_3 = -1, \sigma_3 = 1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

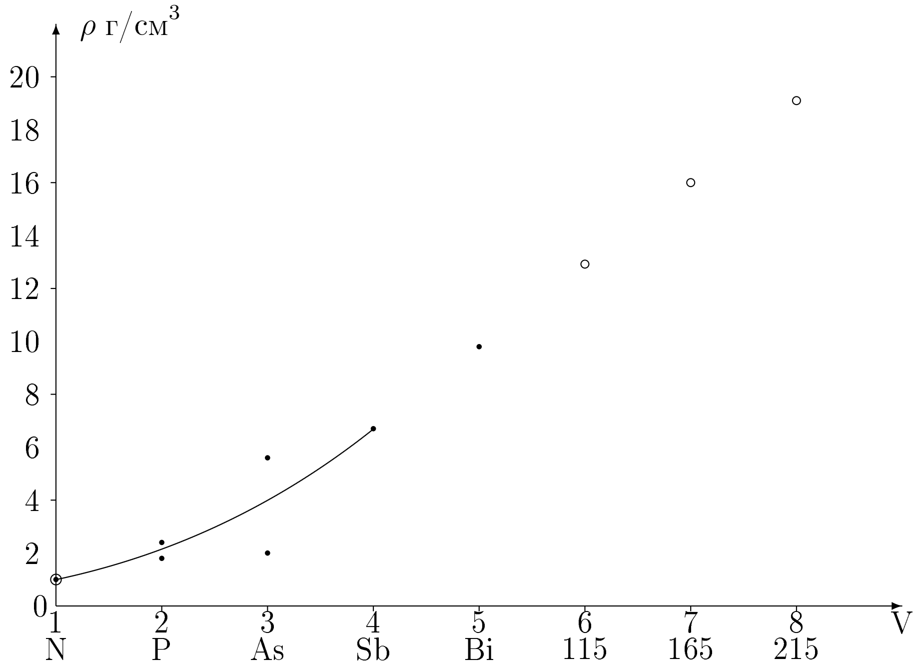


Рис. 3. Зависимость плотности химических элементов азотного гомологического ряда $(T = 1,\ T_3 = 0,\ \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

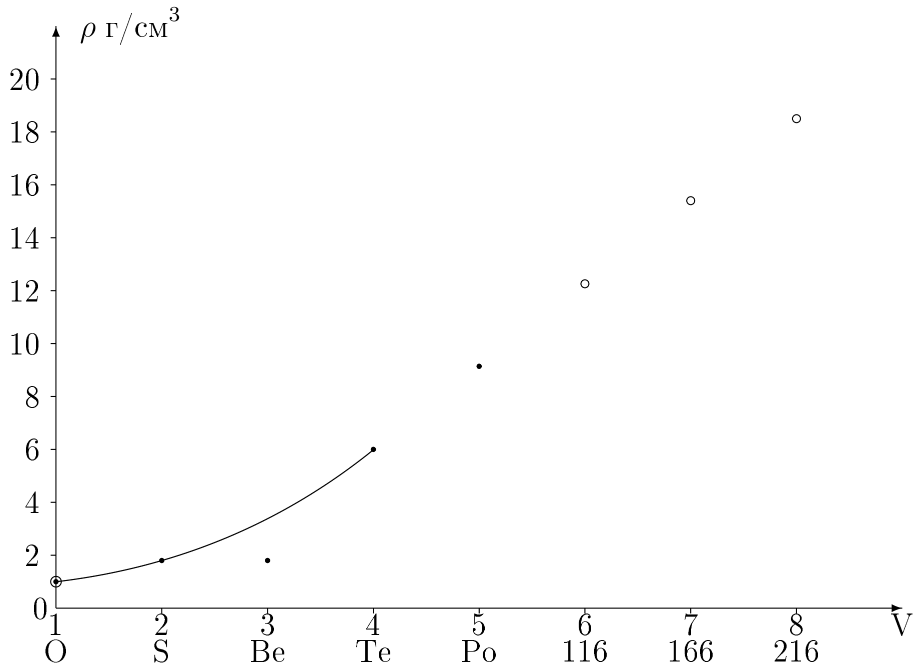


Рис. 4. Зависимость плотности химических элементов кислородного гомологического ряда $(T = 1,\ T_3 = 0,\ \sigma_3 = 1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

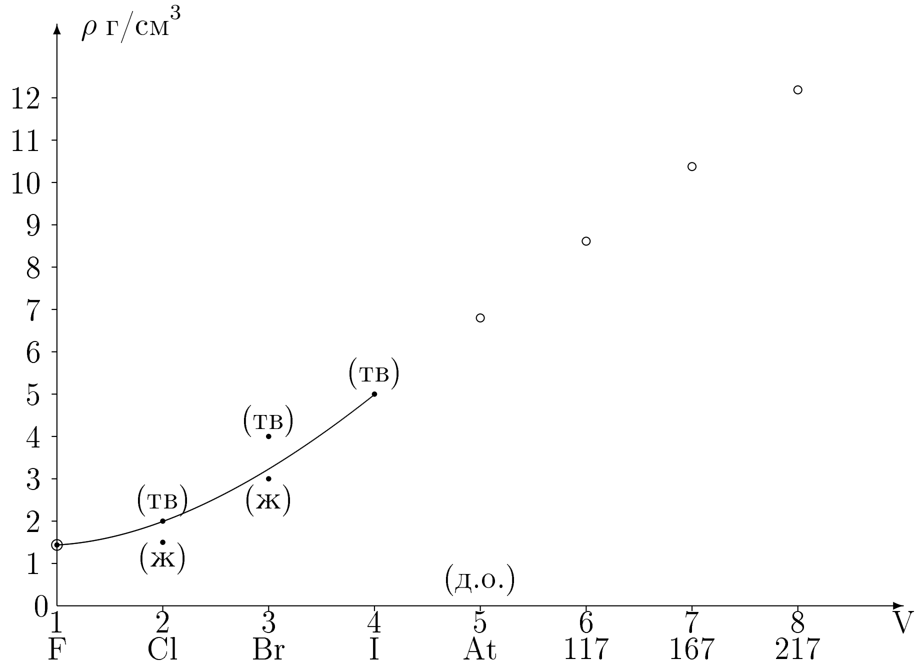


Рис. 5. Зависимость плотности химических элементов фтороподобного гомологического ряда ($T = 1$, $T_3 = 1$, $\sigma_3 = -1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

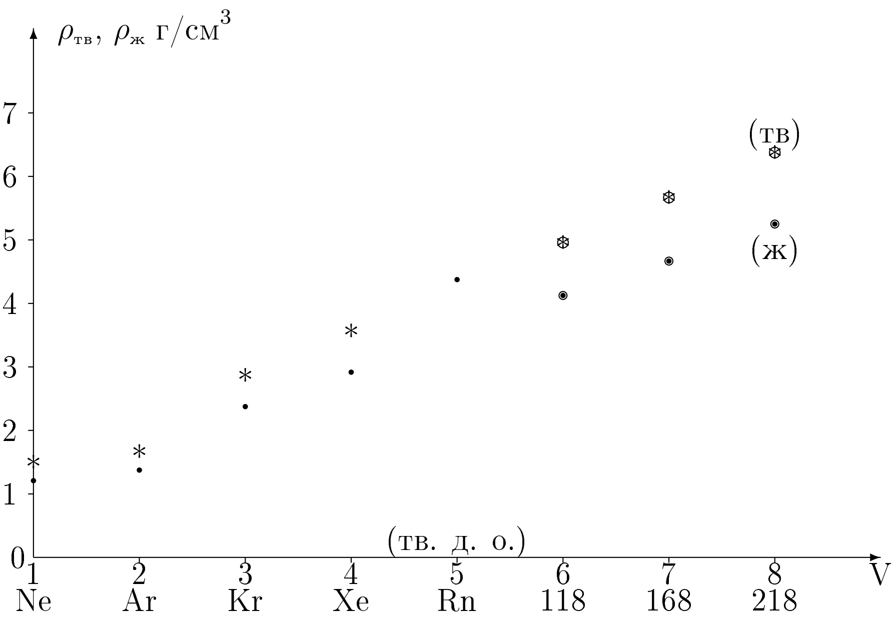


Рис. 6. Зависимость плотности химических элементов неонового гомологического ряда ($T = 1$, $T_3 = 1$, $\sigma_3 = 1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

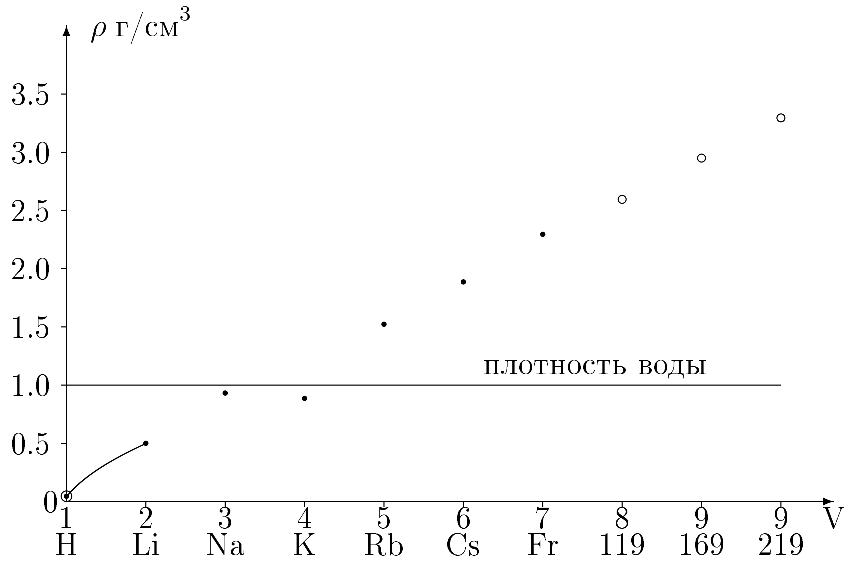


Рис. 7. Зависимость плотности химических элементов водородного гомологического ряда $(T = 0, T_3 = 0, \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

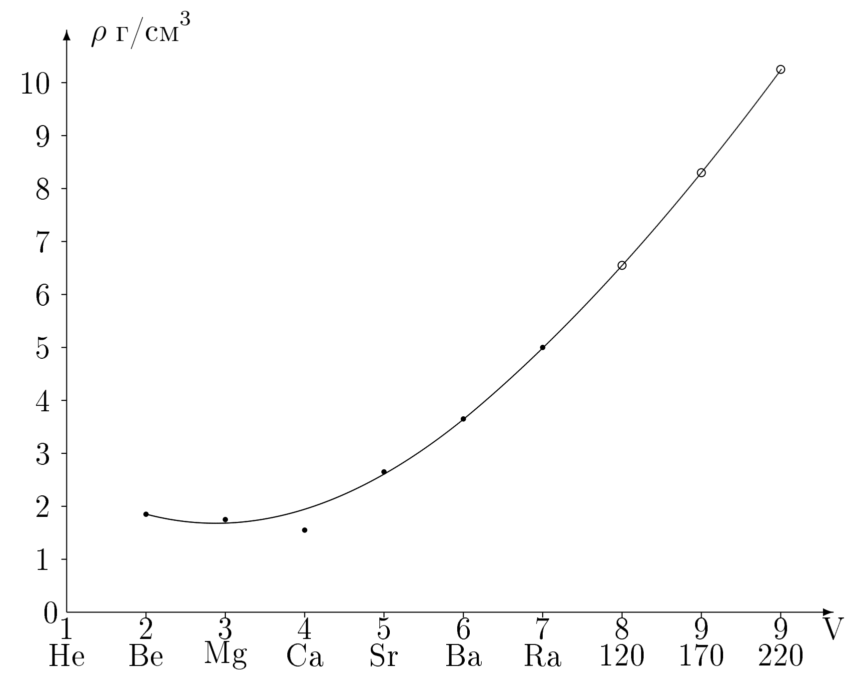


Рис. 8. Зависимость плотности химических элементов гелиевого гомологического ряда $(T = 0, T_3 = 0, \sigma_3 = 1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

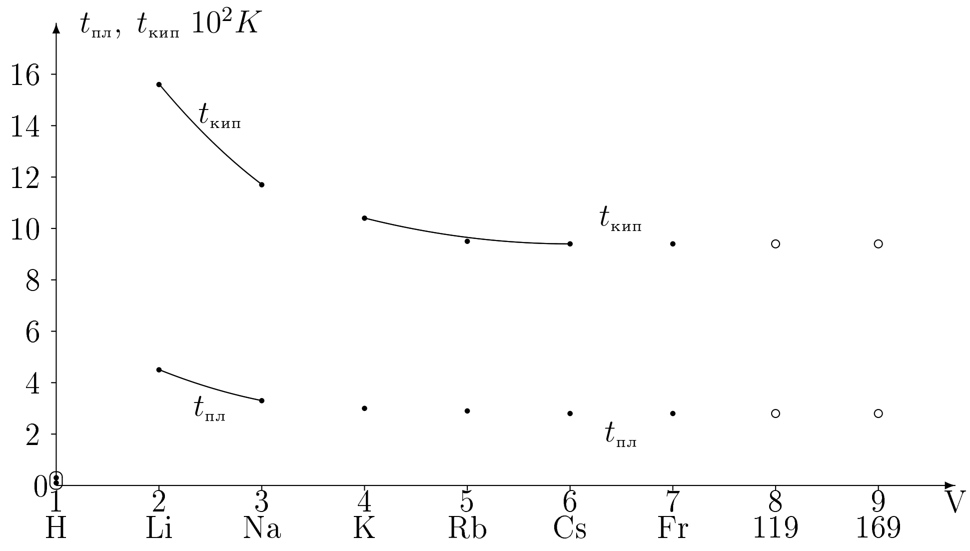


Рис. 9. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов водородного гомологического ряда $(T = 0, T_3 = 0, \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

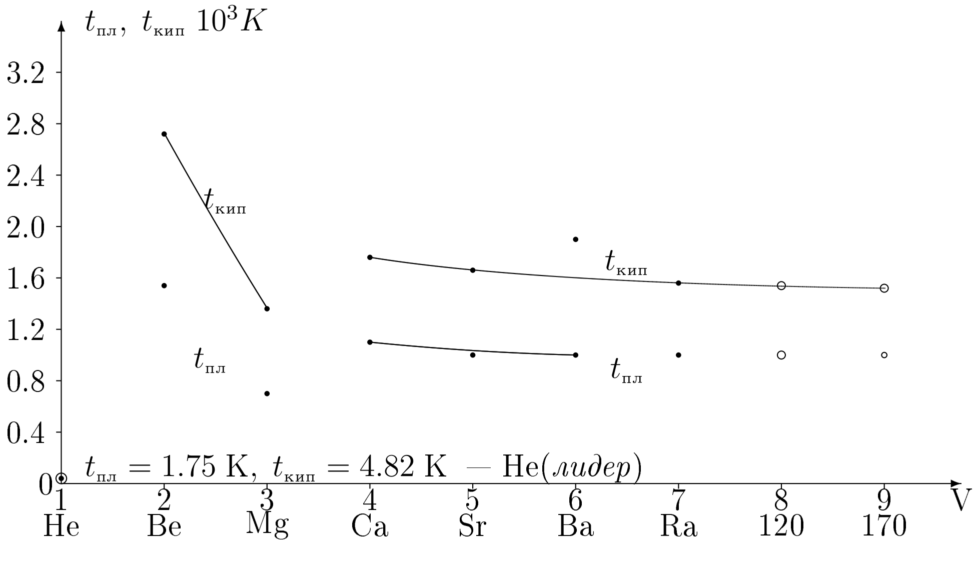


Рис. 10. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов гелиевого гомологического ряда $(T = 0, T_3 = 0, \sigma_3 = 1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

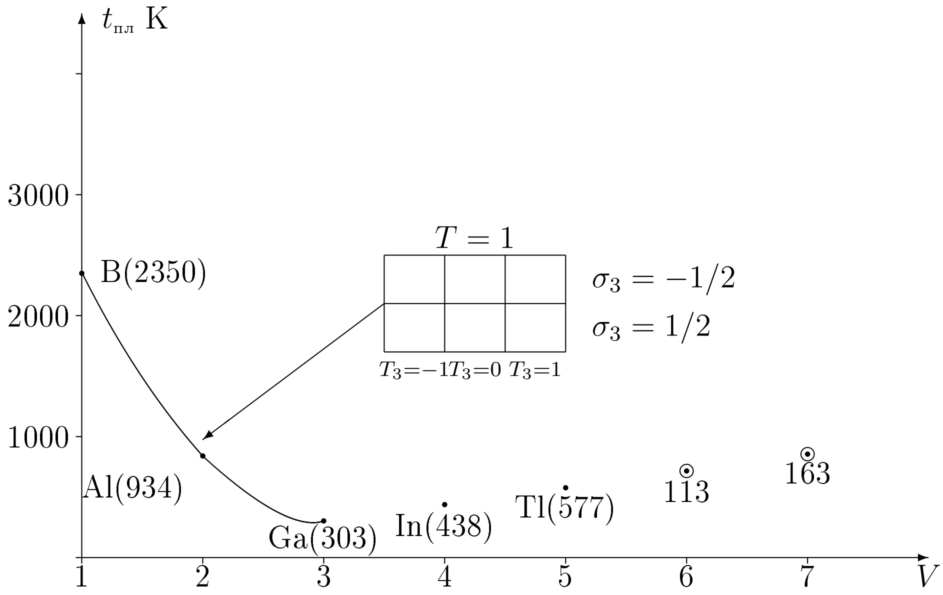
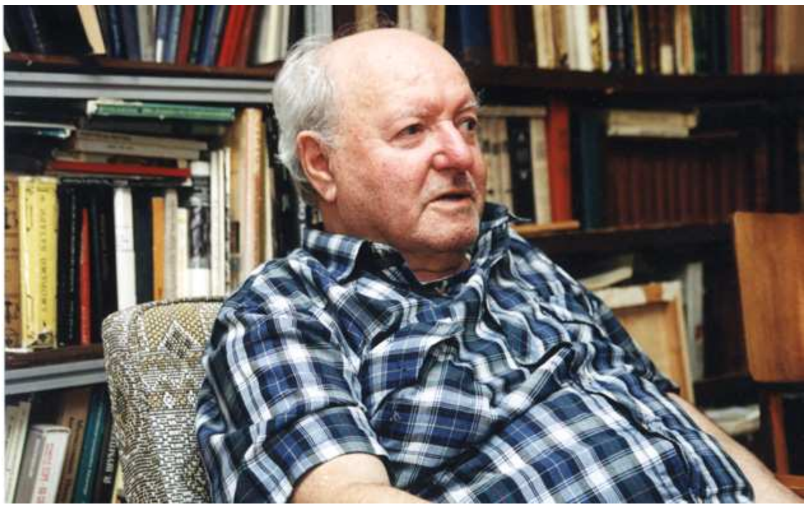


Рис. 11. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов бороподобного гомологического ряда ($T = 1$, $T_3 = 1$, $\sigma_3 = -1/2$) от порядкового номера мультиплета V.



Абрам Ильич ФЕТ

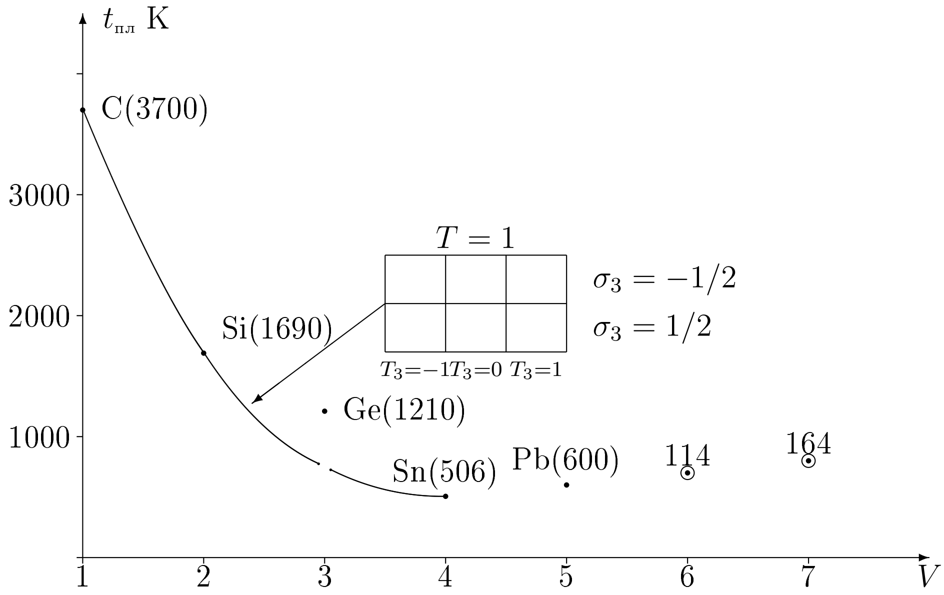


Рис. 12. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов углеродоподобного гомологического ряда ($T = 1$, $T_3 = 1$, $\sigma_3 = -1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

Юрий Борисович РУМЕР

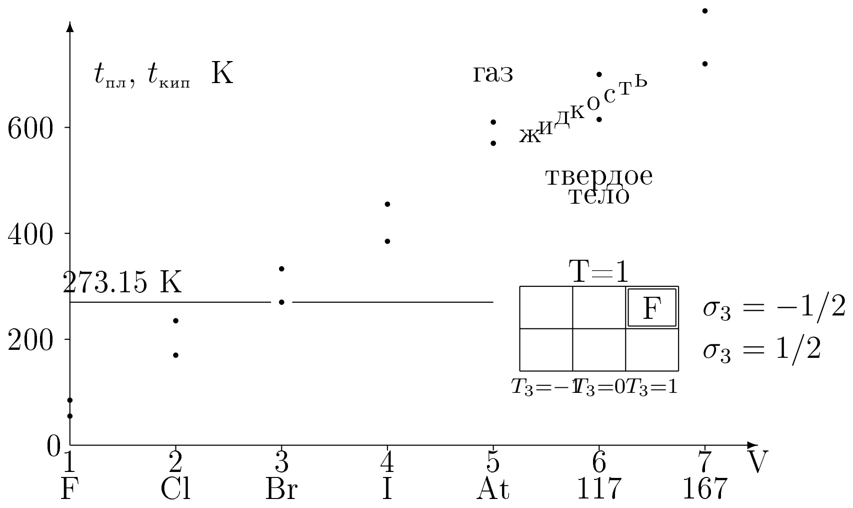


Рис. 13. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов фтороподобного гомологического ряда $(T = 1,\, T_3 = 1,\, \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

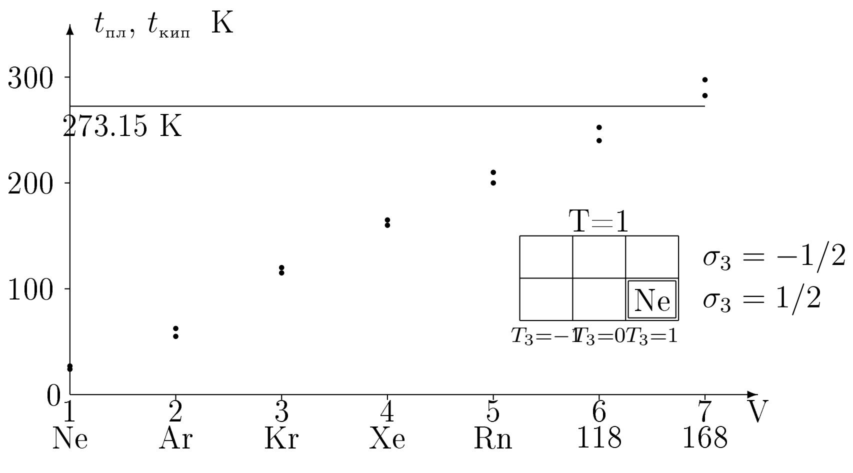


Рис. 14. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов неонового гомологического ряда $(T = 1,\, T_3 = 1,\, \sigma_3 = 1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

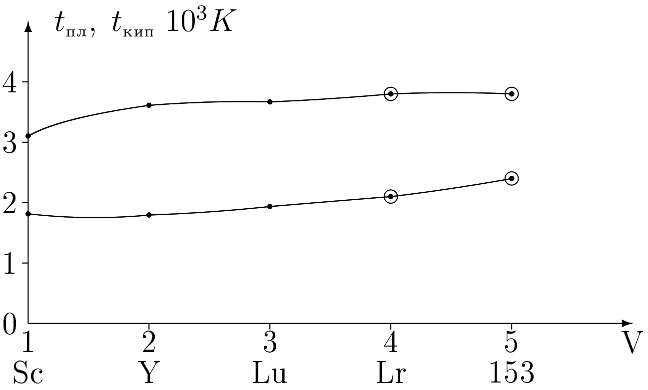


Рис. 15. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов скандийподобного гомологического ряда $(T = 2, T_3 = -2, \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

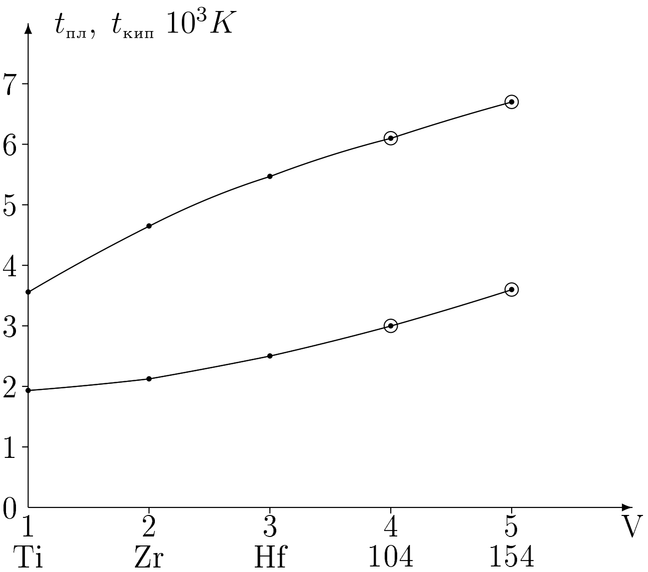


Рис. 16. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов титаноподобного гомологического ряда $(T = 2, T_3 = -2, \sigma_3 = 1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

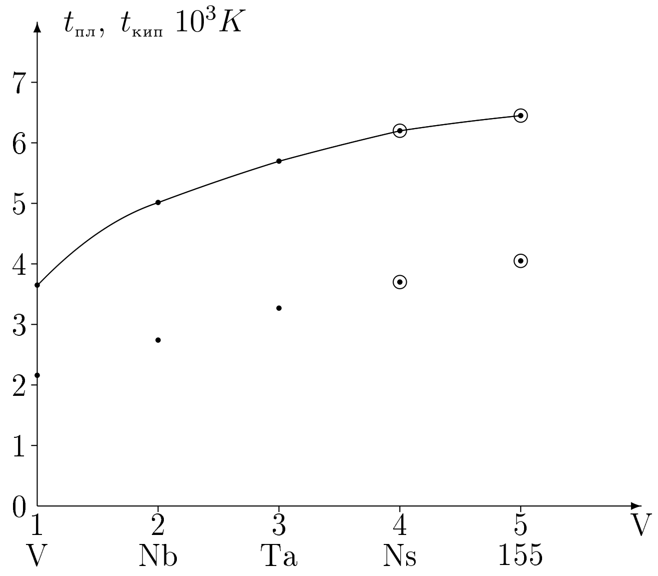


Рис. 17. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов ванадийподобного гомологического ряда ($T = 2$, $T_3 = -1$, $\sigma_3 = -1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

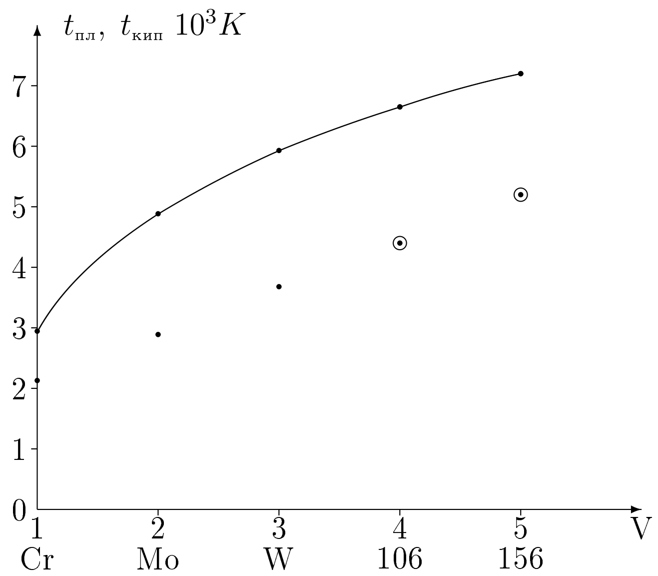


Рис. 18. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов хромоподобного гомологического ряда ($T = 2$, $T_3 = -1$, $\sigma_3 = 1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

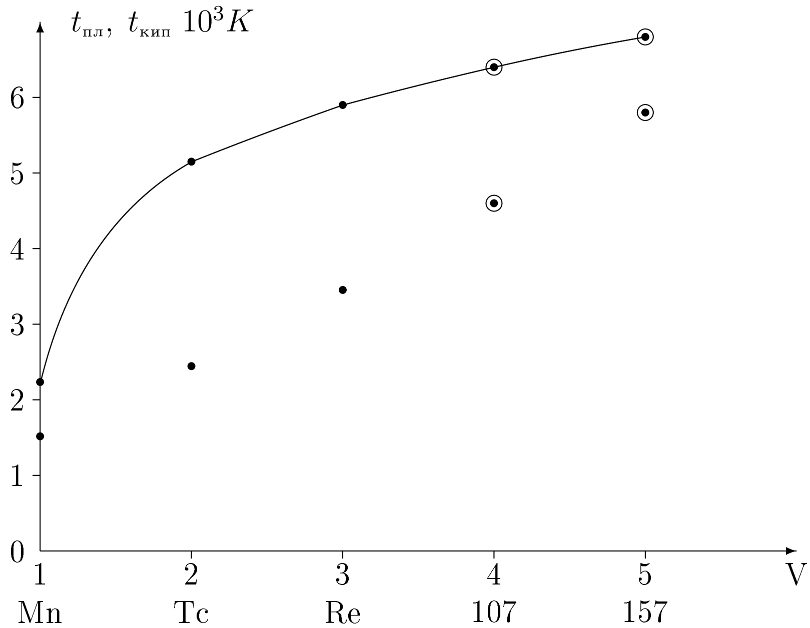


Рис. 19. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов марганцеподобного гомологического ряда ($T = 2$, $T_3 = 0$, $\sigma_3 = -1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

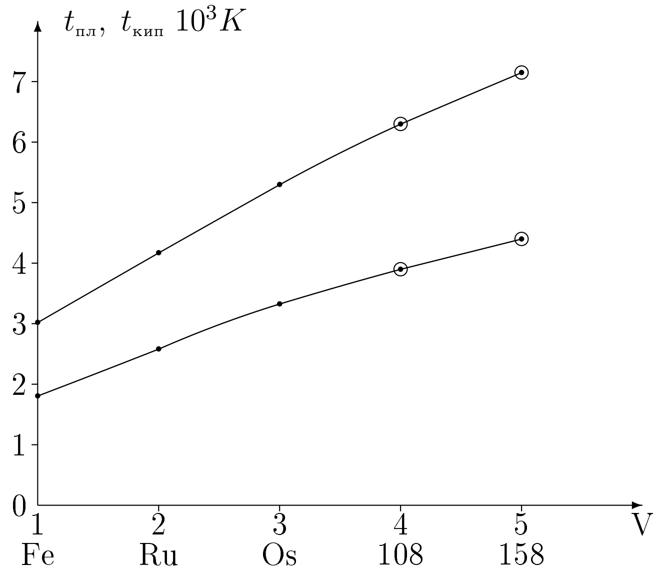


Рис. 20. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов железоподобного гомологического ряда ($T = 2$, $T_3 = 0$, $\sigma_3 = 1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

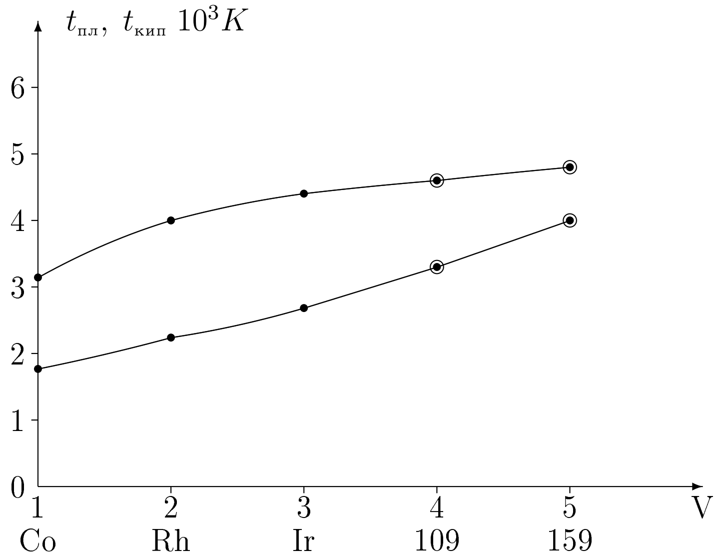


Рис. 21. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов кобальтоподобного гомологического ряда $(T = 2, T_3 = 1, \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

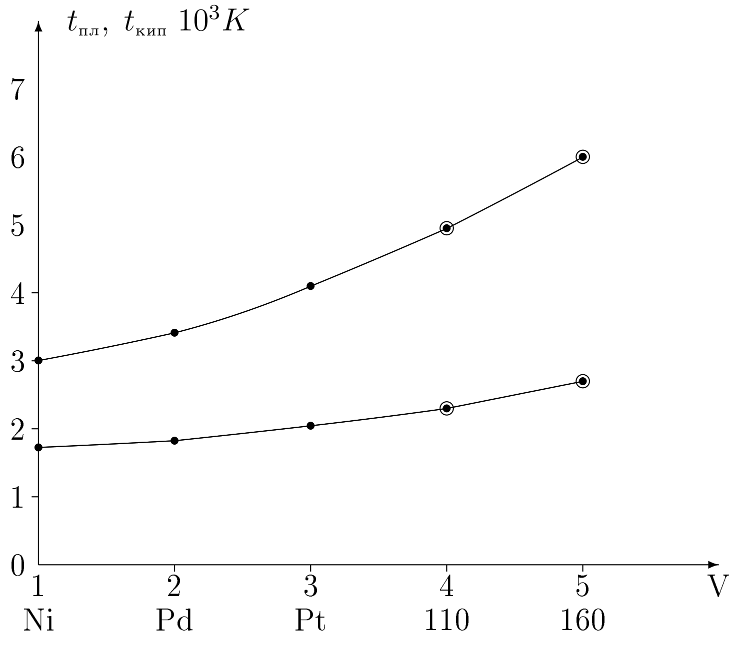


Рис. 22. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов никелеподобного гомологического ряда $(T = 2, T_3 = 1, \sigma_3 = 1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

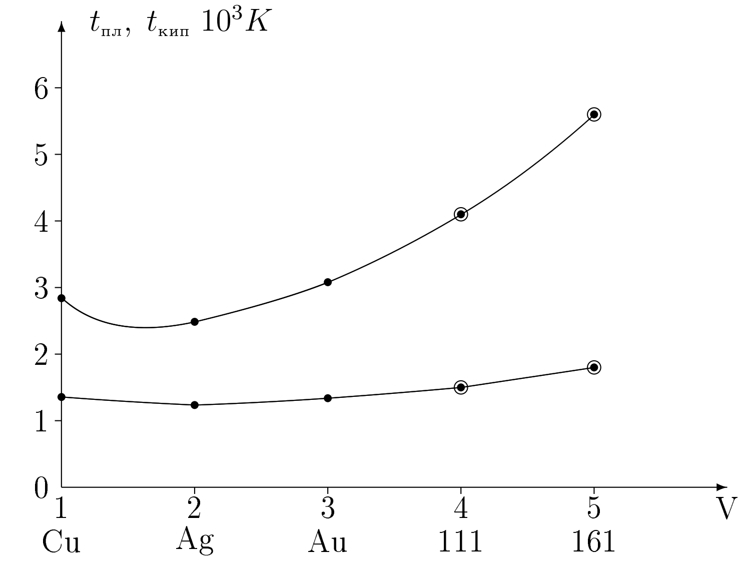


Рис. 23. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов медеподобного гомологического ряда $(T = 2, T_3 = 2, \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

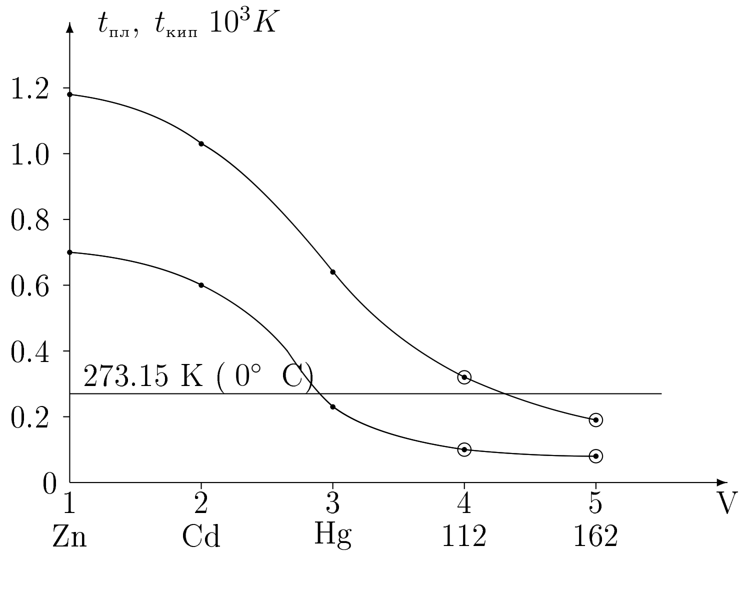


Рис. 24. Зависимость температуры плавления и кипения химических элементов цинкоподобного гомологического ряда $(T = 1, T_3 = 1, \sigma_3 = -1/2)$ от порядкового номера мультиплета V.

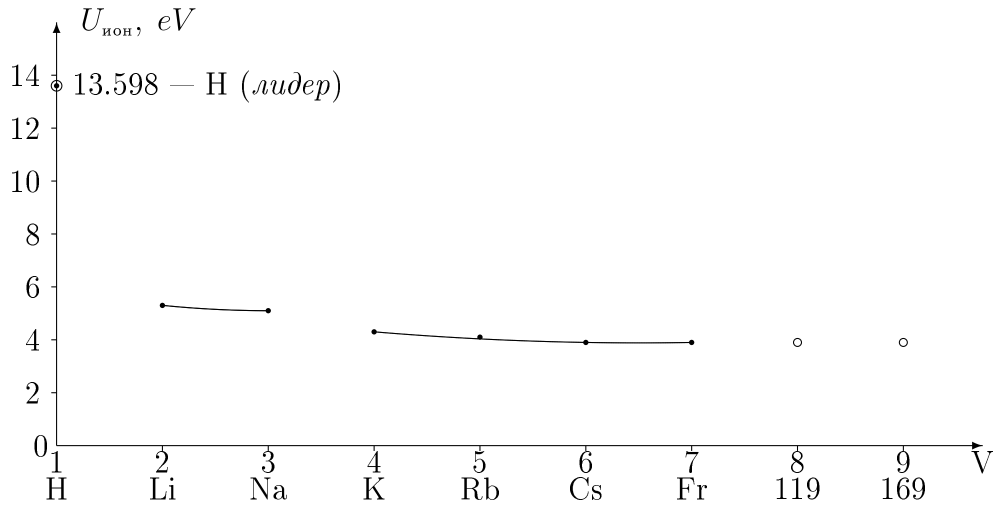


Рис. 25. Зависимость первого потенциала ионизации химических элементов водородного гомологического ряда ($T = 0$, $T_3 = 0$, $\sigma_3 = -1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

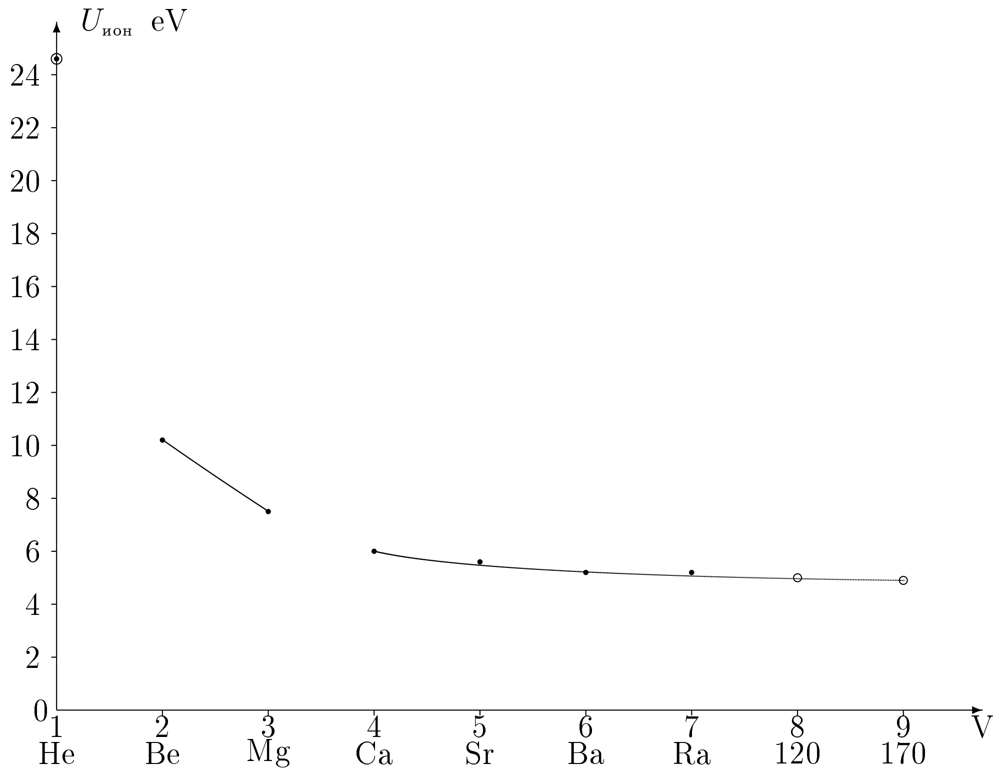


Рис. 26. Зависимость первого потенциала ионизации химических элементов гелиевого гомологического ряда ($T = 0$, $T_3 = 0$, $\sigma_3 = 1/2$) от порядкового номера мультиплета V.

Дмитрий Иванович МЕНДЕЛЕЕВ

Нильс БОР

Литература к Приложению I

[1] *Эйнштейн Альберт.* Доклад на юбилее профессора А.Стодолы, произнесённый в 1929 году. Цитируется по работе [*Марков М.А.* //Наука и жизнь, 1982, № 7.].

[2] *N.Bohr.* Fysik Tiddskr., **19,** 153 (1921);

[3] *Бор Нильс.* Три статьи о спектрах и строении атомов. М.-Пг., ГИЗ, 1923, 23 с.

[4] *Румер Ю.Б., Фет А.И.* Группа Spin(4) и таблица Менделеева //Теорет. и мат. физика. – 1971. – Т. 9, № 2. – С. 203–210.

[5] *Byakov V.M., Kulakov Y.I., Rumer Y.B., Fet A.I.* Group-Theoretical Classification of Chemical Elements. – М., 1976-1977. – (Препринт/АН СССР. Ин-т теоретич. и эксперим. физики; 1967. – Ч.I. – 28 с. – № ITEP-26; 1976. – Ч.II/ – 40 с. – № ITEP-90; 1977. – Ч.III. – 25 с. – № ITEP-7).

[6] *Fet A.I.* The Madelung Numbers and the System of Chemical Elements //Теоретико-групповые методы в физике. Т. 1. Тр. междунар. сем. Звенигород, 1979. – М.: Наука, 1980. – С. 327–336.

[7] *Кулаков Ю.И.* Естественная таблица химических элементов //Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. – Новосибирск. Институт математики СОАН СССР, 1984, С. 82–90.

[8] *Кулаков Ю.И.* Классификация химических элементов на новой основе. //Классическое естествознание и современная наука. – Новосибирск. Изд-во НГУ, 1991, С. 97–118.

[9] Физические величины: Справочник/А.П.Бабичев, Н.А.Бабушкина и др., – М.: Энергоатомиздат, 1991. Передний форзац.

[10] *Фримантл М.* Химия в действии. В двух частях. Ч. 2.; Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. С. 14 - 15.

[11] *Малкин И.А., Манько В.И.* Симметрия атома водорода. //Письма в ЖЕТФ. – 1965. – Т. 2, № 5. – С. 230–234.

[12] *Фет А.И.* Группа симметрии химических элементов. //Математическое моделирование в биологии и химии. Новые подходы. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1992. С. 118 - 203.

Суровая красота Горного Алтая

Приложение II.

Сакрально-алгебраические структуры Симонова

> *Перед нами встаёт вопрос, предстоит ли математике когда-нибудь то, что с другими науками происходит с давних пор, не распадётся ли она на отдельные частные науки, представители которых будут едва понимать друг друга и связь между которыми будет поэтому становиться всё меньше. Я не верю в это и не хочу этого. Математическая наука, на мой взгляд, представляет собой неделимое целое, организм, жизнеспособность которого обусловлена связностью его частей.*
>
> — Давид Гильберт

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

На полпути к terra incognita

Судя по некоторым специфическим особенностям своего творения Великий Архитектор Вселенной всё больше представляется чистым математиком. – *Джеймс Джинс*

Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики. – *Иоганн Кеплер*

Невозможно поверить, что этот порядок и эта организация не являются отражением реального порядка и реальной организации. – *Пьер Дюгем*

Алгебра щедра: она нередко дает больше, чем от нее можно было бы требовать. – *Жан Лерон Д'Аламбер*

Математизация принадлежит к числу первичных видов человеческой деятельности, в которых бурлит глубочайшая человечность, живет стремление к созданию форм духа и выражается мировая гармония. – *Герман Вейль*

В природе существует скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых математических знаков. – *Герман Вейль*

Обобщённое матричное умножение как эквивалентное представление Теории физических структур

А.А. Симонов

(Горно-Алтайский государственный университет)

§ 1. Введение

В данной работе автор изложил подход и основные результаты направления, предложенного в работах [1], [2] В.К. Иониным по поиску решений *физических структур* (далее ФС) на множествах без дополнительной структуры. В действительности, в таком подходе коренным образом менялась и сама постановка задачи. Так, если в подходе Г.Г. Михайличенко фактически искались именно решения ФС на конкретных множествах, то в данном случае задача разбивалась на два этапа. **Первый этап**, это поиск алгебраической структуры, на которой возможно существование решений ФС. **Второй этап**, это уже непосредственно поиск самого решения на найденной алгебраической структуре. Разумеется, наложение некоторых, вполне естественных, ограничений на решения ФС, при помощи которых хочется избавиться от тривиальных решений, может отсекать и вполне нетривиальные решения, но эти ограничения требуются хотя бы для того, чтобы не утонуть в борьбе с большим количеством мелких проблем. При этом искомые алгебраические структуры, с упомянутой оговоркой, остаются достаточно богатыми. После того как уже найдена сама структура, её можно усиливать, налагая какие–либо дополнительные требования. Например, требуя, чтобы данная структура была согласована с дифференциальной структурой или с топологической структурой. Но такое усиление, возможно, лучше проводить именно на последнем этапе, т.к. изначальная работа с такой усиленной структурой заставляет отслеживать множество возникающих в обеих структурах проблем. Не исключено, что взаимопроникновение этих двух, именно различных структур, может приводить к каким-либо специфическим проблемам. По-видимому, именно по этой причине не удалось пробиться в поиске решений ФС в поле комплексных чисел, ограничившись решениями ФС ранга (2, 2) [6] и (3, 2) [7].

Используя же результаты решений на абстрактных множествах, можно строить представления данных решений на конкретных, интересующих множествах. Такое представление сводится к решению некоторых, уже значительно более простых, функциональных уравнений. Это можно посмотреть на примере ФС ранга (3, 2). Не зная алгебраической структуры, требуется решать функциональное уравнение

$$f(i_1,\alpha_1)=g\begin{pmatrix} & f(i_1,\alpha_2)\\ f(i_2,\alpha_1) & f(i_2,\alpha_2)\\ f(i_3,\alpha_1) & f(i_r,\alpha_2)\end{pmatrix}$$

с двумя неизвестными отображениями

$$f\colon B \times B^2 \to B \text{ и } g\colon B^5 \to B.$$

Зная же алгебраическую структуру, требуется в группе $(\cdot, B_0)$ на множестве без нейтрального элемента $B_0 \setminus \{e\}$ решить функциональное уравнение вида:

$$\varphi\Big(\varphi(x)\varphi(y)\Big) = \varphi\Big(x\varphi(y^{-1})\Big)y.$$

Если такое решение имеется, то легко можно записать как репрезентатор, так и верификатор. Выпишем репрезентатор:

$$f(x, \xi, \eta) = \varphi\Big(x(\xi\eta^{-1})\Big)\eta.$$

Выясняется, что решения ФС на двух множествах как однометрические, полученные Г.Г. Михайличенко в его диссертации [10], так и полиметрические геометрии [8], [9], связаны с новыми объектами — обобщенными матрицами. В отличие от обычного матричного умножения, построенного на билинейной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_r) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ry_r$, обобщенное матричное умножение строится на произвольной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \quad y_2, \ldots, y_s)$, в которой не обязательно выполнение равенства $r = s$. При этом с обычным матричным произведением их связывает то, что на некотором подмножестве их произведение — групповое. Иными словами, среди всех матриц одной размерности можно выделить подмножество матриц, на котором такое произведение будет групповым.

Обобщенное матричное умножение может возникать при рассмотрении специальных групп преобразований. Например, когда имеется некоторая абстрактная группа G и подмножества $\Omega_{B^r} \subseteq B^r$ и $\Omega_{B^s} \subseteq B^s$, такие, что они образуют две группы преобразований — (G, Ω_{B^r}), (G, Ω_{B^s}) с двумя действиями: $x'_r = g \circ_1 x_r$ и $x'_s = g \circ_2 x_s$, где $x_r \in \Omega_{B^r}, x_s \in \Omega_{B^s}$. В группе $(\quad, G)$, где $G \subseteq B^{rs}$, действие $x_r \mapsto g \circ_1 x_r$ можно представить в виде r – уравнений:

$$\begin{cases} f(g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1s}, x_1, x_2, \ldots, x_r) = x'_1 \\ f(g_{21}, g_{22}, \ldots, g_{2s}, x_1, x_2, \ldots, x_r) = x'_2 \\ \vdots \\ f(g_{r1}, g_{r2}, \ldots, g_{rs}, x_1, x_2, \ldots, x_r) = x'_r \end{cases}.$$

Данную систему можно формально переписать в виде умножения матрицы на столбец:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{pmatrix}.$$

Действие $x_s \mapsto g \circ_2 x_s$ можно записать при помощи системы из s уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x_1, x_2, \dots, x_s, g_{11}, g_{21}, \dots, g_{r1},) = x'_1 \\ f(x_1, x_2, \dots, x_s, g_{12}, g_{22}, \dots, g_{r2},) = x'_2 \\ \vdots \\ f(x_1, x_2, \dots, x_s, g_{1s}, g_{2s}, \dots, g_{rs},) = x'_s \end{array} \right. ,$$

которые так же, формально, можно представить в виде умножения строки на матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_s \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rs} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_s \end{array} \right).$$

Естественно, что такие группы преобразований являются только частью всех групп преобразований и, возможно, будет легче получить их классификацию.

Далее сформулируем аксиомы ФС для абстрактных множеств и покажем как возникает обобщенное матричное умножение. После чего отдельно сформулируем аксиомы для такого матричного умножения и рассмотрим общие следствия.

§ 2. Физические структуры на абстрактных множествах

1^0. Будем говорить, что на множествах M, N, B действует *физическая структура* (далее ФС) ранга $(r+1, s+1)$, если определены две согласованные функции:
репрезентатор — $f : M \times N \to B$,
и *верификатор* — $g : \Omega_{B^r} \times \Omega_{B^{rs}} \times \Omega_{B^s} \to B$, где $\Omega_{B^r} \times \Omega_{B^{rs}} \times \Omega_{B^s}$ – область определения функции g,
а на подмножествах $\Omega_{M^r} \subseteq M^r, \Omega_{N^s} \subseteq N^s, \Omega_{B^{rs}} \subseteq B^{rs}, \Omega_{B^r} \subseteq B^r, \Omega_{B^s} \subseteq B^s$ выполняются следующие аксиомы:

A1 Для произвольных $(r+1)(s+1)$ репрезентаторов $f_{mn} = f(i_m, \alpha_n)$, построенных по любым кортежам $\langle i_0, i_1, \dots, i_r \rangle \in M \times \Omega_{M^r}$ и $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle \in N \times \Omega_{N^s}$, существует связь, которую можно записать в виде:

$$f_{00} = g \left(\left(\begin{array}{cccc} f_{01} & f_{02} & \dots & f_{0r} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rs} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{r0} \end{array} \right) \right).$$

A2 $(\forall \langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle \in \Omega_{M^r})$, $(\forall \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle \in \Omega_{B^r})$, $(\exists! \ \ \alpha \in N)$: $f(i_k, \alpha) = b_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Аналогично, для второго множества:

A3 $(\forall\langle\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\rangle\in\Omega_{N^s})$, $(\forall\langle b_1,b_2,\ldots,b_s\rangle\in\Omega_{B^s})$, $(\exists!\quad i\in M)$:
$f(i,\alpha_k)=b_k,\quad k\in\{1,2,\ldots,s\}$.

По произвольному кортежу $\langle j_1,j_2,\ldots,j_r\rangle\in\Omega_{M^r}$ построим отображение $F_{j_1j_2\ldots j_r}:N\to\Omega_{B^r}$ в виде: $F_{j_1j_2\ldots j_r}(\alpha)=\Big(f(j_1,\alpha),f(j_2,\alpha),\ldots,f(j_r,\alpha)\Big)$. Тогда, с учетом аксиомы A2, данное отображение будет биекцией. Аналогично для второго множества по кортежу $\langle\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s\rangle\in\Omega_{N^s}$ построим биективное отображение $F_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s}:M\to\Omega_{B^s}$.

Для удобства записи будем использовать сокращение:
$\alpha^n=f(j_n,\alpha)$, $1\le n\le r$ и $i^n=f(i,\gamma_n)$, $1\le n\le s$.

Запишем теперь эквивалентный вид репрезентатора:

$$f(i,\alpha)=f\Big(F^{-1}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s}(i^1,i^2,\ldots,i^s),F^{-1}_{j_1j_2\ldots j_r}(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^r)\Big)=$$

$$=f_{j_1j_2\ldots j_r\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s}(i^1,i^2,\ldots,i^s,\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^r)\equiv\begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \ldots & i^s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^r\end{pmatrix}.$$

Итак, при таком эквивалентном переходе элемент $i\in M$ переходит в строку из s – элементов $(i^1,\ldots,i^s)\in\Omega_{B^s}$, а элемент $\alpha\in N$ переходит в столбец из r – элементов $(\alpha^1,\ldots,\alpha^r)\in\Omega_{B^r}$. Аналогично, при таком эквивалентном переходе кортежи $\langle i_1,i_2,\ldots,i_r\rangle\in\Omega_{M^r}$ и $\langle\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\rangle\in\Omega_{N^s}$ переходят в матрицы из соответствующих множеств:

$$\begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s\\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s\end{pmatrix}\in\Omega_{\Omega^r_{B^s}},\qquad \begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r\end{pmatrix}\in\Omega_{\Omega^s_{B^r}}.$$

Далее будем считать, что справедливо равенство: $\Omega_{\Omega^r_{B^s}}=\Omega_{\Omega^s_{B^r}}=\Omega_{B^{rs}}$. Данное ограничение хотя и носит чисто технический характер, но достаточно сильное и его можно было бы даже сформулировать в виде отдельной аксиомы.

$2^{\,0}$. Введем новые обозначения: $f(j_m,\gamma_n)=\gamma_n^m=j_m^n\equiv e_{mn}$. Матрицу значений $|e_{mn}|$ будем обозначать как E , а репрезентатор записывать в виде:

$$f_E(i^1,i^2,\ldots,i^s,\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^r)=\begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \ldots & i^s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^r\end{pmatrix}.$$

Запишем теперь тождества, получающиеся из построения, с учетом новых обозначений:

$$\begin{pmatrix} e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix} = \alpha^m, \text{ и } \begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \dots & i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1m} \\ e_{2m} \\ \vdots \\ e_{sm} \end{pmatrix} = i^m. \qquad (1)$$

Будем рассматривать формально *матрицу* как двумерный набор из $m \times n$ коэффициентов $|f_{mn}|$. Перемножаться могут матрицы при условии, что число столбцов первой матрицы — s, а число строк второй матрицы — r. Итоговая матрица будет размерности $m \times n$, если перемножались матрицы размерности $m \times s$ и $r \times n$. В качестве произведения двух матриц u_{ms} и v_{rn} будем рассматривать матрицу репрезентаторов, построенных на коэффициентах строки первой матрицы и столбца второй матрицы, т.е.

$$f_{mn} = f_E(u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{ms}, v_{1n}, v_{2n}, \dots, v_{sn}):$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1s} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} & \cdots & v_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частном случае, при перемножении двух матриц размерности $r \times s$ итоговая матрица будет той же размерности так, что такое *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образует группоид.

Покажем справедливость $(\forall I \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall B \in \Omega_{B^{rs}}), (\exists! A \in \Omega_{B^{rs}}) : IA = B$. Если рассмотреть аксиому A1, то кортеж $\langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle \in \Omega_{M^r}$ из этого условия есть не что иное, как матрица $I \in \Omega_{B^{rs}}$; второй кортеж $\langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle \in \Omega_{B^r}$ — это n – тый столбец матрицы B. Тогда элемент $\alpha \in N$ — это n – тый столбец матрицы A. Последовательно пробегая для n от 1 до s, приходим к справедливости доказываемого свойства. Аналогично рассматривается утверждение $(\forall A \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall B \in \Omega_{B^{rs}}), (\exists! I \in \Omega_{B^{rs}}) : IA = B$, но уже с учетом аксиомы A3. Таким образом, приходим к тому, что *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образует квазигруппу.

Рассматривая тождества (1) для репрезентатора f_E, приходим к тому, что матрица E будет как левым, так и правым нейтральным элементом в матричном умножении, следовательно, данная квазигруппа будет лупой.

3^0. Перепишем теперь верификатор в виде:

$$f_{00} = \begin{pmatrix} i_0^1 & i_0^2 & \dots & i_0^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^1 \\ \alpha_0^2 \\ \vdots \\ \alpha_0^r \end{pmatrix} = g \left(\begin{pmatrix} i_0^1 & i_0^2 & \dots & i_0^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r \end{pmatrix} \right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s \\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s \\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^r \end{pmatrix}\right) =$$

$$g\left(\begin{pmatrix} f_{01} & f_{02} & \cdots & f_{0r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rs} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{r0} \end{pmatrix}\right).$$

Рассмотрим теперь $r \times s$ верификаторов, построенных на двух кортежах $\langle i_1, i_2, \ \ldots, i_r\rangle, \langle k_1, k_2, \ldots, k_r\rangle$ из множества Ω_{M^r} и двух кортежах $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s\rangle$, $\langle \beta_1, \beta_2, \ \ldots, \beta_s\rangle$, из множества Ω_{N^s} . С их помощью можно построить верификатор для матриц: $IA = G(IB, KB, KA)$, где I , K и A , B — это записанные в матричном виде соответствующие кортежи $\langle i_1, i_2, \ldots, i_r\rangle$, $\langle k_1, k_2, \ldots, k_r\rangle$, $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s\rangle$, $\langle \beta_1, \beta_2, \ \ldots, \beta_s\rangle$. При этом равенство означает, что равны поэлементно две матрицы. Так, элемент из строки m и столбца n с одной стороны — это

$$(IA)_{mn} = f_E(i_m^1, i_m^2, \ldots i_m^s, \alpha_n^1, \alpha_n^2, \ldots, \alpha_n^r),$$

а с другой стороны:

$$\Big(G(IB, KB, KA)\Big)_{mn} = g\left(\begin{pmatrix} i_m^1 & i_m^2 & \ldots & i_m^s \end{pmatrix} B, KB, K \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^r \end{pmatrix}\right).$$

Таким образом, получаем, что на множествах $\Omega_{B^{rs}}$, состоящих из $r \times s$ матриц определена ФС ранга $(2,2)$ с репрезентатором, определенным как умножение двух матриц из множества $\Omega_{B^{rs}}$, и только что определенным верификатором G .

Покажем теперь, что *матричное умножение* представляет собой групповое умножение.

Воспользуемся полученными данными о том, что определенное выше матричное умножение на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ является лупой, следовательно, если $X, Y \in \Omega_{B^{rs}} \Rightarrow XY \in \Omega_{B^{rs}}$, а также $E \in \Omega_{B^{rs}}$, и рассмотрим кортежи уже из матриц $\langle X, E\rangle$ и $\langle YZ, Y\rangle$. Построим верификатор:

$$X(YZ) = G(XY, E(YZ), EY) = G(XY, YZ, Y).$$

Рассмотрим теперь кортежи $\langle XY, Y\rangle$, $\langle Z, E\rangle$, для которых также построим верификатор:

$$(XY)Z = G((XY)E, YZ, YE) = G(XY, YZ, Y).$$

Сравнивая правые части равенств, приходим к тождеству: $X(YZ) = (XY)Z$. Таким образом получили ассоциативность в лупе, следовательно, *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образует группу.

§ 3. Обобщенное матричное умножение (частный случай)

Рассмотрим обобщение матричного умножения для матриц, построенных над некоторой универсальной алгеброй B (далее просто *алгеброй*), и определим минимальное требование на алгебру, для того чтобы такое обобщенное матричное умножение оставалось групповым. Рассмотрим сначала частный случай для столбец–матриц, после чего перейдем к общему случаю.

4^0. Для квадратных матриц ранга n, построенных над полем R, можно выделить подмножество $M_n \subset R^{n\times n}$ при помощи условия:

$$M_n = \{m \in R^{n\times n} | \det(m) \neq 0\}.$$

На этом подмножестве естественным образом определена группа с обычным матричным умножением $(M_n, \quad)$, построенным по обычному правилу умножения строки на столбец с использованием билинейной функции:

$$f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}, y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj} = (XY)_{ij}. \qquad (2)$$

Попытаемся рассмотреть обобщение матричного умножения, отказавшись от вида функции (2) и рассматривая функцию в наиболее общем виде

$$(XY)_{ij} = f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{is}, y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{rj}),$$

где не обязательно выполнение равенства $s = r$, т.е. матрицы могут быть и не квадратными. Матрицы будем рассматривать не только над полем R, но и над произвольным множеством B, с пока еще не известной алгебраической структурой. Единственным существенным ограничением на функцию $f : B^s \times B^r \to B$ и алгебраическую структуру множества B будет требование, чтобы на некотором подмножестве $\Omega_{r\times s} \subseteq B^{r\times s}$ такое матричное произведение было групповым $(\Omega_{r\times s}, \quad)$. В данной статье рассмотрим случай $s = 1$, таким образом будем рассматривать только матрицы столбцы. Определим, какая минимальная алгебраическая структура индуцируется на множестве B, и как выражается функция f. В конце статьи рассмотрим конкретные примеры на множестве $B \subseteq R$ и $B \subseteq R^2$.

5^0. Рассмотрим обобщение матричного умножения на примере простейшей матрицы: столбец–матрицы, состоящей из двух строк. Матрицы построены над некоторым множеством B, структура которого изначально не определена. Рассмотрим подмножество матриц

$$\Omega_{B^2} = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in B^2 \middle| x_1 \neq x_2 \right\}.$$

Структура множества B будет определяться требованием, при котором на множестве Ω_{B^2} обобщенное матричное умножение задавало бы группу: $(\Omega_{B^2}, \quad)$ –

группа умножения столбец–матриц. Обозначим эту группу буквой M . Умножение столбцов построено на функции вида $f : B \times \Omega_{B^2} \to B$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, y_2) \\ f(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Запишем нейтральный элемент группы M через его компоненты $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$.

Из свойств нейтрального элемента группы $(\forall X \in M) : XE = EX = X$ для функции f следуют следующие соотношения

$$f(e_1, y_1, y_2) = y_1, f(e_2, y_1, y_2) = y_2, f(x, e_1, e_2) = x. \tag{3}$$

Из (3) следует равенство

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Введем функцию $\varphi : B \to B$ следующим образом:

$$f(x, e_2, e_1) = \varphi(x)$$

из (4) для нее следует $\varphi^2(x) = x$ и $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = e_1$.

$6^{\,0}$. Из выражения (3) следует, что на подмножестве

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in \Omega_{B^2} \middle| x_1 \in B \setminus \{e_2\} \right\} \subset \Omega_{B^2}$$

определена подгруппа $M_1 \subset M$, связанная с группой на множестве $B \setminus \{e_2\}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Умножение в группе $(B \setminus \{e_2\}, \cdot)$ определяется в виде

$$x \cdot y = f(x, y, e_2). \tag{6}$$

Обозначим эту группу через G_1 . Легко проверить, что если M — группа, то и G_1 — группа. Записывать умножение в группе G_1 будем, как правило, без точки $xy = x \cdot y$. Для элемента $x \in G_1$ обратный элемент будем обозначать в виде $x^{-1} \in G_1$.

Надо обратить внимание, что выражением (6) , в действительности, определена частичная операция

$$(\cdot) : B \times (B \setminus \{e_2\}) \to B, \tag{7}$$

так как элемент x может принимать любое значение из множества B , а не только из множества, на котором действует группа — $B \setminus \{e_2\}$. В этом случае эта частичная операция отличается от групповой еще одним тождеством:

$$(\forall x \in B \setminus \{e_2\}) : e_2 \cdot x = e_2. \tag{8}$$

Аналогичным образом на подмножестве

$$\left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \Omega_{B^2} \middle| x_2 \in B \setminus \{e_1\} \right\} \subset \Omega_{B^2}$$

также определена подгруппа $M_2 \subset M$, которая связана уже с группой на множестве $B \setminus \{e_1\}$. Обозначим эту группу через G_2 с операцией $(\cdot_2)$. Две группы G_1 и G_2 изоморфны и функция φ как раз и задает этот изоморфизм:

$$\begin{pmatrix} x \\ e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(y) \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ \varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ \varphi(y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ \varphi\left(\varphi(x) \cdot_2 \varphi(y)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi\left(\varphi(x) \cdot_2 \varphi(y)\right) \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

$7^{\,0}$. С учетом свойств (3), (4), (5) и при условии $y_2 \neq e_2$ можно записать следующие равенства:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 y_2^{-1} \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 y_2^{-1} \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(y_1 y_2^{-1}) \\ e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\varphi(y_1 y_2^{-1}) \\ x_2\varphi(y_1 y_2^{-1}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi\left(x_1\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) \\ \varphi\left(x_2\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi\left(x_1\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) y_2 \\ \varphi\left(x_2\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) y_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом пришли к выражению функции f через частичную операцию (7) и функцию φ в виде:

$$f(x_1, y_1, y_2) = \varphi\left(x_1\varphi(y_1 y_2^{-1})\right) y_2. \tag{9}$$

Рассмотрим аналогичные рассмотренным выше равенства для случая $y_1 \neq e_2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ y_2 y_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ y_2 y_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 y_1^{-1} \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 y_1^{-1} \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \varphi(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(y_2 y_1^{-1}) \\ e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x_1)\varphi(y_2 y_1^{-1}) \\ \varphi(x_2)\varphi(y_2 y_1^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi\left(\varphi(x_1)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) \\ \varphi\left(\varphi(x_2)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi\left(\varphi(x_1)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) y_1 \\ \varphi\left(\varphi(x_2)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) y_1 \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что функцию f можно записать еще и в виде:

$$f(x_1, y_1, y_2) = \varphi\left(\varphi(x_1)\varphi(y_2 y_1^{-1})\right) y_1. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), приходим к тому, что функция φ для случая $y \neq e_1, e_2$ должна удовлетворять следующему функциональному уравнению:

$$\varphi\left(x\varphi(y^{-1})\right) y = \varphi\left(\varphi(x)\varphi(y)\right). \tag{11}$$

Рассматривая полученное уравнение для случая $x^{-1} = \varphi(y^{-1})$, с учетом свойств функции φ и свойства (8) частичной операции (7), приходим к тому, что для функции $\rho(x) = \varphi(x^{-1})$ должно выполняться тождество:

$$\rho^3 = id. \tag{12}$$

$8^{\,0}$. Если в уравнении (11) произвести замену переменных $x = \varphi(x'), y = \varphi(y'^{-1})$, а затем воспользоваться свойством (12) функции ρ, то получим следующий вид уравнения:

$$\varphi\Bigg(\varphi(x')\Big(\varphi(y')\Big)^{-1}\Bigg)\varphi(y'^{-1}) = \varphi(x'y'^{-1}),$$

который появляется в работе П. Кона [3], в лемме 5.1. теоремы о вложении колец в тела. Помимо данного функционального уравнения, для того чтобы группа G_1 была мультипликативной группой некоторого тела, согласно этой леммы, должны выполняться еще два требования:

$$\varphi(yxy^{-1}) = y\varphi(x)y^{-1}, \text{ при } x \neq e_1$$

и элемент $a = \varphi(x^{-1})x\Big(\varphi(x)\Big)^{-1}$ не должен зависеть от выбора x. Первое требование приводит к существованию левосторонней дистрибутивности. Из последнего требования следует, что аддитивная операция должна быть ассоциативной и коммутативной. В нашем случае дополнительные ограничения не требуются.

$9^{\,0}$. При помощи произвольной биекции $L : B \to B$, для которой справедливо $L(e_2) = e_2$, можно ввести две операции:

$$x \oplus y = \varphi\left(x(L(y))^{-1}\right) y, \ x \ominus y = \varphi\left(xy^{-1}\right) L(y),$$

связанные между собой соотношением

$$(x \oplus y) \ominus y = x, \ \ (x \ominus y) \oplus y = x.$$

В случае, если биекция L определяется при помощи произвольного элемента $a \in B \setminus \{e_2\}$ в виде $L(x) = ax$, тогда для определенных выше операций справедлива правосторонняя дистрибутивность:

$$(x \oplus y)\, z = xz \oplus yz, \ \ (x \ominus y)\, z = xz \ominus yz.$$

В случае $a = e_1$ обе операции $\oplus$ и $\ominus$ совпадают.

$10^{\,0}$. Простейший пример — это $B = R$, $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $a = -1$, умножение в группе G_1 – обычное умножение, $\varphi(x) = 1 - x$. Операции $\oplus$ и $\ominus$ будут обычными операциями сложения и вычитания.

В качестве менее тривиального примера можно рассмотреть алгебраическую структуру на множестве $B = \{(x, y) \in R^2 | x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ с выделенными элементами $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 0), a = (-1, 0)$. Умножение определено в виде:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1^n),$$

где n – произвольное целое число. Взятие обратного определено в виде:

$$(x_1, x_2)^{-1} = (x_1^{-1}, -x_2 x_1^{-1-n}),$$

функцию φ и операцию сложения можно записать в виде:

$$\varphi(x_1, x_2) = (1 - x_1, (-1)^n x_2), \qquad (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Из получившегося вида операции сложения очевидно, что данная алгебраическая система с двумя бинарными операциями $(B, \oplus, \cdot)$ связана с кольцом, особенно, если в качестве множества B рассматривать R^2. В отличие от кольца, в данной системе присутствует только правосторонняя дистрибутивность, левосторонней дистрибутивности нет:

$$Z\Big(X \oplus Y\Big) \ominus \Big(ZX \oplus ZY\Big) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ z_2\Big((x_1 + y_1)^n - x_1^n - y_1^n\Big) \end{array} \right),$$

где $X = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right), Y = \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right), Z = \left(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right).$

В качестве второго примера рассмотрим группу с умножением:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2),$$

и унарными операциями:

$$(x_1, x_2)^{-1} = (x_1^{-1}, -x_2 x_1^{-1}), \qquad \varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1),$$

выделенными элементами:

$$e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1) \text{ и } a = (-1,0),$$

бинарную операцию сложения можно записать в виде

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_2 y_1 - x_1 y_2, \frac{y_2(x_2 y_1 - x_1 y_2) - x_1}{y_1}).$$

В последнем примере операция сложения некоммутативна и неассоциативна, но при этом по прежнему имеется правосторонняя дистрибутивность.

$11^{\,0}$. Перейдем теперь к рассмотрению более общего случая, когда рассматриваются столбец–матрицы с большим числом строк. В действительности, когда мы рассматривали вывод функции (9), на которой построено такое матричное умножение, мы свели задачу выражения функции для столбец–матриц из двух строк через функцию умножения столбец–матриц из одной строки. Производя аналогичный вывод для столбец–матриц из трех строк, придем к следующему виду:

$$f(x, y_1, y_2, y_3) = \varphi_2\Bigg(f\Big(x, \varphi_2(y_1 y_3^{-1}), \varphi_2(y_2 y_3^{-1}), e_3\Big)\Bigg) y_3,$$

где функция $\varphi_2(x) = f(x, e_3, e_2, e_1)$. При этом частичная операция $x \cdot y = f(x, y, e_2, e_3)$ действует уже на множестве $(\cdot) : B \times \Big(B \setminus \{e_2, e_3\}\Big) \to B$, так что появляется еще одно тождество $(\forall x \in B \setminus \{e_2, e_3\}) : e_3 \cdot x = e_3$.

Дальнейшее обобщение на случай столбец–матриц с произвольным числом строк становится очевидным. При помощи вновь появляющейся функции

$$\varphi_{n-1}(x) = f(x, e_n, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_1)$$

и расширяемой частичной операции $x \cdot y = f(x, y, e_2, \ldots, e_n)$, производим запись функции порядка n через функцию меньшего порядка — $n-1$.

Если ввести переобозначение $\varphi_1 = \varphi$, тогда можно записать, что из определения функций φ_k следует:

$$\begin{cases} \varphi_k(e_i) = e_i, & \text{при условии } i \neq 1, k+1 \\ \varphi_k(e_1) = e_{k+1}, \varphi_k(e_{k+1}) = e_1. \end{cases} \qquad (13)$$

Таким образом, функции $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ являются образующими симетической группы подстановок φ множества $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. При этом функции $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ удовлетворяют соотношению (11). Группа φ задает группу преобразований множества B. При $n > 2$ существует подгруппа $\varphi' = \varphi \cap Aut(G_1)$ автоморфизмов группы G_1. В качестве образующих группы φ' можно выбрать множество $\{\sigma_i = \varphi_i \varphi_{i+1} \varphi_i | i \in \{1, \ldots, n-2\}\}$. По образующим группы φ' можно восстановить образующие группы φ: $\varphi_{i+1} = \sigma_i \varphi_1 \sigma_i$, так что алгебраическая структура множества B характеризуется частичной операцией G_1, унарной операцией φ и образующими группы φ' .

$12^{\,0}$. В качестве примера столбец–матрицы из трех строк по прежнему можно рассмотреть множество вещественных чисел, но с добавлением в качестве элемента "бесконечного числа": $B = R \cup \{\omega\}$. Рассматривая в качестве элементов $e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = \omega$, приходим к тому, что частичная мультипликативная операция совпадает с обычным умножением, функции $\varphi_1(x) = 1 - x, \sigma_1(x) = \frac{1}{x}$ $\Big(\varphi_2(x) = \frac{x}{x-1}\Big)$. Операция сложения будет совпадать с обычным сложением. Если в качестве нейтрального элемента в матричной группе — E рассмотреть другие значения, например $e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = -1$, то придем к эквивалентному представлению:

$$x \cdot y = \frac{x+y}{1+xy}, \varphi_1(x) = \frac{1-x}{3x+1} \; , \sigma_1(x) = -x \; , \Big(\varphi_2(x) = \frac{1+x}{3x-1}\Big).$$

В случае $a = \omega$ аддитивная операция получается в виде:

$$x \oplus y = \frac{3xy + x + y - 1}{x + y - xy + 3}.$$

В качестве примера на множестве $B \subseteq R^2$ приведем алгебраическую классификацию обобщенного матричного умножения для столбец–матриц на основе результатов, полученных Г.Г. Михайличенко[89] [11]. Для этого сначала определим эквивалентное матричное умножение столбцов.

Будем говорить, что две функции $f_1 : B_1 \times \Omega_{B_1^n} \to B_1$ и $f_2 : B_2 \times \Omega_{B_2^n} \to B_2$ задают одно и тоже матричное умножение, если найдутся такие три биекции: $\lambda : B_1 \to B_2, \theta : B_1 \to B_2, \chi : \Omega_{B_1^n} \to \Omega_{B_2^n}$, при которых справедливо

$$f_2\Big(\lambda(x), \chi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big) = \theta\Big(f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big).$$

В работах Г.Г. Михайличенко [11] классификация рассматривается с точностью до локальной эквивалентности.

Алгебраическая классификация строится на двух, с точностью до локального изоморфизма, группах[90]:

$$G_1(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1, x_2y_2), \; G_2(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2).$$

Для того, чтобы выражение для функции φ было проще, будем использовать запись локально изоморфной группы для группы G_1 :

$$G_1'(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1y_1 + \varepsilon x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

[89]Хотя в указанной работе автор классифицировал введенные им полиметрические геометрии, но можно показать, что эта задача эквивалентна задаче классификации обобщенного матричного умножения для столбец–матриц.

[90]Которые в дальнейшем переходят в частичные операции.

где параметр ε может принимать два значения: 0 или -1.

Для столбец–матриц с двумя строками существует пять[91] неэквивалентных решений:

1.) $G_1, \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, 1-x_2)$,

2.) $G_1', \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, -x_2)$,

3.) $G_2, \varphi(x_1,x_2) = (x_2, x_1)$,

4.) G_2, $n \in Z, n \neq 1$, $\varphi(x_1,x_2) = \left(\left(1-x_1^{\frac{1}{n-1}}\right)^{1-n}, (-1)^n \frac{x_2 x_1^{-\frac{n}{n-1}}}{\left(1-x_1^{\frac{1}{n-1}}\right)^n}\right)$,

5.) G_2, $\varphi(x_1,x_2) = (\frac{x_1}{x_1-1}, \frac{x_2-\ln|x_1|}{x_1^2}\left(\frac{x_1-1}{x_1}\right)^2 + \ln|\frac{x_1-1}{x_1}|)$.

Для столбец–матриц с тремя строками существует три неэквивалентных решения:

1.) $G_1, \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, 1-x_2), \sigma_1(x_1,x_2) = (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1})$,

2.) $G_1', \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, -x_2)$, при $\varepsilon = -1$

$$\sigma_1(x_1,x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2+x_1^2}, \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}),$$

3.) $G_2, \varphi(x_1,x_2) = (x_2, x_1), \sigma_1(x_1,x_2) = (x_1, 1-x_1-x_2)$.

Для столбец–матриц с четырьмя строками остается только одно неэквивалентное решение:

1.) $G_1, \varphi(x_1,x_2) = (1-x_1, 1-x_2)$,

$$\sigma_1(x_1,x_2) = (x_1^{-1}, x_2 x_1^{-1}), \sigma_2(x_1,x_2) = (x_1 x_2^{-1}, x_2^{-1}).$$

§ 4. Обобщенное матричное умножение (общий случай)

$13^{\,0}$. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, будем рассматривать произвольные матрицы. В качестве произведения двух матриц $A = ||a_{ij}||$ и $B = ||b_{jk}||$ будем рассматривать матрицу $C = ||c_{ik}||$, построенную при помощи функции $f : \Omega_{B^s} \times \Omega_{B^r} \to B$, где $\Omega_{B^s} \subseteq B^s$ и $\Omega_{B^r} \subseteq B^r$. При этом перемножаться могут матрицы размера $(r \times s)$. Под рангом матрицы будем понимать ее размер, например, "*ранг матрицы* — $(r \times s)$ ". Если мы рассматриваем матрицу–столбец или матрицу–строку, то, если это не будет приводить к недоразумениям, вместо $(r \times 1)$ или $(1 \times s)$ будем писать (r) или (s), говоря о ранге таких матриц. Элемент c_{ij}, стоящий в i – той строке и j – том столбце, есть функция f от s элементов i – той строки матрицы A и r элементов j – того столбца матрицы B:

$$c_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}, b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{rj}).$$

[91]Если решение 2) с параметром ε и 5) с произвольным $n \in Z$ принимать как только два неэквивалентных решения.

В матрице $A \in \Omega_{B^{rs}}$ для обозначения i – той строки будем писать A_{i*} , а для обозначения j – того столбца будем писать A_{*j} . В этих обозначениях можно элемент c_{ij} записать в виде произведения строки на столбец: $c_{ij} = A_{i*}B_{*j}$.

Потребуем, чтобы в множестве всех матриц размера $(r \times s)$ — B^{rs} существовало подмножество матриц $\Omega_{B^{rs}}$, для которых данное умножение было групповым. Усиливая данное требование, будем считать, что множество *всех строк* $\left\{A_{i*} \middle| i \in \{1,2,\dots,r\}, A \in \Omega_{B^{rs}}\right\}$ совпадает с множеством Ω_{B^s} , а множество *всех столбцов* $\left\{A_{*j} \middle| j \in \{1,2,\dots,s\}, A \in \Omega_{B^{rs}}\right\}$ совпадает с множеством Ω_{B^r} .

Для множеств B и $\Omega_{B^{rs}}$ будем считать, что всегда выполняется условие: $(\forall x \in B), (\exists A \in \Omega_{B^{rs}}) : a_{ij} = x$. Это означает, что для любого элемента x из B всегда найдется такая матрица A из множества $\Omega_{B^{rs}}$, что её элемент $a_{ij} = x$. Если это не так, тогда всегда можно перейти к подмножеству $B_x = B \setminus \{x\}$, для которого справедливо $\Omega_{B^{rs}} \subseteq B_x^{rs} \subset B^{rs}$, на котором и будем работать.

Для произвольной матрицы A можно рассмотреть матрицы $A_{i\updownarrow j}$ и $A_{m\leftrightarrow n}$, отличающиеся от исходной только перестановкой двух строк i и j или перестановкой двух столбцов m и n соответственно.

Будем говорить, что четверка $\Big(B, (r,s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ задает обобщенное матричное умножение, если выполняются следующие аксиомы[92]:

A1 $(\forall A \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall C_{*j} \in \Omega_{B^r}), (\exists! B_{*j} \in \Omega_{B^r}) : AB_{*j} = C_{*j}$;

A2 $(\forall B \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall C_{i*} \in \Omega_{B^s}), (\exists! A_{i*} \in \Omega_{B^s}) : A_{i*}B = C_{i*}$;

A3 $(\forall A, B, C \in \Omega_{B^{rs}}) : (AB)C = A(BC)$;

A4 $(\forall i, j \in \{1,2,\dots,r\}) : A \in \Omega_{B^{rs}} \Leftrightarrow A_{i\updownarrow j} \in \Omega_{B^{rs}}$;

A5 $(\forall i, j \in \{1,2,\dots,s\}) : A \in \Omega_{B^{rs}} \Leftrightarrow A_{i\leftrightarrow j} \in \Omega_{B^{rs}}$.

Два обобщенных матричных умножения $\Big(B, (r,s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ и $\Big(C, (r,s), g, \Omega_{C^{rs}}\Big)$ естественно считать эквивалентными, если существуют такие биекции $\theta : B \to C$, $\chi : \Omega_{B^s} \to \Omega_{C^s}$ и $\lambda : \Omega_{B^r} \to \Omega_{C^r}$, для которых выполняется тождество:

$$\theta\Big(f(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_r)\Big) = g\Big(\chi(x_1, x_2, \dots, x_s), \lambda(y_1, y_2, \dots, y_r)\Big),$$

при этом отображение $\theta^{rs} : \Omega_{B^{rs}} \to \Omega_{C^{rs}}$ будет биективным.

14^{0} . На матричное умножение $\Big(B, (r,s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ можно посмотреть, как на умножение двух столбцов $\Big(B^s, (r,1), F, \Omega_{\Omega^r_{B^s}}\Big)$, где *элемент* $A_{i*} \in B^s$ пред-

[92]Очевидно, что с учетом определения множеств $\Omega_{B^{rs}}, \Omega_{B^r}, \Omega_{B^s}$ из аксиом A1, A2 следуют аксиомы групп $(\forall A, B \in \Omega_{B^{rs}}), (\exists! X, Y \in \Omega_{B^{rs}}) : AX = B, YA = B$.

ставлен *строкой*, а умножение

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{r*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1*} \\ B_{2*} \\ \vdots \\ B_{r*} \end{pmatrix}$$

построено на функции: $F_s : \Omega_{B^s} \times \Omega^r_{B^s} \to \Omega_{B^s}$, которая связана с функцией $f : B^s \times B^r \to B$ следующим образом: $F_s(A_{i*}, B_{1*}, B_{2*}, \dots, B_{r*}) = A_{i*}B$.

Аналогично можно рассмотреть и умножение двух строк $\left(B^r, (1,s), F_r, \Omega_{\Omega^s_{B^r}}\right)$, где *элемент* $A_{*i} \in B^r$ представлен *столбцом*, с умножением

$$AB = \begin{pmatrix} A_{*1} & A_{*2} & \cdots & A_{*s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{*1} & B_{*2} & \cdots & B_{*s} \end{pmatrix},$$

построенным на функции $F_r : \Omega^s_{B^r} \times \Omega_{B^r} \to \Omega_{B^r}$, такой, что справедливо:

$$F(A_{*1}, A_{*2}, \cdots, A_{*s}, B_{*i}) = AB_{*i}.$$

Для множеств $\Omega_{\Omega^r_{B^s}}$, $\Omega_{\Omega^s_{B^r}}$ справедливо равенство $\Omega_{\Omega^r_{B^s}} = \Omega_{\Omega^s_{B^r}} = \Omega_{B^{rs}}$.

На примере матрицы–столбца, состоящего из двух строк, можно увидеть, что совершенно естественно вводится понятие транспонированной матрицы. Действительно, умножение двух столбцов записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, y_2) \\ f(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Введем функцию $f^t(y_1, y_2, x_1) = f(x_1, y_1, y_2)$, которая будет определять умножение матриц–строк:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^t(y_1, y_2, x_1) & f^t(y_1, y_2, x_2) \end{pmatrix}.$$

Умножение, очевидно, будет также групповым, и удовлетворять всем, определенным ранее, аксиомам. Для обозначения транспонированной матрицы будем писать:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T.$$

При этом умножения связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\right)^T.$$

Данный параграф показывает, что без ограничения общности многие утверждения можно формулировать для матриц – строк или матриц – столбцов.

$15^{\,0}$. Рассмотрим несколько свойств обобщенного матричного умножения, которые имеют место и в обычном матричном умножении.

В силу того, что матричное умножение — групповое, то в нем присутствует нейтральный элемент $E \in \Omega_{B^{rs}}$ со свойствами $(\forall A \in \Omega_{B^{rs}}) : AE = EA = A$. Запишем матрицу E через ее элементы $E = ||e_{ij}||$, тогда это равенство можно переписать в виде:

$$\begin{array}{l} f(e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{is}, a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{rj}) = E_{i*}A_{*j} = a_{ij}, \\ f(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}, e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{rj}) = A_{i*}E_{*j} = a_{ij}. \end{array} \tag{14}$$

Из первого соотношения видно, что для того чтобы из матрицы A получить матрицу с переставленными между собой строками i и j, необходимо слева ее умножить на единичную матрицу с переставленными строками i и j — $E_{i\updownarrow j}$. Для перестановки двух столбцов матрицу необходимо умножить справа на матрицу $E_{i\leftrightarrow j}$ с переставленными столбцами:

$$A_{i\updownarrow j} = E_{i\updownarrow j}A \text{ и } B_{i\leftrightarrow j} = BE_{i\leftrightarrow j}. \tag{15}$$

Далее будем рассматривать только матрицы — столбцы, т.к. полученные утверждения легко, с учетом параграфа 14^0, интерпретировать для матриц — строк и для произвольных матриц. Простейшим следствием из (15) является тождество:

$$E_{i\updownarrow j}E_{i\updownarrow j} = E, \tag{16}$$

которое говорит только о том, что если дважды переставить две строки, то все встанет на свои места. Утверждение достаточно очевидное, так же, как и то, что элементы множества $\{E_{1\updownarrow 2}, E_{1\updownarrow 3}, \dots, E_{1\updownarrow r}\}$ являются образующими группы перестановок строк. В этом случае перестановку любых двух строк можно записать через образующие:

$$E_{i\updownarrow j} = E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}. \tag{17}$$

В силу того, что $E_{i\updownarrow j} = E_{j\updownarrow i}$, тогда с учетом (16) и (17) получаем тождество:

$$E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j} = E. \tag{18}$$

Рассматриваемые образующие $\{E_{1\updownarrow i}\}$ естественным образом порождают $r-1$ преобразований $\{\varphi_i\}$ множества Ω_{B^s} следующим образом:

$$(\forall A_{j*} \in \Omega_{B^s}) : \varphi_i(A_{j*}) = A_{j*}E_{1\updownarrow i}, \tag{19}$$

которые являются образующими симметрической группы преобразований множества Ω_{B^s}. Для (19) можно записать тождество:

$$\varphi_i(E_{1*}) = E_{i*}, \varphi_i(E_{i*}) = E_{1*} \text{ и } \varphi_i(E_{j*}) = E_{j*} \text{ для всех } j \neq 1, i. \tag{20}$$

Перепишем тождества (16) и (18) для отображений $\{\varphi_i\}$:

$$\varphi_i\varphi_i = id, (\varphi_i\varphi_j)^3 = id. \tag{21}$$

$16^{\,0}$. Рассмотрим теперь несколько лемм, связанных с эквивалентностью матричного умножения.

Лемма 1 *Если обобщенные матричные умножения* $\Big(B, (r,s), f, \Omega_{B^{rs}}\Big)$ *и* $\Big(C, (r,s), g, \Omega_{C^{rs}}\Big)$ *эквивалентны, тогда соответствующие им группы* $(\Omega_{B^{rs}}, \cdot)$ *и* $(\Omega_{C^{rs}}, \odot)$ *изоморфны.*

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что биекции $\theta : B \to C$, $\chi : \Omega_{B^s} \to \Omega_{C^s}$ и $\lambda : \Omega_{B^r} \to \Omega_{C^r}$ порождают биекции θ^{rs} , χ^r , λ^s из множества $\Omega_{B^{rs}}$ в множество $\Omega_{C^{rs}}$ следующим образом:

$$\theta^{rs}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(x_{11}) & \theta(x_{12}) & \dots & \theta(x_{1s}) \\ \theta(x_{21}) & \theta(x_{22}) & \dots & \theta(x_{2s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta(x_{r1}) & \theta(x_{r2}) & \dots & \theta(x_{rs}) \end{pmatrix},$$

$$\chi^{r}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1s}) \\ \chi(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2s}) \\ \vdots \\ \chi(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rs}) \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{s}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \left(\lambda\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{r1} \end{pmatrix} \quad \lambda\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{r2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \lambda\begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \\ \vdots \\ x_{rs} \end{pmatrix} \right).$$

Приходим к тому, что две группы $(\Omega_{B^{rs}}, \cdot)$ и $(\Omega_{C^{rs}}, \odot)$ изотопны, следовательно, с учетом второй теоремы Алберта [5], они изоморфны.

Верно или нет обратное утверждение, пока неизвестно, но если изоморфизм можно записать через матричное произведение $\Psi(X) = A \cdot X \cdot B$, так, что: $\Psi(X) \cdot \Psi(Y) = \Psi(X \odot Y)$, тогда соответствующие функции f и g , определяющие матричное умножение, будут эквивалентны. Действительно, можно записать:

$$X_{i*} \odot Y_{*j} = \Psi^{-1}(\Psi(X_{i*}) \cdot \Psi(Y_{*j})) = (X_{i*} \cdot B) \cdot (A \cdot Y_{*j}) = X'_{i*} \cdot Y'_{*j}.$$

Таким образом, преобразование $\chi_B : \Omega_{B^s} \to \Omega_{B^s}$ задается умножением строки на матрицу B , а преобразование $\lambda_A : \Omega_{B^r} \to \Omega_{B^r}$ задается умножением матрицы A на столбец.

В случае, когда $B = A^{-1}$, мы приходим к автоморфизму и, как следствие — к тому, что преобразования $\chi_{A^{-1}}, \lambda_A$ задают группу движения для функции f :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_r) = f\Big(\chi_{A^{-1}}(x_1, x_2, \dots, x_s), \lambda_A(y_1, y_2, \dots, y_r)\Big).$$

Рассмотрим еще одну лемму:

Лемма 2 *Матрица–столбец ранга (r) из множества* Ω_{B^r} *не может содержать совпадающих элементов.*

Из свойства (14) следует, что в единичной матрице E не может быть двух совпадающих элементов, так как это приводит к неоднозначности и противоречию. Действительно, пусть, например, $e_m = e_n$, тогда

$$x_m = f(e_m, x_1, x_2, \dots, x_r) = f(e_n, x_1, x_2, \dots, x_r) = x_n.$$

Из этого следует, что в подгруппе $(\ , \Omega_{B^r}^{(i)})$ среди всех строк в столбце больше не встречается элемента e_i, кроме как в i – той строке, следовательно, $(\forall k \in \{1, 2, \dots i-1, i+1, \dots, r\}) : e_k \notin B_i$.

Если данное утверждение справедливо для произвольного элемента e_i из единичной матрицы E, тогда это будет справедливо и для произвольной матрицы A, так как мы всегда можем перейти к изоморфной группе $(\cdot, \Omega_{B^r}) \to (\odot, \Omega_{B^r})$, в которой матрица A будет нейтральным элементом.

$17^{\,0}$. Рассмотрим теперь некоторые свойства матриц — столбцов, рассматривая матричные умножения $\Big(B, (r,1), f, \Omega_{B^r}\Big)$.

В множестве Ω_{B^r} выделим подмножество матриц, для которых i – тая строка совпадает с i – той строкой единичной матрицы E. Для такого подмножества введем специальное обозначение: $\Omega_{B^r}^{(i)} = \{A \in \Omega_{B^r} | a_i = e_i\}$. Если данное свойство выполнено для нескольких строк $i_1, i_2, \dots, i_k$, тогда $\Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)} = \Omega_{B^r}^{(i_1)} \bigcap \Omega_{B^r}^{(i_2)} \bigcap \dots \bigcap \Omega_{B^r}^{(i_k)}$.

Теорема 1 *На подмножестве* $\Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ *естественным образом определена подгруппа* $(\Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}, \cdot)$ *группы* $(\Omega_{B^r}, \cdot)$.

Из свойства (14), которое в нашем случае можно записать в виде

$$f(e_i, x_1, x_2, \dots, x_r) = x_i$$

следует, что $(\forall X, Y \in \Omega_{B^r}^{(i)})$, их произведение, так же будет из этого множества $XY \in \Omega_{B^r}^{(i)}$, так как $x_i = y_i = e_i$, откуда, в силу определения множества $\Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$, следует, что если $X, Y \in \Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$, то и их произведение $XY \in \Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$.

Из определения множества $\Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ следует, что нейтральный элемент $E \in \Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$.

Обратный элемент X^{-1} для произвольного $X \in \Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ также должен быть из множества $\Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$. В противном случае, если $X^{-1} \notin \Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$, тогда из условия (14) также следует, что $XX^{-1} \notin \Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$. Это означает $XX^{-1} \neq E$, что противоречит тому, что $(\Omega_{B^r}, \cdot)$ — группа.

Ассоциативность в подгруппе $(\Omega_{B^r}^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}, \cdot)$ также следует из ассоциативности в группе $(\Omega_{B^r}, \cdot)$.

Перейдем теперь к рассмотрению произвольных матриц и по аналогии введем обозначение для подмножества $\Omega_{B^{rs}}^{(|i)}$ множества матриц $\Omega_{B^{rs}}$, если в i – том столбце будет i – тый столбец матрицы E: $\Omega_{B^{rs}}^{(|i)} = \{X \in \Omega_{B^{rs}} | X_{*i} = E_{*i}\}$. Аналогичным же образом введем и подмножество:

$$\Omega_{B^{rs}}^{(i_1,i_2,\ldots,i_k|j_1,j_2,\ldots,j_m)} = \Omega_{B^{rs}}^{(i_1)} \bigcap \Omega_{B^{rs}}^{(i_2)} \bigcap \ldots \bigcap \Omega_{B^{rs}}^{(i_k)} \bigcap \Omega_{B^{rs}}^{(|j_1)} \bigcap \Omega_{B^{rs}}^{(|j_2)} \bigcap \ldots \bigcap \Omega_{B^{rs}}^{(|j_m)}.$$

С учетом параграфа 14^0 и Теоремы 1 следует:

Теорема 2 *На подмножестве* $\Omega_{B^{rs}}^{(i_1,i_2,\ldots,i_k|j_1,j_2,\ldots,j_m)}$ *естественным образом определена подгруппа* $(\Omega_{B^{rs}}^{(i_1,i_2,\ldots,i_k|j_1,j_2,\ldots,j_m)}, \cdot)$ *группы* $(\Omega_{B^r}, \cdot)$.

Действительно, если на подмножествах $\Omega_{B^{rs}}^{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}$ и $\Omega_{B^{rs}}^{(|j_1,j_2,\ldots,j_m)}$ определены подгруппы, то и их пересечение также будет подгруппой.

$18^{\,0}$. Для простоты записи множества $\Omega_{B^{rs}}^{(1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,r|1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,s)}$ будем его обозначать в виде $\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}}$, где черта над скобкой означает, что в левой части скобки имеются все значения от 1 до r, за исключением i – того значения, так же, как и в правой части скобки имеются все значения от 1 до s за исключением j – того значения.

Вернемся вновь к рассмотрению матрицы–столбца. Для группы, порождаемой подгруппой $(\ ,\Omega_{B^r}^{\overline{(i)}})$, состоящей только из одной неединичной i – той строки, введем специальное обозначение на групповую операцию $(\cdot_i)$ и обозначение на множество в виде B_i так, что справедливо:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \cdot_i y_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Omega_{B^r}^{\overline{(i)}} = \left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \in \Omega_{B^r} \middle| x_i \in B_i \right\}.$$

Для элемента x в группе $(\cdot_i, B_i)$ обратный элемент, когда это будет удобно, будем обозначать $(x)_i^{-1}$ или $E_i(x)$ так, что $x \cdot_i (x)_i^{-1} = x \cdot_i E_i(x) = e_i$. Аналогично, при рассмотрении матриц $\Omega_{B^{rs}}$ соответствующие подгруппы $(\ ,\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}})$ порождают группы $(\cdot_{ij}, B_{ij})$.

Таким образом, приходим к тому, что при помощи определения

$$x \cdot_i y_i = f(x, e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, y_i, e_{i+1} \ldots, e_r)$$

задаются две операции: групповая $(\cdot_i) : B_i \times B_i \to B_i$ и частичная $(\cdot_i) : B \times B_i \to B$. Причем для частичной операции $(\cdot_i, B)$, для произвольных $e_k \neq e_i$, справедливо $e_k \cdot_i x = e_k$. Оставим обозначение в этих операциях совпадающим, а отличать их будем по используемому множеству.

$19^{\,0}$. В следующих параграфах, для того чтобы использовать полученный результат как для матриц–столбцов, так и для произвольных матриц, будем иногда рассматривать более общую задачу, когда умножение матриц–столбцов построено не на одной функции f, а на r функциях $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ таких, что $f_i : \Omega_i \times \Omega_{B^r} \to B$, где $\Omega_i \subseteq B$.

Действительно, когда мы рассматриваем подгруппу, построенную на таких $r \times s$ матрицах, которые отличаются от единичной только в первом столбце — $(\,, \Omega_{B^{rs}}^{(\,|\overline{1})})$, тогда это эквивалентно такой, более общей задаче, когда

$$f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_r) = f(x, e_{i2}, , e_{i3}, \ldots, e_{is}, y_1, y_2, \ldots, y_r).$$

В этом случае $\Omega_i = B_{i1}$.

Произведением двух матриц X и Y будет матрица $C = XY$, элементы которой запишутся в виде: $c_i = f_i(x_i, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. На такие матрицы легко расширяется доказательство теорем 1 и 2. В этом случае у нас возникает уже не r частичных операций, а r^2:

$$x \circ_{ij} y_j = f_i(x, e_1, e_2, \ldots, e_{j-1}, y_j, e_{j+1} \ldots, e_r).$$

При этом $x \circ_{ii} y = x \cdot_i y$, и выполняются соотношения: $e_i \circ_{ij} x = e_i$, $x \circ_{ij} e_j = x$ и $(x \circ_{ij} y) \circ_{ij} z = x \circ_{ij} (y \cdot_j z)$, имеется и правый обратный: $(x \circ_{ij} y) \circ_{ij} (y)_j^{-1} = x \circ_{ij} e_j = x$.

$20^{\,0}$. Ответим на вопрос — когда две группы $(\cdot_{ij}, B_{ij})$ и $(\cdot_{mn}, B_{mn})$, которые возникают в подгруппах, построенных на таких матрицах, которые совпадают с единичной матрицей, за исключением одного элемента, стоящего в $i(m)$ – той строке и $j(n)$ – том столбце — $\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}} (\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(m|n)}})$, будут изоморфны?

Теорема 3 *Если имеется такой автоморфизм $\Psi_{ij,mn} : \Omega_{B^{rs}} \to \Omega_{B^{rs}}$, при котором подмножество $\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}}$ отображается в подмножество $\Omega_{B^{rs}}^{\overline{(m|n)}}$, тогда соответствующие группы $(\cdot_{ij}, B_{ij})$ и $(\cdot_{mn}, B_{mn})$ будут изоморфны.*

Автоморфизм $\Psi_{ij,mn}$ порождает изоморфизм $\psi_{ij,mn} : B_{ij} \to B_{mn}$ такой, что:

$$\Psi_{ij,mn} \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1j} & \ldots & e_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{i1} & \ldots & x_{ij} & \ldots & e_{is} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{r1} & \ldots & e_{rj} & \ldots & e_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1n} & \ldots & e_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \ldots & \psi_{ij,mn}(x_{ij}) & \ldots & e_{ms} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{r1} & \ldots & e_{rn} & \ldots & e_{rs} \end{pmatrix}.$$

Из определения автоморфизма

$$(\forall X, Y \in \Omega_{B^{rs}}^{\overline{(i|j)}}) : \Psi_{ij,mn}(XY) = \Psi_{ij,mn}(X)\Psi_{ij,mn}(Y)$$

следует, что $(\forall x, y \in B_{ij}) : \psi_{ij,mn}(x \cdot_{ij} y) = \psi_{ij,mn}(x) \cdot_{mn} \psi_{ij,mn}(y).$

Как следствие данной теоремы для матриц–столбцов, все её группы $(\cdot_i, B_i)$ будут изоморфны, так как имеется автоморфизм $\Psi_{i,m} : X \mapsto E_{i\updownarrow m} X E_{i\updownarrow m}$, удовлетворяющий условию теоремы. Данный автоморфизм, с учетом определения (19) для отображений φ_i и выражения (17), порождает изоморфизм $\varphi_i \circ \varphi_m \circ \varphi_i : B_i \to B_m$. Это легко увидеть на примере матрицы–столбца из двух строк. Автоморфизм

$$\Psi_{1,2} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

порождает изоморфизм $\varphi_2 : B_1 \to B_2$:

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}.$$

В качестве второго примера можно привести множество квадратных матриц $\Omega_{B^{rr}}$, таких, что их нейтральная матрица E состоит только из двух элементов e_1 и e_2, причем на диагонали стоит один элемент e_1, а все недиагональные элементы равны e_2 (как для обычных матриц 1 и 0). В этом случае все группы $(\cdot_{_{ij}}, B_{ij})$ сводятся к двум группам $(\cdot_{_{11}}, B_{11})$ и $(\cdot_{_{12}}, B_{12})$, все остальные им изоморфны.

Действительно, из построения нейтрального элемента E в группе матриц $(\ , \Omega_{B^{rs}})$ следует, что перестановка двух строк i и j так же, как и перестановка двух столбцов i и j, задается одной и той же матрицей $E_{i\updownarrow j} = E_{i\leftrightarrow j}$. Тогда автоморфизм, задающий перестановку двух диагональных элементов x_{11} и x_{kk} матрицы X, запишется в виде: $\Psi_{11,kk} : X \mapsto E_{1\updownarrow k} X E_{1\leftrightarrow k}$. Автоморфизм, задающий перестановку недиагональных элементов x_{12} и x_{ij} матрицы X, запишется в виде: $\Psi_{12,ij} : X \mapsto E_{2\updownarrow j} E_{1\updownarrow i} X E_{1\leftrightarrow i} E_{2\leftrightarrow j}$.

$21^{\,0}$. Посмотрим теперь на примере матрицы–столбца с n–строками, какими свойствами обладает изоморфизм φ_i и как с его помощью выражается отображение $f : B \times \Omega_{B^n} \to B$.

Рассмотрим сначала более общую задачу из параграфа $19^{\,0}$, когда умножение матриц построено на n функциях $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, таких, что $f_i : \Omega_i \times \Omega_{B^n} \to B$. Для этой задачи построим рекуррентную формулу, определяющую вид функций $\{f_i\}$.

Теорема 4 *Если для матриц–столбцов, состоящих из n строк с матричным умножением, построенных на n функциях $\{f_i\}$, выполняются аксиомы 1–4 и существуют*

а) матрицы $B_{1i} \in \Omega_{B^n}^{\overline{(1i)}}$ со всеми единичными элементами за исключением двух: в первой строке — $b_1(1i)$ и i–той — $b_i(1i)$,

б) биекции $\omega_{i1} : \Omega_i \setminus \{e_i\} \to \Omega_1 \setminus \{e_1\}$,

для которых справедливо $(\forall y \in \Omega_i \setminus \{e_i\})$: $b_i(1i) \circ_{_{i1}} \omega_{i1}(y) = y$, тогда функцию f_i, для случая $y_i \neq e_i$ можно записать через частичные операции $(\circ_{_{k1}})$ и функции ω_{k1} и $\varphi_{i(k1)}(x) = f_i(x, b_1(1k), e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}, b_k(1k), e_{k+1}, \ldots, e_n)$ в рекуррентном виде:

$f_i(x, y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, \ldots, y_{n-k}^{(k-1)}, e_{n+1-k}, \ldots, e_n) =$
$= \varphi_{i((n+1-k)1)} \Big(f_i(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_{n-k}^{(k)}, e_{n+1-k}, \ldots, e_n) \Big) \circ_{i1} \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)})$, *где* $y_i^{(k)} = \varphi^{-1}_{i((n+1-k)1)} \Big(y_i^{(k-1)} \circ_{i1} E_1 \circ \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)}) \Big)$ *и* $y_j^{(0)} = y_j, i \in \{1, 2, \ldots, n-k\}$.

Рассмотрим матрицы A_{1k} , обратные к матрицам B_{1k} , и с их помощью построим обратные функции

$$\varphi^{-1}_{i(k1)}(x) = f_i(x, a_1(1k), e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}, a_k(1k), e_{k+1}, \ldots, e_n),$$

при этом $\varphi^{-1}_{k(k1)}(b_k(1k)) = e_k$. То, что эти функции будут действительно обратными, следует из равенства $XE = XB_{1k}A_{1k} = XA_{1k}B_{1k}$. Из принадлежности $A_{1k}, B_{1k} \in \Omega^{\overline{(1k)}}_{B^n}$ следует $\varphi_{k(k1)}(e_i) = \varphi^{-1}_{k(k1)}(e_i) = e_i$ при $i \neq k, 1$.

Введем обозначение для матрицы $C_{m1} \in \Omega^{\overline{(1)}}_{B^n}$, которая отличается от единичной матрицы только первым элементом, равным $\omega_{m1}(y_m)$, соответственно, у обратной матрицы C^{-1}_{m1} первый элемент будет $E_1 \circ \omega_{m1}(y_m)$. Очевидно, что для произвольной матрицы Y справедливо равенство

$$Y = YC^{-1}_{m1}C_{m1} = YC^{-1}_{m1}A_{1m}B_{1m}C_{m1}.$$

Распишем теперь покомпонентно данное равенство для случая $m = n$, с учетом свойств частичных операций $(\circ_{ij}, B)$, рассмотренных в параграфе 19 ^{0} :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \circ_{n1} \omega_{n1}(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ a_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi^{-1}_{1(n1)} (y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n)) \\ \varphi^{-1}_{2(n1)} (y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n)) \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = Y^{(1)}B_{1n}C_{n1}.$$

Где введено обозначение $Y^{(1)} = YC^{-1}_{n1}A_{1n}$ или построчно:

$$y_i^{(1)} = \varphi^{-1}_{i(n1)} \Big(y_i \circ_{i1} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \Big).$$

Таким образом, при переходе от матрицы Y к $Y^{(1)}$ мы произвели такое преобразование, при котором последний элемент стал единичным – e_n. Произведя подобное преобразование, далее мы перейдем от $Y^{(1)}$ к $Y^{(2)}$ так, что $Y^{(2)} = Y^{(1)}C^{-1}_{(n-1)1}A_{1(n-1)}$. На k–том шагу придем к $Y^{(k)} = Y^{(k-1)}C^{-1}_{(n+1-k)1}A_{1(n+1-k)}$. Данное равенство при построчной записи будет выглядеть следующим образом:

$$y_i^{(k)} = \varphi^{-1}_{i((n+1-k)1)}\Big(y_i^{(k-1)} \circ_{i1} E_1 \circ \omega_{(n+1-k)1}(y^{(k-1)}_{n+1-k})\Big) \text{ и } y_j^{(0)} = y_j, i \in \{1, 2, \ldots, n-k\}.$$

Перейдем теперь к матричному умножению и распишем его покомпонентно:

$$XY = XY^{(1)}B_{1n}C_{n1} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n) \\ f_2(x_2, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n) \\ \vdots \\ f_n(x_n, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{1(n1)}\Big(f_1(x_1, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n)\Big) \cdot_1 \omega_{n1}(y_n) \\ \varphi_{2(n1)}\Big(f_2(x_2, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n)\Big) \circ_{21} \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ \varphi_{n(n1)}\Big(f_n(x_n, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n)\Big) \circ_{n1} \omega_{n1}(y_n) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, пришли к выражению:

$$f_i(x_i, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varphi_{i(n1)}\Big(f_i(x_i, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n)\Big) \circ_{i1} \omega_{n1}(y_n).$$

Аналогичным образом, если мы рассмотрим данное умножение после k–того преобразования, когда $Y^{(k)} \in \Omega_{B^n}^{(n-k, n+1-k, \ldots, n-1)}$, то получим следующее равенство: $XY^{(k-1)} = XY^{(k)}B_{1(n+1-k)}C_{(n+1-k)1}$, которое при построчной записи будет выглядеть в виде:

$$f_i(x, y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, \ldots, y_{n-k}^{(k-1)}, e_{n+1-k}, \ldots, e_n) =$$
$$= \varphi_{i((n+1-k)1)}\Big(f_i(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_{n-k}^{(k)}, e_{n+1-k}, \ldots, e_n)\Big) \circ_{i1} \omega_{(n+1-k)1}(y^{(k-1)}_{n+1-k}).$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема сформулирована в частном виде. Во первых, при доказательстве, рассматривая последовательность преобразования матрицы $Y \to Y^{(1)} \to Y^{(2)} \to \ldots \to Y^{(n-1)}$, мы рассматривали только случай, когда $Y^{(1)} \in \Omega_{B^n}^{(n)}, Y^{(2)} \in \Omega_{B^n}^{(n,n-1)}, \ldots, Y^{(n-1)} \in \Omega_{B^n}^{\overline{(1)}}$, хотя мы можем рассмотреть любую последовательность $Y^{(1)} \in \Omega_{B^n}^{(i_n)}, Y^{(2)} \in \Omega_{B^n}^{(i_n, i_{n-1})}, \ldots, Y^{(n-1)} \in \Omega_{B^n}^{\overline{(i_1)}}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — произвольная перестановка $1, 2, \ldots, n$.

Во вторых, первоначально мы наложили условие: $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}) : y_i \neq e_i$. С другой стороны, если это не так, например, m из n значений совпадает с единичными $y_i = e_i$ где $i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$, тогда, с учетом предыдущего замечания, мы приходим к формуле, полученной в теореме, но с условием, что

$Y^{(m)} = Y$, вместо $Y^{(0)} = Y$.

$22^{\,0}$. Покажем теперь, что если на множестве B с частичной операцией $(\cdot_1, B)$ определена функция φ , для которой справедливо тождество (11), тогда на этом множестве функция $f : B \times \Omega_{B^2} \to B$ вида

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{cases} \varphi\left(x \cdot_1 \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 & \text{при } y_2 \neq e_2 \\ x \cdot_1 y_1 & \text{при } y_2 = e_2 \end{cases} \qquad (22)$$

определяет обобщенное матричное умножение матриц–столбцов из двух строк.

Выполнение Аксиомы 1 означает, что для произвольных $X, Z \in \Omega_{B^2}$ существует только одна такая матрица Y , для которой справедливо равенство: $XY = Z$. Рассмотрим покомпонентно данное равенство, которое приводит к системе из двух уравнений:

$$\varphi\left(x_1 \cdot_1 \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 = z_1,$$

$$\varphi\left(x_2 \cdot_1 \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 = z_2.$$

Из второго уравнения выделим выражение:

$$\varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right) = (x_2)_1^{-1} \cdot_1 \varphi\left(z_2 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)$$

которое подставим в первое:

$$\varphi\left(x_1 \cdot_1 (x_2)_1^{-1} \cdot_1 \varphi\left(z_2 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 =$$

$$= \varphi\left(\varphi\left(x_1 \cdot_1 (x_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 E_1 \circ \varphi\left(z_2 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2 = z_1.$$

Полученное равенство сначала преобразуем к виду:

$$E_1 \circ \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 \varphi\left(x_1 \cdot_1 (x_2)_1^{-1}\right) = \varphi\left(z_2 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right),$$

а затем получим окончательное выражение:

$$y_2 = E_1 \circ \varphi\left(E_1 \circ \varphi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 \varphi\left(x_1 \cdot_1 (x_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2.$$

Для того чтобы получить выражение для y_1 , достаточно произвести замену $z_1 \leftrightarrow z_2$ и $x_1 \leftrightarrow x_2$.

Выполнение Аксиомы 2 достаточно очевидное, так как функцию (22) достаточно легко разрешить относительно первого аргумента:

$$x_i = \varphi\left(z_i \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 E_1 \circ \varphi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right).$$

Для того чтобы показать выполнение Аксиомы 3, упростим сначала выражение

$$\varphi\left(\varphi\left(x \cdot_1 y\right) \cdot_1 E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right)\right),$$

для этого воспользуемся основным свойством функции φ — (11):

$$\varphi\left(\varphi\left(x \cdot_1 y\right) \cdot_1 \varphi \circ \varphi \circ E_1 \circ \varphi\left(z \cdot_1 y\right)\right) =$$

$$= \varphi\,(x \cdot_{_1} y \cdot_{_1} \varphi \circ E_1 \circ \varphi \circ E_1 \circ \varphi\,(z \cdot_{_1} y)) \cdot_{_1} \varphi \circ E_1 \circ \varphi\,(z \cdot_{_1} y) =$$
$$= \varphi\,(x \cdot_{_1} E_1\,(z)) \cdot_{_1} \varphi \circ E_1 \circ \varphi\,(z \cdot_{_1} y)\,.$$

Таким образом, пришли к тождеству:

$$\varphi\Big(\varphi\,(x \cdot_{_1} y) \cdot_{_1} E_1 \circ \varphi\,(z \cdot_{_1} y)\Big) = \varphi\Big(x \cdot_{_1} E_1\,(z)\Big) \cdot_{_1} \varphi \circ E_1 \circ \varphi\,(z \cdot_{_1} y)\,. \qquad (23)$$

Рассмотрим теперь выполнение ассоциативности $(XY)Z = X(YZ)$ на примере первой строки. Левую часть равенства можно записать в виде:

$$\varphi\left(\varphi\left(x_1 \cdot_{_1} \varphi\left(y_1 \cdot_{_1} (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_{_1} y_2 \cdot_{_1} \varphi\left(z_1 \cdot_{_1} (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_{_1} z_2.$$

Воспользовавшись равенством $\varphi^2 = id$ и тождеством (11), приходим к выражению:

$$\varphi\left(x_1 \cdot_{_1} \varphi\left(y_1 \cdot_{_1} (y_2)_1^{-1}\right) \cdot_{_1} \varphi \circ E_1\left(y_2 \cdot_{_1} \varphi\left(z_1 \cdot_{_1} (z_2)_1^{-1}\right)\right)\right) \cdot_{_1} \varphi\left(y_2 \cdot_{_1} \varphi\left(z_1 \cdot_{_1} (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_{_1} z_2 \qquad (24)$$

Рассмотрим теперь первую строку правой части равенства $(XY)Z = X(YZ)$:

$$\varphi\left(x_1 \cdot_{_1} \varphi\left(t_1 \cdot_{_1} (t_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_{_1} t_2, \qquad (25)$$

где

$$t_1 = \varphi\left(y_1 \cdot_{_1} \varphi\left(z_1 \cdot_{_1} (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_{_1} z_2 \quad \text{и} \quad t_2 = \varphi\left(y_2 \cdot_{_1} \varphi\left(z_1 \cdot_{_1} (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_{_1} z_2.$$

Воспользуемся теперь тождеством (23) и распишем выражение:

$$\varphi\,(t_1 \cdot_{_1} E_1(t_2)) = \varphi\left(\varphi\Big(y_1 \cdot_{_1} \varphi(z_1 \cdot_{_1} E_1(z_2))\Big) \cdot_{_1} E_1\Big(\varphi\Big(y_2 \cdot_{_1} \varphi(z_1 \cdot_{_1} E_1(z_2))\Big)\Big)\right) =$$
$$= \varphi\Big(y_1 \cdot_{_1} E_1(y_2)\Big) \cdot_{_1} \varphi \circ E_1 \circ \varphi\Big(y_2 \cdot_{_1} \varphi(z_1 \cdot_{_1} E_1(z_2))\Big).$$

Подставляя полученное выражение в (25) и замечая, что последнее слагаемое выражения (24) совпадает с t_2 , приходим к справедливости ассоциативности для первой строки. Так как первая строка ничем в наших рассуждениях не выделена, приходим к справедливости Аксиомы 3.

Выполнение Аксиомы 4 следует из симметрии построения матричного умножения. Аксиома 5 для матриц–столбцов отсутствует. Таким образом, приходим к тому, что на множестве B с частичной операцией $(\cdot_{_1}, B)$ и функцией φ , удовлетворяющей тождеству (11), функция вида (22) определяет матричное умножение для матриц–столбцов из двух строк.

$23^{\,0}$. При помощи биекции $L\colon B \to B_L,$ для которой выполняется $B_L \subseteq B, L(e_2) = e_2$, построим операцию

$$x \oplus y = \begin{cases} \varphi(x \cdot_{_1} E_1 \circ L(y)) \cdot_{_1} y, & \text{при } y \neq e_2 \\ x, & \text{при } y = e_2 \end{cases}\,. \qquad (26)$$

Очевидно, что данная операция является группоидом с нейтральным элементом — " e_2 ". Действительно, из определения операции (26) следует, что " e_2 " является правым нейтральным, с другой стороны, он является и левым нейтральным:

$$e_2 \oplus x = \varphi(e_2 \cdot_1 E_1 \circ L(x)) \cdot_1 x = \varphi(e_2) \cdot_1 x = e_1 \cdot_1 x = x.$$

В данном группоиде биекция L определяет взятие левого обратного:

$$L(x) \oplus x = \varphi(L(x) \cdot_1 E_1 \circ L(x)) \cdot_1 x = \varphi(e_1) \cdot_1 x = e_2 \cdot_1 x = e_2.$$

Покажем теперь, что для операции (26) для случая $x \in B, y, z \in B_{e_2}$ выполняется соотношение обобщающее правостороннюю дистрибутивность:

$$(x \oplus y) \cdot_1 z = x \cdot_1 E_1 \circ L(y) \cdot_1 L(y \cdot_1 z) \oplus y \cdot_1 z. \tag{27}$$

Действительно, можно записать:

$$(x \oplus y) \cdot_1 z = \varphi(x \cdot_1 E_1 \circ L(y)) \cdot_1 y \cdot_1 z = \varphi(x \cdot_1 E_1 \circ L(y) \cdot_1 L(y \cdot_1 z) \cdot_1 E_1 \circ L(y \cdot_1 z)) \cdot_1 y \cdot_1 z,$$

откуда следует равенство (27).

Легко проверить, что если биекция определена в виде:

$$L(x) = \begin{cases} a \cdot_1 x, & \text{при } x \neq e_2 \\ x, & \text{при } x = e_2 \end{cases}, \tag{28}$$

где $a \in B \setminus \{e_1, e_2\}$, тогда получается обычная правосторонняя дистрибутивность. Далее будем рассматривать биекцию L только в таком виде.

В группоиде можно определить операцию "вычитания справа":

$$(x \oplus y) \ominus y = x. \tag{29}$$

Рассмотрим сначала случай $y \neq e_2$. Введя обозначение $(x \oplus y) = t$, выразим элемент x через элементы t, y в виде: $x = \varphi(t \cdot_1 E_1(y)) \cdot_1 L(y)$. Теперь операцию "вычитания справа" можно записать в виде:

$$x \ominus y = \begin{cases} \varphi(x \cdot_1 E_1(y)) \cdot_1 L(y), & \text{при } y \neq e_2 \\ x, & \text{при } y = e_2 \end{cases}. \tag{30}$$

Помимо соотношения (29), можно записать и соотношение

$$(x \ominus y) \oplus y = x. \tag{31}$$

Действительно, для случая $x = e_2$ и/или $y = e_2$ утверждение тривиальное. Рассмотрим случай, когда $x, y \neq e_2$, тогда:

$$(x \ominus y) \oplus y = \varphi\Big(\varphi(x \cdot_1 E_1(y)) \cdot_1 L(y) \cdot_1 E_1 \circ L(y)\Big) \cdot_1 y = x.$$

Операцию "вычитания" можно выразить через аддитивную операцию, действительно, для случая $y \neq e_2$ можно записать:

$$x \ominus y = \varphi(x \cdot_1 E_1(y)) \cdot_1 L(y) = x \cdot_1 E_1(y) \cdot_1 L^2(y) \oplus L(y). \tag{32}$$

Рассмотрим теперь выражение (26) для частного случая $y = e_1$ и $x = t\cdot_1 L(e_1) = t\cdot_1 a$, откуда следует выражение для функции φ:

$$\varphi(t) = t\cdot_1 a \oplus e_1. \tag{33}$$

Воспользуемся соотношениями (33), (27) и запишем функцию (9), для случая (28) в виде:

$$f(x, y_1, y_2) = x\cdot_1 (y_1 \ominus y_2) \oplus y_2. \tag{34}$$

$24^{\,0}$. Рассмотрим теперь, при каких условиях операция $\oplus$ будет групповой.

Лемма 3 *В алгебре* $(B, \cdot_1, ^{-1}, \varphi, e_1, e_2)$ *для случая* $x, y, z \in B \setminus \{e_2\}$ *и* $x \neq L(y), y \neq L(z)$ *следующие три утверждения эквивалентны:*

1) $L(x\oplus y)\oplus x = L(y)$,

2) $L(x)\oplus(x\oplus y) = y$,

3) $(x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z)$.

4)

$$L\Big(\varphi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y))\cdot_1 y\Big)\cdot_1 E_1 \circ L(x) = \varphi\Big(L(y)\cdot_1 E_1(x)\Big). \tag{35}$$

Для доказательства леммы воспользуемся выражением (26) и покажем, что каждое из первых трех утверждений эквивалентно четвертому.

Используя определение операции $\oplus$ — (26), распишем первое равенство, затем умножим справа обе части равенства на $E_1(x)$ и, действуя функцией φ, приходим к соотношению (35).

Рассматривая второе равенство, сначала распишем его, а потом умножим обе части равенства справа на $E_1\Big(\varphi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y))\cdot_1 y\Big)$, далее преобразуем правую часть равенства, воспользовавшись тождеством (12):

$$E_1 \circ \varphi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y)) = \varphi \circ E_1 \circ \varphi(L(y)\cdot_1 E_1(x)),$$

действуя теперь на обе части равенства функцией $E_1 \circ \varphi$, получим равенство (35).

Рассмотрим теперь ассоциативность. Распишем обе части равенства, затем умножим их слева на $E_1(x)$ и подействуем функцией φ. Получим новое равенство, правую часть которого преобразуем, воспользовавшись тождеством (11), после чего обе части равенства умножим справа на $E_1(y\cdot_1 E_1 \circ L(z))$ и, действуя функцией $E_1 \circ \varphi$, вновь приходим к соотношению (35) после переобозначения $y \to x$ и $z \to y$.

Производя построения в обратную сторону из соотношения (35), можно прийти к любым первым трем.

Лемма доказана.

Лемма 4 *Если алгебра* $(\oplus, B)$ *является полугруппой, тогда она является и группой.*

Действительно, если $(\oplus, B)$ — полугруппа, тогда можно рассмотреть ассоциативность для тройки $L^2(x), L(x), x$, так, что $L^2(x) \oplus (L(x) \oplus x) = (L^2(x) \oplus L(x)) \oplus x$, откуда следует тождество $L^2 = id$, которое означает равенство левого и правого обратных. Следовательно, $(\oplus, B)$ — группа.

Лемма 5 *Если в группе $(\oplus, B)$ элемент a, определяющий биекцию (28), такой, что $(\forall x \in B \setminus \{e_2\})$: $axa = x$, тогда группа $(\oplus, B)$ будет абелевой.*

Для группы справедливо соотношение:

$$L(x) \oplus (x \oplus y) = y.$$

Распишем левую часть, с учетом определения операции $\oplus$ для случая $x, y \neq e_2$. После умножения этого равенства справа на элемент $E_1(y)$ перенесем левый сомножитель в правую часть. С учетом равенства $E_1 \circ \varphi \circ E_1 = \varphi \circ E_1 \circ \varphi$ и действия на обе части функцией $E_1 \circ \varphi$, приходим к равенству:

$$\varphi\Big(\varphi(x\cdot_1 E_1(a\cdot_1 y))\cdot_1 y\cdot_1 E_1(x)\Big) = a\cdot_1 y\cdot_1 E_1(x).$$

Подействуем теперь на обе части функцией φ, и, умножая обе части справа на x, получим соотношение:

$$\varphi(x\cdot_1 E_1(a\cdot_1 y))\cdot_1 y = \varphi(y\cdot_1 E_1(a\cdot_1 x))\cdot_1 x,$$

которое, с учетом определения аддитивной операции, можно записать в виде:

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Очевидно, оно будет справедливо и для случая $x = e_2$ и/или $y = e_2$. Таким образом, пришли к коммутативности групповой операции.

$25^{\,0}$. Примеры для столбец–матриц мы рассмотрели в параграфах 10^0 и 12^0, рассмотрим теперь пример для произвольных матриц.

Можно показать, что задача, возникающая в теории физических структур, развиваемая Кулаковым Ю.И. [4] и Михайличенко Г.Г. приводит к обобщенному матричному умножению. Последнему в работе [10] удалось решить проблему, которую можно интерпретировать как доказательство на множестве вещественных чисел наличия только двух матричных произведений для квадратных матриц, с точностью до эквивалентных преобразований (группового изоморфизма матричных групп G_1 и G_2). Первая группа $(\cdot_1, G_1)$ построена на обычной билинейной функции, вторая группа $(\cdot_2, G_2)$ построена на функции вида:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_r) = \sum_{i \leq r}(x_i - x_r)(y_i - y_r) + x_r + y_r.$$

Если рассматривать обычное матричное сложение, то первая группа связана с матричным кольцом, для второй группы это не справедливо, так как не выполняется дистрибутивность:

$$X * (Y + Z) - X * Y - X * Z = \begin{pmatrix} -x_{1r} & -x_{1r} & \dots & -x_{1r} \\ -x_{2r} & -x_{2r} & \dots & -x_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{rr} & -x_{rr} & \dots & -x_{rr} \end{pmatrix},$$

$$(X+Y)*Z - X*Z - Y*Z = \begin{pmatrix} -z_{r1} & -z_{r2} & \dots & -z_{rr} \\ -z_{r1} & -z_{r2} & \dots & -z_{rr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z_{r1} & -z_{r2} & \dots & -z_{rr} \end{pmatrix}.$$

Данное матричное умножение можно построить при помощи обычного матричного умножения. Рассмотрим такое построение на примере квадратных матриц с тремя строками.

Рассмотрим новую матричную группу на примере матрицы 3×3, т.к. в ней уже видны все основные свойства. Построим матричное умножение на базе матрицы B, в которой все элементы, кроме последней строки, будут нулевыми, а последняя строка будет единичной:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что для нее справедливо $BB = B$. Построим еще одну матрицу $A = E - B$, где E – единичная матрица. Произведение матриц A и B будет нулевой матрицей:

$$AB = BA = O.$$

Построим еще одну матрицу[93]:

$$C = AA^T = E - B - B^T + BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

для которой будет справедливо: $C^T = C, CB^T = O, BC = O$.

Определим теперь произведение матриц в виде:

$$X \cdot Y = XCY + XB + B^T Y.$$

I – нейтральная матрица в таком произведении со свойствами

$$B^T I = O, I + B = BI.$$

В отличие от единичной матрицы, у нее в последней строке стоит ноль вместо единицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для X существует обратная матрица $\bar{X}$. Условием её существования является неравенство нулю определителя

$$\det(CX + B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(XC + B^T) \neq 0.$$

[93] Где B^T транспонированная матрица B.

Если два определителя $\det(CX+B)\neq 0$ и $\det(CY+B)\neq 0$, тогда и у произведения двух матриц $X\cdot Y$ определитель так же не будет равен нулю. Действительно, с учетом свойств матриц можно записать:

$$CX\cdot Y+B=C(XCY+XB+B^TY)+B=$$

$$=CXCY+CXB+B=(CX+B)\,(CY+B)\,.$$

Следовательно

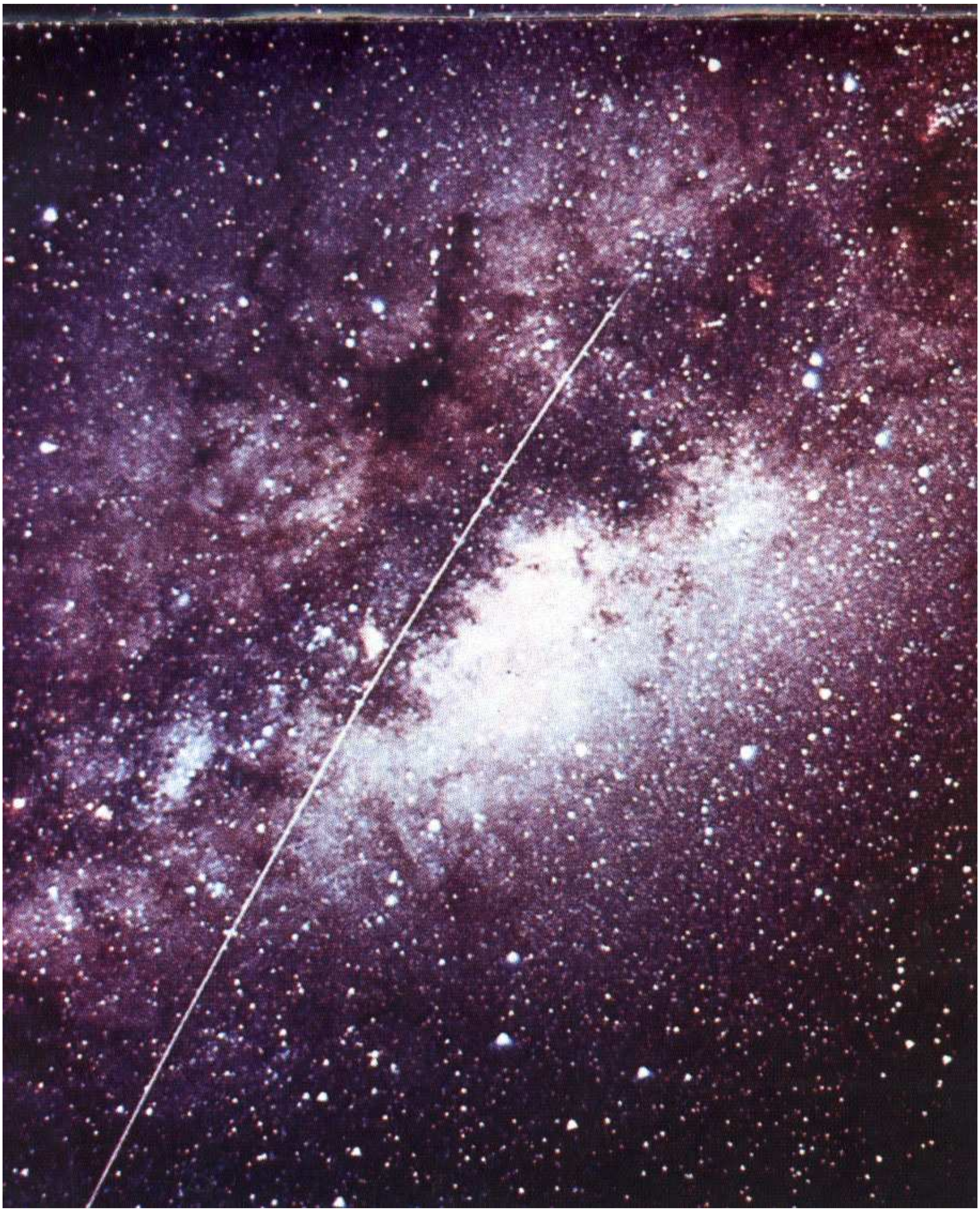
$$\det\Big(C(X\cdot Y)+B\Big)=\det(CX+B)\det(CY+B)$$

Определитель $\det(CX+B)$ можно записать в виде окаймленного определителя:

$$\det(CX+B)=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{vmatrix}.$$

Аналогичное строение будут иметь определители и для больших рангов, все они будут окаймлены единицами и нулем в пересечении.

Академгородок. Осень



Дорога, ведущая в Мир Высшей реальности (Фото)

Литература к Приложению II

[1] *В.К. Ионин.* Абстрактные группы как физические структуры. // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. С. 40 – 43.

[2] *В.К. Ионин.* К определению физических структур. // Труды института математики. Новосибирск, 1992. Том 21.

[3] *П.М. Кон.* Свободные кольца и их связи. // Москва: Мир, 1975.

[4] *Ю.И. Кулаков.* Элементы теории физических структур (с дополнениями Г.Г. Михайличенко) // Н.: НГУ. 1968.

[5] *А.Г. Курош.* Общая алгебра (лекции 1969/70 учебного года). // М., МГУ., 1970.

[6] *А.А. Литвинцев.* Комплексная физическая структура ранга (2.2). // В кн.: Г.Г. Михайличенко. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.

[7] *А.А. Литвинцев.* Комплексная физическая структура ранга (3.2). // Материалы XXXV международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 1997, с. 62-63.

[8] *Г.Г. Михайличенко.* Двуметрические физические структуры и комплексные числа. // ДАН 1991, том 321, №4, с. 677 – 680.

[9] *Г.Г. Михайличенко.* Простейшие полиметрические геометрии. // ДАН 1996, том 348, №1, с. 22 – 24.

[10] *Г.Г. Михайличенко.* Математический аппарат теории физических структур. // Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.

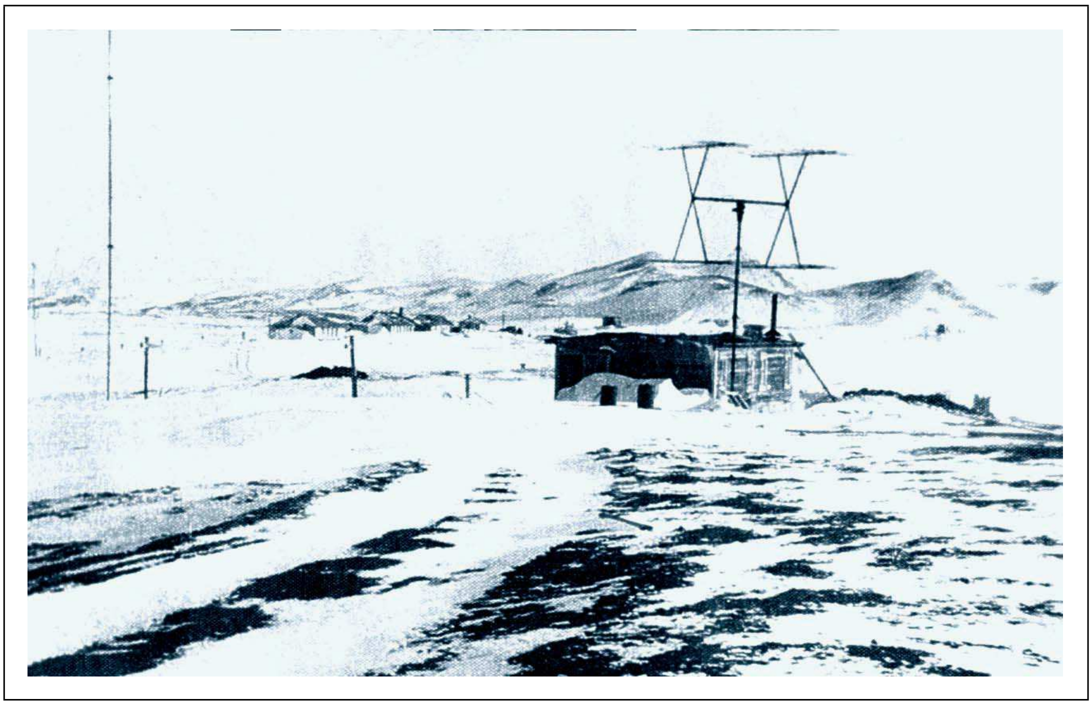
[11] *Г.Г. Михайличенко.* Полиметрические геометрии. // Новосибирск: НГУ, 2001.

Приложение III.

Первая публикация по Теории физических структур

> *Когда окончательно откажутся от понятия элементарной частицы встанет вопрос, какие понятия можно было бы связать с эпитетом "фундаментальный". Конечно, не какие-то особые виды частиц, или сил, или полей, или геометрий. Фундамент реальности, к сожалению, гораздо более абстрактен. Существующие экспериментальные доказательства довольно основательно свидетельствуют в пользу идеи, что можно говорить о фундаментальных симметриях. Закон природы, лежащий в основе спектра частиц, их взаимодействий, строения и истории космоса, определяется, вероятно, некоторыми фундаментальными симметриями. (...) Поэтому можно сказать, что современное развитие физики повернулось от философии Демокрита к философии Платона* [1]
>
> — *Вернер Гейзенберг*

[1] *Гейзенберг* Сб. "Properties of matter under unusual condtions". Interscience, N.Y. — L., 1969, p.p. 7–10
Есть русский перевод: Вернер Карл Гейзенберг. "Что такое "понимание" в теоретической физике?", Природа, № **4**, 1971, с. 75–77.

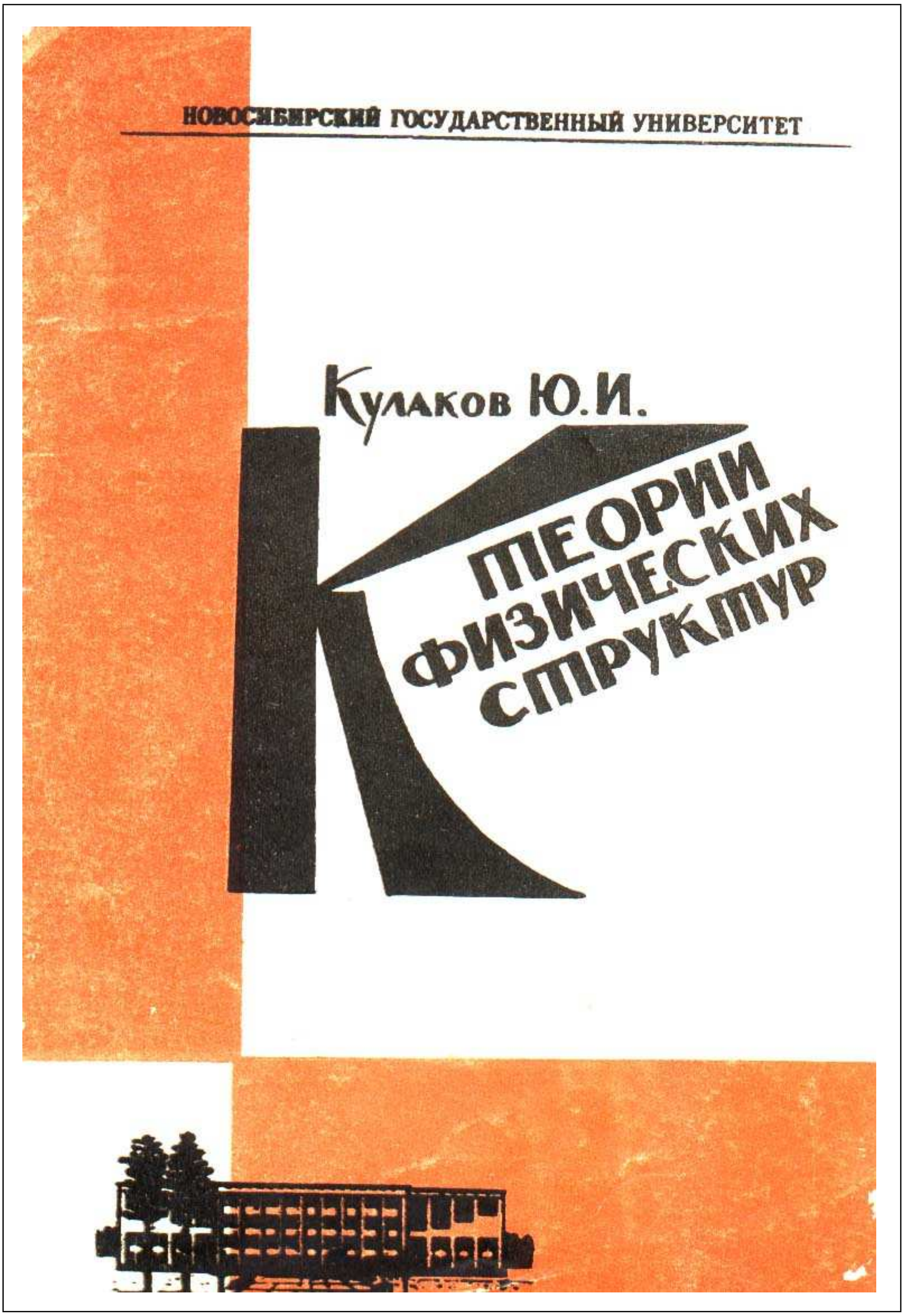


Тикси. Станция МГГ [94].

На этой станции, затерянной в безбрежном пространстве снежной пустыни Заполярья, в канун Нового 1967 года я прочитал свой первый курс лекций по Теории физических структур. Есть что-то символическое в том, что эти лекции проходили полярной ночью под беззвучные сполохи полярных сияний в ясную погоду и завывание ветра с колючим снегом во время пурги.

Моими первыми слушателями были молодые научные сотрудники и бывалые полярники. И вот теперь, спустя тридцать пять лет я с большой теплотой вспоминаю своих первых благодарных слушателей: Валю Дмитренко, Валерия Хвостенко, Володю и Наташу Пивоваровых.

[94] МГГ – Международный Геофизический Год



Обложка первого издания Теории физических структур (1968)

К теории физических структур

(Четыре лекции для студентов НГУ)

Ю.И. Кулаков

1968

г. Новосибирск

Лекция 1

Некоторые предварительные замечания о единой физической картине мира

Если вы считаете, что критика основных физических понятий может стать полем плодотворных исследований, то развивайте её всеми средствами. В этом случае вы можете напасть на след чего-то, что приведёт к новой точке зрения на природу мира.
– Артур Эддингтон.

§ 1. Исчерпали ли себя классические разделы теоретической физики?

В настоящее время[95], несмотря на серьёзные трудности в области сильных взаимодействий, теоретическая физика продолжает бурно развиваться. Особое место, по-прежнему, занимают работы по теории элементарных частиц, так как ни у кого не возникает сомнения в том, что именно здесь сосредоточены проблемы, связанные с наиболее глубокими физическими принципами.

Что же касается остальных традиционных разделов теоретической физики, ставших уже классическими, таких как механика, специальная теория относительности, термодинамика, электродинамика, квантовая механика, то интерес к ним постепенно угас и подавляющее большинство работ в этой области носит исключительно утилитарный характер.

Действительно, согласие перечисленных разделов теоретической физики с экспериментом настолько убедительно, а математический аппарат их настолько хорошо разработан, что всякая попытка пересмотреть принципиальную сторону теории с целью её улучшения, заранее кажется обречённой на неудачу. И, тем не менее, прежде чем хоронить, разумеется, со всеми подобающими почестями, многие разделы теоретической физики как исчерпавшие себя в идейном отношении, стоит ещё раз задуматься над их эвристическим содержанием.

В самом деле, ценность по-настоящему глубокой физической теории не исчерпывается её утилитарным значением – способностью связывать между собой различные известные физические явления и предсказывать новые. Последовательная физическая теория обладает ещё и эвристической ценностью – в ней заложены, часто в скрытой форме, некоторые глубокие физические принципы, которые при умелой экстраполяции за пределы данной теории могут привести

[95] Напомню, что эта первая публикация по теории физических структур была написана мною весной 1967 года.

к созданию нового формализма или стать исходным пунктом новых физических идей.

Утилитарная сторона классических теорий действительно доведена до совершенства; трудности, которые здесь имеются, носят почти исключительно математический характер. Что же касается эвристического содержания отдельных разделов теоретической физики, то даже для классических теорий эта сторона вопроса остаётся совершенно неразработанной.

Как довольно тонко подметил Дж. Синг: "Физики сравнительньно мало задумываются над тем, почему и как они делают то, что они делают, и против этого нельзя сильно возражать, так как человеческая активность подавляется самоанализом. Однако имеются случаи, когда опасность интеллектуальной путаницы больше опасности самоанализа".

§ 2. Золотой век физики и "архитектурные излишества".

Отсутствие серьёзных работ по основаниям физики объясняется отчасти трудностями, возникающими при попытке дать точную формулировку задачи, которая с одной стороны, в отличие от конкретных физических задач, связана с наиболее общими законами, присущими различным физическим теориям, а с другой, в отличие от философии, позволяла бы сформулировать эти закономерности на привычном аналитическом языке уравнений.

С подобной ситуацией в математике впервые столкнулся Эйлер при решении топологической задачи о кенигсбергских мостах. Он сразу же осознал, что она не может быть решена обычными методами геометрии, алгебры или комбинаторики, решил её, но, сообщая своё решение Карлу Элеру, писал: "Это решение, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике".

Короче говоря, последовательное решение проблемы оснований физики требует особой методики иследования, существенно отличной от той, которая вырабатывалась в течение длительного времени при решении конкретных задач.

Эйнштейн, как, может быть, никто из современных физиков, всю жизнь искал общие принципы, из которых путём чистой дедукции можно было бы получить картину мира. "На протяжении долгих лет, – писал он, – я всеми силами стремился придавать ясность основаниям науки и совершенствовать их".

Однако своего рода отступничеством от научной веры стало считаться всякое высказывание сомнения в совершенстве признанных трактовок теорий. В этом сказывались и факты обожествления создателей современной физики и элементы слепой веры, мешающие выявить недостатки трактовки и изложения теорий.

Так, например, построение и изложение специальной теории относительности за шестьдесят лет её существования упорно сохраняет все недостатки формального и далеко не совершенного в логическом отношении первоизложения.

Нелогичность принятого построения этой действительно простейшей из современных теорий, к стыду многочисленной армии нескольких поколений физиков, была отмечена самим же Энштейном в конце его жизни. Однако, к этому времени всеобщая вера в совершенство принятого изложения настолько укрепилась, что к замечанию самого́ создателя теории отнеслись без должного внимания.

Главная же причина такого одностороннего развития теоретической физики, когда на передний план ставится утилитарная сторона дела, состоит в том, что вопрос об общих законах построения физических теорий был просто преждевременным.

Действительно, период, начавшийся созданием специальной теории относительности и современной квантовой механники и закончившийся объяснением лэмбовского сдвига и аномального магнитного момента электрона в квантовой электродинамике, по праву может быть назван "золотым веком" физики. Этот период был замечателен тем, что удивительное согласие результатов теории с экспериментом достигалось формальным решением уравнений, содержащих величины, наши знания о которых ограничены интуитивными представлениями.

Возникла любопытная ситуация: с одной стороны – совершенный математический аппарат, с другой – поверхностная интуиция, от которой нельзя избавится, когда речь заходит о фундаментальных физических понятиях, таких как длина и время, масса, энергия, электрический заряд и т.п.

В связи с этим не может не возникнуть вопрос, вполне естественный для эпохи "золотого века": а нужны ли вообще точные определения исходных физических понятий? Не является ли стремление к логически завершённым формулировкам физических теорий своего рода "архитектурным излишеством"?

Действительно, что может дать уточнение и переосмысление исходных понятий, если уравнения теории, весь её формализм остаются без изменения? Ведь для того чтобы получать превосходное согласие выводов терии с экспериментом, нет необходимости вникать в тонкости определений длины и времени, массы и энергии, волновой функции и заряда электрона. Нужно лишь проявить достаточную изобретательность и извлечь из всемогущих уравнений нужный результат.

§ 3. Необходимость новых физических идей и унификации физических теорий.

Но "золотой век" физики кончился. Уравнения квантовой механики, теории относительности и квантовой электродинамики, по-видимому, исчерпали себя. Становится всё более очевидным, что построение теории элементарных частиц возможно лишь на базе новых уравнений, нового формализма, новых физических идей.

Но прежде чем строить новую теорию, полезно знать, как устроены старые классические теории. Но разве наши знания традиционных разделов теоретической физики являются недостаточными? Эти знания утилитарны. Они вполне достаточны для объяснения почти любого физического явления, взятого из соответствующей области, но они недостаточны для установления общих физических принципов, из которых формализм теории вытекал бы как далеко нетривиальное следствие. "Пока мы должны признать, – писал Эйнштейн незадолго до смерти, – что не имеем для физики общей теоретической основы, которую можно было бы считать её логическим фундаментом" .

Другим немаловажным обстоятельством, требующим пересмотра существующих физических теорий с точки зрения их унификации, является проблема преподавания. Дело в том, что изучение современной физики чрезвычайно затруднено отсутствием общей картины строение физики в целом, генерального плана, на котором каждому разделу теоретической физики было бы отведено своё, вполне определённое место.

Отсутствие же такой единой физической картины мира приводит к тому, что исходные аксиомы, лежащие в основании тех или иных разделов физики, воспринимаются как случайные, обусловленные скорее историческими причинами, нежели внутренней необходимостью, что, естественно, не может не вызвать серьёзных трудностей при попытке установить истинный характер физических закономерностей, лежащих в основании изучаемой теории.

Изучение физики требует больших усилий ещё и потому, что каждый новый раздел её связан с новыми принципами, никак не связанными с принципами предыдущих разделов, с понятиями, введение которых, как правило, основано только на интуиции, с новыми уравнениями, которые вводятся в теорию без достаточных обоснований.

Ситуация, сложившаяся в современной физике, удивительно сходна с положением дел в математике в начале XIX века. Эварист Галуа писал по этому поводу: "И учебные, и научные книги страдают одним и тем же – отсутствием чёткости изложения. Возьмите любую книгу по алгебре, учебную или научную, и вы не найдёте в ней ничего, кроме хаотического множества теорем, строгость которых представляет странный контраст с общим беспорядком. Кажется что отдельные соображения обошлись автору так дорого, что у него уже не хватило сил объединить их, и что его ум, истощённый идеями, положенными в основу труда, не в состоянии породить ещё одну мысль, которая связала бы его воедино. Если вы всё-таки встретите какой-нибудь метод, какую-нибудь связь или систему, то они обязательно оказываются фальшивыми или искусственными. Деление на разделы не обосновано, сопоставления произвольны, порядок условен. Этот недостаток ещё более тяжёлый, чем отсутствие метода, особенно часто встречается в учебниках".

Наконец, серьёзным недостатком существующей аксиоматики, а вместе с ней и изложения современной физики, является отсутствие в ней глубокой, принципиальной связи с экспериментом, именно благодаря которой физика и является наукой о природе. Если же эта связь завуалирована, если ей в аксиоматике отводится третьестепенное место, то изучение физики невольно сводится лишь к усвоению математического аппарата в ущерб овладению высокой культурой физического мышления.

§ 4. Является ли логическая непоследовательность неизбежным спутником физических теорий?

Итак, речь идёт о такой формулировке известных физических теорий, которая позволила бы ввести исходные физические понятия с такой же степенью строгости, какая имеет место в математике при аксиоматическом методе изложения.

Но возможно ли это? Ведь физика в отличие от математики, имеет дело не только с абстрактными схемами и понятиями, свойства которых могут быть при желании предельно строго определены соответствующими аксиомами, сколько с реальными физическими объектами, свойства которых определяются совокупностью конкретных опытных данных, полученных с помощью конкретных измерительных операций. Но именно конкретный характер измерительных операций является наиболее уязвимым местом любой физической теории, затрудняющим её аксиоматическую формулировку.

Поэтому установление взаимного соответствия между готовой математической схемой и свойствами реальных физических объектов является типичной физической задачей, от правильного решения которой зависит внутренняя непротиворечивость и логическая стройность физический теории.

Не нужно приводить много примеров, чтобы убедиться в явном несоответствии между безупречной, математически точной абстрактной системой с одной стороны и полуинтуитивным, аппелирующим к наглядности, методом введения основных физических понятий, с другой.

В самом деле, рассмотрим вопрос о таких “очевидных” понятиях как длина и время.

Начнём с длины, на основе которой вводится важное для всей физики понятие координаты.

Обычно, пытаясь дать точное определение расстояния между двумя точками, описывают известную процедуру откладывания по прямой абсолютно твёрдого отрезка. Но что такое твёрдое тело? Интуитивно мы чувствуем разницу между резиновым шнуром и стальным стержнем, но для построения логически замкнутой физической теории такой подход, естественно, не может считаться удовлетворительным.

Положение ещё более усложнится, если мы попытаемся уточнить, что следует понимать под прямой, по которой необходимо откладывать измерительный отрезок.

В самом деле, что такое прямая? Обычно отвечая на этот вопрос, говорят: прямая, по определению, реализуется натянутой нитью или лучём света. Но принять такое опрделение прямой это значит связать фундаментальные для всей физики понятия длины и координаты с весьма специальными физическими явлениями, определить общее и фундаментальное через частное и случайное, что если и может быть в какой-то мере оправдано некоторыми интуитивными соображениями, то во всяком случае не может лечь в основу последовательной физической теории.

Аналогичные трудности возникают при определении времени. Что такое время?

Обычно, отвечая на этот вопрос, говорят о процедуре измерения, позволяющей сравнить изучаемое явление с так называемым "равномерным" процессом. Однако ясно, что сведение одного интуитивного понятия – времени, к другому – "равномерному" процессу, ничего не может изменить по существу. И здесь мы не можем избавиться от чувства неудовлетворённости, связывая фундаментальное для всей физики понятие – время, с весьма специальными физическими явлениями – движением Земли вокруг Солнца или электромагнитными процессами в резонаторе молекулярного генератора, играющими роль эталонов "равномерных" процессов.

Приведённых примеров вполне достаточно, чтобы увидеть значительный разрыв, существующий между довольно низким уровнем наших представлений об исходных физических величинах и математическим аппаратом, применяемым физикой.

По этому поводу можно было бы привести многочисленные высказывания Пуанкаре, Эйнштейна, Бора, Гейзенберга, но пожалуй самым откровенным является высказывание Дж. Синга: "О существующем в действительности неравенстве $\neq$ (– описание физических объектов в терминах физических операций, – описание физических объектов на языке математики – Ю.К.) лучше не говорить громче чем шёпотом, ибо это чрезвычайно опасно, – пишет он в своей книге "Общая теория относительности". – Стоит поверить этому высказыванию, как тут же оказывается разорванной связь между математикой и физикой, и как та, так и другая, станут бесплодными, потеряв возможность взаимного оплодотворения. Здесь мы позволим себе сказать об этом шёпотом лишь в качестве извинения перед читателем, который надеялся увидеть математику и физику общей теории относительности, связанными прочными цепями ясной и последовательной логичной мысли. Это невозможно. Сначала и до конца нам неизменно придётся изворачиваться, действуя наобум. И если в этой книге будут некорректности при различении и , то их будет не больше, чем допущено (и с необходимостью должно быть допущено) во всех аналогичных книгах. Такого рода печальное положение присуще не только общей теории относительности; формула $M \neq$ вечный спутник любой области математической физики".

К счастью, такая пессимистическая точка зрения является, повидимому, ошибочной.

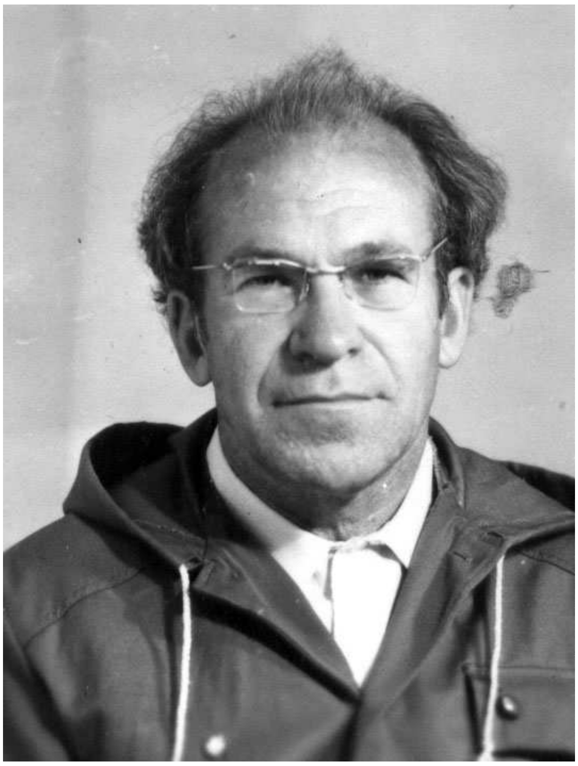
Однако, надо признать, что преодоление логических трудностей при построении последовательной физической теории, представляет собой задачу, решение которой становится возможным лишь при использовании принципиально новых методов исследования.

Излагаемая ниже теория физических структур представляет собой попытку "бурбакизации" физики, пересмотра её оснований с единой точки зрения, в основу которой вместо нескольких различных, полуинтуитивных образов, таких как частица, поле, пространство, время, положено одно единственное понятие – физическая структура.

Как будет показано ниже, это понятие, с одной стороны является достаточно общим, чтобы охватить все возможные физические явления, и в то же время достаточно конкретным, чтобы служить эффективным инструментом, позволяющим по опытным данным, полученным при измерении вполне определённых физических величин с помощью совершенно конкретного прибора, установить факт существования фундаментального физического закона.

Физическая структура является тем самым первичным понятием, позволяющим установить единство между различными физическими теориями и получить как следствие такие, на первый взгляд не имеющие ничего общего, постулаты, как аксиомы Евклида и закон Ньютона, оба начала термодинамики и принцип постоянства скорости света, уравнения Максвелла и принцип суперпозиции, лежащий в основании квантовой механики.

Мы надеемся, что пересмотр всей физической картины мира с точки зрения физических структур позволит установить общие принципы построения физических теорий, устранить барьер непонимания, разделяющий физиков и математиков и, перефразируя слова Бертрана Рассела сказать: "Физика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и суровой, подобной красоте скульптуры. Возвышенно чистая, она способна к такому строгому совершенству, которое доступно только величайшему искусству".



Юрий КУЛАКОВ (1968)

Лекция 2

Об одном принципе, лежащем в основании классической физики.

Знание принципов легко возмещает незнание некоторых фактов.

— Гельвеций.

Общая черта всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определённым классам, равноправны по отношению к рассматриваемому закону.

Ниже излагается математический аппарат, позволяющий естественным образом сформулировать это равноправие.

Оказывается, что из одного только требования равноправия можно вывести далеко идущие следствия о возможной структуре физических законов.

Общий принцип, лежащий в основе формулировки физических законов, записывается в виде функционального уравнения специального вида, для решения которого предлагается эффективный метод. В дальнейших работах будет показано, каким образом этот принцип может быть применён к обоснованию ряда известных физических теорий. Этот же подход позволяет предвидеть некоторые структурные особенности ещё не построенных, но принципиально возможных физических теорий.

Рассмотрим два произвольных множества:

множество $\mathfrak{M}$ с элементами $i,\ k, \dots$ и
множество $\mathfrak{N}$ с элементами $\alpha,\ \beta, \dots$.

Допустим, что каждой паре $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ сопоставляется действительное число $a_{i\alpha} \in \mathbb{R}$, так что в конечном итоге множеству $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется некоторая числовая матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$.

Так если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества физических объектов различной природы, то матрица $\|a_{i\alpha}\|$ представляет собой результат эксперимента, характеризующий отношения, в которых находятся объекты i и α.

Мы будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана физическая структура ранга (r, s), если $r \cdot s$ чисел

$$\begin{array}{cccc} a_{i\alpha}, & a_{i\beta}, & \dots, & a_{i\gamma}; \\ a_{k\alpha}, & a_{k\beta}, & \dots, & a_{k\gamma}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l\alpha}, & a_{l\beta}, & \dots, & a_{l\gamma}. \end{array}$$

стоящих на пересечении любых r строк $i,\ k,\ \ldots,\ l$ и любых s столбцов $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma$, связаны между собой функциональной зависимостью

$$\begin{array}{l}\Phi(\ a_{i\alpha},\ \ a_{i\beta},\ \ \ldots,\ \ a_{i\gamma}; \\ \quad a_{k\alpha},\ \ a_{k\beta},\ \ \ldots,\ \ a_{k\gamma}; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{l\alpha},\ \ a_{l\beta},\ \ \ldots,\ \ a_{l\gamma})\end{array} = 0 \tag{36}$$

вид которой не зависит от выбора подмножества из r элементов

$$\mathfrak{M}_r = \{i,\ k,\ \ldots,\ l\} \subset \mathfrak{M}$$

и подмножества из s элементов

$$\mathfrak{N}_s = \{\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma\} \subset \mathfrak{N}$$

При этом предполагается, что функция Φ аналитична и не может быть представлена в виде суперпозиции аналитических функций меньшего числа переменных.

Мы будем говорить также, что функциональная зависимость вида (36) задаёт физический закон ранга (r,s), инвариантный относительно выбора конечных подмножеств $\mathfrak{M}_r$ и $\mathfrak{N}_s$ и реализуемый на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Равенство (36) является, по сути дела, символической записью бесконечной системы функциональных уравнений относительно одной неизвестной функции от $r{\cdot}s$ переменных $\Phi(x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{rs})$ и одной неизвестной бесконечной матрицы $A = \|a_{i\alpha}\|$, представляющей собой одну числовую функцию двух нечисловых аргументов i и α.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такую бесконечную матрицу $A = \|a_{i\alpha}\|$ и такую функцию $\Phi(x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{rs})$, что для любой прямоугольной $r \times s$ – мерной подматрицы A_{rs} матрицы A все её элементы, подставленные в Φ, обращали бы $\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots, a_{l\gamma})$ в нуль.

Требование существования соотношений (36) при любом выборе r элементов из множества $\mathfrak{M}$ и s элементов из множества $\mathfrak{N}$ мы называем принципом обобщённой инвариантности (или *принципом холотропной*[96] *симметрии*).

Этот принцип наиболее естественным образом выражает факт равноправия всех элементов множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ по отношению к физическому закону ранга (r,s).

В следующих работах мы покажем, что матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$ и функция $\Phi(x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{rs})$, являющиеся решением бесконечной системы функциональных уравнений (36) при заданных r и s, определяются однозначно, с точностью до некоторого преобразования, зависящего от выбора конкретной измерительной операции и несущественного для построения общей теории.

[96] Термин **холотропный** происходит от сло́ва гр. $\ddot{o}\lambda o\zeta$ (holos) – *целое, всё* и сло́ва гр. $\tau\rho\acute{o}\pi o\zeta$ (tropos) – ***свойство*** и выражает особое свойство системы существовать как единое целое.

Другими словами, требование одного только факта существования физического закона ранга (r,s), характеризуемого равенством (36), позволяет определить как допустимый набор экспериментальных данных $a_{i\alpha}$, так и конкретное выражение для самого физического закона.

В этой статье мы ограничимся рассмотрением физических структур наименьшего возможного ранга $(2,,2)$. На этом простейшем примере мы увидим, какие методы применяются при решении поставленной задачи. Кроме того, полученный результат даст нам возможность проанализировать логический смысл, скрытый за традиционной формулировкой уравнения Ньютона, что и будет сделано в следующей статье.

Итак, мы ищем такую бесконечную матрицу $A = \|a_{i\alpha}\|$ и такую функцию от четырёх переменных $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$, чтобы элементы любой квадратной подматрицы A_{22}, построенной на двух произвольных строках i и k и двух произвольных столбцах α и β, были бы связанны между собой соотношением

$$\Phi(a_{i\alpha},a_{i\beta},a_{k\alpha},a_{k\beta}) = 0 \tag{37}$$

От функции $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ мы потребуем лишь, чтобы она была дифференцируемой, и чтобы уравнение $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0$ было разрешимо относительно любой из переменных.

Прежде всего, из всех элементов множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ выделим по одному элементу $0 \in \mathfrak{M}$ и $0 \in \mathfrak{N}$, которые назовём “эталонами” в соответствующих множествах.

Затем, разрешив уравнение (37) относительно $a_{i\alpha}$ и подставляя в (37) вместо k и β соответственно 0 и 0, получим:

$$a_{i\alpha} = f(a_{i0},a_{0\alpha},a_{00}) = \varphi(x_i,\xi_\alpha), \tag{38}$$

где $x_i = a_{i0}$ и $\xi_\alpha = a_{0\alpha}$ – числовые параметры, характеризующие, соответственно, элементы множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Итак, задача нахождения матрицы $A = \|a_{i\alpha}\|$ или, что одно и то же, одной числовой функции от двух нечисловых аргументов i и α и одной функции от четырёх переменных $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$, свелась к нахождению $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и одной числовой функции $\varphi(x,\xi)$ от двух числовых переменных x и ξ таких, что

$$\Phi(\varphi(x,\xi),\varphi(x,\eta),\varphi(y,\xi),\varphi(y,\eta)) \equiv 0 \tag{39}$$

Подчеркнём, что равенство (39) является тождеством относительно переменных $x,\ y,\ \xi,\ \eta$, обозначающих соответственно $x_i,\ x_k,\ \xi_\alpha,\ \xi_\beta$. Дифференцируя тождество (39) по $x_i,\ x_k,\ \xi_\alpha,\ \xi_\beta$, мы получим систему четырёх однородных уравнений относительно четырёх неизвестных

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_4}$$

.

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} u(x,\xi) & 0 & v(x,\xi) & 0 \\ u(x,\eta) & 0 & 0 & v(x,\eta) \\ 0 & u(y,\xi) & v(y,\xi) & 0 \\ 0 & u(y,\eta) & 0 & v(y,\eta) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{40}$$

где

$$u(x,\xi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi), \qquad v(x,\xi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi),$$

или

$$\begin{vmatrix} w(x,\xi) & -w(y,\xi) & 0 & 0 \\ w(x,\eta) & -w(y,\eta) & 0 & 0 \\ 0 & w(y,\xi) & 1 & 0 \\ 0 & w(y,\eta) & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} w(x,\xi) & w(y,\xi) \\ w(x,\eta) & w(y,\eta) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{41}$$

где

$$w(x,\xi) = \frac{u(x,\xi)}{v(x,\xi)}$$

Чтобы удовлетворить тождеству (41), необходимо и достаточно положить

$$w(x,\xi) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi)}{\frac{\partial\varphi}{\partial \xi}(x,\xi)} = A(x)B(\xi),$$

где $A(x)$ и $B(\xi)$ – произвольные функции одного переменного.

Таким образом, задача сводится к решению следующего уравнения в частных производных

$$\frac{1}{A(x)} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi) - B(\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial \xi}(x,\xi) = 0 \tag{42}$$

Легко видеть, что общее решение уравнения (42) имеет вид

$$\varphi(x,\xi) = \chi(R(x)\cdot S(\xi)),$$

где $\chi(x)$ – произвольная функция от одной переменной, а

$$R(x) = exp\int A(x)dx \qquad \text{и} \qquad S(\xi) = exp\int \frac{d\xi}{B(\xi)}.$$

Но так как (x) и $B(\xi)$ произвольны, то

$$a_{i\alpha} = \varphi(x_i,\xi_\alpha) = \chi(R(x_i)\cdot S(\xi_\alpha)), \tag{43}$$

где $\chi(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ – произвольные функции.

Чтобы найти вид функции $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$, перепишем (43) в виде

$$\chi^{-1}(a_{i\alpha}) = R(x_i)\cdot S(\xi_\alpha),$$

откуда легко получаем, что

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k_beta}) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(a_{i\alpha}) & \chi^{-1}(a_{i\beta}) \\ \chi^{-1}(a_{k\beta}) & \chi^{-1}(a_{k\beta}) \end{vmatrix} = 0.$$

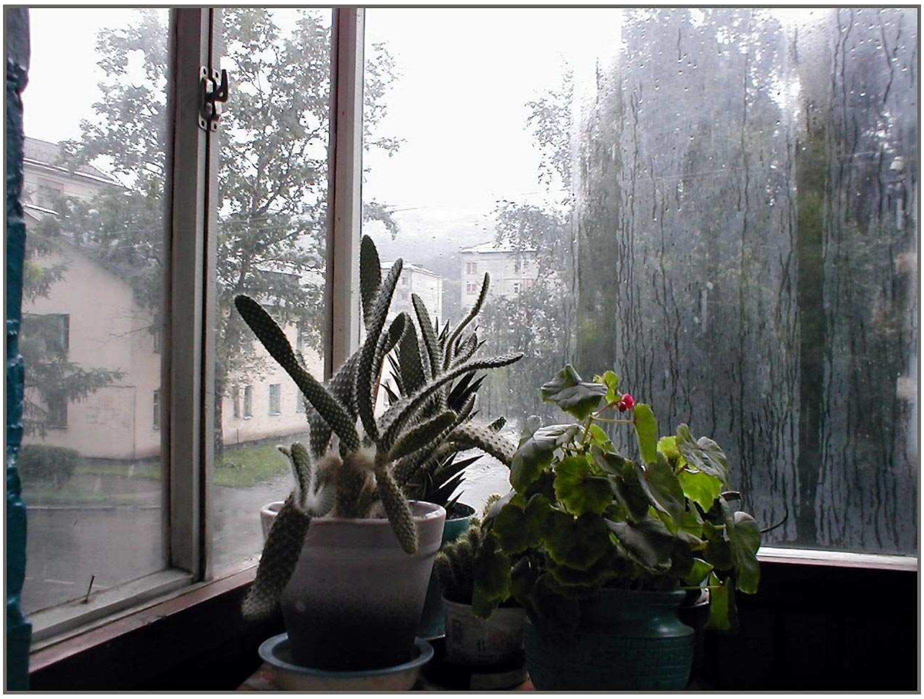
Итак, мы показали, что матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$ и функция $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, удовлетворяющие принципу обобщённой инвариантности (37), определены с точностью до произвольной функции $\chi(x)$ от одной переменной и имеют вид

$$a_{i\alpha} = \chi(R_i \cdot S_\alpha),$$

где R_i и S_α – произвольные числа, и

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(x_1) & \chi^{-1}(x_2) \\ \chi^{-1}(x_3) & \chi^{-1}(x_4) \end{vmatrix}$$

В заключение благодарю Б.Я.Штивельмана за многочисленные полезные дискуссии и А.И.Фета за постоянный интерес к работе.



Ностальгия

Лекция 3

Ньютоновская механника с точки зрения теории физических структур.

По моему мнению, прежде всего нужно указать на то, что как раз введение в механнику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая при этом необходимости то тут, то там приносить этим слушателям, не без некоторого смущения, извинения и не испытывая желания побыстрей перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя.

— Генрих Герц.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы установить соответствие между результатами общей теории физических структур [?] и традиционной формулировкой ньютоновской механики. При этом мы покажем, что два инварианта, возникающие в общей теории, могут быть отождествлены с массоой и силой. Что же касается системы отсчёта, то для её характеристики существует третий инвариант, обращение в нуль которого является характерной особенностью "инерциальных" систем.

Возьмём в качестве множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, фигурирующих в общей теории физических структур [?], два конкретных множества: множество тел $i,\ k,\ \ldots,\ l,\ \ldots$ и множество "ускорителей"[97] $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma,\ \ldots$. Рассмотрим некоторую экспериментальную операцию μ, осуществляемую в системе отсчёта σ и сопоставляющую каждому телу i и каждому ускорителю α действительное число $a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}$.

При этом мы сделаем предположение, что отношение между множеством тел $\mathfrak{M}$ и множеством ускорителей $\mathfrak{N}$, осуществляемое измерительной операцией μ в системе отсчёта σ, описываются физической структурой ранга $(2,2)$.

Это значит что четыре величины $a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)},\ a_{i,\beta}^{(\mu,\sigma)},\ a_{k\alpha}^{(\mu,\sigma)},\ a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}$, относящиеся к любым двум телам $i,\ k$ и к любым двум ускорителям $\alpha,\ \beta$, оказываются связаннными между собой соотношением

$$\Phi(a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)},\ \ a_{i,\beta}^{(\mu,\sigma)},\ \ a_{k\alpha}^{(\mu,\sigma)},\ \ a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}) = 0.$$

Как было показано в [?], матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$, удовлетворяющая принципу обобщённой инвариантности, должна иметь следущее строение:

$$a_{i,\alpha} = \chi(R_i \cdot S_\alpha),$$

[97] В настоящей статье под ускорителями мы будем понимать всевозможные механизмы, сообщающие телам различные ускорения.

где $\chi(x)$ – произвольная функция одного переменного, а R_i и S_α – произвольные числа.

В этом случае

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = \chi^{-1}(a_{i\alpha})\chi^{-1}(a_{k\beta}) - \chi^{-1}(a_{i\beta})\chi^{-1}(a_{k\alpha}) = 0$$

Итак, если эксперимент μ, осуществляемый в системе отсчёта σ, реализует на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(2,2)$, то для каждых μ и σ должна существовать такая функция $\lambda_{\mu\sigma}(x) \equiv \chi^{-1}(x)$, что при любых $i,\ k \in \mathfrak{M}$ и $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{N}$ имеет место соотношение:

$$\lambda_{\mu\sigma}(a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)})\ \lambda_{\mu\sigma}(a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}) - \lambda_{\mu\sigma}(a_{i\beta}^{(\mu,\sigma)})\ \lambda_{\mu\sigma}(a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}) = 0 \tag{44}$$

Задача состоит в том, чтобы по опытным данным $a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}$ найти неизвестную функцию $\lambda_{\mu\sigma}(x)$ и тем самым подтвердить сделанное в начале предположение о существовании физической структуры ранга $(2,2)$.

Так как любая величина $a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}$ известна нам лишь с конечной точностью, то при нахождении $\lambda_{\mu\sigma}(x)$ мы можем ограничиться лишь конечным числом членов разложения и искать $\lambda_{\mu\sigma}(x)$ в виде:

$$\lambda_{\mu\sigma}(x) = {}^{\mu,\sigma}_{0} + {}^{\mu,\sigma}_{1} \cdot x + {}^{\mu,\sigma}_{2} \cdot x^2 + \ldots + {}^{\mu,\sigma}_{n} \cdot x^n. \tag{45}$$

Подставляя (45) в (44) при фиксированных $i,\ k,\ \alpha,\ \beta$ мы получим одно уравнение для $n+1$ неизвестных ${}^{\mu,\sigma}_{0},\ {}^{\mu,\sigma}_{1},\ \ldots,\ {}^{\mu,\sigma}_{n}$.

$$\psi({}^{\mu,\sigma}_{0},\ {}^{\mu,\sigma}_{1},\ \ldots,\ {}^{\mu,\sigma}_{n};\ a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)},\ \ a_{i,\beta}^{(\mu,\sigma)},\ \ a_{k\alpha}^{(\mu,\sigma)},\ \ a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}) = 0. \tag{46}$$

Однако, выбирая из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ разлиичные $i,\ k,\ \alpha,\ \beta$, мы получим систему уравнений типа (46), число которых заведомо превышает число неизвестных ${}^{\mu,\sigma}_{0},\ {}^{\mu,\sigma}_{1},\ \ldots,\ {}^{\mu,\sigma}_{n}$. Таким образом, если наше предположение о существовании физической структуры ранга $(2,2)$ верно, то система уравнений типа (46) должна быть совместной для каждых μ и σ и, следовательно существует такая функция $\lambda_{\mu,\sigma}(x)$, что $\lambda_{\mu,\sigma}(a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)})$ не зависит ни от μ, ни от σ, а зависит лишь от i и α, т.е.

$$\lambda_{\mu,\sigma}(a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}) = \lambda_{\nu,w}(a_{i,\alpha}^{(\nu,w)}) = \chi^{-1}(a_{i\alpha}) \tag{47}$$

где μ и ν – различные измерительные операции, принадлежащие к одному и тому же классу, σ и w – различные системы отсчёта.

Опыт показывает, что, если в качестве экспериментально измеряемой величины взять ускорение $w_{i\alpha}^{\sigma}$ тела i под действием ускорителя α, измеренное в системе отсчёта σ, то в этом случае $\lambda_{\mu\sigma}(x)$ имеет наиболее простой вид:

$$\lambda_{\mu\sigma}(x) = a^{\sigma} + x. \tag{48}$$

При этом равенство (47) запишется в виде:

$$a^{\sigma} + w_{i\alpha}^{\sigma} = a^{\omega} + w_{i\alpha}^{\omega} = a^0 + w_{i\alpha}^0, \tag{49}$$

где 0 – фиксированная “эталонная” система отсчёта.

Как следует из самого́ определения коэффициентов разложения ${}^{\mu,\sigma}_{m}$, константа $a^\sigma \equiv {}^{\mu,\sigma}_{0}$ не может зависеть ни от i ни от α, то есть является инвариантом относительно выбора i и α, и может зависеть лишь от системы отсчёта σ.

Итак, согласно (44) и (48), имеем:

$$(a^\sigma + w^\sigma_{i\alpha})\,(a^\sigma + w^\sigma_{k\beta}) - (a^\sigma + w^\sigma_{i\beta})\,(a^\sigma + w^\sigma_{k\alpha}) = 0, \tag{50}$$

откуда

$$a^\sigma = \frac{w^\sigma_{i\alpha}w^\sigma_{k\beta} - w^\sigma_{i\beta}w^\sigma_{k\alpha}}{w^\sigma_{i\alpha} + w^\sigma_{k\beta} - w^\sigma_{i\beta} - w^\sigma_{k\alpha}} \tag{51}$$

Таким образом, измеряя ускорения $w^\sigma_{i\alpha}$ разных тел i и k под действием разных ускорителей α и β в одной и той же системе отсчёта σ, мы всякий раз будем получать по формуле (51) одно и то же число a^σ, которое зависит лишь от системы отсчёта σ и является его естественной характеристикой. Те системы, для которых $a^\sigma = 0$, мы будем называть естественными.

Примером естественной системы отсчёта является система падающего лифта или любая “инерциальная система” при отсутствии “сил тяготения”[98].

Из (51) легко получить фундаментальное соотношение

$$(w^\sigma_{i\alpha}w^\sigma_{k\beta} - w^\sigma_{i\beta}w^\sigma_{k\alpha})\,(w^\sigma_{l\gamma} + w^\sigma_{m\delta} - w^\sigma_{l\delta} - w^\sigma_{m\gamma}) - (w^\sigma_{l\gamma}w^\sigma_{m\delta} - w^\sigma_{l\delta}w^\sigma_{m\gamma})\,(w^\sigma_{i\alpha} + w^\sigma_{k\beta} - w^\sigma_{i\beta} - w^\sigma_{k\alpha}) = 0$$

связывающее ускорения тел i, k, l, m, находящихся под действием ускорителей α, β, γ, δ, измеренные в произвольной системе отсчёта σ.

Кроме a^σ, можно найти ещё два инварианта.

Так, из равенства (50) вытекает, что отношение двух сумм $a^\sigma + w^\sigma_{i\alpha}$ и $a^\sigma + w^\sigma_{i\beta}$, связанных с одним и тем же телом i и с двумя различными ускорителями α и β, не зависит от выбора этого тела, то есть

$$\frac{w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma}{w^\sigma_{i\beta} + a^\sigma} = \frac{w^\sigma_{k\beta} + a^\sigma}{w^\sigma_{k\beta} + a^\sigma} = \frac{w^\sigma_{l\alpha} + a^\sigma}{w^\sigma_{l\beta} + a^\sigma} = \ldots = \varphi_{\alpha,\beta}, \tag{52}$$

где $\varphi_{\alpha,\beta}$ – некоторая величина, инвариантная относительно выбора тел и играющая роль относительной характеристики ускорителей α и β.

Точно так же из равенства (50) следует, что отношение сумм $w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma$ и $w^\sigma_{k\alpha} + a^\sigma$, связанных с двумя различными телами i и k и с одним и тем же ускорителем α, не зависит от выбора этого ускорителя, то есть

$$\frac{w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma}{w^\sigma_{k\alpha} + a^\sigma} = \frac{w^\sigma_{i\beta} + a^\sigma}{w^\sigma_{k\beta} + a^\sigma} = \frac{w^\sigma_{i\gamma} + a^\sigma}{w^\sigma_{k\gamma} + a^\sigma} = \ldots = \psi_{i,k}, \tag{53}$$

где $\psi_{i,k}$ – новая величина инвариантная относительно выбора ускорителей и играющая роль относительной характеристики тел i и k.

[98] Оба последних понятия мы взяли в кавычки, желая подчеркнуть их интуитивное и нестрогое происхождение.

Среди всех тел множества $\mathfrak{M}$ выделим одно, обозначим его через 0 и назовём эталонным телом.

Точно так же через 0 обозначим эталонный ускоритель. Подставляя в равенства (52) и (53) вместо k и β, соответственно, 0 и 0, получим:

$$w_{i\alpha}^{\sigma} + a^{\sigma} = w_{i0}^{\sigma} + a^{\sigma}\varphi_{\alpha,0} = w_{00}^{\sigma} + a^{\sigma}\psi_{i,0}\varphi_{\alpha,0},$$

или на основании (49), окончательно:

$$w_{i\alpha}^{\sigma} + a^{\sigma} = (w_{00}^{0} + a^{0})\psi_{i,0}\varphi_{\alpha,0} \tag{54}$$

Итак, мы показали, что сумма $w_{i\alpha}^{\sigma} + a^{\sigma}$, связанная с телом i и ускорителем α, равна произведению двух величин, одна из которых $\varphi_{\alpha,0} \equiv \varphi_{\alpha}$ является инвариантной характеристикой ускорителя α, а другая $\psi_{i,0} \equiv \psi_i$ – инвариантной характеристикой тела i.

Заметим при этом, что в качестве характеристик α и i можно было бы взять любые функции $u(\varphi_{\alpha})$ и соответственно $v(\psi_i)$ (любая функция от инварианта есть инвариант). Однако, чтобы ввести такую характеристику наиболее разумным способом, необходимо воспользоваться двумя следующими опытными фактами:

1. Рассмотрим произвольное тело i и два произвольных ускорителя α и β.

Измерим ускорения $w_{i\alpha}^{\sigma}$ и $w_{i\beta}^{\sigma}$ и ускорение $w_{i,\alpha+\beta}^{\sigma}$ тела i при одновременном действии ускорителей α и β.

Опыт показывает, что имеет место следущее соотношение, справедливое при любых α, β и i:

$$w_{i,\alpha+\beta}^{\sigma} + a^{\sigma} = w_{i\alpha}^{\sigma} + a^{\sigma} + w_{i\beta}^{\sigma} + a^{\sigma}. \tag{55}$$

Подставляя (54) в (55), находим, что $u(\varphi_{\alpha}) = \varphi_{\alpha}$ обладает свойством аддитивности:

$$\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_{\alpha} + \varphi_{\beta} \tag{56}$$

2. Рассмотрим теперь два произвольных тела i и k и один ускоритель α.

Измерим ускорения $w_{i\alpha}^{\sigma}$ и $w_{k\alpha}^{\sigma}$ и ускорение $w_{i+k\alpha}^{\sigma}$ тела, полученного путём объединения тел i и k, при действии ускорителя α. Как и в предыдущем случае, результаты трёх измерений оказываются связанными между собою, однако, в отличие от (55), эта связь имеет вид:

$$\frac{1}{w_{i+k,\alpha}^{\sigma} + a^{\sigma}} = \frac{1}{w_{i\alpha}^{\sigma} + a^{\sigma}} + \frac{1}{w_{k\alpha}^{\sigma} + a^{\sigma}}. \tag{57}$$

Подставляя в (57) выражение (54), находим, что $v(\psi_i) = \frac{1}{\psi_i}$ обладает свойством аддитивности:

$$\frac{1}{\psi_{i+k}} = \frac{1}{\psi_i} + \frac{1}{\psi_k}. \tag{58}$$

Таким образом, удобно в качестве характеристики ускорителя α взять $u(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha$ и назвать[99] её силой F_α, а в качестве характеристики тела i взять $v(\psi_i) = \frac{1}{\psi_i}$ и назвать её массой m_i.

Переписывая равенство (54) в новых обозначениях, получаем окончательно:

$$w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma = (w^0_{00} + a^0)\frac{F_\alpha}{m_i}. \tag{59}$$

Итак, закон Нью́тона, записанный в традиционном виде (59), является следствием универсального соотношения (44) и опытного факта, состоящего в утверждении (47) и линейности $\lambda_{\mu\sigma}(x)$; кроме того, он содержит в себе два определения.

Принятые определения силы $F_\alpha = \varphi_\alpha$ и массы $m_i = \frac{1}{\varphi_i}$ удобны, так как в наиболее простой форме отражают факт существования двух дополнительных соотношений (55) и (57), связанных соответственно, с композицией ускорителей α и тел i.

Литература

[1] *Кулаков Ю.И.*, "Об одном принципе, лежащем в основании классической физики". Послано в ДАН СССР 28 января 1968 г.

[99] В принципе, мы могли бы назвать "силой" и "массой" любую функцию $u(\varphi_\alpha)$, и соответственно, $v(\psi_i)$, однако введённые таким образом величины обладали бы более сложными законами композиции.

Лекция 4

Геометрическая интерпретация основных понятий термодинамики

Каждая непротиворечивая, последовательная физическая теория должна содержать в самой себе всё необходимое для определения и измерения тех величин, с которыми эта теория имеет дело.

— Бор и Розенфельд

Мы предлагаем геометрическую интерпретацию термодинамики, позволяющую весьма просто получить, исходя из опытных данных, её основные понятия и законы.

Изложение состоит из двух независимых частей.

В первой части мы исходим из основного уравнения термодинамики, предполагая известными все основные понятия, и приходим к геометрической формулировке термодинамикии с помощью двух видов метрики – симметрической и антисимметрической, а также к “конечному уравнению термодинамики”, представляющему (повидимому, до сих пор не замеченную) интегральную форму основного уравнения.

Во второй части, напротив, мы будем исходить из эксперимента.

В основе нашего подхода лежат геометрические соотношения, обнаруживаемые при непосредственном анализе экспериментальных результатов и сразу приводящие к обоим принципам термодинамики.

I. Мы рассмотрим простейший случай, исключив влияние электрического и магнитного поля на вещество. В этом случае основное уравнение термодинамики имеет вид

$$dU = TdS - pdV. \qquad (60)$$

Обозначим через

$$A_{im}^{(S)} = -\int_i^m p_{(S=const)} dV$$

работу, производимую над системой при адиабатическом переходе из состояния i в состояние m , а через

$$A_{mn}^{(T)} = -\int_m^k p_{(T=const)} dV$$

работу при изотермическом переходе из состояния m в состояние k .

Тогда из (60) следует:

$$U_m - U_i = A_{im}^{(S)}$$

$$U_k - U_m = T_k(S_k - S_m) + A^{(T)}_{mk},$$

откуда, полагая $A^{(ST)} = A^{(S)}_{im} + A^{(T)}_{mk}$, имеем

$$U_k - U_i = T_k(S_k - S_i) + A^{ST}_{ik}. \tag{61}$$

Аналогично, полагая $A^{(TS)} = A^{(T)}_{in} + A^{(S)}_{nk}$, получим

$$U_k - U_i = T_i(S_k - S_i) + A^{TS}_{ik}. \tag{62}$$

Из (61) и (62) следует конечное уравнение термодинамики

$$a_{ik} = (T_i + T_k)(S_i - S_k) + 2(U_k - U_i), \tag{63}$$

где

$$a_{ik} = A^{(ST)} + A^{(TS)}.$$

Положим, далее $s_{ik} = A^{ST} - A^{(TS)}$, тогда из (61) и (62) получаем:

$$s_{ik} = -(T_i - T_k)(S_i - S_k). \tag{64}$$

Переходя к безразмерным переменным x и y

$$T = T_0\ (x - y), \qquad S = S_0\ (x + y)$$

перепишем (64) в виде

$$s_{ik} = T_0 S_0\ [-(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2]. \tag{65}$$

Итак,

$$x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{S_i}{S_0} + \frac{T_i}{T_0}\right)$$

и

$$y_i = \frac{1}{2}\left(\frac{S_i}{S_0} - \frac{T_i}{T_0}\right)$$

можно истолковать как декартовы координаты состояния i в двумерном псевдоевклидовом пространстве, симметрическая метрика которого задается равенством (65).

Это наводит на мысль придать геометрический смысл также основному уравнению (63).

Если обозначить

$$R_i = 2U_i - T_i S_i = U_i + F_i,$$

где U_i и F_i - внутренняя и свободная энергия состояния i , то уравнению (63) можно придать вид

$$a_{ik} = T_k S_i - T_i S_k + R_k P_i - R_i P_k, \tag{66}$$

где

$$P_i = P_k = 1.$$

Теперь можно истолковать T_i , S_i , R_i и $P_i = 1$ как три существенные и одна “замороженная” координаты состояния i в некотором четырёхмерном симплектическом пространстве, антисиммертическая метрика которого a_{ik} задаётся равенством (66).

II. Предположим теперь, что с помощью надлежащего описания экспериментальных процедур мы можем определить процедуры “адиабатического” и “изотермического” измерения системы.

Подчеркнём, что такое предположение предшествует введению понятий энтропии и температуры и не основывается на этих понятиях.

Каждой паре состояний i и k можно, как выше, сопоставить две экспериментально измеряемые величины – работы $A_{ik}^{(ST)}$ и $A^{(TS)_{ik}}$.

Легко видеть, что

$$s_{ik} = A_{ik}^{(ST)} - A_{ik}^{(TS)} = s_{ki} \tag{67}$$

$$a_{ik} = A_{ik}^{(ST)} + A_{ik}^{(TS)} = -a_{ki} \tag{68}$$

Симметричный характер s_{ik} наводит на мысль рассматривать эти числа как “расстояния” между состояниями системы.

Как известно, в двухмерной геометрии нулевой кривизны квадраты попарных расстояний между точками i, k, l, m обращают в нуль определитель Кели – Менгера

$$\begin{vmatrix} 0 & s_{ik} & s_{il} & s_{im} & 1 \\ s_{ki} & 0 & s_{kl} & s_{km} & 1 \\ s_{li} & s_{lk} & 0 & s_{lm} & 1 \\ s_{mi} & s_{mk} & s_{ml} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{69}$$

Как показывает опыт, числа s_{ik} для любых четырёх состояний системы удовлетворяют конечному уравнению (69).

Следовательно, можно ввести в пространстве состояний такую систему координат x, y , что s_{ik} может быть записано в виде:

$$S_{ik} = \pm(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2. \tag{70}$$

Поскольку на опыте получаются как положительные, так и отрицательные значения s_{ik} , мы должны выбрать в (70) знак минус.

Вводя новые координаты

$$S = \sqrt{\frac{S_0}{T_0}}(x + y), \qquad T = \sqrt{\frac{T_0}{S_0}}(x - y)$$

из (70) получаем (64).

Эти координаты S_i и T_i мы будем по определению называть *энтропией* и *температурой* системы, находящейся в состоянии i .

Для антисимметрического скалярного произведения a_{ik} мы не нашли в литературе тождеств подобных (69). Однако, соответствующий определитель может быть указан; оказывается, что опытные значения a_{ik} для **пяти** (для чётного числа состояний определитель типа (71) тождественно равен нулю при $a_{ik} = -a_{ki}$) произвольных состояний i, k, l, m, n удовлетворяют уравнению:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{il} & a_{im} & a_{in} & 1 \\ a_{ki} & 0 & a_{kl} & a_{km} & a_{kn} & 1 \\ a_{li} & a_{lk} & 0 & a_{lm} & a_{ln} & 1 \\ a_{mi} & a_{mk} & a_{ml} & 0 & a_{mn} & 1 \\ a_{ni} & a_{nk} & a_{nl} & a_{nm} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{71}$$

Можно показать, что определитель (71) обращается в нуль, если в качестве a_{ik} взять следующую антисимметрическую функцию от шести произвольных параметров:

$$a_{ik} = \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i + \gamma_i - \gamma_k \tag{72}$$

Отождествим α и β с S и T, введёнными при рассмотрении симметрической метрики s_{ik}. Система уравнений

$$s_{ik} = -(T_i - T_k)(S_i - S_k) \qquad a_{ik} = T_k S_i - T_i S_k + \gamma_k - \gamma_i \tag{73}$$

допускает однозначное решение относительно T, S и γ, если одному фиксированному состоянию 0 приписать произвольные значения T_0, S_0 и γ_0, а другому состоянию 1 – произвольное значение T_1. Тогда имеем

$$T_i = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2s_{01}} \cdot [(s_{i0} - s_{i1} + s_{01}) - (a_{i0} - a_{i1} + a_{01})], \tag{74}$$

$$S_i = S_0 - \frac{2s_{01}}{T_1 - T_0} \cdot \frac{s_{i0}}{(s_{i0} - s_{i1} + s_{01}) - (a_{i0} - a_{i1} + a_{01})}. \tag{75}$$

Если вместо γ_i ввести новую величину

$$U_i = \frac{1}{2}(\gamma_i + T_i S_i), \tag{76}$$

которую по определению назовём *внутренней энергией* системы в состоянии i, то будем иметь

$$U_i = U_0 - \frac{1}{2}(a_{i0} - s_{i0}) - \frac{2s_{01}}{T_1 - T_0} \cdot \frac{T_0 s_0}{(s_{i0} - s_{i1} + s_{01}) - (a_{i0} - a_{i1} + a_{01})}. \tag{77}$$

Из (73) и (76) непосредственно вытекает конечное уравнение термодинамики (63), а из (63) легко получить уравнение (60).

Наконец, *количество тепла*, поглощённое системой при переходе из состояния i в состояние k по определению считаем равным

$$Q_{ik} = U_k - U_i - A_{ik}^{TS}.$$

Легко показать, что

$$\frac{Q_{ik}^{(ST)}}{Q_{ik}^{(TS)}} = \frac{T_i}{T_k}.$$

В заключение считаю приятным долгом выразить свою глубокую признательность А.И.Фету, благодаря живому интересу и постоянным напоминаниям которого, настоящая статья доведена до конца.

“Октябрь уж наступил ...”

КУЛАКОВ Юрий Иванович
К теории физических структур
(Четыре лекции для студентов НГУ)

Ответственный за выпуск Г.Г.Михайличенко.

Подписано к печати 13 февраля 1968 года. МН04051
Формат бумаги 60 X 80 Объём 1,5 п.л. Цена 5 коп.
Тираж 200 экз. No 74.

Отпечатано на ротапринте НГУ. Новосибирск, 90.

Приложение IV.

Полная библиография по Теории физических структур

Слова мудрых – как иглы и как вбитые гвозди, и составители их – от единого пастыря. А что сверх всего этого, сын мой, того берегись: составлять много книг – конца не будет, и много читать – утомительно для тела.

— Еккл. **12**, *11 – 12.*

s r

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Полная библиография [100]
по теории физических структур

1968 – 2003

1968

1. *Кулаков Ю.И.* К теории физических структур (Четыре лекции для студентов НГУ).– Новосибирск: Изд-во НГУ, 1968. – 30 с.

2 . *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. (Дополнение Г.Г.Михайличенко).– Новосибирск: Изд-во НГУ,1968. – 226 с.

3. *Михайличенко Г.Г.* Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. С. 175–226. // Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур. (Дополнение Г.Г.Михайличенко).– Новосибирск: Изд-во НГУ, 1968. – 226 с.

1969

4. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур // Тез. IV Всесоюз. межвуз. конф. по геометрии (Тбилиси, 27 – 31 октября 1968). – Тбилиси: Изд-во Тбилисского гос. ун-та, 1969. – С. 130–131.

5. *Кулаков Ю.И.* Математика, физика и действительность // Тез. выступления на методологическом семинаре в НГУ 14 мая 1969 г. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1969. – 2 с.

[100] Эта библиография содержит наряду со ссылками на работы разных авторов, посвящённых теории физических структур, ссылки на мировоззренческие статьи Ю.И.Кулакова, представляющие собой дальнейшее развитие идей, содержащихся в теории физических структур.

1970

6. *Кулаков Ю.И.* Основные положения теории физических структур // Тез. докл. на Всесоюз. симп. по теории познания в Физическом ин АН СССР 20 января 1970 года. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1970. – 5 с.

7. *Кулаков Ю.И.* К вопросу об общей теории физических структур // Тез. докл. Всесоюз. симп. по теории познания (Москва, 19 – 20 января 1970). – М. ФИАН, 1970. – С. 58–60.

8. *Кулаков Ю.И.* Об основаниях физики. Математическая теория инвариантов // Тез. XIV науч.-техн. конф. Мин-ва высш. и средн. спец. образования СССР (Москва, 27 – 29 мая 1970). – М.: ВЗПИ, 1970. – С. 21.

9. *Кулаков Ю.И.* Основания физики как математическая теория инвариантов // Тез. III Всесоюз. симп. по философским вопросам релятивистской физики и космологии (Киев, 2 – 4 июня 1970). – Киев: Ин-т философии АН УССР, 1970. – С.?

10. *Кулаков Ю.И.* Шестая проблема Гильберта и теория физических структур // Тез. докл. по алгебре, мат. логике и вычислит. математике на конференции педагогических институтов Центральной зоны РСФСР (Иваново, 6 – 9 июня 1970). – Иваново: Иванов. пед. ин-т. 1970. – С. 153–155.

11. *Кулаков Ю.И.* Об одном принципе, лежащем в основании классической физики // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 193, № 1 . – С. 72 – 75. (Представлена акад. М.А.Леонтовичем 12 февраля 1968 г.).

12. *Кулаков Ю.И.* Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР, – 1970. – Т. 193, № 5 . – С. 985–987. (Представлена акад. А.Д. Александровым 9 июля 1969 г.).

13. *Kulakov Ju.I.* The Geometry of Spaces of Constant Curvature as a Special Case of the Theory of Physical Structures // Soviet Math. Doklady. – 1970. – Vol. 11, № 4. – P. 1055–1057.

14. *Михайличенко Г.Г.* Об одном функциональном уравнении с трёхиндексными переменными в теории физических структур // Материалы VIII юбилейной науч. студ. конф. (Новосибирск, апрель 1970). – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1970. – С. 10–11.

15. *Михайличенко Г.Г.* Решение функциональных уравнений с двухиндексными переменными // Тез. докл. по алгебре, мат. логике и вычислит. математике на конференции педагогических институтов Центральной зоны РСФСР (Иваново, 6 – 9 июня 1970). – Иваново, Ивановский пед. ин-т, – 1970. – С. 165–167.

16. *Михайличенко Г.Г.* Тернарная физическая структура ранга (3,2) // Укр. мат. журн. – 1970, – Т. 22, № 6 – С. 837–841.

17. *Михайличенко Г.Г.* Методы решения одного класса функциональных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1970. – 20 с.

1971

18. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур как абстрактная теория физических систем // Системный метод и современная наука. Вып. I. – Новосибирск, 1971. – С. 92–102.

19. *Кулаков Ю.И.* О физических структурах. – КИЕВ, 1971. – 24 с. – (Препр. Ин-т теорет. физики АН УССР; ИТФ – 71 – 19 Р).

20. *Kulakov Yu.I.* The One Principle Underlying Classical Physics // Soviet Physics – Doklady. – 1971. – Vol. 15, No. 7. – P. 666–668.

21. *Kulakov Ju.I., Protasievicz T.I.* Phenomenological Symmetry and the Foundations of Physics // Abstracts IV International Congress of Logical, Methodology and Philosophy of Science (Bucharest, Romania, 29 august – 4 september 1971), – P. 246–247.

22. *Кулаков Ю.И.* Некоторые замечания о единой физической картине мира // Teorie a Metoda (Чехословакия). – Прага, 1971. – Т. 3, № 3 , – С. 53–62.

23. *Кулаков Ю.И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. мат. журн. – 1971. – Т. 12, № 5 , – С. 1142–1145.

24. *Кулаков Ю.И.* О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 201, № 3 . – С. 570–572. (Представлена акад. С.Т.Беляевым 12 мая 1969 г.).

25. *Михайличенко Г.Г.* Методы решения некоторых уравнений теории физических структур // Вопросы теории и методики преподавания физики. – Новосибирск, 1971, – С. 13–21. – (Новосиб. гос. пед. ин-т. Науч. тр. Вып. 71).

26. *Михайличенко Г.Г.* О возможной структуре физических теорий феноменологического типа ранга (3,2) // Вопросы теории и методики преподавания физики. – Новосибирск, 1971. – С. 3–12. (Новосиб. гос. пед. ин-т. Научн. тр. Вып. 71).

27. *Овчинников Н.Ф.* К проблеме единства физического знания. // Природа, – 1971, 2 . – С. 106–110. – Рец. на книгу: Ю.И. Кулаков "Элементы теории физических структур". – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1968. – 226 с.

1972

28. *Кулаков Ю.И.* К вопросу об общей теории физических структур // Теория познания и современная физика (Сборник материалов в помощь философским (методологическим) семинарам). Выпуск IV. – Москва: ФИАН, 1972. – С. 85–94.

29. *Кулаков Ю.И.* Основные положения теории физических структур // Teorie a Metoda (Чехословакия). – Прага. 1972. – Т. 4, № 1 . – С. 85–90.

30. *Кулаков Ю.И.* Ньютоновская механика с точки зрения теории физических структур // Teorie a Metoda (Чехословакия). – Прага. 1972. – Т. 4, № 3 . – С. 59–78.

31. *Кулаков Ю.И.* К вопросу об основании теории тяготения // Тез.докл. Третьей сов. гравитац. конф. (Ереван, 11 – 14 октября 1972). – Ереван: Ереванский ун-т, 1972. – С. 85–88.

32. *Кулаков Ю.И.* Ньютоновская механика с точки зрения теории гомогенных систем // Филосовски проблеми сучастного природознавства. Вып. 27. – КИЕВ: Киев. ун-т, 1972. – С. 28–39.

33. *Kulakov Ju.I.* A Mathematical Formulation of the Theory of Physical Structure // Siberian Math. Journal. (Translation published May, 1972), P. 822–824.

34. *Михайличенко Г.Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР, 1972. – Т. 206, № 5 . – С. 1056–1058. (Представлена акад. А.Д.Александровым 23 сентября 1970 года).

1973

35. *Кулаков Ю.И.* Инвариантная формулировка классической теории измерений // Teorie a Metoda (Чехословакия). – Прага, 1973. – Т. 5, № 2 . – С. 55–65.

36. *Кулаков Ю.И.* Основания физики как математическая теория инвариантов // Методологический анализ теоретических и экспериментальных оснований физики гравитации. – КИЕВ: Наукова думка, 1973. – С. 227–234.

37. *Kulakov Ju.I., Protasievicz T.I.* Phenomenological Symmetry and the Foundations of Physics // International Logic Review (Италия). – 1973. – № 7 . – P. 98–101.

38. *Михайличенко Г.Г.* Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, № 5 . – С. 589–598.

39. *Михайличенко Г.Г.* Понятие массы // Некоторые вопросы теоретической физики. – Новосибирск, 1973. – С 4–11. – (Новосиб. гос. пед. ин-т. Науч. труды. Вып 79).

40. *Михайличенко Г.Г.* Физические структуры // Некоторые вопросы квантовой теории поля, нелинейной оптики и межмолекулярных взаимодействий. – Новосибирск, 1973. – С. 18–26. – (Новосиб. гос. пед. ин-т. Науч. труды. Вып. 86).

41. *Михайличенко Г.Г.* Бинарная физическая структура ранга (3,2). // Сиб. мат. журн. – 1973. – Т. 14, № 5 . – С. 1057–1064.

42. *Михайличенко Г.Г.* Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1973. – 14 с.

1975

43. *Кулаков Ю.И.* Структура и единая физическая картина мира // Вопросы философии. – 1975. – № 2 . – С. 15–26.

44. *Kulakov Ju.I.* Theorie der Physikalischen Struckturen und das 6 Problem von Hilbert // Proceedings of the Abstracts V International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science (London, Ontario, Canada, 27 August – 2 September, 1975.)

1976

45. *Бирюков Б.В., Кулаков Ю.И., Новик И.Б.* “Физикалистский” и теоретико-системный аспекты кибернетики // Управление, информация, интеллект (Под ред. А.И.Берга). – М.: Мысль, 1976. – С. 43–70.

46. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур и Шестая проблема Гильберта // Системный метод и современная наука. – Новосибирск, 1976. – С. 156–161.

47. *Кулаков Ю.И.* О возможности сведéния законов физики к законам геометрии // Классическая и квантовая теория гравитации. – МИНСК, 1976. – С. 59–60.

48. *Кулаков Ю.И.* Метатеоретизация фундаментальных знаний о природе // Teorie a Metoda (Чехословакия). – Прага. – 1976 – Т. 8, № 2 – С. 16–29.

49. Group-Theoretical Classification of Chimical Elements. Part I, – (Теоретико-групповая классификация химических элементов. I. Физические основания) *Bykov V.M., Kulakov Ju.I., Rumer Ju.B., Fet A.I.* – М, 1976. – 28 с. – (Препр. Институт теоретической и экспериментальной физики АН СССР; ИТЭФ – 26 (на англ. яз.)).

50. Group-Theoretical Classification of Chimical Elements. Part II, (Теоретико-групповая классификация химических элементов. II. Описание используемых групп) *Bykov V.M., Kulakov Ju.I., Rumer Ju.B., Fet A.I.* – М. 1976. – 40 с. – (Препр. Институт теоретической и экспериментальной физики АН СССР; ИТЭФ – 90 (на англ. яз.)).

51. *Михайличенко Г.Г.* Тернарная физическая структура ранга (2,2,2) // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 8 (171). – С. 60–67.

52. *Левин А.Е.* Неизбежное “после” // Природа. – 1976. – № 4 . – С. 60–67.

1977

53. Group-Theoretical Classification of Chimical Elements. Part III, (Теоретико-групповая классификация химических элементов. III. Сопоставление со свойствами химических элементов *Bykov V.M., Kulakov Ju.I., Rumer Ju.B., Fet A.I.* – М, 1977. – 25 с. (Препр. Институт теоретической и экспериментальной физики АН СССР; ИТЭФ – 7 (на англ. яз.)).

54. *Михайличенко Г.Г.* Об одной задаче в теории физических структур // Сиб. мат. журн. – 1977 – Т. 18, № 6 , – С. 1342–1355.

1978

55. *Кулаков Ю.И.* К теории физических структур // Принципы симметрии (Историко-методологические проблемы). – М.: Наука, 1978. – С. 141-152.

56. *Кулаков Ю.И.* К вопросу о единой физической картине мира // История и методология естественных наук. Выпуск XIX . – М.: Изд-во МГУ, 1978. – С. 3–29.

1979

57. *Кулаков Ю.И.* О необходимости исследований оснований теоретической физики // Проблемы и особенности современной научной методологии. – Свердловск: Уральский научный центр АН СССР. – С. 6–23.

1980

58. *Кулаков Ю.И.* О необходимости новой постановки проблемы в теоретической физике // Физическая теория; философско-методологический анализ (Отв. ред. И.А.Акчурин). – М.: Наука, 1980. – С. 192–209.

59. *Кулаков Ю.И.* Время как физическая структура // Моделирование и прогнозирование в экологии: Межвуз. сб. науч. тр. – Рига: Латв. ун-т, 1980. – С. 23–43.

1981

60. *Михайличенко Г.Г.* Групповая и феноменологическая симметрии в геометрии (Методические рекомендации в помощь учебно-исследовательской и научно-исследовательской работе студентов педагогического института). – Новосибирск: Новосиб. пед. ин-т, 1981. – 16 с.

61. *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 4 . – С. 803–805. (Представлена акад. А.Д.Александровым 19 марта 1981 года).

62. *Mihailičenko G.G.* Two-dimensional geometry //Soviet Math. Doklady. – 1981. – Vol 24, No. 2. – P. 346–348.

63. *Mikhaylitchenko G.G.* Géométries a deux dimensions dans la théorie de structures physiques // C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (16 novembre 1981), Sér. I, – P. 529–531. (Présenteé par Serge Sobolev).

1982

64. *Кулаков Ю.И.* Время как физическая структура // Развитие учения о времени в геологии. – КИЕВ: Наукова думка, 1982. – С. 126–150.

65. *Михайличенко Г.Г.* Трёхмерные алгебры Ли преобразований плоскости // Сиб. мат. журн. – 1982. – Т. 23, № 5 , – С. 132–141.

66. *Шахов В.И., Ускеев С.Ш.* О путях формализации законов физики // Вопросы кибернетики (Кибернетика и логическая формализация; аспекты истории и методологии). Под ред. Б.В.Бирюкова и А.Г.Спиркина. – М, 1982. – С. 130–165.

1983

67. *Кулаков Ю.И.* Единая классификация физических законов // Тез. докл. конф. “Экономика и совершенствование управления на базе системного подхода” (Волгоград, 17 декабря 1983). – Волгоград: Волгоград. обл. совет НТО, 1983. – С. 139–142.

68. *Kulakov Ju.I.* The problem of unity in physical knowledge // Logic, Methodology and Philosophy of Science (Papers of Soviet National Organization Committee for the VII International Congress of Logical, Methodology and Philosophy of Science (Austria, Salzburg, Juli 11 – 16, 1983)). Sections 6, 8–13. – Moscow, 1983. – P. 94–96.

69. *Кулаков Ю.И.* О теории физических структур // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 15 (Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, т. 127). Сборник работ под ред. О.А.Ладыженской. – Л: Наука, 1983. – С. 103–151.

70. *Михайличенко Г.Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометриях // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 269, № 2 . – С. 284–288. (Представлена акад. А.Д.Александровым 1 марта 1982 года).

71. *Mikhaĭlichenko G.G.* On Group and Phenomenological Symmetries in Geometry // Soviet Math. Dokl. – 1983. – Vol. 27, No 2. – P. 325–329.

72. *Ускеев С.Ш.* Логико-методологические аспекты системно-метатеоретического подхода в науке (на материале физики). Автореф. дис. ... канд. фил. наук: – М., 1983. – 25 с.

1984

73. *Кулаков Ю.И.* Естественная таблица химических элементов // Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1984. – С. 82–90.

74. *Михайличенко Г.Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометриях // Сиб. мат. журн. – 1984. – Т. 25, № 5 . – С. 99-113.

75. *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3) // Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1984. – С. 91–113.

76. *Шахов В.И.* Анализ категории времени как методологическая задача, актуализируемая развитием современных естествознания и техники // Тез. докл. науч. конф.: Книга В.И.Ленина “Материализм и эмпириокритицизм” и современное естествознание. – М.: Ин-т философии АН СССР, 1984. – С. 109–113.

77. *Петухов В.Р.* Динамические системы и инвариантные многопараметрические группы. Приложение к теории физических структур. – М., 1984. – 19 с. (Препринт. Ин-т теорет. и эксперимент. физики; ИТЭФ – 172).

1985

78. *Кулаков Ю.И.* Теория размерности физических величин. I. // Моделирование в плёночной электромеханике (Вычислительные системы. Выпуск 110). – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1985. – С. 52–88.

79. *Михайличенко Г.Г.* Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур) // Докл. АН СССР. – 1985 – Т. 284, № 1 . – С. 39–43. (Представлена акад. А.Д.Александровым 6 июля 1984 года).

80. *Mikhaĭlichenko G.G.* Phenomenological and Group Symmetry in the Geometry of two Sets (Theory of Physical Structures) // Soviet Math. Dokl. – 1985, Vol. 32, No. 2. – P. 371–374.

81. *Михайличенко Г.Г.* Метрика плоскости как двухточечный инвариант // Сиб. мат. журн. / Аннотации статей, депонированных в ВИНИТИ. т. 26, № 5 , 1985. – С. 198. (Полностью статья депонирована в ВИНИТИ за № 6980 – 84 от 30 октября 1984 г.).

82. *Владимиров Ю.С., Гаврилов В.Р.* Некоторые приложения теории физических структур // Исследования по классической и квантовой теории гравитации: Сб. науч. тр. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1985. – С. 18–26.

83. *Витяев Е.Е.* Числовое, алгебраическое и конструктивное представления одной физической структуры // Логико-математические основы проблемы МОЗ. Вычислительные системы. Выпуск 107. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1985. – С. 40–50.

1986

84. *Кулаков Ю.И.* Теория размерности физических величин. II. // Машинный анализ сложных структур (Вычислительные системы. Выпуск 118). – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1986. – С. 5–27.

85. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур в единой физической картине мира // Тез. докл. IX Всесоюз. совещ. “Методологические проблемы оснований науки” (Харьков, 8 – 10 октября 1986). – КИЕВ: Наукова думка, 1986. – С. 19–20.

86. *Кулаков Ю.И.* Действительно ли релятивистская масса зависит от скорости? // Тез. докл. конф. “Проблемы организации рефлексивных процессов” (Новосибирск, 2 – 4 декабря 1986). – Новосибирск: СО АН, 1986. – С. 109–110.

87. *Михайличенко Г.Г.* Краткое сообщение Г.Г.Михайличенко (Новосибирск) “Некоторые замечания к классификации Софуса Ли групп преобразований” // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика, механика.– 1086, – № 5. – С. 93.

88. *Лев В.Х.* Двумерные и трёхмерные геометрии в теории физических структур // Машинный анализ сложных структур. Выпуск 118. Вычислительные системы. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1986. – С. 28–36.

1987

89. *Кулаков Ю.И., Сычёва Л.С.* Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике // Исследовательские программы в современной науке. – Новосибирск: Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1987. – С. 99–120.

90. *Kulakov Ju.I.* On the Unified Physical Image of Nature // Abstracts VIII International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. (Moskow. USSR, 17 - 22 august 1987) Vol.2. – P .63–66.

91. *Михайличенко Г.Г.* Группы движений в геометрии двух множеств // Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометрии в целом (Новосибирск). – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1987. – С. 85.

1988

92. *Кулаков Ю.И.* Новая формулировка теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 125. – Новосибирск: Ин-т математики СОАН, 1988. – С. 3–32.

93. *Kulakov Ju.I.* Physical structure as a new level of physico-mathematical reality // Abstracts Thirteenth International Wittgenstein Symposium (14 – 21 august 1988 in Kirchberg am Wechsel). – Kirchberg/Wechsel, Österreich, 1988, – P. 43.

94. *Михайличенко Г.Г., Лозицкий Е.Л.* Простейшие двуметрические физические структуры // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 125. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1988. – С. 88–89.

95. *Лев В.Х.* Трёхмерные геометрии в теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 125. – Новосибирск: Ин-т математики СОАН, 1988. – С. 90–103.

96. *Владимиров Ю.С.* Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 125. – Новосибирск: Ин-т математики СОАН, 1988. – С. 42–60.

97. *Владимиров Ю.С.* Описание взаимодействий в рамках теории бинарных физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 125. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1988. – С. 61–87.

98. *Самохвалов К.Ф.* К обоснованию теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 125. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1988. – С. 33–41.

1989

99. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур и программа перестройки оснований физики // Сборник трудов V Международного симпозиума “Философия, физика, космос”. (Болгария, Кырджали, 9 – 12 мая 1989). – София, 1989. – С. 20–23.

100. *Kulakov Ju.I.* Die Theorie der physikalischen Strukturen und das Programm der Umwandlung der Grundlagen der Physik // Reports of XIII International Wittgenstein - Symposium 14 - 21 august 1988. Kirchberg am Wechsel (Austria). – Vienna: Hölder - Pichler - Tempsky, 1989. – P.51–53.

101. *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия геометрии двух множеств // Укр. мат. журн. – 1989, – Т. 41, № 11. – С. 1501–1506.

102. *Михайличенко Г.Г.* Групповые свойства бинарной физической структуры ранга (3,3) // Сибирский математический журнал / Аннотации статей, депонированных в ВИНИТИ. т. 30, № 1, 1989. (Полностью статья депонирована в ВИНИТИ за № 3855-В 87 от 29 мая 1987 г.).

103. *Михайличенко Г.Г.* Некоторые замечания об изоморфизме и подобии групп преобразований, их расширении и двухточечных инвариантах // Сибирский математический журнал / Аннотации статей, депонированных в ВИНИТИ. т. 30, № 1, 1989. (Полностью статья депонирована в ВИНИТИ за № 3858-В 87 от 29 мая 1987 г.).

104. *Михайличенко Г.Г.* Групповые свойства физических структур // Сиб. мат. журн. / Аннотации статей, депонированных в ВИНИТИ. т. 30, № 1, 1989. (Полностью статья депонирована в ВИНИТИ за № 3855-В 87 от 29 мая 1987 г.).

105. *Владимиров Ю.С.* Пространство–время: явные и скрытые размерности. – М.: Изд-во "Наука", 1989. – С. 47–55.

1990

106. *Кулаков Ю.И.* О феноменологической симметрии, лежащей в основании современной физики // Тез. докл. X Всесоюз. конф. по логике, методологии и философии науки (Минск, 24 – 26 сентября 1990 г.) – МИНСК: Изд-во БГУ, 1990. – С. 151–152.

107. *Кулаков Ю.И.* Физическая структура как параметрически заданная поверхность // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 135. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1990. – С. 3–26.

108. *Михайличенко Г.Г.* Групповые свойства произвольных физических структур // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 135. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1990. – С. 27–39.

109. *Михайличенко Г.Г.* Группы движений в геометрии двух множеств // Сиб. мат. журн. / Аннотации статей, депонированных в ВИНИТИ. т. 31, № 5, 1990, С. 204-205. (Полностью статья депонирована в ВИНИТИ за № 6016-В 89 от 26 сентября 1989).

110. *Михайличенко Г.Г.* Групповые свойства физических структур // Сиб. мат. журн. / Аннотации статей, депонированных в ВИНИТИ. т. 31, № 3, 1990, С. 210 (Полностью статья депонирована в ВИНИТИ за № 1534-В 89 от 10 марта 1989 г.).

111. *Ионин В.К.* Абстрактные группы как физические структуры // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 135. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1990. – С. 40–43.

112. *Владимиров Ю.С., Соловьёв А.В.* Физическая структура ранга (4,4;б) и трёхкомпонентные спиноры // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 135. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1990. – С. 44–66.

113. *Соловьёв А.В.* К теории бинарных физических структур ранга (5,5;б) и выше // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 135. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1990. С. – 67–77.

114. *Лев В.Х.* Физические структуры ранга (4,2) // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 135. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1990. – С. 78–96.

115. *Лев В.Х.* Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур. – Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – МИНСК, 1990. – 10 с.

116. *Лозицкий Е.Л.* Углы в плоских геометриях // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 135. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1990. – С. 97–111.

1991

117. *Кулаков Ю.И.* Классификация химических элементов на новой основе. // Классическое естествознание и современная наука. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1991. – С. 97–118.

118. *Кулаков Ю.И.* Сотворение мира как акт материализации физических структур // Материалы международного семинара “Проблемы первоначал мира в науке и теологии” (Санкт-Петербург. 27 – 29 ноября 1991). – СПБ., 1991. – С. 22.

119. *Михайличенко Г.Г.* Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства (в рамках теории физических структур) // Изв. ВУЗов. Математика. – 1991. – № 6. – С. 28–35.

120. *Михайличенко Г.Г.* Двуметрические физические структуры и комплексные числа // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 321, № 4. – С. 677–680.

121. *Карнаухов А.В.* Описание спинорных частиц в рамках метода интегрирования по траекториям и бинарная геометрофизика: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: – М., 1991. – 11 с.

122. *Лексин Ю.* Учитель // Знание–сила. – 1991, – № 12. – С. 60–65.

1992

123. *Кулаков Ю.И.* Геометрии Лобачевского и Римана как частные случаи теории физических структур // Тез. докл. Междунар. науч. конф. "Лобачевский и современная геометрия" (Казань, 18 – 22 августа 1992). Ч. II. – Казань: Изд-во КГУ, 1992. – С. 34.

124. *Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. – М.: Изд-во "Архимед", 1992. – 182 с.

125. *Михайличенко Г.Г.* Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства (в рамках теории физических структур) // Тез. докл. Междунар. науч. конф. "Лобачевский и современная геометрия" (Казань, 18 – 22 августа 1992). Ч. II. – Казань: Изд-во КГУ, 1992. – С. 41.

126. *Михайличенко Г.Г.* Групповые свойства физических структур. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: – Новосибирск, 1992. – 29 с.

127. *Лексин Ю.* Гармония для избранных // Знание–сила. – 1992, – № 1. – С. 47–57.

1993

128. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур и проблема единства физического знания // Единство физики (Под ред. О.С.Разумовского и А.Стригачёва). – Новосибирск: ВО "Наука", 1993. – С. 69–91.

129. *Кулаков Ю.И.* Каким быть институту духовного возрождения науки? // Знание–сила. – 1993, – № 11. – С. 19–23.

130. *Кулаков Ю.И.* (Новосибирск). Проблема первооснов бытия и Мир Высшей реальности // О первоначалах мира в науке и теологии. – СПБ.: Изд-во "Петрополис", 1993 – С. 82–100.

131. *Кулаков Ю.И.* Самый общий взгляд на проблему творения // Тез. докл. I Междунар. конф. "Алтай. Космос. Микрокосм" (Барнаул – Горный Алтай, 7 – 12 июня 1993). – Барнаул: Изд-во "Ак-Кем", 1993. – С. 120-126.

132. *Михайличенко Г.Г.* Двуметрические физические структуры ранга $(n+1,2)$ // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, № 3. – С. 132–143.

133. *Владимиров Ю.С.* Фундаментальная физика и религия. – М.: Изд-во "Архимед", 1993. – 184 с.

1994

134. *Кулаков Ю.И.* Какой представляется мне теоретическая физика XXI века // Знание–сила. – 1994, – № 12. – С. 37–45.

135. *Кулаков Ю.И.* Какой представляется мне на данном этапе высшая цель науки // Тез. докл. II Междунар. конф. "Алтай. Космос. Микрокосм" (Барнаул – Горный Алтай, 6 – 11 июня 1994) Тема конференции: пути духовного и экологического преобразования планеты. – Барнаул: Изд-во "Ак-Кем", 1994. – С. 120–126.

136. *Михайличенко Г.Г.* К вопросу о симметрии расстояния в геометрии // Изв. ВУЗов. Математика. – 1994, № 4 – С. 21–23.

1995

137. *Кулаков Ю.И.* Физические основания теории относительности // Тез. докл. Первой ионовской шк. по основаниям теории физического пространства-времени (Ярославль, 18 – 25 июня 1995. Ярославский гос. пед. ун-т). – М.: Изд-во МГУ, 1995. – С. 34–36.

138. *Kulakov Yu.I.* Physical Foundations of Linear Algebra and Euclidean Geometry. //Gravitation and Cosmology. – 1995, – Vol.1, No. 3. – P.177–183.

139. *Кулаков Ю.И.* О единой картине мира, положенной в основу физического образования в Горно-Алтайском университете // Современная культура и изменения в содержании образования (Методические материалы для преподавателей, аспирантов и студентов II Сибирской конференции "Интеллект, культура и образование" (Новосибирск, 4 – 6 октября 1994 г.)). Вып. 3. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1995. – С. 61–64.

140. *Кулаков Ю.И.* О себе и о своём деле // Кан-Алтай. – 1995. – № 1(5). – С. 15–16.

141. *Кулаков Ю.И.* Учёный, человек, гражданин (Воспоминания о Тамме) // Кан-Алтай. – 1995. – № 1(5). – С. 17–18.

142. *Кулаков Ю.И.* Некоторые соображения по поводу программы духовного и культурного развития Республики Алтай // Кан-Алтай. – 1995. – № 2(6). – С. 44–50.

143. *Кулаков Ю.И., Тычинская И.И.* Духовность и наука // Кан-Алтай. – 1995. – № 3(7). – С. 22–25.

144. Философы России XIX - XX столетий (Биографии, идеи, труды). Изд. второе, перераб. и доп. – М.: Изд-во "Книга и бизнес", 1995. – 752 с. Статья "Кулаков Юрий Иванович", – С. 319.

145. *Владимиров Ю.С.* Бинарная геометрофизика // Тез. докл. на Первой ионовской школе по основаниям теории физического пространства-времени (Ярославль, 18 – 25 июня 1995. Ярославский государственный педагогический университет). – М.: Изд-во МГУ, 1995. – С. 13–15.

146. *Владимиров Ю.С.* Binary Geometrophysics: Space–Time, Gravitation // Gravitation and Cosmology. – 1995. – Vol. 1, No. 3 – P. 184–190.

1996

147. *Кулаков Ю.И.* Встреча в Цахкадзоре // Вопросы истории естествознания и техники. – 1996. – № 2. – С. 171–172.

148. *Кулаков Ю.И.* Еретические горизонты физика // Вопросы истории естествознания и техники. – 1996. – № 4. – С. 165–167.

149. *Кулаков Ю.И.* Поиск научной истины ведёт к Богу // Взаимосвязь физической и религиозной картин мира (Физики-теоретики о религии). Под ред. Ю.С.Владимирова. Вып. 1 – Кострома: Изд.-во МИИЦАОСТ, 1996. – С. 53–77.

150. *Михайличенко Г.Г.* Простейшие полиметрические геометрии // Докл. РАН, – 1996. Т. 348, № 1.– С. 22-24.

151. *Владимиров Ю.С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. – М.: Изд-во МГУ, 1996. – 262 с.

152. *Владимиров Ю.С.* Фундаментальная физика, философия и религия. – Кострома: Изд-во МИИЦАОСТ, 1996. – 228 с.

153. *Владимиров Ю.С.* Бинарная геометрофизика // Конструкция времени в естествознании: На пути к пониманию феномена времени. Часть I. Междисциплинарное исследование. – М.: Изд-во МГУ, 1996. – С. 29–47.

154. *Владимиров Ю.С.* Соотношение фундаментальной физики, философии и религии // Взаимосвязь физической и религиозной картин мира (Физики-теоретики о религии). Вып. 1. – Кострома: Изд-во МИИЦАОСТ, 1996. – С. 21–31.

1997

155. *Кулаков Ю.И.* Дуальные физические структуры – универсальный ключ к основаниям физики и геометрии // Тез. Междунар. конф. "Геометризация физики III" (Казань, 1 – 5 октября 1997 г.). – Казань: Изд-во "Хэтер", 1997, – С. 59–60.

156. *Кулаков Ю.И.* Синтез науки и религии // Сознание и физическая реальность. – 1997. – Т. 2, № 2. – С. 1–14.

157. *Кулаков Ю.И.* Основы мироздания с учётом современных знаний о Мире, Природе и Человеке // Матер. X Междунар. конгр. "Социальные доктрины основных религиозных конфессий" (Санкт-Петербург, 23 – 26 октября 1997 г.). – СПБ. 1997. – С. 45–47.

158. *Михайличенко Г.Г.* Математический аппарат теории физических структур. – Горно-Алтайск: Изд-во ГАГУ, 1997. – 143 с.

159. *Владимиров Ю.С.* Истоки и развитие бинарной геометрофизики // Исследования по истории физики и механики (1991 – 1992). – М.: Изд-во Наука, 1997. – С. 77–100.

160. *Владимиров Ю.С.* Эрнст Мах и физическая картина мира // Исследования по истории физики и механики (1993 – 1994). – М.:. Изд-во Наука, 1997. – С. 24–46.

161. *Литвинцев А.А.* (Горно-Алтайский государственный университет). Комплексная физическая структура ранга (3,2). // Материалы XXXV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 22 – 24 апреля 1997 г.) Математика. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997 – С. 62–63.

162. *Литвинцев А.А.* (Горно-Алтайский государственный университет). Решение одного дифференциального уравнения для функции многих комплексных переменных. // Материалы XXXV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 22 – 24 апреля 1997 г.) Математика. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. – С. 64–65.

163. *Кыров В.А.* (Горно-Алтайский государственный университет). Решение функционального уравнения инвариантности метрики для плоскости Гельмгольца. // Материалы XXXV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 22 – 24 апреля 1997 г.) Математика. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. – С. 58–59.

164. *Симонов А.А.* (Горно-Алтайский государственный университет). Физическая структура ранга (3,2) на абстрактных множествах. // Материалы XXXV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 22 – 24 апреля 1997 г.) Математика. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. – С. 100–101.

165. *Симонов А.А.* (Горно-Алтайский государственный университет). Групповые решения трёхточечных функциональных уравнений. // Материалы XXXV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 22 – 24 апреля 1997 г.) Математика. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. – С. 102–103.

1998

166. *Кулаков Ю.И.* Метафизические основы мироздания // Доклады XX Всемирного философского конгресса: философия в воспитании человечества (Бостон, США, 10 – 16 августа 1998).
Секция 1: Метафизика. – Бостон, 1998.

167. *Кулаков Ю.И., Тычинская И.И.* Христианская культура и проблемы современного образования // Экология человека: духовное здоровье и реализация творческого потенциала личности (О проблеме экологизации воспитания и образования).
Т. I. – Новосибирск, 1998. – С. 66–77.

168. *Кулаков Ю.И.* Горно-Алтайская блочно-периодическая таблица химических элементов $\mathfrak{KuFeRum}$. Отдельное издание. – Горно-Алтайск, 1998.

169. *Кулаков Ю.И.* К вопросу о развивающем обучении // Наука и образование (Науч. журн. министерства образования и науки Республики Алтай). – 1998, № 1. – Горно-Алтайск: 1998, – С. 18–23.

170. *Тохнин А.* (Горно-Алтайский государственный университет).О возможности движения с неограниченной ковариантной скоростью u // Материалы XXXVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Физика. Ч. 1. / Новосибирский ун-т, – Новосибирск: 1998. – С. 61–62.

171. *Берегошев Д.В.* (Горно-Алтайский государственный университет).Об общих основаниях термодинамики и аналитической механики // Материалы XXXVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Физика. Ч. 1. / Новосибирский ун-т, – Новосибирск: 1998. – С. 42–43.

172. *Шестаков В.* (Горно-Алтайский государственный университет).Об опытных фактах, лежащих в основании теории относительности // Материалы XXXVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Физика. Ч. 1. / Новосибирский ун-т, – Новосибирск: 1998. – С. 64–65.

173. *Шипулина С.* (Горно-Алтайский государственный университет).Почему атомы так малы, а Вселенная так велика? // Материалы XXXVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Физика. Ч. 1. / Новосибирский ун-т, – Новосибирск: 1998.– С. 65–66.

174. *Кыров В.А.* (Горно-Алтайский государственный университет).Циклы плоскости Гельмгольца // Материалы XXXVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. / Новосибирский ун-т, – Новосибирск: 1998. – С. 68–69.

175. *Бородин А.Н.* (Горно-Алтайский государственный университет).Естественные функциональные уравнения для груды// Материалы XXXVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. / Новосибирский ун-т, – Новосибирск: 1998. – С. 18–19.

176. *Михайличенко Г.Г.* Простейшие полиметрические геометрии. I //Сиб. мат. журн.. – 1998. – Т. 39, № 2, – С. 377–395.

177. *Михайличенко Г.Г.* Сила, масса и второй закон Ньютона // Наука и образование (Науч. журн. министерства образования и науки Республики Алтай). – 1998. – № 1. – Горно-Алтайск: – С. 46–50.

1999

178. *Кулаков Ю.И.* Синтез науки и религии // Вопросы философии, – 1999. № 2. – С. 142 – 153.

179. *Кулаков Ю.И.* Горно-Алтайская таблица химических элементов $\mathfrak{KuFeRum}$. – Горно-Алтайск: Изд-во Credo, 1999. – 15 с.

2000

180. *Кулаков Ю.И.* План творения удивительно прост/ Математика и практика; Математика и культура. (Сборник статей) – М.: Редакция журнала "Самообразование" и МФ "Семигор", 2000,
С. 71 - 74.

181. *Владимиров Ю.С.* Фундаментальная физика и математика / Математика и практика; Математика и культура. (Сборник статей) – М.: Редакция журнала "Самообразование" и МФ "Семигор", 2000,
С. 63 - 70

182. *Самахова И.* Физик-отшельник из Академгородка нашёл логический код неживой природы./ Общая газета № 36 (370) от 7 – 13 сентября 2000 года, С. 5.

183. *Гуц А.К., Коробицын В.В., и др.* Математические модели социальных систем: – Омск, Омский гос. ун-т, 2000, 256 с.

184. *Шнейдерман Г.А.* За горизонтом осознанного мира. Книга первая: – Киев, Ника-Центр. 2000, С. 273 – 246; С. 487 – 491.

2001

185. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. Преамбула. – Новосибирск: "Сибирский хронограф", 2001. 70 с.

186. *Михайличенко Г.Г.* Полиметрические геометрии. – Новосибирск: Изд.-во НГУ, 2001. 144 с.

2002

187. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур как единое основание физики и геометрии. // Тезисы Третьей межрегиональной конференции “Математическое образование на Алтае”. Барнаул, ноябрь, 2002. Изд-во БГПУ, С. 66-67.

188. *Бородин А.Н.* Груды Прюффера и Бэра в Теории физических структур. // Тезисы Третьей межрегиональной конференции “Математическое образование на Алтае”. Барнаул, ноябрь, 2002. Изд-во БГПУ, С. 66.

189. *Лев В.Х.* Двумерные и трёхмерные геометрии в Теории физических структур. // Тезисы Третьей межрегиональной конференции “Математическое образование на Алтае”. Барнаул, ноябрь, 2002. Изд-во БГПУ, С. 68-69.

190. *Саранин В.М.* О научном центре проф. Ю. Кулакова. // Тезисы Третьей межрегиональной конференции “Математическое образование на Алтае”. Барнаул, ноябрь, 2002. Изд-во БГПУ, С. 70.

191. *Симонов А.А.* Общее матричное умножение как эквивалентное представление Теории физических структур. // Тезисы Третьей межрегиональной конференции “Математическое образование на Алтае”. Барнаул, ноябрь, 2002. Изд-во БГПУ, С. 70-71.

192. *Симонов А.А.* Алгебраические системы, порождаемые обобщённым матричным умножением. // Тезисы Третьей межрегиональной конференции “Математическое образование на Алтае”. Барнаул, ноябрь, 2002. Изд-во БГПУ, С. 71.

193. *Кузнецов Ю.И.* Естествознание и математика. Издательская компания “Лада”, Новосибирск, 2002. 256 с.

194. *Владимиров Ю.С.* Метафизика. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002. – 550 с., илл.

2003

195. *Кулаков Ю.И.* Физическая герменевтика. // Журнал проблем эволюции открытых систем. Выпуск пятый, Том I (январь - июнь). Алматы, “Эверо”, 2003, С. 14 - 28.

196. *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия физических структур. Приложение А.Н. Богатырёва. – Горно-Алтайск, Изд-во ГАГУ, 2003, 203 с.

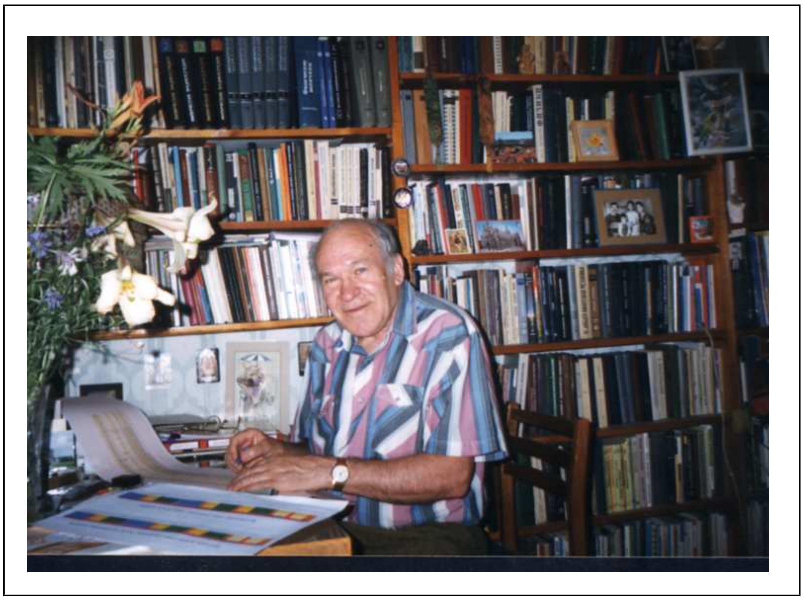
Улица Пирогова. Сентябрь уж наступил...

Приложение V.

Страницы из личного архива

Всему своё время: время рождаться, и время умирать; время насаждать, и время вырывать насаженное; время разрушать, и время строить; время разбрасывать камни, и время собирать их; время молчать, и время говорить.

— *Еккл.* **3**, *1 – 8.*



На старости я сызнова живу,
Минувшее проходит предо мною –
Давно ль оно неслось, событий полно,
Волнуяся, как море-окиян?

Теперь оно безмолвно и спокойно,
Не много лиц мне память сохранила,
Не много слов доходит до меня,
А прочее погибло невозвратно...

Но близок день, лампада догорает –
Ещё одно, последнее сказанье –
И летопись окончена моя,
Исполнен долг, завещанный от Бога
Мне грешному.

А.С. Пушкин

Школа по теории физических структур на озере Баланкуль

Ю.С.Владимиров

Я участвовал во многих научных конференциях, школах и совещаниях, как отечественных, так и международных, но эта школа оказалась ни на что предыдущее не похожей и оставила во мне самый глубокий след и в научном, и в эмоциональном плане. Она существенно видоизменила ход моих размышлений и положила начало новому этапу моих исследований. Я имею в виду первую школу по теории физических структур на озере Баланкуль, состоявшуюся с 12 по 22 августа 1984 года. Эту школу организовал **Юрий Иванович Кулаков** под эгидой Новосибирского университета на базе Абаканского педагогического института.

Но для меня всё началось значительно раньше. Я уже писал о своих многолетних (более двух десятков лет) поисках наиболее подходящих принципов, которые могли бы быть положены в основу прообраза классического пространства-времени, причём такого, чтобы из него вытекали как следствия основные свойства наблюдаемого пространства-времени, такие как размерность, сигнатура, спинорная природа элементарных частиц, обоснование плодотворности дополнительных размерностей и т.д., которые в общепринятой теории просто постулировались, другими словами, принимались априорно данными Богом. Уже пришлось перепробовать много гипотез и идей, но цельной теории как-то не получалось.

Юрий Владимиров, Юрий Кулаков и Геннадий Михайличенко

Ещё будучи в группе Д.Д. Иваненко, где-то в самом конце 60-х годов, я слушал выступление Ю.И.Кулакова на семинаре теоретической физики Иваненко в МГУ, но в тот момент я не срезонировал на его идеи, – видимо в тот момент я искал в другом месте. Но что-то, несомненно, запало в память. По-настоящему я познакомился с Юрием Ивановичем Кулаковым на 4-й Советской гравитационной конференции в Минске в 1976 году. Там у меня было несколько докладов. Один из них имел программно-поисковый характер.

В нём я излагал свою очередную попытку развить модель прообраза пространства-времени на основе неких двух начал, причем эти два начала я тогда понимал примитивно – в духе того, что нейтральная макроматерия, подчиняющаяся классическим пространственно-временным отношениям, на самом деле слагается из положительно и отрицательно электрически заряженных частиц. В обычной теории это дополнительные постулаты к пространственно-временным, а я хотел этот факт положить в самую основу мироздания и от него идти к понятиям классического пространства-времени.

Мой доклад на секционном заседании прошёл обычно: меня вежливо выслушали, задали пару формальных вопросов. На этом бы всё и кончилось. Но случилось так, что следующим докладчиком был **Юрий Иванович Кулаков**, который рассказывал про свою теорию физических структур, причём как на одном множестве элементов, что приводило к обычной геометрии, так и на двух множествах абстрактных элементов. Тогда он их назвал "белыми" и "черными" точками. Имея в виду предыдущий мой доклад, он стал говорить об их слиянии – о переходе к неким "серым" точкам обычной геометрии. Таким образом он перекинул мостик к моему докладу и солидаризировался со мной в идее бинарной природы нашего мира. Вот здесь я уже срезонировал на идеи теории Кулакова. После заседания у нас состоялось официальное знакомство и пока небольшой разговор. Мы обменялись адресами. Вскоре он прислал мне из Новосибирска свою книгу "Элементы теории физических структур", изданную в 1968 году в издательстве Новосибирского университета, и несколько оттисков своих работ по этой теме.

Двое над Саянами.

По этой книге я стал разбираться в теории физических структур. Должен сказать, что эта книга была написана как-то фрагментарно, не системно, с множеством повторов. Она скорее являлась конгломератом из ряда вариантов или версий теории физических структур. В ряде мест эмоциональная и методологическая стороны забивали математическое и физическое содержание. Но в целом основная математическая идея теории физических структур прослеживалась чётко. Её я понял. Особенно сильным в книге Ю.И.Кулакова было приложение, написанное его учеником Геннадием Михайличенко. Там вообще не было идеологии, но был развит математический аппарат физических структур Кулакова. Потихоньку я стал мудрить, пытаясь приспособить физические структуры к своим моделям и представлениям. Но у меня почему-то тогда ничего путного не получилось, хотя я и извёл немало бумаги. В то время у меня были и другие дела и пробы. В это время я писал книгу "Системы отсчёта в теории гравитации", ездил по другим конференциям, строил другие планы.

И вот где-то в 1983 году в письме к Юрию Ивановичу Кулакову я сформулировал ряд вопросов по предложенной им теории физических структур. В ответном письме он попытался кое-что разъяснить и здесь же сообщил, что летом 1984 года он организует школу по теории физических структур на озере Баланкуль и приглашает меня участвовать в ней – там, мол, будем иметь возможность всё обсудить как следует. Потом он прислал официальное приглашение, а также красочное описание красот и экскурсий, которые нас ожидают в предгорьях Саян во время школы. Откровенно говоря, в научном плане я многого от этой школы не ожидал. По моим оценкам среди участников школы практически не будет авторитетных ученых. Сам Кулаков среди моих коллег больше слыл чудаком и фантазёром. Однако летнее время школы, сибирская экзотика, Енисей (а я востоянее Целинограда до тех пор не бывал) возбудили во мне туристский азарт. Вдобавок недалеко от Абакана расположен Кызыл – родина моего тестя Фёдора Нестеровича. Когда он узнал о возможности мне туда съездить, категорически заявил: там места неописуемой красоты – обязательно нужно ехать. И я решил ехать.

Соавторы и единомышленники. Баланкуль - 1984.

С собой взял еще своего ученика – тогда студента четвёртого курса МГУ **Валеру Гаврилова**. Ехать решили поездом, чтобы прочувствовать просторы нашей страны. Фёдор Нестерович пришёл нас проводить на вокзал, принёс нам в дорогу ящик чешского пива, просил поклониться его родным местам. Дорогу описывать не буду, хотя в пути было много интересного. Прибыли мы в Абакан – столицу Хакасии рано утром. Сразу же на вокзале столкнулись с сибирской экзотикой. На вокзале было множество людей, спешивших на электричку с большими корзинами и сумками. Спросили одного мужчину с явно хакасской внешностью, куда они едут. Он на чистейшем русском языке с московским выговором очень дружелюбно сообщил, что все спешат в тайгу за дарами леса, – поспели ягоды, орехи. Нас поразил чистый русский язык местного населения – в резком контрасте с тем что мы позже услышали в соседней Туве.

Сбор участников школы был назначен в гостинице во второй половине дня. Мы пристроили вещи и прошлись по городу, стремясь поскорее увидеть Енисей. Спросили, в каком направлении нужно идти, пересекли город и были разочарованы. Вместо могучего Енисея мы увидели заросшие ивняком берега, островки, плавни, за которыми настоящей реки так и не увидели. В назначенное время были в фойе гостиницы. Там уже стали собираться совсем незнакомые нам люди. Пришёл Юрий Иванович Кулаков и сообщил, что скоро будет автобус, который отвезёт всех нас на озеро Баланкуль.

Юрий Иванович всех знал, радостно здоровался, переходил от одних к другим. Мы же никого не знали, держались особняком. Нас тоже никто кроме Кулакова не знал. Я опять, было, приуныл. Будучи заместителем председателя секции гравитации, я знал всех в стране, кто более или менее серьёзно занимался проблемами пространства и времени. Здесь же никого из них не было, кроме нас с Кулаковым. Вокруг совсем незнакомые мужчины (молодые и старше меня), несколько женщин. Кто они? Что у нас с ними может быть общего? Кулаков меня знакомил с некоторыми, но их имена мне ничего не говорили. При этом я имена, как всегда, сразу же забывал. Что нас ждёт впереди?

Подошёл автобус. Мы сели вдвоём с Валерой. Так особняком и ехали до места назначения, глядя в окна и временами прислушиваясь к разговорам окружающих. Видно было, что другие были между собой более знакомы. Мое внимание привлёк сухощавый мужчина, старше меня лет на пятнадцать. Он сидел с чернявым мужчиной левее нас и среди прочего обсуждал, кто должен был приехать на школу. Перечисляя состав участников, он, в частности, сказал, что ещё из Москвы должен быть некий Владимиров –

Участники Первой Школы ТФС-84 накануне отъезда

(Фото Ю.С. Владимирова)

специалист по квантовой гравитации, у которого есть известные работы и даже книжка по теории гравитации... Назывались другие фамилии... Мы же больше обозревали окрестность. Они не впечатляли, даже скорее наводили на грусть. Безлюдная, всхолмлённая местность с редкими деревьями. Вокруг множество камней. Вскоре мы стали различать, что стали попадаться упорядоченные скопления из продолговатых равновеликих камней, поставленных торчком. Кулаков всем объяснил, что это древние хакасские захоронения. Проехали какой-то неприглядный поселок. Холмы стали выше. Дорога запетляла между ними.

Сделали несколько поворотов. И вдруг, картина резко изменилась, – мы оказались между холмами, сплошь покрытыми хвойным лесом. Хвоей пахнуло внутри автобуса, аж голова пошла кругом. Мы ещё немного проехали и справа от нас развернулась живописнейшая картина. Заблестела гладь озера, обрамлённого высокими зелёными холмами. На берегу озера среди деревьев мы разглядели постройки пионерского лагеря. Это и было озеро Баланкуль, в переводе с хакасского "Оленье озеро". Название связано с древней охотничьей легендой. По форме оно напоминало восьмёрку – состояло из двух примерно равновеликих овальных озёр, соединённых перемычкой. Один из холмов, нависающих над озером был значительно выше других. Он назывался Шаман-горой. И озеро, и Шаман-гора у хакасов считаются священными. Здесь в этом святом живописном месте среди древних хакасских могильников, разбросанных по склонам холмов – предгорий Саян, нам предстояло прожить полторы недели.

Юрий Кулаков и Татьяна Григорьева.

Лагерей здесь оказалось два: один был непосредственно на берегу озера, а другой находился чуть выше, со стороны, противоположной Шаман-горе. Его постройки сразу было трудно разглядеть за деревьями. Часть участников поселили в нижнем лагере, а несколько человек по указанию Кулакова поселили в верхнем лагере. Как я потом понял, это были наиболее квалифицированные участники школы. Среди них оказались и мы с Валерой, сам **Юрий Иванович Кулаков**, его ближайшие ученики **Гена Михайличенко** с женой **Наташей** и сыном **Витей**, **Володя Лев**, а также **Виктор Иванович Шахов** – тот пожилой мужчина, что упоминал моё имя в автобусе. Были ещё два молодых человека. Всего нас здесь было примерно 10 человек. Это по-существу и был научный актив школы.

Оставшиеся в нижнем лагере были людьми других профессий: **Татьяна Петровна Григорьева** – доктор филологических наук из Москвы (известный специалист по восточной культуре – японист и китаевед), **Нина Николаевна Якимова** – астроном, кандидат физико-математических наук из Москвы, **Иосиф Шефтелевич Шевелёв** – архитектор из Костромы, **Ольга Петровна Степанова** – физик из Московского института экспериментальной и теоретической физики с сыном **Сергеем** – будущим физиком, тогда студентом физтеха из Москвы, физик **Язеп Аронович Эйдус (Джо)** с совершенно фантастической биографией – Dr. pabilitatus по химии и физике, заслуженный emeritus professor с молодой женой **Инессой Юрьевной** из Риги, математик, профессор Новосибирского университета **Сергей Нагаев** с женой **Светой**. Было ещё несколько человек из Новосибирска и Абакана, один молодой человек из Ижевска и один из Черновцов – всего примерно 15 человек. Итого, с учётом ещё нескольких присоединившихся позже, было около тридцати участников школы. Компания собралась довольно пёстрая, можно даже сказать, парадоксальная, – можно ли было ожидать от такого состава полноценной научной школы по физике? Каков мог быть уровень этой школы? Что могло связать столь разных людей?

Но жизнь оказалась богаче, чем можно было ожидать из простой арифметической раскладки, кто есть кто. На следующий день утром состоялось торжественное открытие школы. Мы расположились в самых вольных позах, кто лёжа, кто сидя на лужайке для пионерских сборов нижнего лагеря. По лагерной радиотрансляции зазвучал "Дивертисмент" Вебера, в дальнейшем ставший гимном наших регулярно проводимых школ по теории физических структур. Под звуки "Дивертисмента" на лагерном флагштоке взвился трёхцветный флаг школы: оранжево-бело-голубой с цветком эдельвейса в середине. Флаг этот развивался все дни работы школы. После подъёма флага со сцены выступил **Юрий Иванович Кулаков**. Он попросил всех участников почтить память его дочери **Ольги**, трагически погибшей в горах Тяньшаня в июле этого года. После минуты молчания он рассказал об истории создания и первых шагах теории физических структур. Потом выступил с приветствием начальник пионерского лагеря. Затем была оглашена научная и культурная программа школы, и мы отправились в пионерскую комнату верхнего лагеря слушать первые доклады.

Юрий Владимиров, Юрий Кулаков и Валерий Гаврилов.

Как правило, мы работали три часа до обеда и примерно столько же после обеда, а после ужина опять собирались все вместе на культурную программу. На научных заседаниях в основном выступал Юрий Иванович. Он фактически прочитал цикл лекций по теории физических структур. Ю.И.Кулаков подробно изложил своё понимание физических структур и рассказал об основных найденных их приложениях. Его выступления изобиловали обширными мировоззренческими и философскими отступлениями. В подтверждение своих взглядов он приводил цитаты классиков науки. Многие соображения он пояснял наглядными образами и сравнениями. Так говоря о сути и назначении науки, он нарисовал платоновскую пещеру с костром посередине. Около костра он изобразил танцующую женщину, а у стены спиной к ней поместил сидящего человека, глядящего на тени на стене пещеры. Женщина олицетворяла собой Мир Высшей реальности, а сидящий человек – физика, который по теням на стене должен восстановить образ женщины – объективно существующие физические законы.

Ещё он рисовал в виде дерева схему, поясняющую связи между различными разделами теоретической физики. Было множество и других образных сравнений. Получалось так, что слушателям с самой разной подготовкой находилось что-либо интересное. Единственное, что требовалось от участников школы – была искренняя заинтересованность в том, чтобы разобраться в устройстве Мироздания. Для неспециалистов неясные им математические аспекты теории создавали некий ореол таинственности, ещё больше возбуждавшей их воображение.

Подъём флага.

Мне же была ясна цена цитат и идеологических лирических отступлений, – я их воспринимал как описания природы при чтении художественной литературы. Украсить цитатами и сравнениями я и сам мог не хуже, – было бы что украшать. А в данном случае действительно было что: была красивая идея и было предложено достаточно строгое математическое развитие этой идеи. Получилась действительно стройная конструкция. Мне не трудно было выделить её суть из-под слоя изысканных украшений. За время работы школы я смог достаточно глубоко погрузиться в теорию физических структур Кулакова, понять ряд тонкостей, ранее ускользавших от меня. Я задавал множество вопросов Кулакову как во время доклада, так и между заседаниями. Из его ответов я составил достаточно полное представление как о сильных, так и о слабых сторонах теории физических структур. Я понял, что для её создателя теория физических структур является одновременно и математической теорией, и физической теорией, и философской системой, и даже искусством. Получилось нечто единое целое и одновременно многоликое, что составило смысл и содержание всей жизни Кулакова. В этом была какая-то высшая красота, а в красоте Юрий Иванович знал толк...

Несколько раз мы делали перерывы в научной программе для экскурсий. В один день мы совершили поход к старым заброшенным золотым рудникам, в которых ещё во время войны добывали золото, а потом из-за недостаточно высокого процента содержания золота законсервировали. По пол-дня было отведено на восхождение на Шаман-гору и на вершину соседней горы.

Что это были за походы! Это было нечто сказочное. Стоило немного отойти от лагеря и мы попадали на поляны с эдельвейсами, – теми самыми, о которых в Карпатах или на Кавказе слагают легенды. А тут в Саянах они покрывали серебристым ковром вершины окрестных гор.

Участники Школы ТФС-84 на полпути к вершине Шаман-горы.
(Фото Ю.С. Владимирова)

У подножия Шаман-горы мы наткнулись на поляну крупной земляники. Рвать здесь её некому. Можно наедаться ею до отвала, точнее, съесть ровно столько, сколько хватит терпения отбиваться от комаров и оводов. Кстати, возле самого лагеря их практически не было.

А что за чудо было восхождение на Шаман-гору! Впереди шёл Юрий Иванович, обнажённый по пояс, с палкой-посохом, как пророк Моисей, и рассказывал библейские легенды с увлекательными комментариями. Мы, рассыпавшись, двигались за ним, делая остановки, чтобы оборвать очередной куст барбариса, ежевики или дикой чёрной смородины. Взобравшись на гору, мы как зачарованные, стояли и не могли налюбоваться открывшейся перед нами панорамой. Внизу голубела восьмёрка озера Баланкуль с крохотными коробочками лагерных построек, а вокруг, насколько хватал глаз, зеленели вершины холмов, постепенно, по мере приближения к горизонту, покрывающиеся голубоватой дымкой. А на самом горизонте сквозь дымку проступали настоящие Саянские горы. Время от времени над нами и ниже проплывали орлы. Долго мы не могли насмотреться на это диво. Мы расположились кружком вокруг Юрия Ивановича, а он, опираясь на посох, рассказывал нам занимательные истории. У меня сохранилась фотография, сделанная на Шаман-горе, и кусок розового мрамора, который я извлёк из корней поваленного неподалёку дерева.

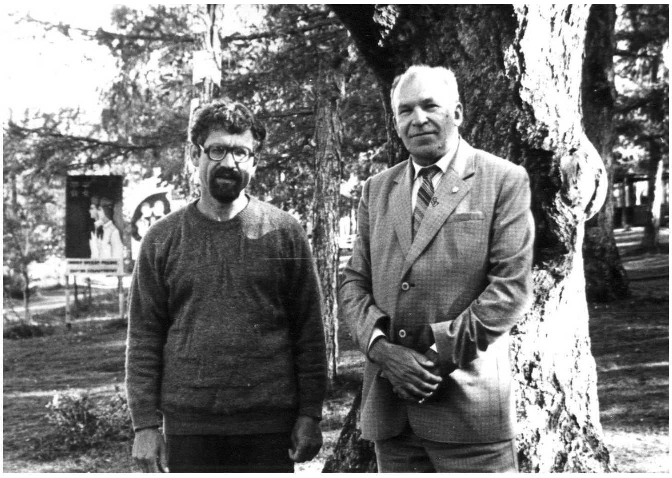
И, конечно же, во время этих походов продолжались научные дискуссии. Никогда не забуду, как по пути к пещере я развивал перед Юрием Ивановичем Кулаковым свои размышления о, как я тогда называл, четвёртой концепции физической картины мира. Это были, можно сказать, глубоко выстраданные мною идеи. И я был рад возможности их изложить заинтересованному человеку. Помнится, я говорил о них с жаром, пытаясь их как-то связать с услышанным на школе. Юрий Иванович внимательно слушал, время от времени задавал вопросы, а потом стал возражать, проявляя своё несогласие. Я попробовал настаивать на правомерности своего подхода, он возражал. Вскоре я понял, в чём дело. Он создал для себя определенную систему взглядов на мир, опирающуюся на теорию физических структур. И эта система представляла собой другую парадигму (впоследствии я ее назвал шестой парадигмой). У него была уверенность, что именно его система взглядов является единственно правильной.

Участники Школы ТФС-84 на заброшенном прииске.
(Фото Ю.С. Владимирова)

Он полагал, что нашёл высшее на данный момент понимание мира. Он даже говорил такие слова: "С чего бы начал Бог, приступая к сотворению мира? Прежде всего, он бы ввёл физические структуры, а из них бы стал выводить отдельные физические законы, и лишь потом бы стал создавать всё остальное".

Для него структуры были высшим проявлением Божественной закономерности. Некоторые белые пятна в его системе его не останавливали. А тут я, вдруг, ему говорю, что могут быть другие парадигмы, и может оказаться так, что за физическими структурами могут оказаться ещё более глубокие принципы, приводящие к структурам. При этом я тогда настаивал на первичности принципов марковских процессов. Тогда мы так и не смогли договориться. Но эта дискуссия фактически возобновлялась при каждой нашей последующей встрече. Впоследствии, мне кажется, он несколько отступил, – стал терпимее относиться к правомерности различных парадигм. Я полагаю, в процессе этих дискуссий мы оба приобрели много нового, по крайней мере, я так думаю о себе. В конце концов я использовал его структуры для формирования новой физической парадигмы, девятой в моей классификации, способной конкурировать с общепринятыми научными взглядами. Надеюсь, он не кривил душой, когда на одной из последующих школ в Пущино надписал на ранее подаренной своей книге "Элементы теории физических структур" очень теплые слова о плодотворности нашего сотрудничества.

Или, мне вспоминается другая дискуссия с Володей Львом и Геной Михайличенко по дороге на золотые рудники. Мы обсуждали возможность введения физических взаимодействий в рамках теории физических структур.



Гена Михайличенко и Юрий Кулаков.

В основе теории физических структур, как известно, лежит понятие своеобразной сакральной симметрии. В традиционной физике тоже есть свои групповые симметрии, и в то время было принято связывать понятие взаимодействия с нарушением симметрий, с так называемой их локализацией. Исходя из этого возникал вопрос, как совместить такой подход к взаимодействиям с принципами теории физических структур: нужно ли их аналогичным образом локализовывать, то есть нарушать, или есть способ ввести взаимодействия, не нарушая структуры? К нашей дискуссии присоединился и Кулаков. Мы судили и так и эдак, но к окончательному ответу тогда так и не пришли. Но этот разговор и даже детали той дороги, по которой мы проходили в тот момент, чётко врезались в моей памяти. Потом я неоднократно возвращался к этому разговору и смог ответить на него лишь спустя четыре года.

Кроме **Юрия Ивановича Кулакова** на школе выступали и его ученики: **Владимир Хананович Лев** и **Геннадий Григорьевич Михайличенко** – с изложением отдельных математических деталей теории физических структур. В их докладах не было идеологии. Они были практиками, а за физическую интерпретацию и идеологическое обоснование программы отвечал Юрий Иванович. С Володей и Геной я крепко подружился во время школы. В последствии я был официальным оппонентом на защите кандидатской диссертации Льва и докторской диссертации Михайличенко. Очень помог нам своими бесчисленными вопросами и неиссякаемой заинтересованностью в развитии теории физических структур **Виктор Иванович Шахов** – тот самый, что в автобусе говорил, что на школу должен приехать Владимиров. Внешне ершистый, упрямый и суетливый, а по своей сути добрейший и заботливый о других человек, он стал для меня таким же другом, как и для Юрия Ивановича Кулакова. Я сейчас просто не представляю себе нашего движения, если так можно назвать деятельность по развитию теории физических структур, без **Виктора Ивановича Шахова**. Фактически он стал нашим историком и хранителем традиций.

Несколько лекций прочитал на школе и я. Однако мои лекции внешне не соответствовали тематике школы – теории физических структур. Одна лекция была посвящена многомерным геометрическим моделям физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна, вторая – проблемам квантования гравитации, третья – обсуждению различных физических парадигм. Ещё я рассказывал про теорию прямого межчастичного взаимодействия. Меня вежливо слушали, некоторые даже внимательно, но, видимо, у большинства в голове возникал вопрос: а при чём здесь физические структуры? Если бы меня тогда так напрямую об этом спросили, то я бы сам затруднился ответить.
Только спустя несколько лет я смог ответить на эти вопросы вполне определённо. Фактически в этих моих выступлениях на́чало заклыдываться новое направление – новый раздел теоретической физики, который я назвал бинарной геометрофизикой (реляционной теорией пространства-времени и взаимодействий). В математическом плане эта теория базируется на обобщении теории физических структур Кулакова, а в физическом плане опирается на идеи трёх типов: а) на идею о макроскопической природе (выводимой из свойств физики микромира) классического пространства-времени, б) на концепцию дальнодействия, точнее, на теорию прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана, в) на принципы многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. Но мог ли я тогда сам представить, как в дальнейшем сольются принципы этих столь различных, на первый взгляд, теорий?! Было несколько выступлений на ещё более далёкие темы. Например,

Сальвадор Дали
Мадонна Порт Лигата.

архитектор Иосиф Шефтелевич Шевелёв рассказывал о своих исследованиях золотого сечения. На эту тему он написал книгу (и не одну). Я до этого, конечно, слышал о большой роли золотого сечения в природе, в архитектуре и в искусстве. Но после его рассказа я был потрясён, насколько многообразны проявления в природе отношений золотого сечения. Конечно, в его выступлении было немало мистики и сомнительных домыслов, но квалифицированному слушателю легко отделить рациональное зерно от шелухи домыслов автора. После выступления во время прогулок и отдельных бесед, я думаю, мы помогли автору избавиться от части из них – в этом тоже польза школы, причём взаимная. Правда, он, видимо, надеялся связать золотое сечение с теорией физических структур, но, насколько мне известно, такой связи пока явно не проявилось до сих пор, хотя Юрий Иванович утверждает, что в самое последнее время ему удалось это сделать. Подобные надежды выражала и другая участница школы астроном **Нина Якимова**.

Юрий Кулаков, Язеп Эйдус (Джо) и Юрий Владимиров у подножья пещеры.

Несомненно была связана с теорией физических структур тема доклада **Татьяны Петровны Григорьевой**. Она не физик и не математик, – она занимается восточной культурой и восточными философскими системами. А, как известно, в основу некоторых из них положены два противоположных начала Инь и Ян. Она подробно рассказала о сути этих понятий в восточной философии и попробовала провести сравнительный анализ методов мышления на Западе и на Востоке. Все мы почувствовали не только разницу в философских системах Запада и Востока, но и несомненное отношение рассказанного к теории физических структур. Ведь теорию физических структур можно построить или на одном множестве элементов, или на двух множествах – бинарные структуры. Третьего не дано.

Так, может быть, теория, базирующаяся на бинарных структурах, – а именно таковой является моя бинарная геометрофизика, – и является современным математическим и физическим воплощением восточных философских систем с их Инь и Ян?... А какими превосходными были вечера на Баланкуле! Каждый вечер была своя культурная программа. Здесь душой опять был Юрий Иванович. Один вечер он показывал слайды с картин Сальвадора Дали, в другой вечер – с картин Шагала, в третий рассказывал про Туринскую плащаницу и про тайну мадам Рекамье. **Нина Николаевна Якимова** показывала слайды своих картин, выполненных на фанере в своеобразной технике исполнения, рассказывала о магии чисел. **Татьяна Петровна Григорьева** читала выдержки из своей новой книги об искусстве Востока. Читались стихи, отрывки из малоизвестных произведений. На всём этом обязательно была печать загадочности, глубокого философского смысла и обязательно высокого искусства.

Короче говоря, те десять дней, что мы пробыли на озере Баланкуль, оказались для всех нас каким-то неведомым раньше пиршеством ума и духа. Мы испытывали глубокое наслаждение от дружелюбного человеческого общения, от обилия высказанных идей и гипотез, пусть зачастую сырых, но красивых, возбуждающих мысль, от гармонии научных идей и произведений искусства, от ощущения прикосновения к неведомым ранее тайнам устройства Природы. Всё это усиливалось красотой природы, легендами, освящающими эту местность, озером, горами, разбросанными повсюду древними могильниками.

Потом я неоднократно пытался осмыслить, почему эта школа дала нам так много, почему она оставила ощущение праздничности, так всех нас сдружила. Ведь ничего подобного я не испытывал ни на одной другой конференции или школе. Как правило, на конференциях всё проходит сухо, официально, казённо. Каждый оттарабанивает свой доклад или сообщение за отведённые 10, 15 или 30 минут, и его сменяет следующий докладчик. Иногда бывают аплодисменты, но обычно из вежливости. Как правило, бывают и культурные программы, посещения красивых мест, но и это выглядит как обычное культурное мероприятие. Всё по определённым правилам проходит за 3-5 дней. Соберите людей на больший срок, уверяю, начнутся скука, пьянки и загулы. А на Баланкуле ведь ничего подобного не было!

Размышляя над этими вопросами, я прихожу к выводу, что успех школы на озере Баланкуль обязан нескольким факторам.

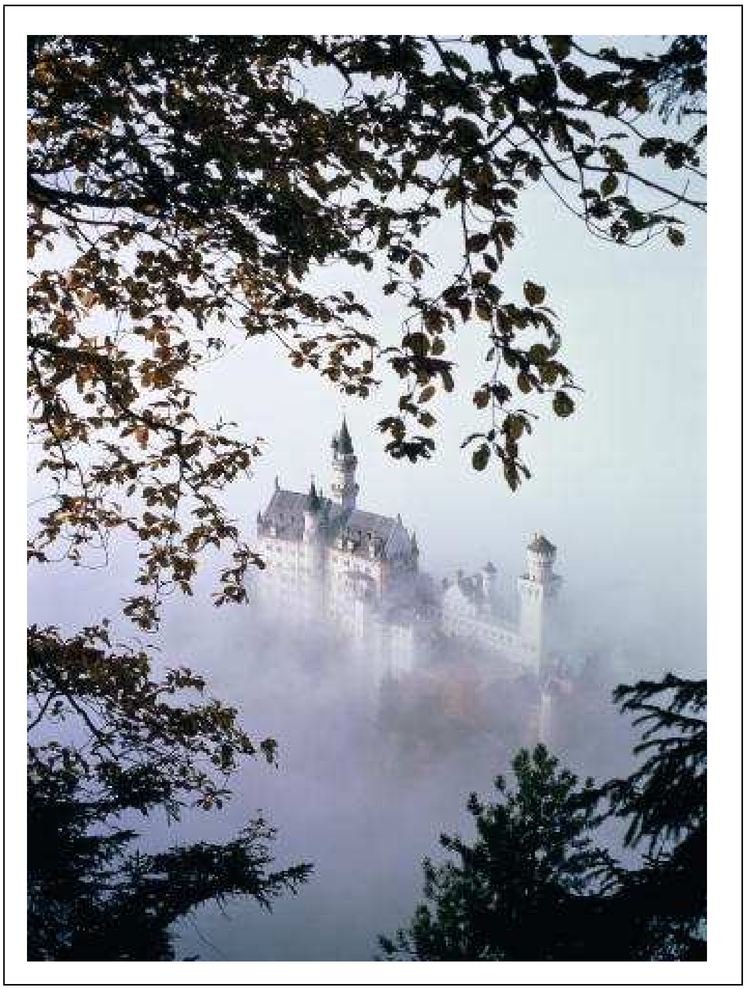
Во-первых, школа была посвящена яркой, конкретной и перспективной теме. Анализировалась живая идея (комплекс идей) в своем развитии, можно сказать, даже на ранней стадии своего развития, когда участники ощущают впереди прелесть нехоженных дорог, новых открытий, неизведанных приложений.

Во-вторых, центральная идея являлась не только плодотворной, но и фундаментальной, относящейся к самым глубинным основам мироздания. Она позволяла прикоснуться к самым серьёзным проблемам, до самого последнего времени входящим в компетенцию философских систем и религии. Но и этого мало.

В третьих, нужно было, чтобы собрались люди, действительно искренне желающие разобраться в принципах мироздания, преданные науке и истине, – те люди, которые не стремятся лишь иметь ещё одну научную статью, поскорее защитить диссертацию или извлечь из науки какие-то блага. "Наука должна быть бесполезной, – только тогда она наука", – так любил повторять Юрий Иванович Кулаков. Далеко не все с этим согласятся, но доля истины в этом есть.

И, в-четвёртых, на школе было достигнуто очень редкое единство, гармония между наукой и искусством. Высокая культура и одухотворённость Юрия Ивановича позволили ему создать эту гармонию. Я постарался перенять эту его методику совмещения науки и искусства, науки и политики, то есть стараться всякий раз после научных заседаний организовывать культурную программу, но это оказалось не так легко сделать, – далеко не всегда это получается, не всегда достигается гармония...

По окончании школы мы предприняли небольшое путешествие из Абакана в Кызыл. На автобусе мы проехали через Минусинск, затем через Саянские хребты по горной дороге. Осмотрели Кызыл, постояли на берегу Енисея, сфотографировались возле обелиска "Центр Азии". Затем на самолете перелетели через горы назад и приземлились в Шушенском. Поразились показухой, устроенной властями в месте былой ссылки Владимира Ильича Ленина. Посетили баньку, где парился вождь пролетариата, зашли в трактир, куда, наверняка, захаживал и Ильич. Выйдя из мемориала, зашли в местный магазин, – там искусственное изобилие по тем временам. В продаже был даже боржоми. Поглазели на отделанное мрамором пустынное здание аэровокзала и пристани, сели на теплоход и на нём вернулись в Абакан. Во время нашего путешествия было несколько приключений, но о них здесь не буду вспоминать.

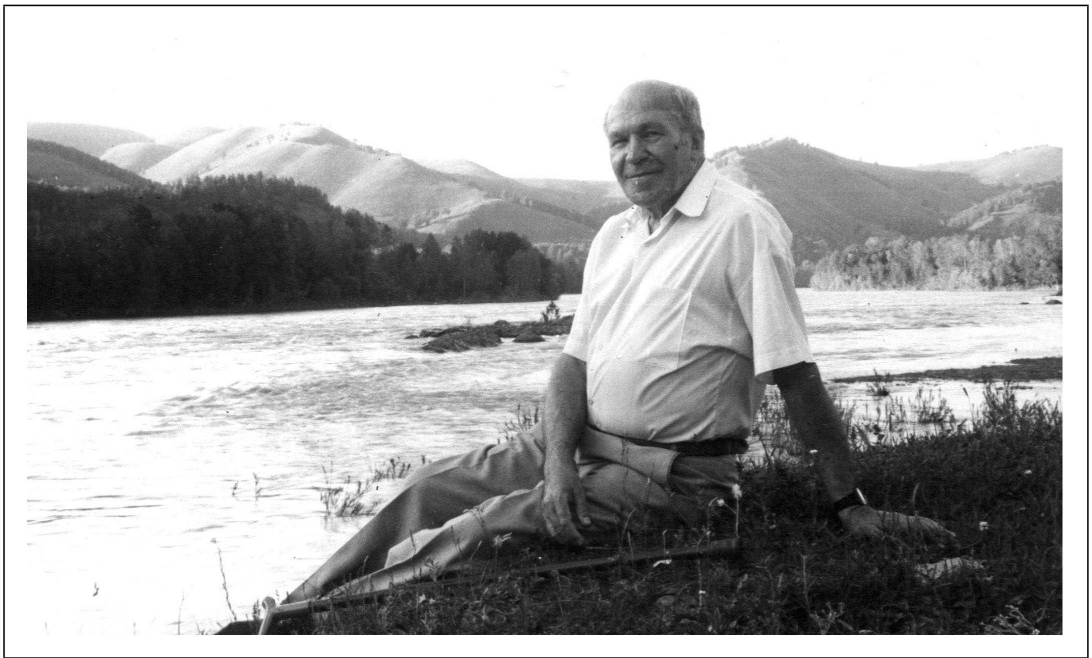


План Творения гениально прост

Неживая природа имеет в основе логический код, подобный ДНК - считает физик-отшельник из Академгородка

Что такое пространство и время? Почему скорость света одинакова в разных системах отсчета? В чём суть мировых констант?

Подобные вопросы задают учителям пытливые школьники, а самим себе - избранные светила науки, не теряющие надежду докопаться до “закона законов”, призванного объединить и гармонизировать ныне разобщённые разделы физики - механику, термодинамику, квантовую механику, статистическую физику, теорию относительности. Ведь мир, в отличие от современной науки, един и определённо держится, как на трёх китах, на каких-то исходных принципах и основаниях.



На берегу Катуни

А зачем это нужно, спросит прагматик, если уже открытые законы физики исправно работают - электричество бежит по проводам, ракеты летают, атом по команде высвобождает скрытую в нем энергию?

“Следует не только выяснить, как устроен мир, и извлечь из этого пользу. Важно понять, почему он устроен так, а не иначе” - считал Альберт Эйштейн. Но заветная “общая теория поля” не далась, как известно, даже этому гению.

Молекулы, атомы, элементарные частицы, кварки, а что дальше?

Большинство современных физиков-теоретиков считают, что только углубляясь в тайны строения вещества можно докопаться до основ и понять устройство материального мира.

Но есть и меньшинство, полагающее, что дальнейшее погружение в подробности мало что даёт, и нужно в первую очередь искать глубинный СМЫСЛ, управляющий природой.

Лето 2000 года. Далёкая окраина России - Горно-Алтайск.

Неделю подряд, на июльской жаре, в спартанской простоте школьной аудитории проходит научная школа-семинар по Теории физических структур (ТФС-2000), в которой принимают участие и убелённые сединами профессора из Москвы, Новосибирска, Алма- Аты и Нью-Йорка, и молодые аспиранты местного университета.

В перерывах учёное сообщество продолжает увлечённо спорить и размахивать руками, не замечая ни торопливо глотаемых котлет, ни города, ни гор, ни грозы над собственными головами.

Эти странные люди бросили собственные дела и приехали в Сибирь на свои кровные, чтобы обсудить итоги сорокалетнего научного труда новосибирского физика *Юрия Ивановича Кулакова.*

"Семинаристы" беседуют на языке современной математики, а для рядового журналиста слова "бинарность", "феноменологическая и сакральная симметрии", "группы Ли", "определители", "корты", "репрезентаторы" и "верификаторы" - китайская грамота.

Я улавливаю лишь общий смысл происходящего: похоже, что Юрий Кулаков открыл *закон построения законов*, простой и изящный *математический код*, которым зашифрованы закономерности неживой природы.

Его теория позволяет в каждом явлении материального мира увидеть идеальную сущность – *физическую структуру.* Отношения между физическими структурами, выражающие тот или иной фундаментальный физический закон, уподобляется отношениям между точками в абстрактных математических пространствах.

Самое удивительное, что свойства этих пространств не "вносятся руками", а автоматически возникают сами собой из одного только требования *сакральной симметрии.* (Например, плоскость - это такое пространство, в котором объем пирамиды, построенной на четырёх её вершинах, равен нулю).

И вот такая, казалось бы, предельно абстрактная "геометрическая физика" оказалась необычайно плодотворной. Учёная аудитория завороженно наблюдает, как Юрий Кулаков, словно маг, один за другим "извлекает" из выведенной им геометрической формулы классические законы механики, термодинамику, а потом и теорию относительности и квантовую механику. На наших глазах они возникают как бы из ничего - не из физических моделей, не из опыта, который считается единственным критерием истины, а только лишь из математических структур. И в памяти торжественно всплывает: "В начале было Слово".

Фамилию автора “Теории физических структур” не найти в академических справочниках. Ещё в молодости блестящий ученик академика Игоря Тамма выбрал путь научного отшельника. Скромная должность доцента Новосибирского университета позволяет Юрию Кулакову большую часть времени отдавать своему титаническому труду - построению принципиально нового каркаса теоретической физики.

Я смотрю на вдохновенный лик Юрия Кулакова, и задаю себе почти эйнштейновский вопрос: почему этот удивительный человек устроен так, а не иначе? Кажется, на всей его биографии лежит печать неслучайности и предопределённости.

1937 год, один из “строгих” лагерей Унжлага, где отбывает свой десятилетний срок воронежский бухгалтер-экономист Иван Васильевич Кулаков, виновный в том, что отказался в своё время участвовать в партийной компании по разрушению церквей.

Однажды вечером, вернувшись с каторжных работ, он застает в бараке собственного десятилетнего сына Юру, фантастическим образом пробравшегося с воли на свидание к отцу. Потрясённые встречей, они всю ночь разговаривают о самом главном - об устройстве человеческого общества и о тайнах природы. Старший Кулаков спешит поделиться с мальчиком теми представлениями о мире, которые он приобрёл в предварительном заключении от своего сокамерника – учёного-физика.

Лишь два года спустя отцу и сыну выпадет короткое счастье пожить вместе и осуществить их общую мечту - заняться физикой, соорудить электрическую машину и даже примитивный телевизор, принимавший пробные передачи из Москвы.

Война - конец всему. Гибель отца на фронте. Только что оставленный немцами дотла разрушенный Воронеж. Голодный подросток бредёт по пустынному неузнаваемому городу и вдруг наталкивается на фантастический пейзаж: вся площадь перед обугленными развалинами Воронежского университета усыпана книгами, разбросанными при взрыве библиотеки.

Словно во сне, мальчик перебирает тяжелые фолианты: “Электричество” Эйхенвальда, “Дифференциальное и интегральное исчисление” Фихтенгольца. Он берёт эти книги с собой, пытается читать и вскоре с удивлением понимает, что может самостоятельно разобраться в некоторых формулах.

Московский университет. Послевоенная Москва переполнена демобилизованными студентами, об общежитии нельзя и мечтать. Новоявленный физфаковец Кулаков ночует под лавками на Казанском вокзале, а по утрам является на лекции в аудиторию, где над обычной классной доской висит в красивой раме белая доска с начертанными на латыни тремя законами Ньютона.

Именно эти торжественные скрижали заставили молодого физика задуматься над понятием массы и прийти к осознанию своей неудовлетворенности привычными нестрогими формулировками, разрушающими гармонию любимой науки.

Похожее ощущение испытывал, очевидно, и Нобелевский лауреат академик Игорь Тамм, чью фамилию остроумные коллеги выбрали неофициальной единицей порядочности.

Он не удивился, когда его ученик Кулаков оставил модную и перспективную научную тематику - теорию элементарных частиц и углубился в построение "Теории физических структур". Тяжело больной Тамм успел благословить первую "крамольную" рукопись Кулакова (до сих пор так и не изданную): "Существование физических структур строго доказано в представленной теории - выявлены глубочайшие изоморфизмы и симметрии, позволяющие увидеть архитектонику физического знания в целом, а не в том стихийно-хаотическом разбросе, который у наиболее глубоко мыслящих физиков всегда оставлял впечатление дисгармонии и вызывал ощущение эстетической неудовлетворенности".

Теорию Кулакова, развитую его учениками Г. Михайличенко и В.Львом, на разных этапах её становления поддержали выдающиеся математики - академики А.Д. Александров, О.А. Ладыженская, Ю.Г. Решетняк. А вот крупнейшие физики, за исключением Тамма, словно бы не замечают работу сибирского отшельника.

– Понимаете, люди не склонны слушать ответы на вопросы, которые не задавали себе сами, - объясняет этот факт Кулаков.

- Большие ученые в наше время заняты достаточно узкими проблемами, и им просто некогда "философствовать". Мне ещё повезло – Бог послал мне многолетнего оппонента и единомышленника, профессора МГУ Юрия Сергеевича Владимирова, у которого как раз всё в порядке с признанием.

Вообще-то редко удаётся переубедить человека со сложившимся научным мировоззрением. Зачастую легче общаться с молодыми ребятами, понимающими новое с полуслова.

Недавно, например, я читал лекцию по Теории физических структур в новосибирской Физматшколе и обмолвился, что сам не представляю, какой физический смысл стоит за определителем в одной их формул. Так что вы думаете - через неделю на следующей лекции один мальчик тянет руку и выдает предположение, что эта формула описывает распространение света в толстых линзах. И это оказалось действительно так!

Меня подмывает спросить Юрия Кулакова о практических следствиях его теории.

– Лучшее понимание оснований физики помогает избегать ошибок, уходить от парадоксальных и плохо работающих моделей типа "волна-частица", – поясняет учёный.

– Но для меня самого гораздо важнее другое: я чувствую, что прикоснулся к Миру высшей реальности, бесконечно далёкому от понятий "практика" и "польза". Этот мир прекрасен и прост. Однажды мне сказали, что я нашёл математическое доказательство существования Бога. И я действительно верю в то, что обнаруженный мною "физико-геометрический код" имеет прямое отношение к Плану Творения. Это ни что иное, как программа, обязанная, в отличие от закона, иметь цель и Творца.

– Я убеждён, что Мир не мог возникнуть эволюционным путем, как не могут, к примеру, сами собой возникнуть часы из кучки пружин и шестеренок. Вы представьте только, какая это радостная мысль!

Материальный мир, построенный только на законах, был бы страшен своей неизбежной предопределённостью. Однако, в нём присутствуют свобода воли и свобода творчества – божественные качества, воплощённые в слабом человеческом существе. Мы с вами не какие-то запрограммированные автоматы, а "подмастерья великого Мастера", призванные совершенствовать мир, созданный Творцом "начерно", грубыми мазками.

Люди способны постигать непостижимое и творить чудеса – вот главное следствие моей теории.

Сам-то Юрий Иванович действительно на это способен. Только добрый волшебник смог бы в январе 1968 года послать из Москвы в заполярный Тикси роскошный подарок на день рождения одной прекрасной девушке. В тщательно запаянном огромном пакете, специально по его просьбе присланном из Болгарии друзьями академика Христо Христова, оказался букет свежайшей белой сирени, на которую еще долго ездил любоваться полярный народ с округи в восемьсот километров.

А разве не чудо – недавний неожиданный визит в квартиру Кулакова незнакомой семейной пары? Прослышавшие об удивительных идеях новосибирского физика-отшельника крупный специалист по железнодорожному строительству и его жена предложили помощь в издании книги Ю.И.Кулакова "Теория физических структур". Поистине, "духовной жаждою томим" любой россиянин. Ко всем добрым людям и обращается мой герой со словами Пушкина:

Друзья мои, возьмите посох свой
Идите в лес, бродите по долине.
Крутых холмов устаньте на вершине
И в долгу ночь глубок ваш будет сон.

Корреспондент "Общей газеты" – ИРИНА САМАХОВА

Новосибирский Академгородок

Еретические горизонты физика

Ю.И. Кулаков

Милый друг, иль ты не видишь,
Что все видимое нами –
Только отблеск, только тени
От незримого очами?

Милый друг, иль ты не слышишь,
Что житейский шум трескучий –
Только отклик искаженный
Торжествующих созвучий?

— В. С. Соловьёв

Мир . . . так и остаётся только
тенью Абсолютного.

— С. Н. Булгаков

Это происходило в Москве более пятидесяти лет тому назад. Тогда мне посчастливилось стать аспирантом выдающегося физика, лауреата Нобелевской премии, замечательного человека Игоря Евгеньевича Тамма.

В 1953г. Тамм становится академиком.

В том же году я был принят в аспирантуру Московского университета. Приехал я из Таганрога, куда забросила меня судьба после окончания МГУ. Оттуда привез свою первую научную работу "О квантовом обобщении уравнений классической механики". С нею связывалось много не только радостных, но и печальных воспоминаний. Завершив эту работу ещё в Таганрогском радиотехническом институте, я показал её своему товарищу по семинару теоретической физики – Гелию Абрамовичу. Показалось, что гром грянул с ясного неба – от него я узнал, что похожая работа напечатана в последнем номере Physical Review американским физиком-теоретиком Дэвидом Бомом. . . Как бы там ни было, оставаться в Таганроге было выше моих сил.

В Москве я показал свою работу профессору Я.П. Терлецкому, уже не связывая с ней никаких надежд. И. оказалось, напрасно. Я услышал, что публикация статьи Бома нисколько не обесценивает мой труд, который вполне может стать хорошей кандидатской диссертацией. Таким образом, я был зачислен в аспирантуру к Я.П. Терлецкому, имея на руках в общем готовую диссертацию и предвкушая три чудесных года вольной московской жизни.

Однако случай стерёг меня. Мой университетский друг Саша Лаврененко был аспирантом Игоря Евгеньевича Тамма. Покорённый силой и обаянием своего руководителя, но возгорелся идеей моего перехода в аспирантуру именно к Тамму. Меня же вполне устраивала та жизнь, которую я вел, и, честно говоря, особого энтузиазма с моей стороны он не встретил. Но мой друг человеком упорным, и однажды он передал мне приглашение Игоря Евгеньевича зайти к нему домой. Так случилось, что в один прекрасный день я оказался у дверей квартиры Тамма.

В первую минуту я как-то растерялся и даже испытал нечто вроде разочарования, увидев перед собой голого по пояс мужчину, невысокого, с заметно выступающим брюшком. Пылкие речи моего друга создали в моём воображении совершенно другой образ.

Тем временем Игорь Евгеньевич раскрыл принесённую мной рукопись. Внимательно прочитав первые две страницы, он быстро просмотрел третью, перевернул четвёртую и уже веером пустил остальные. "Молодой человек – обратился ко мне Тамм, – если Вы хотите сделать что-нибудь существенное в физике, прекратите заниматься этой чепухой. Потому что всё это – чепуха! Я согласен взять Вас к себе в аспирантуру, но при одном условии, что больше Вы никогда не вернётесь к этой ерунде... Когда решите, пожалуйста, звоните".

Вряд ли нужно описывать те чувства,которые овладели мной тогда. Всю ночь я проходил по набережной и пустынным улицам спящего города, и, когда наступило утро, позвонил и сказал, что принимаю выдвинутые условия. Однако сказано это было не с совсем чистым сердцем: я надеялся, что со временем я вернусь к старой теме и сумею убедить научного руководителя в своей правоте.

Однако через два года я понял, насколько справедлива была эта суровая оценка. Формальное сведение комплексного уравнения Шредингера к двум вещественным (к уравнению Гамильтона–Якоби, дополненному особым "квантовым потенциалом", и к уравнению непрерывности) ещё не означает сведение квантовой механики к классической. Существует очень важное свойство целостности (в данном случае проявляющее себя в существовании единого вектора состояния в бесконечномерном гильбертовом пространстве), исчезающее при гильотинировании[101].

Я приезжал к Игорю Евгеньевичу по четвергам, утром. Мы завтракали, потом проходили в его кабинет и занимались до обеда. Нельзя сказать, что он был требовательным, всезнающим руководителем или что-нибудь в этом роде. Это была принципиально иная плоскость отношений. Это сотрудничество на равных, когда усилия обоих соединены одной общей целью – поиском истины. Дух нашего сотрудничества лучше всего иллюстрируется как-то обранённой Игорем Евгеньевичем фразой: "Знаете, Юрий Иванович, мы с вами работаем для корзины. Через десять лет это никому не будет нужно: об этом забудут. Но нужно что-то делать!" Я был озадачен, но слова и тон, каким они были сказаны, запали в память и остались навсегда как образец предельной честности в оценке своей работы.

В то время теоретическая физика переживала состояние глубокой депрессии. После поражающих воображение успехов квантовой электродинамики движению вперёд препятствовало отсутствие принципиально новых физических идей. Многие физики-теоретики того времени были заняты созданием новых и, как выяснилось позднее, неэффективных моделей сильных взаимодействий, отличных от

[101]Этот термин введён Игорем Евгеньевичем для характеристики всех подобных случаев.

моделей, использующих методы теории возмущений.

Игорь Евгеньевич разъяснял мне, что, изобретая различные модели взаимодействий, мы навязываем природе наш собственный "человеческий" язык, но природа не понимает этого языка, и диалога не получается. "Наша первейшая задача – говорил Тамм, – научиться "слушать" природу, чтобы понять её язык". Но где он, этот язык? Он в законе Ньютона, уравнениях Максвелла, в евклидовой геометрии, в законах квантовой механики. Все эти законы "написаны" на некотором едином языке.

Так, в конце 1960 г. передо мной возникла совершенно новая задача – найти единый универсальный язык, на котором написаны все фундаментальные физические законы, и, опираясь на него, пересмотреть и переосмыслить основания всей физики.

Игорь Евгеньевич неоднократно говорил: "Если Вы хотите стать настоящим физиком, а не высококвалифицированным ремесленником, Вы не должны исключать возможности существования иных форм реальности, отличных от формы существования материальной действительности. Вы должны читать и внимательно изучать авторов, не входящих в список обязательной литературы, предлагаемой официальной философией, и прежде всего русских философов – Бердяева, Лосского, Франка. Они о многом догадались, хотя и не могли сформулировать свою идею всеединства на строгом языке математики. Попробуйте, может быть, Вам удастся это сделать!"

В те уже далёкие времена господства диалектического и исторического материализма эти слова казались еретическими, вызывали сладостное ощущение запретного плода и открывали новые горизонты. Но только спустя много лет я по-настоящему понял из глубоко провиденциальный смысл.

Дело в том, что исторически возникшие из опыта, "снизу", различные разделы физики – механика, термодинамика, электродинамика, теория относительности, квантовая механика – сохраняли свой, характерный для каждого раздела полуэмпирический язык. Но если подняться на достаточно высокий уровень абстракции и взглянуть на хорошо известные разделы физики "сверху", то многочисленные детали важные при решении тех или иных конкретных задач, постепенно исчезают, и вместо них обнаруживаются новые фундаментальные физические законы – с новыми целями, новыми задачами и новым математическим аппаратом.

Нечто подобное происходит при восхождении на высокую горную вершину. Вначале альпинисты идут по ущелью. Перед их взором проходит множество разнообразных объектов – валуны и камни, потоки и водопады, кустарники и деревья. Поднимаясь все выше и выше, они попадают в область альпийских лугов. Затем, преодолев слой облаков и выше, они видят перед собой величественную картину – горный хребет с покрытыми вечными снегами вершинами, бездонно синее небо, ослепительно сияющее солнце, а внизу уже не видно деталей, но зато хорошо просматривается пройденный ими маршрут.

Как выяснилось позже, суть любых фундаментальных физических законов состоит в объективном существовании абстрактных физических структур – особого рода отношений, в которых находятся идеальные "двойники" – прообразы объектов материальной действительности. В отличие от хорошо известных причинно-следственных связей, эти отношения имеют совершенно иную природу, описываются на едином универсальном языке, о котором когда-то говорил Тамм, и выражают наиболее адекватным образом идею целостности и всеединства особого Мира высшей реальности, тенью которого является видимый нами вещественный мир.

Вопросы истории естествознания и техники.
№4 1996, С. 165–167. ISSN 0205–9606

Встреча в Цахкадзоре

Ю.И. Кулаков

В начале 70-х гг. в “самиздате” широко была распространена работа А. Д. Сахарова “Размышления о прогрессе, мирном существовании и интеллектуальной свободе”. Читали эту брошюру и в новосибирском Академгородке, и в моём близком окружении. И, естественно, мне очень хотелось увидеться с Андреем Дмитриевичем, мысли которого, изложенные в этой работе, были близки и понятны.

И вот такой случай представился. Летом 1973 г. я поехал на Всесоюзную конференцию по проблемам гравитации в Армению, в местечке Цахкадзор. Ожидалось, что там будет Андрей Сахаров. До этого я неоднократно видел его на разных “физических мероприятиях”, но непосредственно разговаривать не приходилось.

На следующий день после приезда в Цахкадзор, во время обеда, я, немного робея, подошёл к столику, за которым сидели Андрей Дмитриевич Сахаров и Елена Георгиевна Боннер.

Представившись как бывший аспирант Игоря Евгениевича Тамма, я сказал: “Знаете, Андрей Дмитриевич, я, как купец из “Аленького цветочка”, – когда я собирался сюда на конференцию, моя старшая дочь Ира сказала мне: “Папа, ты не привози аленький цветочек, а привези мне портрет Сахарова!”. Так что я не могу вернуться домой, не увезя с собой Ваш портрет”.

Андрей Дмитриевич как-то очень доброжелательно и сердечно откликнулся на эту просьбу, и поскольку в помещении было достаточно темно, мы вышли на улицу. Так появился цветной слайд, где А. Д. Сахаров запечатлён на фоне глухой стены из дикого камня. Образ получился почти символический...

Андрей Дмитриевич рассказал мне тогда, что они с женой приехали в Армению из Краснодара, где приходил судебный процесс над одним молодым человеком, обвиняемым в чтении и распространении как раз “Размышлении о прогрессе...”. Защитить юношу не удалось, автора крамольной брошюры даже не пустили в зал заседаний суда.

В автобиографии Сахарова подробно описал этот зловещий 1973 год, когда вокруг него и его семьи сжималось удушающее кольцо...

После этой встречи я получил от Андрея Дмитриевича приглашение побывать у них дома в Москве. Во время такой единственной московской встречи меня, помню, поразила необыкновенная деликатность А. Д. Сахарова. Он, например, не мог позволить себе остановить самоуверенные высказывания одного молодого человека, которому явно импонировало такое внимание. Но, что касается убеждений, не только я, но и все вокруг имели возможность наблюдать невероятную твёрдость Андрея Дмитриевича, когда он защищал принципиальные вопросы.

Я видел тогда, что он был очень одинок, даже в своём братстве физиков. Многие из них понимали его правоту, но не одобряли тот путь борьбы, на который но встал. Система казалась незыблемой, а жертвы – бессмысленными...

Своим стоицизмом Андрей Дмитриевич напомнил мне моего учителя Игоря Евгениевича Тамма. Мне часто вспоминается как-то сказанные Таммом слова в тот период, когда теория сильных взаимодействий находилась в состоянии глубокой депрессии: "Знаете Юрий Иванович, мы с вами работаем для корзины. Через десять лет это никому не будет нужно, – об этом все забудут. Но нужно что-то делать!".

Вопросы истории естествознания и техники.
№2 1996, С. 171–172. ISSN 0205–9606

Я не верю ни в какие догматы, мне не нравятся официальные Церкви (особенно те, которые сильно сращены с государством или отличаются, главным образом, обрядовостью или фанатизмом или нетерпимостью). В то же время я не могу представить Вселенную и человеческую жизнь без какого-то осмысляющего их начала, без источника духовной "теплоты", лежащего вне материи и её законов. Вероятно, такое чувство можно назвать религиозным[102].

Андрей Сахаров

[102] *Сахаров А.Д.* Воспоминания. В двух томах. Том первый, М.: "Права человека", 1996. – 912 с. С. 15.

Вместо предисловия

Их арестовали зимой 1967 года – Юрия Галанскова, Александра Гинзбурга, Алексея Добровольского и Веру Лошкову. Через год в январе 1968 года, состоялся суд. “Народу растолковали, что судят фашистских прихвостней”, – так писал молодёжный еженедельник “Собеседник” (№24 , 1990 год). Там же проводилсь цитаты из писем, напечатанных в центральной прессе после вынесения приговора по 70-й (ныне упразднённой) статье за клевету на социалистический строй: “Именем советского народа суд вынес свой справедливый приговор”, “Возникает вопрос: не слишком ли мягка мера наказания изменникам родины?”. Подобных писем было очень много. И теперь не установить, как они появлялись – под чью-то диктовку или по искреннему убеждению.

Но по поводу возникновения других писем, писем протеста против неправедного суда сомневаться не приходится. Их писали люди, которые понимали, что стоят перед рубежом, отчётливо определяющим конец хрущёвской оттепели – как в жизни страны, так и, возможно, в их личных судьбах.

Так и вышло для многих. Но письма всё-таки были. Они составлялись и подписывались обычно группами (в общем-то совсем немногочисленными) и так и назывались в разговорах: письмо 13-ти, 79-ти, письмо 46-ти.

Последнее письмо 46-ти сотрудников Сибирского отделения АН СССР я считаю необходимым опубликовать спустя 30 лет после его написания в своём журнале-депозитарии “Credo”.

Одновременно с этим приводятся тексты двух партийных документов, принятых спустя 22 года после принятия соответствующего постановления от 16 апреля 1968 года.

19 февраля 1998 года, *Ю.И.КУЛАКОВ*

ГЕНЕРАЛЬНОМУ ПРОКУРОРУ СССР РУДЕНКО ВЕРХОВНОМУ СУДУ РСФСР

Копии:

Председателю Президиума Верховного Совета СССР *Н.В.Подгорному*;

Председателю Совета Министров СССР *А.Н.Косыгину*;

Генеральному секретарю ЦК КПСС *Л.И.Брежневу*;

адвокатам *Б.Золотухину, Д.Каминской*;

в редакцию газеты "Комсомольская правда".

Отсутствие в наших газетах сколь-либо связной и полной информации о существе и ходе процесса А.Гинзбурга, Ю.Галанскова, А.Добровольского и В.Лашковой, осужденных по ст. 70 УК РСФСР, насторожило нас и заставило искать информацию в других источниках - в иностранных коммунистических газетах.

То, что нам удалось узнать, вызвало у нас сомнение в том, что этот политический процесс проводился с соблюдением всех предусмотренных законом норм, например такой, как принцип гласности. Это вызывает тревогу.

Чувство гражданской ответственности заставляет нас самым решительным образом заявить, что проведение фактически закрытых политических процессов мы считаем недопустимым. Нас тревожит то, что за практически закрытыми дверьми судебного зала могут совершаться незаконные дела, выноситься необоснованные приговоры - по недоказанным обвинениям.

Мы не можем допустить, чтобы судебный механизм нашего государства снова вышел из-под контроля широкой общественности и снова вверг нашу страну в атмосферу судебного произвола и беззакония. Поэтому мы настаиваем на отмене приговора Московского городского суда по делу Гинзбурга, Галанскова, Добровольского и Лашковой и требуем пересмотра этого дела в условиях полной гласности и скрупулезного соблюдения всех правовых норм, с обязательной публикацией материалов в печати.

Мы требуем также привлечения к ответственности лиц, виновных в нарушении гласности и гарантированных законом норм судопроизводства.

Письмо подписали:

Акилов Г.П., кандидат физико-математических наук;
Алексеев И.С., кандидат философских наук;
Андреев С.Л., инженер;
Берг Р.Л., доктор биологических наук;
Борисов Ю.Ф., доктор физико- математических наук;
Борисова Л.Г., аспирантка;
Бассерман И., аспирант;

Вишневский Е.Б., младший научный сотрудник;
Вячеславов Л., аспирант;
Гладкий А.В., доктор физико-математических наук;
Громыко М.М., доктор исторических наук;
Гольденберг И.З., преподаватель;
Дрейзин Ф.А., кандидат филологических наук;
Захаров В.Е., кандидат физико-математических наук;
Заславский Р., кандидат физико-математических наук;
Ильичёв К., стажёр;
Конев В.А., кандидат философских наук;
Косицына Э.С., педагог;
Кулаков Ю.И., кандидат физико-математических наук;
Клорин А.В., инженер;
Лозовский Л.А., инженер;
Лихачева Д.В., младший научный сотрудник;
Меньшиков В.Ф., аспирант;
Найдорф Б., педагог;
Нахмансон Р., кандидат физико-математических наук;
Плитка С.И., сотрудник Научно-исследовательского института систем;
Перцовский В.С., педагог;
Прилоус Б.И., старший лаборант;
Рожнова С., аспирантка;
Ревякина Н.В., кандидат исторических наук;
Соколов, кандидат физико-математических наук;
Семячкин Б.Е., младший научный сотрудник;
Топешко Н.А., инженер;
Титов Е.;
Тришина Л.А., ассистент кафедры общего языкознания МГУ;
Фет А.И., доктор физико-математических наук;
Фридман А.М., кандидат физико-математических наук;
Филоненко Н.Н., аспирант;
Хриплович И.В., кандидат физико-математических наук;
Хохлушкин И.Н., младший научный сотрудник;
Цельник Ф.А., инженер;
Черемисина М.И., кандидат филологических наук;
Шабат А.В., кандидат физико-математических наук;
Шалагин А.М., инженер;
Штенгель Э., младший научный сотрудник;
Яблонский Г.С., младший научный сотрудник.

19 февраля 1968, Новосибирск.

Необходимое предисловие

Это было так давно, что мы уже стали забывать, как шелестели мы шёпотом, передавая близким и доверенным людям запретные страницы Сам- и Там-издата.

Я помню, как оказавшись в Москве на курсах повышения квалификации, я впервые прочитал страстно написанное обращение Солженицына “Жить не по лжи”. Естественно, захотелось познакомить с ним как можно больше людей. Перепечатанный экземпляр постоянно находился под рукой в боковом кармане моего старенького пиджака.

В то время в Дубне жил и работал мой друг, физик – поляк Славомир Хойнацкий[103]. В те годы, когда осведомителем мог стать любой, даже твой хороший и давний знакомый, я без каких-либо сомнений доверял этому человеку.

Я приехал на Савёловский вокзал, чтобы отправиться к нему в Дубну. Но когда я захотел купить билет на электричку и начал судорожно шарить по карманам, то обнаружил исчезновение запретного обращения вместе с моим пропуском в Дом аспиранта МГУ, где я тогда жил.

А поскольку к этому времени я уже дважды подвергался допросам – один раз в Москве на Лубянке, а другой раз в более “цивилизованном” месте в Новосибирске, то потеря весьма опасного для властей обращения Солженицына “Жить не по лжи”, да ещё с документом, удостоверяющим мою личность, грозила обернуться для меня настоящей катастрофой. Ехать с таким настроением в Дубну я не мог и в весьма подавленном состоянии я вернулся в общежитие.

Всю ночь я видел во сне моего “куратора” Петра Андреевича Шугая и всё время просыпался с самыми мрачными предчувствиями...

Но какова же была моя радость, когда я обнаружил дыру в своём боковом кармане и мой “запретный плод” вместе с пропуском, застрявшие под подкладкой моего второго “парадного” пиджака!

И вот теперь, спустя ничтожно малый исторический срок, я имею возможность совершенно безцензурно издавать свой собственный журнал “Credo”, и даже с выходом в Internet.

В память о тернистых, но счастливых, годах моей молодости я, с одобрительного разрешения самого Александра Исаевича, помещаю здесь, в своём журнале его полное гражданского мужества, страстное обращение к своим соотечественникам.

1 марта 1998 *Ю.И.КУЛАКОВ*

[103] Я буду счастлив, если эта заметка через Internet случайно попадёт ему на глаза, или кому-нибудь, кто знает его и сообщит ему об этом.

Жить не по лжи!
А.И.Солженицын

12 февраля 1974

Когда-то мы не смели и шёпотом шелестеть. Теперь вот пишем и читаем Самиздат, а уж друг другу-то, сойдясь в курилках НИИ, от души нажалуемся: чего только они не накуролесят, куда только не тянут нас! И ненужное космическое хвастовство при разорении и бедности дома; и укрепление дальних диких режимов; и разжигание гражданских войн; и безрассудно вырастили Мао Цзедуна (на наши средства) – и нас же на него погонят, и придётся идти, куда денешься? и судят, кого хотят, и здоровых загоняют в умалишённые – всё “они”, а мы – бессильны.

Уже до донышка доходит, уже всеобщая духовная гибель насунулась на всех нас, и физическая вот-вот запылает и сожжёт и нас, и наших детей, – а мы по-прежнему всё улыбаемся трусливо и лепечем косноязычно:

- А чем же мы помешаем? У нас нет сил.

Мы так безнадёжно расчеловечились, что за сегодняшнюю скромную кормушку отдадим все принципы, душу свою, все усилия наших предков, все возможности для потомков – только бы не расстроить своего утлого существования. Не осталось у нас ни твердости, ни гордости, ни сердечного жара. Мы даже всеобщей атомной смерти не боимся, третьей мировой войны не боимся (может, в щёлочку спрячемся), – мы только боимся шагов гражданского мужества! Нам только бы не оторваться от стада, не сделать шага в одиночку – и вдруг оказаться без белых батонов, без газовой колонки, без московской прописки.

Уж как долбили нам на политкружках, так в нас и вросло, удобно жить, на весь век хорошо: среда, социальные условия, из них не выскочишь, бытие определяет сознание, мы-то при чём? мы ничего не можем.

А мы можем – всё! – но сами себе лжём, чтобы себя успокоить. Никакие не “они” во всём виноваты – мы сами, только мы!

Возразят: но ведь действительно ничего не придумаешь! Нам закляпили рты, нас не слушают, не спрашивают. Как же заставить их послушать нас?

Переубедить их – невозможно.

Естественно было бы их переизбрать! - но перевыборов не бывает в нашей стране.

На Западе люди знают забастовки, демонстрации протеста, – но мы слишком забиты, нам это страшно: как это вдруг – отказаться от работы, как это вдруг – выйти на улицу?

Все же другие роковые пути, за последний век отпробованные в горькой русской истории, – тем более не для нас, и вправду – не надо! Теперь, когда все топоры своего дорубились, когда всё посеянное взошло, – видно нам, как заблудились, как зачадились те молодые, самонадеянные, кто думали террором, кровавым восстанием и гражданской войной сделать страну справедливой и счастливой. Нет, спасибо, отцы просвещения! Теперь-то знаем мы, что гнусность методов распложается в гнусности результатов. Наши руки – да будут чистыми!

Так круг – замкнулся? И выхода – действительно нет? И остается нам только бездейственно ждать: вдруг случится что-нибудь само?

Но никогда оно от нас не отлипнет само, если все мы все дни будем его признавать, прославлять и упрочнять, если не оттолкнемся хотя б от самой его чувствительной точки.

От – лжи.

Когда насилие врывается в мирную людскую жизнь – его лицо пылает от самоуверенности, оно так и на флаге несёт, и кричит: "Я – Насилие! Разойдись, расступись – раздавлю!" Но насилие быстро стареет, немного лет – оно уже не уверено в себе, и, чтобы держаться, чтобы выглядеть прилично, - непременно вызывает себе в союзники Ложь. Ибо: насилию нечем прикрыться, кроме лжи, а ложь может держаться только насилием. И не каждый день, не на каждое плечо кладет насилие свою тяжёлую лапу: оно требует от нас только покорности лжи, ежедневного участия во лжи – и в этом вся верноподданность.

И здесь-то лежит пренебрегаемый нами, самый простой, самый доступный ключ к нашему освобождению: личное неучастие во лжи! Пусть ложь всё покрыла, пусть ложь всем владеет, но в самом малом упрёмся: пусть владеет не через меня!

И это – прорез во мнимом кольце нашего бездействия! – самый легкий для нас и самый разрушительный для лжи. Ибо когда люди отшатываются ото лжи – она просто перестает существовать. Как зараза, она может существовать только на людях.

Не призываемся, не созрели мы идти на площади и громогласить правду, высказывать вслух, что думаем, – не надо, это страшно. Но хоть откажемся говорить то, чего не думаем!

Вот это и есть наш путь, самый лёгкий и доступный при нашей проросшей органической трусости, гораздо легче (страшно выговорить) гражданского неповиновения по Ганди.

Наш путь: ни в чём не поддерживать лжи сознательно! Осознав, где граница лжи (для каждого она ещё по-разному видна), – отступиться от этой гангренной границы! Не подклеивать мертвых косточек и чешуек Идеологии, не сшивать гнилого тряпья – и мы поражены будем, как быстро и беспомощно ложь опадёт, и чему надлежит быть голым – то явится миру голым.

Итак, через робость нашу пусть каждый выберет: остаётся ли он сознательным слугою лжи (о, разумеется, не по склонности, но для прокормления семьи, для воспитания детей в духе лжи!), или пришла ему пора отряхнуться честным человеком, достойным уважения и детей своих и современников. И с этого дня он:

– впредь не напишет, не подпишет, не напечатает никаким способом ни единой фразы, искривляющей, по его мнению, правду;

– такой фразы ни в частной беседе, ни многолюдно не выскажет ни от себя, ни по шпаргалке, ни в роли агитатора, учителя, воспитателя, ни по театральной роли;

– живописно, скульптурно, фотографически, технически, музыкально не изобразит, не сопроводит, не протранслирует ни одной ложной мысли, ни одного искажения истины, которое различает;

– не приведет ни устно, ни письменно ни одной "руководящей" цитаты из угождения, для страховки, для успеха своей работы, если цитируемой мысли не разделяет полностью или она не относится точно сюда;

– не даст принудить себя идти на демонстрацию или митинг, если это против его желания и воли; не возьмёт в руки, не подымет транспаранта, лозунга, которого не разделяет полностью;

– не поднимет голосующей руки за предложение, которому не сочувствует искренне; не проголосует ни явно, ни тайно за лицо, которое считает недостойным или сомнительным;

– не даст загнать себя на собрание, где ожидается принудительное, искажённое обсуждение вопроса;

– тотчас покинет заседание, собрание, лекцию, спектакль, киносеанс, как только услышит от оратора ложь, идеологический вздор или беззастенчивую пропаганду;

– не подпишется и не купит в рознице такую газету или журнал, где информация искажается, первосущные факты скрываются.

Мы перечислили, разумеется, не все возможные и необходимые уклонения ото лжи. Но тот, кто станет очищаться, – взором очищенным легко различит и другие случаи.

Да, на первых порах выйдет не равно. Кому-то на время лишиться работы. Молодым, желающим жить по правде, это очень осложнит их молодую жизнь при начале: ведь и отвечаемые уроки набиты ложью, надо выбирать. Но и ни для кого, кто хочет быть честным, здесь не осталось лазейки: никакой день никому из нас даже в самых безопасных технических науках не обминуть хоть одного из названных шагов – в сторону правды или в сторону лжи; в сторону духовной независимости или духовного лакейства. И тот, у кого недостанет смелости даже на защиту своей души, – пусть не гордится своими передовыми взглядами, не кичится, что он академик или народный артист, заслуженный деятель или генерал, – так пусть и скажет себе: я – быдло и трус, мне лишь бы сытно и тепло.

Даже этот путь – самый умеренный изо всех путей сопротивления – для засидевшихся нас будет нелёгок. Но насколько же легче самосожжения или даже голодовки: пламя не охватит твоего туловища, глаза не лопнут от жара, и черный-то хлеб с чистой водою всегда найдётся для твоей семьи.

Преданный нами, обманутый нами великий народ Европы – чехословацкий – неужели не показал нам, как даже против танков выстаивает незащищённая грудь, если в ней достойное сердце?

Это будет нелёгкий путь? – но самый лёгкий из возможных. Нелёгкий выбор для тела, – но единственный для души. Нелёгкий путь, – однако есть уже у нас люди, даже десятки их, кто годами выдерживает все эти пункты, живёт по правде.

Итак: не первыми вступить на этот путь, а – присоединиться! Тем легче и тем короче окажется всем нам этот путь, чем дружнее, чем гуще мы на него вступим! Будут нас тысячи – и не управятся ни с кем ничего поделать. Станут нас десятки тысяч – и мы не узнаем нашей страны!

Если ж мы струсим, то довольно жаловаться, что кто-то нам не даёт дышать – это мы сами себе не даём! Пригнёмся ещё, подождём, а наши братья биологи помогут приблизить чтение наших мыслей и переделку наших генов.

Если и в этом мы струсим, то мы – ничтожны, безнадёжны, и это к нам пушкинское презрение:

> К чему стадам дары свободы?
> ....
> Наследство их из рода в роды
> Ярмо с гремушками да бич.

Облака плывут, облака...

Записка
о постановлении бюро Советского РК КПСС "о некоторых вопросах идеологической работы в институтах АН СССР и НГУ" от 16 апреля 1968 г.

В январе 1968 года Московский городской суд осудил к различным срокам лишения свободы по ст. 70 УК РСФСР группу лиц в составе Гинзбурга А.И., Галанскова Ю.Т., Добровольского А.А. и Лашковой В.И.

В феврале 1968 года 46 сотрудников институтов Новосибирского научного центра и НГУ направили письмо в Верховный суд РСФСР, генеральному прокурору СССР, а копии – Председателю Президиума Верховного Совета СССР Н.В.Подгорному, Генеральному секретарю ЦК КПСС Л.И.Брежневу, Председателю Совета Министров СССР А.Н.Косыгину и редакции газеты "Комсомольская правда".

23 марта содержание письма было изложено в американских газетах, а 27 марта текст передан радиостанцией "Голос Америки".

Письмо обсуждалось в коллективах институтов, где работали подписавшие письмо; большинство участников собраний осудили факт его подписания и особенно – появление его в зарубежной прессе.

16 апреля 1968 года бюро Советского РК КПСС рассмотрело вопрос "О некоторых вопросах идеологической работы в институтах СОАН СССР и НГУ" и, исходя из существовавших тогда представлений о методах идеологической работы, искажённого понимания соотношения общечеловеческих и классовых ценностей, квалифицировало поведение участников письма как "безответственность и политическую незрелость", как попытку "дискредитировать советские юридические органы", а всю акцию – как "политически вредную, использованную враждебными нашей стране организациями для идеологической диверсии".

В числе подписавших письмо было 6 членов КПСС – И.С.Алексеев, В.А.Конев (НГУ), Л.Г.Борисова (ИЭиОПП), Э.С.Косицина (ФМШ), С.П.Рожнова (ИИФиФ), Г.С.Яблонский (ИК). Первым троим были объявлены партийные взыскания, трое последних – исключены из КПСС.

Разбирательство на бюро послужило толчком к ужесточению идеологического контроля во всех сферах общественной жизни района, в частности, свёртывание работы клуба–кафе "Под интегралом", клуба "Гренада", объективно способствовало формированию застойных явлений во внутрипартийной жизни.

В связи с вышеизложенным предлагается постановление бюро Советского РК КПСС "О некоторых вопросах иделолгической работы в институтах СОАН СССР и НГУ" от 16 апреля 1968 года отменить, приняв меры к политической реабилитации подписавших письмо.

Идеологический отдел Советского РК КПСС г. Новосибирска, июнь, 1990 г.

ПОСТАНОВЛЕНИЕ
бюро Советского райкома КПСС
от 12 июня 1990 года

Вернувшись к постановлению бюро от 16 апреля 1968 года, бюро Советского РК КПСС находит его ошибочным по существу, отражающим принятые в то время представления о методах идеологической работы, исходящим из искажённого понимания соотношения общечеловеческих и классовых ценностей, что привело к развитию застойных явлений в общественной жизни Академгородка, и постановляет:

1. Постановление бюро Советского РК КПСС “О некоторых вопросах идеологической работы в институтах СОАН СССР и НГУ” от 16 апреля 1968 года – отменить.

2. Вопрос о политической реабилитации подписавших письмо 46-ти решить в установленном порядке.

3. Проинформировать о решении бюро РК КПСС партийные организации СОАН и НГУ, ознакомив их с запиской идеологического отдела. Опубликовать данное постановление в местной печати.

ВЫПИСКА ИЗ ПРОТОКОЛА №48

Заседания Учёного Совета математического факультета Новосибирского госуниверситета

от 21 июня 1972 г.

Учёный Совет отклонил кандидатуру лектора по физике (IV курс математического отделения) – доц. Кулакова Ю. И. как читающего слишком специальный курс, тогда как математикам необходим фундаментальный курс физики.

Учёный Совет обращается с просьбой к кафедре общей физики НГУ для назначения лектора по этому курсу. В качестве одной из возможных упоминалась кандидатура доцента кафедры вычислительных методов механики сплошной среды Ю. А. Березина.

Учёный секретарь Совета,
доцент А. А. Атавин

Centro Superiore di Logica
e
Scienze Comparate

Il Consiglio
di
Presidenza

Visti gli articoli dello Statuto
Udito il parere conforme del Relatore
ed in Riconoscimento delle alte doti e prove del sapere

ha proceduto a nominare

Yuri Kulakov

membro consulente aggregato

In fede di quanto sopra, si rilascia il presente attestato.

Atto costitutivo: Notaio Lippi Bruni
Rep. N. 7246, Reg.to a Bologna
il 20-11-69, con N. 16779

Bologna, 30 settembre 1972

Il Presidente
Prof. Dott. Franco Spisani

Высший Центр логики
и межнаучных исследований

Совет президента

в соответствии со статьями Устава, заслушав рекомендации докладчика, в знак признания высоких достоинств и доказательств учёности, постановил присвоить

Юрию КУЛАКОВУ

звание *члена-корреспондента.*

В подтверждение этого выдан настоящий диплом.

Болонья, 30 сентября 1972.

Подпись: Президент - *Франко Спизани*

Печать: *Международный Центр Логики*

(Перевод с итальянского)

НАУЧНАЯ БИОГРАФИЯ

КУЛАКОВА Юрия Ивановича

12 марта 1927 года родился в г. Воронеже.

1944 - Поступил на первый курс физико-математического факультета Воронежского университета.

4 мая 1945 – гибель в концлагере под Берлином отца
КУЛАКОВА Ивана Васильевича

1946 - Перевелся на второй курс физического факультета Московского государственного университета.

1947 - Первая научная работа: Кулаков Ю.И., Зайцев А.А., Быстрый метод измерения важнейших параметров газового разряда. Вестник МГУ, N 3, 1949, с. 101-109.

Декабрь 1950 г. - Окончил с отличием физический факультет МГУ по специальности "ядерная физика".

Январь 1951 г. - Направлен на работу по проектированию Первой атомной электростанции (г.Обнинск, войсковая часть N 32399).

Май 1951 г. - Ассистент кафедры физики Новочеркасского политехнического института.

1952-1954 годы - Старший преподаватель Таганрогского радиотехнического института.

1952-1955 годы - Попытка пересмотра оснований квантовой механики, исходя из введенного понятия "квантового потенциала".

1954-1957 годы - Обучение в аспирантуре Московского университета у академика Игоря Евгеньевича Тамма.

- Подготовка и написание кандидатской диссертации: "Образование пи-мезонов при аннигиляции нуклон-антинуклонных пар и соударении протонов".

- Доклад на Всесоюзной конференции по физике частиц высоких энергий (Москва, АН СССР, 1956).

- Публикация семи статей по теме диссертации (ЖЭТФ, Доклады Болгарской АН, Чехословацкий физический журнал, Труды МФТИ).

Февраль 1959 г. - Присуждение ученой степени кандидата физико-математических наук.

1957-1961 годы - Ассистент кафедры общей физики Московского физико-технического института.

- Разработка математического аппарата "теории Козырева": Кулаков Ю.И. Об одной возможности нелинейного обобщения классической механики // Труды по теории поля. Выпуск 2 (Космология, гравитация и электродинамика). М., 1965, с. 112-115.

- Участие в экспедициях по проверке результатов Козырева, попытка независимого экспериментального обнаружения "эффекта Козырева".

Март 1961 г. - Переезд из Москвы в Сибирское отделение АН СССР (Новосибирск).

- Доцент кафедры теоретической физики Новосибирского государственного университета.

1961-1965 годы - Создание теории физических структур.

1963 - Исследование движения систем переменного состава (тележка Охоцимского): Кулаков Ю.И., Боровский Ю.Е. 0 движении систем переменного состава при наличии вариационных сил.// Прикладная математика и механика АН СССР, т. 27, вып. 3, 1963, с. 468-473.

Декабрь 1966 г. - Первый курс лекций по теории физических структур на станции Международный геофизический год (Заполярье, Тикси).

1967-1973 - Научное руководство первым аспирантом Михайличенко Геннадием Григорьевичем.

1967 - Монография: Кулаков Ю.И. Тензорный анализ для физиков. Новосибирск, НГУ, 149 с.

1968 - Первые публикации по теории физических структур:

1. Кулаков Ю.И. К теории физических структур (Четыре лекции для студентов НГУ). Новосибирск, НГУ, 30 с.

2. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур (Дополнение Г.Г. Михайличенко). Новосибирск, НГУ, 226 с.

1969-1970 годы - Первые научные доклады о теории физических структур:

1. Всесоюзный алгебраический коллоквиум (Новосибирск, июнь 1969).

2. Ужгородская конференция по проблемам измерений (Ужгород, август 1969).

3. IV Всесоюзная межвузовская конференция по геометрии (Тбилиси, 27-31 октября 1869).

4. Всесоюзный симпозиум по теории познания в Физическом институте АН СССР (Москва, 19-20 января 1970).

5. XIV научно-техническая конференция Министерства высшего и среднего специального образования СССР (Москва, 27-29 мая 1970).

6. III Всесоюзный симпозиум по философским вопросам релятивистской физики и космологии (Киев, 2-4 июня 1970).

7. Конференция педагогических институтов Центральной зоны РСФСР по алгебре, математической логике и вычислительной математике (Иваново, 6-9 июня 1970).

1970 - Подготовка и написание Г.Г. Михайличенко кандидатской диссертации "Методы решения одного класса функциональных уравнений", НГУ.

1970-1971 годы - Первые публикации по теории физических структур в Докладах АН СССР и в Сибирском математическом журнале:

1. Кулаков Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики // ЛАН СССР, т. 193, N 1, 1970, с. 72-75 (Представлена акад. М.А. Леонтовичем 12 февраля 1968).

2. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур. ДАН СССР, т. 193, N 5, 1970, с. 985-987 (Представлена акад. А.Л. Александровым 9 июля 1969).

3. Кулаков Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа. ДАН СССР, т. 201, N 3, 1971, с. 570-572 (Представлена акад. С.Т. Беляевым 12 мая 1969).

4. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. ДАН СССР, т. 206, N 5, 1972, с. 1056-1058 (Представлена акад А.А. Александровым 23 сентября 1970).

5. Кулаков Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур // Сибирский математический журнал. т.12, N 5, 1971, с. 1142-1145.

1971 - Выступление с докладами о теории физических структур на семинаре у академика Алексея Зиновьевича Петрова в Институте теоретической физики АН СССР (Киев). Кулаков Ю.И О физических структурах. - Препринт ИТФ - 71 - 19 Р. Киев, Институт теоретической физики АН УССР, 1971, 24 с.

- Первая рецензия на книгу: Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. (Дополнение Г.Г. Михайличенко). Новосибирск, Новосибирский университет, 1968. Овчинников Н.Ф. К проблеме единства физического знания. Природа, N 2, 1971, с. 106-110.

- Участие в IV International Congress of Logical, Methodology and Philosophy of Science. Bucharest, Bucharest, Romania, 29 august - 4 september, 1971 с докладом Kulakov Ju.I., Protasiewicz T.I. Phenomenological Simmetry and the Foundations of Physics.

1971-1973 годы - Публикации по теории физических структур в журнале Teorie a Metoda (Чехословакия):

1. Кулаков Ю.И. Некоторые замечания о единой физической картине мира. т.3, N 3, 1971, с. 53-62.

2. Кулаков Ю.И. Основные положения теории физических структур. т.4, N 1, 1972, с. 85-90.

3. Кулаков Ю.И. Ньютоновская механика с точки зрения теории физических структур. т.4, N 3, 1972, с. 59-78.

4. Кулаков Ю.И. Инвариантная формулировка классической теории измерений. т.5, N 2, 1973, с. 55-65.

30 сентября 1972 г. - Присвоение звания члена-корреспондента Centro Superiore di Logica e Scienze Comparate (Bologna, Italy).

- Доклад "К вопросу об основании теории тяготения" на Третьей советской гравитационной конференции. (Ереван, Цахкадзор, 11-14 октября 1972); первая встреча с Андреем Дмитриевичем Сахаровым.

1973 - Публикация в International Logic Review (Italy); Kulakov Ju.I., Protasiewicz T.I. Phenomenolodical Symmetry and the Foundations of Physics. N. 7, 1973, p, 98-101.

- Защита Г.Г. Михайличенко кандидатской диссертации "Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона". НГУ, 1973.

1975 - Публикация в журнале Вопросы философии: Кулаков Ю.И. Структура и единая физическая картина мира. N 2, 1975, с. 15-26.

- Доклад Kulakov Ju.I. Theorie der Phisikalischen Structuren und Das 6 Problem von Hilbert на V International Congress of Logical, Methodology and Philosophy of Science. London, Ontario, Canada, 27 august - 2 september, 1975. Кулаков Ю.И. Теория физических структур и Шестая проблема Гильберта // Системный метод и современная наука. Новосибирск, 1976, с. 156-161.

19 марта 1976 – смерть мамы
ИВАНОВОЙ Антонины Козьминичны

1976 - Рецензия на работы по теории физических структур: Левин А. Неизбежное "после". Природа, 1976, N 4, с. 90-99.

1977 - Начало научного сотрудничества с Львом ВладимиромХанановичем;

- Публикация Михайличенко Г.Г. Об одной задаче в теории физических структур // Сибирский математический журнал. т. 18, N 6, 1977, с. 1342-1355.

1976-1980 годы - Публикации по теории физических структур в различных книгах, сборниках и коллективных монографиях:

1. Бирюков Б.В., Кулаков Ю.И., Новик И.Б. "Физикалистский" и теоретико-системный аспекты кибернетики // Управление, информация, интеллект (Под ред. А.И. Берга). Москва, Мысль, 1976, с. 43-70.

2. Кулаков Ю.И. Теория физических структур и Шестая проблема Гильберта // Системный метод и современная наука. Новосибирск, 1976, с. 156-161.

3. Кулаков Ю.И. О возможности сведения законов физики к законам геометрии // Классическая и квантовая теория гравитации. Минск, 1976, с. 59-60.

4. Кулаков Ю.И. К теории физических структур // Принципы симметрии (Историко-методологические проблемы). Москва, Наука, 1978, с. 141-152.

5. Кулаков Ю.И. К вопросу о единой физической картине мира // История и методология естественных наук. Выпуск XIX. Москва, МГУ, 1978, с. 3-29.

6. Кулаков Ю.И. О необходимости исследований оснований теоретической физики // Проблемы и особенности современной научной методологии. Свердловск. Уральский научный центр АН СССР, 1978 с. 152-163.

7. Кулаков Ю.И. О необходимости новой постановки проблемы в теоретической физике // Физическая теория (философско-методологический анализ). Ред. коллегия: И.А. Акчурин (отв. ред.) и др. - Москва, Наука, 1980, с. 192-209. 1976 - Разработка (совместно с Румером Ю.Б., Фетом А.И., Бяковым В.М.)

теоретико-групповой классификации химических элементов:

Byakov V.M., Kulakov Ju.I., Rumer Ju.B., Fet A.I. Group-Theoretical Classification of Chemical Elements.

I. Physical Foundations. M., Preprint ITEP, 1976, N. 26.

II. Description of Applied Groups. Moscow, Preprint ITEP, 1976, N. 90, 39 p.

III. Comparision with the Properties of Elements. Moscow, Preprint ITEP, 1977, N. 7, 25 p.

Февраль-май 1977 г. - Чтение семестрового курса лекций по теории физических структур на физическом факультете Московского университета.

- Выступление с докладом о теории физических структур в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна).

1980-1984 годы - Публикации, посвященные проблеме времени в рамках теории физических структур:

1. Время как физическая структура // Моделирование и прогнозирование в экологии (Межвузовский сборник научных трудов). Рига, Латвийский государственный университет, 1980, с. 23-43.

2. Кулаков Ю.И. Время как физическая структура // Развитие учения о времени в геологии. Киев. Наукова думка, 1882, с. 126-150.

3. Шахов В.И. Анализ категории времени как методологическая задача, актуализируемая развитием современных естествознания и техники // Тезисы научной конференции "Книга В.И. Ленина "Материализм и эмпириокритицизм" и современное естествознание". Москва, Институт философии АН СССР, 1984, с. 109-113.

1970-1986 годы - Публикации Г.Г. Михайличенко по теории физических структур:

1. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (3,2). - Украинский математический журнал, 1970, т. 22, N 6, с. 837-841.

2. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. - Доклады АН СССР, 1972, т. 206, N 5, с. 1056-1058. (Представлена акад. А.Д. Александровым 23 сентября 1970).

3. Михайличенко Г.Г. Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными. - Украинский математический журнал, 1972, т. 25, N 5, с. 589-598.

4. Михайличенко Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2). - Сибирский математический журнал, 1973, т. 14, N 5, с. 1057-1064.

5. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (2,2,2). - Известия высших учебных заведений. математика, 1876, N 8 (171), с. 60-67.

6. Михайличенко Г.Г. Об одной задаче в теории физических структур. - Сибирский математический журнал, 1877, т. 18, N 6, с. 1342-1355.

7. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. - Доклады АН СССР, 1981, т. 260, N 4, с. 803-805. (Представлена акад. А.Д. Александровым 19 марта 1881).

8. Mikhaylitchenko G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques. C.R.Acad. Sc. Paris, t. 293 (16 novembre 1981), Serie I, pp. 529-531. (presentee par Serge Sobolev).

9. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости // Сибирский математический журнал, 1982, т, 23, N 5, с. 132-141.

10. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометриях // Доклады АН СССР, 1983, т. 269, N 2, с. 284-288 (представлена акад. А.Д. Александровым 1 марта 1982).

11. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометриях // Сибирский математический журнал, 1984, т. 25, N 5, с. 99-113.

12. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств // Доклады АН СССР, т. 284, N 1, с. 39-41 (представлена акад. А.Д.Александровым в июне 1984).

13. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия геометрии двух множеств // Украинский математический журнал. 1989, т. 41, N 11, с. 1501-1506.

14. Михайличенко Г.Г., Лозицкий Е.Л. Простейшие двуметрические физические структуры // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Выпуск 125. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1988 с. 88-89.

15. Михайличенко Г.Г. Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований // Вестник МГУ, Серия 1, Математика, механика, 1986, N 5, с. 93.

Осень 1980 г. - Выступление на семинаре по математической физике в Ленинградском Отделении Института математики АН СССР им. В.А.Стеклова:

Кулаков Ю.И. О теории физических структур // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 15 (Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 127) Сборник работ под ред. О.А. Ладыженской. Ленинград, Наука, 1982, с. 103-151;

- Первая встреча с академиком Ольгой Александровной Ладыженской.

1982 - Достаточно подробное изложение основных идей теории физических структур:

Шахов В.И., Ускеев С.Ш. 0 путях формализации законов Физики // Вопросы кибернетики (Кибернетика и логическая формализация; аспекты истории и методологии). Под ред. Б.В. Бирюкова и А.Г. Спиркина. Москва, 1982, с. 130-165.

1983 - Доклад Kulakov Ju.I. The problem of unity in physical knowledge. // Logic, Methodology and Philosophy of Science (Papers of Soviet scientists submitted to the Soviet National Organization Committee for the VII International Congress of Logical, Methodology and Philosophy of Science. Austria, Salzburg, 11-16 july 1983) Sections 6, 8-13. Moscow, 1983, pp. 94-96.

- Участие в конференции "Экономика и совершенствование управления на базе системного подхода" с докладом Кулаков Ю.И. Единая классификация физических законов // Тезисы конференции. Волгоград, Волгоградский областной совет НТО, 1982, с. 139-142.

1984 - Работа над созданием естественной таблицы химических элементов на основе теоретико-группового подхода, предложенного Румером Ю.Б. и Фетом А.И.: Кулаков Ю.И. Естественная таблица химических элементов // Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1984, с. 82-90.

9 июля 1984 – гибель в горах Тяньшаня дочери Ольги

Август 1984 г. - Организация и проведение Первой Всесоюзной школы-семинара по теории физических структур ТФС - 84 (Хакасия, озеро Баланкуль).

- Начало плодотворного сотрудничества с профессором Московского университета Владимировым Юрием Сергеевичем и с его учениками.

1985 - Приложения теории физических структур к теории размерности физических величин:

1. Кулаков Ю.И. Теория размерности физических величин. I. // Моделирование в пленочной электромеханике. Вцпуск 110. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1985, с. 52-88.

2. Кулаков Ю.И. Теория размерности физических величин. II. // Машинный анализ сложных структур. Выпуск 118. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1986, с. 5-27.

1986 - Выступление с докладом "Теория физических структур в единой физической картине мира" на IX Всесоюзном совещании "Методологические проблемы оснований науки", октябрь 1986, Харьков, Харьковский университет.

1985-1988 годы - Публикации Льва В.Х. по теории физических структур:

1. Лев В.Х. Алгебра Ли в теории физических структур // Моделирование в пленочной электромеханике. Выпуск 110. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1985, с, 89-94.

2. Лев В.Х. Двумерные и трехмерные геометрии в теории физических структур // Машинный анализ сложных структур. Выпуск 118. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1986, с. 28-36.

3. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Выпуск 125. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1988, с. 90-103.

1986 - Разработка концепции единственно возможной Вселенной, не зависящей от биологической организации познающего субъекта.

1987 - Статья: Кулаков Ю.И., Сычева Л.С. Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике // Исследовательские программы в современной науке. Новосибирск. Наука, 1987, с. 99-120.

1-10 августа 1987 г. - Организация и Проведение Второй Всесоюзной школы-семинара по теории физических структур ТФС - 87 (Биологический центр АН СССР, Пущино, Институт биофизики).

17-22 августа 1987 г. - Участие В VIII International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. (USSR, Moscow, 17-22 august 1987) с докладом Kulakov Ju.I. On the unified physical image of nature.

3-15 сентября 1987 г. - Организация и проведение Всесоюзного семинара по теории физических структур (Уссурийск, бухта Тавайза, 3-15 сентября 1987).

- Начало научного сотрудничества с академиком Алексеем Викторовичем Жирмунским в области самоорганизации материи.

1988-1989 годы - Публикации профессора Владимирова Ю.С. по теории физических структур:

1. Владимиров Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Выпуск 125. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1888, с. 42-60.

2. Владимиров Ю.С. Описание взаимодействий в рамках бинарных физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Выпуск 125. Вычислительные системы. Новосибирск, Институт математики СОАН СССР, 1988, с. 61-87

3. Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Наука, 1989, 151 с. (изложение основных положений теории физических структур в главе 2.6 Гипотеза о бинарной структуре пространства-времени и проблема размерности. - с. 47-55.

1988 - Участие н работе Всесоюзной школы-семинара "Анализ конструкций времени в естествознании" (Пущино, 24-21 января 1988) с докладом: Кулаков Ю.И. Время с точки зрения теории физических структур.

Апрель 1988 - Организация и проведение Всесоюзного семинара по теории физических структур (Новосибирск, Новосибирский университет, 1-5 апреля 1988).

- Участие в работе Всесоюзной междисциплинарной научно-технической школы-семинара "Непериодические быстропротекающие явления в окружающей среде (Томск, 18-28 апреля) с докладом: Кулаков Ю.И. Теория физических структур и ее место в физической картине мира.

Июль 1988 - Организация и проведение Третьей Всесоюзной школы-семинара по теории физических структур ТФС - 88. (Пущино, 31 июля - 9 августа 1988).

Август 1988 - Участие в работе тринадцатого Международного Витгенштейновского симпозиума по пограничным вопросам между философией и естествознанием. - XIII International Wittgenstein-Symposium. Kirchberg am Wechsel (Austria) 14-21 august 1988c докладом Kulakov Ju.I. Die Theorie der physikalischen Strukturen und das Programm der Umwandlung der Grundlagen der Physik.

Февраль 1989 - Организация и проведение Всесоюзного семинара по теории физических структур (Новосибирск, НГУ, 14-18 февраля 1989).

Май 1989 - Участие в работе Пятого Международного симпозиума "Философия, физика, космос" (Болгария, Кырджали, 9-12 мая 1989) с докладом: Кулаков Ю.И. Теория физических структур и программа перестройки оснований физики.

- Выступление с докладами о теории физических структур в Болгарской АН (в Институте ядерной физики и в Институте математики).

Апрель 1989 - Участие в работе Всесоюзной школы-совещании по релятивистской теории тяготения (Сочи, 19-27 апреля 1989); организация, совместно с Ю.С. Владимировым, секции по теории физических структур.

Июнь 1989 - Утверждение в новой должности ведущего научного сотрудника Института проблем освоения Севера Сибирского отделения АН СССР (Тюмень).

- Создание при ИПОС теоретической группы, разрабатывающей проблемы теории физических структур.

Август 1989 - Участке в работе Международного симпозиума "Геокриологические исследования в арктических районах" с докладом "К теории самоорганизации криогенных образований" (СССР, Ямбург, 5-12 августа 1989).

Октябрь 1989 - Организация и проведение Четвертой Всесоюзной школы-семинара по теории физических структур ТФС - 89. (Пущино, Институт биофизики АН СССР, 13-22 октября 1989).

Декабрь 1989 - Участие в работе межрегионального семинара "Проблемы градоустройства" (Красноярск, 15-17 декабря 1989), с докладом "Об одном универсальном законе численности народонаселения городов (закон Ципфа)".

Февраль 1990 - Участие в работе Всесоюзного семинара по теории физических структур (Казань, Казанский университет, 5-11 февраля 1990) с докладом "Исходные положения теории физических структур".

Апрель 1990 - Защита Львом ВладимиромХанановичем кандидатской диссертации "Трехмерные и четырехмерные пространства в теории физических структур" (Минск, Белорусский гос. университет, 5 апреля 1990).

- Участие в работе Всесоюзной школы-совещании по обобщениям и перспективам релятивистской теории тяготения (Сочи, 18-26 апреля 1990) с докладом "Новая формулировка теории физических структур".

Июнь 1990 - Участие в работе Международного симпозиума "Логика научного и религиозного знания (СССР, Академгородок, Новосибирский университет, 16-20 июня 1990) с докладом "Физические структуры и проблема онтологического доказательства необходимости существования Абсолюта".

- Организация и проведение Всесоюзного семинара по теории физических структур (Львов, Брюховичи, 22-29 июня 1990).

Июль 1990 - Участие в работе Всесоюзной конференции "Нетрадиционные идеи о природе и ее явлениях" (Гомель, 3-5 июля 1990) с докладом О принципиальной возможности преобразования гравитационного поля в электромагнитное и наоборот", удостоенным второй премии.

Август 1990 - Организация и проведение Всесоюзной методологической школы-семинара по основаниям физики (Владивосток, Тихая лагуна, 25 августа - 7 сентября 1990).

Сентябрь 1990 - Введение проф. Ю.С. Владимировым обязательного спецкурса "Теория физических структур" на физическом факультете Московского университета.

Октябрь 1990 - Участие в работе Всесоюзной конференции по логике, методологии и философии науки (Минск, Белорусский университет, 20-24 октября) с докладом "Теория физических структур и проблема единства физического знания".

Ноябрь 1990 - Участие а работе Международного семинара "Проблема времени в космологии" (Ленинград, 27-29 ноября 1990) с докладом "Что же такое время?".

Июль 1991 – декабрь 1992 – Старший научный сотрудник Института криосферы Земли СОАН СССР.

Апрель-июль 1991 - Подготовка и организация Международного симпозиума по научному креационизму в рамках Всесоюзной школы по теории Физических структур.

20-25 августа 1991 - Проведение в Заокске Международного симпозиума по научному креационизму.

Август 1992 - Участие в работе III International Conference "Getting to know spiritual world: Science,Philosophy, The ology." 29-31 august 1992. Dubna, Russia.

Декабрь 1992 - Участие в работе 1-го Московского международного симпозиума по креационизму (Москва, 12-15 декабря 1992) с докладом "О необходимости духовного возрождения науки".

Март 1993 - июль 1994 - Профессор кафедры методики и преподавания физики в Новосибирского педагогического университета.

23 - 25 ноября 1993 - Участие в VI Международном семинаре "Гносеологические аспекты соотношения науки и религии" (Санкт-Петербургская Духовная Академия) с докладом "Поиск научной истины ведёт к Богу".

Окябрь 1994 - по наст. время – Профессор кафедры физики Горно-Алтайского университета (с окт. 1994 по июль 1999 на 1/2 ставки, с авг. 1999 по наст. время на 1/10 ставки профессора (научное руководство аспиранта А. Симонова и аспиранта В. Слепкова)).

23-26 октября 1997 - Участие в X Международном конгрессе "Социальные доктрины основных религиозных конфессий: философский, богословский и экологический аспекты" (Санкт-Петербург) с докладом "Основы мироздания с учётом современных знаний о Мире, Природе и Человеке".

Март 1998 - Издание Горно-Алтайским научным центром фундаментальной физики "Горно-Алтайской таблицы химических мультиплетов".

10-16 августа 1998 - Участие в работе Twentieth World Congress of Philosophy (Boston, Massachusetts USA) с докладом The Search for Scientific Truth Leads to God.

Июнь 1999 - Издание Горно-Алтайским научным центром фундаментальной физики Описания "Горно-Алтайской таблицы химических мультиплетов".

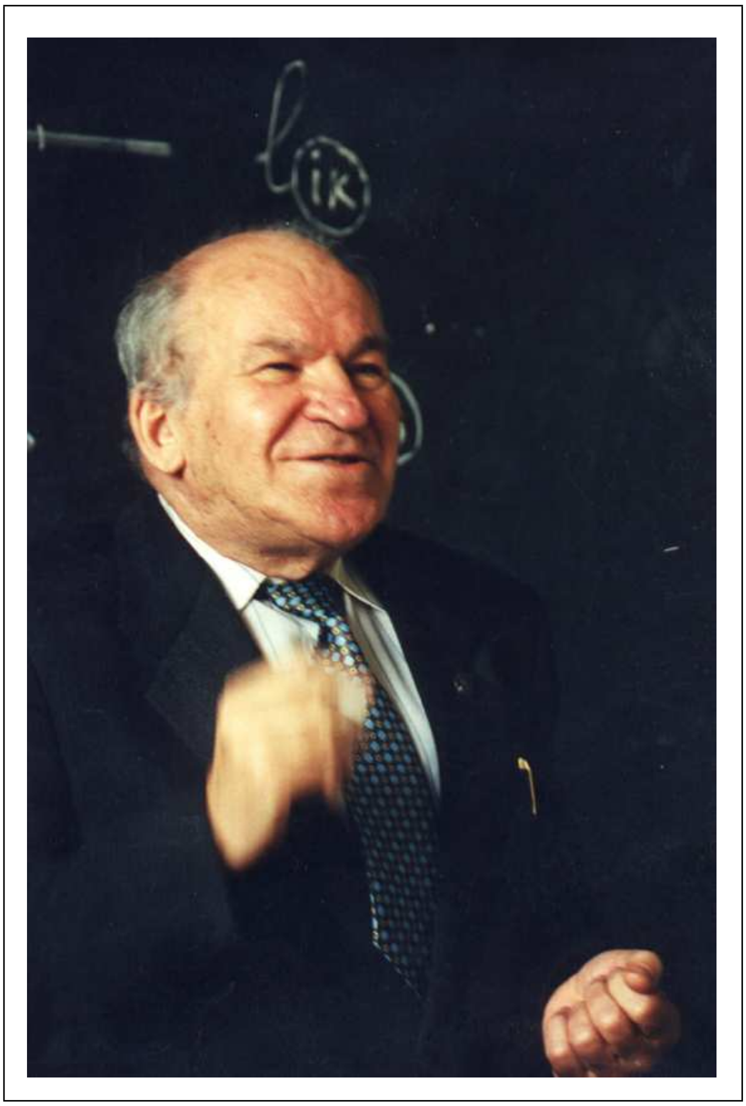
4 - 8 октября 1999 – Участие в Международной научной конференции Geometrization of Physics -IV (Казань) с докладом "Теория физических структур как основание геометрии и физики".

Июль 2000 - Организация и проведение Первой международной школы по теории физических структур (Горно-Алтайск).

11 – 14 декабря 2000 - Участие в “Макарьевских чтениях”(Киви-Лодж, Горно-Алтайск), организованных Российским библейским обществом и Институтом перевода библии.

14 - 16 января 2001 - Участие в работе Международной научно-практической конференции “Целостное ви́дение мира” (Республика Казахстан, Семипалатинск) с докладом “Вавилонская башня – символ современной научной картины мира”.

Март 2001 - Основание “Научного центра профессора Ю. Кулакова”.



На семинаре в МГУ (2000)

Секстет Михайличенко

Как то летом 1967 года обратился ко мне студент – выпускник физфака Геннадий Михайличенко с просьбой взять его к себе в аспирантуру. “Знаете, Гена, – сказал я ему, – проблема, над которой я работаю, абсолютно не диссертабельна. Никто в мире не занимается подобными вещами. Уверяю Вас, никакой диссертации по этой тематике Вы не защитите”.

Позже он признался мне: “Я был молод, полон сил, и я был уверен, что успею ещё написать и кандидатскую, и докторскую диссертации. Но мне хотелось узнать, чем же занимается Кулаков, о чём он с таким энтузиазмом говорит на своих лекциях. Что-то необычное, заумное, непонятное”.

Гена проявил завидное упорство в своём желании поступить ко мне в аспирантуру, и я, наконец, сдался, заранее предвидя бесславный конец.

В то время, как и сейчас, спустя сорок два года со дня моего переезда из Московского физико-технического института в НГУ, я с увлечением занимался проблемой, которую поставил передо мной мой Учитель Игорь Евгеньевич Тамм, чьим аспирантом мне посчастливилось быть.

Дело в том, что исторически возникшие из опыта – “снизу”, различные разделы физики – механика, термодинамика, электродинамика, теория относительности, квантовая механика сохраняли свой, характерный для каждого раздела полуэмпирический, “антропный” язык. Но если подняться на достаточно высокий уровень абстракции и взглянуть на хорошо известные разделы физики “сверху”, то многочисленные детали, важные при решении тех или иных конкретных задач, постепенно исчезают, и вместо них обнаруживаются новые фундаментальные физические законы, написанные на новом универсальном языке.

Игорь Евгеньевич неоднократно говорил мне о том, что изобретая различные модели взаимодействий, мы навязываем природе наш собственный “человеческий” язык. Но природа не понимает нашего языка и диалога не получается. “Поэтому, наша первейшая задача, – говорил Тамм, – научиться “слушать” природу, чтобы понять её язык”.

Но где от этот язык? В чём?
Он в законах. В законе Ньютона, в уравнениях Максвелла, в евклидовой геометрии, в законах теории относительности и квантовой механики.

Так впервые, в конце 60-х годов передо мной была поставлена совершенно необычная задача – **найти единый универсальный язык, на котором написаны все фундаментальные физические законы, и опираясь на него, пересмотреть и переосмыслить основание всей физики**.

“Попробуйте, – сказал Тамм во время поездки в Дубну, – может Вам удастся это сделать!”

Мне действительно это удалось. Подобно тому как механика Ньютона потребовала создания дифференциального исчисления, электродинамика – дифференциальных уравнений в частных производных, теория элементарных частиц – теории представлений групп Ли, так и точная формулировка понятия **физического закона** потребовала создания теории физических структур (ТФС) – нового математического аппарата, адекватно описывающего свойства и строение Мира высшей реальности, “платоновской тенью” которого является наблюдаемый нами Мир материальной действительности.

В основании теории физических структур лежат неизвестные ранее самодостаточные **сакральные уравнения** целочисленного ранга (s, r) – общезначимые тождества относительно двух групп **нечисловых переменных**, содержащее две неизвестные функции – **репрезентатор** и **верификатор**, определяющие вид фундаментальных законов физики и геометрии.

Но тогда, в 1967 году, всё упиралось в решение уравнений, принадлежащих к неизвестному ранее целому классу весьма экзотических сакральных уравнений, не содержащие ни одной операции, кроме операции подстановки.

В те далёкие времена мне удалось найти общее решение, простейшего из этого класса, сакрального уравнения ранга $(2, 2)$:

$$\Phi(\varphi(\xi_\alpha, x_i), \varphi(\xi_\alpha, x_k), \varphi(\xi_\beta, x_i), \varphi(\xi_\beta, x_k)) \equiv 0,$$

где $\Phi(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})$ и $\varphi(\xi, x)$ – две неизвестные непрерывные, достаточно гладкие функции, соответственно, четырёх и двух вещественных переменных; $\xi_\alpha, \xi_\beta, x_i, x_k \in \mathbb{R}$.

Оказалось, что это уравнение имеет, с точностью до несущественных переобозначений, два и только два решения:

1. $\varphi_1(\xi, x) = \xi \cdot x; \qquad \Phi_1(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$

2. $\varphi_1(\xi, x) = \xi + x; \qquad \Phi_2(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & u_{11} & u_{12} \\ -1 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$

Важность этих двух решений для проблемы оснований физики трудно переоценить. В частности, отсюда вытекает как следствие известный каждому школьнику Второй закон механики Ньютона: $ma = f$.

Но сделать следующий шаг – найти решение сакрального уравнения ранга $(2, 3)$

$$\Phi(\varphi(\xi_\alpha, \eta_\alpha; x_i), \varphi(\xi_\alpha, \eta_\alpha; x_k), \varphi(\xi_\alpha, \eta_\alpha; x_m),$$
$$\varphi(\xi_\beta, \eta_\beta; x_i), \varphi(\xi_\beta, \eta_\beta; x_k), \varphi(\xi_\beta, \eta_\beta; x_m)) \equiv 0,$$

где $\Phi(u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23})$ и $\varphi(\xi, \eta; x)$ – две неизвестные непрерывные, достаточно гладкие функции, соответственно, шести и трёх вещественных переменных; $\xi_\alpha, \xi_beta, \eta_\alpha, \eta_\beta, x_i, x_k, x_m \in \mathbb{R}$, я не смог.

А из этого решения, кстати, вытекает “принцип постоянства скорости света”, лежащий, как известно, в основании теории относительности.

И я предложил Гене поразмышлять над этим экзотическим уравнением. Каково же было моё изумление, когда спустя три месяца он представил мне на двадцати (!) страницах строгое доказательство существования и единственности решения этого уравнения!

Оказалось, что с точностью до несущественных переобозначений это уравнение имеет единственное (!) решение

$$\varphi(\xi,\eta;x) = \xi \cdot x + \eta; \qquad \Phi_2(u_{11},u_{12},u_{13},u_{21},u_{22},u_{23}) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Тогда я сказал Гене: –“Знаешь, Гена, я отдаю тебе на откуп всю новую, ещё никем не исследованную территорию всех физических структур ранга (s,r) $s,r=2,3,\ldots$.”

И он принялся за работу. Через три глда он блестяще справился с этой, как выяснилось, невероятно трудной задачей. Он нашёл все решения всех возможных сакральных уравнений ранга (s,r). При этом он доказал существование и единственность найденных им решений.

Результат превзошёл все мои ожидания. Оказалось, как это выяснилось позже, что все решения всех возможных сакральных уравнений сводятся всего к **шести** (!) априорно допустимым формам фундаментальных законов физики и геометрии (**синглет Михайличенко**).

Я понял, что полученный Геннадием результат должен быть представлен на защиту.

И вот защита диссертации состоялась в 1970 году на Учёном Совете механико-математического факультета Новосибирского университета.

В результате голосования оказалось, что несмотря на блестящие отзывы оппонентов, отзыва академика А.Д. Александрова и ведущей организации – кафедры математической физики Московского университета акад. А.Н. Тихонова и отсутствие отрицательных отзывов и выступлений, не хватило одного голоса, чтобы признать защиту диссертации состоявшейся.

Назревал скандал, так как по положению ВАК-а, если во время защиты диссертации не было ни одного отрицательного отзыва или выступления, а тем не менее защиту не утвердили, то это говорит о некомпетентности Учёного Совета и он должен быть распущен.

Понимая всё это, ко мне подошёл учёный секретарь, член-корр. М.И. Каргаполов и сказал, что произошло недоразумение – никто не хотел проваливать защиту. Просто никто ничего не понял, не понял даже к какой области математики относится эта работа. И он предложил считать эту защиту несостоявшейся и вновь защитить эту диссертацию на следующем заседании Учёного Совета.

Я объяснил Геннадию: – “Учёный секретарь, учитывая, что никто не понял даже о каком разделе математики шла речь, предлагает защитить эту диссертацию на следующем заседании.

Но если говорить по большому “гамбургскому” счёту, то перед тобой имеются два пути:

1. Ты защищаешь диссертацию на следующем заседании Учёного Совета, но никто кроме оппонентов и Александра Даниловича Александрова так и не поймёт в чём же смысл твоей поистине пионерской работы;

2. Ты подробно, в деталях рассказываешь о своей работе на рабочих семинарах у каждого члена Учёного Совета и уже после этого снова выходишь на защиту.”

Геннадий выбрал второй путь. В течение трёх лет он выступал на многочисленных рабочих семинарах в НГУ и в различных институтах СОАН СССР.

В результате, спустя три года, его подлинно пионерская диссертация была единогласно (при одном испорченном бюллетене) признана на том же самом Учёном Совете, при тех же самых оппонентах.

Спустя девять лет после успешной защиты кандидатской диссертации по “еретической” тематике, в 1992 году профессор Г.Г. Михайличенко защищает докторскую диссертацию “Групповые свойства физических структур” на Учёном Совете Института математики СО РАН.

Вслед за ним другой мой ученик Владимир Хананович Лев (ныне старший научный сотрудник Института ядерной физики СО РАН) успешно защитил в 1990 году кандидатскую диссертацию “Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур”, в которой предложил принципиально новый метод решения сакральных уравнений, лежащих в основании Теории физических структур.

Всё это похоже на чудо, подобное сотворению Вселенной “из ничего”, когда из весьма общего сакрального уравнения, связывающего между собой две неизвестные функции φ и Φ как бы сами собой возникают допустимые значения ранга (s,r), репрезентатор φ и верификатор Φ, имеющие, как выясняется в дальнейшем, простой геометрический и физический смысл, и определяющие в конечном итоге вид всех известных (и ещё неизвестных) фундаментальных физических законов.

При этом возникла удивительная ситуация: постановка совершенно новой задачи проста и легко поддаётся строгой формализации: окончательный результат так же очень прост и легко обозрим, но путь от постановки задачи до её окончательного решения чрезвычайно сложен и трудно обозрим.

Нечто подобное имеет место в теории чисел. Так, например, постановка Великой задачи Ферма очень проста – найти все целочисленные решения x, y, z, p уравнения $x^p+y^p=z^p$; ответ предельно прост – целочисленные решения x, y, z существуют лишь при двух значениях $p=1,2$. Что же касается доказательства этой теоремы, занимавшей лучшие умы мира на протяжении 358 лет, то оно наконец-таки получено американским математиком Эндрю Уайлсом в октябре 1994 года.

Путь, проделанный Г.Г. Михайличенко и В.Х. Львом, можно уподобить тропе по сильно пересечённой местности через заросли колючих и вьющихся растений.

Я надеюсь, что в рамках современной математики существуют методы, позволяющие воспроизвести результаты Г.Г. Михайличенко и В.Х. Льва более простым, более коротким и изящным путём. Однако этот путь ещё нужно найти.

Заслуга Михайличенко состоит в том, что он, как первопроходец, пробил тропу к ещё мало кому известным физическим структурам, лежащим в основании самодостаточных законов Мироздания.

Но хорошо известно, если у какой-либо задачи известен ответ, то найти её решение намного проще, чем без него.

Вполне возможно, что поиск новых, более простых, методов доказательства существования и единственности физических структур произвольного ранга (s, r) может привести к созданию новой области математики – математическому анализу двухиндексных (или вообще говоря, многоиндексных) вещественных и комплексных переменных.

Как показывает опыт, ничто с такой силой не побуждает светлые умы к работе над обогащением подлинного знания, как постановка трудной но в то же время разрешимой и красивой задачи.

Итак, понимание физической науки как единой теоретической системы, а не просто как совокупности различных физических теорий, приводит к необходимости создания содержательной метатеории, реализующей синтез отдельных разделов физики и выделяющей в чистом виде те исходные принципы и понятия, на которых зиждется единство Мира.

Речь идет о теории физических структур — такой метатеоретической физике, которая благодаря высокой степени общности её исходных данных, позволяет увидеть и понять физику как единый организм, как целостную систему.

В этой системе отдельные разделы физики выступают не как изолированные дисциплины, а как связные части единого здания, подчинённые общему архитектурному замыслу.

Но ясно, что последовательное решение проблемы оснований физики требует особой методики исследования, существенно отличной от той, которая выработалась в течение длительного времени при решении конкретных физических задач. Итак речь идет о такой формулировке известных физических теорий, которая позволила бы ввести исходные понятия физики с той же степенью строгости, какая имеет место в математике при аксиоматическом методе изложения. Но возможно ли это?

Ведь физика, в отличие от математики, имеет дело не столько с абстрактными схемами и понятиями, свойства которых могут при желании предельно строго определены соответствующими аксиомами, сколько с реальными физическими объектами, свойства которых определяются совокупностью конкретных опытных данных, полученных с помощью конкретных измерительных операций. Но именно конкретный характер измерительных операций является наиболее уязвимым местом любой физической теории, затрудняющим её аксиоматическую формулировку.

Поэтому установление взаимного соответствия между идеальной математической структурой и свойствами физических объектов эмпирической действительности является особой проблемой, от правильного решения которой зависит внутренняя непротиворечивость и логическая стройность физической теории.

Теория физических структур представляет собой попытку последовательной “бурбакизации” всей физики, пересмотра её оснований с единой точки зрения, в основу которой вместо нескольких различных полуинтуитивных понятий, таких как пространство и время, сила, масса, температура и т.п. положено одно единственное понятие — физическая структура , дополненное “физической интерпретацией”.

Это понятие с одной стороны является достаточно общим, чтобы охватить всевозможные физические явления, и в то же самое время достаточно конкретным, чтобы служить эффективным инструментом, позволяющим получать конкретный вид физического закона, допускающего непосредственую проверку на опыте.

Физическая структура является тем самым первичным понятием, допускающим строгую математическую формулировку, позволяющим установить единство между различными физическими теориями и получить как следствие такие, на первый взгляд не имеющие ничего общего, исходные принципы, как аксиомы Евклида и Второй закон Ньютона, оба начала термодинамики и принцип постоянства скорости света, уравнения Максвелла и принцип суперпозиции, лежащий в основании квантовой механики.

По сути дела, теория физических структур представляет собой особый раздел теоретической (точнее, метатеоретической) физики, в которой изучается абстрактная структура, воплощающая в себе фундаментальную идею универсальной взаимосвязи и взаимообусловленности, лежащую в основании всех изначальных физических принципов. Благодаря тому, что эта физическая теория формулируется в наиболее общем и абстрактном виде, она позволяет уловить и выделить в чистом виде то самое существенное, что содержится в различных исходных физических принципах, но что обычно скрыто под толстым слоем конкретных физических интерпретаций.

С другой стороны, *факт существования универсальной взаимосвязи частей и целого является настолько сильным требованием, что позволяет получить явные выражения для всех первичных физических законов независимо от их конкретных интерпретаций.*

Итак, чтобы двигаться вперед, необходимо сделать шаг назад и подвергнуть тщательному анализу все существующие физические понятия и законы.

Как известно, Н.Бурбаки предложили программу построения математики как целостной системы знаний. Ими было показано, что в основании математики лежат три независимые порождающие структуры — алгебраическая, топологическая и структура порядка. Аналогичная задача “бурбакизации” может быть поставлена и в физике. Смысл её состоит в том, чтобы свести всё многообразие фундаментальных физических законов, понятий и величин к одной универсальной физической структуре, имеющей смысл *особой скрытой симметрии* мира физических объектов.

Ясно, что строгий анализ первичных понятий физики должен осуществляться на более глубоком уровне логической строгости нежели тот, который принят в настоящее время в “активных” областях теоретической физики. Уже давно назрела необходимость в перестройке всей физики, и прежде всего её оснований на новом математическом уровне. При этом задача состоит не в том, чтобы переписать все законы физики на языке логических символов, и не в том, чтобы применять для решения соответствующих уравнений современный математический аппарат, а в том, чтобы подвергнуть глубокому анализу новый ещё неизвестный тип отношений, скрывающийся за интуитивным понятием “физического закона”.

Оказалось, что за туманным и в высшей степени неопределённым понятием физического закона скрывается новый тип симметрии, допускающий строгую математическую формулировку и которую мы, в отличие от групповой симметрии, называем "холотропной симметрией"[104].

Поиск ответа на вопрос: Что такое физический закон? составляет предмет уже не физики, а специальной области знания, которую по аналогии с математикой можно было бы назвать "метафизикой" или более традиционно — "основаниями физики", привёл нас к созданию Теории физических структур.

Обычно проблема оснований физики сводится к формулировке системы аксиом, описывающих тот или иной раздел физики (механику, теорию относительности, электродинамику, статфизику, квантовую механику и т.п.). При этом для каждого раздела физики сохраняются характерные для него основные понятия, уравнения и модели и делается попытка придать им точный смысл, вводя определённую систему аксиом, подобно тому как это делается в евклидовой геометрии, где довольно громоздкая система аксиом Евклида-Гильберта придаёт точный смысл наглядным и интуитивно ясным геометрическим понятиям — точке, прямой и плоскости. Но при этом все разделы физики попрежнему остаются разобщёнными, а все усилия исследователей направлены на то, чтобы придать точный смысл многочисленным наглядным понятиям, лежащим на поверхности, вместо того, чтобы идти вглубь и там искать объединяющее различные разделы физики единое начало. Таким единым началом, лежащем в основании всей физики и выделяющем её среди всех остальных наук, является *физическая структура* — особая скрытая симметрия мира физических объектов, сам факт существования которой однозначно определяет конкретное строение единой физической картины мира.

Создание Теории физических структур открывает перед физиками принципиально новые пути исследования и прежде всего в области её оснований. Так введение фундаментального для всей физики понятия физической структуры позволяет сформулировать проблему оснований физики как общую для всех разделов физики математическую проблему существавония и единственности физических структур различного ранга, определяющих собой конкретный вид фундаментальных физических законов.

Основным результатом теории физических структур является установление универсального закона отношений между физическими объектами, независимо от природы последних.

Предлагается некоторая программа, в большей части своей уже реализованная, представляющая собой последовательное развития идей, изложенных мною на IX, X, XI и XIII Международных конгрессах по логике, методологии и философии науки и на Тринадцатом международном Витгенштейновском симпозиуме.

Суть этой программы состоит в необходимости пересмотра оснований физики, пересмотра с сáмого начала, с самогó понятия физического закона, со "школьных" понятий пространства и времени, массы и силы, электромагнитного поля,

[104] Сам термин **холотропный** происходит от слóва гр. $\check{o}\lambda o\zeta$ (holos) – *целое, всё* и слóва гр. $\tau\rho\acute{o}\pi o\zeta$ (tropos) – *свойство* и выражает особое свойство системы существовать как единое целое.

температуры и энтропии. Предлагаемая программа в своей завершённой форме мыслится мною как введение в физику, как “царская дорога”, позволяющая увидеть всё совершенство, красоту и самосогласованность последней.

В связи с этим отмечу, что основным критерием истинности при реализации этой программы является простота и естественность исходных положений, их согласованность, компактность, замкнутость и непротиворечивость.

Прежде всего необходимо понять, что такое физический закон вообще. При этом имеется в виду не какой-нибудь конкретный физический закон, например, закон Ньютона или закон Ома, а именно физический закон вообще. Необходимо понять, что общего между, например, аксиомами Евклида и Вторым законом механики Ньютона, или между принципом постоянства скорости света и первым и вторым началами термодинамики.

Для того, чтобы ответить на эти вопросы, необходимо, подобно тому как это было сделано с полуинтуитивным понятием “алгоритма”, породившим новое направление в математике – теорию алгоритмов, подвергнуть глубокому математическому анализу новый тип холотропных отношений между реальными физическими объектами, скрывающийся за туманными понятием “физического закона”.

Главной задачей предлагаемой программы является создание Теории физических структур – метатеории, объектом изучения которой являются не отдельные физические явления и конкретные объекты, а сами физические теории. При этом важнейший результат Теории физических структур состоит не в описании и не в предсказании отдельных конкретных физических явлений, а в установлении общего принципа, позволяющего объединить пёстрое многообразие различных физических теорий в единую систему, в понимании глубоких причин существования и единственности известных физических законов и соответствующих физических величин и понятий, в указании общего правила, по которому строятся фундаментальные физические законы.

Таким образом, в отличие от всех существующих физических теорий, каждая из которых описывает определённый круг конкретных физических явлений и фактов, Теория физических структур позволяет увидеть и понять строение физического мира в целом на уровне первичных законов и отношений. Именно в этом и состоит её смысл и значение.

О взаимоотношениях между лектором и студентом.

Docendo discimus – Уча учимся.

Здесь мне хотелось бы высказать несколько соображений по вопросу о взаимоотношениях между лектором и студентами.

За последнее время появилось много хороших книг и учебников, достаточно хорошо продуманных, отражающих современное состояние науки. В связи с этим невольно возникает вопрос:

А нужны ли вообще студенту лекции, которые по своему содержанию не могут подняться до уровня, до конца продуманного, выверенного и согласованного с несколькими рецензентами, учебника? Не поручить ли кому-нибудь из выдающихся лекторов написать идеальный учебник, который распространить среди всех университетов, отменить вообще лекции и свести деятельность лектора лишь к роли консультанта, отвечающего на вопросы, возникающие при изучении "идеального" учебника?

Такие вопросы неизбежно возникают, когда начинаешь размышлять об учебном процессе, о взаимоотношениях между лектором и студентами.

Очевидно, что всё обстоит не так просто. Я думаю, что лектор, и раньше, и в современных условиях, выполняет гораздо более важную задачу чем сообщение определённой информации. Дело в том, что лектор в своих лекциях вносит своё живое отношение к предмету; он передаёт не только объективную информацию, но, что очень важно, своё личное отношение к ней, он выступает как личность, и этот личностный аспект, который не передаваем ни в формулах, ни в формальных определениях, важен для науки так же, как витамины для нормального роста живого организма.

Безликие лекции, сообщающие лишь объективную информацию, постепенно, исподволь, курс за курсом, убивают в студенте то чувство красоты и величия избранной им специальности, которое владело им ещё на первом курсе, и понемногу превращает его в узкого бескрылого специалиста-ремесленника.

Физика к настоящему времени достигла высокого уровня, но тем не менее многие физики ощущают определённый кризис, связанный с отсутствием новых физических идей — подобных тем, которые оплодотворили всю физику двадцатого века: теории относительности, квантовой механики, квантовой теории поля. Уравнения Максвелла, Эйнштейна, Шрёдингера — из них выжато всё, почти всё, что ещё можно выжать.

Возникает необходимость создания новых физических идей, новой физической парадигмы. Но для этого нужен другой метод обучения — необходимо учить студентов не только умению решать те или иные узкопрактические задачи и обсчитывать их на компьютере бесконечное число различных моделей, возникающих в рамках существующей парадигмы, но и учить студентов мыслить широко, свободно, вскрывая огромные эвристические возможности, заключённые в общих, универсальных правилах, единым образом охватывающих всё разнообразие физического мира.

Но что же принять в качестве нового критерия истинности? Наряду с объективным принципом полезности, дополнительным к нему , необходимо шире использовать субъективный принцип красоты.

И поэтому, обращаясь к студентам, я говорю :

Если вы хотите стать настоящими физиками, сохранить в себе до конца дней своих радость от избранной вами специальности, вы должны выработать в себе чувство красоты, соразмерности, гармонического соответствия отдельных частей в целом. И это чувство станет для вас вашим главным критерием при построении новой физической парадигмы, выпадающего на долю вашего поколения. Но для этого вы не должны замыкаться в рамки одной только своей науки; посещайте концерты Баха, Моцарта, Шостаковича, почувствуйте магию слова в стихах старых и современных поэтов, не пропускайте художественных выставок. И это не может не дать своих плодов — в какой-то момент вы почувствуете, что и физика, в высших её разделах, подчинена тем же принципам красоты и гармонии. И вот тогда-то вы и овладеете тем творческим началом, без которого не мыслима деятельность настоящего учёного.

Какими же качествами должен обладать лектор, читающий курс общей физики в университете.

Как известно, задача общего курса физики состоит:

1. во введении основных физических величин и понятий,
2. в формулировке фундаментальных физических законов,
3. в описании универсальных моделей вещества,
4. в изложении единой физической картины мира.

Задача эта не простая и требует от лектора большой профессиональной подготовки и высокой культуры физического мышления.

Естественно, что курс общей физики должен строиться на едином, общем для всей физики, основании, которое можно было бы считать её логическим фундаментом. При этом, сохраняя точность формулировок и логическую последовательность изложения, курс общей физики не должен подменять собой курс теоретической физики, так как именно здесь должна быть показана глубокая, принципиальная связь физики с экспериментом.

Лектор, с одной стороны, должен быть высококвалифицированным теоретиком, и в то же самое время хорошо чувствовать красоту эксперимента и уметь увлечь слушателей, только что входящих в мир науки, умело подобранными эффектными физическими демонстрациями.

Он должен уметь показать простое в сложном и необыкновенное в очевидном, и, как это часто делал на своих лекциях Мандельштам, смело обращаться к физическим парадоксам и умело разрешать их.

Очевидно, что курс общей физики должен строиться на едином логическом фундаменте, отражающем современное состояние науки. Поэтому, излагая студентам первых – вторых курсов основные идеи и понятия современной физики, лектор должен не только знать предмет, но и обладать талантом популяризатора.

Наконец, чтобы воспитать у студентов высокую культуру физического мышления, лектор должен сам хорошо знать историю науки и в своих лекциях широко использовать исторические реминисценции.

О Т З Ы В

о диссертации Е.В.Афонасина на тему "Значение символизма для достижения истинного гносиса в Строматах Климента Александрийского", представленной на соискание ученой степени кандидата философских наук

Человеку, посвятившему жизнь неспешному перелистыванию страниц старых книг и древних фолиантов, доставляет истинную радость, что несмотря на крайне неблагоприятные условия в нынешней жизни для подобного рода занятий, в науку систематически приходят молодые люди, готовые принять эту эстафету у уходящих или стареющих исследователей.

Сегодня перед нами именно такой случай. Молодой ученый из Новосибирска смело (и, отмечу сразу, - по праву) заявляет о себе, как об уже сложившемся специалисте, готовом на самом современном уровне (то есть во всеоружии пропедевтический знаний - древних и новых языков, основ духовной культуры, современной научной литературы, умения работы с первоисточниками и т. п.) взяться за решение тех задач в истории культуры (в данном случае - в истории философии), которые ещё не были решены его предшественниками или могут быть переосмыслены в свете новейших научных данных. Это действительно приятно!

И заявляет он о себе не на каком-нибудь пустячке, что тоже возможно и вполне закономерно (ибо зависит от того, как этот культурно-исторический "пустячок" научно обработать), а на огромной, с трудом обозримой и практически неподъёмной глыбе - "Строматах" Климента Александрийского. Такая заявка под силу только молодости, и слава Богу! Естественно, автор несколько сужает тему - берет только проблему гносиса у Климента, а в ней - только символический метод, но и эти "сужения" ограничивают океан "Стромат" лишь до полноводной реки, плавание по которой отнюдь не безопасно. Автору удалось выплыть, то есть выдержать испытание, которому он сам себя по доброй воле и подверг. Перед нами серьезное научное исследование, которое не стыдно показать, как мне кажется, не только нам с вами, но и прямым специалистам, посвятившим себя исключительно Климентиане.

"Строматы" александрийского мыслителя - одно из самых крупных и, пожалуй, самых трудных для понимания сочинений в позднеантичной философско-богословской литературе. Именно поэтому мы до сих пор не имеем ни добротного научного перевода этого труда на русский язык, ни - серьезных современных научных исследований его в России. Автор диссертации взял на себя смелость заняться и тем и другим. Насколько мне известно, он работает ныне и над переводом отдельных книг "Стромат", и представил сегодня на защиту фрагмент своих научных штудий. Хочу надеяться, что он не остановится на этом, но продолжит свою кропотливую исследовательскую, а равно и переводческую деятельность, ибо обсуждаемая диссертация показывает, что автору по плечу эта работа.

В представленной вниманию Ученого совета диссертации рассматривается гносеология крупнейшего раннехристианского мыслителя в аспекте ее некоторых специфических методов, определяемых особенностью конечного объекта познания христиан - фактически трансцендентного Бога, не доступного дискурсивно-логическим способам познания.

Е.В.Афонасин убедительно показывает, что и сама идея подобного абсолютного объекта познания, и методы невербального, иррационального, экзегетико-символического и т. п. путей его постижения витали в духовной атмосфере поздней античности, как в греко-римском, так и в ближневосточных ареалах и находили часто достаточно близкие формы реализации и у платоников, и у гностиков, и у древнееврейских талмудистов, и у первых отцов христианской Церкви. Климент принадлежал к последним, но, будучи одним из образованейших людей своего времени, попытался учесть в своих трудах, и особенно в "Строматах" опыт всех наиболее влиятельных и интересных направлений духовной культуры своего и предшествующих времён.

Отсюда, как убедительно показано в диссертации, и не случайность выбора жанра "стромат" - текста в форме "лоскутного одеяла", некой пестрой смеси бесконечных цитат и собственных мыслей в достаточно свободной и причудливой композиции, ориентированной на одновременное со-крытие (от непосвященных и не достигших еще определенной ступени духовного совершенства) и от-кровение высших ступеней гносиса достойным и способным взойти на них.

Автор диссертации убедительно показывает причины, приведшие Климента к этой антиномической форме выражения высшего знания. Здесь и сознательное стремление уберечь знание от профанации; и понимание, что частично сокрытые истины представляются стремящимся к ним более привлекательными, внушительными, таинственными и, напротив, отталкивают случайно заглянувших в храм высокой науки. Здесь и осознание того, что духовный опыт отнюдь не весь и не полностью может быть передан и адекватно выражен прямолинейными формально-логическими конструкциями.

Для своей вербальной презентации он часто требует особых иносказательных и полисемантичных форм, то есть символического выражения.

В диссертации достаточно убедительно показаны, хотя и не всегда с должной степенью тщательности проработаны, пути достижения высшего знания, которые представлены автором в виде трех основных ступеней восхождения: katharsis, analysis,theoria . При этом процесс "анализа" (или отрешения от страстного, суетного бытия) осмысливается автором как последовательное восхождение от "малых мистерий" (=внешних наук) через "Великие мистерии"(=богословие) к апофатическому богословию (с. 53-57). В этой главе затронуто много интересных проблем иррациональной концепции познания Климента (в частности, и его апофатика, ставшая важным шагом на пути к развернутой апофатике автора "Ареопагитик"; и проблема противоречия и парадокса, как основ христианского вербализованного познания и т. п.), и эта глава, на мой взгляд, и должна была стать основной в диссертации, как раскрывающая по существу ее тему. Однако она таковой не стала, заняв равное место с другими главами. Только в следующей главе автор мимоходом бросает, что в предшествующей главе им якобы показана роль символа в системе восхождения от тварного мира в мир духовных сущностей (с. 67) и переходит по сути дела к совсем иной проблеме - к климентовой онтологии, где уже главную роль играет не символ, а образ - eikon. Досадное, но понятное стремление молодого исследователя высказать как можно больше из того, что он знает. Хотя бы скороговоркой.

Вообще, если отвлечься несколько от содержания работы, которое в целом без сомнения достаточно полно и основательно раскрывает поставленную исследовательскую задачу, то можно констатировать, что автор, увлекшись интересной, я бы сказал эстетической методологией "стромат", и сам в какой-то мере оказывается втянутым в систему правил этой методологии.

Стремясь выявить нечто, он нередко это со-крывает путем сознательной или неосознаваемой нечеткости (в строго логическом смысле) композиционной организации своего текста. С позиции максимальной структурной ясности, характерной для немецкой классической философии, можно было бы, например, порекомендовать автору главу 5 сделать главой 2 и изложить в ней онтологическую эйконо-логию Климента, которой в основном и посвящена собственно пятая глава. При этом имело бы смысл показать, что у Климента при всей его свободе обращения с терминологией образ (eikon, хотя для его обозначения иногда используются и другие термины) в целом носит онтологический характер, в то время как символ (которому и посвящена данная работа) - категория в основном гносеологическая.

В таком случае, развивая дальше строгую логику идеальной структуры работы, третьей главой диссертации следовало бы сделать большую главу о "теории" познания Климента (включая сюда проблему веры и гносиса и путь восхождения по ступеням гносиса). Здесь-то и стоило бы показать, что в силу трансцендентности объекта познания на определенном уровне восхождения появляется необходимость в таком вербально-сверхвербальном посреднике как символ и перейти к следующей и последней главе, посвященной собственно климентову символизму и символической экзегезе, в частности.

Однако автор, следуя гносеологическому принципу древних, согласно которому, подобное познается подобным, остановился на более сложной (в чем-то уподобляющейся структуре объекта его исследования) и менее ясной и очевидной композиции исследования. Изрядно потрудившись над собиранием кубиков смальты климентовой мозаики, Е.В.Афонасин, кажется, решил сознательно переложить часть этой работы и на своих читателей, заставляя и их пошевелить мозгами, чтобы постичь глубинный смысл его собственного сочинения. Ну что ж, с неподдельной радостью героя Евмафия Макремволита я могу воскликнуть его же словами: "Разгадал я твою загадку, мастер, постиг твой рассказ, окунулся в самые твои мысли; и если ты Сфинкс, Эдип - я, если, словно с жертвенника и треножника Пифии, ты вещаешь темные слова, я - твой прислужник и толкователь твоих загадок".

Прошу высокое собрание простить меня за столь цветистое лирическое отступление в любимый мною византинизм, но с его помощью мне хотелось бы ярче подчеркнуть, что мы имеем дело с серьезной, интересной, но не совсем традиционной и при этом глубокой научной работой. Ее автор не рассчитывает на читателя-профана, но - на посвященного, то есть как минимум на человека, достаточно хорошо знакомого и с античной духовной культурой, и с христианством.

Таковой собственно и должна быть настоящая научная диссертация. Поэтому я могу с леким сердцем утверждать, что данная работа несомненно отвечает требованиям, предъявляемым высокой аттестационной комиссией к произведениям этого жанра, а ее автор заслуживает присуждения ему искомой степени кандидата философских наук.

Сие не означает, конечно, что диссертация лишена недостатков. Такого не может быть в принципе, по определению самого диссертационного жанра. Чтобы не быть голословным и привести свой отзыв в некое соответствие жанру отзывов, я укажу на некоторые из них, хотя они, естественно, никак не влияют на оценку работы, а скорее поддтверждают и усиливают ее. Например, даже выступив самозванным Эдипом, я не могу до конца разгадать фразу автора на с. 9, подкрепленную к тому же мудрой сноской: "Как никогда обостряется проблема плагиата". На мой взгляд, такая проблема вообще не стояла в поздней античности и у ранних христиан. Они страницами, как правило, без всяких ссылок и зазрения совести переписывают друг из друга и изо всех известных им древних источников и в этом смысле с современной точки зрения являются суперплагиаторами. Однако в той культуре не существовало проблемы личного авторства и, соответственно, - проблемы плагиата. Вопрос же о приорите древнееврейской мудрости перед греческой, о чем, видимо, и идет речь в данной фразе автора, относится отнюдь не к проблеме плагиата, а к сфере наследования истинного знания и установления его первоисточника.

На с. 11 автор пишет без каких-либо доказательств: "Таким образом, Климент ставит перед собой глобальную цель - создание системы христианской философии". Думаю, что Климент такой цели перед собой не ставил. Её, как известно, впервые поставил и попытался достаточно плодотворно реализовать только его ученик Ориген.

Если мы согласимся с утверждением автора, что "Клименту принадлежит честь первой попытки построения философской теории символа" (с. 14), то мы вправе потребовать от него и более развернутого, чем это дано в диссертации, анализа этой "попытки" с приведение конкретного материала, ибо этот факт крайне важен для истории культуры. Однако и тексты самого Климента, и текст диссертации убеждают нас, что честь сия принадлежит все-таки кому-то другому.

Слабо прописаны в диссертации такие важные проблемы климентовой и вообще христианской гносеологии как созерцание, уподобление и единение с Богом, откровение и некоторые другие, хотя все они так или иначе (как правило мельком) упоминаются в работе. Можно отметить и некоторую небрежность технического плана, например, в пагинации цитат, когда отсутствует то указание на книгу "Стромат", то на главу, или - в русской огласовке греческих терминов - то экзегеза, то экзегесис.

Таких досадных мелочей много набирается в любой серьезной работе. Трудно уследить за ними, когда перед внутренним взором клубится некая величественная махина замысла, рвущегося к воплощению в материи слов, а материя сия слишком эфемерна и трудно уловима. Я и упомянул-то о них только ради проформы жанра, чтобы иметь возможность еще раз подтвердить свой вывод о необходимости присуждения Е.В.Афонасину искомой степени кандидата философских наук.

Главный научный сотрудник Института философии РАН,
доктор философских наук

В.В.Бычков

Поздравление с семидесятилетием

MAGISTRO MEO; EVGENIUS IURIO DICIT.

GRATIAS TIBI ET SAEPE ET MAXIMAS AGO, MAGISTER
MEUS DOCTISSIMUS ATQUE CELEBRISSIMUS.
CONGRATULATIONES MAXIMAE ACCIPE PROPTES
LXX ANNIVERSARIO.
CURA, UT VALEAS.

ante diem tertium Idus Martiuas a.D. MCMXCVII
dabam oppido Academicorum apud Neapolim Sibirientibus

III I.d. Martus MCMXCVII

МОЕМУ НАСТАВНИКУ; ЕВГЕНИЙ ЮРИЮ ШЛЁТ ПРИВЕТ.

ПОЗДРАВЛЕНИЯ ТЕБЕ ШЛЮ ЧАСТЫЕ И МНОГИЕ,
МОЙ УЧЁНЕЙШИЙ И ПРОСЛАВЛЕННЫЙ НАСТАВНИК.
К 70-ЛЕТИЮ ТВОЕМУ ПРИМИ МНОГОЧИСЛЕННЫЕ
ПОЗДРАВЛЕНИЯ!.
БЕРЕГИ СЕБЯ И ЗДРАВСТВУЙ!

Третий день мартовских ид, 1997 год от рождества Христова
дано в Академгородке у Нового города сибирского.

III I.d. Martus MCMXCVII

А впереди – Монблан! (лето 2003)

Вместо заключения

С какой болью, радостью и мукой далась мне эта книга. И я часто вспоминал усталое восклицание Бокля: "Я никогда не завершу своей книги!" (и он, действительно умер, не дописав свою грандиозную "Историю..."). А между тем я давно понял, что я обязан завершить её. Ей выпало стать моей Главной Книгой.

Всё это время – сорок лет! – я был занят ею, я ею жил, я постоянно, каждый день размышлял над ней. Если Судьба позволит мне довести мой труд до конца, я исполню своё предназначение.

Самым главным открытием в своей жизни я считаю открытие Принципа "двойной дихотомии" (или Принципа "пересечённой пирамиды").

Первая дихотомия хорошо известна – мир материальной действительности и мир идеальных сущностей.

Вторая дихотомия – мир идеальных сущностей в свою очередь делится на мир антропных моделей и сакральный мир Высшей реальности.

Между ними – облачный слой, который нужно преодолеть.

Почти вся современная наука, философия и религия строится на основе наглядных антропных моделей.

Наука пытается найти антропную модель неуловимого понятия "материи" в виде наглядных понятий элементарных частиц и полей, пространства и времени.

Каждая религиозная конфессия создаёт свою антропную модель Бога.

Философия утратила своё понимание цели и рассыпалась на множество "философий". В гонке за материальными благами в виде кандидатских и докторских степеней и званий, как грибы после дождя, возникают философия науки, философия техники, философия образования, философия культуры, философия истории, философия искусства, философия хозяйства, философия производства, философия медицины, философия человека, философия морали, философия любви, философия языка, философия религии, философия сознания, философия понимания, философия права, философия синергетики, философия экологии, философия политики и так далее.

А сама ФИЛОСОФИЯ утрачена, так же как утрачена РЕЛИГИЯ (как Единая теология, отвечающая на вопрос – что есть БОГ).

Современная наука так же распалась на множество директорий, разделённых между собой непроницаемыми перегородками. Наука утратила Цель, она не ищет Истину, – она ищет пользу. И тем самым она иссушает свои животворящие источники, пожирая своих детей.

Чтобы возродить науку, философию и религию, необходимо освободиться от антропных моделей, возникших на базе весьма несовеншенных и ограниченных органов чувств. Органы чувств даны человеку для ориентации во внешнем мире материальной действительности. Но эти инструменты, подобно отвёртке, плоскогубцам и паяльнику, не помогут наладить компьютер, у которого имеются сбои в **программе**. Дело в том, что в компьютере имеется два уровня – hardware (железо) и software(программное обеспечение), связанные друг с другом, но не сводимые друг к другу.

Итак, в основании Мироздания лежит образ пирамиды, разделённой на две принципиально разные части. Я придаю этому образу настолько большое значение, что хотел бы, чтобы на моём надгробии был бы изображён символ пересечённой Пирамиды.

Нижняя часть Пирамиды символизирует "линию Демокрита" (свойство целого определяется свойством его частей) и сыграла свою ведущую роль в становлении современной науки и, в частности, в открытии микромира. Но она же и завела физику в дурную бесконечность: теперь стало ясно, что не существует "последних кирпичиков материи" (с увеличением энергии ускорителей будут рождаться новые элементарные частицы – "лептокварки" и так далее до бесконечности).

Король умер – да здравствует король!

Верхняя часть Пирамиды символизирует "линию Платона" (свойства частей определяются свойством целого). На смену редукционизму приходит холономия (мировозрение "Единого-целого").

Мне удалось найти Единое Первоначало, определяющее конкретный вид всех первичных законов физики и геометрии.

В отличие от туманной "материи" это Первоначало, которое я назвал Физической структурой, допускает строго математическое описание. Но для этого потребовалось создать новую область знания – математизированную физическую герменевтику со своими понятиями, со своими исходными принципами и особыми, неизвестными ранее, сакрально-функциональными уравнениями.

Эти уравнения имеют настолько общий, универсальный и простейший из всего мыслимого, вид, что кажется чудом, похожим на творение Вселенной "из ничего", возникновение из него единственного множества решений, определяющих конкретный вид законов физики и геометрии в нашем единственном совершенном мире.

Откуда у меня такая уверенность в том, что мне удалось реконструировать основной Замысел Творца?

Дело в том, что, как я обнаружил в последние годы, эти идеи уже давно витали в головах Платона, Аристотеля, Плотина, Филона Александрийского, Оригены, Василия Великого, Климентия Александрийского, Григория Богослова, Дионисия Ареопагита, Григория Нисского, Максима Исповедника, Иоанна Дамаскина, Григория Паламы, Иоанна Скот Эриугены, Николая Кузанского, Фомы Аквинского, Якова Бёме, Иммануила Канта, Сергея Булгакова, Николая Бердяева, Владимира Соловьёва, Семёна Франка, Исаака Ньютона, Альберта Эйнштейна, Вернера Гейзенберга, и совсем близких мне людей – Игоря Евгеньевича Тамма, Андрея Дмитриевича Сахарова, Ольги Александровны Ладыженской, Виктора Николаевича Тростникова, Сергея Сергеевича Хоружего.

Стоя на плечах гигантов мне, с помощью моих учеников, удалось найти совершенный математический аппарат, позволяющий дать точное описание этих идей. Такое ощущение, что проникнув через облачный слой, смогом накрывающий мир материальной действительности, на верхний этаж Мироздания, я обнаружил там старинную шкатулку, в которой лежит Ключ к Основам Мироздания. Я поворачиваю этот Ключ и передо мной совершенно в новом свете предстаёт физика, хорошо знакомая с юных лет. Как будто кто-то провёл влажной тряпкой по давно немытому окну.

Итак, закончен Первый том - Теория физических структур (Математические начала физической герменевтики), в котором я попытался передать своё ощущение простоты, красоты и величия единой сакральной программы, лежащей в основании физики и математики.

Впереди – радостный труд переосмысления с новой точки зрения огромного наследия, оставленного нам великими Творцами мировой науки от античности до XX века.

Моё теперешнее состояние лучше всего передают слова, которыми заканчивает последний том своей "Космической гармонии" Иоганн Кеплер (1571 – 1630):

Благодарю Тебя, Господи, Создатель наш, за то, что Ты дал мне зреть красоту Твоего создания и ликовать при виде дел рук Твоих. Вот я закончил труд, к которому чувствовал себя призванным и приумножил талант, который Ты дал мне. Всё, что ограниченные силы моего ума позволили понять в величии дел Твоих, я возвестил людям, которые прочтут мои доказательства и рассуждения.

I. Kepler. De Harmonice Vundi, 1619. Gesamtausgabe von Keplers Werke, Munch 1940. Bd. 6, S. 281.

Оглавление

Прелюдия .... 1 - 30

Розетка (цв) 2

Друзья мои, возьмите посох свой... Фото (цв) 3

Перед физикой открывается новая перспектива... (цв) 4

Общий план книги 7

Лишь стоя на плечах гигантов... 8

Прелюдия. Содержание 9

Оглавление .... 10 - 11

"Поэту". Пушкин 12

"Dem Gott und den Menschen" 13

Посвящение Тамму .... 14 - 15

"Меланхолия". Дюрер (цв) 16

Предисловие .... 17 - 21

Преамбула .... 22 - 24

Благодарности .... 25 - 28

Благодарю всех Фото (цв) 28

Литература к Прелюдии 29

"Что скрывается за ...?" (Фото Л. Стародубцевой) 29

Церковь Покрова на Нерли Фото (цв) 30

Часть I. Истоки Теории физических структур .... 31 - 59

Эта история началась сорок лет тому назад Фото (цв) 32

Глава 1. О языке, на котором написаны законы природы .... 33 - 43

Заставка 1 (цв) 34

Аннотация к Главе 1 34

§ 1. В начале было слово .... 35 - 37

§ 2. О Теории физических структур .... 37 - 39

§ 3. Физика как целостная система знаний .... 39 - 41

"Тамм на семинаре" (Фото) 42

Литература к главе 1 43

Глава 2. Основные понятия Теории физических структур .... 44 - 57

§ 1. Отношения – важнейшая особенность Мироздания .... 45 - 46

§ 2. Примеры возможных отношений между физическими объектами .... 46 - 47

§ 3. Репрезентатор, корт, ранг .... 48 - 51

§ 4. Предварительное определение физической структуры ранга (s,r) 51

§ 5. Сакрально-инвариантная тождественно истинная формула .... 51 - 52

§ 6. Сакральное уравнение ранга (s,r) .... 52 - 53

§ 7. Постановка задачи и первое решение 54

§ 8. Полное решение задачи Г.Г. Михайличенко ....55 - 56

“Новосибирский государственный университет” Фото (цв) 56

Литература к главе 2 57

“ТФС – дорога, ведущая к храму” *Троица* Рублёва (цв).....58 - 59

ГЛАВА 3. ЧТО ЖЕ ТАКОЕ ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР? .... 60 - 73

§ 1. Многоликая Теория ....61 - 62

§ 2. Концепция двух миров 63

§ 3. Явление и сущность .... 63 - 64

§ 4. Антропная физика первого поколения ....64 - 65

§ 5. Герменевтика – высшая форма знания .... 65 - 66

§ 6. Сравнительная характеристика ортодоксальной физики и Теории физических структур ....67 - 70

§ 7. Теория физических структур; точная постановка, полное и окончательное решение Шестой проблемы Гильберта ....70 - 71

“Давид Гильберт” (Фото) 70

“Шарж” Ирины Кулаковой 72

Литература к главе 3 73

Юрий Владимиров и Юрий Кулаков (Фото) Нераздельно и неслиянно .. 73

ЧАСТЬ II. ТРИ ПЕРВЫХ ШАГА В МИР ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР..................74 - 194

Первый шаг по поверхности Луны (цв).............................75

ГЛАВА 4. МЕХАНИКА – ЦАРСКИЙ ПУТЬ В ТЕОРИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР .... 76 - 116

Sir Isaac Newton (1642 - 1727) 77

Три закона Ньютона 77

“Сейчас, спустя пятьдесят восемь лет...” 78

1687 – *"Математические начала натуральной философии"* 78

Аннотация к Главе 4 79

§ 1. Исходная задача .... 80 - 81

§ 2. Закон Ньютона – закон или определение? .... 81 - 83

§ 3. Трудности определений основных понятий механики .... 83 - 85

§ 4. О первичных неопределяемых понятиях механики .... 85 - 86

§ 5. Физические величины и их единицы .... 86 - 89

§ 6. Фундаментальный опытный факт, лежащий в основании механики .... 89 - 91

§ 7. Два сакральных инварианта $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\mu(i, k)$ .... 91 - 93

§ 8. Что же такое сила и масса? .... 93 - 96

§ 9. Закон Ньютона в случае одномерного движения; скалярная природа массы и векторная природа силы .... 96 - 98

§ 10. Законы аддитивности сил и масс .... 99 - 100

§ 11. Закон Ньютона в случае движения в неинерциальной системе отсчёта. Первый сакральный инвариант b_σ .... 101 - 103

§ 12. Почему "сила тяготения" не является силой? .... 103 - 105

§ 13. Предпосылки Теории физических структур, содержащиеся в законе Ньютона .... 105 - 108

§ 14. Предварительное определение физической структуры ранга (2,2) .... 109 - 112

Портрет Ньютона "Те, кто подобно Ньютону..." 113

Диалог о двух главнейших системах мира 114

Литература к главе 4 .... 115 - 116

Глава 5. Закон Ома – простейший пример физической структуры ранга (2,3) .... 117 - 129

Георг Ом (1787 – 1854) 118

Аннотация к Главе 5 119

§ 1. Что стоит за законом Ома? .... 120 - 123

§ 2. Сопротивление проводника, ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока как сакральные инварианты .... 124 - 126

§ 3. Предварительное определение физической структуры ранга (2,3) .... 126 - 128

Алессандро Вольта демонстрирует столб Наполеону. Nicola Clanfanelli, 1841. (цв)........................... 128

Литература к главе 5 129

Глава 6. Эмпирические основания евклидовой геометрии .... 130 - 162

Renatus Cartesius (1596 - 1650) (цв) 131

§ 1. Геометрия, физика и Теория физических структур .... 132 - 134

§ 2. Возможно ли точное определение исходных понятий? 134

§ 3. Об одном замечании Эйнштейна .... 135 - 137

Эрнст Мах (1838 - 1916) 135

Альберт Эйнштейн (1879 - 1955) 137

§ 4. Наглядные соображения .... 137 - 140

§ 5. Формула Герона .... 140 - 141

§ 6. Квадраты объёма точкм, длины отрезка, площади треугольника и объёма тетраэдра .... 142 - 143

§ 7. r -точечные диагональные определители Кэли-Менгера и их связь с объёмами .... 143 - 145

§ 8. Что же такое трёхмерное евклидово пространство? .... 145 - 148

§ 9. А если определитель $\boldsymbol{\mathcal{K}_{ikmst;\,ikmst}(\ell^2)}$ не равен нулю? ..... 148 - 149

§ 10. Трёхмерное эвклидово пространство с точностью $\boldsymbol{\delta\ell}$. 149

§ 11. Наш мир как четырёхмерный слой толщины $\boldsymbol{\Delta_4}$. .... 150 - 153

§ 12. Наш мир как трёхмерное пространство постоянной кривизны .... 153 - 158

Бернгард Риман (1826 - 1866) 155

Николай Лобачевский (1792 - 1856) 156

§ 13. Существование “реального” (физического) пространства как опытный факт .... 158 - 159

Гора Белуха – высочайшая вершина Горного Алтая (цв) 160

Литература к главе 6 ....161 - 162

Заставка 2 (цв) 162

ГЛАВА 7. ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ – ОЧЕВИДНАЯ И НЕВЕРОЯТНАЯ ....163 - 194

Евклид (365 – 300 до н. э.) (цв) 164

Евклидова геометрия – очевидная: .... 165 - 185

§ 1. Определители Кэли-Менгера ....165 - 166

§ 2. Дважды окаймлённый верификатор рода $\overset{n}{\boldsymbol{K}}{}^{11}_{i_1\ldots i_{n+1};k_1\ldots k_{n+1}}$ 166 - 169

§ 3. Простейшая связь между расстояниями на прямой ....169 - 171

§ 4. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве размерности 1 ....171 - 174

§ 5. Простейшая связь между расстояниями на плоскости ....174 - 176

§ 6. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве размерности 2 ....176 - 180

§ 7. Простейшие соотношения между расстояниями в трёхмерном евклидовом пространстве .... 180 - 181

§ 8. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 5 на одном множестве размерности 3 ....182 - 184

Рябина красная (цв) 185

Евклидова геометрия – невероятная: .... 186 - 192

§ 9. Феноменологические и сакральные геометрии ....186 - 187

§ 10. Одномерная сакральная геометрия 188

§ 11. Двумерная сакральная геометрия .... 189 - 190

§ 12. Корт – фундаментальное понятие физической герменевтики 190 - 192

Юрий Кулаков в Большой физической аудитории МГУ (1946 год) . 192

Литература к главе 7 193

Афинская школа Санти Рафаэль (1483 - 1520) (цв) 194

Часть III. Определители ....195 - 242

Аннотация к Части III 196

“*Математик, так же как художник или поэт, создаёт узоры...*” .197

Заставка 3 (цв) 197

Глава 8. Секстет фундаментальных определителей на двух множествах различной природы ....198 - 209

§ 1. Две различные точки зрения на определитель ....199 - 200

§ 2. Исходный определитель N -го порядка 200

§ 3. Фундаментальные двух- трёх- и четырёхиндексные переменные ...201

§ 4. Шесть промежуточных определителей ....201 - 204

§ 5. Квартет фундаментальных определителей и два определителя Михайличенко ....204 - 205

§ 6. Квартет дважды окаймлённых фундаментальных определителей ....206 - 207

Определитель – это просто! 207

Стоя́щие у основании ТФС 208

Литература к главе 8 209

Нобелевская медаль Игоря Евгеньевича Тамма 209

Глава 9. Репрезентаторы как корни сакральных тождеств....210 - 228

§ 1. Репрезентатор $a_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}; i_1 \dots i_n i_{n+1}}(a_{*;*}) \equiv 0$ ....211 - 212

§ 2. Репрезентатор $u_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}i_{n+2}}(u_{*;*}) \equiv 0$ ... 213 - 214

§ 3. Репрезентатор $v_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(v_{*;*}) \equiv 0$ ... 214 - 215

§ 4. Репрезентатор $w_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1}i_{n+2}}(w_{*;*}) \equiv 0.$ ... 215 - 219

§ 5. Дробно-линейные репрезентаторы $p_{\alpha i}$ и $q_{\alpha i}$ как корни двух фундаментальных уравнений Михайличенко ... 219 - 223

§ 6. Предварительные итоги ... 223 - 228

Литература к главе 9 ... 228

Глава 10. Разделение нечисловых переменных ... 229 - 242

§ 1. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях ... 230 - 235

§ 2. Ко- и контравариантные координатные определители ... 235 - 238

§ 3. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях $\overset{N}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$ ... 238 - 240

§ 4. Разделение нечисловых переменных в определителях Михайличенко ... 241 - 242

Разделение нечисловых переменных Заставка 4 (цв) ... 242

Литература к главе 10 ... 242

Часть IV. Теория физических структур (Исчисление кортов) ... 243 - 366

“Пирамида Хеопса стоит на краю пустыни...” (цв) ... 244

Аннотация к Части IV ... 245

Глава 11. Основные понятия Теории физических структур первого поколения (1961 – 1997)

Глава 11. Основные понятия Теории физических структур первого поколения (1961 – 1997) ..... 246 - 280

Телецкое озеро Фото (цв) 247

§ 1. К истории термина “физическая структура” ..... 248 - 253

§ 2. Концепция двух миров. Физические объекты и их прообразы ..... 253 - 255

§ 3. Элементарные субэйдосы – исходные понятия Мира высшей реальности ..... 255 - 256

§ 4. Ко- и контравариантные координаты ..... 256 - 257

§ 5. Корт – исходное понятие Теории физических структур ..... 257 - 259

§ 6. Отношение между кортами – первый шаг на пути понимания сущности физических законов ..... 260 - 262

§ 7. Сакральное тождество – фундаментальный закон Мироздания ..... 262 - 264

§ 8. От сакрального тождества к сакрально-функциональному уравнению ..... 264 - 266

§ 9. Сведе́ние холотропного тождества к функциональному уравнению ..... 266 - 267

§ 10. Постановка задачи в Теории физических структур 267

§ 11. Физическая структура ранга $(1,1)$ 267

§ 12. Физические структуры рангов $(1,2)$ и $(2,1)$ 268

§ 13. Физическая структура ранга $(2,2)$ ..... 268 - 269

§ 14. Физические структуры рангов $(2,3)$ и $(3,2)$ 269

§ 15. Theorema egregium Михайличенко 270

§ 16. Секстет Михайличенко ..... 271 - 273

§ 17. Научный подвиг Михайличенко 274

§ 18. Полное решение задачи Г.Г. Михайличенко ..... 275 - 276

§ 19. Феномен рождения Мира из ничего ..... 276 - 277

§ 20. Заключение 277

"Блажен, кто вдалеке от всех житейских зол..." 278

Литература к главе 11 .... 279 - 280

Новосибирский государственный университет Фото (цв) 280

Глава 12. Основные понятия Теории физических структур второго поколения (1998 – 2002) .... 281 - 302

§ 1. Квартет дважды окаймлённых определителей .... 283 - 284

§ 2. Единая формула для дважды окаймлённых определителей 284

§ 3. Гипергеометрические заряды ковариантных и контравариантных гендерных кортов 284

§ 4. Род физической структуры ....284 - 285

§ 5. Новая классификация физических структур рода $\overset{N}{K}{}^{pq}$ 285

§ 6. Квартет регулярных репрезентаторов. Разложение на множители 286

§ 7. Четыре возможных состояний левых и правых субъэйдосов .... 286 - 287

§ 8. Представление левых субъэйдосов в виде матриц-строк ..... 287 - 288

§ 9. Представление правых субъэйдосов в виде матриц-столбцов 288

§ 10. Спорадические левые и правые субъэйдосы 289

§ 11. Секстет репрезентаторов Михайличенко в адекватных обозначениях 289

§ 12. Схема возникновения квартета регулярных репрезентаторов 290

§ 13. Единая формула для репрезентаторов. Правило отбора 291

§ 14. Секстет дважды окаймлённых и спорадических верификаторов в адекватных обозначениях .... 291 - 292

§ 15. Квартет репрезентативных матриц в адекватных обозначениях .... 292 - 293

§ 16. Разделение нечисловых переменных 293

§ 17. Квартет ковариантных (левых) координатных матриц ..... 293 - 294

§ 18. Квартет контравариантных (правых) координатных матриц 294 - 295

§ 19. Левые корты .... 295 - 296

§ 20. Правые корты 296

§ 21. Ковариантные объёмы левых кортов .... 296 - 297

§ 22. Контравариантные объёмы правых кортов .... 297 - 298

§ 23. Скалярное произведение двух кортов
как произведение их объёмов .... 298 - 300

На полпути к Terra incognita Фото (цв) 300

Литература к главе 12 301

Два уровня физического знания Схема 301

Эйфелева башня Фото (цв)........ 302

Глава 13. Сакральные уравнения .... 303 - 334

Хан-Алтай (1908) Григорий Чорос-Гуркин (1870 – 1937) (цв)....304

§ 1. Предварительные замечания .... 305 - 306

§ 2. Сакральные уравнения 306

§ 3. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию
$\varphi(x, y)$ двух однородных переменных x и y .... 306 - 307

§ 4. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию
$\varphi(x; \xi)$ двух неоднородных переменных x и ξ 308

§ 5. Сакральные уравнения, содержащие одну неизвестную функцию
$f(x, w, y)$ **трёх** однородных переменных x, w, y 308

§ 6. Сакральные уравнения “треугольного” типа ранга r , содержащие
две неизвестные функции Φ и φ .... 309 - 320

§ 7. Сакральные уравнения “прямоугольного” типа ранга (s, r) ,
содержащие две неизвестные функции Φ и φ .... 320 - 324

§ 8. Решение матричных уравнений вида $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$.
В.М.Малышев 20 февраля 1997 года .... 324 - 332

Прообраз Мироздания Фото (цв) 332

Литература к главе 13 333

Академгородковская церковъ из розового кедра Фото (цв).......... 333

"В лесу родиласъ ёлочка..." (Фото) 334

Глава 14. Строгие доказательства .... 335 - 366

§ 1. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) (для пешеходов) .... 336 - 338

Весна. 2001 Фото Г. Резника (цв).................................... 339

§ 2. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) (для математиков) .... 339 - 342

§ 3. Ещё одно "функциональное" доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2), принадлежащее Михайличенко .... 343 - 347

Трудный вопрос (Фото Ю. Кулакова) 344

§ 4. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (3,2), принадлежащее Льву .... 347 - 352

§ 5. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (4,2), принадлежащее Льву .... 352 - 362

Участники Всесоюзной школы по ТФС в Пущино-на-Оке (Фото) . 362

Литература к главе 14 .... 363 - 364

Пизанская башня Фото (цв) 365

Часть V. Примеры, иллюстрирующие основные идеи ТФС

(Взгляд снизу вверх).................. 366 - 575

Глава 15. Примеры сакральных законов первого рода, не содержащих произвольных параметров .... 367 - 575

“Всё перекаты, да перекаты...” (Фото) 368

Введение .... 369 - 373

Пример 1 Закон Ньютона .... 374 - 380

Пифагор (580 - 500 до н. э.) (цв) 381

“Мировоззренческая концепция...” 382

Пример 2 Закон Ома для участка цепи .... 383 - 390

Пример 3 Закон Ома для всей цепи .... 391 - 398

Пример 4 Закон Ома для переменного тока .... 399 - 409

Пример 5 Универсальный закон аддитивности .... 410 - 419

Пример 6 Основной закон хронометрии .... 420 - 427

Отзыв Линника на работу “Что такое время?” 428

Что же такое время? Фото (цв) 429

Пример 7 Термодинамика .... 430 - 443

Пример 8 Векторная алгебра .... 444 - 457

По притокам Енисея Фото (цв) 457

Пример 9 Евклидова геометрия .... 458 - 480

Соловецкий кремль Фото (цв) 480

Пример 10 Геометрия пространств постоянной кривизны .... 481 - 493

Дорога на Белуху Фото (цв) 493

Пример 11 Малые колеьания .... 494 - 497

Пример 12 Ангармоническое отношение .... 498 - 503

Пример 13 Тонкие и толстые линзы .... 504 - 508

Озарение: истина где-то рядом! Фото W. Sumner (цв) 509

Пример 14 Пространственная кинеметика ....510 - 524

Пример 15 Холотропные потенциалы ....525 - 536

Термодинамика – это просто! (Фото) 537

Пример 16 Термодинамические потенциалы ....538 - 547

Человек на Луне. Следующая станция... Фото (цв)................547

Пример 17 Механика Лагранжа и механика Гамильтона ....548 - 554

Пример 18 Механика Гамильтона – Якоби .... 555 - 560

НГУ, где создавалась ТФС Фото (цв)..................................561

Пример 19 Канонические преобразования ....562 - 565

Московский государственный университет Фото (цв) 566

Пример 20 Теория размерности .... 567 - 571

Брюссель. "Атомиум" – символ веры в научно-технический прогресс Фото (цв) 572

Глава 16. Примеры сакральных законов второго рода, содержащих произвольные параметры ....573 - 583

1. Сакральные законы второго рода, содержащие произвольные параметры ....574 - 581

2. Сакральные объёмы первого и второго рода ....581 -582

Образ сакральной физики (цв)..583

Глава 17. Взгляд со стороны ....584 - 626

Образ сакральной науки (цв) 586

1. Ладыженская о работах Кулакова ....587 - 588

2. Ладыженская о работах Михайличенко 589

3. Бирюков о работах Кулакова .... 589 - 590

4. Бугаенко о работах Кулакова .... 591 - 592

5. Линник о статье Кулакова "Что такое время?" .... 592 - 593

6. Решетняк о докторской диссертации
Михайличенко .... 593 - 595

7. Решетняк о книге Кулакова "Элементы ТФС" ..... 595 - 596

8. Решетняк о работе Михайличенко .... 596 - 598

9. Румер о статье Кулакова .... 598 - 599

10. Фет о дипломной работе Зелова .... 599 - 600

11. Фет о диссертации Льва .... 600 - 602

12. Фет о книге Михайличенко .... 602 - 603

13. Фет о работе Михайличенко .... 603 - 605

14. Целищев о статье Кулакова .... 605 - 606

15. Шелехов о докторской диссертации
Михайличенко .... 606 - 609

16. Ширков о лекциях Кулакова по ТФС .... 609 - 610

17. Владимиров о докторской диссертации
Михайличенко .... 610 - 613

18. Владимиров о работах Кулакова .... 613 - 614

19. Кулаков о дипломной работе Лозицкого .... 614 - 616

20. Кулаков о монографии Михайличенко .... 616 - 617

21. Михайличенко о диссертации Соловьёва .... 617 - 620

22. Письмо академика Александрова академику
Седову 620

23. Ионин о работе Симонова 621

24. Письмо Решетняка академику Тихонову .... 621 - 623

25. Письмо Мельникова Чаптынову ....624 - 625

26. Ответ из редакции "Сибирского математического журнала" 625

27. Выписка из протокола 626

Что скрывается за ...? Фото (цв) 626

Календарь Творения 627

Первый снег в Академгородке Фото (цв) 628

Приложение I

Таблица химических мультиплетов ....629 - 670

Аннотация 630

§ 1. Некоторые предварительные замечания ....631 - 632

§ 2. От периодической таблицы химических элементов к Таблице химических мультиплетов ....632 - 633

§ 3. Естественная эволюция формы таблицы химических элементов ....633 - 641

Дмитрий Иванович МЕНДЕЛЕЕВ (цв) 636

Столетие периодического закона (цв) 637

Заставка 5 (цв) 640

§ 4. В итоге имеем 641

§ 5. Физические величины двух типов: подлинно физические (наблюдаемые) и условно-физические (ненаблюдаемые) .....643 - 645

§ 6. О неприменимости традиционной квантовой механики для классификации химических элементов ....645 - 649

Рецензия Н.А. Желтухина на статью Кулакова “Изотопический спин и Периодическая система элементов” 650

Отзыв И.И Тычинской на “Естественную таблицу химических элементов” ... 651 - 652

Рецензия С.С. Розовой на “Таблицу химических элементов”, предложенную Кулаковым ... 652 - 653

Письмо директору ОИЯИ академику В.Г. Кадышевскому ... 654

Зависимости физических свойств химических элементов от квантового числа $V = 1, 2, ...$ ... 655 - 668

Абрам Ильич ФЕТ Фото (цв) ... 660

Юрий Борисович РУМЕР (Фото) ... 661

Дмитрий Иванович МЕНДЕЛЕЕВ Фото (цв) ... 669

Нильс БОР (Фото) ... 670

Литература к Приложению I ... 671

Суровая красота Горного Алтая Фото (цв) ... 672

Приложение II

Сакрально-алгебраические структуры Симонова ... 673 - 707

На полпути к terra incognita Фото (цв) ... 674

Обобщённое матричное умножение как эквивалентное представление Теории физических структур ... 675 - 707

§ 1. Введение ... 675 - 677

§ 2. Физические структуры на абстракгных множествах ... 677 - 681

§ 3. Обобщённое матричное умножение (частный случай) ... 681 - 688

§ 4. Обобщённое матричное умножение (общий случай) ... 688 - 705

Дорога, ведущая в Мир Высшей реальности Фото (цв) ... 706

Литература к Приложению II ... 707

Приложение III

Первая публикация по ТФС (1968) ....708 - 733

Тикси. Станция МГГ Фото (цв) 709

“На этой станции, затерянной в безбрежней пустыне...” 709

Обложка первого издания Теории физических структур (1968) (цв) ....710 - 711

Лекция 1. Некоторые предварительные замечания о единой физической картине мира ....712 - 718

§ 1. Исчерпали ли себя классические разделы теоретической физики? ....712 - 713

§ 2. Золотой век физики и “архитектурные излишества” ....713 - 714

§ 3. Необходимость новых физических идей и унификации физических теорий ....714 - 716

§ 4. Является ли логическая непоследовательность неизбежным спутником физических теорий? ....716 - 718

Юрий Кулаков (1968) Фото 718

Лекция 2. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики ....719 - 723

Ностальгия) Фото (цв) 723

Лекция 3. Ньютоновская механика с точки зрения Теории физических структур ....724 - 728

Лекция 4. Геометрическая интерпретация основных понятий термодинамики ....729 - 733

“Октябрь уж наступил ...” Фото (цв) 733

Приложение IV

Полная библиография по ТФС ....734 - 757

Полная библиография по Теории Физических структур (1968 – 2003) ....735 - 756

Золотая осень в Академгородке Фото (цв).......................757

Приложение V

Страницы из личного архива ....758 - 824

На старости я сызнова живу ... Пушкин Фото (цв)............759

1. Школа по Теории физических структур на озере Баланкуль ....760 - 773

Neuschwanstein – Новый лебединый замок (Саксония) Фото (цв).773

2. План Творения гениально прост ....774 - 778

На берегу Катуни Фото 774

3. Еретические горизонты физика ....779 - 782

4. Встреча в Цахкадзоре ....782 - 783

5. Вместо предисловия 784

6. Письмо Генеральному прокурору СССР Руденко ....785 - 786

7. Необходимое предисловие 787

8. Жить не по лжи (Солженицын) ....788 - 791

“Облака плывут, облака... ” Фото (цв)..........................791

9. Записка о постановлении Бюро Советского РК КПСС 792

10. Постановление Бюро Советского района КПСС 793

11. Выписка из протокола № 48 794

12. Диплом члена-корреспондента Высшего Центра логики и межнаучных исследований ..... 795 - 796

13. Научная биография ..... 797 - 809

На семинаре в МГУ (2000) Фото (цв) 809

14. Секстет Михайличенко ..... 810 - 817

15. О взаимоотношениях между лектором и студентом ..... 818 - 819

16. Отзыв Бычкова о диссертации Е.В. Афонасина ..... 820 - 824

17. Поздравление с семидесятилетием 824

А впереди – Монблан! (лето 2003) Фото (цв) 825

Вместо заключения ..... 825 - 827

Оглавление ..... 828 - 847

Цветных фото 60 + 8 цветных таблиц = 68.