



Я. Г. ПАНОВКО

ОСНОВЫ
ПРИКЛАДНОЙ
ТЕОРИИ
КОЛЕБАНИЙ
И УДАРА

Я . Г. ПАНОВКО

ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И УДАРА

Издание 3-е, дополненное
и переработанное



ЛЕНИНГРАД
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1976

6П5

П16

УДК 60.001.11

Рецензент проф. В. К. Житомирский

Пановко Я. Г.

П16 Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е, доп. и переработ. Л., «Машиностроение» (Ленингр. отд-ние), 1976.

320 с. с ил.

В книге рассмотрены основы общей теории упругих колебаний, возникающих во время работы машин. Теоретические сведения пояснены расчетными примерами. Указаны пути борьбы с вредными колебаниями.

В третье издание (2-е изд. 1967 г.) включен ряд новых вопросов (случайные колебания, колебания аппаратов на воздушной подушке, удар и т. д.).

Книга предназначена для инженерно-технических работников конструкторских бюро и научно-исследовательских институтов. Она может быть полезна также студентам вузов соответствующих специальностей.

П $\frac{30100-016}{038(01)-76}$ 16—76

6П5

Яков Гилелевич ПАНОВКО

ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И УДАРА

**Издание 3-е, дополненное
и переработанное**

Редактор издательства В. М. Рошаль
Переплет художника О. П. Андреева
Технический редактор Т. П. Малашкина Корректор Н. Б. Семенова

Сдано в производство 15/IX 1975 г. Подписано к печати 28/I 1976 г. М-26009
Формат бумаги 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Печ. л. 20. Уч.-изд. л. 18,8.
Тираж 10500 экз. Зак. № 516. Цена 1 р. 20 к.

Ленинградское отделение издательства «МАШИНОСТРОЕНИЕ»
191065, Ленинград, Д-65, ул. Дзержинского, 10

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10

П $\frac{30100-016}{038(01)-76}$ 16—76

© Издательство «Машиностроение», 1976 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное в этой книге изложение вопросов теории механических колебаний и удара носит в общем элементарный характер и рассчитано на лиц, которые имеют подготовку по механике и математике в объеме обычных вузовских программ.

Книга должна помочь читателям сознательно ориентироваться в справочниках и пособиях прикладного характера и может служить введением к специальным трудам и монографиям, посвященным более сложным вопросам теории колебаний и удара.

Отличия настоящего издания книги от предыдущих (2-е изд. 1967 г.) состоят в следующем. Во-первых, в это издание включена специальная глава, посвященная теории удара в механических системах; эта теория имеет большое практическое значение и по своему характеру близка к теории колебаний механических систем. Во-вторых, несколько расширено изложение теории свободных и вынужденных колебаний за счет привлечения особенно актуального материала (действие случайного возбуждения; колебания аппарата на воздушной подушке). В-третьих, читатель найдет здесь значительно больше комментированных сведений о действующих стандартах и других нормативных документах, относящихся к колебаниям и вибрационной технике. Кроме того, в настоящем издании исправлены опечатки и мелкие погрешности изложения, вкравшиеся в предыдущее издание.

Автор приносит благодарность Т. А. Журавлевой за большую помощь при подготовке настоящего издания, а также В. К. Житомирскому и Э. А. Когану за ряд полезных советов и замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

Периодический характер работы большинства машин определяет периодичность нагружения и деформирования как отдельных их звеньев, так и тех конструкций, которые служат опорами или фундаментами; можно сказать, что механические колебания, в частности упругие, сопутствуют работе каждой машины.

В ряде случаев колебания возникают и при отсутствии периодического возбуждения. Таковы, например, сравнительно простые процессы свободных колебаний, развивающихся после мгновенного нарушения состояния устойчивого равновесия механической системы, а также более сложные и в то же время менее изученные процессы, например автоколебания.

Трудно назвать такую область техники, в которой не была бы актуальной проблема изучения упругих колебаний. Большое внимание исследователей привлечено к вопросам колебаний конструкций самых различных назначений: роторов турбин, валов двигателей внутреннего сгорания, турбинных лопаток, воздушных и гребных винтов, автомобилей и железнодорожных вагонов, кораблей и самолетов, инженерных сооружений, перекрытий промышленных зданий, деталей, обрабатываемых на металлорежущих станках, вибротранспортеров и т. п.

В ряде случаев колебания мешают нормальной эксплуатации или даже непосредственно угрожают прочности, постепенно подготавливая усталостное разрушение; в таких случаях теория может указать пути для уменьшения вредных колебаний. Наряду с этим она позволяет обосновать и оптимизировать технологические процессы, в которых колебания используются целенаправленно (вибротранспортная техника, вибропогружение свай и т. п.).

При большом разнообразии вопросов, рассматриваемых в теории механических колебаний, имеется глубокая внутренняя связь между внешне различными задачами. Существование единых закономерностей является принципиальной основой общей теории, которая позволяет рассматривать сразу целые классы явлений, охватывающие множество отдельных частных задач.

Можно указать, по крайней мере, следующие пять достаточно самостоятельных категорий различных по своей природе явлений:

1) свободные колебания, т. е. колебания, совершаемые механической системой, лишенной притока энергии извне, если система выведена из состояния устойчивого равновесия и затем предоставлена самой себе;

2) критические состояния, связанные с потерей устойчивости состояния равновесия при определенных значениях параметров системы (например, вращающиеся упругие валы при определенных угловых скоростях вращения);

3) вынужденные колебания, которые возникают вследствие действия на механическую систему внешних переменных сил (возмущающих сил);

4) параметрические колебания, вызываемые периодическими изменениями параметров системы (например, ее жесткости);

5) автоколебания — колебательные процессы, поддерживаемые постоянными источниками энергии неколебательного характера.

Перечисленным проблемам посвящены главы II—VI настоящей книги. К содержанию этих глав непосредственно примыкает теория удара, которая излагается в последней, шестой главе.

Важность этой теории связана с большим практическим значением явления удара, которое очень часто встречается в технических приложениях. Здесь также можно отметить случаи, когда это явление приносит вред (соударения, возникающие при эксплуатации средств транспортной техники, соударения в кинематических парах машин и т. п.), и случаи, когда оно используется в определенных технологических целях (дробление горных пород, ковка, штамповка, обрубка металлов, забивка свай и т. п.).

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Сложность теоретического анализа колебаний в значительной мере зависит от числа степеней свободы рассматриваемой механической системы. Числом степеней свободы механической системы называется число независимых координат, однозначно определяющих положения всех материальных точек системы.

В динамических задачах, в частности в задачах о колебаниях, положения точек системы изменяются с течением времени, так что указанные координаты являются функциями времени. Основная задача динамического исследования состоит в нахождении этих функций, т. е. в определении закона движения системы. После этого без труда могут быть найдены деформации, напряжения и внутренние усилия в связях системы.

Любая механическая система содержит бесконечно много материальных точек, и, следовательно, число степеней свободы всегда бесконечно велико. Однако при решении практических задач обычно пользуются упрощенными схемами, которые характеризуются конечным числом степеней свободы. В таких расчетных схемах некоторые (наиболее легкие) части системы считаются вовсе лишенными массы и представляются в виде деформируемых безынерционных связей; при этом тела, за которыми в расчетной схеме сохраняется свойство инерции, считаются материальными точками (сосредоточенные массы) или абсолютно твердыми телами.

Однако, стремясь к упрощению расчетной схемы, нужно иметь в виду, что пренебрежение всеми инерционными свойствами заданной системы полностью лишает задачу динамической специфики.

Рассмотрим, например, безмассовую линейно-упругую пружину (рис. I.1, а), к концу которой приложена сила $P(t)$, заданная в виде функции времени t . Обозначим через c коэффициент жесткости пружины, т. е. статическую силу, вызывающую единичное удлинение пружины. Тогда перемещение x ее конца определяется обычной статической формулой

$$x = P/c. \quad (I.1)$$

Такая задача, в сущности, не является динамической, хотя найденное перемещение не постоянно, а представляет собой некоторую функцию времени. Подлинная динамика процессов в реальных механических системах связана со свойством инерции, и это свойство в том или ином виде должно быть отражено в расчетной схеме.

Простейший пример динамической системы представлен на рис. I.1, б, где с концом пружины связан груз массы m . Здесь уже нельзя обойтись чисто статическими соотношениями; в частности, нужно иметь в виду, что сила R' , действующая на пружину (рис. I.1, в), не равна внешней силе P .

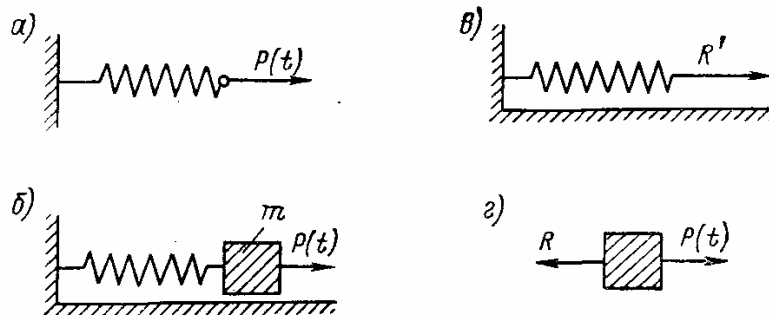


Рис. I.1

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x (рис. I.1, г) имеет вид

$$P + R_x = m\ddot{x},$$

где $R_x = -cx$ — проекция реакции пружины R на ось x . Таким образом, получаем

$$m\ddot{x} + cx = P(t). \quad (I.2)$$

В отличие от выражения (I.1), служащего для непосредственного вычисления x , соотношение (I.2) представляет собой дифференциальное уравнение относительно функции x . Для определения этой функции необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение (I.2). После решения уравнения (I.2) по функции $x = x(t)$ находят внутренние усилия, напряжения и т. п.

Можно сказать, что в рассматриваемом примере одной функцией x полностью определяется деформированное состояние в любой момент времени. Подобные системы обладают *одной степенью свободы*.

К этому же типу относятся системы, показанные на рис. I.2. Характерной координатой для системы I является ордината y точечной массы m , а для системы II — угол поворота φ жесткого тела (в обоих случаях упругие связи считаются лишенными массы).

Системы III—VI имеют по две степени свободы. В системе III имеются две сосредоточенные массы, и движение системы полностью определяется двумя функциями: $y_1 = y_1(t)$; $y_2 = y_2(t)$. То же относится и к системе IV.

Для плоской системы V необходимо учесть возможность перемещения точечной массы в двух направлениях и за координаты удобно принять $x = x(t)$; $y = y(t)$.

Особенностью системы VI является конечность размеров груза, связанного с балкой; в этом случае необходимо учитывать инерцию вращения этого груза, так как в процессе колебаний балка будет нагружена на конце не только силой инерции груза, но и моментом сил инерции. Движение системы характеризуется перемещением $y = y(t)$ и углом поворота $\varphi = \varphi(t)$.

Система VII имеет три степени свободы, и ее движение определяется функциями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $\varphi = \varphi(t)$.

В системах $VIII$ — XII грузы подвешены различно, но способны совершать колебания вдоль одной фиксированной прямой; поэтому независимо от различий в устройстве упругих связей каждая из этих систем имеет одну степень свободы.

Система $XIII$ имеет одну степень свободы, если качение не сопровождается скольжением. Система XIV представляет собой совершенно жесткую балку, положение которой в любой момент времени определяется одной величиной — углом поворота вокруг неподвижного шарнира; независимо от числа масс и пружин эта система имеет также только одну степень свободы. Система XV может совершать крутильные колебания вокруг оси вала и поэтому принципиально не отличается от системы II ; если учитывать только массу диска, то движение системы полностью определяется функцией $\varphi(t)$.

Система XVI имеет, строго говоря, не одну, а две степени свободы, поскольку ее движение описывается двумя функциями $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, выражающими углы поворота дисков вокруг продольной оси системы. Однако упругие колебания определяются только одной функцией — относительным (взаимным) углом поворота дисков $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$; в этом смысле система имеет только одну (колебательную) степень свободы. Той же особенностью обладает система $XVII$.

Во всех рассмотренных примерах число степеней свободы оказалось конечным благодаря допущениям, что деформируемые части механических систем лишены массы (безынерционные упругие связи), а тела, обладающие массой, совершенно недеформируемы.

Иногда в расчетной схеме как бы признается, что свойствами инерции и деформативности обладают все элементы системы, но ограничение числа степеней свободы достигается путем априорного (и в известной степени произвольного) задания конфигурации системы при колебаниях, т. е. *формы колебаний*.

Так, если принять, что при колебаниях двухопорной балки с распределенной массой изогнутой осью служит синусоида (рис. 1.3).

$$y(x, t) = a(t) \sin \frac{\pi x}{l},$$

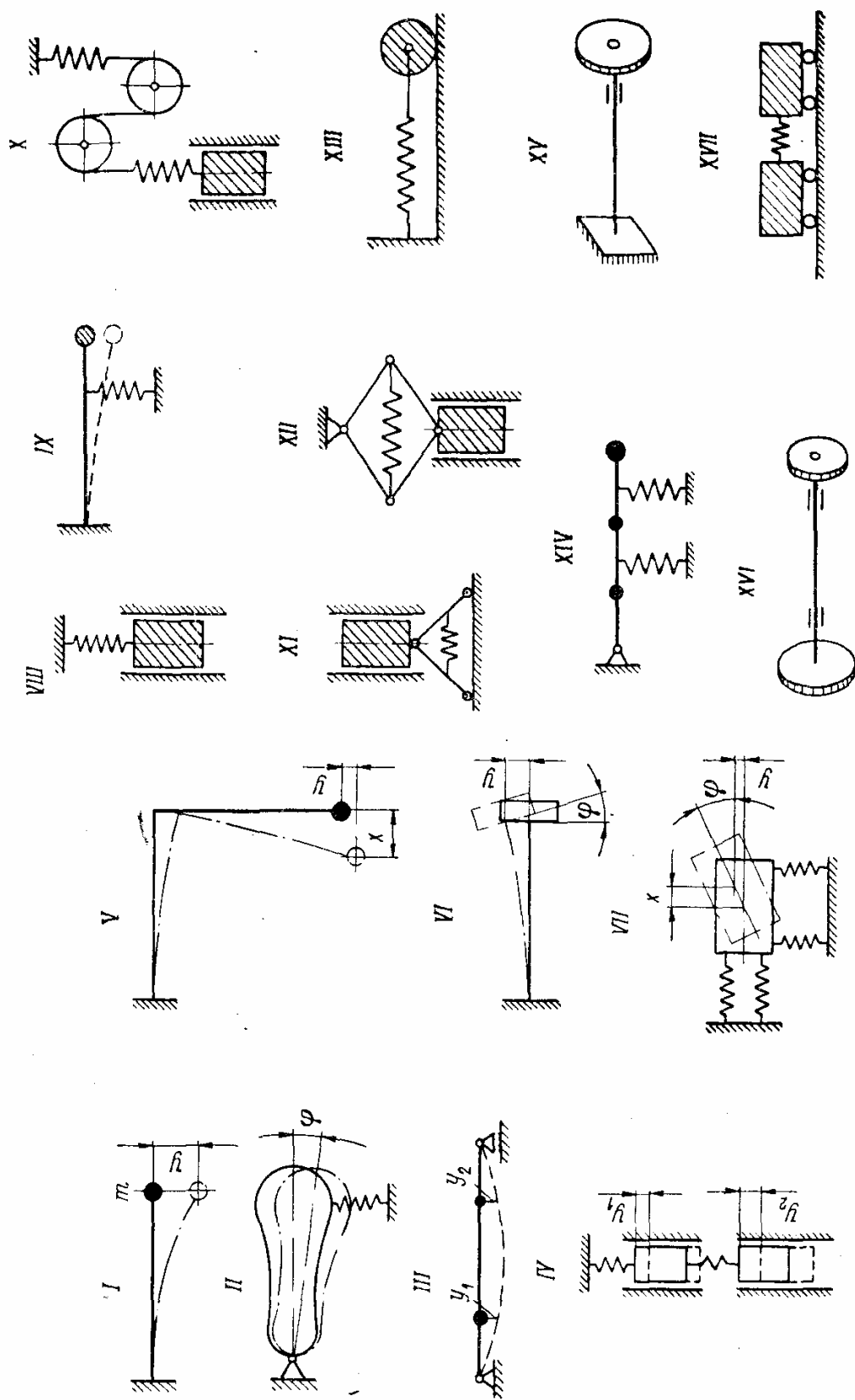


Рис. I.2

то конфигурация системы в любой момент времени полностью определяется одной величиной — прогибом середины $a(t)$; система имеет только одну степень свободы.

Если для той же балки принять более сложное представление изогнутой оси, например

$$y(x, t) = a_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + a_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l},$$

то положение системы в любой момент времени определяется функциями $a_1(t)$ и $a_2(t)$, т. е. система имеет *две степени свободы*.

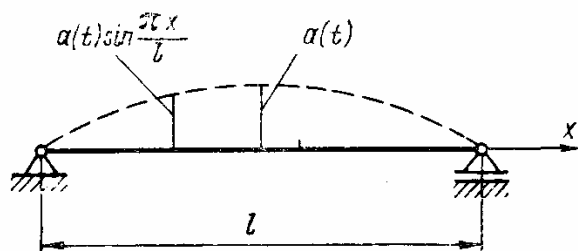


Рис. I.3

Нужно иметь в виду, что хотя с увеличением признаваемых степеней свободы точность динамического исследования возрастает, для практических целей обычно достаточен учет небольшого числа наиболее существенных степеней свободы.

В заключение укажем, что в ряде случаев можно получить точное решение задач о колебаниях упругих систем, вовсе не прибегая к каким-либо упрощениям, т. е. учитывать действительную бесконечность числа степеней свободы; правда, это удастся сделать только для систем простой структуры, например для балок, обладающих постоянным сечением и равномерным распределением массы.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ

Силы, действующие извне на механическую систему, а также внутренние силы, развивающиеся в ее связях, весьма разнообразны как по своей природе, так и по той роли, которую они играют в колебательном процессе. Опишем основные свойства различных типов сил применительно к системам с одной степенью свободы.

Позиционные силы

Позиционные силы — это такие силы, которые определяются отклонениями системы от положения равновесия. Если направление позиционной силы противоположно направлению отклонения, то такая сила называется *восстанавливающей*. Можно сказать, что колебательные свойства механических систем определяются наличием именно восстанавливающих сил.

В частности, восстанавливающими силами являются *силы упругости*. В простейшем случае, т. е. в линейно-деформируемой системе, восстанавливающая сила упругости пропорциональна отклонению системы; при этом упругие свойства системы харак-

теризуются одним числом — коэффициентом жесткости c , который представляет собой коэффициент пропорциональности между внешней силой P , статически нагружающей систему, и вызываемым этой силой перемещением y , т. е. $P = cy$. При этом восстанавливающая сила противоположна по направлению внешней силе P .

В иных случаях между силой и перемещением существует нелинейная зависимость, и тогда упругие свойства связей невозможно определить одним числом. В этих случаях указанные свойства определяются упругой характеристикой, представляющей собой функцию $P = P(y)$, которую обычно иллюстрируют гра-

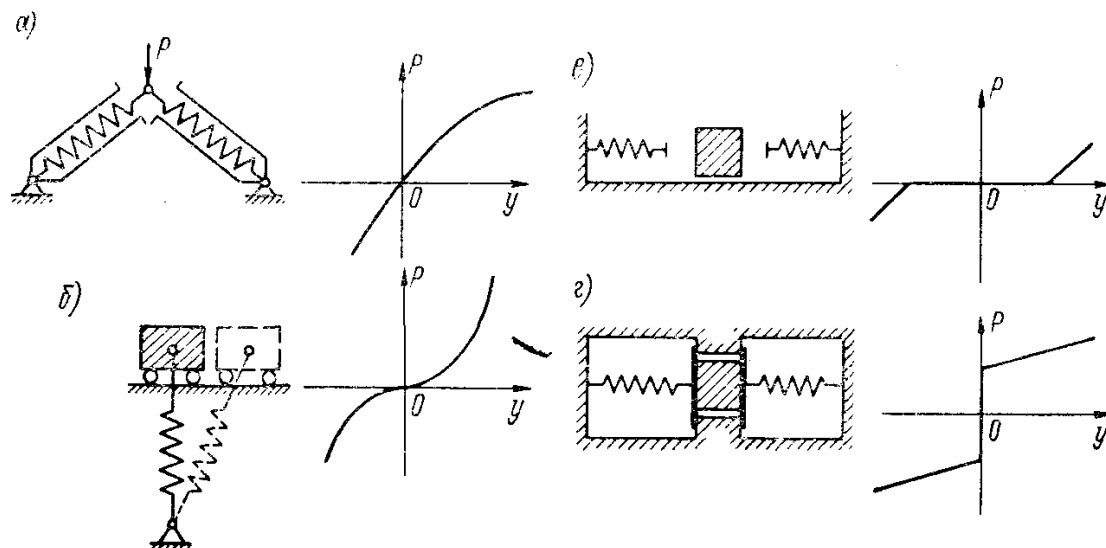


Рис. 1.4

фиком в координатных осях y , P . Упругая характеристика строится (расчетным путем или экспериментально) для условий статического нагружения системы.

На рис. 1.4 представлены несколько простых нелинейных систем и соответствующие упругие характеристики.

Различают *мягкие* и *жесткие* нелинейные упругие характеристики. Мягкими называют характеристики с постепенно уменьшающимся наклоном (рис. 1.4, а), а жесткими — характеристики с постепенно возрастающим наклоном (рис. 1.4, б).

В некоторых конструкциях упругие характеристики имеют переломы или разрывы. Так, часть упругой характеристики механической системы, представленной на рис. 1.4, в (система с зазором), совпадает с осью абсцисс. Системе с натягом (рис. 1.4, г) соответствует разрывная упругая характеристика.

Для систем, положение которых характеризуется угловым перемещением φ , упругая характеристика представляет собой связь между моментом M , статически нагружающим систему, и указанным перемещением (рис. 1.5). В зависимости от свойств упругих связей такая упругая характеристика может иметь вид любого из графиков, показанных на рис. 1.4 (при соответствующем переименовании осей y , P в оси φ , M).

Наряду с силами упругости восстанавливающими свойствами обладает также *сила плавучести*. На рис. 1.6 сплошными линиями показаны прямостенное (рис. 1.6, а) и непрямостенное (рис. 1.6, б) плавающие тела в положении равновесия, а штриховыми линиями — отклоненные положения этих тел. Здесь предполагается,

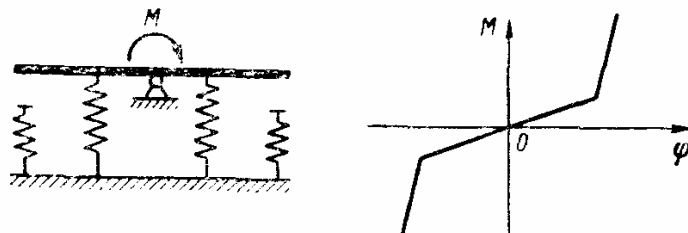


Рис. 1.5

что отклонения представляют собой чисто вертикальные поступательные смещения y . При таких смещениях возникают дополнительные силы плавучести, направленные противоположно смещениям. Если тело имеет прямые стенки, то эти силы пропорциональны смещениям и характеристика восстанавливающей силы —

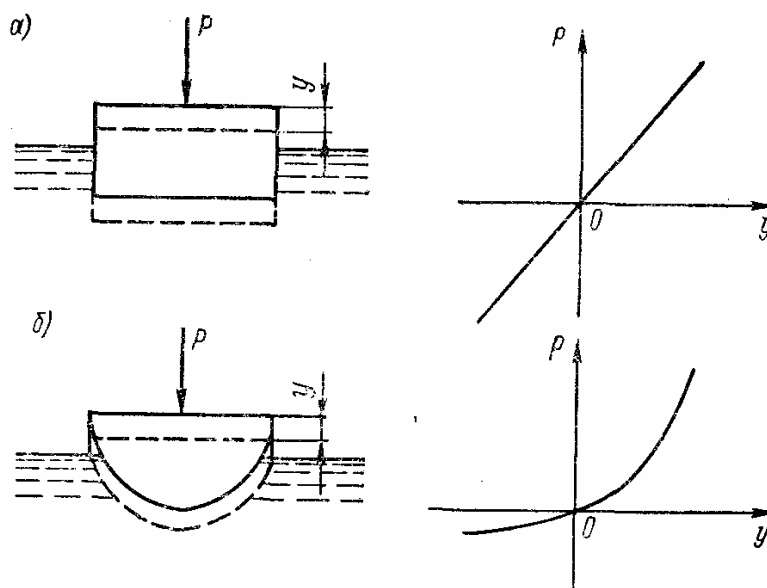


Рис. 1.6

прямая линия (рис. 1.6, а); для непрямостенного тела характеристика восстанавливающей силы нелинейная и притом жесткая (рис. 1.6, б).

Восстанавливающее действие может оказывать сила тяжести, например сила тяжести жидкости в сообщающихся сосудах (рис. 1.7, а). Восстанавливающими свойствами нередко обладает момент силы тяжести; наиболее простым примером этого случая служит маятник (рис. 1.7, б). Отклонения системы определяются углом φ , а мерой восстанавливающего действия является момент

силы тяжести относительно оси шарнира. Характеристика этой системы имеет тот же вид, что и график на рис. I.6, б.

В некоторых случаях восстанавливающие силы имеют смешанный состав. Так, для маятника на рис. I.7, в восстанавливающее действие оказывают как сила тяжести, так и сила упругости.

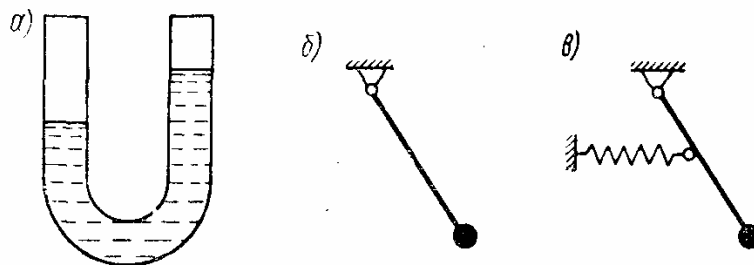


Рис. I.7

Характеристики систем, изображенных на рис. I.6 и I.7, часто называют *квазиупругими*, подчеркивая этим родство всех типов восстанавливающих сил с упругой силой.

Диссипативные силы

При колебаниях механических систем кроме восстанавливающих сил неизбежно развиваются силы трения. Они совершают необратимую работу, что приводит к диссипации (рассеянию) механической энергии. К таким силам относятся силы трения в опорах и сочленениях механической системы, силы сопротивления среды (жидкой или газообразной), в которой происходят колебания, силы внутреннего трения в материале элементов системы и, наконец, силы, возникающие при нагружении поглотителей энергии (демпферов).

Какой бы ни была природа трения, направление диссипативных сил в любой момент процесса движения противоположно скорости движения, причем величина силы, как правило, тем или иным образом связана с величиной скорости.

Диссипативные свойства механических систем с одной степенью свободы описываются при помощи характеристик трения — кривых зависимости силы сопротивления R от скорости $\dot{y}$. Так, на рис. I.8, а показан простейший элемент трения — вязкий демпфер; если сопротивление демпфера пропорционально скорости движения поршня вдоль цилиндра, то характеристика трения представляет собой прямую (рис. I.8, б), а если сопротивление зависит от скорости движения поршня более сложным образом, то характеристика трения приобретает нелинейный вид (рис. I.8, в).

Следует иметь в виду, что при построении характеристик трения по оси ординат принято откладывать значения силы, приложенной к элементу трения (см. направление силы R на рис. I.8, а); при этом обратное действие элемента трения на осталь-

ную часть механической системы (эта сила на рис. I.8, а не показана) имеет противоположное направление.

Характеристики сухого трения имеют разрывной вид. На рис. I.8, г показана характеристика трения, соответствующая

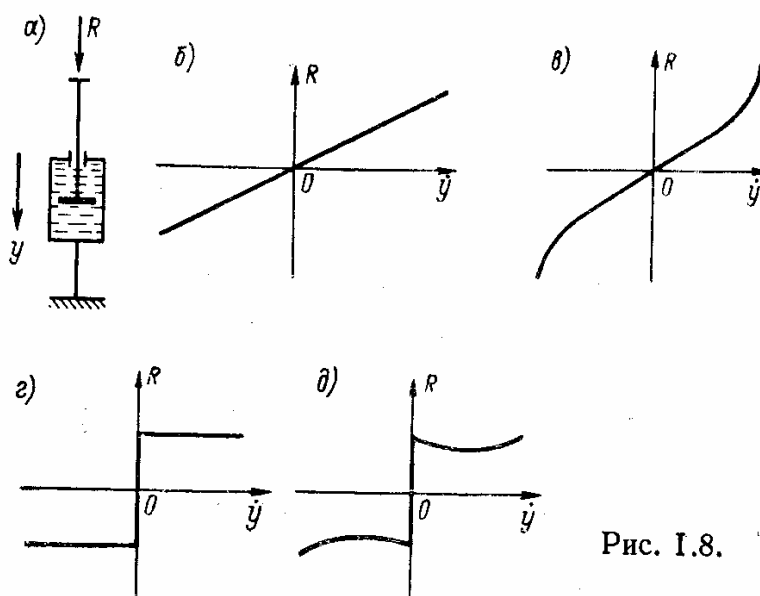


Рис. I.8.

простейшему закону Амонтона—Кулона, согласно которому величина силы трения не зависит от скорости; на рис. I.8, д представлена уточненная характеристика сухого трения.

Возмущающие силы

Как было сказано, характеристики восстанавливающих и диссипативных сил определяются исключительно свойствами самой механической системы, а соответствующие силы не только влияют на движение, но, можно сказать, сами управляются этим движением, поскольку они зависят от перемещений и скоростей.

Другую важную категорию образуют *возмущающие силы*, т. е. силы, заданные в виде явных функций времени и потому не зависящие от движения, но, конечно, активно влияющие на него; иногда такие силы называют *вынуждающими*.

Примером могут служить силы, передающиеся от вращающегося неуравновешенного ротора на фундамент машины (рис. I.9, а). Пусть ω — угловая скорость вращения ротора, m — его масса и e — эксцентриситет. Тогда величина центробежной силы постоянна и равна $m\omega^2 e$, но направление силы и соответственно обе составляющие этой силы, а также ее момент относительно середины опорной площадки непрерывно меняются (рис. I.9, б).

Такие силы (и пары) являются причиной вынужденных колебаний упругой системы, на которой установлена машина. Этот вид возбуждения называется инерционным.

В других случаях возмущающие силы могут развиваться вследствие других причин, например периодических изменений давления в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания, периодического изменения сил притяжения электромагнитов, питаемых переменным током (в электровибромашинах), и др.

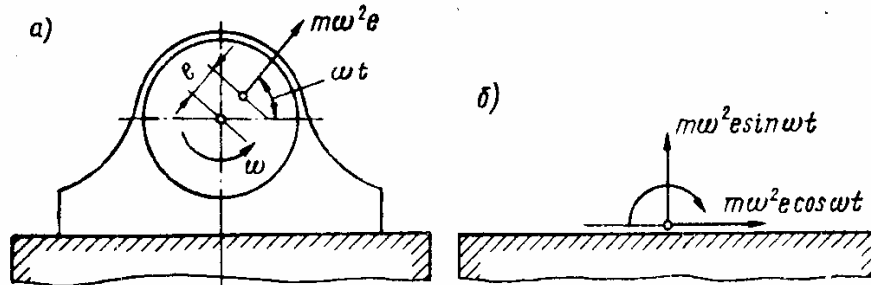


Рис. I.9

Законы изменения возмущающих сил во времени весьма разнообразны [40]. Отметим несколько наиболее важных случаев:

1) гармоническая возмущающая сила (рис. I.10, а) — машины с равномерно вращающимися не вполне уравновешенными роторами;

2) периодическая возмущающая сила (рис. I.10, б) — машины с кривошипно-шатунными механизмами;

3) периодические кратковременные импульсы (рис. I.10, в) — вибрационно-ударные формовочные машины; в некоторых слу-

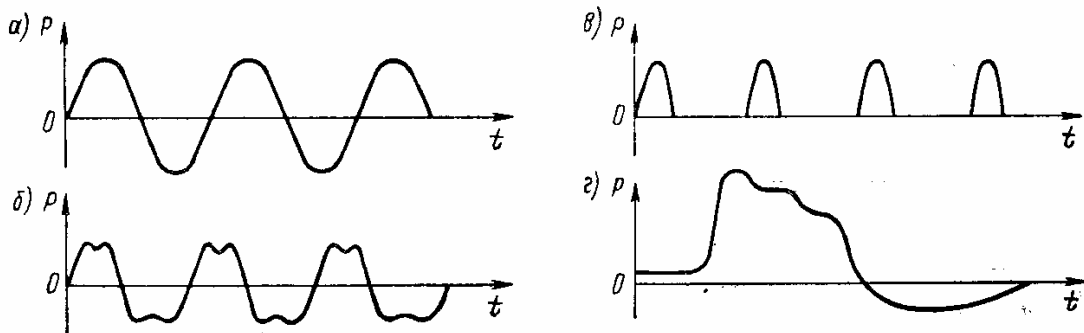


Рис. I.10

чаях длительность отдельных импульсов настолько мала, что их можно считать мгновенными (ковочные штамповочные молоты, копровые устройства и т. п.);

4) непериодические возмущающие силы (рис. I.10, г) — двигатели прокатного стана при одном из первых проходов болванки и др.

В некоторых случаях возмущающие силы не являются заданными детерминированными функциями времени, а представляют собой *случайный процесс* (например, воздействие дороги на движущийся автомобиль, нагрузка на исполнительные органы горных выемочных машин и т. п.).

Силы смешанного характера

В сложных механических системах могут развиваться силы смешанного характера, не разложимые на сумму сил типа $P(y)$, $P(\dot{y})$, $P(t)$.

На рис. I.11 представлен пример *параметрической системы* — маятник, на который действует вертикальная сила $P = P_0 \sin \omega t$. Момент внешних сил относительно оси шарнира создает сумма силы веса mg и силы P :

$$M = -(mg + P_0 \sin \omega t) l \sin \varphi.$$

Как видно, этот момент зависит от смещения φ и от времени t , причем величину $M(\varphi, t)$ нельзя представить в виде суммы $M_1(\varphi) + M_2(t)$, т. е. невозможно выделить восстанавливающую и возмущающую составляющие общего момента.

Возможны случаи, когда развиваются силы типа $P(y, \dot{y})$, также непредставимые в виде суммы $P_1(y) + P_2(\dot{y})$ (в частности, в автоколебательных системах).

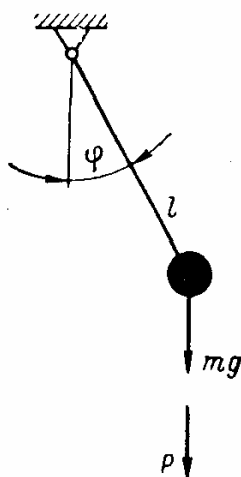


Рис. I.11

3. СПОСОБЫ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Наиболее общей формой уравнений движения являются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (I.3)$$

где n — число степеней свободы механической системы; i — порядковый номер обобщенной координаты; q_i — обобщенная координата; $\dot{q}_i$ — обобщенная скорость; Q_i — обобщенная сила; T — кинетическая энергия системы; t — время.

Для конкретных типов систем с несколькими степенями свободы из уравнений (I.3) можно получить важные соотношения более частного характера. Однако такие соотношения можно вывести и независимо от уравнений (I.3). Наиболее часто применяют следующие два способа вывода таких соотношений.

Прямой способ

По этому способу массы мысленно отделяют от упругого скелета системы и для каждой из них записывают дифференциальные уравнения движения, причем действие упругих связей заменяют

их реакциями. Применительно к простейшей системе (см. рис. I.1, б) прямой способ иллюстрирован на рис. I.1, г. Этот способ удобен в тех случаях, когда реакции связей (силы упругости и вязкости) не слишком сложно выражаются через характерные перемещения и скорости, в частности для исследования свободных и вынужденных колебаний многомассовых цепных систем.

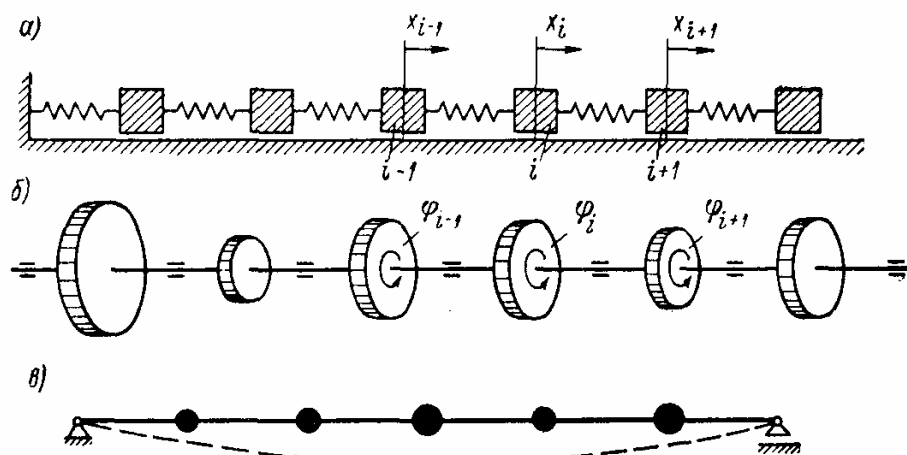


Рис. I.12

Так, для системы, показанной на рис. I.12, а, действующие на какой-либо i -й груз силы упругости выражаются всего через три перемещения: x_{i-1} , x_i и x_{i+1} . Точно так же моменты сил упругости, действующие на любой из массивных дисков системы, изображенной на рис. I.12, б, определяются через три угла поворота: φ_{i-1} , φ_i и φ_{i+1} .

Обратный способ

Идея этого способа состоит в отделении всех масс системы от ее упругого скелета и рассмотрении его деформации под действием заданных внешних сил (пар) и сил инерции (моментов сил инерции) отделенных масс.

Например, по обратному способу образована схема, показанная выше на рис. I.1, в. Здесь R' — сила действия груза на пружину, причем проекция силы R' на ось x равна сумме

$$R'_x = P - m\ddot{x}.$$

Можно сказать, что груз передает пружине сумму внешней силы P и силы инерции $-m\ddot{x}$. Здесь, конечно, имеется в виду реальная сила инерции, которая, однако, приложена не к грузу (см. рис. I.1, г) и не к заданной системе (см. рис. I.1, б), а к пружине.

жине, служащей в данном случае упругим скелетом конструкции *. Обратный способ удобен при анализе свободных и вынужденных колебаний многомассовых систем типа балки, показанной на рис. I.12, в. В подобных случаях прямой способ оказывается менее целесообразным.

* Иногда в рассуждениях о силах инерции ошибочно смешиваются два различных понятия: заданной механической силы и ее упругого скелета (т. е. безмассового силового каркаса). Говоря о силах инерции, нужно иметь в виду, что они оказывают реальное действие на упругий скелет, т. е. на систему связей, от которой мысленно отняты все инерционные свойства. Например, выражение «на балку при колебаниях действуют силы инерции» содержит двусмысленность, поскольку неясно, что в этом выражении следует понимать под «балкой». Если здесь подразумевается сама балка, т. е. упругая система, обладающая массой, то приведенное выражение в сущности неверно; если же «балкой» назван ее упругий скелет, то оно становится верным, но тогда следовало бы его лучше сформулировать.

Именно по этой причине выше подчеркнуто, что обратный способ основан на приложении сил инерции к безмассовому упругому скелету механической системы.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ БЕЗ НЕУПРУГИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Основное уравнение свободных колебаний

Вновь рассмотрим одномассовую систему, показанную на рис. II.1, б. Этот простейший случай типичен для широкого класса систем с одной степенью свободы без диссипации энергии.

Допустим, что возмущающая сила $P(t)$ отсутствует, но состояние равновесия каким-либо образом было нарушено и затем система предоставлена самой себе. Происходящее в этих условиях движение и представляет собой свободные колебания. Начальное смещение x_0 и начальная скорость v_0 предполагаются заданными (в противном случае движение не будет полностью определено), так что начальное возмущение равновесного положения характеризуется начальными условиями: $x = x_0$ и $v = v_0$ при $t = 0$.

В любой момент процесса колебаний на груз действует горизонтальная реакция пружины — cx ; коэффициент жесткости c определяется по известным формулам теории сопротивления материалов. Дифференциальное уравнение движения (I.2) принимает вид

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

или

$$\ddot{x} + p^2x = 0, \quad (\text{II.1})$$

где p — постоянная, зависящая от свойств системы:

$$p = \sqrt{c/m}. \quad (\text{II.2})$$

К уравнению типа (II.1) приводятся многие задачи о колебаниях внешне совершенно иных механических систем; подробно рассмотрим его решение.

Решение уравнения. Решение уравнения (II.1) можно представить в виде

$$x = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt,$$

или в эквивалентной форме

$$x = a \sin (pt + \alpha). \quad (\text{II.3})$$

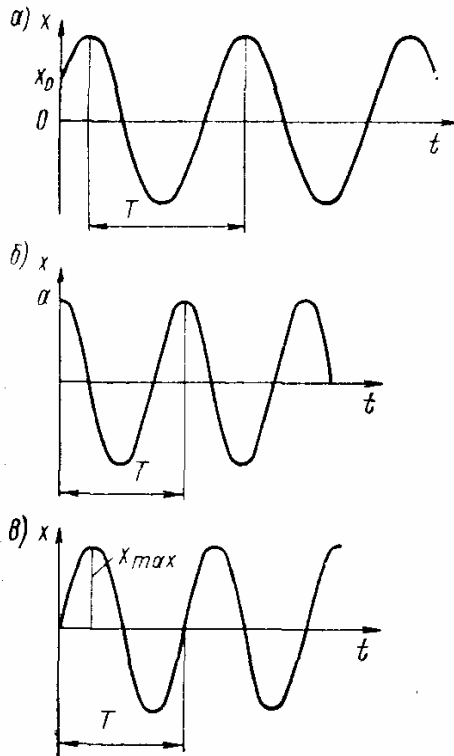
Постоянные C_1 , C_2 определяются из начальных условий: $C_1 = v_0/p$; $C_2 = x_0$, так что

$$x = x_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt. \quad (\text{II.4})$$

Для постоянных a и α из тех же условий получаем

$$a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/p^2}; \quad (\text{II.5})$$

$$\alpha = \arctg \frac{px_0}{v_0}.$$



Здесь a — амплитуда колебаний; α — начальная фаза.

Из закона движения (II.3), показанного на рис. II.1, а, видно, что движение представляет собой гармонические колебания. Повторение процесса начинается после такого промежутка времени T (периода колебаний), по истечении которого аргумент $pt + \alpha$ (фаза) увеличивается на 2π :

$$pt + \alpha + 2\pi = p(t + T) + \alpha.$$

Отсюда находим $T = 2\pi/p$. Тогда число колебаний в единицу времени

$$n = 1/T = p/(2\pi).$$

Рис. II.1

Следовательно, $p = 2\pi n$. Отсюда ясен физический смысл постоянной p — это число колебаний в 2π единиц времени. Постоянная p называется круговой (угловой) частотой свободных колебаний или просто частотой свободных колебаний. Как видно из формулы (II.2), частота p зависит от параметров системы, но не зависит от характера начального возмущения, вызвавшего колебательный процесс; то же относится и к периоду колебаний. По этому признаку частоту свободных колебаний называют собственной частотой.

Формуле (II.2) можно придать иной вид, если воспользоваться понятием о статическом перемещении

$$f_{\text{ст}} = mg/c,$$

понимая под $f_{\text{ст}}$ то перемещение конца пружины, которое возникло бы в случае действия силы веса mg вдоль оси пружины. Тогда для собственной частоты получаем формулу

$$p = \sqrt{c/m} = \sqrt{g/f_{\text{ст}}},$$

и соответственно число колебаний в 1 с

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/f_{\text{ст}}} \approx 5/\sqrt{f_{\text{ст}}},$$

где $f_{\text{ст}}$ — в см.

Здесь следует отметить, что собственная частота системы не зависит от ориентации оси пружины. В частности, рассмотрим случай, когда пружина подвешена вертикально (рис. II.2, а).

Пусть точка 1 определяет положение равновесия груза (рис. II.2, б). В этом положении на груз действуют его вес mg и реакция пружины $cf_{\text{ст}}$ ($f_{\text{ст}}$ — статическое удлинение пружины, соответствующее весу груза mg). Условие равновесия покоящегося груза имеет вид

$$mg - cf_{\text{ст}} = 0,$$

т. е.

$$cf_{\text{ст}} = mg. \quad (\text{II.7})$$

Если положение равновесия нарушено и груз находится в движении (например, в точке 2 — см. рис. II.2, а), то в текущий момент времени на груз действуют (рис. II.2, в) сила веса mg и реакция пружины $c(f_{\text{ст}} + y)$, где y — отклонение груза от положения равновесия. Дифференциальное уравнение движения

$$-c(f_{\text{ст}} + y) + mg = m\ddot{y}$$

при учете условия (II.7) вновь принимает прежнюю форму (II.1):

$$\ddot{y} + p^2 y = 0.$$

Совпадение дифференциальных уравнений означает, что весь колебательный процесс будет происходить так же, как и в случае горизонтального расположения оси пружины (конечно, при условии, что начальные условия аналогичны); центр колебаний располагается в положении равновесия (точка 1).

Кроме частоты, все остальные характеристики процесса свободных колебаний существенно зависят от начальных условий. Так, если колебания возникают при условиях, когда груз оттянут от положения равновесия на расстояние a , а затем свободно отпущен, то $x_0 = a$, $v_0 = 0$ и согласно уравнению (II.4) движение происходит по косинусоидальному закону (см. рис. II.1, б): $x = a \cos pt$.

Если колебания вызваны мгновенным ударом по грузу, то начальные условия имеют вид: $x_0 = 0$, $v_0 = S/m$, где S — удар-

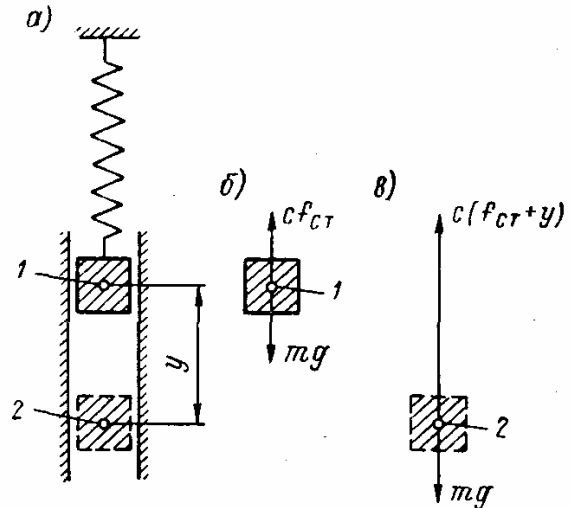


Рис. II.2

ный импульс; второе из начальных условий сформулировано на основании теоремы об изменении количества движения. Согласно уравнению (II.4) получается, что движение груза происходит по синусоидальному закону (см. рис. II.1, в)

$$x = \frac{S}{mp} \sin pt,$$

причем $x_{\max} = S/(mp)$.

В случаях, когда одновременно не равны нулю x_0 и v_0 , движение происходит по закону (II.4).

Полученное решение имеет очевидный недостаток: так как не были учтены неизбежные неупругие сопротивления (трение), получилось, что колебания происходят без затухания. Этот недостаток ниже будет учтен и исправлен, однако уже здесь можно отметить, что влияние этих сопротивлений на собственную частоту, как правило, весьма мало. Поэтому формула (II.2) хорошо согласуется с опытными данными.

Представление решения на фазовой плоскости. В ряде случаев (особенно в колебательных системах) для описания и изучения движения удобно пользоваться *фазовой плоскостью*, т. е. координатной системой перемещение — скорость.

В каждый момент времени состояние системы характеризуется перемещением x и скоростью v ; на фазовой плоскости этому состоянию соответствует *изображающая точка*, имеющая координаты x, v . С течением времени изображающая точка будет перемещаться по фазовой плоскости, описывая *фазовую траекторию*.

В рассматриваемом случае гармонических колебаний имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin (pt + \alpha); \\ v &= ap \cos (pt + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.6})$$

Совокупность этих уравнений можно рассматривать как фазовую траекторию, заданную в параметрической форме (с временем t в качестве параметра). Чтобы получить уравнение фазовой траектории в явной форме, нужно исключить время t из системы (II.6); после этого получится

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2 p^2} = 1,$$

т. е. уравнение эллипса (рис. II.3, а).

Начальным условиям $x = x_0, v = v_0$ соответствует начальная изображающая точка, из которой начинается движение. Периодичность процесса выражается в том, что изображающая точка будет обегать одну и ту же эллиптическую орбиту.

При изменении начальных условий фазовой траекторией окажется другой эллипс; вся совокупность возможных состояний системы описывается семейством эллипсов, вложенных один

в другой (рис. II.3, б). Совокупность фазовых траекторий образует *фазовый портрет* (*фазовую диаграмму*) системы. Можно сказать, что параметры системы определяют вид фазового портрета, а начальные условия фиксируют одну определенную траекторию.

Начало координат соответствует состоянию равновесия. Если $x_0 = 0$ и $v_0 = 0$, то изображающая точка находится все время в начале координат и никакой траектории не описывает; точки равновесия называют *особыми*. Если особая точка окружена системой замкнутых траекторий (как это имеет место в рассматриваемом случае), то она называется *центром*.

Коэффициенты жесткости для различных систем. Упругие свойства системы в каждом конкретном случае характеризуются коэффициентом жесткости c (табл. 1).

Остановимся на случаях 11 и 12. Эти схемы соответствуют условиям, возникающим при вращении консоли вокруг оси, проходящей через центр тяжести корневого сечения, когда развивается центробежная сила $m\omega^2 l$ (ω — угловая скорость вращения). Если ось вращения совпадает с осью y (рис. II.4, а), то направление центробежной силы остается постоянным и нужно пользоваться схемой 11. Если же ось вращения перпендику-

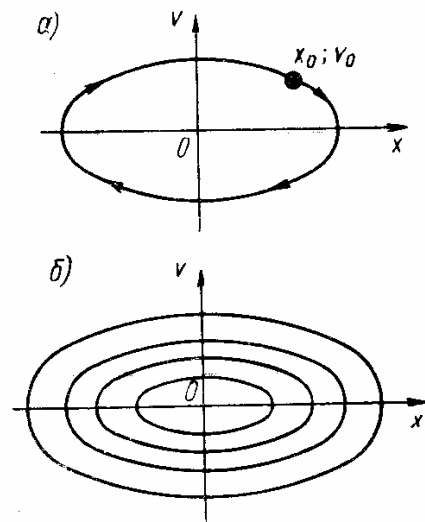


Рис. II.3

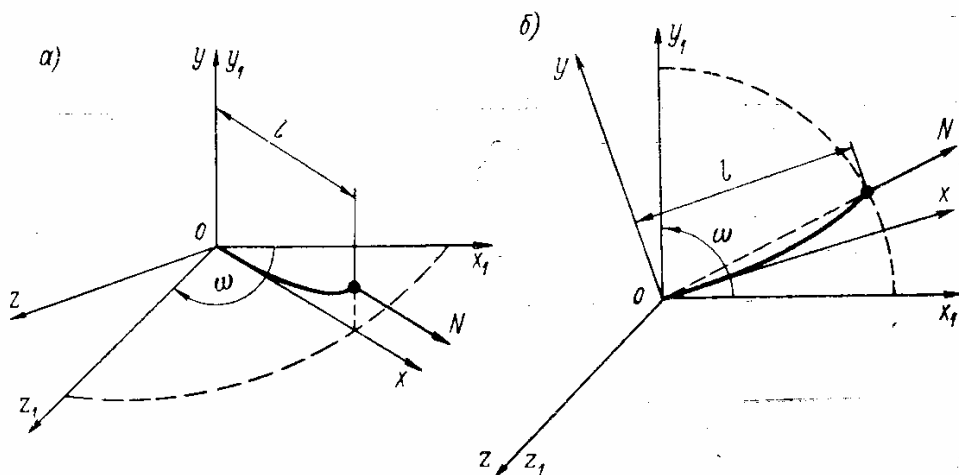


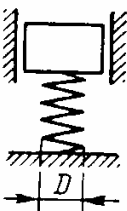
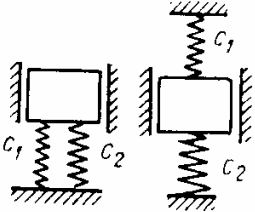
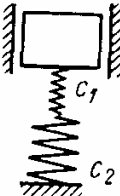
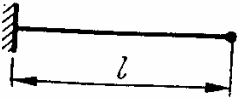
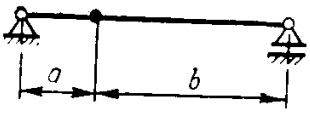
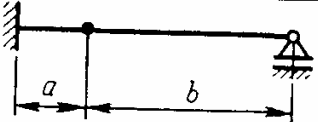
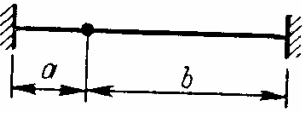
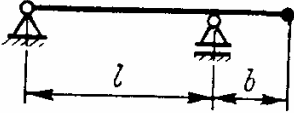
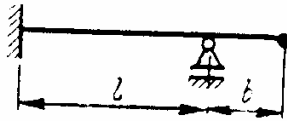
Рис. II.4

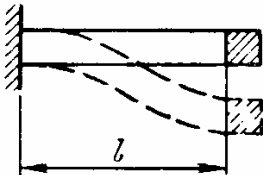
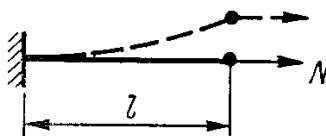
лярна плоскости x_1y_1 , то центробежная сила должна проходить через центр тяжести корневого сечения (рис. II.4, б) и коэффициент c определяется согласно схеме 12.

Основное уравнение угловых колебаний. Обратимся теперь к системам, содержащим твердые тела, которые совершают угло-

Таблица 1

Коэффициент жесткости c для некоторых простых систем

№ п/п	Схема	Коэффициент c
1		$\frac{Gd^4}{8nD^3}$ (d — диаметр сечения витка; D — диаметр пружины; G — модуль сдвига; n — число витков)
2		$c_1 + c_2$
3		$\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$
4		$\frac{3EJ}{l^3}$
5		$\frac{3EJ(a+b)}{a^2 b^2}$
6		$\frac{12EJ(a+b)^3}{a^3 b^2 (3a+4b)}$
7		$\frac{3EJ(a+b)^3}{a^3 b^3}$
8		$\frac{3EJ}{(b+l)b^2}$
9		$\frac{12EJ}{(4b+3l)b^2}$

№ п/п	Схема	Коэффициент c
10		$\frac{24EJ}{l^3}$ (EJ — жесткость при изгибе каждой из двух плоских пружин)
11		$\frac{\alpha^3 EJ \operatorname{ch} \alpha l}{\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l}$ ($\alpha = \sqrt{N/(EJ)}$)
12		$\frac{\alpha^2 EJ \operatorname{sh} \alpha l}{l (\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)}$ ($\alpha = \sqrt{N/(EJ)}$)
Примечание. В приведенных формулах EJ — жесткость при изгибе.		

вые колебания вокруг неподвижной оси (рис. II.5). Первая из них (рис. II.5, а) представляет собой диск, закрепленный на упругом стержне, а вторая (рис. II.5, б) — плоский, упруго подвешенный жесткий рычаг, имеющий одну неподвижную точку.

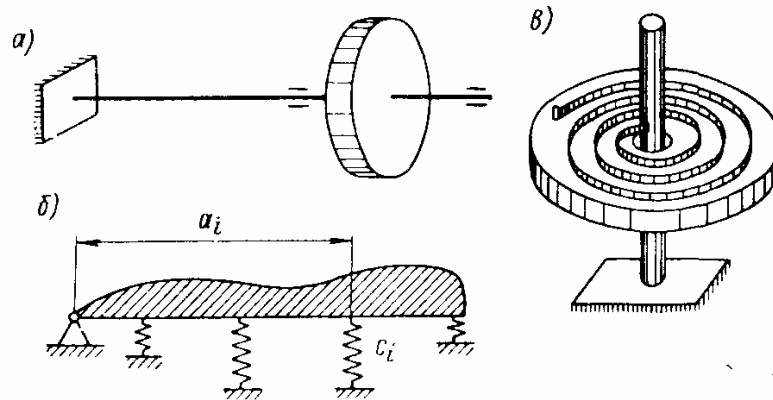


Рис. II.5

Третья система (рис. II.5, в) состоит из тяжелого маховика, связанного с осью гибкой спиральной пружиной; эта система принципиально не отличается от первой.

Во всех рассмотренных случаях нужно исходить из дифференциального уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси:

$$M = I\ddot{\varphi}, \quad (\text{II.8})$$

где M — момент приложенных к телу сил относительно оси вращения; I — момент инерции тела относительно той же оси.

В первой из рассмотренных систем момент M (восстанавливающий момент) создается силами упругости стержня и равен $-c\varphi$, где $c = GJ_p/l$ — коэффициент жесткости стержня при кручении (GJ_p — жесткость при кручении; l — длина скручиваемого стержня). Следовательно, согласно уравнению (II.8) $-c\varphi = I\ddot{\varphi}$, т. е.

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi = 0, \quad (\text{II.9})$$

где

$$p = \sqrt{c/I}. \quad (\text{II.10})$$

Дифференциальное уравнение (II.9) имеет основную форму (II.1); отсюда сразу следует, что формула (II.10) определяет собственную частоту колебаний.

Если отсчет углов отклонения φ балки, показанной на рис. II.5, б, вести от положения равновесия, то малое дополнительное удлинение каждой из пружин при колебаниях запишется в виде $a_i\varphi$ (a_i — расстояние от точки прикрепления пружины до шарнирной опоры), а дополнительная реакция пружины — в виде $-c_i a_i\varphi$ (c_i — коэффициент жесткости i -й пружины). Соответственно создаваемый одной пружиной момент составляет $-c_i a_i^2\varphi$, полный момент

$$M = -\sum c_i a_i^2 \varphi = -\varphi \sum c_i a_i^2 = -c\varphi, \quad (\text{II.11})$$

причем сумма $c = \sum c_i a_i^2$ служит приведенным коэффициентом жесткости системы.

Подставляя выражение (II.11) в дифференциальное уравнение (II.8), вновь приходим к стандартной записи (II.1).

Рассмотрим теперь двухмассовую систему XVI на рис. I.2, особенности которой уже отмечались. Начало процесса колебаний можно представить, например, следующим образом. Пусть на диски действуют две равные и противоположно направленные скручивающие пары, которые в некоторое мгновение (принимаемое за начало отсчета времени) внезапно исчезают. Для некоторого мгновения $t > 0$ углы поворота дисков равны φ_1 и φ_2 , так что относительный угол поворота равен $\varphi_2 - \varphi_1$. Момент сил упругости вала составляет $c(\varphi_2 - \varphi_1)$ и действует на каждый из дисков так, как показано на рис. II.6. Обозначив через I_1 и I_2 моменты инерции масс дисков относительно оси вала, получим уравнения движения

$$c(\varphi_2 - \varphi_1) = I_1\ddot{\varphi}_1; \quad -c(\varphi_2 - \varphi_1) = I_2\ddot{\varphi}_2.$$

Минус в левой части второго уравнения поставлен потому, что упругий момент, действующий на второй диск, направлен по ходу часовой стрелки (отрицательный момент). Деля первое уравнение на I_1 , второе — на I_2 и вычитая первое уравнение из второго, получим

$$-\left(\frac{c}{I_2} + \frac{c}{I_1}\right)(\varphi_2 - \varphi_1) = \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1.$$

Введем в уравнение относительный угол поворота дисков $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Тогда уравнение примет прежний вид [см. уравнение (II.9)], причем собственная частота

$$p = \sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}. \quad (\text{II.12})$$

Результаты не изменятся, если помимо упругих колебаний происходит вращение всей системы как жесткого целого.

При $I_1 \rightarrow \infty$ вновь придем к формуле (II.10), полученной для вала, левый конец которого закреплен. При конечных значениях I_1 и I_2 некоторое промежуточное сечение, называемое *узлом колебаний*, не принимает участия в колебаниях. Для определения

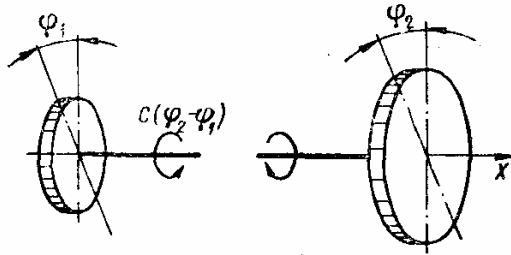


Рис. II.6

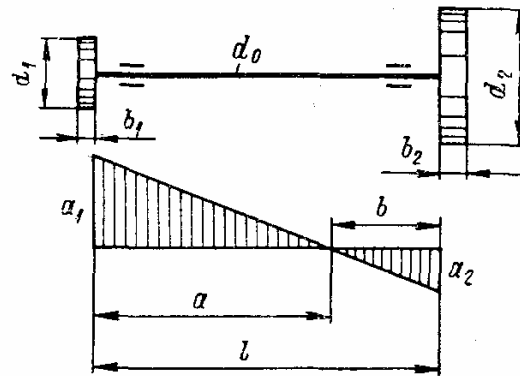


Рис. II.7

положения узла колебаний учтем, что в процессе колебаний внешние моменты отсутствуют; поэтому в любое мгновение сумма моментов сил инерции обоих дисков относительно оси вала должна быть равна нулю, т. е.

$$-I_1 \ddot{\varphi}_1 - I_2 \ddot{\varphi}_2 = 0.$$

Обозначив через a_1 и a_2 амплитуды угловых перемещений, получим ускорения:

$$\ddot{\varphi}_1 = -a_1 p^2 \sin(pt + \alpha); \quad \ddot{\varphi}_2 = -a_2 p^2 \sin(pt + \alpha),$$

поэтому $I_1 a_1 + I_2 a_2 = 0$, откуда

$$a_1/a_2 = -I_2/I_1,$$

т. е. отношение амплитуд колебаний дисков обратно пропорционально отношению их моментов инерции; знак минус означает, что отклонения происходят в разные стороны. Из рис. II.7 видно, что при этом расстояния от узла колебаний до концов вала:

$$a = \frac{I_2}{I_1 + I_2} l; \quad b = \frac{I_1}{I_1 + I_2} l. \quad (\text{II.13})$$

В заключение отметим, что совпадение дифференциальных уравнений свободных колебаний для внешне различных систем не случайно. Дело в том, что при малых колебаниях механиче-

ских систем с одной степенью свободы кинетическая и потенциальная энергия определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2,$$

где a — инерционный коэффициент; c — упругий коэффициент (приведенный коэффициент жесткости); q — обобщенная координата, отсчитываемая от состояния равновесия системы.

Соответственно, из уравнения Лагранжа (I.3) при отсутствии диссипативных сил вытекает дифференциальное уравнение

$$a \ddot{q} + c q = 0,$$

охватывающее все рассмотренные выше случаи.

Пример 1. Определить собственную частоту крутильных колебаний двух-массовой системы (рис. II.7) при следующих данных: диаметры дисков $d_1 = 30$ см и $d_2 = 20$ см; толщины дисков $b_1 = 2$ см и $b_2 = 1,5$ см; диаметр вала $d_0 = 1$ см; длина вала $l = 80$ см. Материал дисков и вала — сталь ($\gamma = 0,0078$ кг/см³; $G = 0,8 \cdot 10^6$ кгс/см²).

Моменты инерции масс дисков:

$$I_1 = b_1 \frac{\pi d_1^4}{32} \cdot \frac{\gamma}{g} = 2 \frac{3,14 \cdot 30^4}{32} \cdot \frac{0,0078}{981} = 1,262 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2;$$

$$I_2 = b_2 \frac{\pi d_2^4}{32} \cdot \frac{\gamma}{g} = 1,5 \frac{3,14 \cdot 20^4}{32} \cdot \frac{0,0078}{981} = 0,187 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Полярный момент инерции поперечного сечения вала

$$J_p = \frac{\pi d_0^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 1^4}{32} = 0,0981 \text{ см}^4.$$

Коэффициент жесткости вала при кручении

$$c = \frac{G J_p}{l} = \frac{0,8 \cdot 10^6 \cdot 0,0981}{80} = 981 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Собственная частота по формуле (II.12)

$$p = \sqrt{\frac{981 (1,262 + 0,187)}{1,262 \cdot 0,187}} = 78 \text{ с}^{-1}.$$

Узел колебаний располагается вблизи большего диска; по (II.13)

$$a = \frac{0,187}{0,187 + 1,262} 80 = 10,3 \text{ см}; \quad b = \frac{1,262}{0,187 + 1,262} 80 = 69,7 \text{ см}.$$

Приближенно можно считать вал защемленным в неподвижном большем диске; тогда по формуле (II.10) найдем собственную частоту p с ошибкой около 7%.

Основное уравнение для маятника в поле центробежных сил. Рассмотрим диск, равномерно вращающийся с угловой скоростью ω (рис. II.8). К точке A этого диска при помощи невесомого стержня AB прикреплен груз B . Пусть маятник AB отклонен от положения равновесия на малый угол φ . Определим частоту колебаний груза, происходящих около положения равновесия AC .

Груз B участвует в двух движениях — переносном вместе с диском и относительном вокруг центра качания A . Угол между направлениями OB и OA обозначим через ψ , расстояние от центра диска O до центра качания A через R , длину маятника AB через l , расстояние OB через L , массу груза B через m . Тогда

$$L = \frac{R + l \cos \varphi}{\cos \psi}.$$

При анализе относительного движения маятника AB необходимо учесть переносную и кориолисову силы инерции. Переносная сила инерции направлена вдоль прямой OB и равна

$$P = m\omega^2 L = m\omega^2 \frac{R + l \cos \varphi}{\cos \psi}. \quad (\text{II.14})$$

Кориолисову силу инерции, направленную вдоль прямой AB , определять не будем, так как она не создает момента относительно точки A . Дифференциальное уравнение относительного движения маятника имеет вид

$$-PR \sin \psi = ml^2 \ddot{\varphi}.$$

Подставив сюда выражение (II.14), получим

$$m\omega^2 R (R + l \cos \varphi) \operatorname{tg} \psi + ml^2 \ddot{\varphi} = 0. \quad (\text{II.15})$$

Так как

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{x}{R + l \cos \varphi},$$

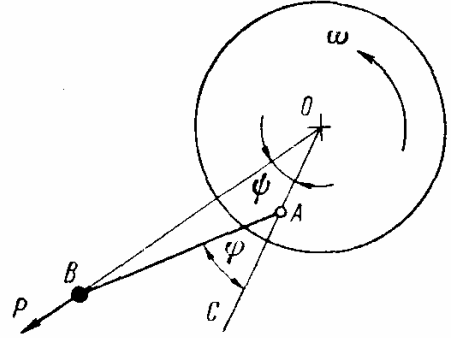


Рис. II.8

где x — расстояние от точки B до прямой OC , то уравнение (II.15) можно записать в виде

$$\omega^2 R x + l^2 \ddot{\varphi} = 0. \quad (\text{II.16})$$

Если колебания достаточно малы, то можно принять $\varphi \approx x/l$, и уравнение (II.16) примет вид

$$\ddot{x} + \frac{\omega^2 R}{l} x = 0.$$

Здесь, как и в рассмотренных выше случаях, достаточно довести выкладки до стандартной формы дифференциального уравнения, после чего по коэффициенту при координате (в данном случае при координате x) сразу определяем собственную частоту

$$p = \omega \sqrt{R/l}. \quad (\text{II.17})$$

Заметим, что собственная частота пропорциональна угловой скорости вращения диска.

Найденный результат может быть использован для определения собственной частоты колебаний маятника с двойным подвесом (рис. II.9). Подвес осуществлен при помощи двух роликов диаметром d_2 , вложенных в несколько бóльшие отверстия диаметром d_1 , которые имеются в теле маятника и вращающемся диске. При таком способе подвеса относительное движение маятника

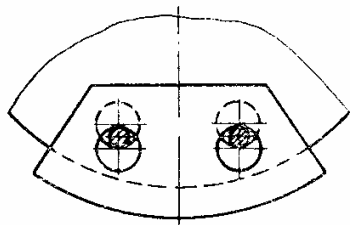


Рис. II.9

(по отношению к вращающемуся диску) является поступательным и все его точки описывают дуги окружностей одного и того же радиуса. Этот радиус равен разности диаметров отверстия и ролика, т. е. $l = d_1 - d_2$. Кроме того, расчетный размер R в данном случае равен $R_1 - l$, где R_1 — расстояние от центра вращающегося диска до центра тяжести маятника. Таким образом, собственная частота колебаний маятника определяется формулой

$$p = \omega \sqrt{\frac{R_1}{d_1 - d_2} - 1}.$$

Здесь полезно вспомнить, что при выводе формулы (II.17) предполагалась малость отношения смещения x к длине l маятника. В рассматриваемом случае расчетная длина маятника мала; это накладывает особенно тесные ограничения на величину амплитуд колебаний маятника, и если отношение x/l нельзя считать малым сравнительно с единицей, то приходится вообще отказываться от применения линейной теории.

Энергетический способ определения собственной частоты

Если не считать простейшей системы, изображенной на рис. I.1, во всех остальных рассмотренных выше случаях выкладки были доведены только до составления дифференциального уравнения движения системы. После приведения этого уравнения к основной форме в зависимости от коэффициента при координате сразу записывалась формула для собственной частоты колебаний.

В некоторых случаях целесообразнее иной способ определения собственной частоты; он основан на простых энергетических соображениях и вообще не требует составления дифференциального уравнения движения.

Полагая, что движение, определяемое координатой y , является гармоническим и описывается выражением $y = a \sin(pt + \alpha)$, можно определить скорость

$$\dot{y} = ap \cos(pt + \alpha).$$

Максимальная потенциальная энергия $\Pi_{\max}$ системы достигается в моменты наибольшего отклонения системы от положения

равновесия и определяется этим отклонением, равным a . Соответственно максимальная кинетическая энергия $T_{\max}$ определяется наибольшей скоростью $v_{\max} = ar$, которая достигается в моменты прохождения системы через положение равновесия.

Если отсчет потенциальной энергии вести от положения равновесия, то должно выполняться равенство $\Pi_{\max} = T_{\max}$, из которого определяется собственная частота p .

Приведем два случая определения собственной частоты, в которых наиболее удобен энергетический способ. В первом случае восстанавливающая сила создается упругой пружиной, во втором — силой тяжести.

Рассмотрим колебания массивного цилиндра, который может без скольжения катиться по горизонтальной плоскости (см. систему XIII на рис. I.2). Пусть радиус цилиндра r , его масса m , радиус инерции ρ и коэффициент жесткости пружины c .

Максимальная потенциальная энергия пружины

$$\Pi_{\max} = ca^2/2. \quad (\text{II.18})$$

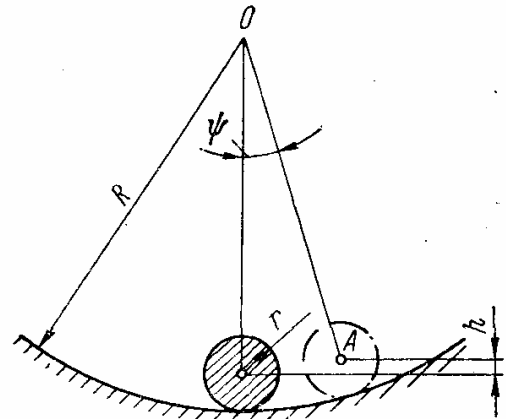


Рис. II.10

Кинетическую энергию следует вычислять с учетом вращения цилиндра:

$$T_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} + \frac{m\rho^2\omega_{\max}^2}{2}.$$

Заменяя

$$\omega_{\max} = v_{\max}/r; \quad v_{\max} = ar,$$

получим

$$T_{\max} = \frac{ma^2p^2}{2} + \frac{ma^2p^2\rho^2}{2r^2} = \frac{ma^2p^2}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right). \quad (\text{II.19})$$

Приравняв выражения (II.18) и (II.19), находим собственную частоту колебаний

$$p = \sqrt{\frac{c}{m \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)}}. \quad (\text{II.20})$$

Из формулы (II.20) видно, что вследствие инерции вращения цилиндра собственная частота колебаний уменьшается. Если цилиндр однородный, то $\rho^2 = 0,5r^2$ и собственная частота на 18% меньше, чем в случае поступательного движения такого же груза без вращения.

Теперь обратимся к рис. II.10, где изображен массивный цилиндр, который может свободно катиться по цилиндрической

поверхности радиуса R ; радиус цилиндра r . Пусть при колебаниях ψ — наибольший угол отклонения отрезка OA , проведенного из центра кривизны O в центр сечения цилиндра A . Тогда наибольшая высота, на которую поднимается центр тяжести цилиндра,

$$h = (R - r) (1 - \cos \psi).$$

При малых углах ψ можно принять $\cos \psi \approx 1 - \psi^2/2$, т. е. $h = (R - r) \psi^2/2$, и наибольшая потенциальная энергия

$$\Pi_{\max} = \frac{G(R-r)}{2} \psi^2, \quad (\text{II.21})$$

где G — вес цилиндра.

Для определения максимальной кинетической энергии прежде всего найдем максимальную скорость $v_{\max}$ центра A цилиндра и соответствующую ей максимальную угловую скорость вращения цилиндра $\omega_{\max}$:

$$v_{\max} = \psi p (R - r); \quad \omega_{\max} = \frac{v_{\max}}{r} = \frac{\psi p (R - r)}{r}.$$

Следовательно,

$$T_{\max} = \frac{G}{2g} [\psi p (R - r)]^2 + \frac{G\rho^2}{2g} \left[\frac{\psi p (R - r)}{r} \right]^2, \quad (\text{II.22})$$

где ρ — радиус инерции цилиндра относительно его оси.

Приравняв выражения (II.21) и (II.22), получим собственную частоту

$$p = \sqrt{\frac{g}{(R - r) \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right)}}.$$

Если цилиндр однородный, то $\rho^2 = 0,5r^2$ и соответственно

$$p = \sqrt{\frac{2g}{3(R - r)}}.$$

За счет изменения разности $R - r$ частота может изменяться от наименьшего значения $p = \sqrt{2g/(3R)}$ (при исчезающе малом радиусе цилиндра) до бесконечности.

Формула Рэлея. Как уже указывалось, задавая определенную форму колебаний системы с распределенными массой и упругостью, мы приписываем ей тем самым одну степень свободы. Для определения собственной частоты колебаний такой схематизированной системы также весьма удобен энергетический способ (называемый в этом случае методом Рэлея). Разумеется, что при этом результаты будут зависеть от выбора формы колебаний, и решение уже не будет обладать той однозначностью, как это имело место в двух предыдущих примерах.

Рассмотрим наиболее общую форму метода Рэля применительно к задаче о поперечных колебаниях балки. Положим, что перемещения точек оси балки описываются законом

$$y(x, t) = f(x) \sin(pt + \alpha), \quad (\text{II.23})$$

т. е. что колебания всех точек оси происходят с одной и той же частотой и находятся в одной фазе (т. е. все точки одновременно проходят через положение равновесия, одновременно достигают наибольших отклонений и т. д.).

Функция $f(x)$ представляет собой форму колебаний, т. е. описывает конфигурацию изогнутой оси в момент, когда прогибы достигают максимума $y_{\max}(x) = f(x)$.

Соответственно закону (II.23) скорости точек оси балки определяются зависимостью

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = pf(x) \cos(pt + \alpha),$$

а максимальные скорости (в момент прохождения системы через состояние равновесия) — зависимостью

$$v_{\max}(x) = pf(x).$$

Максимальная потенциальная энергия

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (y''_{\max})^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (f'')^2 dx. \quad (\text{II.24})$$

Максимальная кинетическая энергия

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l m v_{\max}^2 dx = \frac{p^2}{2} \int_0^l m f^2 dx, \quad (\text{II.25})$$

где $m = m(x)$ — интенсивность распределенной массы балки.

Приравняв выражения (II.24) и (II.25), получим основную формулу Рэля для случая поперечных колебаний

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dx}{\int_0^l m f^2 dx}. \quad (\text{II.26})$$

Если кроме распределенной массы с осью балки в сечениях x_i связаны также сосредоточенные грузы с массами m_i , то в выражении кинетической энергии появятся слагаемые типа $m_i \dot{f}_i^2 p^2 / 2$,

где f_i — значение функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_i ; соответственно формула (II.26) приобретает вид

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dx}{\int_0^l m f^2 dx + \sum m_i f_i^2}. \quad (\text{II.27})$$

Приведенные варианты записи формулы Рэлея дают точные результаты при условии, что в формулу подставляется истинная форма колебаний $f(x)$. Но эта форма заранее неизвестна, и поэтому при практическом использовании формулы Рэлея задаются формой колебаний, что и вносит некоторую неточность в результаты.

Рэлей не только предложил описанный способ, но и доказал важную теорему: получаемое по этому способу приближенное значение собственной частоты всегда выше истинного значения или равно ему. Эта теорема позволяет, по крайней мере, всегда судить о знаке ошибки приближенного решения.

При выборе функции $f(x)$ ее масштаб вообще никакой роли не играет; умножение $f(x)$ на любое число не изменит результата, как видно из структуры формулы (II.26). Необходимо

стремиться лишь к тому, чтобы возможно лучше отразить ожидаемую форму колебаний и, во всяком случае, обеспечить выполнение граничных условий, соответствующих заданным условиям закрепления концов балки.

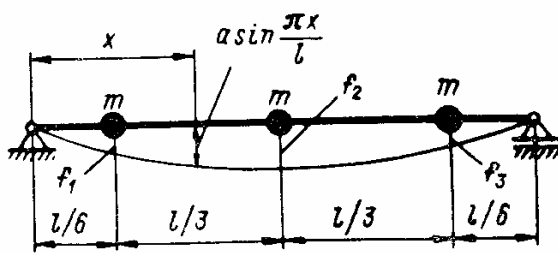


Рис. II.11

Пример 2. Определить собственную частоту колебаний двухопорной безынерционной балки, несущей три одинаковых груза, масса каждого груза равна m (рис. II.11).

Зададимся формой колебаний в виде

$$f = a \sin \frac{\pi x}{l};$$

это выражение удовлетворяет всем граничным условиям ($f = 0$ и $f'' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$) и описывает симметричную кривую. Величина a остается неопределенной — она войдет множителем как в числитель, так и в знаменатель выражения (II.27) и сократится, не повлияв на результаты вычислений.

Находим

$$f'' = -a \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}; \quad (f'')^2 = a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l}.$$

Числитель в формуле (II.27) равен

$$\int_0^l EJ (f'')^2 dx = \frac{a^2 \pi^4 EJ}{2l^3}.$$

Для нахождения знаменателя вычисляем прогибы под грузами:

$$f_1 = f_3 = a \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{6} = \frac{a}{2}; \quad f_2 = a \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = a.$$

Знаменатель в формуле (II.27) состоит из одного второго слагаемого

$$\sum m_i f_i^2 = m \left(\frac{a}{2} \right)^2 + ma^2 + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} ma^2.$$

Квадрат собственной частоты по формуле (II.27)

$$p^2 = \frac{\pi^4 EJ}{3ml^3},$$

откуда

$$p = \frac{5,696}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Отметим, что этот результат практически совпадает с точным значением

$$p = \frac{5,692}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Весьма распространен особый прием использования формулы Рэлея, который состоит в том, что при решении задаются не функцией $f(x)$, а некоторой фиктивной нагрузкой $q(x)$; в формулу Рэлея подставляется функция статического изгиба, вызываемого этой нагрузкой. Достоинство этого приема состоит в автоматическом удовлетворении граничных условий и, кроме того, в том, что вычисление наибольшей потенциальной энергии по формуле (II.24) можно заменить более простым вычислением работы фиктивной нагрузки $q(x)$:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l qf \, dx, \quad (\text{II.28})$$

так как величины W и $\Pi_{\max}$ равны. При этом формула (II.27) приобретает вид

$$p^2 = \frac{\int_0^l qf \, dx}{\int_0^l mf^2 \, dx + \sum m_i f_i^2}. \quad (\text{II.29})$$

Конечно, в состав фиктивной нагрузки можно включать также сосредоточенные силы P_i ; тогда формула (II.29) запишется так:

$$p^2 = \frac{\int_0^l qf \, dx + \sum P_i f_i}{\int_0^l mf^2 \, dx + \sum m_i f_i^2}. \quad (\text{II.30})$$

Следует иметь в виду, что величины m_i и P_i не связаны одна с другой; первые представляют собой массы фактически имеющих сосредоточенных грузов, а вторые — силы, входящие в состав «придуманной» нагрузки; точно так же не связаны между собой функции $m(x)$ и $q(x)$.

Последние варианты записи формулы Рэлея принципиально равноценны формуле (II.27), но из-за отсутствия операции дифференцирования обычно дают бóльшую точность.

Чаще всего фиктивную нагрузку, определяющую форму колебаний, принимают согласно одному из следующих вариантов:

1) сосредоточенная сила, приложенная в какой-либо характерной точке оси балки;

2) фактически действующие силы веса балки.

Остановимся на первом варианте. Пусть выбрана некоторая характерная точка и f_0 — прогиб этой точки («точки приведения»); тогда максимальная потенциальная энергия изгиба может быть выражена формулой

$$\Pi_{\max} = cf_0^2/2,$$

где c — коэффициент жесткости (соответствующий избранной точке приведения).

Следовательно, вместо формулы (II.29) можно записать

$$p^2 = \frac{cf_0^2}{\int_0^l mf^2 dx}.$$

Обозначим

$$m_0 = \left(\int_0^l mf^2 dx \right) / f_0^2, \quad (\text{II.31})$$

тогда получим знакомую запись:

$$p^2 = c/m_0, \quad (\text{II.32})$$

как если бы в точке приведения была сосредоточена масса m_0 ; последнюю можно назвать *приведенной массой*.

Если кроме распределенной массы имеются еще сосредоточенные грузы, то выражение для приведенной массы приобретает вид

$$m_0 = \left(\int_0^l mf^2 dx + \sum m_i f_i^2 \right) / f_0^2. \quad (\text{II.33})$$

Определив по формуле (II.31) или (II.33) приведенную массу, по формуле (II.32) находим собственную частоту колебаний.

Конечно, в выражениях (II.31) и (II.33) $f(x)$ уже нельзя выбирать произвольно; $f(x)$ является функцией, описывающей прогибы оси от сосредоточенной силы (масштаб этой функции роли не играет, как это видно из структуры формулы для m_0).

Заметим, что в отличие от формулы (II.27) или (II.30) по формуле (II.32) никогда не может получиться точного решения, так как кривая изгиба от сосредоточенной силы не совпадает с истинной формой изгиба при колебаниях.

Пример 3. Определить приведенную массу для балки, изображенной на рис. II.11, а затем найти собственную частоту колебаний. За точку приведения принять середину балки.

В данном случае формула (II.33) приобретает вид

$$m_0 = \frac{\sum m_i f_i^2}{f_0^2} = m \frac{\sum f_i^2}{f_0^2}. \quad (\text{II.34})$$

По схеме на рис. II.12 находим $f_1 = f_3 = \frac{39}{81} f_0$; $f_2 = f_0$ (величина силы и масштаб f_0 не имеют значения).

По формуле (II.34) получаем

$$m_0 = m \left(\frac{39}{81} \right)^2 2 + m = 1,4636 m.$$

Коэффициент жесткости системы (см. схему 5 в табл. I)

$$c = 48EJ/l^3.$$

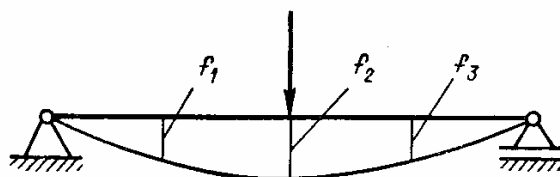


Рис. II.12

Квадрат собственной частоты по формуле (II.32)

$$p^2 = \frac{48EJ}{1,4636ml^3} = 32,79 \frac{EJ}{ml^3}.$$

Следовательно,

$$p = \frac{5,726}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Лучшие результаты получаются, если воспользоваться вторым вариантом и принять в формуле (II.30) за фиктивную нагрузку вес балки $q(x) = m(x)g$, а вместо сил P_i — веса $m_i g$ сосредоточенных грузов. Этот вариант соответствует предположению о том, что форма колебаний совпадает с формой статического изгиба, вызываемого весом самого стержня и связанных с ним грузов. При этом формула (II.30) записывается в виде

$$p^2 = g \frac{\int_0^l m f dx + \sum m_i f_i}{\int_0^l m f^2 dx + \sum m_i f_i^2}. \quad (\text{II.35})$$

При пользовании этой формулой функцию $f(x)$ уже не выбирают; она представляет собой вполне определенную кривую статического изгиба, поэтому последняя редакция формулы Рэлея обладает полной определенностью, но, как и формула (II.32), никогда не может дать точного значения частоты.

Пример 4. Определить собственную частоту по формуле Рэлея (II.35) для балки, изображенной на рис. II.11.

В данном случае формула Рэлея имеет вид

$$p^2 = g \frac{\sum m_i f_i}{\sum m_i f_i^2} = g \frac{\sum f_i}{\sum f_i^2}.$$

Найдя статические прогибы под грузами (рис. II.13)

$$f_1 = f_3 = \frac{mgl^3}{48EJ}; \quad f_2 = \frac{53mgl^3}{1296EJ},$$

вычислим числитель и знаменатель выражения для p^2 :

$$\sum f_i = \frac{mgl^3}{EJ} \left(\frac{1}{48} + \frac{53}{1296} + \frac{1}{48} \right) = \frac{107mgl^3}{1296EJ};$$

$$\sum f_i^2 = \left(\frac{mgl^3}{EJ} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{48} \right)^2 + \left(\frac{53}{1296} \right)^2 + \left(\frac{1}{48} \right)^2 \right] = \frac{4267m^2g^2l^6}{1296^2E^2J^2}.$$

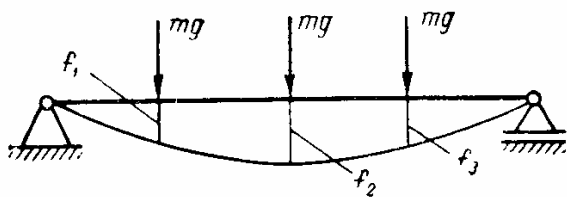


Рис. II.13

Квадрат собственной частоты

$$p^2 = \frac{107 \cdot 1296}{4267} \frac{EJ}{ml^3},$$

откуда

$$p = \frac{5,701}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Формула Граммеля. Полезное видоизменение энергетического метода было предложено Граммелем в следующем виде. Пусть $f(x)$ — задаваемая форма свободных колебаний стержня; тогда интенсивность соответствующих максимальных сил инерции определяется выражением mp^2f , где, по-прежнему, $m = m(x)$ — интенсивность распределенной массы.

Запишем выражение наибольшей потенциальной энергии изгиба через изгибающие моменты, вызываемые максимальными силами инерции:

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_{\text{изг}}^2 dx}{EJ}. \quad (\text{II.36})$$

Здесь $M_{\text{изг}} = M_{\text{изг}}(x)$ — изгибающие моменты, вызываемые нагрузкой mp^2f . Обозначим через $\bar{M}_{\text{изг}}$ изгибающий момент, вызываемый условной нагрузкой mf (т. е. нагрузкой, в p^2 раз меньшей, чем силы инерции); тогда $M_{\text{изг}} = p^2 \bar{M}_{\text{изг}}$ и выражение (II.32) можно записать в виде

$$\Pi_{\max} = \frac{p^4}{2} \int_0^l \frac{\bar{M}_{\text{изг}}^2 dx}{EJ}. \quad (\text{II.37})$$

Наибольшая кинетическая энергия определяется, как и выше, выражением

$$T_{\max} = \frac{p^2}{2} \int_0^l mf^2 dx. \quad (\text{II.38})$$

Приравнивая выражения (II.37) и (II.38), приходим к формуле Грэмеля

$$p^2 = \frac{\int_0^l m f^2 dx}{\int_0^l \frac{\bar{M}_{изг}^2}{EJ} dx}. \quad (\text{II.39})$$

Для вычислений по этой формуле необходимо прежде всего задаться подходящей функцией $f(x)$, стремясь возможно лучше отразить ожидаемую форму свободных колебаний и заботясь об удовлетворении граничных условий. После этого путем умножения функции $f(x)$ на известную по условиям задачи функцию $m(x)$ определяется условная нагрузка mf , а затем известными методами сопротивления материалов находятся вызываемые указанной условной нагрузкой изгибающие моменты $\bar{M}_{изг}$. Теперь остается вычислить выражения, входящие в числитель и знаменатель формулы (II.39).

Формула Грэмеля требует выполнения несколько большего объема выкладок, чем формула Рэлея, но зато дает лучшее приближение при одной и той же выбранной функции $f(x)$.

В этом можно убедиться на простейшем примере свободных колебаний консольно закрепленного стержня постоянного сечения. Пусть левый конец стержня закреплен (совместим с ним начало координат), а правый — свободный. Примем, что форма колебаний описывается функцией $f(x) = ax^2$, где x — координата сечения; a — постоянная (ее значение несущественно, так как в окончательных выражениях сокращается). Эта функция удовлетворяет геометрическим краевым условиям и может быть положена в основу вычислений как по формуле Рэлея, так и по формуле Грэмеля.

Для того чтобы воспользоваться формулой Рэлея, предварительно находим:

$$\int_0^l EJ (f'')^2 dx = 4a^2 l EJ; \quad \int_0^l m f^2 dx = \frac{ma^2 l^5}{5}. \quad (\text{II.40})$$

Теперь по формуле (II.26) определяем квадрат собственной частоты колебаний

$$p^2 = \frac{20EJ}{ml^4}.$$

Заметим, что этот результат заметно отличается от точного значения

$$p^2 = \frac{12,36EJ}{ml^4}.$$

Для вычисления собственной частоты по формуле Граммеля принимаем условную нагрузку в виде max^2 и находим соответствующие изгибающие моменты от этой нагрузки

$$\bar{M}_{изг} = \frac{ma}{12} (x^4 - 4xl^3 + 3l^4).$$

Теперь определяем знаменатель выражения (II.39):

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_{изг}^2 dx}{EJ} = \frac{m^2 a^2 l^9}{62,31 EJ}. \quad (II.41)$$

Числитель указанного выражения нами уже найден в виде (II.40). Разделив второй из результатов (II.40) на (II.41), находим

$$p^2 = \frac{12,46 EJ}{ml^4},$$

что значительно ближе к точному значению, чем результат, полученный по формуле Рэлея.

Способ последовательных приближений определения собственной частоты

Для уточнения приближенных значений собственной частоты применяется способ последовательных приближений. Остановимся на случае изгибных колебаний и положим, что имеется балка, несущая n масс $m_1, m_2, \dots, m_n$. Будем исходить из того, что закон колебаний любой точки имеет вид

$$y_i = a_i \sin (pt + \alpha).$$

Соответствующие силы инерции

$$-m_i \ddot{y}_i = m_i a_i p^2 \sin (pt + \alpha).$$

В крайнем отклоненном положении эти силы примут значения

$$F_i = m_i a_i p^2.$$

Состояние крайнего отклонения, когда скорости равны нулю, можно рассматривать как результат статического действия сил F_i . Если бы эти силы были известны, можно было бы совершенно точно найти форму колебаний, а затем и собственную частоту. Однако эти силы, как видно из формулы, сами зависят от частоты и заранее неизвестны; однако решение задачи возможно путем последовательных приближений по одной из следующих схем.

Первая схема вычислений. Принимая кривую статического изгиба за форму колебаний, находим в первом приближении

по формуле (II.30) собственную частоту p_1 . Затем подсчитываем силы инерции в первом приближении:

$$F_{iI} = m_i a_{iI} p_1^2.$$

Принимая их за нагрузку, во втором приближении можно определить соответствующие перемещения a_{iII} , а затем по формуле (II.30) находим второе приближение для частоты

$$p_{II}^2 = \frac{\sum F_{iI} a_{iII}}{\sum m_i a_{iII}^2}.$$

Так как все силы F_{iI} могут быть одновременно изменены в любое число раз (это не влияет на значение p^2), то их можно принять равными $m_i a_{iI}$, опуская общий для них множитель p_1^2 . Затем процесс повторяем вновь, определяя силы инерции во втором приближении: $F_{iII} = m_i a_{iII}$ (величина p_{II}^2 , как и раньше, может быть опущена), затем соответствующие перемещения a_{iIII} и третье приближение для частоты

$$p_{III}^2 = \frac{\sum F_{iII} a_{iIII}}{\sum m_i a_{iIII}^2}.$$

Выкладки такого рода продолжаются до тех пор, пока два последовательных значения p не окажутся достаточно близкими.

Вторая схема вычислений. Другой вариант, предложенный Стодолой, состоит в следующем. Задаемся в первом приближении для прогибов балки значениями a_{iI} и записываем соответствующие силы инерции

$$F_{iI} = m_i a_{iI} p_1^2,$$

считая величину p_1^2 пока неизвестной. Находим прогибы a_{iII} от сил F_{iI} , уменьшенных в p_1^2 раз (т. е. от сил $m_i a_{iI}$); действительные прогибы от сил F_{iI} будут в p_1^2 раз больше, т. е. составят $p_1^2 a_{iII}$. Очевидно, что кривая, определяемая прогибами a_{iII} , будет подобна исходной кривой с прогибами a_{iI} при точном задании формы последней; в этом случае должно выполняться равенство $a_{iI} = p_1^2 a_{iII}$, откуда

$$p_1^2 = a_{iI} / a_{iII}.$$

Однако, поскольку форма колебаний была назначена приближенно, результат окажется также приближенным, причем отношение a_{iI} / a_{iII} будет различным для разных точек i . Поэтому за приближенное значение квадрата частоты обычно принимают значение, соответствующее сечению с максимальным прогибом:

$$p_1^2 = a_{I \max} / a_{II \max}.$$

Таким образом, приближенное значение квадрата частоты равно отношению характерных ординат двух кривых: кривой

прогибов a_{iI} , которой следует задаться, и кривой прогибов a_{iII} , вычисляемой от нагрузок $m_i a_{iI}$. Если отношения a_{iI}/a_{iII} практически постоянны для всех точек i , то можно удовлетвориться полученным результатом. В случае, когда эти отношения заметно зависят от i , нужно строить следующее приближение: принимая форму a_{iII} за исходную, определить силы $m_i a_{iII}$, а затем прогибы a_{iIII} . Тогда во втором приближении

$$p_{iI}^2 = a_{iII \max} / a_{iIII \max}.$$

Процесс продолжают до тех пор, пока отношения $a_{k \max} / a_{(k+1) \max}$ не станут с достаточной точностью одинаковыми.

Способы разложения масс и восстанавливающих сил

В противоположность способу Рэля изложенные ниже способы дают заниженные значения частоты. Поэтому они полезны в комбинации с энергетическим способом; при этом для истинного значения частоты получают двусторонние оценки.

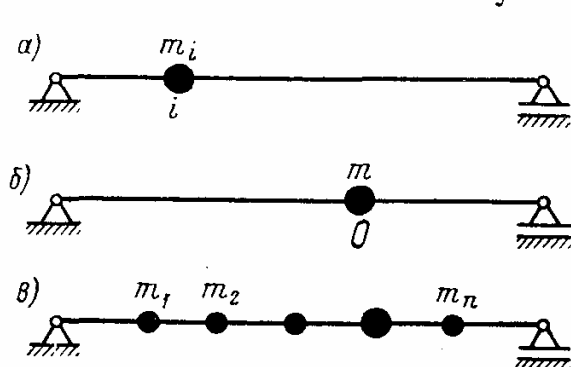


Рис. II.14

Способ разложения масс. Положим, что в некоторой точке i упругой системы находится сосредоточенная масса m_i (рис. II.14, а) и собственная частота системы равна

$$p_i = \sqrt{c_i / m_i}.$$

С некоторой другой точкой O , избранной за точку приведения (рис. II.14, б), мысленно свяжем иную массу m с таким расчетом, чтобы собственная частота новой системы $\sqrt{c_0 / m}$ оказалась равной частоте p_i . Приравнявая частоты, находим приведенную массу

$$m = \frac{c_0}{c_i} m_i. \quad (\text{II.42})$$

Таким образом, перенос массы m_i в точку O не вызовет изменения частоты, если приводимую массу умножить на коэффициент приведения c_0 / c_i .

Распространим этот прием на случай, когда система содержит несколько масс: $m_1, m_2, \dots, m_n$ (рис. II.14, в). Для каждой из этих масс будем пользоваться соответствующим коэффициентом приведения, как это видно из формулы (II.42). Общая приведенная масса

$$m_0 = \frac{c_0}{c_1} m_1 + \frac{c_0}{c_2} m_2 + \dots + \frac{c_0}{c_n} m_n. \quad (\text{II.43})$$

Разделив обе части полученного равенства на c_0 и заметив, что $m_0/c_0 = 1/p^2$, где p^2 — квадрат частоты приведенной системы, получим приближенную формулу Донкерлея

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_n^2}. \quad (\text{II.44})$$

Хотя законность переноса одной массы соответственно формуле (II.42) сомнений не вызывает, однако распространение этого приема одновременно на несколько масс не строго и основано на предположении, что взаимное влияние этих масс отсутствует. Поэтому частота p^2 , определяемая по формуле (II.44), не является точным решением задачи.

Однако эта формула, будучи весьма простой, в большинстве случаев дает приемлемую точность. Для определения собственной частоты необходимо лишь предварительное вычисление частот $p_1, p_2, \dots, p_n$, каждая из которых относится к частной системе с одной степенью свободы; при этом не требуется выбирать и фиксировать точку приведения, чем обеспечивается полная определенность решения.

В случае, когда вместо сосредоточенных масс имеется распределенная масса $m = m(x)$, формула (II.43) приобретает вид

$$m_0 = c_0 \int_0^l \frac{m(x) dx}{c(x)}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{p^2} = \int_0^l \frac{m(x) dx}{c(x)},$$

где $c(x)$ — коэффициент жесткости, соответствующий точке с абсциссой x .

Опираясь на теорему Рэлея, можно убедиться, что формула Донкерлея дает всегда заниженное значение частоты.

Рассмотрим первую частную систему, содержащую единственную массу m_1 , и определим собственную частоту по формуле (II.27). Если в эту формулу подставить функцию, описывающую форму колебаний одномассовой системы, то получится точное значение частоты p_1 . Положим, однако, что в эту формулу подставляется функция, соответствующая форме колебаний заданной многомассовой системы; тогда результат, вычисленный по этой формуле, превосходит истинное значение квадрата частоты p_1 :

$$\left[\int_0^l EJ (f'')^2 dx \right] / (m_1 a_1^2) > p_1^2.$$

Далее можно записать аналогичные неравенства для остальных частных систем:

$$\left[\int_0^l EJ (f'')^2 dx \right] / (m_2 a_2^2) > p_2^2; \quad \left[\int_0^l EJ (f'')^2 dx \right] / (m_3 a_3^2) > p_3^2; \quad \dots$$

Обращая дроби, находим

$$\frac{m_1 a_1^2}{\int_0^l EJ (f'')^2 dx} < \frac{1}{p_1^2}; \quad \frac{m_2 a_2^2}{\int_0^l EJ (f'')^2 dx} < \frac{1}{p_2^2}; \quad \dots$$

Сложим левые и правые части полученных неравенств:

$$\frac{\sum m_i a_i^2}{\int_0^l EJ (f'')^2 dx} < \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_n^2}.$$

Так как $f(x)$ описывает истинную форму колебаний заданной многомассовой системы, то согласно формуле (II.27) левая часть точно равна $1/p_0^2$, где p_0 — истинная собственная частота. Следовательно,

$$\frac{1}{p_0^2} < \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_n^2}.$$

Сравнивая это неравенство с формулой (II.44), видим, что $p < p_0$, как и утверждалось выше.

Пример 5. Найти по формуле Донкерлея собственную частоту для балки, изображенной на рис. II.11.

Рассмотрим данную систему трижды, учитывая каждый раз поочередно одну из масс. Для схемы 1 (см. табл. I) находим

$$p_1^2 = \frac{3 \cdot 1296 EJ}{25 ml^3} = 155,5 \frac{EJ}{ml^3}.$$

Тот же результат получится и для схемы 3:

$$p_3^2 = 155,5 \frac{EJ}{ml^3}.$$

Для схемы 2

$$p_2^2 = \frac{48 EJ}{ml^3}.$$

По формуле (II.44) вычисляем величину, обратную квадрату частоты:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{ml^3}{155,5 EJ} \cdot 2 + \frac{ml^3}{48 EJ} = 0,03368 \frac{ml^3}{EJ}.$$

Следовательно,

$$p = \sqrt{\frac{EJ}{0,03368 ml^3}} = \frac{5,449}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Этот результат отличается от точного на 5,5%, причем ошибка получается другого знака, чем по формуле Рэлея.

Основываясь на результатах двух заведомо приближенных расчетов по формулам (II.27) и (II.44), можно утверждать, что истинное значение частоты заключено в сравнительно узких пределах:

$$\frac{5,449}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}} < p < \frac{5,696}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Способ разложения восстанавливающих сил. Способ разложения восстанавливающих сил был предложен для случая поперечных колебаний балки (рис. II.15), на которую действует распределенная нагрузка q (такая нагрузка, например, возникает вследствие действия центробежных сил в турбинной лопатке, лопасти воздушного винта и т. д.).

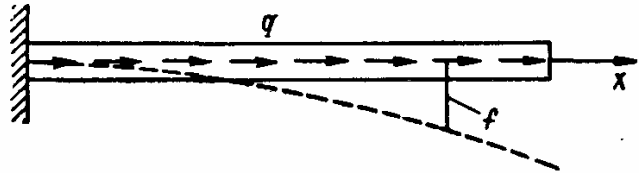


Рис. II.15

В этих случаях потенциальная энергия обусловлена не только деформацией изгиба балки, но и продольными усилиями (рис. II.15):

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l [EJ (f'')^2 + N (f')^2] dx,$$

где $N = N(x) = \int_x^l q dx$ — продольное усилие в сечении балки.

Приближенное значение собственной частоты можно получить энергетическим способом по формуле, подобной формуле (II.26):

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dx}{\int_0^l m f^2 dx} + \frac{\int_0^l N (f')^2 dx}{\int_0^l m f^2 dx}. \quad (\text{II.45})$$

Подставив сюда подходящее выражение для формы колебаний, получим приближенное завышенное значение частоты. Однако формула (II.45) позволяет построить иное приближенное решение, дающее заниженное значение частоты.

Рассмотрим первое слагаемое правой части формулы (II.45). Оно определяет квадрат частоты колебаний в балке без продольной нагрузки q . Если в это выражение подставить функцию, описывающую истинную форму колебаний балки, подверженной действию продольной нагрузки, то результат, как и всегда при пользовании энергетическим способом, будет завышенным:

$$\left[\int_0^l EJ (f'')^2 dx \right] / \left(\int_0^l m f^2 dx \right) > p_1^2. \quad (\text{II.46})$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части формулы (II.45), которое соответствует случаю, когда балка не обладает изгибной жесткостью; это слагаемое определяет квадрат частоты колебаний гибкой нерастяжимой нити. Используя точную форму колебаний, получим точное значение квадрата частоты колебаний нити p_2^2 . При всякой другой форме $f(x)$ частота получится с завышением; если в качестве такой формы снова принять истинную форму колебаний заданной балки, то будет выполняться неравенство

$$\left[\int_0^l N (f')^2 dx \right] / \left(\int_0^l m f^2 dx \right) > p_2^2. \quad (\text{II.47})$$

Подчеркнем, что в неравенствах (II.46) и (II.47) $f(x)$ — одна и та же функция, описывающая истинную форму колебаний в заданной системе. Складывая левые и правые части обоих неравенств, получим

$$\left[\int_0^l EJ (f'')^2 dx + \int_0^l N (f')^2 dx \right] / \left(\int_0^l m f^2 dx \right) > p_1^2 + p_2^2.$$

Согласно формуле (II.45) левая часть неравенства равна квадрату истинной частоты p_0^2 , поскольку $f(x)$ есть истинная форма колебаний, поэтому $p_0^2 > p_1^2 + p_2^2$. Сумму $p_1^2 + p_2^2 = p^2$ можно принять за приближенное значение квадрата частоты; как видно, она меньше истинного значения.

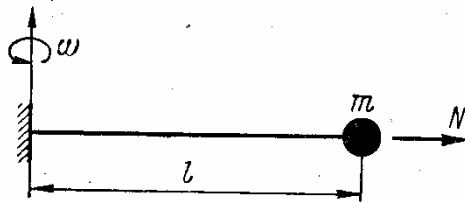


Рис. II.16

Таким образом, вычисление собственной частоты растянутой балки требует предварительного вычисления частот для двух частных систем: нерастяжимой балки и гибкой нити. Первая задача может

быть решена любым из изложенных способов. Решение второй задачи очень просто, если учесть, что точной формой колебаний нити является прямая линия $f(x) = a \frac{x}{l}$, где a — перемещение конца нити. Тогда $f'(x) = a/l$ и

$$p_2^2 = \frac{\int_0^l N \left(\frac{a}{l} \right)^2 dx}{\int_0^l m a^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 dx} = \frac{\int_0^l N dx}{\int_0^l m x^2 dx}.$$

Если продольные силы N появляются в результате вращения балки с постоянным распределением массы (рис. II.15), то

$$q = m\omega^2 x; \quad N = \int_x^l q dx = \frac{m\omega^2}{2} (l^2 - x^2);$$

$$\int_0^l N dx = \frac{m\omega^2 l^3}{3}; \quad \int_0^l mx^2 dx = \frac{ml^3}{3},$$

где ω — угловая скорость вращения.

Следовательно, $p_2^2 = \omega^2$, это приводит к формуле Лэмба—Саусвелла

$$p^2 = p_1^2 + \omega^2, \quad (\text{II.48})$$

т. е. квадрат собственной частоты вращающейся балки приближенно (с приуменьшением) равен сумме квадратов собственной частоты, вычисленной без учета вращения, и угловой скорости вращения.

Эта формула справедлива и для случая, показанного на рис. II.16, так как

$$p_2^2 = \left[\int_0^l N \left(\frac{a}{l} \right)^2 dx \right] / (ma^2) = \frac{N}{ml},$$

но $N = m\omega^2 l$, что опять приводит к формуле (II.48).

Пример 6. Сравнить результаты, получаемые для схемы, приведенной на рис. II.16, по формуле Лэмба—Саусвелла, энергетическим способом и при помощи формулы для коэффициента жесткости (см. схему 10 в табл. I).

По формуле Лэмба—Саусвелла находим

$$p^2 = \frac{3EJ}{ml^3} + \omega^2.$$

Воспользуемся энергетическим способом, приняв в качестве $f(x)$ функцию, описывающую прогибы от равномерно распределенной нагрузки:

$$f(x) = f_0 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right].$$

Тогда получим

$$\int_0^l EJ (f'')^2 dx = \frac{3EJ f_0^2}{l^3};$$

$$\int_0^l N (f')^2 dx = m\omega^2 l \int_0^l (f')^2 dx = 1,2 m\omega^2 f_0^2.$$

По формуле (II.45) находим (с завышением)

$$p^2 = \left(\frac{3EJ f_0^2}{l^3} + 1,2 m\omega^2 f_0^2 \right) / (m f_0^2) = \frac{3EJ}{ml^3} + 1,2 \omega^2.$$

Истинное значение собственной частоты располагается в довольно узком интервале

$$\frac{3EJ}{ml^3} + \omega^2 < p_0^2 < \frac{3EJ}{ml^3} + 1,2\omega^2.$$

Точное решение задачи может быть получено при помощи формулы для коэффициента жесткости (табл. 1, схема 11)

$$c = \frac{\alpha^3 EJ \operatorname{ch} \alpha l}{\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l},$$

в которую следует подставить

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}} = \omega \sqrt{\frac{ml}{EJ}}.$$

После этого собственная частота определяется по формуле $p_0 = c/m$.

5. ВЛИЯНИЕ СИЛ НЕУПРУГОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Общие сведения

Выше считалось, что рассеяния энергии при колебаниях не происходит, и был установлен незатухающий характер процесса свободных колебаний. Опыт, однако, показывает, что колебания упругой системы, вызванные однократным возмущением, постепенно затухают. Причина затухания состоит в том, что при свободных колебаниях кроме упругих сил развиваются диссипативные силы, т. е. силы неупругого сопротивления, связанные с неизбежным трением в кинематических парах, с трением о среду, в которой происходят колебания, а также с внутренним трением в материале колеблющейся конструкции. Особенно значительны силы неупругого сопротивления, возникающие в различного рода демпферах или амортизаторах.

На преодоление этих неупругих сопротивлений непрерывно в необратимой форме расходуется работа, вследствие чего постепенно убывает общий запас энергии и уменьшаются пиковые значения колебательного процесса.

В зависимости от природы сил неупругого сопротивления для их описания пользуются следующими упрощенными представлениями.

Вязкое сопротивление. Так называют сопротивление, пропорциональное скорости. Если, как обычно, обозначить скорость через v , то сила вязкого сопротивления описывается выражением

$$R = kv, \quad (\text{II.49})$$

где k — коэффициент пропорциональности, а под R подразумевается сила, действующая на демпфер; вязкая реакция демпфера на колеблющееся тело имеет противоположное направление.

Такова, например, система с гидравлическим демпфером (рис. II.17), который создает сопротивление движению поршня, зависящее не от перемещения (как это свойственно упругим связям), а от скорости и пропорциональное ее первой степени. Подобные устройства применяются, например, в конструкциях автомобильной подвески. Гидравлический демпфер состоит из

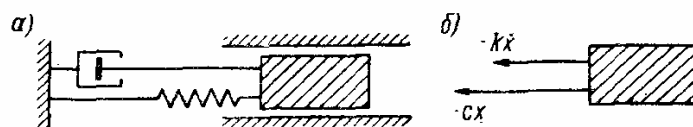


Рис. II.17

одного или нескольких цилиндров с поршнями или из камеры, в которой может вращаться крыльчатка. Цилиндры и камера наполнены амортизационной жидкостью. При движении поршней или крыльчатки эта жидкость продавливается через калиброванные отверстия; этим создается сопротивление, по характеру близкое к вязкому.

Сопротивление, пропорциональное n -й степени скорости. В ряде технических устройств, в частности в гидравлических амортизаторах, силы неупругого сопротивления нелинейно зависят от скорости. Такие силы записываются в виде

$$R = kv |v|^{n-1}, \quad (\text{II.50})$$

где k и n — постоянные.

Кулоново трение. В этом случае $n = 0$, т. е. силу неупругого сопротивления принимают постоянной по величине, но направленной противоположно скорости:

$$R = kv |v|^{-1}.$$

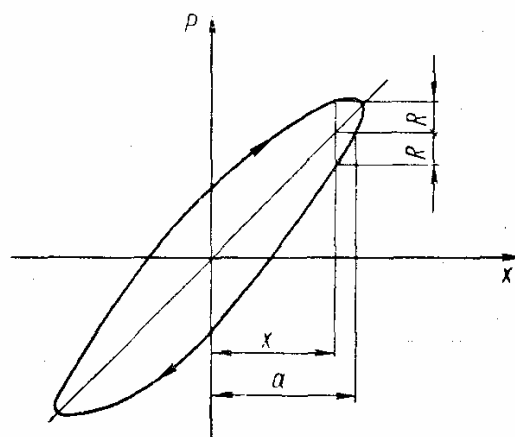


Рис. II.18

Гистерезис. Вследствие внутреннего трения в материале при его циклическом деформировании наблюдаются некоторые отклонения от закона Гука (даже при малых амплитудах) и связь между напряжениями и деформациями описывается не линейной зависимостью, а двумя криволинейными ветвями, образующими петлю гистерезиса. То же относится и к связи между нагрузкой на механическую систему с внутренним трением и соответствующим перемещением x . На рис. II.18 показано, что в системе с одной степенью свободы полная сила сопротивления P состоит из линейной составляющей, которая соответствует закону Гука, и неупругой составляющей R , знак которой зависит от направления деформирования (плюс — при нагружении, минус — при разгрузке).

Для многих материалов экспериментально установлено, что скорость процесса деформирования практически не влияет на очертание ветвей петли гистерезиса, поэтому площадь петли, служащая мерой рассеяния энергии при колебаниях за один цикл, для любого данного материала определяется только амплитудой перемещения. В частности, широко используется зависимость, предложенная Н. Н. Давиденковым:

$$\Psi = ka^{n+1}, \quad (\text{II.51})$$

в которой Ψ — площадь петли гистерезиса; a — амплитуда перемещения; k и n — постоянные, зависящие от материала и типа конструкции.

Независимость площади петли гистерезиса от скорости существенно отличает рассматриваемый вид трения от вязкого трения, при котором силы неупругого сопротивления R зависят от скорости, т. е. в конечном счете от частоты процесса деформирования.

В реальных механических системах причиной гистерезисных явлений служит не только внутреннее трение в материале, но и конструкционное трение в опорах и формально неподвижных соединениях (прессовых, болтовых, резьбовых и др.); в последнем случае трение возникает вследствие малых проскальзываний по контактными поверхностям. Во многих случаях влияние конструкционного трения даже превосходит влияние внутреннего трения. Конструкционное трение также практически не зависит от скорости, и поэтому для его описания пользуются выражениями типа (II.51), не содержащими скорости (или частоты процесса). В ряде случаев удается вычислить постоянные k и n по параметрам системы и значению коэффициента трения, в других случаях эти постоянные приходится определять опытным путем.

Свободные колебания при вязком сопротивлении

Рассмотрим схему, приведенную на рис. II.17, а. При учете сил вязкого сопротивления дифференциальное уравнение движения груза (рис. II.17, б) получит вид

$$-cx - k\dot{x} = m\ddot{x}.$$

Обозначим

$$\frac{k}{2m} = n; \quad \frac{c}{m} = p^2.$$

Здесь коэффициент n характеризует вязкость системы (его не следует смешивать с коэффициентом n для сил неупругого сопротивления).

Теперь запишем дифференциальное уравнение в форме:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0. \quad (\text{II.52})$$

Обычно выполняется неравенство $p^2 > n^2$, и общее решение уравнения (II.52) может быть представлено в виде

$$x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2}t + \alpha). \quad (\text{II.53})$$

Постоянные a и α определяются из начальных условий. Вместо выражений (II.5) получим

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{p^2 - n^2}}; \quad \alpha = \arctg \frac{x_0 \sqrt{p^2 - n^2}}{v_0 + nx_0}.$$

Решение (II.53) может быть также переписано в виде, подобном выражению (II.5):

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{p^2 - n^2}t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{p^2 - n^2}} \sin \sqrt{p^2 - n^2}t \right). \quad (\text{II.54})$$

Кривая колебаний представлена на рис. II.19, где отчетливо виден затухающий характер процесса.

Как видно из выражения (II.53), частота колебаний определяется формулой

$$p_* = \sqrt{p^2 - n^2} \quad (\text{II.55})$$

и обычно мало отличается от частоты незатухающих колебаний той же системы, но лишенной демпфирования.

Рассмотрим последовательные пиковые значения, т. е. отклонения, соответствующие тем моментам времени, когда $\sin(p_*t + \alpha) = 1$ (рис. II.19):

$$a_1 = ae^{-nt_1}; \quad a_2 = ae^{-n(t_1+T)}; \quad a_3 = ae^{-n(t_1+2T)}, \dots,$$

где t_1 — время, соответствующее первому наибольшему отклонению; $T = 2\pi/\sqrt{p^2 - n^2}$ — длительность одного колебательного цикла, остающаяся неизменной во время всего процесса (в данном случае не следует пользоваться выражением «период колебаний», так как движение не обладает свойством периодичности).

Отношение двух последовательных пиковых значений (термин «амплитуда колебаний» здесь неприменим, им следует пользоваться только для гармонических колебаний) остается все время постоянным:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = e^{nT},$$

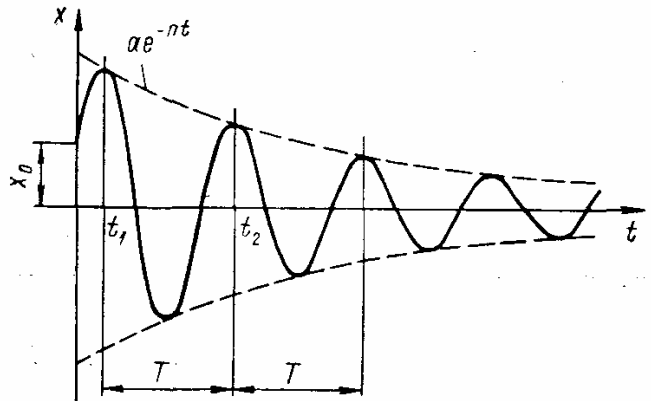


Рис. II.19

т. е. последовательность пиковых значений образует геометрическую прогрессию. Следовательно, при любом значении i справедливо равенство

$$\delta = nT = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}}. \quad (\text{II.56})$$

Величина δ называется логарифмическим декрементом колебаний или, короче, *логарифмическим декрементом* и часто используется как характеристика диссипативных свойств колебательной системы.

Если вычислить работу, совершаемую силой трения за время T , то абсолютная величина результата определит потерю энергии за один цикл. Отношение этой потери к средней энергии за тот же цикл также характеризует быстроту затухания колебательного процесса и называется *коэффициентом поглощения*, для которого можно получить следующее выражение:

$$\psi = 2nT = 2\delta,$$

т. е. коэффициент поглощения вдвое больше логарифмического декремента.

Конкретное значение коэффициента поглощения, так же как и логарифмического декремента, определяется конструкцией, материалом и другими собственными свойствами колебательной системы. Например, в расчетах строительных конструкций используются следующими значениями коэффициента поглощения:

Материал	Сталь прокатная	Дерево	Кирпичная кладка	Железобетон
ψ	0,06—0,15	0,18—0,30	0,24—0,48	0,30—0,60

Наряду с величинами δ и ψ в качестве характеристики диссипативных сил используется величина $\gamma = \delta/\pi$, называемая коэффициентом потерь или *коэффициентом неупругого сопротивления*.

Пример 7. При колебаниях упругой системы обнаружено, что за один колебательный цикл пиковое значение уменьшается вдвое. Определить логарифмический декремент и изменение собственной частоты вследствие затухания.

По формуле (II.56) находим

$$\delta = nT = \ln 2 = 0,693,$$

откуда

$$n = \frac{0,693}{T} = \frac{0,693}{2\pi} \sqrt{p^2 - n^2}.$$

Решая это уравнение, находим, что n^2 весьма мало сравнительно с p^2 ($n^2 = 0,012 p^2$).

Частота колебаний

$$p_* = \sqrt{p^2 - n^2} = \sqrt{p^2 - 0,012 p^2} = 0,994 p$$

отличается от частоты соответствующих незатухающих колебаний всего на 0,6%.

Влияние небольшого вязкого сопротивления на частоту весьма незначительно; вместе с тем даже малое сопротивление интенсивно гасит свободные колебания. Это позволяет, с одной стороны, при вычислении собственной частоты не считаться с наличием вязкого сопротивления, а с другой — считать свободные колебания практически исчезнувшими по истечении достаточно большого промежутка времени. В рассмотренном выше примере после 10 колебательных циклов пиковое значение убывает приблизительно в 1000 раз.

Чтобы построить фазовый портрет системы с затуханием, нужно рассматривать совокупность уравнений

$$\begin{aligned}x &= ae^{-nt} \sin(p_*t + \alpha); \\ \dot{x} &= ae^{-nt} [(p_* \cos(p_*t + \alpha) - n \sin(p_*t + \alpha)]\end{aligned}$$

как уравнение фазовой траектории в параметрической форме.

Типичная фазовая траектория изображена на рис. II.20 (здесь x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные возмущения). Она представляет собой спираль, накручивающуюся на начало координат. Фазовый портрет образуется семейством таких спиралей, окружающих начало координат — особую точку, которая в этом случае называется *устойчивым фокусом*.

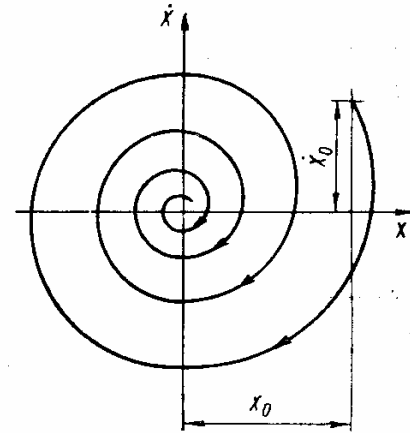


Рис. II.20

Свободные колебания при сопротивлении, пропорциональном n -й степени скорости

В этом случае вместо уравнения (II.52) получим нелинейное дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} + k\dot{x}|\dot{x}|^{n-1} + cx = 0,$$

которое не может быть решено в замкнутой форме. Для приближенного решения этого уравнения воспользуемся способом энергетического баланса, который позволит найти уравнение огибающей (штриховые линии на рис. II.21), хотя такое решение не может отразить все подробности процесса затухающих колебаний, но такие подробности не представляют практического интереса.

Способ основан на равенстве работы силы сопротивления $-k\dot{x}|\dot{x}|^{n-1}$ (эта работа, конечно, отрицательная) приращению (также отрицательному) энергии системы. Это равенство записывается для интервала времени, соответствующего одному колебательному циклу. Конечно, обе приравняемые величины выражаются приближенно, так как для точного их определения необходимо знать закон движения.

Прежде всего найдем приращение потенциальной энергии за один колебательный цикл (рис. II.21). Потенциальная энергия, соответствующая двум последовательным пиковым значениям a_i и a_{i+1} , равна

$$\Pi_i = \frac{1}{2} c a_i^2; \quad \Pi_{i+1} = \frac{1}{2} c a_{i+1}^2,$$

где c — коэффициент жесткости системы. Следовательно, искомое приращение составляет

$$\Delta \Pi_i = \frac{c}{2} (a_{i+1}^2 - a_i^2).$$

При умеренном затухании последнее выражение может быть записано проще:

$$\Delta \Pi_i = \frac{c}{2} (a_{i+1} + a_i) (a_{i+1} - a_i) \approx c a_i \Delta a_i, \quad (\text{II.57})$$

где $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$ — приращение пикового значения за рассматриваемый колебательный цикл.

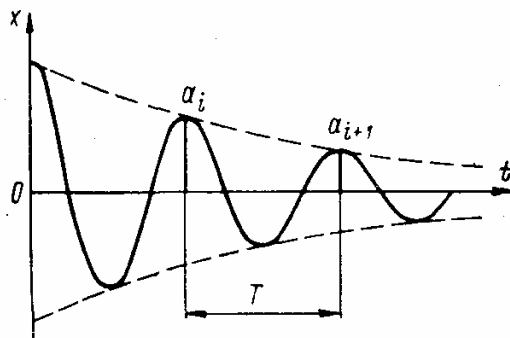


Рис. II.21

Обозначим через $a = a(t)$ искомое уравнение верхней огибающей (верхняя штриховая линия на рис. II.21); тогда можно приближенно принять

$$\Delta a = \frac{da}{dt} T, \quad (\text{II.58})$$

где T — длительность колебательного цикла, которая приближенно равна периоду колебаний той же системы, но без демпфирования.

Окончательно, опуская индексы, имеем

$$\Delta \Pi = c a T \frac{da}{dt}. \quad (\text{II.59})$$

Определим теперь работу, совершаемую силой неупругого сопротивления $-k\dot{x}|\dot{x}|^{n-1}$ за рассматриваемый цикл колебаний:

$$\Psi = - \int_0^T k \dot{x}^2 |\dot{x}|^{n-1} dt = -k \int_0^T |\dot{x}|^{n+1} dt.$$

Здесь начало отсчета времени совмещено с началом цикла.

Для вычисления входящего сюда интеграла приближенно примем, что в течение одного цикла движение описывается зависимостью

$$x = a \cos pt. \quad (\text{II.60})$$

Тогда $\dot{x} = -ap \sin pt$, и мы получим

$$\Psi = -ka^{n+1}p^{n+1} \int_0^T |\sin pt|^{n+1} dt,$$

или

$$\Psi = -ka^{n+1}p^n S, \quad (\text{II.61})$$

где величина

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin \gamma|^{n+1} d\gamma \quad (\text{II.62})$$

зависит только от показателя степени n :

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
S	4,000	3,500	3,142	2,874	2,667	2,498	2,356

Приравнивая правые части выражений (II.59) и (II.61), получим дифференциальное уравнение для верхней огибающей:

$$-ba^n = \frac{da}{dt}, \quad (\text{II.63})$$

где коэффициент

$$b = \frac{kp^{n+1}S}{2\pi c} \quad (\text{II.64})$$

зависит только от параметров системы.

Обратимся к интегрированию дифференциального уравнения (II.63) и начнем с изученного ранее случая линейно-вязкого сопротивления, когда $n = 1$. Тогда (II.63) принимает вид

$$-ba = \frac{da}{dt}, \quad (\text{II.65})$$

а выражение (II.64) —

$$b = \frac{k}{2m}.$$

Разделяя в формуле (II.65) переменные $-bdt = \frac{da}{a}$ и интегрируя в пределах от $t = 0$ до t , находим $\ln \frac{a}{a_0} = -bt$, т. е.

$$a = a_0 e^{-bt} = a_0 e^{-\frac{kt}{2m}}.$$

Полученный для огибающей кривой затухающих колебаний результат соответствует выражению (II.54).

Обратимся к случаю, когда $n \neq 1$. Разделяя переменные в уравнении (II.63), имеем

$$-bdt = \frac{da}{a^n}.$$

Интегрируя в пределах от $t = 0$ до t , получаем

$$\frac{a^{1-n}}{1-n} - \frac{a_0^{1-n}}{1-n} = -bt,$$

откуда

$$a = \frac{a_0}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1) b t a_0^{n-1}}}. \quad (\text{II.66})$$

Этим выражением и определяется закон затухания свободных колебаний при любых значениях n , отличных от единицы. Остановимся на двух частных случаях.

1. Случай $n = 0$ (кулоново трение). В этом случае из выражения (II.66) получаем

$$a = a_0 - bt, \quad (\text{II.67})$$

т. е. огибающая имеет вид прямой линии. Согласно формуле (II.64) при $n = 0$

$$b = \frac{4k}{cT}; \quad (\text{II.68})$$

этим выражением определяется темп затухания.

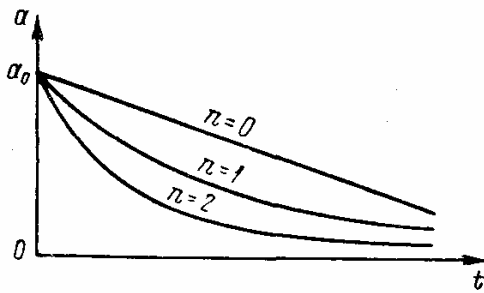


Рис. II.22

2. Случай $n = 2$ (гидродинамическое или турбулентное демпфирование). Из основного выражения (II.66) имеем уравнение огибающей

$$a = \frac{a_0}{1 + b a_0 t},$$

т. е. огибающая имеет характер гиперболы.

На рис. II.22 схематически представлены огибающие для случаев $n = 0; 1; 2$.

Практическая ценность уравнения (II.66) состоит не столько в том, что с его помощью без труда можно построить огибающую виброграммы свободных затухающих колебаний при известных значениях постоянных b и n , сколько в том, что, опираясь на это уравнение, можно вычислить значения b и n по опытным виброграммам. Эти постоянные могут быть далее использованы для расчетов вынужденных колебаний с трением.

Свободные колебания при кулоновом трении (точное решение)

В случае сухого трения уравнение движения записывается в виде

$$m\ddot{x} + cx \pm k = 0, \quad (\text{II.69})$$

причем знак перед последним членом нужно выбирать в зависимости от знака скорости (направления движения). Пусть, например, движение начинается в мгновение $t = 0$, когда $x = a_0$, $\dot{x} = 0$. Тогда в первом интервале движения, пока скорость отрицательна, в уравнении должен быть принят знак минус. В следующем интервале движения, когда скорость положительна, в уравнении нужно принять знак плюс и т. д.

Обозначив $x_* = k/c$ и $p^2 = c/m$, получим уравнение для первого интервала

$$\ddot{x} + p^2x - p^2x_* = 0.$$

Решение уравнения при указанных начальных условиях

$$x = (a_0 - x_*) \cos pt + x_*. \quad (\text{II.70})$$

Для скорости получим выражение

$$\dot{x} = -(a_0 - x_*) p \sin pt.$$

Когда аргумент pt становится равным π , скорость вновь обращается в нуль, т. е. система достигает своего крайнего отклонения по другую сторону от начала координат; это отклонение согласно уравнению (II.70)

$$a_1 = (a_0 - x_*) \cos \pi + x_* = -a_0 + 2x_*,$$

т. е. по абсолютной величине оно меньше начального отклонения на $2x_*$.

Если абсолютная величина a_1 удовлетворяет неравенству $c|a_1| > k$ (или $|a_1| > x_*$), то сила упругости больше силы трения, и система начинает двигаться в сторону положительных значений x . Теперь для второго интервала уравнение движения запишется в виде

$$\ddot{x} + p^2x + p^2x_* = 0.$$

Смещая начало отсчета времени, примем начальные условия: $t = 0$; $x = a_1$; $v = 0$. Тогда решение запишется в виде

$$x = (a_1 + x_*) \cos pt - x_*.$$

Рассуждая как и выше, получим следующее отклонение:

$$a_2 = -a_1 - 2x_*,$$

или, выражая a_2 через a_0 ,

$$a_2 = a_0 - 4x_*.$$

Таким образом, за один период амплитуда уменьшается на одну и ту же величину $4x_* = 4k/c$, т. е. последовательность амплитуд образует арифметическую прогрессию и огибающая кривой $x(t)$ представляет собой прямую линию. Тангенс угла ее наклона

с осью t равен $4k/(cT)$, что совпадает с полученным выше значением по (II.68).

Вычисления, подобные приведенным, можно продолжать до тех пор, пока соблюдается неравенство $|a_i| > x_*$. При $|a_i| < x_*$ движение полностью прекращается, так как сила упругости ca_i

будет недостаточна для преодоления силы трения.

График колебаний дан на рис. II.23. Он состоит из отрезков синусоид с одинаковым периодом, но различной амплитудой. Две горизонтальные прямые $x = \pm x_*$ определяют зону застоя: если скорость обращается в нуль в пределах этой зоны, то движение прекращается (точка S).

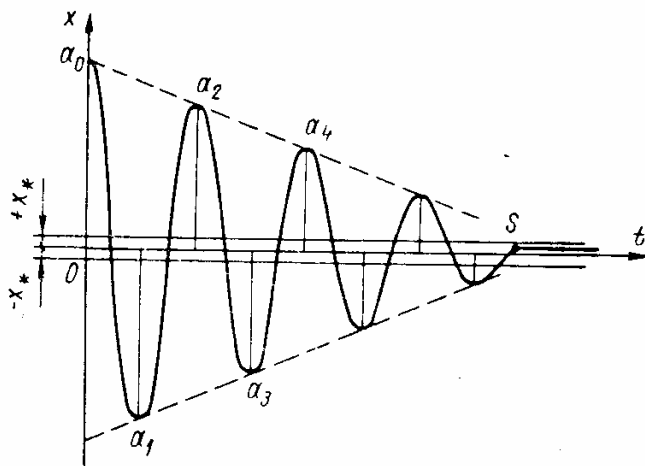


Рис. II.23

Свободные колебания при гистерезисном трении

Выше было пояснено, что рассеиваемая за цикл энергия не зависит от темпа процесса циклического деформирования и ее абсолютная величина определяется формулой (II.51). С другой стороны, изменение энергии системы выражается формулой (II.59). Приравнявая эти два выражения, получаем дифференциальное уравнение для верхней огибающей кривой затухающих колебаний:

$$-\frac{k}{cT} a^n = \frac{da}{dt}.$$

Как и в случае неупругого сопротивления, пропорционального n -й степени скорости, решение этого дифференциального уравнения не дает подробного описания процесса затухающих колебаний, но зато позволяет легко найти огибающую.

Если обозначить $b = k/(cT)$, то приходим к уже решенному дифференциальному уравнению (II.63), но с другим значением параметра b .

Окончательный результат в данном случае имеет прежнюю форму (II.66); в частности:

при $n = 0$

$$a = a_0 - bt = a_0 - \frac{kt}{cT};$$

при $n = 1$

$$a = a_0 e^{-bt} = a_0 e^{-\frac{kt}{cT}};$$

при $n = 2$

$$a = \frac{a_0}{1 + ba_0 t} = \frac{a_0}{1 + \frac{ka_0 t}{cT}}.$$

Огибающие, соответствующие этим случаям, схематически представлены на рис. II.22.

Важно отметить, что одинаковые огибающие виброграмм затухающих колебаний могут получиться при действии сил неупругого сопротивления различной природы. Допустим, что при обработке опытной виброграммы (кривой записи колебаний) обнаружено, что пиковые значения убывают по закону геометрической прогрессии, т. е. что огибающая — экспонента. Отсюда, однако, еще не следует, что затухание колебаний обусловлено вязким трением — тот же характер затухания может быть вызван гистерезисом, когда потери на внутреннее трение совершенно не зависят от скорости. Для того чтобы выяснить подлинную природу сил трения, одной виброграммы недостаточно, необходима постановка некоторых дополнительных экспериментов.

Обобщение понятия о логарифмическом декременте колебаний

Данное выше понятие о логарифмическом декременте можно распространить на любые процессы затухания колебаний, полагая, что во всех случаях логарифмический декремент δ есть натуральный логарифм отношения двух последовательных пиковых значений. Обычно это отношение переменное, так что логарифмический декремент не является постоянным числом для всего процесса колебаний, а постепенно меняется. Исключениями являются случаи вязкого сопротивления и гистерезиса (при $n = 1$), когда для всего процесса колебаний $\delta = \text{const}$. Итак, примем

$$\delta = \ln a_i / a_{i+1}.$$

Если затухание умеренное, то отношение a_i / a_{i+1} мало отличается от единицы и можно принять

$$\ln \frac{a_i}{a_{i+1}} \approx \frac{a_i}{a_{i+1}} - 1 = \frac{a_i - a_{i+1}}{a_{i+1}};$$

следовательно,

$$\delta = \Delta a / a, \quad (\text{II.71})$$

где, в отличие от принятого в выражении (II.57), Δa — абсолютная величина разности двух последовательных пиковых значений. Выражению (II.71) можно дать иное толкование. Энергия, рассеянная за один цикл, определяется формулой (II.57); максимальная потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{ca^2}{2}.$$

Составляя отношение этих энергий, получим величину, вдвое большую, чем (II.71):

$$\Delta\P/\Pi = 2\Delta a/a.$$

Отсюда вытекает следующее определение: при умеренном затухании логарифмический декремент есть отношение энергии, рассеянной за один цикл, к удвоенной максимальной потенциальной энергии цикла.

При учете выражения (II.58) формулу (II.71) можно записать также в виде

$$\delta = -\frac{da}{dt} \cdot \frac{T}{a}. \quad (\text{II.72})$$

Для всех рассмотренных выше случаев справедливо дифференциальное уравнение (II.63). Пользуясь им, получаем следующую зависимость логарифмического декремента от амплитуды колебаний:

$$\delta = bTa^{n-1}. \quad (\text{II.73})$$

Так, в случае $n = 1$

$$\delta = bT,$$

т. е. логарифмический декремент постоянный.

При сухом трении ($n = 0$) логарифмический декремент возрастает с убыванием амплитуды:

$$\delta = bT/a.$$

В случае $n = 2$

$$\delta = bTa,$$

т. е. логарифмический декремент убывает с уменьшением амплитуды.

Соотношение (II.73) может быть положено в основу экспериментального способа определения параметра n .

Колебания груза на сложной вязко-упругой подвеске

Во всех рассмотренных выше случаях предполагалось, что подвеска колеблющегося груза состоит из одного упругого элемента и включенного в систему звена вязкого трения (см. рис. II.17). В этих случаях связь между внешней силой P , приложенной к системе подвески, и соответствующим перемещением x имеет следующий вид:

$$P = k\dot{x} + cx. \quad (\text{II.74})$$

Здесь c — коэффициент жесткости упругого элемента; k — коэффициент вязкости звена трения.

Можно сказать, что соотношение (II.74) представляет собой вязко-упругую характеристику системы подвески. Отметим, что

вязко-упругие свойства некоторых реальных материалов иногда описывают аналогичным соотношением («реологическим уравнением»)

$$\sigma = k\dot{\varepsilon} + E\varepsilon,$$

где σ — нормальное напряжение; ε — деформация; E — модуль упругости; k — коэффициент вязкости.

Такие материалы (сплошные среды) называют материалами Кельвина—Фохта. Схема, показанная на рис. II.17 и моделирующая в нашем изложении реальную механическую систему, также часто используется как условная наглядная модель материала Кельвина—Фохта.

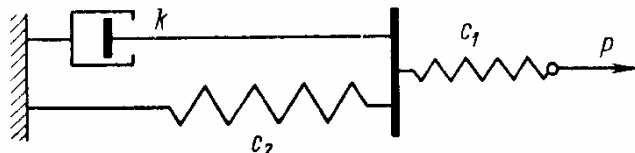


Рис. II.24

Существуют более сложные системы подвески, которые не сводятся к только что рассмотренной простой схеме, в частности с двумя упругими элементами и одним вязким звеном (рис. II.24). Связь между внешней силой и перемещением нагруженной точки получим следующим образом. Обозначим: c_1 и c_2 — коэффициенты жесткости упругих элементов; k — коэффициент вязкости; x_1 и x_2 — перемещения нагруженной точки и промежуточной платформы; последнюю будем считать лишенной массы. Тогда для силы P можно записать два различных выражения; первое определяет силу в правом упругом элементе:

$$P = c_1(x_1 - x_2),$$

а второе — силу в левой вязко-упругой системе:

$$P = k\dot{x}_2 + c_2x_2.$$

Исключив из этих выражений перемещение x_2 , получим следующее дифференциальное соотношение между P и x_1 :

$$\frac{k}{c_1 + c_2} \dot{P} + P = \frac{c_1 k}{c_1 + c_2} \dot{x}_1 + \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x_1. \quad (\text{II.75})$$

В отличие от (II.74) сюда входит также первая производная силы $\dot{P}$ (скорость изменения силы).

Если задана программа нагружения, т. е. зависимость P от времени, то из (II.75) можно путем интегрирования найти закон изменения перемещения x_1 . В иных случаях может быть задана зависимость x_1 от времени, тогда (II.75) следует рассматривать как дифференциальное уравнение для определения силы P в функции времени.

Прежде всего рассмотрим два крайних частных случая.

Если сила изменяется весьма медленно, то в (II.75) можно пренебречь членами, содержащими производные $\dot{P}$ и $\dot{x}_1$; тогда получится

$$P = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x_1. \quad (\text{II.76})$$

Это соотношение описывает упругую систему, характеризуемую коэффициентом жесткости $c_1 c_2 / (c_1 + c_2)$. К тому же результату можно прийти непосредственно, заметив, что вследствие медленности процесса в вязком звене вообще практически не возникает усилий и система подвески оказывается состоящей только из двух последовательно соединенных упругих элементов (см. схему 3 в табл. 1, стр. 24).

Если, в противоположность предыдущему случаю, сила изменяется весьма быстро, то в соотношении (II.75) можно считать пренебрежимо малыми члены, содержащие P и x_1 . Тогда получится $\dot{P} = c_1 \dot{x}_1$, или после интегрирования (начальное условие: $P = 0$ при $x_1 = 0$)

$$P = c_1 x_1. \quad (\text{II.77})$$

Подобно (II.76), это соотношение описывает также упругую систему, но с иным и притом бóльшим коэффициентом жесткости c_1 . Физически этот результат легко понять, если иметь в виду, что при быстром нагружении вязкое звено деформируется весьма мало, а следовательно, малы деформации и левого упругого элемента; таким образом, в рассматриваемых условиях левая часть системы подвески практически не деформируется и коэффициент жесткости всей подвески определяется только значением c_1 .

Конечно, последний результат относится только к тому этапу процесса нагружения, в течение которого происходит предположенное здесь быстрое изменение силы.

Пусть, например, сила P внезапно возрастает от нуля до некоторого конечного значения P_0 , которое затем остается неизменным. При этом перемещение x мгновенно достигает значения P_0/c_1 . Дальнейшее течение процесса определяется соотношением (II.75), в котором производная $\dot{P}$ должна быть принята равной нулю:

$$P_0 = \frac{c_1 k}{c_1 + c_2} \dot{x}_1 + \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x_1. \quad (\text{II.78})$$

Отсюда можно найти закон последующего изменения перемещения x_1 , удовлетворяющий начальному условию $x(0) = P_0/c_1$:

$$x_1 = \frac{P_0}{c_2} \left(\frac{c_1 + c_2}{c_1} - e^{-c_2 t/k} \right). \quad (\text{II.79})$$

Как видно, с течением времени перемещение будет возрастать и при $t \rightarrow \infty$ приближается к значению $P_0 (c_1 + c_2) / (c_1 c_2)$. Этот

процесс постепенного увеличения перемещения при неизменном значении внешней силы называется *ползучестью*.

Рассмотрим теперь другой случай внезапного изменения состояния системы: правая точка принудительным образом внезапно смещается на величину x_0 и затем остается неподвижной. Каково изменение силы P в этом процессе? В этом случае сначала мгновенно появляется сила $c_1 x_0$. Поскольку в последующем процессе $\dot{x}_1 = 0$, он описывается уравнением

$$\frac{k}{c_1 + c_2} \dot{P} + P = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x_1. \quad (\text{II.80})$$

Решение этого уравнения (оно удовлетворяет условию $P(0) = c_1 x_0$) имеет вид

$$P = \frac{c_1 x_0}{c_1 + c_2} \left(c_1 e^{-\frac{c_1 + c_2}{k} t} + c_2 \right). \quad (\text{II.81})$$

С течением времени сила P убывает до значения $\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x_0$. Процесс постепенного убывания силы при заданном фиксированном значении перемещения называется *релаксацией* (этим свойством не обладает система, показанная на рис. II.17).

При деформировании некоторых материалов также обнаруживается их способность к релаксации; поэтому схема на рис. II.24 часто применяется в качестве наглядной модели для таких материалов. Связь между напряжением σ и деформацией ε (реологическое уравнение) для материала такого типа имеет ту же структуру, что и соотношение (II.75) для сложной вязко-упругой подвески:

$$n \dot{\sigma} + \sigma = n H \dot{\varepsilon} + E \varepsilon. \quad (\text{II.82})$$

Сюда входят три постоянные: E — длительный модуль упругости; H — мгновенный модуль упругости; n — время релаксации.

Сплошную среду, описываемую соотношением (II.82), называют обобщенной вязко-упругой средой.

Свободные колебания груза на сложной вязко-упругой подвеске описываются дифференциальным уравнением

$$m \ddot{x} = -P. \quad (\text{II.83})$$

Исключив из (II.75) и (II.83) силу P и ее производную, получим уравнение

$$\ddot{x} + \frac{c_1 + c_2}{k} \dot{x} + \frac{c_1}{m} x + \frac{c_1 c_2}{km} x = 0, \quad (\text{II.84})$$

которое в отличие от рассмотренных выше случаев имеет третий порядок *.

* Поскольку движение системы с одной степенью свободы описывается дифференциальным уравнением второго порядка, рассматриваемую здесь систему можно назвать системой с $1\frac{1}{2}$ степенями свободы.

Принимая частное решение в виде $x = Ae^{st}$, приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + \frac{c_1 + c_2}{k} \lambda^2 + \frac{c_1}{m} \lambda + \frac{c_1 c_2}{km} = 0, \quad (\text{II.85})$$

корни которого имеют вид:

$$\lambda_1 = -\alpha_1; \lambda_2 = -\alpha_2 + \beta i; \lambda_3 = -\alpha_2 - \beta i.$$

После их определения можно записать общее решение дифференциального уравнения (II.85):

$$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} (C_2 \sin \beta t + C_3 \cos \beta t). \quad (\text{II.86})$$

Первый член этого решения описывает аperiодическое затухающее движение; быстрота затухания характеризуется значением α_1 , причем величина $1/\alpha_1$ представляет собой время релаксации, т. е. время, в течение которого первое слагаемое решения (II.86) уменьшается в e раз. Второй член решения описывает затухающие колебания того же типа, что и в простой вязко-упругой системе.

Для определения постоянных, входящих в (II.86), служат три начальных условия. Два из них вполне обычны и относятся к начальным значениям перемещения и скорости; третье условие характеризует начальное возмущение ускорения, которое с помощью (II.83) выражается через начальное возмущение силы P в подвеске. Эта величина может отличаться от нуля, даже если $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$.

6. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ БЕЗ НЕУПРУГИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛЕ

Некоторые типы нелинейных характеристик

Для анализа колебаний любой механической системы с нелинейной восстанавливающей силой прежде всего необходимо иметь *упругую характеристику* этой силы, т. е. аналитическую или графическую зависимость между статической нагрузкой на систему и соответствующим перемещением. В некоторых случаях надежные сведения о таких характеристиках могут быть получены только экспериментально, но иногда их можно найти также расчетным путем.

Рассмотрим построение характеристики для системы, показанной на рис. I.4, б, и обозначим: l — начальная длина пружины; c — ее коэффициент жесткости. Сначала будем считать, что когда груз находится в среднем положении, натяжение пружины отсутствует.

При отклонении груза на расстояние x пружина удлиняется на величину $\sqrt{x^2 + l^2} - l$ и соответствующая сила натяжения пружины

$$N = c(\sqrt{x^2 + l^2} - l).$$

Горизонтальная составляющая этой силы, определяющая упругую характеристику системы,

$$P = N \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = cx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/l^2}} \right).$$

Полагая, что перемещение x мало сравнительно с длиной l , можно принять

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2/l^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2,$$

следовательно, характеристика системы чисто нелинейная:

$$P \approx \frac{cx^3}{2l^2}. \quad (\text{II.87})$$

Если пружина обладает первоначальным натяжением N_0 , то при отклонении груза на величину x полная сила натяжения составляет

$$N = N_0 + c (\sqrt{l^2 + x^2} - l),$$

а ее горизонтальная составляющая равна

$$P = N \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx N_0 \frac{x}{l} + \frac{cx^3}{2l^2}.$$

Это выражение отличается от выражения (II.87) наличием линейного слагаемого. Отсюда видно, что начальное натяжение может существенно влиять на упругую характеристику системы.

Практически важным примером упругой нелинейной связи может служить задняя подвеска автомобиля (рис. II.25, *а*), если кроме основной рессоры имеется дополнительная рессора (подрессорник). При малых перемещениях кузова концы подрессорника не касаются упоров и работает только основная рессора; зависимость между силой давления P на рессору и ее прогибом y можно считать линейной (участок *ab*).

При больших перемещениях кузова концы подрессорника упираются в кронштейны рамы и общая жесткость рессоры становится большей (участок *bc*). Таким образом, общая характеристика рессоры $P(y)$ оказывается нелинейной.

Если c_1 — коэффициент жесткости основной рессоры и c_2 — коэффициент жесткости подрессорника, то жесткость системы на участке *ab* равна c_1 , а на участке *bc* — сумме $c_1 + c_2$.

На рис. II.25, *б* показана схема нелинейной пружинной муфты с первоначальным натягом; муфта служит для соединения двух частей вала, причем одна часть жестко связана с внутренней полумуфтой, а другая — с внешней. Полумуфты соединяются несколькими пружинами, которые устанавливаются в соответствующие полости с некоторым натягом. При малом крутящем моменте M угол взаимного поворота полумуфт $\varphi = 0$. Когда крутящий момент достигает некоторого значения M_0 , определяемого

величиной первоначального сжатия пружин, начинается деформация пружин и полумуфты получают возможность взаимного поворота. Характеристика такой муфты — связь между крутя-

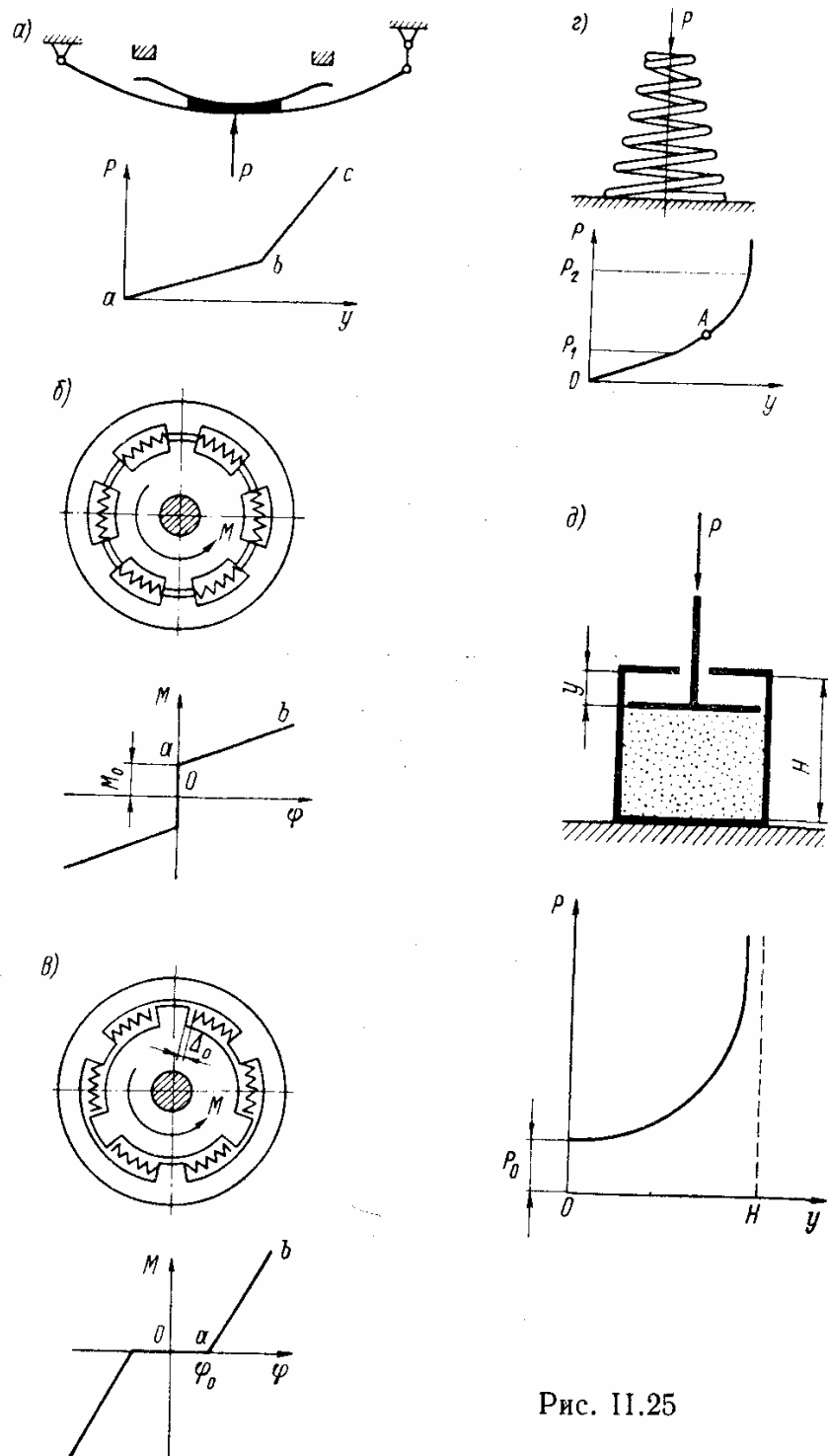


Рис. 11.25

щим моментом и углом взаимного поворота полумуфт — содержит вертикальный участок, совпадающий с частью оси ординат.

Если при нагружении муфты крутящим моментом на каждую пружину действует сила, меньшая усилия первоначального обжатия P_0 , то взаимный поворот полумуфт невозможен. Обозна-

чая число пружин через n и радиус пограничной окружности через r , можно записать, что пока $M < M_0 = nP_0r$, угол взаимного поворота $\varphi = 0$ (участок $0a$ на рис. II.25, б). Если $M > M_0$, то начинается деформация пружин; на каждую пружину придется дополнительная сила (сверх начальной силы P_0) $\frac{M}{nr} - P_0$, вследствие чего произойдет обжатие каждой пружины на величину $\left(\frac{M}{nr} - P_0\right)/c$, где c — коэффициент жесткости одной пружины при сжатии. Этому соответствует угол взаимного поворота полумуфт

$$\varphi = \left(\frac{M}{nr} - P_0\right)/cr.$$

Отсюда находим, что при $M \geq M_0$

$$M = cnr^2\varphi + nP_0r.$$

Эта зависимость показана на рис. II.25, б (участок ab); на рассматриваемом участке жесткость муфты равна cnr^2 .

Аналогично можно построить характеристику для муфты с зазорами Δ_0 (рис. II.25, в). Момент не возникает, если $\varphi < \varphi_0 = 0,5\Delta_0/r$ (участок $0a$ на рис. II.25, в). Лишь при $\varphi > \varphi_0$ происходит передача крутящего момента. Крутящему моменту M соответствуют сила сжатия одной пружины $M/(nr)$ и сжатие пружины на величину $\Delta = M/(cnr)$. Следовательно, дополнительный угол поворота (сверх угла φ_0)

$$\frac{\Delta}{r} = \frac{M}{cnr^2}.$$

Полный угол поворота, считая от среднего положения,

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M}{cnr^2};$$

отсюда находим уравнение упругой характеристики при $\varphi > \varphi_0$:

$$M = cnr^2(\varphi - \varphi_0)$$

(участок ab на рис. II.25, в).

Рассмотрим теперь коническую пружину (рис. II.25, г). Такие пружины находят все более широкое применение в качестве упругих элементов виброизоляторов различного оборудования. При постепенном увеличении нагрузки до значения P_1 , пока не происходит посадка рабочих витков на опорную поверхность, пружина обладает линейными свойствами. Затем витки начинают ложиться на эту поверхность, длина деформируемой части пружины постепенно уменьшается, а жесткость пружины возрастает. При некотором значении сжимающей силы P_2 вся пружина ложится на опорную поверхность и в этом состоянии представляет собой почти плоскую спираль. На этом этапе деформирования характеристика пружины нелинейная (жесткая).

Построение такой характеристики пружины — сравнительно несложная задача сопротивления материалов. Приведем окончательные результаты ее решения, обозначив: G — модуль сдвига материала пружины; d — диаметр проволоки; r_1 и r_2 — наименьший и наибольший радиусы рабочих витков пружины; H — осевая длина (высота) пружины в несжатом состоянии; y_1 — осадка пружины, соответствующая началу посадки рабочих витков; i — число рабочих витков. При этом на первом этапе деформирования

$$P = \frac{Gd^4 y}{16i (r_1^2 + r_2^2) (r_1 + r_2)}.$$

На втором, нелинейном этапе деформирования

$$P = \frac{Gd^4}{16i (r_1^2 + r_2^2) (r_1 + r_2)} \left[y_1 + \frac{H - y_1}{H - y} (y - y_1) \right].$$

Еще более распространены в практике резиновые амортизаторы, работающие на сдвиг или сжатие. В первом случае их можно считать практически линейными в широком интервале значений их нагрузки. Однако амортизаторы, работающие на сжатие, обладают заметными нелинейными свойствами. Так, для цилиндрического амортизатора с круговым сечением можно принять следующее выражение упругой характеристики:

$$P = \beta EF \frac{y}{H - y}.$$

Здесь E — динамический модуль упругости резины; F — площадь поперечного сечения амортизатора; H — высота недеформированного амортизатора; β — коэффициент, определяемый формулой

$$\beta = \frac{\frac{H}{r} \sqrt{6}}{\frac{H}{r} \sqrt{6} - \operatorname{th} \frac{H}{r} \sqrt{6}},$$

где r — радиус поперечного сечения.

В автомобильных подвесках и шасси самолетов применяются пневмопоршневые упругие элементы (обычно в сочетании с гидравлическими демпферами). Связь между объемом V и давлением p воздуха (или иного газа) обычно определяют уравнением политропного процесса $pV^n = \text{const}$. Значения показателя политропы n чаще всего лежат в пределах 1,15—1,35 (при относительно медленных движениях можно принимать $n = 1$). Если S — площадь сечения элемента, H — расстояние от днища цилиндра до поршня в его начальном положении, p_0 — начальное давление, то

$$P = \frac{p_0 S H^n}{(H - y)^n}.$$

Схема пневмоэлемента и его упругая характеристика показаны на рис. II.25, δ (см. также [19]).

Малые колебания систем с нелинейной характеристикой восстанавливающей силы; равночастотные виброизоляторы

При весьма малых колебаниях систем с нелинейной характеристикой восстанавливающей силы можно пользоваться изложенной выше линейной теорией. Пусть, например, система на рис. II.25, *г* нагружена значительной статической силой P и совершает малые свободные колебания около соответствующего положения равновесия, обозначенного на рис. II.25, *г* буквой A . При этом колебания можно считать линейными, принимая за коэффициент жесткости системы тангенс угла наклона касательной к нелинейной характеристике в точке A :

$$c = \left(\frac{dP}{dy} \right)_{y=A} = P'(A).$$

Тогда для частоты свободных колебаний получится

$$p = \sqrt{\frac{P'(A)}{m}}. \quad (\text{II.88})$$

Этот результат зависит от уровня статической нагрузки P , но не зависит от амплитуд колебаний (если они малые!). Это свойство нелинейной системы нашло практическое применение в равночастотных виброизоляторах, предложенных Ю. И. Иоришем.

Положим, что на верхнем конце фасонной пружины (типа изображенной на рис. II.25, *г*) могут располагаться различные грузы, обладающие неодинаковыми массами. Каждому значению массы груза соответствует определенное значение осадки пружины и соответственно некоторое, также определенное значение коэффициента жесткости. В некоторых случаях полезно так спроектировать пружину, чтобы с увеличением массы груза пропорционально возрастал и коэффициент жесткости; тогда частота свободных колебаний окажется во всех случаях одной и той же.

Пусть p — выбранное фиксированное значение собственной частоты. Заменяя в (II.88) $m = P/g$, получим

$$\frac{dP}{dy} = \frac{p^2}{g} P. \quad (\text{II.89})$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение искомой нелинейной характеристики пружины. Решение уравнения (II.89) имеет вид

$$\ln P = \frac{p^2}{g} y + C. \quad (\text{II.90})$$

Отсюда непосредственно видно, что интегральные кривые уравнения (II.89) одинаковы по форме, как это показано на рис. II.26, *а*. Любая из этих характеристик удовлетворяет уравнению (II.89), но для определенности решения нужно выбрать постоянную C

и тем самым зафиксировать одну конкретную интегральную кривую.

На первый взгляд для этой цели должно быть использовано начальное условие $y = 0$ при $P = 0$, так как статическая характеристика должна проходить через начало координат. Однако ни одна из бесконечного множества интегральных кривых (II.90) через начало координат не проходит и, следовательно, не может быть принята за характеристику. Чтобы преодолеть эту трудность, обычно пользуются следующими соображениями.

Пусть P_0 — наименьшее возможное значение веса груза (оно определяется конкретными обстоятельствами и соответствующими техническими требованиями). В таком случае при $P < P_0$ система

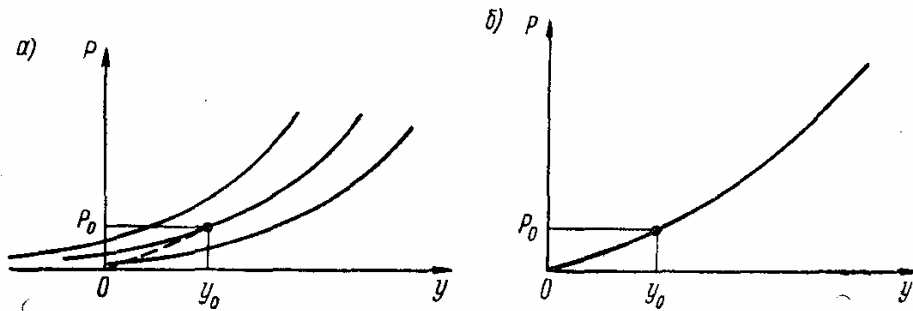


Рис. II.26

может иметь характеристику, не удовлетворяющую уравнению (II.89), в частности линейную характеристику

$$P = c_0 y. \quad (\text{II.91})$$

Далее будем стремиться к плавности перехода от линейного участка к нелинейному, как это намечено штриховой линией на рис. II.26, а, т. е. подчиним выбор искомой характеристики условию: при $P = P_0$ должно быть

$$\frac{dP}{dy} = \frac{P}{y}. \quad (\text{II.92})$$

Согласно (II.89) это условие выполняется, если принять (см. рис. II.26, а) $y_0 = g/p^2$.

Таким образом, чтобы найти постоянную C , нужно пользоваться условием

$$P = P_0 \text{ при } y = g/p^2. \quad (\text{II.93})$$

Тогда из (II.90) найдем

$$P = P_0 e^{\frac{p^2 y}{g} - 1}, \quad (\text{II.94})$$

причем эта кривая начинается в точке с координатами $y = g/p^2$; $P = P_0$. От этой точки к началу координат проводится прямая, уравнение которой (II.91) приобретает вид

$$P = P_0 \frac{p^2 y}{g}. \quad (\text{II.95})$$

На рис. II.26, б изображена вся характеристика, составленная из двух частей — (II.94) и (II.95).

Теперь возникает задача конструирования такой пружины, которая обладает только что построенной характеристикой. Не останавливаясь на ее решении, отметим, что форма такой пружины довольно близка к конической и поэтому часто условие равночастотности приближенно удовлетворяется путем использования конических пружин, относительно более простых в изготовлении.

Основное дифференциальное уравнение и его точное решение

Дифференциальное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы при нелинейной характеристике восстанавливающей силы составляется аналогично уравнению (II.1), но вместо линейной восстанавливающей силы в него нужно ввести нелинейную силу, конкретное выражение которой определяется упругой характеристикой системы $P(x)$:

$$m\ddot{x} + P(x) = 0.$$

Хотя это уравнение выведено для схемы, показанной на рис. I.1, б, но к аналогичному уравнению можно прийти при решении любой задачи о свободных колебаниях нелинейной системы с одной степенью свободы без трения. Так, для системы, совершающей крутильные колебания, в эту формулу вместо массы m нужно подставить момент инерции I , вместо перемещения x — угол поворота φ , вместо восстанавливающей силы $P(x)$ — восстанавливающий момент $M(\varphi)$.

Разделив уравнение на массу m , получим

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (\text{II.96})$$

где

$$f(x) = P(x)/m. \quad (\text{II.97})$$

Ввиду сложности решения уравнения (II.96) обычно ограничиваются определением частоты свободных колебаний, не выясняя деталей протекания процесса колебаний; этого оказывается достаточно для многих практических приложений.

Выразив ускорение в виде

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v,$$

где v — скорость, получим вместо уравнения (II.96)

$$v \frac{dv}{dx} + f(x) = 0.$$

Разделяя переменные, находим

$$v dv = -f(x) dx.$$

При интегрировании выберем за начало отсчета времени мгновение наибольшего отклонения, когда перемещение x максимально ($x_{\max} = a$), а скорость равна нулю ($v = 0$). Тогда будет

$$\int_0^v v dv = - \int_a^x f(x) dx,$$

или

$$\frac{v^2}{2} = - \int_a^x f(x) dx = \int_x^a f(x) dx.$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии: в левой части стоит кинетическая энергия, накопленная в процессе движения от крайнего положения ($x = a$; $v = 0$) к текущему положению (x ; v), а в правой части — потенциальная энергия, потерянная в процессе того же движения (эта энергия на графике нелинейной характеристики восстанавливающей силы на рис. II.27 выражается заштрихованной площадью). Отметим, что обе энергии отнесены к единице массы. Из последнего выражения получим

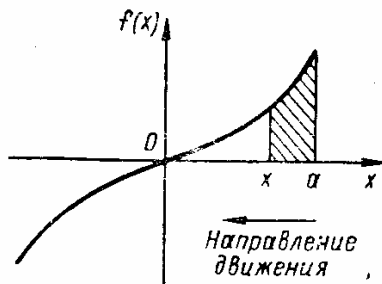


Рис. II.27

$$v = \frac{dx}{dt} = - \sqrt{2 \int_x^a f(x) dx}. \quad (\text{II.98})$$

Из двух знаков перед корнем знак минус взят потому, что в рассматриваемом интервале движения скорость отрицательна.

Интегрирование уравнения (II.98) дает время t в функции перемещения:

$$t = - \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{2 \int_x^a f(x) dx}} = \int_x^a \frac{dx}{\sqrt{2 \int_x^a f(x) dx}}.$$

Если вести интегрирование в пределах от $x = 0$ до $x = a$, то для системы с симметричной характеристикой будет найдено время четверти полного колебания (четверть периода). Соответственно период колебаний равен

$$T = 2 \sqrt{2} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\int_x^a f(x) dx}}; \quad (\text{II.99})$$

эта формула дает возможность найти точную зависимость периода свободных колебаний от их амплитуды.

Остановимся на случае симметричной характеристики, описываемой законом

$$f(x) = \alpha x^{2n-1} \quad (n = 1; 2; \dots), \quad (\text{II.100})$$

где α и n — постоянные.

Последовательно находим

$$\int_x^a f(x) dx = \frac{\alpha}{2n} (a^{2n} - x^{2n});$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{n} (a^{2n} - x^{2n})}} = \sqrt{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2n}}},$$

где $\xi = x/a$.

Окончательно по формуле (II.99) получаем

$$T = 4 \sqrt{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2n}}}. \quad (\text{II.101})$$

Отсюда видно, что только при $n = 1$ (линейная характеристика) период T не зависит от амплитуды колебаний; в остальных случаях существует связь между периодом и амплитудой. Существование подобной связи вообще типично для нелинейных систем. По этой причине применительно к таким системам избегают пользоваться термином «собственная частота», поскольку частота свободных колебаний перестает быть собственным параметром системы.

Рассмотрим колебания в системе с кубической характеристикой $f(x) = \alpha x^3$. Тогда $n = 2$, и из выражения (II.101) находим

$$T = \frac{4}{a} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^4}}.$$

Входящий сюда эллиптический интеграл может быть вычислен при помощи таблиц специальных функций; его значение $1,8541/\sqrt{2}$. Следовательно,

$$T = \frac{4}{a\sqrt{\alpha}} 1,8541.$$

Для частоты свободных колебаний получим

$$p = \frac{2\pi}{T} = 0,8472a \sqrt{\alpha}, \quad (\text{II.102})$$

т. е. частота линейно увеличивается с ростом амплитуды.

Сравнительно несложно найти точное решение и в тех случаях, когда нелинейная характеристика восстанавливающей силы состоит из отрезков прямых (кусочно-линейная характеристика). При этом нет необходимости пользоваться формулой (II.99), достаточно рассмотреть несколько линейных задач, соответствующих отдельным линейным участкам характеристики.

В качестве примера рассмотрим систему с зазорами (см. рис. I.4, в) и обозначим: a_0 — полузазор, т. е. абсцисса точки перелома характеристики; a — амплитуда колебаний; c — коэффициент жесткости каждой из пружин; m — масса груза; $p_0 = \sqrt{c/m}$ — собственная частота системы, в которой груз неизменно связан с пружиной. Представим, что грузу было задано начальное смещение a от положения равновесия (вправо), после чего груз был отпущен с нулевой начальной скоростью. Тогда груз начнет двигаться влево, и правая пружина будет разжиматься, пока груз от нее не отделится. Затем груз будет двигаться в зазоре с постоянной скоростью, достигнет конца левой пружины, начнет ее сжимать до тех пор, пока его координата не станет равной $-a$; затем весь этот процесс повторится в обратном порядке. На первом этапе движения, когда груз связан с правой пружиной, движение описывается законом

$$y = (a - a_0) \cos p_0 t,$$

и для полного разжатия правой пружины потребуется время

$$t_1 = \pi/(2p_0).$$

К этому моменту скорость груза равна

$$v = (a - a_0) p_0.$$

Расстояние, равное полузазору a_0 , груз пройдет за время

$$t_2 = \frac{a_0}{(a - a_0) p_0}.$$

Таким образом, общее время, в течение которого груз достигнет среднего положения, составляет

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a_0}{a - a_0} \right).$$

Очевидно, найденное время есть четверть периода свободных колебаний системы, так что для периода этих колебаний можно записать

$$T = \frac{4}{p_0} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a_0}{a - a_0} \right).$$

Соответственно круговая частота свободных колебаний системы с зазором равна

$$p = \frac{2\pi}{T} = p_0 \left[1 + \frac{2}{\pi(a/a_0 - 1)} \right]^{-1}.$$

Представление движения на фазовой плоскости

Для построения фазовых траекторий представим основное дифференциальное уравнение задачи (II.96) в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} = -f(x)$$

и разделим второе из этих уравнений на первое. Тогда получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x)}{v};$$

в этом уравнении время t отсутствует. Совокупность интегральных кривых уравнения образует фазовый портрет системы. Так как переменные разделяются, то можно получить

$$v^2 = -2 \int f(x) dx + C.$$

Постоянная C определяется одним начальным условием: $v = v_0$ при $x = x_0$, так что каждой конкретной комбинации x_0, v_0 соответствует определенная интегральная кривая.

Пусть, например, $f(x) = \alpha x^3$;
тогда

$$v^2 = -\frac{\alpha x^4}{4} + C. \quad (\text{II.103})$$

Для определения постоянной C подставляем сюда $x = x_0$; $v = v_0$ и получаем

$$C = \frac{\alpha x_0^4}{4} + v_0^2.$$

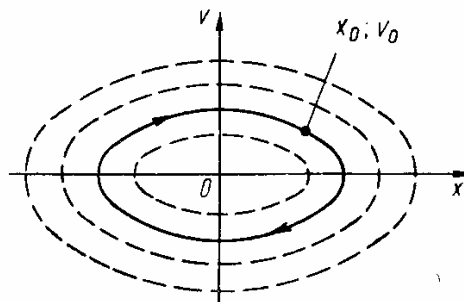


Рис. II.28

Теперь запишем уравнение (II.103) в виде

$$v^2 = \frac{\alpha}{4} (x_0^4 - x^4) + v_0^2,$$

т. е.

$$v = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{4} (x_0^4 - x^4) + v_0^2}.$$

На рис. II.28 сплошной линией представлена типичная кривая $v(x)$, служащая фазовой траекторией для определенных начальных условий x_0, v_0 . При изменении этих условий фазовые траектории принимают вид, изображенный штриховыми линиями.

Общий характер фазового портрета не отличается от показанного на рис. II.2 для линейной системы; это сходство объясняется консервативностью обеих систем (линейно-упругой и нелинейно-упругой).

Приближенные решения

Хотя формула (II.99) для периода свободных колебаний принципиально точна, но при решении практических задач приводит к громоздким выкладкам, обычно невыполнимым в замкнутой форме. Эти трудности можно обойти, пользуясь излагаемыми ниже приближенными способами определения частоты свободных колебаний.

Простейший способ. Наиболее прост (хотя весьма неточен) следующий прием. Примем, что колебания в рассматриваемой системе описываются законом

$$x = a \sin (pt + \alpha), \quad (\text{II.104})$$

подобно тому, как это имеет место в линейных системах. Выражение (II.104) является точным решением только в том случае, когда характеристика $f(x)$ линейна, но в общем случае подста-

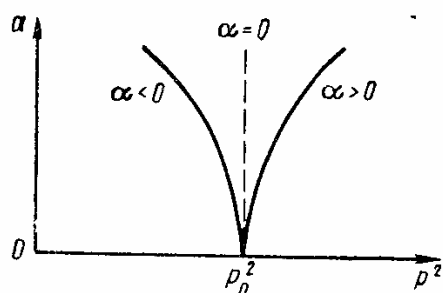


Рис. II.29

новка выражения (II.104) в уравнение (II.96) не обращает его в тождество. Смягчим требования точности и потребуем, чтобы уравнение (II.96) выполнялось хотя бы в те моменты, когда отклонение x достигает максимума, т. е. равно a . При этом ускорение $\ddot{x}$ также максимально:

$$\ddot{x}_{\max} = -ap^2. \quad (\text{II.105})$$

Следовательно, для указанных моментов времени должно выполняться равенство $-ap^2 + f(a) = 0$, т. е.

$$p^2 = \frac{f(a)}{a}.$$

Последняя формула определяет частоту свободных колебаний p в зависимости от их амплитуды a . Хотя эта формула очень неточная, при ее помощи можно получить правильное общее представление о связи $a(p^2)$. Так, если нелинейная характеристика имеет вид $f(x) = p_0^2 x + \alpha x^3$ (p_0, α — заданные числа), то

$$p^2 = \frac{p_0^2 a + \alpha a^3}{a} = p_0^2 + \alpha a^2.$$

График этой зависимости представлен на рис. II.29, из которого видно, что с ростом амплитуды свободных колебаний их частота увеличивается при $\alpha > 0$ (в случае жесткой характеристики) и уменьшается при $\alpha < 0$ (в случае мягкой характеристики).

Подобно этому могут быть построены приближенные зависимости $a(p^2)$ для других типов характеристик.

Метод малого параметра. В основе метода лежит предположение о том, что система обладает «слабой» нелинейностью. Такова, например, система, колебания которой описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + p_0^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad (\text{II.106})$$

если параметр α достаточно мал. В подобных случаях решение следует искать в виде разложения по степеням малого параметра:

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots, \quad (\text{II.107})$$

где $x_0, x_1, x_2, \dots$ — неизвестные функции времени, подлежащие определению.

Кроме разложения (II.107) необходимо также произвести разложение коэффициента p_0^2 :

$$p_0^2 = p^2 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \dots, \quad (\text{II.108})$$

где p^2 — новая, пока неизвестная постоянная; $c_1, c_2, \dots$ — неопределенные коэффициенты (целесообразные значения их указаны ниже).

Подставляя выражения (II.107) и (II.108) в уравнение (II.106) и ограничиваясь выписанными членами разложений, получим уравнение

$$\ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1 + \alpha^2 \ddot{x}_2 + (p^2 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2)(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2) + \alpha (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2)^3 = 0.$$

Раскрыв скобки и сохраняя члены, содержащие α не выше, чем во второй степени, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + p^2 x_0 + \alpha (\ddot{x}_1 + p^2 x_1 + c_1 x_0 + x_0^3) + \\ + \alpha^2 (\ddot{x}_2 + p^2 x_2 + c_2 x_0 + c_1 x_1 + 3x_0^2 x_1) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение должно быть справедливо при любом малом значении α . Поэтому коэффициенты при $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots$ должны быть порознь равны нулю; это приводит к системе

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + p^2 x_0 &= 0; \\ \ddot{x}_1 + p^2 x_1 &= -c_1 x_0 - x_0^3; \\ \ddot{x}_2 + p^2 x_2 &= -c_2 x_0 - c_1 x_1 - 3x_0^2 x_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.109})$$

Структура полученных уравнений подсказывает дальнейший ход решения: первое уравнение позволяет найти x_0 , после чего из второго уравнения можно определить x_1 , затем из третьего x_2 .

Примем начальные условия в следующем виде: при $t = 0$ $x = a, \dot{x} = 0$. На основании выражения (II.107) получим

$$\begin{aligned} x_0(0) + \alpha x_1(0) + \alpha^2 x_2(0) &= a; \\ \dot{x}_0(0) + \alpha \dot{x}_1(0) + \alpha^2 \dot{x}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы эти равенства были удовлетворены при любом значении α , необходимо одновременное выполнение следующих шести условий:

$$\left. \begin{aligned} x_0(0) &= a; \dot{x}_0(0) = 0; \\ x_1(0) &= 0; \dot{x}_1(0) = 0; \\ x_2(0) &= 0; \dot{x}_2(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.110})$$

Решая первое уравнение системы (II.109) при начальных условиях, содержащихся в первой строке системы (II.110), находим

$$x_0 = a \cos pt.$$

Подставив это выражение во второе уравнение системы (II.109), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + p^2 x_1 &= -c_1 a \cos pt - a^3 \cos^3 pt = \\ &= -\left(c_1 a + \frac{3}{4} a^3\right) \cos pt - \frac{1}{4} a^3 \cos 3pt. \end{aligned} \quad (\text{II.111})$$

Предположим, что коэффициент при $\cos pt$ отличен от нуля; тогда решение этого уравнения будет содержать так называемый вековой член вида $t \sin pt$, в котором время t находится вне знака тригонометрических функций. Таким решением резонансного типа можно пользоваться только при весьма малых значениях t , поскольку вековой член с ростом аргумента t неограниченно возрастает. Чтобы решение было справедливо при любых значениях t , необходимо исключить вековой член из выражения (II.111), для чего следует положить

$$c_1 a + \frac{3}{4} a^3 = 0;$$

отсюда определим коэффициент

$$c_1 = -\frac{3}{4} a^2. \quad (\text{II.112})$$

Тогда решением уравнения (II.111) будет

$$x_1 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{a^3}{32p^2} \cos 3pt.$$

После определения постоянных из второй строки начальных условий (II.110) найдем

$$x_1 = \frac{a^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt).$$

Таким образом, в разложениях (II.107) и (II.108) определены первые два слагаемых. Решение, точное до членов первого порядка малости, имеет вид

$$x = a \cos pt + \frac{\alpha a^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt),$$

причем в соответствии с формулами (II.108) и (II.112)

$$p^2 = p_0^2 + \frac{3}{4} \alpha a^2. \quad (\text{II.113})$$

Подставим теперь x_0 и x_1 в третье уравнение (II.109) и решим его подобным же образом. Это даст третий член разложения — функцию x_2 , причем величина c_2 вновь будет определена с таким расчетом, чтобы исключить вековой член. Опуская выкладки, запишем решение, точное до членов второго порядка малости:

$$x = a \cos pt + \frac{\alpha a^3}{32p^2} (\cos 3pt - \cos pt) + \\ + \frac{\alpha^2 a^5}{1024p^4} (\cos 5pt + 3 \cos 3pt - 4 \cos pt); \quad (\text{II.114})$$

$$p^2 = p_0^2 + \frac{3}{4} \alpha a^2 + \frac{3\alpha^2 a^4}{128p^2}.$$

В случаях иных нелинейных характеристик процесс строится аналогичным образом, но выкладки обычно оказываются еще более сложными. Метод, очевидно, приспособлен лишь к характеристикам, которые описываются единым аналитическим выражением, и непосредственно не может быть использован в других случаях (например, при ломаных характеристиках).

Отметим важные особенности полученных решений: колебательный процесс описывается не одной гармоникой (косинусоидой), а суммой гармоник, при этом последующие гармоники имеют сравнительно малые амплитуды и поэтому менее существенны; конечно, частота основной гармоники p зависит от амплитуды колебаний a .

Метод Бубнова—Галеркина. Согласно этому методу заранее предполагается некоторая определенная форма искомого решения. В простейшем варианте решение уравнения (II.96) разыскивается в том же виде, что и для линейных систем:

$$x = a \cos (pt + \alpha), \quad (\text{II.115})$$

где a , α , p — постоянные.

Подставим это решение в уравнение (II.96). Конечно, тождественного равенства нулю не получится, поскольку выражение (II.115) не является точным решением уравнения (II.96). Согласно основной идее метода следует потребовать, чтобы равнялся нулю интеграл, взятый в пределах одного периода:

$$\int_0^{2\pi/p} [\ddot{x} + f(x)] x dt = 0. \quad (\text{II.116})$$

Подставляя сюда выражение (II.115), получим

$$\int_0^{2\pi/p} \{ -ap^2 \cos (pt + \alpha) + f[a \cos (pt + \alpha)] \} \cos (pt + \alpha) dt = 0, \quad (\text{II.117})$$

или

$$-\pi p a + \int_0^{2\pi/p} f[a \cos(pt + \alpha)] \cos(pt + \alpha) dt = 0.$$

Обозначив теперь $pt + \alpha = \psi$, получим окончательную формулу для квадрата частоты

$$p^2 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (\text{II.118})$$

Иллюстрируем применение этой формулы на примере рассмотренной ранее кубической характеристики

$$f(x) = p_0^2 x + \alpha x^3.$$

В этом случае

$$f(a \cos \psi) = a p_0^2 \cos \psi + \alpha a^3 \cos^3 \psi,$$

и по формуле (II.118) имеем

$$p^2 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} (a p_0^2 \cos \psi + \alpha a^3 \cos^3 \psi) \cos \psi d\psi.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi; \quad \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \frac{3}{4} \pi,$$

то

$$p^2 = p_0^2 + \frac{3}{4} \alpha a^2.$$

Этот результат полностью совпадает с формулой (II.113), найденной по методу малого параметра.

В приведенных примерах использования метода Бубнова—Галеркина движение задается в виде выражения (II.115); при этом с самого начала исключаются высшие гармоники. Однако метод Бубнова—Галеркина позволяет строить и высшие приближения. Для этого нужно искать решение не в виде одной функции (II.115), а в виде функционального ряда

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots,$$

задаваясь видом функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., и затем требовать обращения в нуль интегралов типа (II.116):

$$\int_0^T [\ddot{x} + f(x)] x_i dt = 0 \quad (i = 1; 2; \dots).$$

Способ гармонической линеаризации (простейший вариант метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова). Представим уравнение (II.96) в виде

$$\ddot{x} + p^2 x = p^2 x - f(x),$$

где p — пока неизвестная частота колебаний.

Подставив в правую часть приближенную форму решения

$$x = a \cos(pt + \alpha),$$

получим уравнение вынужденных колебаний линейной системы

$$\ddot{x} + p^2 x = F(t), \quad (\text{II.119})$$

где

$$F(t) = ap^2 \cos(pt + \alpha) - f[a \cos(pt + \alpha)]$$

представляет собой периодическую функцию с периодом $2\pi/p$.

Разложив $F(t)$ в ряд Фурье, получим

$$F(t) = a_0 + a_1 \cos(pt + \alpha) + a_2 \cos 2(pt + \alpha) + \dots$$

Если коэффициент a_1 будет отличным от нуля, то слагаемое $a_1 \cos(pt + \alpha)$ послужит причиной появления векового члена в решении уравнения (II.119). Для исключения векового члена необходимо положить равным нулю коэффициент Фурье a_1 :

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(pt + \alpha) dt = 0,$$

т. е.

$$\int_0^{2\pi/p} \{ap^2 \cos(pt + \alpha) - f[a \cos(pt + \alpha)]\} \cos(pt + \alpha) dt = 0.$$

Последнее соотношение совпадает с основным уравнением Бубнова—Галеркина (II.117).

Способ прямой линеаризации (случай симметричной характеристики). В основе способа лежит замена нелинейной характеристики $f(x)$ линейным выражением

$$f_*(x) = p^2 x \quad (\text{II.120})$$

со специально подбираемым коэффициентом p^2 . Уклонение заменяющей характеристики (II.120) от заменяемой характеристики $f(x)$ зависит от координаты x (рис. II.30, а):

$$r(x) = f(x) - p^2 x.$$

Оно может быть подчинено требованию минимума интеграла

$$I = \int_0^a r^2 dx,$$

выражающего интегральное квадратичное уклонение $r(x)$ во всем интервале изменения координаты x . Этот интеграл, очевидно, зависит от выбора параметра p^2 , поэтому минимизация достигается определением этого параметра из уравнения $\frac{dI}{d(p^2)} = 0$.

При таком подходе равные уклонения r принимаются в равной мере важными независимо от значения координаты x . На

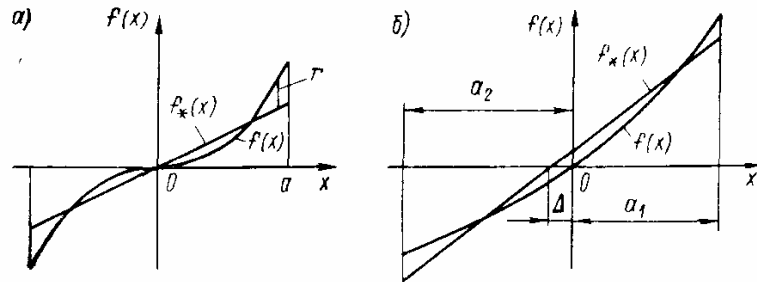


Рис. II.30

самом же деле в задачах о колебаниях более существенны уклонения r при больших значениях координаты x , поэтому естественное рассмотрение «взвешенного» уклонения

$$rx = [f(x) - p^2x]x.$$

Тогда задача сводится к минимизации интеграла

$$I_1 = \int_{-a}^a \{[f(x) - p^2x]x\}^2 dx,$$

т. е. к определению p^2 из уравнения

$$\frac{dI_1}{d(p^2)} = 0. \quad (\text{II.121})$$

Этот подход предполагает, что ошибка, вызываемая уклонением, пропорциональна соответствующему значению координаты. Из уравнения (II.121) находим

$$p^2 = \frac{5}{2a^5} \int_{-a}^a f(x) x^3 dx = \frac{5}{a^5} \int_0^a f(x) x^3 dx. \quad (\text{II.122})$$

После того как параметр p^2 найден, задача сводится к известному линейному уравнению

$$\ddot{x} + p^2x = 0,$$

заменившему заданное нелинейное уравнение. Отсюда непосредственно видно, что параметр p^2 представляет собой квадрат частоты свободных колебаний.

Определим в качестве примера частоту p по формуле (II.122) для рассмотренной выше характеристики

$$f(x) = p_0^2 x + \alpha x^3.$$

Вычисляем

$$\int_0^a (p_0 x + \alpha x^3) x^3 dx = \frac{p_0^2 a^5}{5} + \frac{\alpha a^7}{7}.$$

По формуле (II.122) получим

$$p^2 = p_0^2 + \frac{5}{7} \alpha a^2. \quad (\text{II.123})$$

Сравним точность результатов, получаемых различными способами в частном случае, когда $p_0 = 0$, т. е. $f(x) = \alpha x^3$.

По формуле (II.123)

$$p = 0,845a \sqrt{\alpha}.$$

По формулам (II.113) и (II.118) в первом приближении

$$p = 0,866a \sqrt{\alpha}.$$

По точной формуле (II.102)

$$p = 0,847a \sqrt{\alpha}.$$

Способ прямой линеаризации (случай несимметричной характеристики). Если характеристика несимметрична (рис. II.30, б), то при начальном отклонении a_1 наибольшее отклонение в другую сторону будет a_2 , причем в общем случае $a_1 \neq a_2$. Связь между этими наибольшими отклонениями определяется формулой

$$\int_{-a_2}^{a_1} f(x) dx = 0,$$

выражающей равенство потенциальных энергий систем в обоих крайних положениях. Среднее положение, около которого совершаются колебания, смещено от начала координат влево на отрезок $\Delta = (a_2 - a_1)/2$.

Данному отклонению a_1 соответствуют вполне определенные отклонения a_2 и смещения центра колебаний Δ . Заменяющая линейная характеристика должна быть проведена через центр колебаний; ее уравнение

$$f_*(x) = p^2 (x + \Delta).$$

Образует, как и раньше, уклонение

$$r = f(x) - p^2 (x + \Delta),$$

а вызываемую им ошибку будем считать пропорциональной величине $x + \Delta$. Тогда минимизации подлежит интеграл

$$I = \int_{-a_2}^{a_1} \{ [f(x) - p^2(x + \Delta)] (x + \Delta) \}^2 dx.$$

Решая уравнение

$$\frac{dI}{d(p^2)} = 0,$$

получим

$$p^2 = \frac{5}{(a_1 + a_2)^5} \int_{-a_2}^{a_1} f(x) (x + \Delta)^3 dx.$$

Введем переменную $x_1 = x + \Delta$ и полуразмах колебаний (или амплитуду колебаний в эквивалентной линейной системе) $a = (a_1 + a_2)/2$. Тогда выражение

$$p^2 = \frac{5}{2a^5} \int_{-a}^a f(x_1 - \Delta) x_1^3 dx_1 \quad (\text{II.124})$$

представляет собой формулу для квадрата частоты свободных колебаний.

Конечно, формулы (II.123) и (II.124) справедливы не только в случаях, когда характеристики описываются аналитическими функциями. Ими можно пользоваться и в случаях, когда нелинейные характеристики имеют разрывы или переломы (в частности, кусочно-линейные характеристики).

Рассмотрим приложение формулы (II.123) к муфтам, показанным на рис. II.25, б и в. Обозначив через φ угол взаимного поворота полумуфт, получим (II.122) в виде

$$p^2 = \frac{5}{a^5} \int_0^a f(\varphi) \varphi^3 d\varphi, \quad (\text{II.125})$$

где a — амплитуда угла поворота.

Для муфты с натягом (см. рис. II.25, б) вычисление по формуле (II.125) дает

$$p^2 = \frac{c n r^2}{I} \left(1 + \frac{5 P_0}{4 c r a} \right), \quad (\text{II.126})$$

где I — полярный момент инерции системы.

Сплошная линия на рис. II.31 выражает зависимость a (p^2), соответствующую формуле (II.126). Штриховой линией показана та же зависимость при большем значении усилия P_0 . Величина

$\sqrt{cnr^2/I}$ есть собственная частота при $P_0 = 0$ (в линейной системе).

Для муфты с зазорами (см. рис. II.25, в) соответственно формуле (II.125)

$$p^2 = \frac{cnr^2}{I} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi_0}{a} \right)^5 - \frac{5}{4} \cdot \frac{\varphi_0}{a} \right].$$

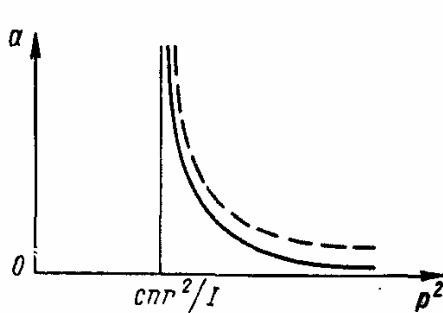


Рис. II.31

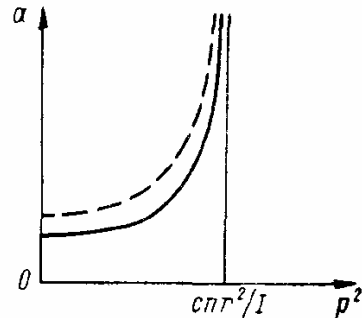


Рис. II.32

Зависимость $a(p^2)$, соответствующая этой формуле, показана на рис. II.32 сплошной линией. Штриховая линия соответствует иному (большому) значению φ_0 . Величина $\sqrt{cnr^2/I}$ есть собственная частота соответствующей линейной системы ($\varphi_0 = 0$).

7. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Простейшая система

Составление уравнений задачи. Как указывалось выше, для составления уравнений движения могут быть использованы основной (уравнения Лагранжа), прямой и обратный способы. Иллюстрируем их применение на простейшем примере двухмассовой системы (рис. II.33, а), в которой c_1 и c_2 — жесткости пружин; m_1 и m_2 — массы грузов; x_1 и x_2 — перемещения грузов.

Основной способ. В процессе колебаний в пружинах развиваются усилия $N_1 = c_1 x_1$ и $N_2 = c_2 (x_2 - x_1)$, поэтому потенциальная энергия системы выражается в виде

$$\Pi = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы составляет

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}.$$

Эти выражения должны быть подставлены в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2). \quad (\text{II.127})$$

Прежде всего образуем соответствующие производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1); \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1).$$

В соответствии с этим уравнения (II.127) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.128})$$

Прямой способ. В процессе колебаний на первую массу действуют сила натяжения первой пружины и сила натяжения второй пружины, причем их проекции на ось x равны $-c_1 x_1$ и $c_2 (x_2 - x_1)$. Уравнение движения первой массы имеет вид

$$-c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1. \quad (\text{II.129})$$

На вторую массу действует только сила натяжения второй пружины, имеющая проекцию $-c_2 (x_2 - x_1)$; уравнение движения

$$-c_2 (x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2. \quad (\text{II.130})$$

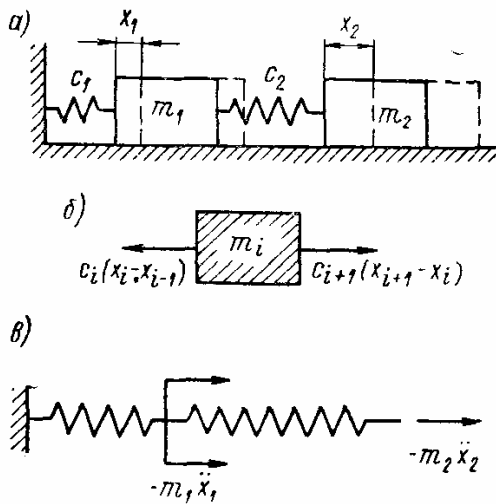


Рис. II.33

При большом числе последовательно расположенных масс каждое из уравнений будет содержать не более трех неизвестных координат, так как силы упругости пружины, действующие на i -ю массу, полностью определяются смещениями x_{i-1} , x_i и x_{i+1} (рис. II.33, б).

Обратный способ. Рассмотрим безмассовую систему двух пружин, нагруженную силами инерции (рис. II.33, в). Первая пружина нагружена силой $-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2$, а вторая — силой $-m_2 \ddot{x}_2$. Перемещение первой точки (равное удлинению первой пружины)

$$x_1 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1}, \quad (\text{II.131})$$

перемещение второй точки (равное общему удлинению обеих пружин)

$$x_2 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1} + \frac{-m_2 \ddot{x}_2}{c_2}. \quad (\text{II.132})$$

Сопоставляя полученные уравнения, можно отметить следующее.

Полное совпадение уравнений (II.128), полученных по основному способу, и уравнений (II.129) и (II.130), полученных по прямому способу, не является случайностью. Оно имеет место всегда, когда обобщенные координаты выбраны так, что выражение кинетической энергии не содержит произведений скоростей (в данном случае произведения $\dot{x}_1\dot{x}_2$). Если обобщенные координаты выбрать с таким расчетом, чтобы выражение потенциальной энергии не содержало произведений x_1x_2 (в нашей задаче это не было достигнуто), то уравнения, получаемые по основному способу, совпадут с уравнениями, составляемыми при помощи обратного способа.

Хотя система уравнений (II.129), (II.130), конечно, эквивалентна системе уравнений (II.131), (II.132), однако при увеличении числа масс эти системы неравноценны в вычислительном отношении. Выше указывалось, что если иметь в виду механические системы рассмотренного типа, то независимо от числа масс прямой способ будет приводить к уравнениям, каждое из которых содержит не более трех неизвестных функций. В то же время уравнения, составляемые по обратному способу, будут прогрессивно усложняться, так как в каждом из них будут представлены все n искомых функций задачи.

По этой причине прямой способ всегда предпочтительнее для анализа колебаний цепных систем рассмотренного типа. В других случаях большие удобства может дать применение обратного способа (как, например, при исследовании изгибных колебаний балок с несколькими массами).

Решение уравнений движения для простейшей системы. Продолжим рассмотрение системы с двумя степенями свободы (рис. II.33, а). Это позволит простейшим образом обнаружить основные особенности колебаний систем, имеющих несколько степеней свободы, в частности существование нескольких собственных частот. Попробуем удовлетворить уравнения колебаний (II.129), (II.130) функциями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin(pt + \alpha); \\ x_2 &= a_2 \sin(pt + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.133})$$

Эти функции еще не представляют общего решения задачи, но дают возможность его построить. Подставив выражения (II.133) в уравнения (II.129) и (II.130), получим

$$\left. \begin{aligned} -c_1 a_1 + c_2 (a_2 - a_1) &= -m_1 a_1 p^2; \\ -c_2 (a_2 - a_1) &= -m_2 a_2 p^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.134})$$

В этих уравнениях содержатся три неизвестных: амплитуды a_1 , a_2 и частота p . Конечно, из двух уравнений найти три величины

нельзя; однако уравнения (II.134) позволяют довести до конца определение собственной частоты.

Находим из первого уравнения отношение

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 p^2}{c_2}, \quad (\text{II.135})$$

то же отношение из второго уравнения

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 p^2}. \quad (\text{II.136})$$

Приравнивание выражений (II.135) и (II.136) приводит к *частотному уравнению*

$$\frac{c_1 + c_2 - m_2 p^2}{c_2} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 p^2}, \quad (\text{II.137})$$

содержащему единственную неизвестную — частоту p .

Частотное уравнение (II.137) может быть также получено иным путем. Система уравнений (II.134) может быть переписана в виде

$$\left. \begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 p^2) a_1 - c_2 a_2 &= 0; \\ -c_2 a_1 + (c_2 - m_2 p^2) a_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь отчетливо видна однородность системы уравнений относительно амплитуд a_1 и a_2 . Однородная система уравнений удовлетворяется нулевыми корнями $a_1 = a_2 = 0$. Это — тривиальное решение, которое в нашей задаче означает отсутствие колебаний. Однако в одном исключительном случае возможно нетривиальное решение ($a_1 \neq 0$; $a_2 \neq 0$) — при равенстве нулю определителя, составленного из коэффициентов системы:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 p^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 p^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{II.138})$$

Развернув определитель, приходим к уравнению (II.137) или, продолжая выкладки, к уравнению

$$p^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) p^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0. \quad (\text{II.139})$$

Для квадрата частоты получаем два вещественных и положительных решения:

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}; \\ p_2^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.140})$$

Соответственно можно вычислить и две собственные частоты:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}; \\ p_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.141})$$

Таким образом, колебательный процесс оказывается двух-частотным и определяется функциями $\sin(p_1 t + \alpha_1)$ и $\sin(p_2 t + \alpha_2)$. Существование двух частот показывает неполноту записи (II.133). Чтобы отразить в общем решении обе гармоники, усложним индексацию и запишем решение в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11} \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(p_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= a_{21} \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_{22} \sin(p_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.142})$$

Здесь первый индекс у амплитуды a_{ik} означает номер координаты, а второй индекс — номер слагаемого в строке (номер частоты).

Амплитуды связаны соотношением (II.135) или эквивалентным ему соотношением (II.136). Если подставим в выражение (II.135) первую частоту p_1 , то получим не зависящее от начальных условий отношение амплитуд первой гармоники

$$\kappa_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 p_1^2}{c_2}. \quad (\text{II.143})$$

Связь между амплитудами второй гармоники определяется тем же отношением (II.135) или отношением (II.136), если принять $p^2 = p_2^2$:

$$\kappa_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 p_2^2}{c_2}. \quad (\text{II.144})$$

Следовательно, вместо решений (II.142) можно написать

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11} \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(p_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \kappa_{21} a_{11} \sin(p_1 t + \alpha_1) + \kappa_{22} a_{12} \sin(p_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.145})$$

Здесь собственные частоты p_1 и p_2 и отношения κ_{21} и κ_{22} зависят только от параметров колебательной системы. Величины a_{11} , a_{12} , α_1 и α_2 должны быть определены из четырех начальных условий, выражающих значения смещений и скоростей обеих масс в начальное мгновение. Пусть, например, при $t = 0$

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0; \quad \dot{x}_1(0) = 0; \quad \dot{x}_2(0) = v_0,$$

т. е. движение системы вызвано мгновенным ударом по второй

массе (подобная задача возникает, например, при анализе колебаний артиллерийских систем после выстрела).

При помощи выражений (II.145) получаем:

$$\begin{aligned}a_{11} \sin \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_2 &= 0; \\ \kappa_{21} a_{11} \sin \alpha_1 + \kappa_{22} a_{12} \sin \alpha_2 &= 0; \\ a_{11} p_1 \cos \alpha_1 + a_{12} p_2 \cos \alpha_2 &= 0; \\ \kappa_{21} a_{11} p_1 \cos \alpha_1 + \kappa_{22} p_2 \cos \alpha_2 &= v_0.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad a_{11} = \frac{v_0}{p_1} \cdot \frac{1}{\kappa_{21} - \kappa_{22}}; \quad a_{12} = \frac{v_0}{p_2} \cdot \frac{1}{\kappa_{22} - \kappa_{21}}.$$

Величины p_1 , p_2 , κ_{21} и κ_{22} известны; для их вычисления должны быть использованы формулы (II.141), (II.143) и (II.144).

Таким образом, в рассматриваемом случае реализуются обе колебательные составляющие, входящие в выражения (II.145).

Искусственным подбором начальных условий можно добиться одночастотности колебаний, например, сделать так, чтобы $a_{12} = 0$. При этом колебания описываются одной гармоникой:

$$x_1 = a_{11} \sin(p_1 t + \alpha_1); \quad x_2 = \kappa_{21} a_{11} \sin(p_1 t + \alpha_1).$$

Так как коэффициент κ_{21} не зависит от начальных условий, то рассматриваемые одночастотные колебания характеризуются вполне определенным (т. е. зависящим только от параметров системы) отношением перемещений, которое остается неизменным в процессе колебаний. Это отношение определяет *первую собственную форму* колебаний.

Если начальные условия таковы, что $a_{11} = 0$, то колебания будут также одночастотными, но с частотой p_2 :

$$x_1 = a_{12} \sin(p_2 t + \alpha_2); \quad x_2 = \kappa_{22} a_{12} \sin(p_2 t + \alpha_2),$$

причем отношение амплитуд κ_{22} определяет *вторую собственную форму* колебаний.

В частном случае, когда $c_1 = c_2 = c$; $m_1 = m_2 = m$, по формулам (II.140) находим

$$p_1^2 = \frac{c}{m} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \quad p_2^2 = \frac{c}{m} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

и по формулам (II.143) и (II.144) получаем

$$\kappa_{21} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618; \quad \kappa_{22} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,618.$$

При первой собственной форме колебаний обе массы движутся в одном направлении, причем амплитуда колебаний второй массы больше амплитуды колебаний первой массы. Второй собственной форме колебаний соответствует движение масс в противополож-

ных направлениях; амплитуда колебаний второй массы меньше амплитуды первой массы.

Еще раз подчеркнем, что для реализации собственных форм в чистом виде необходим специальный выбор начальных условий.

Ортогональность собственных форм колебаний. При колебаниях системы по первой собственной форме наибольшие отклонения равны a_{11} и a_{21} ; этим отклонениям соответствуют силы инерции $m_1 a_{11} p_1^2$ и $m_2 a_{21} p_1^2$. Аналогично при колебаниях по второй собственной форме наибольшие отклонения составляют a_{12} и a_{22} и соответствующие силы инерции равны $m_1 a_{12} p_2^2$ и $m_2 a_{22} p_2^2$.

Применим к этим двум состояниям теорему о взаимности возможных работ. Согласно этой теореме работа сил первого состояния ($m_1 a_{11} p_1^2$; $m_2 a_{21} p_1^2$) на перемещениях второго состояния (a_{12} ; a_{22}) равна работе сил второго состояния ($m_1 a_{12} p_2^2$; $m_2 a_{22} p_2^2$) на перемещениях первого состояния (a_{11} ; a_{21}), т. е.

$$p_1^2 (m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22}) = p_2^2 (m_1 a_{12} a_{11} + m_2 a_{22} a_{21}),$$

или

$$(p_2^2 - p_1^2) (m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22}) = 0.$$

Так как p_1^2 и p_2^2 различны, то должно выполняться равенство

$$m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22} = 0.$$

Это соотношение выражает свойство ортогональности двух собственных форм колебаний; после деления на $a_{11} a_{12}$ оно может быть переписано также в виде

$$m_1 + m_2 \kappa_{21} \kappa_{22} = 0.$$

Если известно отношение κ_{21} , определяющее первую собственную форму, то из условия ортогональности можно найти отношение κ_{22} , соответствующее второй собственной форме:

$$\kappa_{22} = - \frac{m_1}{m_2 \kappa_{21}}.$$

Понятие о собственных формах колебаний, как и важное свойство их ортогональности, будет использовано далее при рассмотрении систем, имеющих произвольное конечное число степеней свободы. При этом число собственных форм колебаний и равное ему число собственных частот совпадают с числом степеней свободы системы.

Крутильные колебания валов с дисками

Основные уравнения. Рассмотрим крутильные колебания многомассовой системы, состоящей из ряда абсолютно жестких массивных дисков, соединенных упругими элементами, которые считаются лишенными массы (рис. II.34). Эта система является общепринятой, хотя и безупречной эквивалентной схемой для расчета

крутильных колебаний коленчатых валов. Коленчатый вал приводится к такой схеме путем следующих замен: момент инерции заменяющего диска относительно оси вала должен быть равен моменту инерции колена относительно той же оси, при этом учитывается присоединенная масса шатуна; жесткость на кручение участка заменяющего вала должна быть равна жесткости на кручение соответствующего участка коленчатого вала.

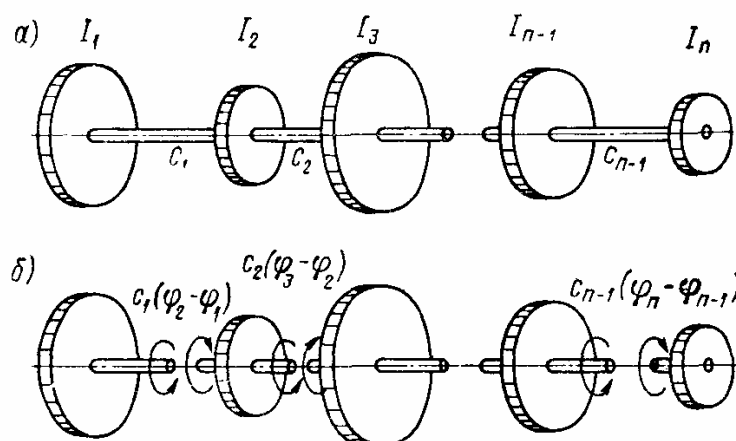


Рис. II.34

Нужно иметь в виду, что эти замены не могут обеспечить полной эквивалентности обеих схем. Дело в том, что приведенный момент инерции масс колена и шатуна изменяется в процессе вращения коленчатого вала, поэтому замена колена диском с постоянным моментом инерции не является строгой. Кроме того, при действии на коленчатый вал двух противоположно направленных пар (рис. II.35) деформация будет заключаться не только в за-

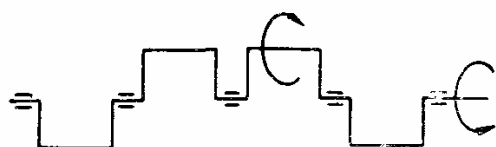


Рис. II.35

кручивании участка между парами — вследствие изгиба произойдет закручивание и других участков; заменяющая система не способна отразить этот побочный эффект.

Тем не менее эксперименты подтверждают приемлемость заменяющей схемы при достаточно тщательном определении эквивалентных моментов инерции и особенно эквивалентных жесткостей.

Обозначим (см. рис. II.34, а) через $I_1, I_2, \dots, I_n$ моменты инерции масс дисков относительно оси вала; $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ — коэффициенты жесткости при кручении участков вала; $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — углы поворота дисков вокруг оси вала.

Крутящие моменты, действующие в сечениях вала, зависят от взаимного поворота двух смежных дисков и на разных участках определяются формулами:

$$c_1 (\varphi_2 - \varphi_1); c_2 (\varphi_3 - \varphi_2); \dots; c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}).$$

Уравнения движения проще всего составлять прямым способом (см. рис. II.34, б):

$$\left. \begin{aligned} c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= I_1 \ddot{\varphi}_1; \\ c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) - c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= I_2 \ddot{\varphi}_2; \\ c_3 (\varphi_4 - \varphi_3) - c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) &= I_3 \ddot{\varphi}_3; \\ . &. \\ c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) - c_{n-2} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) &= I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1}; \\ -c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= I_n \ddot{\varphi}_n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.146})$$

Число этих уравнений совпадает с числом дисков, т. е. равно n .

Уравнения (II.146) удовлетворяются решением

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = a_0 + \omega t, \quad (\text{II.147})$$

описывающим равномерное вращение вала и дисков как жесткого тела. Кроме этого возможно решение

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 \sin(pt + \alpha); \\ \varphi_2 &= a_2 \sin(pt + \alpha); \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \varphi_n &= a_n \sin(pt + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.148})$$

которое описывает упругие колебания.

Убедимся, что при определенных соотношениях между амплитудами $a_1, a_2, \dots, a_n$ выражения (II.148) действительно представляют решение системы уравнений (II.146). Подставляя выражения (II.148) в уравнения (II.146), получим

$$\left. \begin{aligned} c_1(a_2 - a_1) &= -I_1 p^2 a_1; \\ c_2(a_3 - a_2) - c_1(a_2 - a_1) &= -I_2 p^2 a_2; \\ c_3(a_4 - a_3) - c_2(a_3 - a_2) &= -I_3 p^2 a_3; \\ . &. \\ c_{n-1}(a_n - a_{n-1}) - c_{n-2}(a_{n-1} - a_{n-2}) &= -I_{n-1} p^2 a_{n-1}; \\ &- c_{n-1}(a_n - a_{n-1}) = -I_n p^2 a_n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.149})$$

В этой системе уравнений содержится $n + 1$ неизвестных (n неизвестных амплитуд и частота p).

Частотное уравнение. Из системы (II.149) можно получить уравнение, содержащее одну неизвестную p^2 и определяющее спектр частот $p_1, p_2, \dots$ рассматриваемой многомассовой системы. Для этого выразим из первого уравнения системы (II.149) a_2 через a_1 и подставим результат во второе уравнение системы; тогда можно будет выразить a_3 через a_1 . Продолжая этот процесс до $n-1$ -го уравнения, можно выразить все амплитуды (до n -й включительно) через амплитуду a_1 . Эти выражения будут зависеть от частоты, причем вид зависимости будет прогрессивно усложняться.

Наконец, подставив выражения a_{n-1} и a_n в последнее уравнение (II.149), можно будет исключить a_1 и получить алгебраическое уравнение, содержащее только одну неизвестную — частоту p ; степень этого уравнения относительно квадрата частоты p^2 равна числу дисков n .

К частотному уравнению можно прийти проще, если рассматривать систему (II.149) как систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных амплитуд $a_1, a_2, \dots, a_n$. Так как эта система однородна, то отличные от нуля решения возможны только в случае, если равен нулю определитель, составленный из коэффициентов при амплитудах. Например, при трех дисках ($n = 3$) это условие выглядит так:

$$\begin{vmatrix} -c_1 + I_1 p^2 & c_1 & 0 \\ c_1 & -c_2 - c_1 + I_2 p^2 & c_2 \\ 0 & c_2 & -c_2 + I_3 p^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{II.150})$$

Развернув определитель, получим частотное уравнение. Из рассмотрения структуры главной диагонали определителя видно, что степень этого уравнения относительно p^2 равна n .

Для трехмассовой системы, развернув определитель (II.150), получим

$$p^2 \left[\frac{I_1 I_2 I_3}{c_1 c_2} p^4 - \left(\frac{I_2 + I_3}{c_1} I_1 + \frac{I_1 + I_2}{c_2} I_3 \right) p^2 + I_1 + I_2 + I_3 \right] = 0. \quad (\text{II.151})$$

Соответственно степени уравнения число корней p_i также равно n . Один из корней всегда равен нулю, так что число отличных от нуля частот на единицу меньше числа дисков и равно $n - 1$. Нулевой корень соответствует повороту всех дисков и вала как жесткого целого; ненулевые корни (они все вещественные) соответствуют явлению упругих колебаний. Следовательно, система, состоящая из невесомого вала и n дисков, обладает $n - 1$ отличными от нуля собственными частотами $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$; их принято нумеровать в порядке возрастания частоты.

Пример 8. Определить собственные частоты для трехмассовой системы (рис. II.36, а), представляющей собой упрощенную схему судовой дизельной установки. Приведенный момент инерции вала двигателя $I_1 = 17\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$; момент инерции маховика $I_2 = 85\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$; приведенный момент инерции гребного винта (с учетом массы гребного вала и присоединенной массы воды) $I_3 = 27\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$. Жесткости: $c_1 = 211 \cdot 10^6 \text{ кгс} \cdot \text{см}$; $c_2 = 14,8 \cdot 10^6 \text{ кгс} \cdot \text{см}$.

При этих значениях частотное уравнение (II.151) принимает вид

$$p^2 (0,01242 p^4 - 195,3 p^2 + 129\,000) = 0.$$

Отличные от нуля корни этого уравнения:

$$p_1^2 = 690 \text{ с}^{-2}; \quad p_2^2 = 15\,000 \text{ с}^{-2}.$$

Следовательно, собственные частоты $p_1 = 26,3 \text{ с}^{-1}$; $p_2 = 122,5 \text{ с}^{-1}$.

При четырех дисках и более приходится иметь дело с частотными уравнениями выше второй степени. В этих случаях для их решения в настоящее время почти исключительно применяются ЭВМ.

Собственные формы колебаний. Из основной системы уравнений (II.149) можно найти не только собственные частоты, но и соответствующие им вполне определенные отношения между амплитудами. Если частоту p_1 , найденную из частотного уравнения, подставить в систему (II.149), то можно последовательно выразить все амплитуды через амплитуду a_1 . Если в систему (II.149) подставить частоту p_2 , то обнаружатся иные соотношения между амплитудами. Таким образом, каждой частоте p_i соответствует своя система отношений амплитуд, определяющая собственную форму колебаний.

Число этих форм равно числу собственных частот, т. е. на единицу меньше числа дисков *. Важным свойством является взаимная ортогональность любых двух собственных форм, например i -й и k -й:

$$I_1 a_{1i} a_{1k} + I_2 a_{2i} a_{2k} + \dots + I_n a_{ni} a_{nk} = 0. \quad (\text{II.152})$$

Пример 9. Для системы, изображенной на рис. II.36, а найти собственные формы колебаний.

Так как система содержит три диска, число этих форм равно двум.

1. Определение первой собственной формы. В уравнения (II.149) подставляем

$$p^2 = p_1^2 = 690 \text{ с}^{-2}.$$

Из первого уравнения находим $a_{21} = 0,945 a_{11}$, из второго уравнения $a_{31} = -3,65 a_{11}$ (вторые индексы обозначают номер формы).

Последний результат получится и из третьего уравнения, которое оказывается следствием первых двух. На рис. II.36, б показана первая собственная форма, имеющая один узел. Как видно, колебания, соответствующие первой частоте, происходят почти без деформаций вала двигателя и состоят в основном в скручивании гребного вала.

2. Определение второй собственной формы. Если повторить те же операции для $p^2 = 15\,000 \text{ с}^{-2}$, то получим $a_{22} = -0,209 a_{12}$ и $a_{32} = 0,008 a_{12}$. В дан-

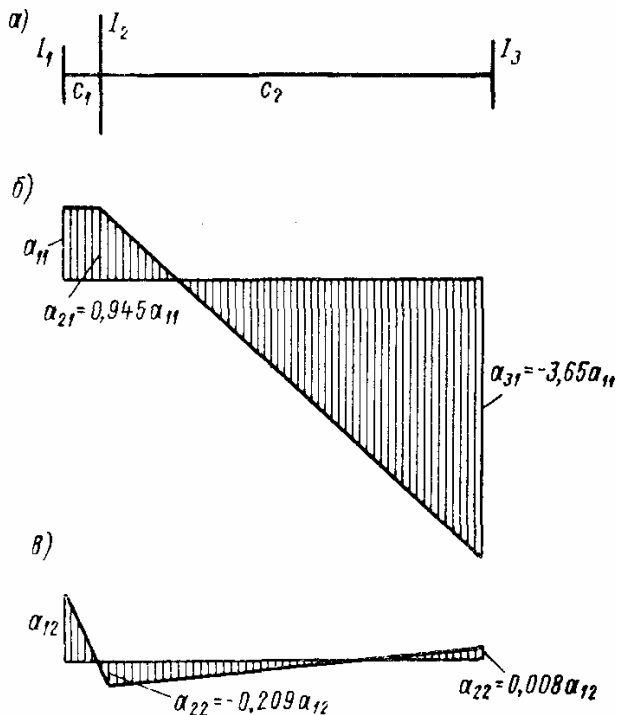


Рис. II.36

* Можно также сказать, что нулевой собственной частоте тоже соответствует своя собственная форма — поворот всей системы вокруг оси как жесткого целого.

ном случае основным является скручивание вала двигателя, тогда как гребной вал почти не скручивается (рис. II.36, в).

Второй частоте отвечает двухузловая собственная форма колебаний. Следует отметить, что в многомассовых системах высшим частотам соответствуют все более сложные (в отношении числа узлов) собственные формы колебаний.

Можно убедиться, что найденные формы ортогональны одна другой. Пользуясь формулой (II.152), вычисляем

$$I_1 a_{11} a_{12} + I_2 a_{21} a_{22} + I_3 a_{31} a_{32} = 17\,000 a_{11} a_{12} + \\ + 85\,000 \cdot 0,945 a_{11} (-0,209 a_{12}) + 27\,000 (-3,65 a_{11}) 0,008 a_{12} \approx 0.$$

Кроме того, каждая из форм ортогональна нулевой собственной форме (вращение вала как жесткого целого); последней соответствуют равные перемещения $a_{10} = a_{20} = a_{30} = a_0$. Ортогональность первой и нулевой форм проверяется вычислением

$$I_1 a_{11} a_{10} + I_2 a_{21} a_{20} + I_3 a_{31} a_{30} = 17\,000 a_{11} a_0 + \\ + 85\,000 \cdot 0,945 a_{11} a_0 + 27\,000 (-3,65 a_{11}) a_0 \approx 0,$$

а ортогональность второй и нулевой форм — вычислением

$$I_1 a_{12} a_{10} + I_2 a_{22} a_{20} + I_3 a_{32} a_{30} = 17\,000 a_{12} a_0 + \\ + 85\,000 (-0,209 a_{12}) a_0 + 27\,000 \cdot 0,008 a_{12} a_0 \approx 0.$$

Определение движения по начальным условиям. При записи решения (II.148) предполагалось, что колебания являются одночастотными, т. е. для любого диска описываются одной гармоникой:

$$\varphi_i = a_i \sin(pt + \alpha).$$

Существование ряда значений частот p требует обобщения решения (II.148) и записи его в виде

$$\varphi_i = a_{i1} \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_{i2} \sin(p_2 t + \alpha_2) + \dots + \\ + a_{i, n-1} \sin(p_{n-1} t + \alpha_{n-1}) \quad (i = 1; 2; \dots; n).$$

Здесь первый индекс у амплитуды означает номер диска, а второй индекс — номер соответствующей частоты.

Для получения общего решения необходимо учесть возможность вращения всей системы как жесткого целого (что соответствует частоте $p = 0$), т. е. добавить слагаемое вида (II.147):

$$\varphi_i = a_0 + \omega t + a_{i1} \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_{i2} \sin(p_2 t + \alpha_2) + \\ + \dots + a_{i, n-1} \sin(p_{n-1} t + \alpha_{n-1}) \quad (i = 1; 2; \dots; n). \quad (\text{II.153})$$

В уравнениях (II.153) содержится $2n$ неизвестных: $n - 1$ неизвестных амплитуд колебаний первого диска ($a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1, n-1}$); $n - 1$ неизвестных начальных фаз ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$); угловое смещение a_0 и угловая скорость ω (амплитуды колебаний всех остальных дисков a_{ik} определяются через амплитуды составляющих колебаний первого диска a_{1k} ; отношения a_{ik}/a_{1k} зависят от номера частоты k и определяют соответствующие формы колебаний).

Таким образом, для полного решения задачи необходимо и достаточно указать $2n$ начальных условий — угловые смещения и угловые скорости всех n дисков при $t = 0$.

При произвольно заданных начальных условиях колебания каждого диска будут многочастотными, т. е. составятся из суммы гармоник. Если начальные угловые смещения соответствуют одной из собственных форм колебаний, то в дальнейшем процессе будет реализована эта и только эта форма (и соответствующая частота); в общем же случае колебания будут носить сложный характер и представят собой совокупность $n - 1$ форм колебаний. Относительное значение каждого из них зависит от близости заданной системы начальных смещений к той или иной собственной форме.

Вычисление собственных частот и форм способом последовательных приближений. До внедрения ЭВМ в практику инженерных расчетов для определения собственных частот многомассовых систем широко использовался вариант способа последовательных приближений («способ остатков»), не полностью потерявший свое значение до сих пор. Способ основан на использовании цепной структуры системы (II.149).

Принимая $a_1 = 1$ и задаваясь ориентировочным значением p^2 , из первого уравнения системы (II.149) находят амплитуду a_2 , из второго уравнения той же системы можно определить амплитуду a_3 , из третьего уравнения — амплитуду a_4 и, наконец, из предпоследнего уравнения — амплитуду a_n . Если в последнее уравнение

$$-c_{n-1}(a_n - a_{n-1}) + I_n p^2 a_n = 0$$

подставить вычисленные значения a_{n-1} и a_n , то оно, вообще говоря, не будет удовлетворяться из-за произвольности исходного значения p^2 . Полученное значение левой части (остаток) характеризует меру неточности принятого значения p^2 и одновременно ориентирует, в какую сторону нужно изменить расчетное значение p^2 в следующем приближении.

Далее производят повторный расчет при новом значении p^2 . Знак и величина нового остатка помогут указать необходимую поправку в значении p^2 . Расчет повторяется до тех пор, пока не будет достигнут удовлетворительный результат в последнем уравнении.

Хольцер и Толле предложили компактную табличную схему вычислений, основанную на соотношениях типа

$$c_i(a_{i+1} - a_i) = -I_1 p^2 a_1 - I_2 p^2 a_2 - \dots - I_i p^2 a_i, \quad (\text{II.154})$$

которые получаются из уравнений (II.149) после сложения первых i уравнений системы. Соотношение (II.154) выражает равенство крутящего момента в сечении i -го участка вала (левая часть) сумме моментов сил инерции всех расположенных слева дисков (правая часть).

Задаваясь значением p^2 и принимая $a_1 = 1$, находим из соотношения (II.154) для $i = 1$

$$a_2 = -\frac{I_1 p^2}{c_1} + 1.$$

Далее из того же соотношения для $i = 2$

$$a_3 = - \frac{I_1 p^2 + I_2 p^2 a_2}{c_2} + a_2.$$

Общая формула имеет вид

$$a_{i+1} = - \frac{\sum_{k=1}^{k=i} I_k p^2 a_k}{c_i} + a_i. \quad (\text{II.155})$$

Процесс продолжается таким образом до $n - 1$ -го уравнения. Найдя из него a_n , можно перейти к последнему уравнению и вычислить его левую часть. При правильном выборе значения частоты результат должен быть равен нулю, так как если сложить все уравнения типа (II.154), то должно получиться

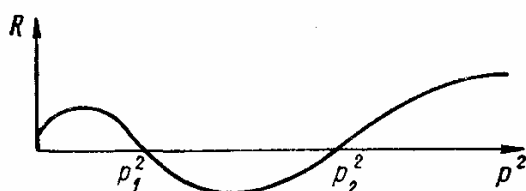


Рис. II.37

стоты результат должен быть равен нулю, так как если сложить все уравнения типа (II.154), то должно получиться

$$\sum_{k=1}^{k=n} I_k p^2 a_k = 0.$$

Конечно, из-за произвольности принятого значения p^2 нуля в результате не получится. Полученный остаток выражает неуравновешенный момент, который должен быть равен нулю при правильном выборе величины p^2 .

После нескольких расчетов такого типа (при разных значениях p^2) можно построить кривую зависимости остатка R от p^2 (рис. II.37). Точки пересечения кривой с осью абсцисс соответствуют истинным значениям частот.

Разумеется, все эти выкладки очень просто реализуются на ЭВМ.

Объем выкладок может быть уменьшен, если известны ориентировочные значения частот; для их определения часто пользуются заменой заданной системы упрощенной трехмассовой системой.

Пример 10. Способом последовательных приближений приближенно определить собственные частоты шестимассовой системы (рис. II.38, а). Система представляет собой уточненную по сравнению с примером 8 судовую дизельную установку и состоит из дисков 1—6, к которым приведены кривошипы двигателей, маховика 7 и гребного винта 8 с присоединенными массами гребного вала и воды. Данные системы:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = 2830 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2;$$

$$I_7 = 85\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2; \quad I_8 = 27\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2;$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 740 \cdot 10^6 \text{ кгс} \cdot \text{см};$$

$$c_7 = 14,8 \cdot 10^6 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Для приближенного определения двух низших частот образуем упрощенную систему (рис. II.38, б); здесь первые шесть дисков заменены одним общим диском 1, для которого $I_1 = 6 \cdot 2830 = 17\,000$ кгс·см·с², и изменена нумерация для двух последних дисков (маховик 2 и гребной винт 3).

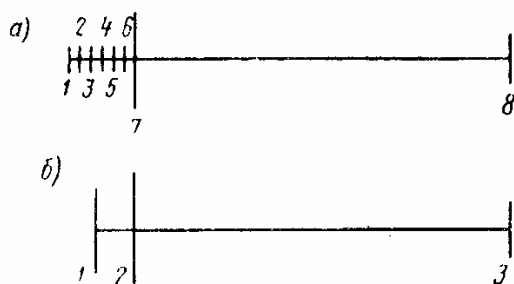


Рис. II.38

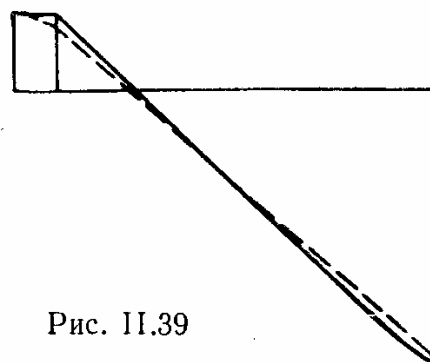


Рис. II.39

Жесткость первого участка в упрощенной схеме

$$c_1 = \frac{740 \cdot 10^6}{3,5} = 211,4 \cdot 10^6 \text{ кгс·см}$$

(длина участка 1—2 в упрощенной схеме в 3,5 раза больше длины каждого участка между дисками 1—6 в заданной схеме). Для этой упрощенной схемы в рассмотренном выше примере 8 были найдены $p_1^2 = 690 \text{ с}^{-2}$ и $p_2^2 = 15\,000 \text{ с}^{-2}$. Эти значения примем в качестве исходных и уточним их способом Хольцера—Толле.

Уточнение значения первой частоты и первой собственной формы колебаний. Принимая $p^2 = 690 \text{ с}^{-2}$, заполняем табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Расчетная таблица 1-го приближения (при $p^2 = 690 \text{ с}^{-2}$)

№ диска	I	$I p^2 \cdot 10^{-6}$	a	$I p^2 a \cdot 10^{-6}$	$\sum I p^2 a \times 10^{-6}$	$c \cdot 10^{-6}$	$\frac{\sum I p^2 a}{c}$
1	2 830	1,95	1,000	1,95	1,95	740	0,003
2	2 830	1,95	0,997	1,94	3,89	740	0,005
3	2 830	1,95	0,992	1,93	5,82	740	0,008
4	2 830	1,95	0,984	1,92	7,74	740	0,010
5	2 830	1,95	0,974	1,90	9,64	740	0,013
6	2 830	1,95	0,961	1,87	11,51	740	0,015
7	85 000	58,7	0,946	55,6	67,1	14,8	4,52
8	27 000	18,6	—3,57	—66,4	0,8		

Сравнительно небольшое значение остатка ($0,8 \cdot 10^6$) означает, что принятое значение $p^2 = 690 \text{ с}^{-2}$ не слишком сильно отличается от истинного. Для второго приближения принимаем несколько измененное значение $p^2 = 700 \text{ с}^{-2}$ и вновь составляем таблицу (табл. 3).

Полученный остаток ($-1,0 \cdot 10^6$) имеет другой знак, чем в первом расчете; можно утверждать, что истинное значение квадрата первой частоты лежит в пределах 690—700 с⁻². Пользуясь линейной интерполяцией, находим достаточно точное значение квадрата первой частоты $p_1^2 = 694 \text{ с}^{-2}$, т. е. $p_1 = 26,4 \text{ с}^{-1}$. На рис. II.39 штриховой линией показана найденная уточненная собственная форма

Т а б л и ц а 3

Расчетная таблица 2-го приближения (при $p^2 = 700 \text{ с}^{-2}$)

№ диска	I	$I p^2 \cdot 10^{-6}$	a	$I p^2 a \cdot 10^{-6}$	$\sum I p^2 a \times 10^{-6}$	$c \cdot 10^{-6}$	$\frac{\sum I p^2 a}{c}$
1	2 830	1,98	1,000	1,98	1,98	740	0,003
2	2 830	1,98	0,997	1,97	3,45	740	0,005
3	2 830	1,98	0,992	1,96	5,91	740	0,008
4	2 830	1,98	0,984	1,95	7,86	740	0,011
5	2 830	1,98	0,973	1,93	9,79	740	0,013
6	2 830	1,98	0,960	1,90	11,69	740	0,016
7	85 000	59,5	0,944	56,2	67,9	14,8	4,58
8	27 000	18,8	-3,64	-68,9	-1,0		

колебаний; она незначительно отличается от полученной в примере 8 (сплошная линия).

Уточнение значения второй частоты. Заполняем расчетную табл. 4, принимая $p^2 = 15 000 \text{ с}^{-2}$.

Т а б л и ц а 4

Расчетная таблица 1-го приближения (при $p^2 = 15 000 \text{ с}^{-2}$)

№ диска	I	$I p^2 \cdot 10^{-6}$	a	$I p^2 a \cdot 10^{-6}$	$\sum I p^2 a \times 10^{-6}$	$c \cdot 10^{-6}$	$\frac{\sum I p^2 a}{c}$
1	2 830	42,4	1,000	42,4	42,4	740	0,057
2	2 830	42,4	0,943	40,0	84,4	740	0,111
3	2 830	42,4	0,832	35,2	117,6	740	0,159
4	2 830	42,4	0,673	28,5	146,1	740	0,198
5	2 830	42,4	0,475	20,2	166,3	740	0,225
6	2 830	42,4	0,250	10,6	176,9	740	0,239
7	85 000	1275	0,011	14,0	190,9	14,8	12,90
8	27 000	405	-12,39	-5220	-5029		

Остаточный момент ($-5029 \cdot 10^3$) настолько значителен, что для второго приближения необходимо резкое изменение расчетного значения p^2 . Принимаем для второго приближения $p^2 = 20 000 \text{ с}^{-2}$ и вновь заполняем расчетную табл. 5.

Остаточный момент ($6007 \cdot 10^6$) также очень велик, но отличается знаком от первого приближения. Пользуясь линейной интерполяцией, находим квадрат второй частоты $p_2^2 = 17 280 \text{ с}^{-2}$.

Затем следует вновь повторить вычисления, пока разница между частотами в двух последовательных расчетах не станет достаточно малой.

Отметим, что расчет высших собственных частот всегда требует сравнительно больших вычислений.

Расчетная таблица 2-го приближения ($p^2 = 20\,000 \text{ с}^{-2}$)

№ диска	I	$I p^2 \cdot 10^{-6}$	a	$I p^2 a \cdot 10^{-6}$	$\sum I p^2 a \times 10^{-6}$	$c \cdot 10^{-6}$	$\frac{\sum I p^2 a}{c}$
1	2 830	56,6	1,000	56,6	56,6	740	0,077
2	2 830	56,6	0,923	52,2	108,8	740	0,147
3	2 830	56,6	0,776	43,9	152,7	740	0,206
4	2 830	56,6	0,570	32,3	185,0	740	0,250
5	2 830	56,6	0,320	18,1	203,1	740	0,274
6	2 830	56,6	0,056	3,2	206,3	740	0,279
7	85 000	1700	-0,223	-379	-172,7	14,8	-11,67
8	27 000	540	11,45	6180	6007		

Для рассмотренной системы вычисленные с помощью ЭВМ квадраты собственных частот имеют следующие значения (с точностью до шести значащих цифр):

$$\begin{aligned}
 p_1^2 &= 692,266 \text{ с}^{-2}; \quad p_2^2 = 17786,8 \text{ с}^{-2}; \quad p_3^2 = 133\,889 \text{ с}^{-2}; \\
 p_4^2 &= 339\,361 \text{ с}^{-2}; \quad p_5^2 = 587\,200 \text{ с}^{-2}; \quad p_6^2 = 820\,635 \text{ с}^{-2}; \\
 p_7^2 &= 986\,189 \text{ с}^{-2}.
 \end{aligned}$$

Изгибные колебания балок с сосредоточенными массами

Общие замечания. Во многих случаях приемлемой схемой балочной конструкции служит упругая безмассовая ось («скелет» конструкции), с которой связано некоторое конечное число сосредоточенных масс $m_1, m_2, \dots, m_n$ (например, рис. II.40, а).

Как было указано выше, для решения задач этого типа предпочтительнее обратный способ, основанный на введении сил инерции, приложенных к безмассовому упругому «скелету» системы. При этом удобно воспользоваться понятием единичного перемещения δ_{ik}

как перемещения в направлении i , вызванного единичной силой, действующей в направлении k (рис. II.40, б) *. Если на систему

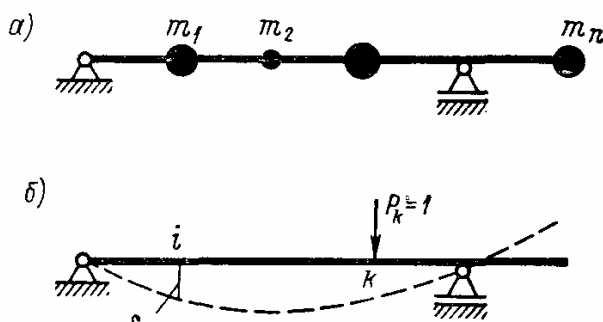


Рис. II.40

* Единичные перемещения называются также коэффициентами влияния. Под P_k могут подразумеваться пары; тогда δ_{ik} — перемещение, вызванное единичной парой $P_k = 1$ в направлении i .

по k -му направлению действует сила $P_k = 1$ и требуется определить вызванное ею полное перемещение в i -м направлении, то вследствие пропорциональности между силой и перемещением можно написать $y_i = P_k \delta_{ik}$.

При одновременном действии сил $P_1, P_2, \dots, P_n$ полное перемещение найдем суммированием:

$$y_i = \sum_{k=1}^n P_k \delta_{ik}. \quad (\text{II.156})$$

Эта формула и является основой для составления уравнений колебаний по обратному способу. Способы определения величин δ_{ik} подробно рассматривать не будем, так как они даны в кур-

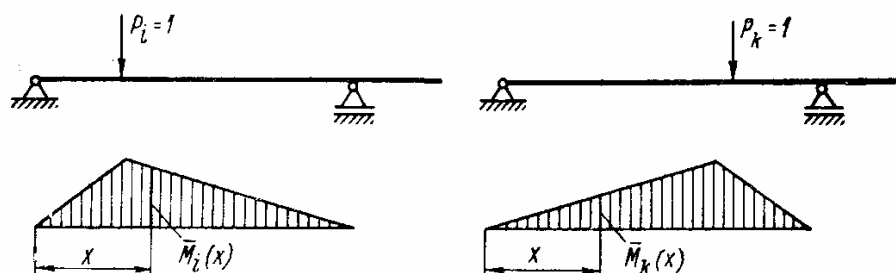


Рис. II.41

сах сопротивления материалов; приведем лишь необходимые справочные сведения.

Для определения перемещения δ_{ik} при изгибе стержней используется формула Мора

$$\delta_{ik} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dx}{EJ},$$

где EJ — жесткость сечения при изгибе, в общем случае зависящая от абсциссы x ; $\bar{M}_i(x)$, $\bar{M}_k(x)$ — изгибающие моменты, вызванные соответственными единичными силами $P_i = 1$ и $P_k = 1$ (рис. II.41).

Во многих случаях удобна формула Верещагина, являющаяся графоаналитической интерпретацией формулы Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\Omega_i \bar{M}_k^*}{EJ},$$

где Ω_i — площадь части эпюры $\bar{M}_i$; $\bar{M}_k^*$ — ордината в эпюре $\bar{M}_k$, соответствующая абсциссе центра тяжести Ω_i .

При пользовании формулой Верещагина необходимо разделить длину стержня на такие участки, чтобы в пределах каждого из них эпюра $\bar{M}_k$ была ограничена прямой линией.

Напомним также о справедливости равенства $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, составляющего содержание теоремы Максвелла.

$$y_1 = - \sum_{k=1}^n m_k \ddot{y}_k \delta_{ik} \quad (i = 1; 2; \dots; n),$$
[illegible]

Основная система уравнений (II.157) в простейшем случае (при одной степени свободы) приводит к одному уравнению с одной неизвестной функцией

оно эквивалентно стандартному уравнению $m\ddot{y}_1 + cy_1 = 0$, так как $c = 1/\delta_{11}$.

$$y_i = a_i \sin (pt + \alpha). \quad (\text{II.158})$$

Подставляя выражение (II.158) в уравнения (II.157), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд:

[illegible]

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0,$$

103

Амплитуды a_i одновременно не обращаются в нуль, если определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений (II.159), равен нулю:

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}p^2 - 1 & m_2\delta_{12}p^2 & \dots & m_n\delta_{1n}p^2 \\ m_1\delta_{21}p^2 & m_2\delta_{22}p^2 - 1 & \dots & m_n\delta_{2n}p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1}p^2 & m_2\delta_{n2}p^2 & \dots & m_n\delta_{nn}p^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{II.160})$$

Развернув определитель (II.160), получим частотное уравнение n -й степени для квадрата частоты p^2 ; напомним это уравнение в виде *

$$1 - b_1p^2 + b_2p^4 - b_3p^6 + \dots + (-1)^n b_n p^{2n} = 0. \quad (\text{II.161})$$

Число корней уравнения (II.161) равно n ; обозначим эти корни через $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$, расположив их в порядке возрастания. Все эти корни вещественны и положительны, поэтому для частоты p получится также n положительных значений (отрицательные решения несущественны).

Общее решение системы уравнений (II.157) составит в виде суммы частных решений типа (II.158):

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sin(p_k t + \alpha_k) \quad (i = 1; 2; \dots; n), \quad (\text{II.162})$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_{12} \sin(p_2 t + \alpha_2) + \dots + \\ &\quad + a_{1n} \sin(p_n t + \alpha_n); \\ y_2 &= a_{21} \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_{22} \sin(p_2 t + \alpha_2) + \dots + \\ &\quad + a_{2n} \sin(p_n t + \alpha_n); \\ &\dots \\ y_n &= a_{n1} \sin(p_1 t + \alpha_1) + a_{n2} \sin(p_2 t + \alpha_2) + \dots + \\ &\quad + a_{nn} \sin(p_n t + \alpha_n). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, в каждом направлении $i = 1; 2; \dots; n$ происходят полигармонические колебания, причем число слагаемых равно числу собственных частот, т. е. совпадает с числом степеней свободы системы n .

В частном случае системы с двумя степенями свободы система уравнений (II.159) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} a_1 (m_1\delta_{11}p^2 - 1) + a_2 m_2\delta_{12}p^2 &= 0; \\ a_1 m_1\delta_{21}p^2 + a_2 (m_2\delta_{22}p^2 - 1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.163})$$

* При такой расстановке знаков все коэффициенты b_k положительны.

и вместо определителя (II.160) имеем

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} p^2 - 1 & m_2 \delta_{12} p^2 \\ m_1 \delta_{21} p^2 & m_2 \delta_{22} p^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{II.164})$$

Частотное уравнение (II.161) становится биквадратным и имеет следующие решения:

$$p_{1,2}^2 = \frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} \pm \sqrt{(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22})^2 - 4(\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) m_1 m_2}}{2m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \quad (\text{II.165})$$

Пример 11. Найти собственные частоты колебаний консоли, показанной на рис. II.42, а, с учетом инерции вращения концевго груза, m — масса груза. Эта система имеет две степени свободы, и ее движение описывается двумя координатами y_1 (вертикальное перемещение груза) и y_2 (угол поворота груза).

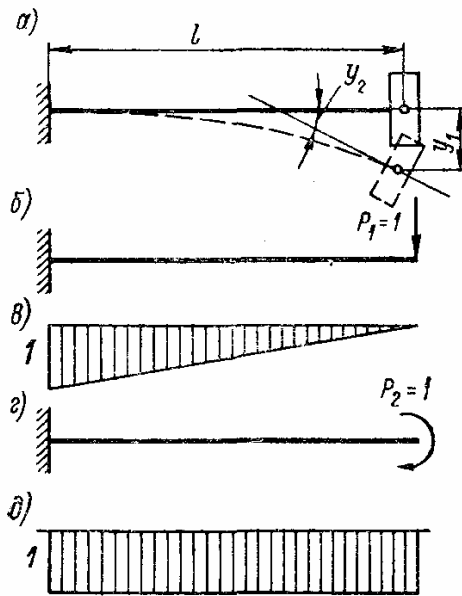


Рис. II.42

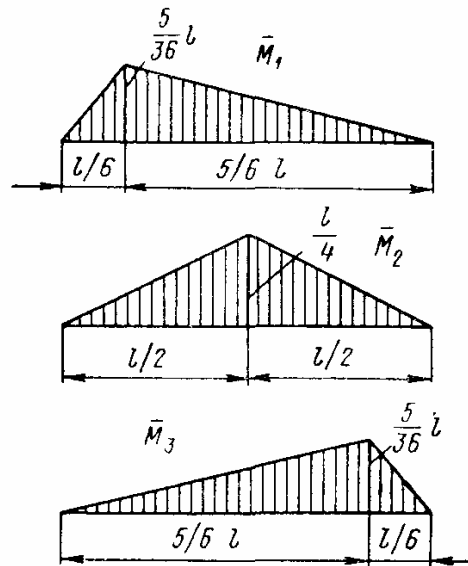


Рис. II.43

Строим эпюры изгибающих моментов от силы $P_1 = 1$ и момента $P_2 = 1$ (рис. II.42, б—г) и вычисляем по формуле Верещагина

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^2}{2EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{l}{EJ}.$$

Далее пользуемся формулой (II.165), подставляя в нее $m_1 = m$; $m_2 = m\rho^2$ (ρ — радиус инерции груза):

$$p_{1,2}^2 = \frac{2EJ}{m\rho^2 l} \left(1 + \frac{3\rho^2}{l^2} \pm \sqrt{1 + \frac{3\rho^2}{l^2} + \frac{9\rho^4}{l^4}} \right).$$

Если, как обычно, отношение l/ρ велико, то

$$p_{1,2}^2 = \frac{6EJ}{ml^3} \left[1 + \frac{l^2}{3\rho^2} \pm \left(\frac{9\rho^2}{8l^2} + \frac{1}{2} + \frac{l^2}{3\rho^2} \right) \right].$$

Принимая здесь знак минус, получим квадрат низшей (первой) частоты

$$p_1^2 = \frac{3EJ}{ml^3} \left(1 - \frac{9\rho^2}{4l^2} \right).$$

Квадрат высшей (второй) частоты оказывается во много раз большим:

$$p_2^2 = \frac{4EJ}{ml\rho^2} \left(1 + \frac{9\rho^2}{4l^2} \right).$$

Например, если $l/\rho = 10$, то вторая частота оказывается в 12 раз больше первой.

Пример 12. Определить собственные частоты колебаний балки, несущей три сосредоточенных груза (см. рис. II.11).

Для определения единичных перемещений строим эпюры моментов $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ и $\bar{M}_3$ от единичных сил $P_1 = 1$, $P_2 = 1$ и $P_3 = 1$ (рис. II.43). По формуле Верещагина находим единичные перемещения

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{33} &= 75k; \quad \delta_{22} = 243k; \\ \delta_{21} = \delta_{12} = \delta_{32} = \delta_{23} &= 117k; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = 51k. \end{aligned}$$

В этих выражениях

$$k = \frac{l^3}{9 \cdot 1296 EJ}.$$

Теперь составляем определитель (II.160):

$$\begin{vmatrix} 75mkp^2 - 1 & 117mkp^2 & 51mkp^2 \\ 117mkp^2 & 243mkp^2 - 1 & 117mkp^2 \\ 51mkp^2 & 117mkp^2 & 75mkp^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув определитель, получим частотное уравнение, которое в данном случае оказывается бикубическим:

$$77\,760 (mkp^2)^3 - 12\,096 (mkp^2)^2 + 393mkp^2 - 1 = 0$$

и имеет три корня:

$$p_1 = \frac{5,692}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}; \quad p_2 = \frac{22,05}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}; \quad p_3 = \frac{36,00}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

При большом числе масс, когда степень частотного уравнения высокая, его решение оказывается затруднительным для ручного счета. Хотя и в этих случаях можно построить вычислительные алгоритмы, позволяющие обойтись простейшими средствами (арифмометрами), но в настоящее время для решения частотных уравнений широко пользуются ЭВМ и соответствующими стандартными программами.

Собственные формы колебаний. Если в систему уравнений (II.159) подставить какой-либо из корней частотного уравнения, то одно из уравнений станет следствием остальных, т. е. независимых уравнений оказывается только $n - 1$. Эти уравнения связывают между собой n амплитуд a_{1i} , a_{2i} , ..., a_{ni} [второй индекс означает номер корня p_i^2 , который подставлен в систему (II.159)] и поэтому позволяют выразить все амплитуды через какую-либо одну, например первую. Отношения a_{2i}/a_{1i} ; a_{3i}/a_{1i} ; ... определяют i -ю собственную форму колебаний. Таким образом, каждой частоте отвечает вполне определенная форма колебаний; число этих форм совпадает с числом степеней свободы системы и равно n .

Как и выше, можно установить, что любые две собственные формы колебаний взаимно ортогональны:

$$m_1 a_{1i} a_{1k} + m_2 a_{2i} a_{2k} + \dots + m_n a_{ni} a_{nk} = 0.$$

Пример 13. Определить собственные формы колебаний консоли (см. рис. II.42).

Так как система обладает двумя степенями свободы, то число собственных форм также равно двум. Подставив данные задачи

$$m_1 = m; \quad m_2 = m\rho^2; \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}; \quad \delta_{12} = \frac{l^2}{2EJ}$$

в первое уравнение системы (II.163)

$$a_1 (m_1 \delta_{11} p^2 - 1) + a_2 m_2 \delta_{12} p^2 = 0,$$

ПОЛУЧИМ

$$a_1 \left(\frac{ml^3}{3EJ} p^2 - 1 \right) + a_2 \frac{ml^2 \rho^2}{2EJ} p^2 = 0.$$

Принимая здесь $p^2 = p_1^2$, находим первую собственную форму:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{2l}.$$

Она показана на рис. II.44, а и характеризуется в основном линейным смещением концевого груза.

Для определения второй собственной формы колебаний нужно принять $p^2 = p_2^2$; отсюда находим

$$\frac{a_{22}}{a_{12}} \approx -\frac{2l}{3\rho^2};$$

эта форма показана на рис. II.44, б и характеризуется главным образом поворотом концевой массы.

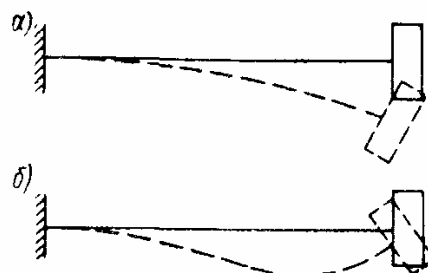


Рис. II.44

Для определения основной собственной формы колебаний в многомассовых системах может быть использован способ последовательных приближений, по своему существу совпадающий с изложенным выше (стр. 41—42).

Достоинством этого способа является возможность провести вычисления без всяких операций с определителями.

Представим уравнения (II.159) в виде

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= p^2 (m_1 \delta_{11} a_1 + m_2 \delta_{12} a_2 + \dots + m_n \delta_{1n} a_n); \\ a_2 &= p^2 (m_1 \delta_{21} a_1 + m_2 \delta_{22} a_2 + \dots + m_n \delta_{2n} a_n); \\ &\vdots \\ a_n &= p^2 (m_1 \delta_{n1} a_1 + m_2 \delta_{n2} a_2 + \dots + m_n \delta_{nn} a_n). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.166})$$

Задавшись произвольной системой амплитуд $(a_1)_0, (a_2)_0, \dots, (a_n)_0$ (нулевое приближение для формы колебаний), подставим их в правые части системы (II.166) и вычислим выражения, входящие в скобки. Пусть полученные величины будут $(b_1)_0, (b_2)_0, \dots, (b_n)_0$. Тогда

$$a_1 = p^2 (b_1)_0; a_2 = p^2 (b_2)_0; \dots; a_n = p^2 (b_n)_0.$$

Эти выражения можно рассматривать как новое приближение для формы колебаний. Без ущерба можно опустить общий множитель p^2 , так как масштаб формы колебаний не имеет значения; следовательно, первое приближение для формы колебаний определяется амплитудами

$$(a_1)_1 = (b_1)_0; (a_2)_1 = (b_2)_0; \dots; (a_n)_1 = (b_n)_0.$$

Подставив эти величины в правые части системы (II.166), аналогичным образом получим второе приближение и т. д. Продолжая этот процесс, можно (и довольно быстро) дойти до приближенного повторения результатов, когда система амплитуд в k — 1-м приближении будет отличаться от системы амплитуд в k -м приближении только общим масштабом, т. е.

$$\frac{(a_1)_k}{(a_1)_{k-1}} \approx \frac{(a_2)_k}{(a_2)_{k-1}} \approx \dots \approx \frac{(a_n)_k}{(a_n)_{k-1}}.$$

Этим завершается определение основной формы колебаний. Затем сразу находим и основную частоту: так как

$$(a_i)_k = p^2 (a_i)_{k-1},$$

то для квадрата частоты получим

$$p^2 = \frac{(a_i)_k}{(a_i)_{k-1}}.$$

Колебания автомобиля

Будем рассматривать автомобиль как систему упруго связанных жестких тел 1—5 (рис. II.45, а). Здесь тело 1 схематически представляет собой кузов автомобиля, а тела 2—5 — колеса, массы которых примем сосредоточенными. К подобной же схеме приходят при рассмотрении колебаний железнодорожных вагонов, локомотивов и других транспортных средств этого типа.

Движение такой системы в процессе колебаний характеризуется семью координатами: y_1 — вертикальное перемещение центра тяжести кузова; y_2, y_3, y_4, y_5 — вертикальные перемещения центров тяжести колес; y_6 — поворот кузова относительно поперечной оси; y_7 — поворот кузова относительно продольной оси.

Распределение масс автомобиля и жесткостей упругих связей почти симметрично относительно средней продольной плоскости, поэтому в расчетах колебаний некоторую малую асимметрию игнорируют. При этом общий процесс колебаний можно рассматривать состоящим из двух взаимно не связанных процессов: продольных колебаний (рис. II.45, б), характеризуемых вертикальным перемещением кузова (y_1), поворотом кузова вокруг поперечной оси (y_6) и попарно равными перемещениями обоих передних колес ($y_2 = y_4$) и обоих задних колес ($y_3 = y_5$); поперечных (боковых) колебаний (рис. II.45, в), характеризуемых поворотом ку-

зова вокруг продольной оси (y_7) и попарно равными перемещениями обоих левых колес ($y_2 = y_3$) и обоих правых колес ($y_4 = y_5$).

Соответственно этому продольные колебания описываются четырьмя, а поперечные колебания — тремя дифференциальными уравнениями. Рассмотрим продольные колебания, которые представляют основной интерес.

Обозначим жесткости шин через c , жесткости передних и задних рессор соответственно через $c_{\text{п}}$ и $c_{\text{з}}$, массы кузова и колеса через m и $m_{\text{к}}$. Радиус инерции кузова относительно поперечной

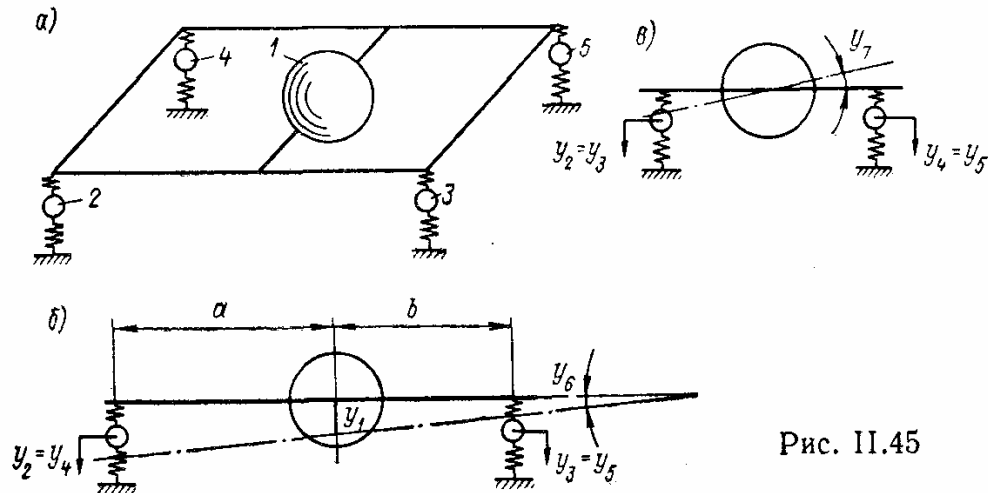


Рис. II.45

оси, проходящей через его центр тяжести, обозначим через ρ . При этих обозначениях осадки передней ($\Delta_{\text{п}}$) и задней ($\Delta_{\text{з}}$) рессор составляют

$$\Delta_{\text{п}} = y_1 + ay_6 - y_2; \quad \Delta_{\text{з}} = y_1 - by_6 - y_3.$$

Здесь a и b — расстояния от центра тяжести тела 1 до передней и задней осей (рис. II.45, б).

Уравнения движения составим в форме Лагранжа. Кинетическая энергия системы складывается из следующих частей: кинетической энергии кузова $\frac{m\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot{y}_6^2}{2}$; кинетической энергии передних колес $2 \frac{m_{\text{к}}\dot{y}_2^2}{2}$; кинетической энергии задних колес $2 \frac{m_{\text{к}}\dot{y}_3^2}{2}$.

Суммарная кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} [m\dot{y}_1^2 + \rho^2\dot{y}_6^2 + 2m_{\text{к}}(\dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2)]. \quad (\text{II.167})$$

Потенциальная энергия состоит из энергии деформации рессор

$$2 \frac{c_{\text{п}}\Delta_{\text{п}}^2}{2} + 2 \frac{c_{\text{з}}\Delta_{\text{з}}^2}{2} = c_{\text{п}}(y_1 - y_2 + ay_6)^2 + c_{\text{з}}(y_1 - y_3 - by_6)^2$$

и энергии сжатия шин

$$2 \frac{cy_2^2}{2} + 2 \frac{cy_3^2}{2} = c(y_2^2 + y_3^2).$$

Суммарная потенциальная энергия

$$\Pi = c_{\text{п}} (y_1 - y_2 + ay_6)^2 + c_3 (y_1 - y_3 - by_6)^2 + c (y_2^2 + y_3^2). \quad (\text{II.168})$$

В данном случае уравнения Лагранжа имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y}_1 + 2c_{\text{п}} (y_1 - y_2 + ay_6)^2 + 2c_3 (y_1 - y_3 - by_6) &= 0; \\ 2m_{\text{к}}\ddot{y}_2 - 2c_{\text{п}} (y_1 - y_2 + ay_6) + 2cy_2 &= 0; \\ 2m_{\text{к}}\ddot{y}_3 - 2c_3 (y_1 - y_3 - by_6) + 2cy_3 &= 0; \\ m\rho^2\ddot{y}_6 + 2c_{\text{п}} (y_1 - y_2 + ay_6) a - & \\ - 2c_3 (y_1 - y_3 - by_6) b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.169})$$

Частное решение этой системы

$$y_i = a_i \sin (pt + \alpha) \quad (i = 1; 2; 3; 6). \quad (\text{II.170})$$

Подстановка выражения (II.170) в систему уравнений (II.169) приведет к уравнению той же структуры, что и в задачах, рас-

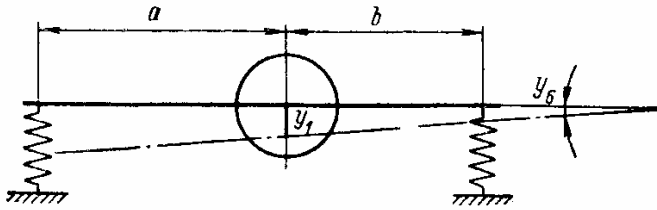


Рис. II.46

смотренных выше; в частности, соответственно числу степеней свободы обнаружатся четыре значения собственной частоты колебаний.

Задача может быть упрощена, если считать шины недеформируемыми

(рис. II.46). Такая система обладает двумя степенями свободы, соответствующими координатам y_1 и y_6 . Положим в выражениях (II.167) и (II.168) $y_2 = y_3 = 0$. Тогда соответственно для кинетической и потенциальной энергии получим

$$T = \frac{m}{2} (\dot{y}_1^2 + \rho^2 \dot{y}_6^2);$$

$$\Pi = c_{\text{п}} (y_1 + ay_6)^2 + c_3 (y_1 - by_6)^2.$$

Уравнения Лагранжа примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + 2c_{\text{п}} (y_1 + ay_6) + 2c_3 (y_1 - by_6) &= 0; \\ m\rho^2\ddot{y}_6 + 2c_{\text{п}} (y_1 + ay_6) a - 2c_3 (y_1 - by_6) b &= 0. \end{aligned}$$

Подставив сюда частное решение (II.170), получим систему

$$\begin{aligned} -ma_1 p^2 + 2c_{\text{п}} (a_1 + aa_6) + 2c_3 (a_1 - ba_6) &= 0; \\ -m\rho^2 p^2 a_6 + 2c_{\text{п}} (a_1 + aa_6) a - 2c_3 (a_1 - ba_6) b &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} a_1 (-m\rho^2 p^2 + 2c_{\text{п}} + 2c_3) + a_6 (2c_{\text{п}} a - 2c_3 b) &= 0; \\ a_1 (2c_{\text{п}} a - 2c_3 b) + a_6 (-m\rho^2 p^2 + 2c_{\text{п}} a^2 + 2c_3 b^3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.171})$$

Для получения нетривиального решения необходимо приравнять нулю определитель, составленный из коэффициентов при a_1 и a_6 :

$$\begin{vmatrix} -mp^2 + 2c_n + 2c_3 & 2c_n a - 2c_3 b \\ 2c_n a - 2c_3 b & -m\rho^2 p^2 + 2c_n a^2 + 2c_3 b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Развертывая определитель, получим частотное уравнение второй степени относительно p^2 :

$$p^4 - \frac{2}{m\rho^2} p^2 [c_n (a^2 + \rho^2) + c_3 (b^2 + \rho^2)] + \frac{4c_n c_3}{m^2 \rho^2} (a + b)^2 = 0. \quad (\text{II.172})$$

После определения частот из этого уравнения, можно найти обе собственные формы колебаний. Для этого из какого-либо (например, из первого) уравнения системы (II.171) нужно образовать отношение амплитуд

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{mp^2 - 2c_n - 2c_3}{2c_n a - 2c_3 b} \quad (\text{II.173})$$

и подставить в него поочередно оба корня частотного уравнения. То же можно получить при помощи второго уравнения (II.171).

Остановимся на частном случае такого распределения масс, когда $\rho^2 = ab$, т. е. когда радиус инерции автомобиля равен среднему геометрическому между величинами a и b (рис. II.46). Отметим, что для этого расстояние $a + b$ между осями автомобиля должно быть значительно меньше его общей длины (это на самом деле имеет место в автомобилях современной компоновки). В этом случае корни частотного уравнения (II.172)

$$p_1^2 = \frac{2c_n (a + b)}{mb}; \quad p_2^2 = \frac{2c_3 (a + b)}{ma}. \quad (\text{II.174})$$

Для определения собственных форм колебаний подставляем эти корни поочередно в выражение (II.173). Тогда получим для первой формы $a_{61} = a_{11}/b$ и для второй формы $a_{62} = -a_{12}/a$.

Эти формы показаны на рис. II.47, а и б; их особенностью является неподвижность одной оси автомобиля при колебаниях другой. Формулы (II.174) показывают, что в этом частном случае частоты можно вычислять, пользуясь схемой, показанной на рис. II.47, в, т. е. распределяя общую массу по закону рычага.

В другом частном случае, когда $c_n a = c_3 b$, уравнения (II.171) становятся независимыми:

$$\left. \begin{aligned} a_1 (-mp^2 + 2c_n + 2c_3) &= 0; \\ a_6 (-m\rho^2 p^2 + 2c_n a^2 + 2c_3 b^2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.175})$$

что означает возможность чисто вертикальных колебаний при отсутствии поворотов («подпрыгивание» — рис. II.47, г), а также чисто угловых колебаний при неподвижности центра тяжести

(«галопирование» — рис. II.47, δ). Действительно, система (II.175) удовлетворяется решением $a_1 \neq 0$, $a_6 = 0$ при выполнении равенства

$$-mp^2 + 2c_{\Pi} + 2c_3 = 0 \quad (\text{II.176})$$

и решением $a_1 = 0$, $a_6 \neq 0$ при выполнении равенства

$$-mp^2\rho^2 + 2c_{\Pi}a^2 + 2c_3b^2 = 0. \quad (\text{II.177})$$

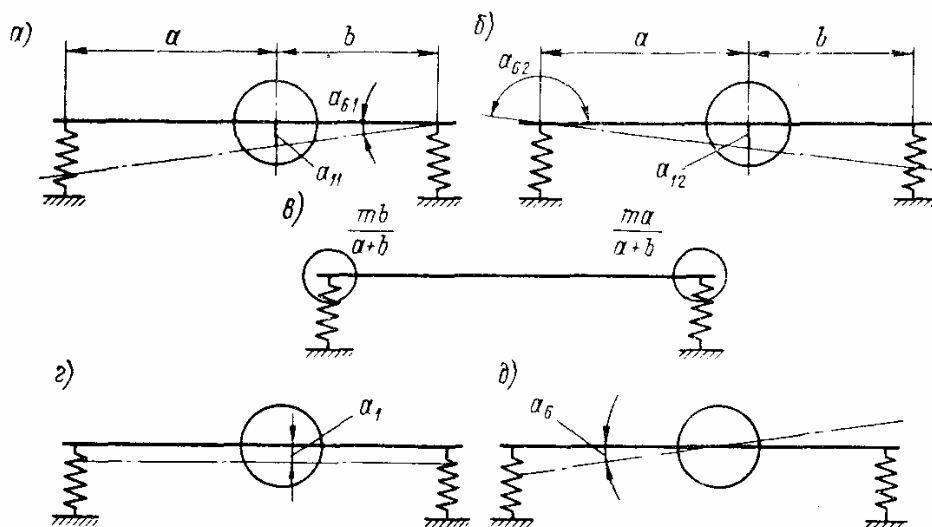


Рис. II.47

Из равенства (II.176) находим первую собственную частоту

$$p_1 = \sqrt{\frac{2(c_{\Pi} + c_3)}{m}},$$

а из равенства (II.177) — вторую собственную частоту

$$p_2 = \sqrt{\frac{2(c_{\Pi}a^2 + c_3b^2)}{mp^2}}.$$

Можно далее найти, что если параметры автомобиля удовлетворяют равенству

$$\left(c_{\Pi} + c_3 + \frac{c_{\Pi}a^2 + c_3b^2}{\rho^2}\right)^2 - \frac{4c_{\Pi}c_3(a+b)^2}{\rho^2} = 0,$$

то одновременно удовлетворяются оба рассмотренных выше условия $c_{\Pi}a = c_3b$ и $\rho^2 = ab$ и обе частоты p_1 и p_2 оказываются одинаковыми.

Пример 14. Определить собственные частоты и собственные формы колебаний автомобиля, для которого известны: $m = 1,6 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$; $\rho = 122,5 \text{ см}$; $2c_{\Pi} = 48,4 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$; $2c_3 = 37 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$; $a = 131 \text{ см}$; $b = 139 \text{ см}$.

Уравнение (II.172) принимает вид

$$p^4 - 117,8p^2 + 3400 = 0,$$

откуда

$$p^2 = 58,9 \pm 8,3 \text{ с}^{-2}.$$

Значения частот: $p_1 = 7,11 \text{ с}^{-1}$ и $p_2 = 8,20 \text{ с}^{-1}$.

Для определения собственных форм колебаний воспользуемся формулой (II.173):

$$\frac{a_{61}}{a_{11}} = \frac{1,6 \cdot 50,6 - 48,4 - 37}{48,4 \cdot 131 - 37 \cdot 139} = -0,0037 \text{ см}^{-1};$$

$$\frac{a_{62}}{a_{12}} = \frac{1,6 \cdot 67,2 - 48,4 - 37}{48,4 \cdot 131 - 37 \cdot 139} = 0,0183 \text{ см}^{-1}.$$

Эти формы показаны на рис. II.48, а и б; первая форма представляет собой в основном «подпрыгивание» кузова, а вторая — «галопирование».

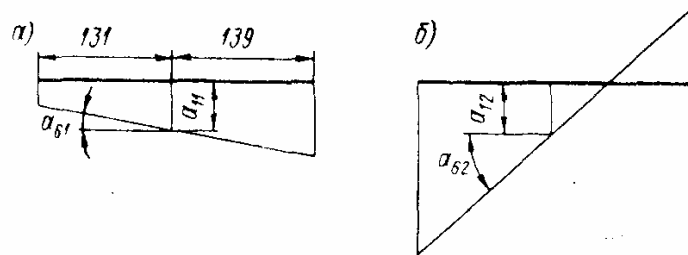


Рис. II.48

Убедимся в ортогональности этих форм. В нашем случае условие ортогональности имеет вид

$$ma_{11}a_{12} + m\rho^2 a_{61}a_{62} = ma_{11}a_{12} \left(1 + \rho^2 \frac{a_{61}}{a_{11}} \cdot \frac{a_{62}}{a_{12}} \right) = 0.$$

Подставив значения, получим

$$ma_{11}a_{12} (1 - 15\,000 \cdot 0,0037 \cdot 0,0183) \approx 0.$$

8. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ (ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ)

Основная особенность систем с непрерывно распределенной массой заключается в бесконечности числа собственных частот и форм колебаний.

С этим связаны и особенности математического характера: вместо обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в системах с несколькими степенями свободы, здесь приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями в частных производных. Кроме начальных условий, определяющих начальные смещения и скорости, необходимо учитывать граничные условия, характеризующие концевые закрепления стержня.

Продольные колебания стержней

Основное уравнение и его решение. При анализе продольных колебаний прямолинейного стержня (рис. II.49, а) будем считать, что поперечные сечения остаются плоскими и что частицы стержня не совершают поперечных движений и перемещаются только в продольном направлении.

Пусть u — продольное перемещение текущего сечения стержня при колебаниях; это перемещение зависит от местоположения се-

чения (координаты x) и от времени t . Таким образом, $u = u(x, t)$ есть функция двух переменных; ее определение и представляет основную задачу. Перемещение бесконечно близкого сечения равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, и, следовательно, абсолютное удлинение бесконечно малого элемента dx равно $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ (рис. II.49, б), а относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$.

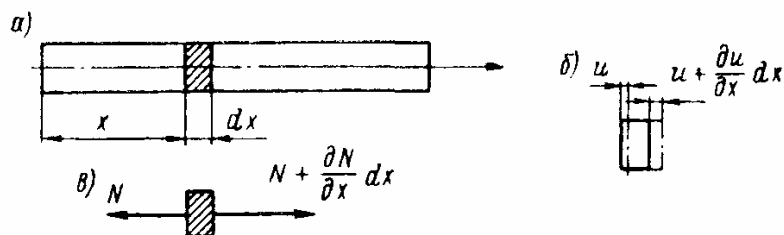


Рис. II.49

Соответственно этому продольная сила в сечении с координатой x может быть записана в виде

$$N = EF\varepsilon = EF \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{II.178})$$

где EF — жесткость стержня при растяжении-сжатии. Сила N также является функцией тех же аргументов — координаты x и времени t .

Для составления дифференциального уравнения движения воспользуемся прямым способом и рассмотрим элемент стержня, расположенный между двумя бесконечно близкими сечениями. К левой грани элемента (рис. II.49, в) приложена сила N , а к правой — сила $N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$. Если обозначить через ρ плотность материала стержня, то масса рассматриваемого элемента составляет $\rho F dx$. Поэтому уравнение движения в проекции на ось x принимает вид

$$-N + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) = \rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (\text{II.179})$$

Учитывая выражение (II.178) и принимая, что $F = \text{const}$, получаем

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (\text{II.180})$$

где

$$c^2 = E/\rho. \quad (\text{II.181})$$

Следуя методу Фурье, ищем частное решение дифференциального уравнения (II.180) в виде

$$u = X(x) T(t), \quad (\text{II.182})$$

т. е. предположим, что перемещение u можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от аргумента x , а другая — только от аргумента t . Тогда вместо определения функции двух переменных $u(x, t)$ необходимо определение двух функций $X(x)$ и $T(t)$, каждая из которых зависит только от одного переменного.

Подставив выражение (II.182) в уравнение (II.180), получим $c^2 X'' T = X \ddot{T}$. Здесь и далее штрихами обозначена операция дифференцирования по x . Перепишем это уравнение в виде

$$c^2 X''/X = \ddot{T}/T.$$

Здесь левая часть зависит только от x , а правая — только от t . Для тождественного выполнения этого равенства (при любых x и t) необходимо, чтобы каждая из частей была равна постоянной, которую обозначим через $-p^2$:

$$\frac{c^2 X''}{X} = -p^2; \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -p^2. \quad (\text{II.183})$$

Отсюда следуют два уравнения

$$\ddot{T} + p^2 T = 0; \quad X'' + \frac{p^2}{c^2} X = 0. \quad (\text{II.184})$$

Первое уравнение имеет решение

$$T = a \sin(pt + \alpha), \quad (\text{II.185})$$

указывающее на колебательный характер процесса. Из выражения (II.185) видно, что пока неизвестная величина p имеет смысл частоты свободных колебаний.

Второе уравнение (II.184) имеет решение

$$X = C \sin \frac{p}{c} x + D \cos \frac{p}{c} x \quad (\text{II.186})$$

и определяет собственную форму колебаний.

Частотное уравнение, определяющее величину p , как показано ниже, составляется путем использования граничных условий. Это уравнение всегда трансцендентное и имеет бесконечное число корней. Таким образом, число собственных частот бесконечно, причем каждому значению частоты p_n соответствует своя функция $T_n(t)$, определяемая зависимостью (II.185), и своя функция $X_n(x)$, определяемая зависимостью (II.186).

Решение (II.182) является лишь частным и не дает полного описания движения. Полное решение получается путем наложения всех частных решений:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t).$$

Функции $X_n(x)$ называются *собственными функциями* задачи и описывают собственные формы колебаний. Они не зависят от начальных условий и удовлетворяют условию ортогональности, которое при $F = \text{const}$ и $m \neq n$ имеет вид

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0.$$

Граничные условия. Рассмотрим несколько типовых случаев.

1. Закрепленный конец стержня (рис. II.50, а). В конечном сечении перемещение u должно быть равно нулю; отсюда вытекает, что в этом сечении

$$X = 0. \quad (\text{II.187})$$

2. Свободный конец стержня (рис. II.50, б). В конечном сечении продольная сила

$$N = EFX'T \quad (\text{II.188})$$

должна тождественно равняться нулю, что возможно, если в конечном сечении

$$X' = 0.$$

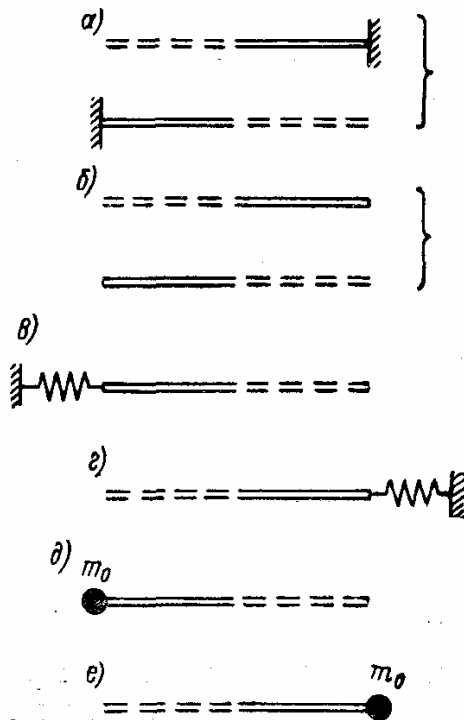


Рис. II.50

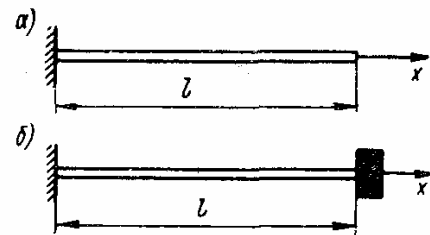


Рис. II.51

3. Упруго закрепленный конец стержня. При перемещении u конечного сечения возникает упругая реакция опоры $-c_0 u = -c_0 X T$ (c_0 — жесткость опоры). Учитывая выражение (II.188) для продольной силы, получим граничное условие в виде

$$c_0 X = EFX',$$

если опора расположена на левом конце стержня (рис. II.50, в), и в виде

$$-c_0 X = EFX',$$

если опора расположена на правом конце стержня (рис. II.50, г).

4. Сосредоточенная масса m_0 на конце стержня. Развиваемая массой сила инерции равна

$$-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m_0 X \ddot{T}.$$

Так как согласно уравнению (II.184) $\ddot{T} = -p^2 T$, то сила инерции может быть записана в виде $m_0 p^2 X T$. Учитывая выражение (II.188), получим граничное условие в виде

$$-m_0 p^2 X = E F X',$$

если масса находится на левом конце (рис. II.50, д), и

$$m_0 p^2 X = E F X', \quad (\text{II.189})$$

если масса связана с правым концом (рис. II.50, е).

Частотное уравнение. Рассмотрим типичные частные случаи.

1. Определим собственные частоты консольного стержня, показанного на рис. II.51, а. Согласно выражениям (II.187) и (II.188) $X = 0$ при $x = 0$; $X' = 0$ при $x = l$. Подставляя поочередно эти условия в решение (II.186), получим

$$D = 0; \quad C \frac{p}{c} \cos \frac{pl}{c} = 0.$$

Условие $C \neq 0$ приводит к частотному уравнению

$$\cos \frac{pl}{c} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\frac{pl}{c} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1; 2; \dots)$$

определяют собственные частоты

$$p_n = \frac{(2n - 1) \pi c}{2l} \quad (n = 1; 2; \dots). \quad (\text{II.190})$$

Число частот бесконечно. Первая (низшая) частота при $n = 1$

$$p_1 = \frac{\pi c}{2l} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

2. Определим собственные частоты стержня, показанного на рис. II.51, б. Согласно выражениям (II.187) и (II.189) имеем $X = 0$ при $x = 0$; $m_0 p^2 X = E F X'$ при $x = l$. Подставляя эти условия в решение (II.186), получим

$$D = 0; \quad m_0 p^2 \sin \frac{pl}{c} = \frac{E F p}{c} \cos \frac{pl}{c}.$$

Следовательно, частотное уравнение при учете выражения (II.181) имеет вид

$$\frac{pl}{c} \operatorname{tg} \frac{pl}{c} = \frac{\rho F l}{m_0};$$

правая часть уравнения представляет собой отношение массы стержня к массе конечного груза.

Значения первого корня уравнения $p_1 l/c$ в зависимости от отношения $\alpha = \rho F l / m_0$ следующие:

α	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90	1,00	2,00	4,00	10,00
$p_1 l/c$	0,32	0,52	0,65	0,75	0,82	0,86	1,08	1,27	1,42

При малых значениях α решающее влияние на частоту оказывает масса груза и приближенно можно принять

$$p_1 = \sqrt{\frac{EF}{m_0 l (1 + \alpha/3)}}.$$

Крутильные колебания валов

Крутильные колебания вала с непрерывно распределенной массой (рис. II.52, а) описываются уравнениями, которые по структуре точно совпадают с уравнениями, приведенными выше.

Основное уравнение и его решение. Из теории кручения стержней известно, что крутящий момент M в сечении с абсциссой x связан с углом поворота φ дифференциальной зависимостью

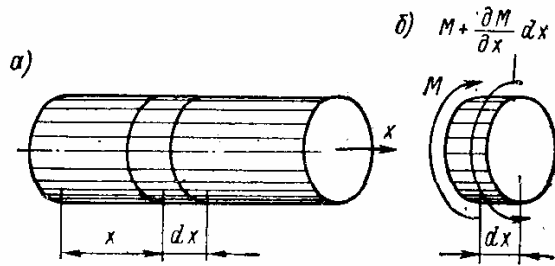


Рис. II.52

$$M = G J_p \frac{d\varphi}{dx}, \quad (\text{II.191})$$

где G — модуль сдвига; J_p — полярный момент инерции поперечного сечения. В смежном

сечении крутящий момент равен $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$ (рис. II.52, б).

Обозначая через ρJ_p (где ρ — плотность материала вала) интенсивность момента инерции массы вала относительно его оси (т. е. момент инерции единицы длины), уравнение движения элементарного участка вала можно записать так:

$$-M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx,$$

или, подобно уравнению (II.179),

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Подставив сюда выражение (II.191), получим при $J_p = \text{const}$ совершенно аналогично уравнению (II.180)

$$c_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (\text{II.192})$$

где $c_1^2 = G/\rho$.

Общее решение уравнения (II.192), как и уравнения (II.180), имеет вид

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t),$$

причем

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{p_n x}{c_1} + D_n \cos \frac{p_n x}{c_1}; \quad (\text{II.193})$$

$$T_n(t) = a \sin(p_n t + \alpha_n).$$

Собственные частоты и функции определяются конкретными граничными условиями.

Граничные условия. В основных случаях закрепления концов аналогично задачам о продольных колебаниях получим следующее: на закрепленном конце ($\varphi = 0$) $X = 0$; на свободном конце ($M = 0$) $X' = 0$; на упруго закрепленном левом конце (c_0 — коэффициент жесткости закрепления) $c_0 X = GJ_p X'$; на упруго закрепленном правом конце $-c_0 X = GJ_p X'$; при диске на левом конце (I_0 — момент инерции диска относительно оси стержня) $-I_0 p^2 X = GJ_p X'$; при диске на правом конце $I_0 p^2 X = GJ_p X'$.

Частотное уравнение. Частотное уравнение составляется так же, как и в задачах о продольных колебаниях.

Если вал закреплен на левом конце ($x = 0$), а правый конец ($x = l$) свободен, то $X = 0$ при $x = 0$ и $X' = 0$ при $x = l$; результат аналогичен выражению (II.190):

$$p_n = \frac{(2n-1)\pi c_1}{2l} \quad (n = 1; 2; 3; \dots).$$

Если левый конец закреплен, а на правом конце имеется диск, получим прежнее трансцендентное уравнение

$$\frac{pl}{c_1} \operatorname{tg} \frac{pl_1}{c_1} = \frac{\rho J_p l}{I_0}.$$

Если оба конца вала закреплены, то граничные условия будут $X = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. В этом случае из выражения (II.193) получим

$$C \sin \frac{pl}{c_1} = 0; \quad D = 0,$$

т. е.

$$pl/c_1 = n\pi \quad (n = 1; 2; 3; \dots).$$

Отсюда находим частоты

$$p_n = n\pi c_1/l.$$

Если левый конец вала свободен, а на правом конце имеется диск, то $X' = 0$ при $x = 0$; $I_0 p^2 X = GJ_p X'$ при $x = l$. При помощи выражения (II.193) находим

$$C = 0; \quad I_0 p^2 \cos \frac{pl}{c_1} = -GJ_p \frac{p}{c_1} \sin \frac{pl}{c_1},$$

или

$$\left[\operatorname{tg} \frac{pl}{c_1} \right] : \frac{pl}{c_1} = -\frac{I_0}{\rho J_p l}.$$

Изгибные колебания балок

Основное уравнение. Из статической теории изгиба стержней известно соотношение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q, \quad (\text{II.194})$$

в котором $y(x)$ — прогибы, вызываемые поперечной нагрузкой q ; EJ — жесткость при изгибе. Это соотношение может быть положено в основу вывода основного дифференциального уравнения свободных колебаний балок, если считать, что прогибы становятся функцией двух переменных (координаты x и времени t), а внешней нагрузкой служат распределенные силы инерции

$$q(x, t) = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (\text{II.195})$$

где m — интенсивность распределенной массы балки. Таким образом, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Как видно, при выводе этого дифференциального уравнения в сущности был использован обратный способ (приложение сил инерции к безмассовому скелету системы в качестве внешней нагрузки).

В частном случае постоянного поперечного сечения, когда $EJ = \text{const}$, $m = \text{const}$, получим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (\text{II.196})$$

Решение уравнения. Для решения уравнения (II.196) полагаем, как и выше,

$$y = X(x) T(t). \quad (\text{II.197})$$

Тогда

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{EJ}{m} \cdot \frac{X^{IV}}{X}.$$

Для тождественного выполнения равенства необходимо, чтобы каждая из частей равенства была постоянной. Обозначая эту постоянную через $-p^2$, получим два уравнения

$$\ddot{T} + p^2 T = 0; \quad (\text{II.198})$$

$$X^{IV} - \frac{mp^2}{EJ} X = 0. \quad (\text{II.199})$$

Первое уравнение имеет вид уравнения (II.1), и, следовательно, движение носит колебательный характер с частотой p . Второе уравнение определяет собственную форму колебаний. Решение уравнения (II.199) соответствующего ему порядку содержит четыре постоянные и может быть записано в виде

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx,$$

где

$$k = \sqrt[4]{\frac{mp^2}{EJ}}. \quad (\text{II.200})$$

Удобен предложенный А. Н. Крыловым вариант записи общего решения

$$X = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V, \quad (\text{II.201})$$

где величины

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx + \cos kx); & T &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kx + \sin kx); \\ U &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} kx - \cos kx); & V &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} kx - \sin kx) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.202})$$

представляют собой функции А. Н. Крылова.

Следует обратить внимание, что $S = 1$; $T = U = V = 0$ при $x = 0$. Функции S, T, U, V связаны между собой следующими дифференциальными соотношениями:

$$S = \frac{1}{k} T'; \quad T = \frac{1}{k} U'; \quad U = \frac{1}{k} V'; \quad V = \frac{1}{k} S'. \quad (\text{II.203})$$

Поэтому производные выражения (II.201) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} X' &= k(C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U); \\ X'' &= k^2(C_1 U + C_2 V + C_3 S + C_4 T); \\ X''' &= k^3(C_1 T + C_2 U + C_3 V + C_4 S). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.204})$$

Как и в задачах о продольных и крутильных колебаниях, число собственных частот p_n бесконечно велико; каждой из них отвечает своя функция времени T_n и своя собственная форма X_n . Общее решение получится путем наложения частных решений вида (II.197):

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t). \quad (\text{II.205})$$

Для определения собственных частот и собственных форм необходимо рассмотреть граничные условия.

Граничные условия. Для каждого конца стержня можно указать два граничных условия.

1. Свободный конец стержня (рис. II.53, а). Нулю равны поперечная сила $Q = EJX'''T$ и изгибающий момент $M = EJX''T$.

Поэтому граничные условия принимают вид

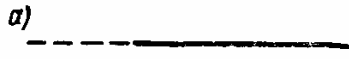
$$X'' = 0; X''' = 0. \quad (\text{II.206})$$


Рис. II.53

2. Шарнирно опертый конец стержня (рис. II.53, б). Нулю равны прогиб $y = XT$ и изгибающий момент $M = EJX''T$. Следовательно, граничные условия будут

$$X = 0; X'' = 0. \quad (\text{II.207})$$

3. Защемленный конец (рис. II.53, в). Нулю равны прогиб $y = XT$ и угол поворота $\varphi = X'T$. Граничные условия:

$$X = 0; X' = 0. \quad (\text{II.208})$$

4. С концом стержня связан точечный груз массой m_0 (рис. II.53, г). Его сила инерции $-m_0\ddot{y} = -m_0X\ddot{T}$ может быть при помощи уравнения (II.198) записана в виде m_0p^2XT ; она должна быть равна поперечной силе $Q = EJX'''T$, поэтому граничные условия принимают вид

$$m_0p^2X = \pm EJX'''; X'' = 0. \quad (\text{II.209})$$

В первом условии знак плюс принимается в случае, когда точечный груз связан с левым концом стержня, и знак минус, — когда он связан с правым концом стержня. Второе условие вытекает из отсутствия изгибающего момента.

5. Упруго опертый конец стержня (рис. II.53, д). Здесь изгибающий момент равен нулю, а поперечная сила $Q = EJX'''T$ равна реакции опоры $-c_0y = -c_0XT$ (c_0 — коэффициент жесткости опоры). Граничные условия:

$$X'' = 0; EJX''' = \pm c_0X \quad (\text{II.210})$$

(знак минус принимается в случае, когда упругая опора находится слева и знак плюс, — когда справа).

Частотное уравнение и собственные формы. Развернутая запись граничных условий приводит к однородным уравнениям относительно постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 .

Чтобы эти постоянные не были равны нулю, должен равняться нулю определитель, составленный из коэффициентов системы;

это приводит к частотному уравнению. При этих операциях выясняются соотношения между C_1 , C_2 , C_3 и C_4 , т. е. определяются собственные формы (с точностью до постоянного множителя). Проследим эти операции на двух примерах.

Для балки с шарнирно опертыми концами имеем согласно выражениям (II.207) следующие граничные условия: $X = 0$; $X'' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. При помощи выражений (II.201)—(II.204) получим из первых двух условий: $C_1 = 0$; $C_3 = 0$.

Теперь два остальных условия можно записать в виде

$$C_2 T(kl) + C_4 V(kl) = 0; \quad C_2 V(kl) + C_4 T(kl) = 0.$$

Чтобы C_2 и C_4 не были равны нулю, необходимо равенство нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} T(kl) & V(kl) \\ V(kl) & T(kl) \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, частотное уравнение имеет вид

$$[T(kl) + V(kl)][T(kl) - V(kl)] = 0.$$

Подставляя выражения T и V , получим

$$\operatorname{sh} kl \sin kl = 0.$$

Так как $\operatorname{sh} kl \neq 0$, то частотное уравнение принимает вид

$$\sin kl = 0. \quad (\text{II.211})$$

Корни этого уравнения

$$kl = n\pi \quad (n = 1; 2; 3; \dots).$$

Учитывая выражение (II.200), получим

$$p_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (\text{II.212})$$

Обратимся теперь к определению собственных форм. Из записанных выше однородных уравнений вытекает следующее соотношение между постоянными C_2 и C_4 :

$$C_4 = -\frac{V(kl)}{T(kl)} C_2.$$

Следовательно, уравнение (II.201) получает вид

$$X_n = C_2 \left[T(k_n x) - \frac{V(k_n l)}{T(k_n l)} V(k_n x) \right],$$

или

$$X_n = \frac{C_2}{2T(k_n l)} (\sin k_n x \operatorname{sh} k_n l + \sin k_n l \operatorname{sh} k_n x).$$

Согласно условию (II.211) находим собственные функции

$$X_n = C_n \sin k_n x, \quad (\text{II.213})$$

где C_n — новая постоянная (ее значение остается неопределенным, пока не введены в рассмотрение начальные условия),

$$C_n = \frac{C_2 \operatorname{sh} k_n l}{2T(k_n l)}.$$

Рассмотрим теперь балку с одним зашлепленным и одним упруго опертым концом (рис. II.54). Согласно выражениям (II.208) и (II.210) граничные условия имеют вид: $X = 0$ и $X' = 0$ при $x = 0$; $X'' = 0$ и $EJX''' = c_0 X$ при $x = l$. Из первых двух условий следует $C_1 = C_2 = 0$.

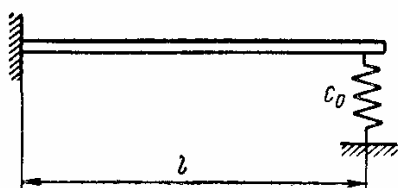


Рис. II.54

Используя два других условия, при помощи выражений (II.201) и (II.204) получим уравнения

$$\begin{aligned} C_3 S(kl) + C_4 T(kl) &= 0; \\ EJ [C_3 V(kl) + C_4 S(kl)] &= \\ &= c_0 [C_3 U(kl) + C_4 V(kl)], \end{aligned}$$

или после замены по формулам (II.202)

$$\operatorname{sh} kl \cos kl - \operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kl = EJ/c_0.$$

Решения для ряда других случаев приведены в справочнике [1].

Определение движения по начальным условиям. Если требуется определить движение, следующее после начального возмущения, то необходимо указать для всех точек балки как начальные смещения, так и начальные скорости:

$$y(x, 0) = y_0(x); \quad \dot{y}(x, 0) = v_0(x) \quad (\text{II.214})$$

и использовать свойство ортогональности собственных форм

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Общее решение (II.205) запишем в виде

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (A_n \sin p_n t + B_n \cos p_n t). \quad (\text{II.215})$$

Скорость определяется выражением

$$\dot{y} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n X_n(x) (A_n \cos p_n t - B_n \sin p_n t). \quad (\text{II.216})$$

Подставляя в правые части уравнений (II.215) и (II.216) $t = 0$, а в левые части известные начальные смещения и скорости, получим

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x); \quad v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n A_n X_n(x).$$

Умножив эти выражения на X_m и проинтегрировав по всей длине, получим

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l y_0(x) X_m(x) dx &= B_m \int_0^l [X_m(x)]^2 dx; \\ \int_0^l v_0(x) X_m(x) dx &= A_m p_m \int_0^l [X_m(x)]^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.217})$$

Бесконечные суммы в правых частях исчезли вследствие свойства ортогональности собственных форм. Из выражений (II.217) следуют формулы для постоянных A_m и B_m :

$$A_m = \frac{\int_0^l v_0(x) X_m(x) dx}{p_m \int_0^l [X_m(x)]^2 dx}; \quad B_m = \frac{\int_0^l y_0(x) X_m(x) dx}{\int_0^l [X_m(x)]^2 dx}. \quad (\text{II.218})$$

Теперь остается подставить эти результаты в решение (II.215). Снова отметим, что выбор масштаба собственных форм несущественен. Если, например, в выражении собственной формы (II.213) принять вместо C_n величину в α раз большую, то формулы (II.218) дадут результаты в α раз меньшие; после подстановки в решение (II.215) эти различия компенсируют друг друга. Тем не менее, часто пользуются нормированными собственными функциями, например выбирая их масштаб таким, чтобы знаменатели выражений (II.218) равнялись единице; это упрощает выражения A_m и B_m .

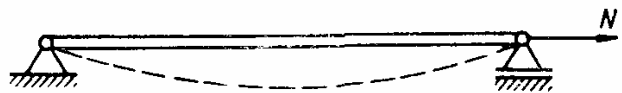


Рис. II.55

Влияние постоянной продольной силы. Рассмотрим случай, когда колеблющаяся балка испытывает действие продольной силы N , величина которой не меняется в процессе колебаний (рис. II.55). Как известно из курса сопротивления материалов, в случае действия продольной силы уравнение статического изгиба (II.194) усложняется и приобретает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - N \frac{d^2 y}{dx^2} = q.$$

Полагая $q = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ и считая жесткость постоянной, получаем уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{N}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (\text{II.219})$$

Примем по-прежнему частное решение в виде $y = X(x)T(t)$. Тогда уравнение (II.219) распадается на уравнения

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -p^2; \quad \frac{N}{m} \cdot \frac{X''}{X} - \frac{EJ}{m} \cdot \frac{X^{IV}}{X} = -p^2.$$

Первое уравнение отражает колебательный характер решения, а второе определяет форму колебаний и позволяет найти также частоты. Перепишем его в виде

$$X^{IV} - \alpha^2 X'' - k^4 X = 0, \quad (\text{II.220})$$

где k определяется, как и выше, формулой (II.200), а

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \quad (\text{II.221})$$

Решение уравнения (II.220) имеет вид [55]

$$X = C_1 \operatorname{sh} s_1 x + C_2 \operatorname{ch} s_1 x + C_3 \sin s_2 x + C_4 \cos s_2 x,$$

где

$$s_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + k^4}}; \quad s_2 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + k^4}}.$$

Рассмотрим случай, когда оба конца стержня имеют шарнирные опоры. Условия на левом конце $X = 0$; $X'' = 0$ дают $C_2 = C_4 = 0$. Удовлетворяя тем же условиям на правом конце, получим

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} s_1 l + C_3 \sin s_2 l &= 0; \\ C_1 s_1^2 \sin s_1 l - C_3 s_2^2 \sin s_2 l &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при величинах C_1 и C_3 , приходим к уравнению

$$(s_1^2 + s_2^2) \operatorname{sh} s_1 l \sin s_2 l = 0,$$

или

$$\sin s_2 l = 0. \quad (\text{II.222})$$

Корни этого частотного уравнения

$$s_2 l = n\pi \quad (n = 1; 2; 3; \dots).$$

Следовательно, собственная частота определится из уравнения

$$l \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \frac{mp^2}{EJ}}} = n\pi.$$

Отсюда при учете выражения (II.221) находим

$$\rho_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \sqrt{1 + \frac{Nl^2}{n^2 \pi^2 EJ}}. \quad (\text{II.223})$$

При растяжении частота увеличивается, при сжатии ($N < 0$) — уменьшается. Когда сжимающая сила N приближается к критическому значению, корень стремится к нулю; вместе с этим к нулю стремится и собственная частота ρ_n .

Влияние цепных усилий. Выше продольная сила считалась заданной и не зависящей от перемещений системы. В некоторых практических задачах сопровождающая процесс поперечных колебаний продольная сила возникает вследствие изгиба балки и в сущности является реакцией.



Рис. II.56

Рассмотрим, например, балку с шарнирно неподвижными опорами (рис. II.56). При статическом изгибе балки возникают горизонтальные реакции опор, вызывающие растяжение балки; соответствующее растягивающее усилие принято называть цепным усилием. Если балка совершает поперечные колебания, то цепное усилие будет меняться во времени.

Удлинение оси можно найти по приближенной формуле

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Соответствующее цепное усилие найдем при помощи закона Гука:

$$N = \frac{EF}{l} \Delta l = \frac{EF}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Подставим этот результат в уравнение (II.219):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{EF}{2ml} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (\text{II.224})$$

Полученное нелинейное интегродифференциальное уравнение в данном случае упрощается при помощи подстановки

$$y = a_n T_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (\text{II.225})$$

где $T_n = T_n(t)$ — безразмерная функция времени, максимальное значение которой можно положить равным любому числу, например единице; a_n — амплитуда колебаний.

Подставив выражение (II.225) в уравнение (II.224), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{T}_n + c_n T + d_n T^3 = 0, \quad (\text{II.226})$$

в котором коэффициенты имеют следующие значения:

$$c_n = E F a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{4 m l^4}; \quad d_n = E J \frac{n^4 \pi^4}{m l^4}.$$

Важно заметить, что дифференциальное уравнение (II.226) нелинейно; следовательно, частота свободных колебаний зависит от их амплитуды (см. стр. 73). Для решения дифференциального уравнения (II.226) можно воспользоваться способами, описанными выше в п. 6.

Точное решение для n -й частоты поперечных колебаний p_n^* имеет вид

$$p_n^* = p_n \kappa,$$

где p_n — частота поперечных колебаний, найденная без учета цепных усилий; κ — поправочный коэффициент, зависящий от отношения амплитуды колебаний a_n к радиусу инерции поперечного сечения ρ .

Для $n = 1$ коэффициент κ имеет следующие значения:

$a_1/(2\rho)$	0	0,5	1	2	5	10	100
κ	1	1,09	1,31	1,98	4,75	8,53	84,72

При соизмеримости амплитуды и радиуса инерции поперечного сечения поправка к частоте становится значительной. Если, например, амплитуда колебаний стержня круглого сечения равна его диаметру, то $a_1/(2\rho) = 2$ и частота почти в два раза больше, чем в случае свободного горизонтального смещения одной из опор.

Случай $a_1/(2\rho) \rightarrow \infty$ соответствует нулевому значению радиуса инерции, когда изгибная жесткость балки исчезающе мала (растяжимая нить). При этом формула для p^* дает неопределенность, так как $\rho = 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$. Раскрывая эту неопределенность, получим формулу для частоты свободных колебаний такой нити

$$p^* = \frac{4,181 a}{l^2} \sqrt{\frac{E F}{m}}.$$

Эта формула относится к случаю, когда в положении равновесия натяжение равно нулю.

Иногда приходится рассматривать внешне сходную задачу о свободных колебаниях струны, также считая, что она обладает нулевой изгибной жесткостью. Однако при этом полагают, что перемещения малы, а начальное значение растягивающей силы настолько велико, что изменениями этой силы в процессе колебаний можно пренебречь и считать растягивающую силу

неизменной. Решением этой принципиально иной линейной задачи служит формула для собственной частоты колебаний

$$\rho^* = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{N}{m}},$$

где N — постоянная растягивающая сила.

Влияние инерции поворотов. Вернемся к выводу основного уравнения (II.196), где принято, что внешняя нагрузка на балку не содержит распределенных моментов. Если в состав внешних

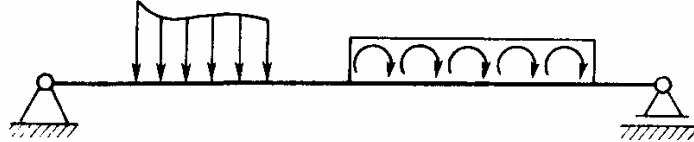


Рис. II.57

нагрузок входят также распределенные моменты (см., например, четвертый слева участок балки на рис. II.57), то вместо (II.195) получится

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q - \frac{dM^*}{dx}, \quad (\text{II.227})$$

где M^* — интенсивность внешней моментной нагрузки. При этом вместо уравнения (II.219) можно получить

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q - \frac{dM^*}{dx}. \quad (\text{II.228})$$

В задачах статики это уравнение встречается редко, но с ним иногда приходится иметь дело в задачах динамики балок. Дело в том, что при колебаниях балок развиваются не только поперечные инерционные нагрузки (которые всюду выше принимались во внимание), но и распределенные моментные нагрузки также инерционного происхождения, связанные с поворотами сечений балки. При относительно невысоких балках, колеблющихся с низшими частотами, инерционные нагрузки этого типа мало-существенны; однако такими нагрузками нельзя пренебрегать при анализе высокочастотных колебаний.

Если, как и выше, y — прогиб балки, то для угла поворота сечения можно записать $\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}$. Следовательно, при колебаниях угловое ускорение сечения равно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}.$$

Этому ускорению соответствует распределенная моментная инерционная нагрузка $-\rho J \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}$, где J — момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси; ρ — плотность материала

балки (если F — площадь поперечного сечения, то $\rho F = m$). Найденное выражение следует подставить в уравнение (II.228) вместо M^* ; при этом вместо дифференциального уравнения (II.196) получим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{J}{F} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (\text{II.229})$$

Это дифференциальное уравнение было получено Рэлеем. Мы не будем заниматься его интегрированием, потому что во всех тех случаях, когда необходим учет инерции поворота, в еще большей мере необходим учет еще одного обстоятельства, которое не было принято во внимание Рэлеем, — сдвигов, которыми также пренебрегают в обычной технической теории изгиба балок.

Влияние сдвигов. В подробных курсах сопротивления материалов можно найти, что уточненное дифференциальное уравнение изгиба балок, приближенно учитывающее дополнительные деформации, связанные со сдвигами, имеет вид (при постоянном сечении балки и отсутствии распределенной моментной нагрузки)

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EJ} - \frac{1}{GF'} \cdot \frac{d^2 q}{dx^2}. \quad (\text{II.230})$$

Здесь GF' — жесткость балки при сдвиге, причем G — модуль сдвига, F' — приведенная площадь сечения, зависящая от его формы (например, для прямоугольного сечения $F' = 1,2 F$).

Обращаясь к задаче о свободных колебаниях балок, нужно вместо q подставить распределенную инерционную нагрузку $-m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, и мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{EJ}{GF'} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad (\text{II.231})$$

которое при $G \rightarrow \infty$ переходит в прежнее уравнение (II.196).

Одновременный учет влияния инерции поворотов и сдвига. Исходя из только что поясненных соображений, С. П. Тимошенко получил следующее дифференциальное уравнение, в котором одновременно учтены оба названных дополнительных влияния*:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(\frac{J}{F} + \frac{EJ}{GF'} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{J}{F} \cdot \frac{m}{GF'} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad (\text{II.232})$$

Рассмотренную расчетную модель часто называют «балкой Тимошенко».

* Структура первых трех членов уравнения ясна из сопоставления с уравнениями (II.229) и (II.231). Для выяснения смысла четвертого члена пришлось бы проследить более подробно весь вывод. Впрочем, этот член — наименее существенный в уравнении.

Для решения уравнения (II.232) можно воспользоваться методом Фурье. Не останавливаясь на соответствующих выкладках, приведем окончательный приближенный результат определения собственных частот для двухопорной шарнирно-опертой балки:

$$p_n = p_n^0 \left[1 - \frac{n^2 \pi^2 J}{2l^2 F} \left(1 + \frac{EF}{GF'} \right) \right]. \quad (\text{II.233})$$

Здесь p_n^0 — собственные частоты колебаний балки, вычисленные без учета инерции поворотов и сдвигов. Отметим, что при учете только инерции поворотов получится

$$p_n = p_n^0 \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 J}{2l^2 F} \right), \quad (\text{II.234})$$

а при учете только сдвигов (также приближенно) —

$$p_n = p_n^0 \left(1 - \frac{n^2 \pi^2 EJ}{2l^2 GF'} \right). \quad (\text{II.235})$$

Следует прежде всего отметить, что значения поправок возрастают с номером собственной частоты. Сравнивая между собой поправки в двух последних приближенных выражениях, можно установить, что влияние сдвига приблизительно втрое превосходит влияние инерции поворотов.

Влияние неупругих сопротивлений на свободные колебания

Выше предполагалось, что материал стержней идеально упругий и трение полностью отсутствует. Рассмотрим влияние внутреннего трения, считая, что оно является вязким; тогда связь напряжений с деформациями описывается соотношением

$$\sigma = E\varepsilon + k \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (\text{II.236})$$

Остановимся на случае свободных продольных колебаний. В этом случае продольная сила запишется в виде

$$N = \sigma F = EF\varepsilon + kF \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = EF \frac{\partial u}{\partial x} + kF \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \quad (\text{II.237})$$

Из уравнения движения элемента стержня выше было получено соотношение (II.179). Подставляя в него выражение (II.237), приходим к основному дифференциальному уравнению

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (\text{II.238})$$

которое отличается от уравнения (II.180) вторым слагаемым, выражающим влияние сил вязкости.

Следуя способу Фурье, ищем решение уравнения (II.238) в виде

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} X_r(x) T_r(t), \quad (\text{II.239})$$

где X_r — функция только координаты x , а T_r — функция только времени t .

При этом каждый член ряда должен удовлетворять граничным условиям задачи, а вся сумма — начальным условиям. Подставляя выражение (II.239) в уравнение (II.238) и требуя, чтобы равенство удовлетворилось для любого номера r , получим

$$c^2 X_r'' T_r + \frac{k}{\rho} X_r'' \dot{T}_r = X_r \ddot{T}_r. \quad (\text{II.240})$$

Здесь и ниже штрихи обозначают дифференцирование по координате x , а точки — дифференцирование по времени t .

Разделив равенство (II.240) на произведение $X_r \left(T_r + \frac{k}{E} \dot{T}_r \right)$, приходим к равенству

$$c^2 \frac{X_r''}{X_r} = \frac{\ddot{T}_r}{T_r + \frac{k}{E} \dot{T}_r}, \quad (\text{II.241})$$

левая часть которого может зависеть только от координаты x , а правая — только от времени t . Для тождественного выполнения равенства (II.241) необходимо, чтобы обе части были равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-p_r^2$.

Отсюда следуют уравнения:

$$X_r'' + \frac{p_r^2}{c^2} X_r = 0; \quad (\text{II.242})$$

$$\ddot{T}_r + \frac{k}{E} p_r^2 \dot{T}_r + p_r^2 T_r = 0. \quad (\text{II.243})$$

Уравнение (II.242) совершенно не зависит от коэффициента вязкости k и, в частности, остается таким же в случае идеально упругой системы, когда $k = 0$. Поэтому числа p_r полностью совпадают с найденными выше; однако, как будет показано ниже, величина p_r есть лишь приближенное значение собственной частоты. Важно отметить, что собственные формы совершенно не зависят от вязких свойств стержня, т. е. формы свободных затухающих колебаний совпадают с формами свободных незатухающих колебаний.

Возвратимся теперь к уравнению (II.243), описывающему, очевидно, процесс затухающих колебаний. Его решение имеет вид

$$T_r = e^{-n_r t} (A_r \sin p_r^* t + B_r \cos p_r^* t). \quad (\text{II.244})$$

Здесь

$$n_r = \frac{kp_r^2}{2E}; \quad (\text{II.245})$$

$$p_r^* = \sqrt{p_r^2 - n_r^2} = p_r \sqrt{1 - \left(\frac{kp_r^2}{2E}\right)^2}. \quad (\text{II.246})$$

Выражение (II.245) определяет темп затухания, а выражение (II.246) — частоту колебаний.

Таким образом, полное решение уравнения задачи имеет вид

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} X_r e^{-n_r t} (A_r \sin p_r^* t + B_r \cos p_r^* t). \quad (\text{II.247})$$

Рассматривая выражения (II.245) и (II.247), заметим, что чем выше номер формы колебаний X_r , тем быстрее затухание соответствующего слагаемого, входящего в выражение (II.247). Кроме того, эти слагаемые описывают затухающие колебания, если p_r^* есть действительное число. Из выражения (II.246) видно, что это имеет место лишь для нескольких начальных номеров r , пока выполняется неравенство

$$\frac{kp_r^2}{2E} < 1. \quad (\text{II.248})$$

При достаточно больших значениях r неравенство (II.248) нарушается и величина p_r^* становится мнимой, а соответствующие члены общего решения (II.247) уже не будут описывать затухающих колебаний, но будут представлять затухающие движения неколебательного характера. Другими словами, колебания, в обычном смысле слова, выражает только некоторая конечная часть суммы (II.247).

Все эти качественные заключения относятся не только к случаю продольных колебаний, но и к случаям крутильных и изгибных колебаний.

9. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ (ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ)

Основные уравнения

В тех случаях, когда распределенная масса и сечение стержня переменны по его длине, следует вместо уравнения продольных колебаний (II.180) исходить из уравнения

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (\text{II.249})$$

Уравнение крутильных колебаний (II.192) должно быть заменено уравнением

$$c_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (\text{II.250})$$

а уравнение поперечных колебаний (II.196) — уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (\text{II.251})$$

Уравнения (II.249)—(II.251) при помощи однотипных подстановок $u = X(x)T(t)$; $\varphi = X(x)T(t)$; $y = X(x)T(t)$ можно привести к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $X(x)$:

$$(FX')' + \frac{p^2}{c^2} FX = 0; \quad (\text{II.252})$$

$$(IX')' + \frac{p^2}{c_1^2} IX = 0; \quad (\text{II.253})$$

$$(EJX'')'' - mp^2X = 0 \quad (\text{II.254})$$

и одному уравнению для функции $T(t)$.

Уравнения (II.252)—(II.254) в отличие от уравнений, решенных выше, имеют переменные коэффициенты.

Замкнутую форму решений можно получить лишь в отдельных случаях, когда переменные F , I , EJ , m определены специальными зависимостями, а в общем случае неизбежен переход к приближенным способам. В частности, возможен путь, основанный на сосредоточении распределенной массы в ряде точек по длине стержня; после этого система сохраняет лишь конечное число степеней свободы, равное числу точек приведения. Широко используются изложенные ниже различные варианты вариационного метода, а также способ последовательных приближений.

Метод Ритца

Зададимся несколькими функциями $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям задачи, и образуем функцию $f(x)$ как сумму

$$f(x) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n. \quad (\text{II.255})$$

Если эту функцию подставить в формулу Рэлея (II.26):

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ (f'')^2 dx}{\int_0^l m f^2 dx}, \quad (\text{II.256})$$

то результат будет зависеть от конкретного выбора коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Метод Ритца можно построить на простой идее: коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$ должны быть выбраны так, чтобы вычисление по формуле (II.256) дало наименьшее значение для p^2 . Из теоремы Рэлея (см. стр. 34) вытекает, что такой выбор будет наилучшим (при данной системе функций f_i).

Условия минимума p^2 имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\int_0^l EJ(f'')^2 dx}{\int_0^l mf^2 dx} = 0 \quad (i = 1; 2; \dots),$$

т. е.

$$\left[\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^l EJ(f'')^2 dx \right] \left[\int_0^l mf^2 dx \right] - \left[\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^l mf^2 dx \right] \left[\int_0^l EJ(f'')^2 dx \right] = 0.$$

Разделив это уравнение на интеграл $\int_0^l mf^2 dx$ и учитывая формулу (II.256), получим

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^l [EJ(f'')^2 - p^2 mf^2] dx = 0 \quad (i = 1; 2; \dots). \quad (\text{II.257})$$

Уравнения (II.257) однородны и линейны относительно $c_1, c_2, \dots$, и их число равно числу членов выражения (II.255). Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при $c_1, c_2, \dots$, получим частотное уравнение. Это уравнение не только даст хорошее приближение для низшей частоты, но также определит (хотя и с меньшей точностью) значения высших частот; при этом можно будет найти столько частот, сколько слагаемых принято в выражении (II.255).

Метод Ритца, как и метод Рэлея, позволяет решить задачу в случаях разрывных функций EJ и m и когда эти функции представлены различными аналитическими выражениями на различных участках длины балки.

Иногда та же идея используется в иной форме. Например, при исследовании поперечных колебаний турбинных лопаток задаются функцией $f(x) = ax^s$ (начало координат в закрепленном конце). Применяя затем формулу Рэлея (II.256), получают значения частоты, зависящие от показателя степени s . Затем определяют, какому значению s отвечает наименьшая частота, и находят эту частоту. Это позволяет довольно надежно определить частоту p_1 и первую собственную форму.

Пример 15. Определить методом Ритца низшую собственную частоту поперечных колебаний консоли переменного сечения, имеющей толщину, равную единице; высота изменяется линейно (рис. II.58):

$$h_x = \frac{x}{l} h; \quad J = \frac{h^3}{12l^3} x^3; \quad m = \frac{\rho h}{l} x.$$

Для приближенного решения примем

$$f(x) = c_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + c_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + \dots; \quad (\text{II.258})$$

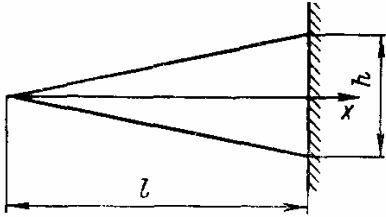


Рис. II.58

каждый член этого разложения удовлетворяет граничным условиям задачи: $f_i(x) = 0$, $f'_i(x) = 0$ при $x = l$.

Если ограничиться одним членом, то получим по методу Рэлея (ошибка около 3%)

$$p = \frac{2,740h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

Чтобы получить лучшее приближение, возьмем два члена разложения (II.258) и, подставив их в выражение (II.257), получим

$$\frac{h^3}{12l^3} \left[(c_1 - 2c_2)^2 + \frac{24}{5} c_2 (c_1 - 2c_2) + 6c_2^2 \right] - p^2 \frac{\rho h l}{E} \left(\frac{c_1^2}{30} + \frac{2c_1 c_2}{105} + \frac{c_2^2}{280} \right).$$

Дифференцируя это выражение поочередно по c_1 и c_2 , приходим к уравнениям

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{Eh^2}{12\rho l^4} - \frac{p^2}{30} \right) c_1 + \left(\frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{105} \right) c_2 &= 0; \\ \left(\frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{105} \right) c_1 + \left(\frac{Eh^2}{30\rho l^4} - \frac{p^2}{280} \right) c_2 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{II.259})$$

Приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов этих уравнений, получим уравнение частоты; наименьший корень уравнения

$$p = \frac{2,660h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}$$

отличается на 0,1% от точного значения.

Метод Бубнова—Галеркина

В простейшем варианте согласно этому методу в уравнение (II.254) следует вместо $X(x)$ подставить приближенно выбранное выражение $f(x)$, содержащее один неопределенный параметр, и затем образовать уравнение

$$\int_0^l [(EJf'')'' - mp^2f] f dx = 0. \quad (\text{II.260})$$

Это уравнение выражает равенство нулю возможной работы, совершаемой силами упругости и инерции на перемещениях $f(x)$.

Если принять $f(x)$ в виде (II.255) и рассматривать каждое из слагаемых $f_i(x)$ как возможное перемещение, то вместо (II.260) получим соотношение, выражающее равенство нулю возможной работы:

$$\int_0^l [(EJf'')'' - m\rho^2 f] f_i dx = 0. \quad (\text{II.261})$$

Таких равенств можно записать столько, сколько слагаемых содержится в принятом выражении (II.255). Каждое из уравнений (II.261) однородно и содержит неопределенные величины $c_1, c_2, \dots$ в первой степени. Приравняв нулю определитель системы (II.261), получим частотное уравнение.

Метод Бубнова—Галеркина обладает одной особенностью, которая относится к граничным условиям. Если функции $f_i(x)$ удовлетворяют только геометрическим граничным условиям (как говорилось, такие функции могут быть использованы при решении по способу Ритца), то это может привести к большим ошибкам при решении по способу Бубнова—Галеркина. Если при выборе функций $f_i(x)$ не считаться с силовыми граничными условиями (например, не обращать внимания на условия $f_i'' = 0$ и $f_i''' = 0$ на свободном конце балки или на условие $f_i'' = 0$ на шарнирной опоре), то будет неявно признано существование на концах балки таких граничных усилий, которых в действительности нет. Из-за этого возникнет ошибка, так как в выражение (II.261) войдет работа несуществующих усилий. Для компенсации ошибки следует вычесть из левой части выражения (II.261) «излишнюю» работу этих граничных усилий (обобщенный метод Бубнова — Галеркина).

Обычно поступают иначе — заранее подчиняют функции не только геометрическим, но и силовым граничным условиям. При таком выборе функций методы Ритца и Галеркина дают совпадающие результаты.

Пример 16. Определить методом Бубнова—Галеркина низшую частоту поперечных колебаний консоли, рассмотренной в примере 15 (рис. II.58).

Принимая в качестве формы колебаний

$$f(x) = c_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + c_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2,$$

удовлетворяем как геометрическим условиям на правом конце, так и силовым условиям на левом.

Дифференцируя $f(x)$ два раза, умножая на $EJ = \frac{Eh^3}{12l^3} x^3$ и вновь дифференцируя два раза, получаем

$$(EJf'')'' = \frac{Eh^3}{l^5} \left[(c_1 - 2c_2)x + \frac{6c_2x^2}{l} \right].$$

Подставляя в выражение (II.261), находим

$$\int_0^l \left\{ \left[\frac{Eh^3}{l^5} (c_1 - 2c_2)x + \frac{6c_2x^2}{l} \right] - \frac{\rho hp^2}{l} \left[c_1x \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + c_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right] \right\} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx = 0;$$

$$\int_0^l \left\{ \frac{Eh^3}{l^5} \left[(c_1 - 2c_2)x + \frac{6c_2x^2}{l} \right] - \frac{\rho hp^2}{l} \left[c_1x \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + c_2 \frac{x^2}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] \right\} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx = 0.$$

Отсюда получим те же уравнения (II.259), что и по методу Ритца.

В задачах о продольных или крутильных колебаниях стержней уравнения метода Бубнова—Галеркина (II.261) составляются подобным же образом.

Метод последовательных приближений

Прежде всего докажем, что обычный процесс последовательных приближений (см. п. 7) приводит именно к первой собственной форме. Основой процесса является сравнение двух кривых a_n и a_{n+1} , вторая из которых получается как линия прогибов, вызванных нагрузкой ma_n ; при этом приближенное значение квадрата частоты определяется формулой

$$p_1^2 = \frac{(a_{n+1})_{\max}}{(a_n)_{\max}}. \quad (\text{II.262})$$

Представим исходную кривую $a_1(x)$ в виде ряда

$$a_1(x) = X_1(x) + b_2X_2(x) + b_3X_3(x) + \dots, \quad (\text{II.263})$$

в котором $X_i(x)$ — неизвестные собственные формы, b_i — постоянные коэффициенты.

Тогда нагрузка, соответствующая прогибам a_1 , будет

$$ma_1 = mX_1 + mb_2X_2 + mb_3X_3 + \dots \quad (\text{II.264})$$

Рассмотрим одно из слагаемых этой нагрузки mb_iX_i . От нагрузки $mp_i^2X_i$ прогибы будут X_i ; поэтому от нагрузки mb_iX_i прогибы будут в $\frac{b_i}{p_i^2}$ раз больше, т. е. составят $\frac{b_i}{p_i^2}X_i$. Следовательно, кривая прогибов от суммарной нагрузки определится рядом

$$a_2 = \frac{X_1}{p_1^2} + \frac{b_2X_2}{p_2^2} + \frac{b_3X_3}{p_3^2} + \dots, \quad (\text{II.265})$$

который отличается от ряда (II.264) тем, что каждый член разделен на квадрат соответствующей частоты. Так как $p_1 < p_2$, $p_2 < p_3$, ..., то кривая $a_2(x)$ ближе к $X_1(x)$, чем исходная кривая $a_1(x)$. Члены, содержащие $X_2(x)$, $X_3(x)$ и искажающие основную форму $X_1(x)$, представлены в ряде (II.265) слабее, чем в ряде (II.263). Продолжив процесс далее, получим для $(n + 1)$ -й кривой

$$a_{n+1} = \frac{1}{p_1^{2n}} \left[X_1 + b_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{2n} X_2 + b_3 \left(\frac{p_1}{p_3} \right)^{2n} X_3 + \dots \right]. \quad (\text{II.266})$$

Как видно, при $n \rightarrow \infty$ высшие формы исчезают и, следовательно, какой бы ни была выбрана исходная кривая (например, даже очень похожей на вторую собственную форму), процесс в конце концов приведет именно к первой собственной форме.

Поэтому может показаться, что попытка построить, например, вторую собственную форму при помощи этого метода обречена на неудачу, так как всякое искажение, вносимое первой формой в приближенную вторую форму, будет постепенно увеличиваться и после большого числа приближений второй тип колебаний исчезнет совершенно и останется лишь первый тип.

Однако, несколько видоизменяя метод, можно добиться того, что в результате последовательных приближений «очистится» не первая, а именно вторая собственная форма колебаний; этот прием нашел практическое применение при расчете изгибных колебаний крыльев самолетов и лопаток турбин.

Прием основан на устранении формы $X_1(x)$ из исходной функции $a_1(x)$. Допустим, что в разложении (II.263) в самом деле совершенно отсутствует слагаемое, соответствующее первой форме; тогда оно не сможет возникнуть при всех последующих операциях, ряд (II.266) примет вид

$$a_{n+1} = \frac{1}{p_2^{2n}} \left[X_2 + b_3 \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{2n} X_3 + b_4 \left(\frac{p_2}{p_4} \right)^{2n} X_4 + \dots \right],$$

и при $n \rightarrow \infty$ исчезнут все формы колебаний, кроме второй. Чтобы процесс последовательных приближений привел именно ко второй форме, нужно из исходной функции $a_1(x)$ исключить первую собственную форму $X_1(x)$.

Это можно сделать, приняв в качестве основы для построения второго приближения функцию

$$\bar{a}_1(x) = a_1(x) - \alpha_1 X_1(x), \quad (\text{II.267})$$

где $a_1(x)$ — подходящая функция; $X_1(x)$ — предварительно найденная первая собственная форма.

Коэффициент α_1 следует принять таким, чтобы форма $\bar{a}_1(x)$ была ортогональна первой собственной форме $X_1(x)$:

$$\int_0^l m \bar{a}_1(x) X_1(x) dx = 0.$$

Подставив сюда выражение (II.267), получим

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^l m a_1(x) X_1(x) dx}{\int_0^l m X_1^2(x) dx}.$$

Далее от нагрузки $m\bar{a}_1$ следует определить прогибы a_2 . Если при помощи выражения (II.267) первая форма X_1 исключена совершенно точно, то функция a_2 будет ближе ко второй форме, а следующие операции обеспечат дальнейшее уточнение решения.

Однако первая собственная форма X_1 может быть известна лишь приближенно; поэтому операция, указанная в выражении (II.267), практически не гарантирует полного освобождения от первой формы X_1 . Это заставляет при продолжении процесса снова исправить функцию a_2 и принять

$$\bar{a}_2(x) = a_2(x) - \alpha_2 X_1(x), \quad (\text{II.268})$$

где коэффициент α_2 также определяется условием ортогональности функций $\bar{a}_2$ и X_1

$$\int_0^l m \bar{a}_2(x) X_1(x) dx = 0,$$

которое дает после подстановки выражения (II.268)

$$\alpha_2 = \frac{\int_0^l m a_2(x) X_1(x) dx}{\int_0^l m X_1^2(x) dx}.$$

Затем следует определить кривую a_3 от нагрузки $m\bar{a}_2$, вновь исправить ее по формуле

$$\bar{a}_3(x) = a_3(x) - \alpha_3 X_1(x)$$

и т. д.

В таком процессе последовательных приближений ортогонализация сопровождает каждую ступень выкладок и, непрерывно вытесняя «примесь» первой формы, приводит ко второй собственной форме и ко второй частоте; последняя подобно выражению (II.262) определится формулой

$$p_2^2 = \frac{(\bar{a}_{n+1})_{\max}}{(\bar{a}_n)_{\max}}.$$

Таким же образом при помощи сопровождающей ортогонализации можно определить третью собственную форму и третью частоту и т. д.

10. ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ

При исследовании колебаний вращающихся дисков обычно считают, что диск представляет собой тело вращения и что существует плоскость симметрии диска, перпендикулярная к оси вращения (срединная плоскость). Кроме того, принимают, что наклон боковых поверхностей диска к этой плоскости весьма мал, а толщина диска мала по сравнению с его диаметром.

При этих предположениях можно говорить о двух типах колебаний. К первому типу относятся случаи, когда любая точка срединной плоскости диска колеблется в той же плоскости, т. е. совершает плоские колебания; в свою очередь, их можно подразделить на радиальные и тангенциальные колебания. Второй тип колебаний — изгибные колебания диска, которые характеризуются пространственной картиной деформаций и перемещениями точек срединной плоскости по перпендикуляру к этой плоскости. Установлено, что центробежные эффекты, связанные с вращением диска, практически не влияют на формы и частоты свободных плоских колебаний; поэтому вращение диска учитывают только при исследовании изгибных колебаний.

Радиальные колебания

Радиальными называются осесимметричные плоские колебания, при которых любая точка срединной плоскости диска движется только вдоль соответствующего радиуса; при этом отсутствуют перемещения в окружном (тангенциальном) направлении, а также в направлении перпендикуляра к срединной плоскости диска.

Мысленно выделим двумя радиальными и двумя цилиндрическими сечениями бесконечно малый элемент диска (рис. II.59). Расстояние от центра диска до этого элемента обозначим через r , а соответствующий бесконечно малый центральный угол — через $d\theta$. Нормальные напряжения в кольцевом и радиальном сечениях обозначим соответственно через σ_r и σ_θ . Благодаря осевой симметрии касательные напряжения на гранях выделенного элемента отсутствуют. Нормальные усилия на обеих боковых гранях элемента составляют $\sigma_\theta h dr$, где h — толщина диска, являющаяся в общем случае функцией координаты r . На внутренней грани нормальное усилие равно произведению напряжения σ_r на площадь грани $hr d\theta$, т. е. составляет $\sigma_r hr d\theta$. На наружной грани нормальное напряжение составляет $\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr$, а нормальное усилие равно $\sigma_r hr d\theta + \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r hr d\theta) dr$.

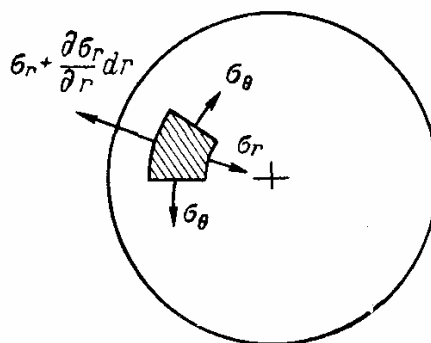


Рис. II.59

На основании закона Гука для плоского напряженного состояния можно записать

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E},$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Последние соотношения представим в виде зависимостей напряжений от деформаций

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.269})$$

Вспомнив известные из курса сопротивления материалов формулы

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r},$$

выражающие деформации через перемещения (u — радиальное перемещение текущей точки), запишем соотношения (II.269) в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.270})$$

Таким образом, оба нормальных напряжения σ_r и σ_θ выражены через одну функцию $u = u(r, t)$. Проектируя все силы, действующие на элемент, на направление радиуса, получим дифференциальное уравнение движения

$$\left[\sigma_r h r + \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r h r) dr \right] d\theta - \sigma_r h r d\theta - 2\sigma_\theta h r d\frac{d\theta}{2} = \rho h r \ddot{u} dr d\theta,$$

где ρ — плотность материала диска. Правая часть дифференциального уравнения записана с учетом того, что $\rho h r dr d\theta$ — масса элемента.

Подставляя сюда выражения (II.270) и преобразуя, приходим к основному дифференциальному уравнению задачи о свободных радиальных колебаниях диска

$$u'' + u' \left(\frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) + u \left(\frac{\mu h'}{r h} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{\rho \ddot{u}}{E} (1 - \mu)^2. \quad (\text{II.271})$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом Фурье и будем разыскивать решение в виде произведения двух функций:

$$u(r, t) = R(r) T(t), \quad (\text{II.272})$$

где $R(r)$ — функция радиуса r ; $T(t)$ — функция времени t .

Подставив решение (II.272) в основное уравнение (II.271), разделим переменные и получим дифференциальное уравнение для неизвестной функции $R(r)$, которая по смыслу решения определяет собственную форму колебаний:

$$R'' + R' \left(\frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) + R \left(\frac{\mu h'}{r h} - \frac{1}{r^2} + \frac{p^2}{c^2} \right) = 0. \quad (\text{II.273})$$

Здесь p — неизвестная собственная частота;

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}.$$

Из-за переменности коэффициентов уравнения (II.273) его решение, как правило, затруднительно. Лишь в двух частных случаях уравнение несколько упрощается и может быть решено в функциях Бесселя. Это имеет место в случае плоского диска, когда $h' = 0$:

$$R'' + \frac{R'}{r} + R \left(\frac{p^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (\text{II.274})$$

и в случае диска гиперболического профиля, когда $h = c/r^n$:

$$R'' + R' \frac{1-n}{r} + R \left(\frac{p^2}{c^2} - \frac{1-\mu n}{r^2} \right) = 0. \quad (\text{II.275})$$

В общем случае можно воспользоваться методом Бубнова—Галеркина и, задаваясь формой колебаний $R(r)$, определять собственную частоту p из уравнения

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[R'' + R' \left(\frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) + R \left(\frac{\mu h'}{r h} - \frac{1}{r^2} + \frac{p^2}{c^2} \right) \right] R dr = 0,$$

в котором r_1 и r_2 — внутренний и наружный радиусы диска.

Функция $R(r)$ должна быть выбрана таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия. На закрепленном контуре отсутствуют перемещения u и, следовательно, должно быть удовлетворено условие $R = 0$. На свободном контуре отсутствуют напряжения σ_r и согласно выражению (II.270) граничное условие принимает вид

$$R' + \mu \frac{R}{r} = 0.$$

Тангенциальные колебания

Возникновение тангенциальных колебаний можно представить следующим образом. Пусть закрепленный на неподвижном валу диск нагружен по внешнему контуру касательными усилиями, образующими пару, и в некоторый момент времени эта нагрузка мгновенно снимается. Тогда возникают свободные

тангенциальные колебания, при которых точки диска, лежащие на какой-либо окружности, остаются на этой окружности, а все радиусы искажаются и притом совершенно одинаково.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки a и b срединной плоскости диска, которые до деформации лежат на одном радиусе. Пусть после тангенциальной деформации диска их новые положения определяются точками a_1 и b_1 (рис. II.60). Радиус-вектор точки a повернется на угол φ и займет положение Oa_1 , а радиус-вектор точки b совершит поворот на угол $\varphi + d\varphi$ и займет положение Ob_1 . Угол γ между направлением повернутого элемента a_1b_1 и новым направлением радиуса Oa_1b_2 является углом сдвига. Из $\triangle a_1b_1b_2$ имеем $b_1b_2 = \gamma dr$, а из $\triangle Ob_1b_2$

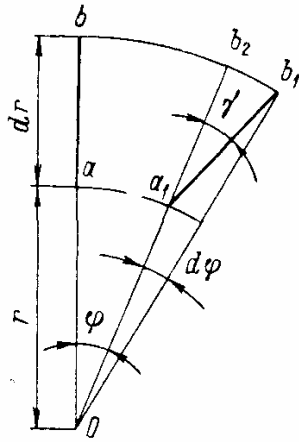


Рис. II.60

$b_1b_2 = (r + dr)d\varphi$.

Следовательно, сдвиг γ выражается следующим образом:

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dr}.$$

Такой картине деформаций соответствуют только касательные напряжения на гранях бесконечно малого элемента (см. рис. II.60):

$$\tau = Gr \frac{d\varphi}{dr}. \quad (\text{II.276})$$

Нормальные напряжения на этих гранях равны нулю. Поэтому на внутренней грани касательное усилие равно $\tau hr d\theta$, а на внешней — $\tau hr d\theta + \frac{\partial(\tau hr)}{\partial r} dr d\theta$. По боковым (радиальным) граням также действуют касательные усилия, но их выражения в данном случае не нужны, так как будем составлять уравнение моментов относительно центра диска. Это уравнение имеет вид

$$\tau hr^2 d\theta - \left[\tau hr + \frac{\partial(\tau hr)}{\partial r} dr \right] (r + dr) d\theta = \rho hr^2 dr d\theta r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Правая часть представляет собой момент силы инерции, равной произведению массы элемента $\rho hr dr d\theta$ на касательное ускорение $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Заменяя здесь касательное напряжение по выражению (II.276), получим после преобразования дифференциальное уравнение для угла поворота φ :

$$\varphi'' + \varphi' \left(\frac{3}{r} + \frac{h'}{h} \right) + \frac{\rho}{G} \ddot{\varphi} = 0.$$

Как и выше, это уравнение в частных производных при помощи подстановки $\varphi(r, t) = R(r)T(t)$ приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$R'' + R' \left(\frac{3}{r} + \frac{h'}{h} \right) - R \frac{p^2}{c_1^2} = 0, \quad (\text{II.277})$$

где p — собственная частота колебаний; $c_1 = \sqrt{G/\rho}$.

Полученное уравнение относится к тому же типу, что и уравнение (II.273), и в общем случае зависимости $h = h(r)$ приходится пользоваться приближенными методами решения.

При выборе функций $R(r)$ необходимо обеспечить выполнение граничных условий, которые имеют следующий вид.

1. На закрепленном контуре $\varphi = 0$, следовательно, должно быть

$$R = 0. \quad (\text{II.278})$$

2. На свободном контуре $\tau = 0$, т. е. согласно формуле (II.276)

$$R' = 0. \quad (\text{II.279})$$

Если с наружным контуром связана распределенная по периметру масса интенсивностью m , то развиваемая этой массой сила инерции (на единицу длины контура) есть $-mr\ddot{\varphi}$. Она должна быть приравнена касательному усилию $\tau h = Grh\varphi'$, подсчитанному также на единицу длины контура: $-mr\ddot{\varphi} = Grh\varphi'$, т. е. $-mrR\ddot{T} = GrhR'T$, но так как $\ddot{T} = -p^2T$, то граничное условие имеет вид $mp^2R = GhR'$.

После того как функция $R(r)$ выбрана, собственную частоту можно найти при помощи метода Бубнова—Галеркина из выражения

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[R'' + R' \left(\frac{3}{r} + \frac{h'}{h} \right) + R \frac{p^2}{c_1^2} \right] R dr = 0.$$

В одном частном случае нет необходимости пользоваться приближенными методами, так как легко найти соответствующее точное решение. Таким является случай диска гиперболического профиля, для которого $h = B/r^3$. В самом деле, при этом $h'/h = -3/r$ и уравнение (II.277) принимает вид

$$R'' + R \frac{p^2}{c_1^2} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$R = A \sin \frac{pr}{c_1} + B \cos \frac{pr}{c_1}$$

нужно подчинить граничным условиям. Пусть, например, внутренний контур диска закреплен, а наружный свободен. Тогда согласно выражениям (II.278) и (II.279) должно быть

$$A \sin \frac{pr_1}{c_1} + B \cos \frac{pr_1}{c_1} = 0;$$

$$\frac{Ap}{c_1} \cos \frac{pr_2}{c_1} - \frac{Bp}{c_1} \sin \frac{pr_1}{c_1} = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим частотное уравнение

$$\sin \frac{pr_1}{c_1} \sin \frac{pr_2}{c_1} + \cos \frac{pr_1}{c_1} \cos \frac{pr_2}{c_1} = 0,$$

или

$$\cos \frac{p(r_2 - r_1)}{c_1} = 0.$$

Отсюда находим

$$p_n = \frac{(2n - 1) \pi}{2} \cdot \frac{c_1}{r_2 - r_1}.$$

11. ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ

Общие соотношения

Изгибные колебания можно подразделить на два типа.

1. Осесимметричные *зонтичные* колебания, при которых все радиусы диска изгибаются одинаково из плоскости диска, а срединная плоскость переходит в поверхность вращения. Эта форма

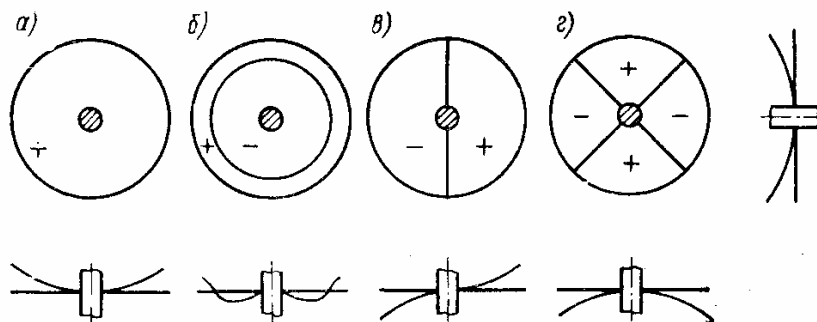


Рис. II.61

колебаний показана на рис. II.61, а,б, где знаками плюс и минус обозначены направления перемещений соответствующих кольцевых зон диска. Срединная плоскость при колебаниях превращается в поверхность вращения; в зависимости от номера собственной формы колебаний может существовать одна и более узловых окружностей.

2. *Всерные* колебания, характеризующиеся существованием одного или более узловых диаметров (рис. II.61, в, г).

В общем случае соответствующие дифференциальные уравнения имеют переменные коэффициенты и даже в простейших схемах не интегрируются в элементарных функциях. Обычно для решения этих задач пользуются энергетическим способом, что требует составления выражения для кинетической и потенциальной энергии. Влияние вращения на изгибные колебания настолько значительно, что пренебрегать им нельзя.

Обозначим через r и θ полярные координаты произвольной точки срединной плоскости и через $w = w(r, \theta)$ прогиб в этой точке. Если по-прежнему ρ — плотность материала, $h = h(r)$ — толщина диска, то масса элемента равна $\rho h r dr d\theta$, и его кинетическая энергия равна $\frac{\dot{w}^2}{2} \rho h r dr d\theta$. Суммарная кинетическая энергия

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} [\dot{w}(r, \theta)]^2 h(r) r dr d\theta. \quad (\text{II.280})$$

Если на контуре диска имеются распределенные массы (лопатки), то их кинетическая энергия должна быть учтена дополнительно.

Приведем без вывода выражение потенциальной энергии изгиба круглой пластинки:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E}{24(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + \right. \\ & + 2(1-\mu) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]^2 - 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} h r dr d\theta. \quad (\text{II.281}) \end{aligned}$$

Из-за изгиба диска всякий его элемент несколько приближается к оси вращения и благодаря этому накапливает некоторую дополнительную потенциальную энергию, так как вследствие вращения диска изгиб происходит в поле центробежных сил. Подобное явление было отмечено выше в связи с изгибными колебаниями растянутого (в частности, центробежной силой) стержня. В данном случае элементарной массе $\rho h r d\theta dr$ соответствует центробежная сила $\omega^2 \rho h r^2 d\theta dr$. Дополнительная энергия составит $u \omega^2 \rho h r^2 d\theta dr$, где u — радиальное смещение элемента, которое выражается через прогиб следующим образом:

$$u = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 dr. \quad (\text{II.282})$$

Таким образом, общая потенциальная энергия поля центробежных сил

$$\Pi_* = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[\int_{r_1}^r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 dr \right] r^2 h d\theta dr. \quad (\text{II.283})$$

Зонтичные колебания

В случае свободных зонтичных колебаний прогиб w не зависит от полярного угла θ и может быть представлен в виде

$$w = R(r) \sin pt. \quad (\text{II.284})$$

Согласно формулам (II.280) и (II.284) максимальная кинетическая энергия

$$T_{\max} = \pi \rho p^2 \int_{r_1}^{r_2} R^2 h r dr. \quad (\text{II.285})$$

Максимальная потенциальная энергия деформации согласно выражениям (II.281) и (II.284)

$$\Pi_{\max} = \frac{\pi E}{12(1-\mu^2)} \int_{r_1}^{r_2} \left[\left(R'' + \frac{R'}{r} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r} R' R'' \right] h r dr. \quad (\text{II.286})$$

Учитывая, что прогибы w не зависят от полярного угла θ , при помощи выражения (II.283) найдем

$$\Pi_{* \max} = \pi \rho \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} \left[\int_{r_1}^r (R')^2 dr \right] r^2 h dr. \quad (\text{II.287})$$

На основании закона сохранения энергии можно записать *

$$T_{\max} = \Pi_{\max} + \Pi_{* \max}.$$

Подставляя сюда выражения (II.285)—(II.287) и решая полученное уравнение относительно квадрата частоты, находим

$$p^2 = \left\{ \frac{E}{12\rho(1-\mu^2)} \int_{r_1}^{r_2} \left[\left(R'' + \frac{R'}{r} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r} R' R'' \right] h r dr + \right. \\ \left. + \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} \left[\int_{r_1}^r (R')^2 dr \right] r^2 h dr \right\} : \int_{r_1}^{r_2} R^2 h r dr. \quad (\text{II.288})$$

* В более точном решении нужно учесть также работу, совершаемую центральными усилиями (действующими в срединной поверхности диска) при изгибных колебаниях.

Подстановка сюда подходящей функции $R(r)$ позволит без больших затруднений вычислить приближенное значение нижней частоты, однако для получения достаточно точного решения необходимо весьма тщательно отнестись к выбору функции $R(r)$.

Веерные колебания

В этом случае вместо выражения (II.284) для прогиба w должна быть принята такая функция, которая отражает зависимость прогиба также от полярного угла θ . Имея в виду периодичность этой зависимости, можно принять

$$w = R(r) \cos n \theta \sin pt,$$

где $n = 1; 2; \dots$ есть число узловых диаметров, т. е. число диаметров, точки которых не колеблются. Каждой форме колебаний соответствует свое значение частоты.

Дальнейшее решение ведется в том же порядке, что и выше. В результате получится формула, подобная формуле (II.288), но содержащая также число n узловых диаметров. В этом случае применение различных вариантов функции $R(r)$ приводит к весьма близким результатам, хорошо согласующимся с точными.

Это отличие от случая зонтичных колебаний не случайно. Дело в том, что приближенная форма $R(r)$ при зонтичных колебаниях обеспечивает условия лишь в корневой и периферийной областях, а при веерных колебаниях, кроме того, вдоль всех узловых диаметров.

12. ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

В общем случае переменной толщины пластины решение в замкнутой форме невозможно; для таких задач может быть использован энергетический способ. Если пластины имеют постоянную толщину, задача упрощается и при некоторых граничных условиях допускает сравнительно несложное решение.

Точное решение

Если пластина несет статическую распределенную нагрузку q , то для малых прогибов точек срединной поверхности w справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (\text{II.289})$$

где D — цилиндрическая жесткость:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

В задаче о свободных колебаниях нагрузкой являются силы инерции

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (\text{II.290})$$

где ρ — плотность материала; h — толщина пластины.

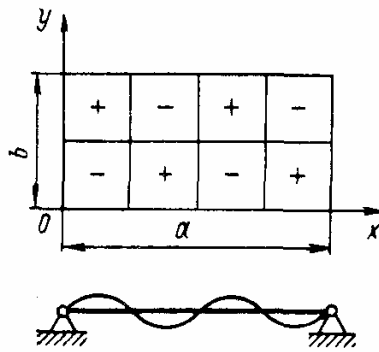


Рис. II.62

Подставив выражение (II.290) в уравнение (II.289), приходим к основному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Подставив, как и в предыдущих случаях, решение в виде

$$w = W(x,y)T(t),$$

получим дифференциальное уравнение для формы колебаний $W(x,y)$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\rho h p^2}{D} W. \quad (\text{II.291})$$

Это дифференциальное уравнение в случае прямоугольной пластины с опертыми краями имеет частное решение

$$W = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m = 1; 2; \dots; n = 1; 2; \dots), \quad (\text{II.292})$$

где a и b — стороны пластинки.

Зависимость (II.292) иллюстрирована на рис. II.62. Любая прямая, параллельная оси x , при колебаниях превращается в синусоиду, содержащую в интервале $(0,a)$ m полуволн (на рис. II.62 $m = 4$). Точно так же прямые, параллельные оси y , превращаются в синусоиды с n полуволнами (на рис. II.62 $n = 2$).

Выражение (II.292) удовлетворяет граничным условиям на контурах (равенство нулю прогибов и изгибающих моментов): при $x = 0$ и $x = a$

$$W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0;$$

при $y = 0$ и $y = b$

$$W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

Подставляя выражение (II.292) в уравнение (II.291), получим

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = \frac{\rho h p^2}{D};$$

отсюда находим собственную частоту

$$\rho_{mn} = \frac{\pi^2 h}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right].$$

Частота зависит от чисел m и n , определяющих число полу-волн, на которые подразделяется пластина в каждом из направлений. Низшая частота соответствует случаю, когда пластина изгибается по одной полуволне в каждом направлении ($m = 1$; $n = 1$):

$$\rho_{11} = \frac{\pi^2 h}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \quad (\text{II.293})$$

Если одна из сторон пластины значительно больше другой, одно слагаемое в скобках становится весьма малым по сравнению с другим и в пределе исчезает. Пусть, например, $a/b \rightarrow \infty$; тогда формула (II.293) принимает вид

$$\rho_{11} = \frac{\pi^2 h}{2b^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}}. \quad (\text{II.294})$$

В этом случае срединная поверхность пластины при колебаниях имеет цилиндрическую форму. Можно сказать, что пластина состоит из множества одинаковых (и одинаково изгибающихся) балок-полосок пролетом b . Если считать, что все такие балки-полоски совершенно не взаимодействуют одна с другой, то их собственную частоту можно найти по формуле (II.12), подставив в нее момент инерции поперечного сечения $J = h^3/12$ (ширину балки-полоски можно принять любой, например равной единице) и интенсивность распределенной массы $m = \rho h$. При этом для собственной частоты получится выражение (II.294), но без делителя $1 - \mu^2$ под корнем. Это различие объясняется тем, что поперечные деформации балки-полоски, входящей в пластину, стеснены соседними балками-полосками, тогда как изолированная балка-полоска такого стеснения не испытывает.

Простота приведенного решения связана не только с простой формой пластинки, но и с граничными условиями. При других краевых закреплениях для решения дифференциального уравнения (II.291) приходится обращаться к приближенным способам.

КРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

13. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ

Различают устойчивые и неустойчивые состояния равновесия механических систем. В принципе для решения вопроса об устойчивости состояния равновесия нужно исследовать результаты возможного нарушения этого состояния, т. е., иными словами, изучить общие свойства движения, которое возникает вследствие сколь угодно малых начальных возмущений состояния равновесия; такое движение называется *возмущенным*. Если, совершая возмущенное движение, система удаляется от состояния равновесия (монотонный уход или колебания с возрастающими пиковыми значениями), то такое состояние следует считать *неустойчивым*. Если же в возмущенном движении система остается в непосредственной близости к равновесному состоянию (например, совершает гармонические колебания) или, тем более, постепенно приближается к этому состоянию (монотонное приближение, или колебания с убывающими пиковыми значениями), то такое состояние *устойчиво*.

Для многих технических устройств вопрос об устойчивости имеет первостепенное практическое значение, но ответ на этот вопрос далеко не всегда так прост и очевиден, как в известном хрестоматийном примере о шарике, расположенном в точках максимума или минимума волнистой поверхности.

Нередко нормальным состоянием механической системы в ее эксплуатации является не равновесие, а некоторый *стационарный, установившийся режим* движения. В подобных случаях также может возникнуть вопрос об устойчивости этого режима, близкий по своему смыслу к вопросу об устойчивости состояний равновесия. Если в результате нарушения стационарного режима сколь угодно малыми мгновенными возмущениями дополнительно возникающее при этом движение носит затухающий характер, то это свидетельствует об *устойчивости* исследуемого стационарного режима; если же дополнительное движение все далее уводит систему от стационарного режима, то такой режим *неустойчив*.

В следующих параграфах этой главы рассматриваются (конечно, в сильно схематизированном виде) некоторые практические важные и в значительной мере типичные задачи об условиях неустойчивости состояний равновесия и стационарных режимов.

В п. 14 разобран случай возникновения неустойчивости вследствие действия силы сухого трения, если характеристика этой силы имеет падающий участок. К этому случаю приводят исследования некоторых схем тормозных устройств.

В следующем п. 15 анализируются критические состояния ряда схем вращающихся упругих валов и роторов. Оказывается, что при определенных значениях угловой скорости вращения состояние равновесия становится неустойчивым и как следствие сколь угодно малых возмущений возникают возрастающие колебания, вплоть до поломки конструкции.

Обнаружено, что конструкция крыла самолета также может потерять устойчивость — при достижении определенной скорости полета возникают прогрессивно возрастающие изгибно-крутильные колебания, приводящие к катастрофе (флаттер крыла); анализу этой опасной возможности посвящен п. 16.

При малых высотах парения аппарата на воздушной подушке также возможна неустойчивость, что вынуждает избегать в эксплуатации слишком малых высот парения. Анализ этой задачи содержится в п. 17.

В целом можно сказать, что при решении многих ответственных технических проблем приходится уделять специальное внимание проверке устойчивости равновесных состояний и стационарных режимов и анализу влияния параметров системы на устойчивость.

Сравнительно просто решается вопрос об устойчивости равновесия для *консервативных механических систем* с конечным числом степеней свободы, когда справедлива теорема Лагранжа—Дирихле: если в состоянии равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум, то это состояние устойчиво.

Применительно к консервативным системам с одной степенью свободы признаком минимума потенциальной энергии служит положительность коэффициента жесткости c . Если число степеней свободы системы больше единицы, то минимуму потенциальной энергии отвечает система неравенств (критерий Сильвестра):

$$c_{11} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (\text{III.1})$$

Здесь c_{ij} — элемент матрицы коэффициентов жесткости (см. выше, стр. 93). Легко проверить, что для всех рассмотренных в предыдущей главе примеров упругих систем неравенства (III.1)

выполняются, т. е. соответствующие состояния равновесия устойчивы. Впрочем, об этом свидетельствует сам характер полученных решений задач о колебаниях.

Если исследуемая механическая система не обладает свойством консервативности (из-за действия сил трения или неконсервативных позиционных сил), теорема Лагранжа—Дирихле неприменима и для суждения об устойчивости состояний равновесия, а также стационарных режимов необходимо исследовать характер возмущенного движения.

Разумеется, для проверки устойчивости нет необходимости изучать возмущенное движение во всех подробностях, достаточно установить его общую тенденцию. В частности, во многих случаях можно ограничиться анализом начала процесса возмущенного движения, тогда благодаря малости отклонений уравнения возмущенного движения оказываются линейными; в этих случаях говорят об исследовании устойчивости «в малом».

Если же по смыслу задачи представляет интерес все последующее развитие процесса возмущенного движения, то необходимо отказаться от предположения о малости отклонения; изучение возмущенного движения «в большом» обычно приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям возмущенного движения. Впрочем, иногда заведомо известно, что нарушение устойчивости состояния равновесия категорически недопустимо, как, например, в задаче о флаттере самолетного крыла; в этих случаях изучение процесса возмущенного движения «в большом» не имеет практического смысла.

Таким образом, для исследования устойчивости в малом прежде всего составляются дифференциальные уравнения возмущенного движения, в которых искомыми переменными служат отклонения системы от равновесного состояния; число этих уравнений равно числу степеней свободы системы n . Как говорилось, при малых отклонениях уравнения оказываются линейными и во многих случаях содержат постоянные коэффициенты, т. е. имеют вид

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^n b_{ij} \dot{x}_i + \sum_{i=1}^n c_{ij} x_i = 0 \quad (j = 1; 2; \dots; n). \quad (\text{III.2})$$

Здесь a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} — коэффициенты инерции, сопротивления и жесткости.

Частное решение системы (III.2) имеет вид

$$x_i = A_i e^{\lambda t}. \quad (\text{III.3})$$

Подстановка частного решения в систему (III.2) приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно величин A_i :

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n a_{ij} A_i + \lambda \sum_{i=1}^n b_{ij} A_i + \sum_{i=1}^n c_{ij} A_i = 0, \quad (\text{III.4})$$

или

$$\sum_{i=1}^n (\lambda^2 a_{ij} + \lambda b_{ij} + c_{ij}) A_i = 0 \quad (j = 1; 2; \dots; n). \quad (\text{III.5})$$

Условием ненулевых решений служит равенство нулю определителя, элементами которого являются величины $\lambda^2 a_{ij} + \lambda b_{ij} + c_{ij}$.

Это равенство представляет собой алгебраическое уравнение степени $2n$ относительно λ и имеет $2n$ корней типа $\lambda_s = \alpha_s + \beta_s i$ (*характеристическое уравнение*). При этом общее решение системы дифференциальных уравнений запишется в виде

$$x_i = \sum_{s=1}^n A_{is} e^{\lambda_s t} = \sum_{s=1}^n A_{is} e^{\alpha_s t} e^{\beta_s i t}. \quad (\text{III.6})$$

Последний множитель, содержащий мнимую степень e , может быть представлен через тригонометрические функции и поэтому остается ограниченным при любом значении t . Свойства устойчивости движения связаны с множителем $e^{\alpha_s t}$: если $\alpha_s < 0$, то соответствующее слагаемое описывает затухающее движение, а если $\alpha_s > 0$, то такому слагаемому соответствует удаление системы от невозмущенного режима. Таким образом, для устойчивости состояния равновесия механической системы необходимо, чтобы среди корней характеристического уравнения не было ни одного с положительной вещественной частью; в противном случае одно из частных решений, а вместе с этим и общее решение, обнаружит возрастающую тенденцию.

Дополнительно отметим, что если среди корней характеристического уравнения есть корень $\lambda_s = 0$, то ему соответствует постоянное смещение системы, которая в этом случае не обнаруживает тенденции к возвращению в исходное состояние равновесия, и оно должно быть признано неустойчивым.

Для суждения об устойчивости системы нет необходимости вычислять корни характеристического уравнения и определять знаки их действительных частей. Существует простой критерий (критерий Гурвица), позволяющий непосредственно по коэффициентам характеристического уравнения легко определить возможное наличие или отсутствие корней с положительной вещественной частью. Например, для характеристического уравнения третьей степени

$$\lambda^3 + B_2 \lambda^2 + B_1 \lambda + B_0 = 0 \quad (\text{III.7})$$

согласно критерию Гурвица среди корней нет ни одного с положительной вещественной частью, если выполняются неравенства

$$B_0 > 0; B_1 > 0; B_2 > 0; B_1 B_2 - B_0 > 0. \quad (\text{III.8})$$

Соответственно для уравнения четвертой степени

$$\lambda^4 + B_3 \lambda^3 + B_2 \lambda^2 + B_1 \lambda + B_0 = 0$$

критерий Гурвица сводится к следующим неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} B_0 > 0; B_1 > 0; B_2 > 0; B_3 > 0; \\ B_1 B_2 B_3 - B_1^2 - B_0 B_3^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9})$$

Более высокие степени характеристического уравнения в этой главе нам не встретятся.

Конечно, результаты исследования устойчивости могут качественно меняться в зависимости от некоторого характерного параметра механической системы. Физический смысл названного параметра определяется существом задачи. Например, для вращающихся валов и роторов таким параметром служит угловая скорость вращения, для самолетного крыла — скорость набегающего потока, для аппарата на воздушной подушке — высота парения и т. д. Если при постепенном изменении характерного параметра происходит изменение качественных свойств состояния равновесия и совершается переход от устойчивого равновесия к неустойчивому (или обратный переход), то соответствующее значение параметра называется *критическим значением*.

Поскольку коэффициенты B_i характеристического уравнения зависят от параметров системы, то с помощью критерия Гурвица могут быть найдены критические значения параметров.

В некоторых случаях для анализа неустойчивости пользуются несколько иным и притом менее строгим способом рассуждений, который близок к методу Эйлера статического исследования устойчивости упругих систем. Согласно этому способу об устойчивости равновесия, судят по отсутствию возмущенных равновесных состояний, смежных с исследуемым невозмущенным состоянием. Хотя этот способ не всегда эквивалентен описанному выше методу возмущений, однако во многих случаях он быстро приводит к правильным заключениям об устойчивости; в частности, это относится к п. 15, где рассматриваются критические состояния вращающихся валов и роторов.

14. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛ СУХОГО ТРЕНИЯ

Силы трения, которые в ранее рассмотренных примерах оказывались причиной затухания колебаний, в некоторых случаях могут явиться причиной их раскачивания.

Чтобы выяснить причину такой возможности, остановимся на простейшей системе (рис. III.1, а). Система состоит из двух вращающихся с угловой скоростью ω барабанов, приводящих в движение бесконечную ленту; скорость ее движения v_0 будем считать неизменной. На ленте лежит груз массы m , движение которого ограничено пружиной с коэффициентом жесткости c . Развивающаяся при скольжении груза сила трения смещает груз вправо и вызывает некоторое удлинение пружины. Пусть в по-

ложении равновесия груза сила трения равна R_0 ; тогда статическое смещение груза составляет

$$x_0 = R_0/c. \quad (\text{III.10})$$

Для дальнейших рассуждений необходимо учесть, что сила трения R зависит от относительной скорости движения v , причем характеристика трения имеет вид, показанный на рис. III.1, б; значения v_0 и R_0 соответствуют состоянию равновесия груза.

Положим, что вследствие какого-либо возмущения в мгновение $t=0$ груз выведен из состояния покоя. Выясним характер движения, которое возникает после такого возмущения. Пусть в текущее мгновение t дополнительное смещение груза равно x .

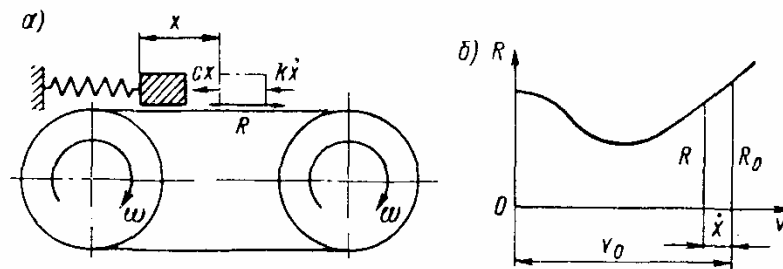


Рис. III.1

Тогда абсолютная скорость равна $\dot{x}$, а скорость скольжения груза $v = v_0 - \dot{x}$. В процессе движения на груз действуют три силы: реакция пружины $-c(x + x_0)$, сила трения R и внешнее сопротивление $-k\dot{x}$, которое можно считать пропорциональным скорости.

Соответственно дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$-c(x + x_0) - k\dot{x} + R = m\ddot{x}. \quad (\text{III.11})$$

Значение входящей сюда силы трения R отличается от равновесного значения силы трения R_0 , поскольку скорость относительного движения отличается от скорости v_0 . При малых значениях относительной скорости можно воспользоваться линейным выражением

$$R = R_0 - R'_0\dot{x}, \quad (\text{III.12})$$

где R'_0 — тангенс угла наклона характеристики трения в точке с координатами v_0, R_0 . Подставляя в (III.11) выражения (III.10) и (III.12), получим дифференциальное уравнение возмущенного движения

$$m\ddot{x} + (R'_0 + k)\dot{x} + cx = 0. \quad (\text{III.13})$$

Рассмотрение структуры этого уравнения и сравнение его с (II.52) показывают, что сумма $R'_0 + k$ играет роль эффективного коэффициента вязкого трения. Если эта сумма положительна,

то с течением времени колебания постепенно затухают. В частности, это имеет место на восходящем участке характеристики трения, где R'_0 .

Однако на падающем участке характеристики трения (при небольших значениях v_0) величина R'_0 становится отрицательной (рис. III.1, б), и если сумма $R'_0 + k$ обращается в нуль, то в уравнении (III.13) исчезает член, определяющий затухание, и возмущенное движение будет представлять собой гармоническое колебание. Если же сумма $R'_0 + k$ окажется отрицательной, то решение уравнения (III.13) приобретает вид (II.53), но с положительным показателем в показательной функции. Это соответствует как бы отрицательному затуханию, при котором

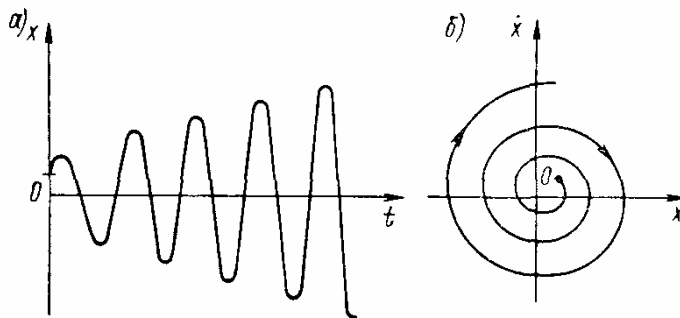


Рис. III.2

колебания около положения равновесия с течением времени будут возрастать, как это показано на рис. III.2, а. Соответствующая фазовая диаграмма показана на рис. III.2, б; она состоит из спиралей, раскручивающихся от состояния равнове-

сия. В этом случае точка, отвечающая положению равновесия, называется неустойчивым фокусом.

Природу отрицательного затухания при падающей характеристике трения можно уяснить из следующего рассуждения. Когда груз движется вправо, т. е. в сторону движения ленты, то относительная скорость движения уменьшается, вместе с этим сила трения увеличивается, и ее приращение направлено вправо, т. е. в сторону движения. В другом интервале движения, когда груз движется влево, приращение силы трения направлено также влево, т. е. опять в сторону движения. Такой характер изменения силы трения и является причиной возрастания колебаний.

Итак, для устойчивости состояния равновесия груза на ленте необходимо выполнение условия $R'_0 + k > 0$. Обычно это условие выполняется лишь при достаточно больших значениях скорости v_0 .

При помощи тех же рассуждений можно прийти к выводу о возможности неустойчивости упруго закрепленной колодки, прижатой к вращающемуся диску (рис. III.3, а), а также груза 1 на пружине 2, когда левому ее концу 3 задано движение с постоянной скоростью (рис. III.3, б). В этих случаях необходимым условием неустойчивости также является наличие падающего участка характеристики трения.

По гипотезе А. П. Соколовского аналогична природа возникновения колебаний, иногда возникающих при резании металлов на станках. К этому заключению можно прийти путем следующих

рассуждений. Со стороны изделия на резец действует реакция P , которая может быть разложена на составляющие P_y и P_z (рис. III.4, а). Поскольку резец упруго закреплен, то его конец может совершать колебания как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Для выявления возможной неустойчивости достаточно рассмотреть колебания только в направлении $y = y(t)$ и учесть важный экспериментальный результат — горизонтальная составляющая P_y зависит от скорости горизонтальных колебаний резца y (рис. III.4, б).

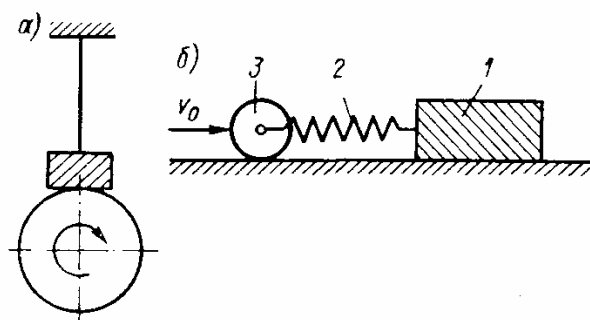


Рис. III.3

Таким образом, на резец действуют три силы: сила упругости $-cy$ системы резец—суппорт (c — коэффициент жесткости), реакция изделия $-\dot{P}_y(\dot{y})$ и сумма различных неупругих сопротивлений, которая может быть объединена в одно слагаемое вида $-k\dot{y}$.

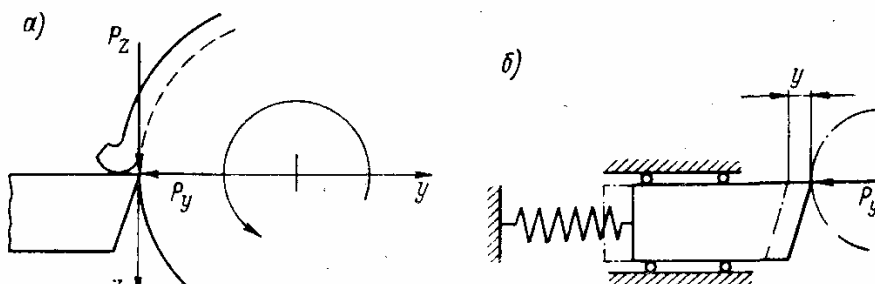


Рис. III.4

Таким образом, уравнение движения системы резец—суппорт имеет вид

$$-\dot{P}_y(\dot{y}) - cy - k\dot{y} = m\ddot{y}$$

(m — приведенная масса системы резец—суппорт). После линеаризации силы P_y согласно выражению (III.11) вновь приходим к уравнению типа (III.13). Следовательно, и в этом случае возникает неустойчивость при падающей характеристике силы P_y .

15. КРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ И РОТОРОВ

Критические состояния валов простейшей схемы

Рассмотрим вал, на который с эксцентриситетом e насажен диск массой m . Чтобы исключить влияние веса и рассмотреть явление в наиболее чистом виде, будем считать, что ось, прохо-

дущая через центры подшипников, вертикальна (рис. III.5, а). Вал вращается в подшипниках с угловой скоростью ω , причем его изгибная жесткость одинакова во всех направлениях; диск расположен посередине между опорами. При вращении вал

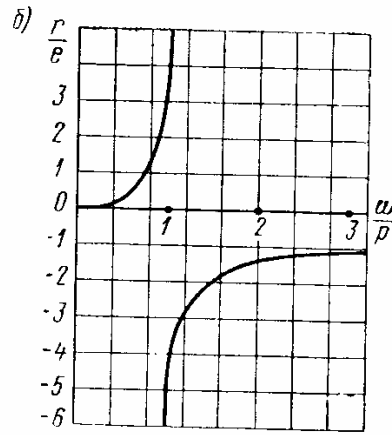
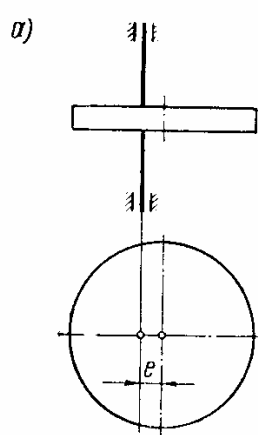


Рис. III.5

будет изгибаться под действием центробежной силы диска, причем возможен стационарный режим движения, при котором изогнутая ось вала представляет собой неизменную во времени жесткую кривую, вращающуюся с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центры подшипников. Если обозначить упругий про-

гиб вала в среднем сечении через r , то результирующий эксцентриситет окажется равным $e + r$ и, следовательно, центробежная сила определится выражением $m\omega^2(e + r)$. Прогиб можно записать также в виде частного от деления центробежной силы на коэффициент изгибной жесткости вала c :

$$r = \frac{m\omega^2(e + r)}{c}.$$

Отсюда находим, что прогиб вала пропорционален начальному эксцентриситету и весьма своеобразно зависит от угловой скорости вращения:

$$r = \frac{m\omega^2 e}{c - m\omega^2}. \quad (\text{III.14})$$

Из формулы (III.14) следует важный вывод: если выполняется равенство $c = m\omega^2$, то знаменатель правой части формулы (III.14) обращается в нуль и прогиб формально становится бесконечно большим.

Это критическое состояние наступает при вполне определенном значении угловой скорости

$$\omega_{\text{кр}} = \sqrt{c/m}, \quad (\text{III.15})$$

которое, как видно, зависит только от параметров системы. Такую скорость называют *критической скоростью вращения*. Она совпадает с собственной частотой p поперечных колебаний невращающейся системы вал—диск и тем больше, чем жестче вал и легче диск.

С помощью формулы (III.15) можно получить выражение для относительного прогиба вала

$$\frac{r}{e} = \left(\frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1}. \quad (\text{III.16})$$

Кривая зависимости r/e от отношения $\omega/\omega_{кр} = \omega/p$ приведена на рис. III.5, б. При медленном вращении прогибы r малы и возрастают с ростом угловой скорости; при этом центр тяжести диска S расположен дальше от центра вращения O , чем центр сечения вала W (рис. III.6, а). Если $\omega/\omega_{кр} = 1$, то прогиб стремится к бесконечности (критическое состояние).

В закритической области, когда $\omega > \omega_{кр}$, прогибы вновь оказываются конечными, но имеют знак, противоположный начальному эксцентриситету. На рис. III.6, б показано соответствующее этому случаю взаимное расположение центров S , O и W . При быстром

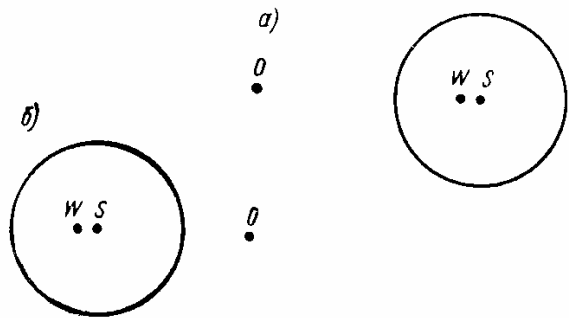


Рис. III.6

вращении, когда $\omega > \omega_{кр}$, центр тяжести диска S оказывается ближе к центру вращения O , чем центр вала W . Чем больше угловая скорость, тем ближе располагается центр тяжести диска S к центру вращения O ; при $\omega \rightarrow \infty$ центр тяжести диска неограниченно приближается к оси вращения. Таким образом, при весьма больших угловых скоростях происходит *самоцентрирование* диска. Поэтому, делая вал весьма гибким (т. е. добиваясь малых значений $\omega_{кр}$), можно получить хорошую сбалансированность системы в условиях эксплуатации; этим пользуются при проектировании валов быстроходных турбин, в которых гибкие валы оказываются рациональнее жестких.

Выше критическое состояние было определено как состояние неограниченного возрастания прогиба вала, если диск имеет начальный эксцентриситет. Возможна также другая трактовка критического состояния.

Примем, что в схеме на рис. III.5 эксцентриситет $e = 0$. Тогда стационарный режим движения представляет собой вращение прямого недеформированного вала вместе с диском. Допустим, что вследствие какого-либо малого возмущения вал изогнулся, и определим последующее движение диска с центром S в подвижной координатной системе yz , которая равномерно вращается с угловой скоростью ω , равной угловой скорости вращения диска; последнюю будем считать неизменной, что всегда может быть обеспечено соответствующим изменением внешнего вращающего момента. Полюс O , вокруг которого происходит вращение,

совпадает с равновесным положением центра тяжести диска, т. е. лежит на оси подшипников. Относительно этой координатной системы диск не вращается, т. е. движется поступательно; поэтому относительное движение диска полностью описывается движением его центра тяжести S .

В процессе возмущенного движения на диск действует упругая реакция $-cr$. На рис. III.7, а показаны ее проекции на оси y и z , соответственно равные $-cy$ и $-cz$, на рис. III.7, б — проекции силы инерции переносного движения $m\omega^2 y$ и $m\omega^2 z$, а на рис. III.7, в — проекции кориолисовой силы $2m\omega \dot{z}$ и $-2m\omega \dot{y}$.

Дифференциальные уравнения относительного движения диска

$$\left. \begin{aligned} -cy + m\omega^2 y + 2m\omega \dot{z} &= m\ddot{y}; \\ -cz + m\omega^2 z - 2m\omega \dot{y} &= m\ddot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.17})$$

Если воспользоваться соотношением $c = mp^2$ (где p — собственная частота невращающейся системы, причем $p = \omega_{\text{кр}}$), получим основную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + (p^2 - \omega^2) y - 2\omega \dot{z} &= 0; \\ \ddot{z} + (p^2 - \omega^2) z + 2\omega \dot{y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.18})$$

Подстановка (III.3) приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 (p^2 + \omega^2) + (p^2 - \omega^2)^2 = 0, \quad (\text{III.19})$$

имеющему корни

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -(p + \omega) i; & \lambda_2 &= (p + \omega) i; \\ \lambda_3 &= -(p - \omega) i; & \lambda_4 &= (p - \omega) i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.20})$$

Рис. III.7

Отсюда видно, что если $\omega \neq p$, то все корни — чисто мнимые и соответствующее возмущенное движение представляет собой сумму гармонических колебаний с частотами $p + \omega$ и $|p - \omega|$; таким образом, при $\omega \neq p$ невозмущенный режим устойчив. Если же $\omega = p$, то среди корней (III.20) возникнут два нулевых корня; как было сказано выше, это означает неустойчивость невозмущенного стационарного режима.

К этому же результату можно было прийти, если для схемы (рис. III.5, а) при $e = 0$ сразу поставить вопрос, при каком значении ω наряду с невозмущенным состоянием существует возмущенное состояние относительного равновесия диска. Такому

состоянию соответствует переносная сила инерции $m\omega^2 r$, и условие относительного равновесия приобретает вид

$$m\omega^2 r - cr = 0.$$

Отсюда сразу следует прежний результат (III.15).

Система, представленная на рис. III.8, имеет сходство с предыдущей, но обладает несколько иными свойствами. В этой системе, также совершающей вращение с угловой скоростью ω , упруго закрепленный груз массой m может скользить вдоль направляющей AB . Во вращающейся системе координат перемещение z отсутствует ($z = 0$) и движение описывается одной функцией $y = y(t)$. Положим, что жесткость пружины равна c и положение груза на оси вращения соответствует состоянию относительного покоя. Исследуем свойства движения груза при нарушении этого состояния.

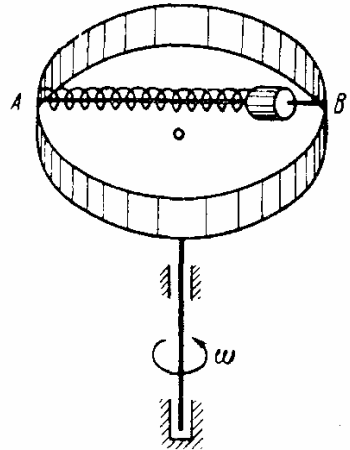


Рис. III.8

Пусть в текущий момент времени центр тяжести груза находится на расстоянии y от оси вращения. При записи дифференциального уравнения относительного движения груза необходимо учесть силу упругости $-cy$ и силу инерции переносного движения $m\omega^2 y$. Таким образом, получаем

$$-cy + m\omega^2 y = m\ddot{y},$$

т. е.

$$\ddot{y} + (c/m - \omega^2) y = 0. \quad (\text{III.21})$$

Из этой записи уравнения непосредственно видно, что при $c/m > \omega^2$ движение будет представлять собой гармонические колебания

$$y = a \sin(\sqrt{c/m - \omega^2} t + \alpha),$$

происходящие с частотой $\sqrt{c/m - \omega^2}$, меньшей, чем частота колебаний груза при отсутствии вращения $p = \sqrt{c/m}$. Поскольку возмущенное движение представляет собой колебания с постоянной амплитудой, постольку невозмущенное состояние равновесия груза (на оси вращения) следует считать устойчивым.

Если же $\omega^2 > c/m$, то решение дифференциального уравнения (III.21) приобретает вид

$$y = a \operatorname{sh}(\sqrt{\omega^2 - c/m} t + \alpha),$$

т. е. движение носит характер аperiодического ухода системы от начала координат. Это означает, что в данном случае невозмущенное состояние равновесия неустойчиво.

Окончательно можно заключить, что рассматриваемая система устойчива только при угловых скоростях, меньших, чем собствен-

ная частота колебаний невращающейся системы. Напомним, что диск на валу (см. рис. III.5) устойчив при любых значениях угловой скорости ω , отличных от значения $\omega_{кр}$ как при $\omega < \omega_{кр}$, так и при $\omega > \omega_{кр}$; в этом состоит основное различие между системами на рис. III.5, а и III.8.

Влияние гироскопических свойств на критическую скорость вращения

Выше был рассмотрен упрощенный случай, когда при изгибе вращающегося вала связанный с ним диск все время остается в одной плоскости. Как правило, этого в действительности не бывает, и вследствие изгиба вала плоскость диска непрерывно меняет свою ориентацию в пространстве во время движения. При этом возникает специфический эффект, который (не вполне точно) называют гироскопическим.

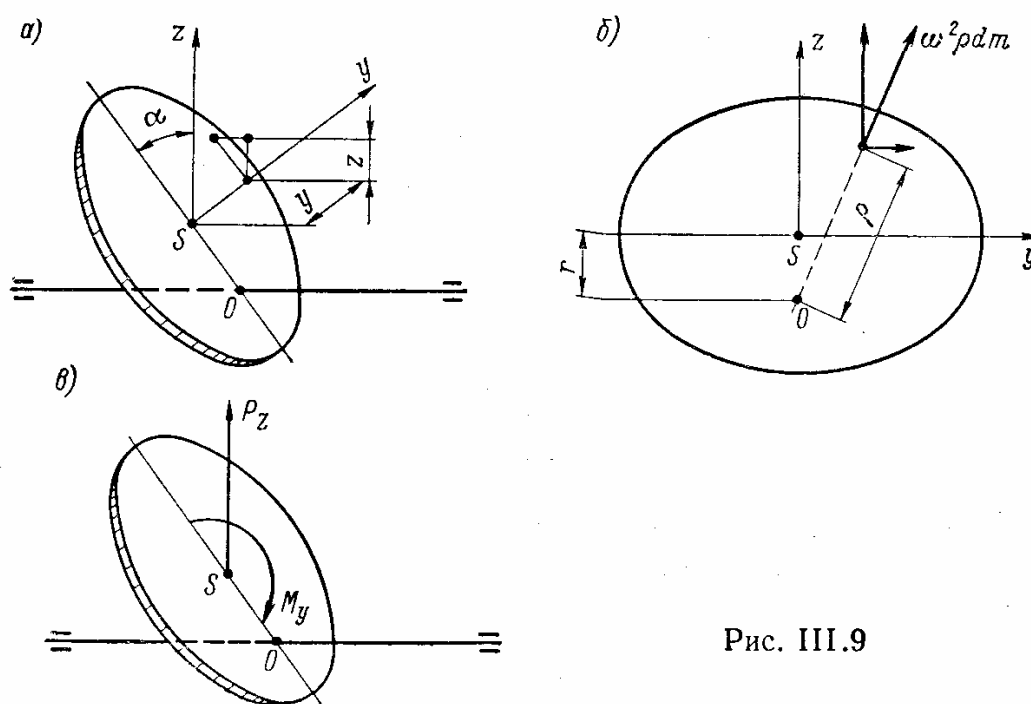


Рис. III.9

Для того чтобы понять сущность гироскопического эффекта в рассматриваемых случаях и количественно оценить его влияние на критические скорости, прежде всего рассмотрим вспомогательную задачу о равномерном вращении тонкого диска вокруг абсолютно жесткой оси, которая не проходит через центр тяжести диска и не перпендикулярна его плоскости (рис. III.9, а). Угловую скорость вращения обозначим через ω , точку пересечения оси вращения с плоскостью диска через O и центр тяжести диска через S . Свяжем с диском подвижную координатную систему yz , плоскость которой перпендикулярна оси вращения, причем начало системы совместим с точкой S . Ось y лежит в плоскости диска; ось z составляет с прямой OS некоторый заданный угол α . На

рис. III.9, б изображена проекция рассматриваемой системы на плоскость yz , причем буквой r обозначено расстояние от центра тяжести диска до оси вращения, а буквой ρ — расстояние от произвольной точки диска до той же оси. Эта точка описывает круговую траекторию радиуса ρ , и соответственно этому элементарная масса dm развивает центробежную силу $\omega^2 \rho dm$, действующую в плоскости, параллельной плоскости yz . Составляющие центробежной силы в направлениях осей y и z равны соответственно $\omega^2 y dm$ и $\omega^2 (z + r) dm$. Суммируя эти составляющие, найдем проекции главного вектора центробежных сил на оси y и z :

$$P_y = \int_{(m)} \omega^2 y dm = 0;$$

$$P_z = \int_{(m)} \omega^2 (z + r) dm = m\omega^2 r.$$

При вычислениях главных моментов центробежных сил относительно осей y и z нужно учесть, что точка приложения элементарной центробежной силы расположена на расстоянии $z \operatorname{tg} \alpha$ от плоскости yz (рис. III.9, а). Обозначив через I_y момент инерции диска относительно оси y , получим

$$M_y = \int_{(m)} \omega^2 (z + r) z \operatorname{tg} \alpha dm = I_y \omega^2 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$M_z = \int_{(m)} \omega^2 yz \operatorname{tg} \alpha dm = 0.$$

Имея в виду, что в нашей основной задаче угол α мал, будем пользоваться далее следующими окончательными выражениями

$$P_z = m\omega^2 r; \quad M_y = I_y \omega^2 \alpha. \quad (\text{III.22})$$

На рис. III.9, в показаны результаты приведения элементарных центробежных сил к центру диска. Следует обратить внимание на то, что момент M_y как бы стремится установить плоскость диска перпендикулярно оси вращения. Конечно, поскольку ось системы считалась абсолютно жесткой, это «стремление» останется неосуществленным, но в реальных случаях, когда ось деформируется, момент M_y окажет влияние на упругие перемещения.

Теперь можно обратиться к основной задаче. Обычно перекося диска не является заданным, а возникает вследствие изгиба вала, например когда диск расположен в стороне от середины пролета (рис. III.10, а). Начальный эксцентриситет будем считать отсутствующим и определим, при какой угловой скорости возможно состояние стационарного изгиба вала, при котором его изогнутая ось остается неизменной во времени и вращается вокруг оси, проходящей через центры подшипников, причем угловые скорости

вращения изогнутой оси и собственного вращения диска равны между собой (случай прямой синхронной прецессии). В этом случае изогнутый вал с диском представляет собой как бы твердое тело, вращающееся вокруг оси, проходящей через центры подшипников. Пусть r — прогиб оси вала в сечении, с которым связан диск; α — угол поворота этого сечения в плоскости, содержащей вращающуюся ось вала.

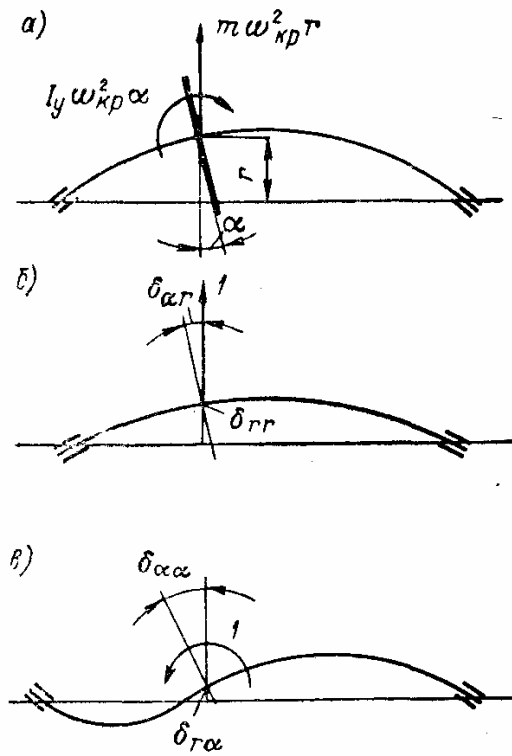


Рис. III.10

Такая схема полностью соответствует рис. III.9, и, следовательно, нужно принять, что со стороны диска на вал действуют центробежная сила $m\omega_{кр}^2 r$ и момент $I_y \omega_{кр}^2 \alpha$. Воспользуемся единичными перемещениями (рис. III.10, б, в): δ_{rr} — прогиб вала в месте расположения диска от единичной центробежной силы; $\delta_{r\alpha}$ — прогиб вала в месте расположения диска от единичного момента, положительное направление которого показано на рисунке и противоположно направлению действующего момента; $\delta_{\alpha r}$ — угол поворота плоскости диска от единичной центробежной силы ($\delta_{\alpha r} = \delta_{r\alpha}$); $\delta_{\alpha\alpha}$ — угол поворота плоскости диска от единичного момента.

При помощи единичных перемещений можно записать полные перемещения r и α в следующем виде:

$$r = m\omega_{кр}^2 r \delta_{rr} - I_y \omega_{кр}^2 \alpha \delta_{r\alpha};$$

$$\alpha = m\omega_{кр}^2 r \delta_{\alpha r} - I_y \omega_{кр}^2 \alpha \delta_{\alpha\alpha},$$

или

$$\left. \begin{aligned} r(1 - m\omega_{кр}^2 \delta_{rr}) + I_y \omega_{кр}^2 \delta_{r\alpha} \alpha &= 0; \\ -m\omega_{кр}^2 \delta_{\alpha r} r + \alpha(1 + I_y \omega_{кр}^2 \delta_{\alpha\alpha}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.23})$$

Полученные два алгебраических уравнения однородны относительно неизвестных (прогиба r и угла α); поэтому, чтобы перемещения r и α не были равны нулю, необходимо равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов системы уравнений (III.23):

$$\begin{vmatrix} 1 - m\omega_{кр}^2 \delta_{rr} & I_y \omega_{кр}^2 \delta_{r\alpha} \\ -m\omega_{кр}^2 \delta_{\alpha r} & 1 + I_y \omega_{кр}^2 \delta_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{III.24})$$

Развернув определитель, получим биквадратное уравнение для критической угловой скорости:

$$\omega_{кр}^4 + \frac{m\delta_{rr} - I_y \delta_{\alpha\alpha}}{mI_y (\delta_{\alpha\alpha} \delta_{rr} - \delta_{\alpha r}^2)} \omega_{кр}^2 - \frac{1}{mI_y (\delta_{\alpha\alpha} \delta_{rr} - \delta_{\alpha r}^2)} = 0. \quad (\text{III.25})$$

Уравнение (III.25) имеет только один положительный корень для $\omega_{кр}^2$ и поэтому определяет единственное значение критической угловой скорости. Если действительная угловая скорость отличается от $\omega_{кр}$, то определитель, составленный из коэффициентов системы (III.24), будет отличаться от нуля и вместе с тем получится $r = 0$ и $\alpha = 0$.

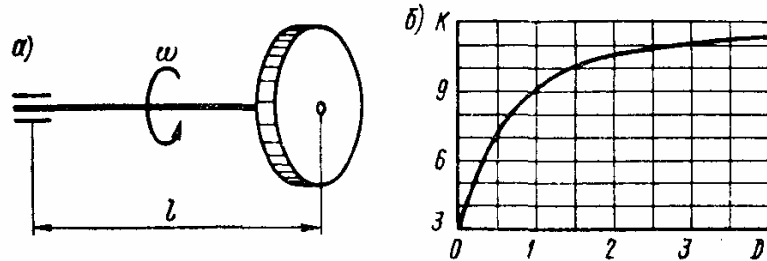


Рис. III.11

Для примера остановимся на случае, когда диск связан с концом консольного вала (рис. III.11, а). В этом случае

$$\delta_{rr} = \frac{l^3}{3EJ}; \quad \delta_{r\alpha} = \delta_{\alpha r} = \frac{l^2}{2EJ}; \quad \delta_{\alpha\alpha} = \frac{l}{EJ}$$

и уравнение (III.25) принимает вид

$$\omega_{кр}^4 + \frac{12EJ}{mI_y l^3} \left(\frac{ml^2}{3} - I_y \right) \omega_{кр}^2 - \frac{12E^2 J^2}{mI_y l^4} = 0. \quad (III.26)$$

Для дальнейшего исследования удобно ввести безразмерные параметры

$$K = \frac{m\omega_{кр}^2 l^3}{EJ}; \quad D = \frac{I_y}{ml^2}.$$

Тогда вместо уравнения (III.26) получим

$$K^2 + 4K \left(\frac{1}{D} - 3 \right) - \frac{12}{D} = 0,$$

т. е.

$$K = 2 \left[\left(3 - \frac{1}{D} \right) + \sqrt{\left(3 - \frac{1}{D} \right)^2 + \frac{3}{D}} \right]$$

(отрицательный знак перед корнем опущен как приводящий к физически невозможному результату). На рис. III.11, б представлен график зависимости $K = K(D)$. Здесь видно, что вследствие поворота диска критическая угловая скорость увеличивается. Предельными являются случаи $D = 0$ (отсутствие инерции поворота диска) и $D \rightarrow \infty$ (бесконечно большая инерция поворота диска). В первом из этих случаев получается $K = 3$, т. е. обычный результат $\left(\omega_{кр}^2 = \frac{3EJ}{ml^3} \right)$, а во втором — $K = 12$, т. е. результат,

соответствующий такому диску, который сохраняет неизменную плоскость вращения.

Пример 17. На конце консоли двухопорного вала (рис. III.12) находится тонкий диск диаметром $0,6a$ (a — пролет вала); длина консоли равна $0,5a$. Определить критическую угловую скорость вращения вала с учетом гироскопического эффекта.

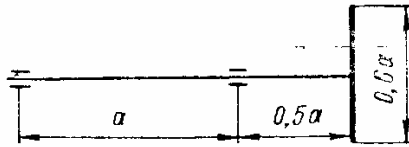


Рис. III.12

Прежде всего находим единичные перемещения

$$\delta_{rr} = 0,125 \frac{a^3}{EJ}; \quad \delta_{ar} = \delta_{ra} = 0,292 \frac{a^2}{EJ};$$

$$\delta_{aa} = 0,833 \frac{a}{EJ}.$$

Далее находим момент инерции массы диска

$$I_y = \frac{m(0,6a)^2}{16} = 0,0225 \, ma^2.$$

Уравнение (III.25) принимает вид

$$\omega_{кр}^4 + 250 \frac{EJ}{ma^3} \omega_{кр}^2 - 2350 \left(\frac{EJ}{ma^3} \right)^2 = 0;$$

отсюда

$$\omega_{кр}^2 = 9,1 \frac{EJ}{ma^3}; \quad \omega_{кр} = \frac{3,02}{a} \sqrt{\frac{EJ}{ma}}.$$

Если не учитывать гироскопического влияния, то по элементарной формуле получим

$$\omega_{кр} = p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{rr}}} = \frac{2,83}{a} \sqrt{\frac{EJ}{ma}}.$$

Таким образом, в данном случае гироскопический эффект повышает критическую скорость почти на 7%.

Критические состояния вала, сечение которого имеет различные главные моменты инерции

Рассмотрим случай, когда сечение вала имеет различные главные моменты инерции (вал со шпоночными канавками или снятыми лысками, вал ротора двухполюсной электрической машины с продольными вырезами для обмотки и т. д.). Положим, что начальный эксцентриситет отсутствует, и не будем принимать во внимание гироскопический эффект. Эти упрощения позволяют наиболее четко определить влияние основной особенности — различия изгибных жесткостей вала. Угловую скорость вращения вала с диском будем считать неизменной во времени.

Воспользуемся прежним способом рассуждений и рассмотрим возмущенное положение сечения, показанное на рис. III.13. Здесь необходим более определенный выбор вращающейся координатной системы. При рассмотрении рис. III.7 указывалось, что

координатная система yz вращается с той же угловой скоростью ω что и диск; сейчас дополнительно отметим, что оси y и z выбраны параллельно главным осям инерции сечения вала (1—1 и 2—2). Параллельность будет сохраняться все время, так как угловые скорости вращения диска и системы координат одинаковы. В таком случае уравнения движения диска будут иметь вид (III.17), но вместо жесткости c придется иметь дело с двумя жесткостями c_1 и c_2 , различными для осей 1—1 и 2—2. Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} -c_1 y + m\omega^2 y + 2m\omega \dot{z} &= m\ddot{y}; \\ -c_2 z + m\omega^2 z - 2m\omega \dot{y} &= m\ddot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.27})$$

Заменим c_1 и c_2 по формулам

$$c_1 = mp_1^2; \quad c_2 = mp_2^2, \quad (\text{III.28})$$

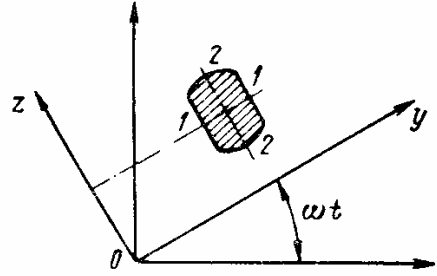


Рис. III.13

где p_1 и p_2 — собственные частоты колебаний невращающейся системы.

Тогда подобно уравнениям (III.18) получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + (p_1^2 - \omega^2) y - 2\omega \dot{z} &= 0; \\ \ddot{z} + (p_2^2 - \omega^2) z + 2\omega \dot{y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.29})$$

Решение системы уравнений (III.29) ищем в форме

$$y = a_1 e^{\lambda t}; \quad z = a_2 e^{\lambda t}. \quad (\text{III.30})$$

Подставив выражения (III.30) в уравнения (III.29), получим два однородных уравнения относительно a_1 и a_2 :

$$(\lambda^2 + p_1^2 - \omega^2) a_1 - 2\omega \lambda a_2 = 0;$$

$$2\omega \lambda a_1 + (\lambda^2 + p_2^2 - \omega^2) a_2 = 0.$$

Условие ненулевых решений для a_1 и a_2 имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + p_1^2 - \omega^2 & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 + p_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\lambda^4 + \lambda^2 (p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2) - (p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2) = 0.$$

Решив это биквадратное уравнение, получим два действительных корня для λ^2 :

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[-(p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2) \pm \sqrt{(p_1^2 - p_2^2)^2 + 8\omega^2(p_1^2 + p_2^2)} \right].$$

Так как λ^2 — действительные числа, то все корни λ_i ($i = 1; 2; 3; 4$) — чисто мнимые или действительные. Мнимым корням соответствует колебательное движение с постоянными амплитудами, а отрицательным действительным корням — аperiодический затухающий процесс. Однако, если имеется положительный корень λ , то с течением времени смещения y и z будут стремиться к бесконечности, т. е. исходный режим неустойчив.

Но для положительности одного из корней необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{(p_1^2 - p_2^2)^2 + 8\omega^2(p_1^2 + p_2^2)} > p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2. \quad (\text{III.31})$$

Возводя обе части (III.31) в квадрат и приводя подобные члены, получим более простое неравенство

$$(\omega^2 - p_1^2)(\omega^2 - p_2^2) < 0.$$

Это неравенство удовлетворяется, если $p_1 \leq \omega \leq p_2$, т. е. система неустойчива во всем указанном интервале угловых скоростей вращения.

Из сказанного вытекает, что различие жесткостей c_1 и c_2 вызывает увеличение опасности наступления критических состояний.

Критические состояния валов, связанные с наличием масляной пленки в подшипниках

Подвижность смазочного материала в подшипнике оказывает влияние на движение шейки вала в подшипнике; в условиях эксплуатации по этой причине могут возникнуть опасные критические состояния.

Ограничимся схематическим рассмотрением основных особенностей тех сил, которые возникают в указанных условиях.

При вращении шейки вала в подшипнике в движение частично вовлекается масляная пленка, которая образует замкнутый поток в кольцеобразной полости между шейкой и подшипником. При этом внутренняя поверхность пленки нагружена силами трения, действующими в направлении вращения; в то же время поверхность шейки нагружена такими же силами, но действующими в направлении, противоположном основному вращению. Эти силы показаны на рис. III.14, а.

Пусть вследствие какого-нибудь возмущения шейка вала оказалась смещенной в сторону от положения, соответствующего стационарному состоянию (рис. III.14, б). При этом меняются конфигурация полости и скорости частиц пленки. В тех местах, где произошло расширение полости (слева на рис. III.14, б), скорость кольцевого потока уменьшается, а с противоположной стороны (справа на рис. III.14, б), где полость оказалась суженной, скорость потока возрастает.

Но уменьшение скорости потока означает увеличение относительной скорости шейки и пленки, следовательно, в левой части силы трения увеличиваются, т. е. их приращения положительны. Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к заключению, что с противоположной стороны силы трения убывают, т. е. их приращения отрицательны; эти приращения показаны стрелками

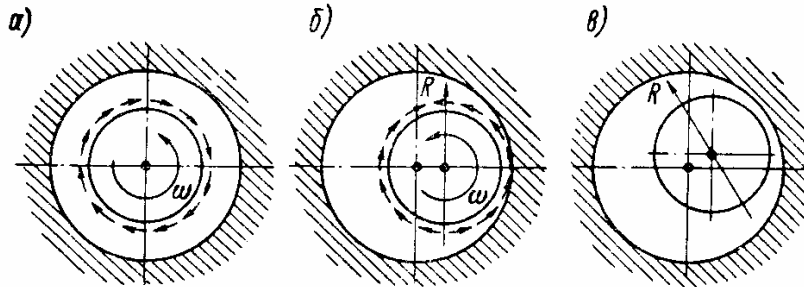


Рис. III.14

на рис. III.14, б. Из схемы видно, что равнодействующая R этих приращений направлена перпендикулярно направлению смещения (рис. III.14, в).

В этом и состоит основная особенность рассматриваемого явления: при всяком боковом смещении шейки вала возникает дополнительная сила трения, направленная не против, а *перпендикулярно* смещению. Величина силы R в первом приближении может быть принята пропорциональной смещению.

Для исследования устойчивости системы воспользуемся неподвижной координатной системой yz (рис. III.15). Начало координат A помещено на линии центров подшипников; точка O — мгновенное положение центра шейки, ее координаты обозначены через y и z . Точка S определяет мгновенное положение центра тяжести диска (здесь же располагается центр W сечения вала, в котором находится диск); ее координаты обозначены через y_1 и z_1 .

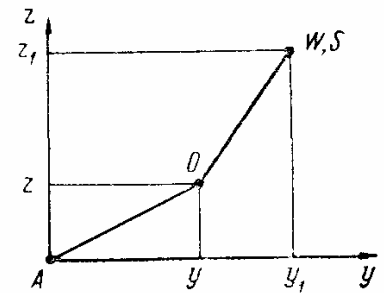


Рис. III.15

Рассмотрим возмущенное движение диска, укрепленного на вращающемся валу; при этом примем, что дополнительные реакции подшипников определяются законом

$$R_y = -\varepsilon z; \quad R_z = \varepsilon y, \quad (\text{III.32})$$

где ε — коэффициент пропорциональности.

Будем считать, что при движении развивается также диссипативная сила, пропорциональная абсолютной скорости центра диска; проекции этой силы на оси координат равны $-ky_1$ и $-kz_1$.

Тогда дифференциальные уравнения движения системы вал—диск имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -k\dot{y}_1 - \varepsilon z &= m\ddot{y}_1; \\ -k\dot{z}_1 + \varepsilon y &= m\ddot{z}_1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.33})$$

а уравнения движения диска —

$$\left. \begin{aligned} -c(y_1 - y) - k\dot{y}_1 &= m\ddot{y}_1; \\ -c(z_1 - z) - k\dot{z}_1 &= m\ddot{z}_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.34})$$

При составлении уравнений (III.33) учтено, что на систему вал—диск действуют диссипативные силы и составляющие дополнительной силы трения R_y и R_z . Уравнения (III.34) относятся к диску; при этом действующими на него силами являются силы упругости вала и диссипативные силы.

Приравнивая левые части уравнений (III.33) и (III.34), выразим координаты центра шейки y и z через координаты центра диска y_1 и z_1 :

$$\begin{aligned} y &= \frac{c^2}{c^2 + \varepsilon^2} y_1 - \frac{c\varepsilon}{c^2 + \varepsilon^2} z_1; \\ z &= \frac{c\varepsilon}{c^2 + \varepsilon^2} y_1 + \frac{c^2}{c^2 + \varepsilon^2} z_1. \end{aligned}$$

Теперь из выражений (III.33) или (III.34) можно получить уравнения для координат y_1 и z_1 , не содержащие координат y и z :

$$\begin{aligned} -k\dot{y}_1 - \frac{c\varepsilon^2}{c^2 + \varepsilon^2} y_1 - \frac{c^2\varepsilon}{c^2 + \varepsilon^2} z_1 &= m\ddot{y}_1; \\ -k\dot{z}_1 + \frac{c^2\varepsilon}{c^2 + \varepsilon^2} y_1 - \frac{c\varepsilon^2}{c^2 + \varepsilon^2} z_1 &= m\ddot{z}_1. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\frac{c\varepsilon^2}{m(c^2 + \varepsilon^2)} = a; \quad \frac{c^2\varepsilon}{m(c^2 + \varepsilon^2)} = b; \quad \frac{k}{m} = 2n, \quad (\text{III.35})$$

получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 + ay_1 + bz_1 + 2n\dot{y}_1 &= 0; \\ \ddot{z}_1 + az_1 - by_1 + 2n\dot{z}_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.36})$$

Частное решение примем в форме (III.30):

$$y_1 = Ae^{\lambda t}; \quad z_1 = Be^{\lambda t}. \quad (\text{III.37})$$

Подставляя выражения (III.37) в уравнения (III.36), получим систему однородных относительно A и B уравнений

$$\begin{aligned} A(\lambda^2 + 2n\lambda + a) + Bb &= 0; \\ -Ab + B(\lambda^2 + 2n\lambda + a) &= 0. \end{aligned}$$

Условие ненулевых решений для A и B

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2n\lambda + a & b \\ -b & \lambda^2 + 2n\lambda + a \end{vmatrix} = 0$$

приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^4 + 4n\lambda^3 + 2\lambda^2(a + 2n^2) + 4n\lambda a + (a^2 + b^2) = 0.$$

Для устойчивости рассматриваемой системы согласно (III.9) должно быть

$$n^2 > \frac{b^2}{4a}.$$

В обозначениях (III.35) этому условию можно придать вид

$$k > c \sqrt{\frac{cm}{c^2 + e^2}}. \quad (\text{III.38})$$

При отсутствии затухания ($k = 0$) движение всегда неустойчиво. Для устойчивости движения необходимо некоторое минимальное значение коэффициента k ; чем больше масса диска и жесткость вала, тем большим оказывается это значение.

Критические состояния валов, связанные с их гистерезисными свойствами

Силы внутреннего трения в материале вала могут создать условия, при которых прямолинейная форма оси вала становится неустойчивой и после сколь угодно малого начального возмущения система начнет уходить от невозмущенного режима. Для анализа этой возможности отнесем рассматриваемую систему к неподвижной системе координатных осей xuz , совместив ось x с прямой, проходящей через центры подшипников.

Пусть в некоторый момент, от которого ведется отсчет времени, центр диска каким-либо образом отклонен от оси вращения Ox , после чего система предоставлена самой себе (рис. III.16, a). Рассмотрим последующий процесс движения, принимая, что вал только изгибается и не претерпевает деформации кручения; кроме того, положим, что угловая скорость вращения вала ω остается все время постоянной.

Обозначим через $v = v(t)$, $w = w(t)$ составляющие прогиба середины вала в направлении осей y и z . Мысленно отделим диск от вала и заменим действие диска на вал силами P_1 и P_2 (рис. III.16, b). Схема сил, действующих на диск, показана на рис. III.16, $в$; эти силы равны по величине и противоположны по направлению силам P_1 и P_2 . Дифференциальные уравнения движения диска имеют вид

$$m\ddot{v} = -P_1; \quad m\ddot{w} = -P_2. \quad (\text{III.39})$$

Для того чтобы связать силы P_1 и P_2 с прогибами вала v и w , рассмотрим изгиб вала.

Обозначим через ρ радиус кривизны оси вала в среднем его сечении. Проекции ρ на оси y и z обозначим через ρ_y и ρ_z . Оче-

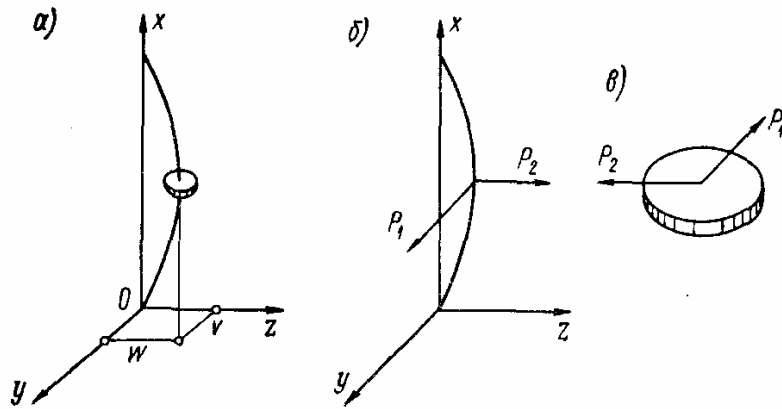


Рис. III.16

видно, что соответствующая кривизна пропорциональна прогибам (рис. III.17, а):

$$1/\rho_y = av; \quad 1/\rho_z = aw, \quad (\text{III.40})$$

где a — одинаковый для обоих направлений коэффициент пропорциональности, зависящий от опорных условий и длины вала (так, для свободно опертого вала $a = 12/l^2$).

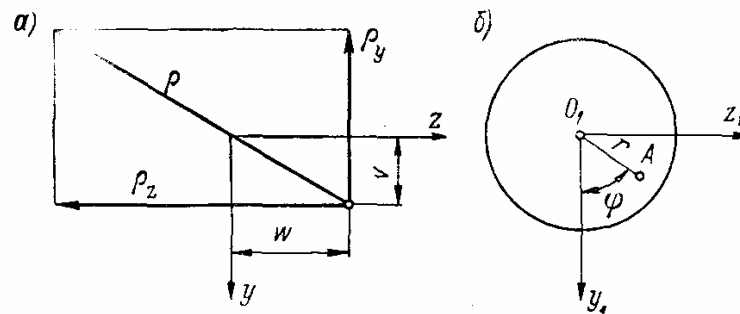


Рис. III.17

Рассмотрим теперь среднее сечение вала (рис. III.17, б) и совместим с центром тяжести O_1 этого сечения подвижную систему осей y_1, z_1 , остающихся все время параллельными неподвижным осям y, z . Некоторая точка A , удаленная от центра тяжести сечения на расстояние r , имеет координаты

$$y_1 = r \cos \varphi; \quad z_1 = r \sin \varphi, \quad (\text{III.41})$$

причем $\varphi = \omega t$.

Удлинение в точке A вследствие изгиба вала

$$\varepsilon = - \frac{y_1}{\rho_y} - \frac{z_1}{\rho_z}.$$

Подставляя сюда выражения (III.40) и (III.41), получим

$$\varepsilon = -ar (v \cos \omega t + w \sin \omega t).$$

Соответственно (II.236) нормальное напряжение в точке A

$$\sigma = E\varepsilon + k\dot{\varepsilon} = -Ear (v \cos \omega t + w \sin \omega t) -$$

$$-kar (\dot{v} \cos \omega t - v\omega \sin \omega t + \dot{w} \sin \omega t + w\omega \cos \omega t).$$

Вновь возвращаясь к координатам y_1, z_1 , имеем

$$\sigma = -ay_1 (Ev + k\dot{v} + k\omega w) - az_1 (Ew + k\dot{w} - k\omega v).$$

Система элементарных усилий σdF образует изгибающие моменты относительно осей y_1, z_1 :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= - \int_{(F)} \sigma z_1 dF = aJ (Ew + k\dot{w} - k\omega v); \\ M_2 &= - \int_{(F)} \sigma y_1 dF = aJ (Ev + k\dot{v} + k\omega w). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.42})$$

Возвращаясь теперь к рис. III.16, б, заметим, что изгибающий момент M_1 вызван действием силы P_2 , а изгибающий момент M_2 — действием силы P_1 :

$$M_1 = \frac{P_2 l}{4}; \quad M_2 = \frac{P_1 l}{4}. \quad (\text{III.43})$$

Приравнивая правые части равенств (III.42) и (III.43), выразим силы P_1 и P_2 через прогибы центра тяжести диска:

$$Ew + k\dot{w} - k\omega v = \frac{P_2 l^3}{48J}; \quad Ev + k\dot{v} + k\omega w = \frac{P_1 l^3}{48J}.$$

Здесь принято, что $a = 12/l^2$. Отсюда следуют искомые выражения для сил P_1 и P_2 :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{48J}{l^3} (Ev + k\dot{v} + k\omega w); \\ P_2 &= \frac{48J}{l^3} (Ew + k\dot{w} - k\omega v). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.44})$$

Подставляя выражения (III.44) в уравнения (III.39), получим дифференциальные уравнения движения центра тяжести диска

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v} + p^2 \left(v + \frac{k}{E} \dot{v} + \frac{k}{E} \omega w \right) &= 0; \\ \ddot{w} + p^2 \left(w + \frac{k}{E} \dot{w} - \frac{k}{E} \omega v \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.45})$$

где $p^2 = \frac{48EJ}{ml^3}$ есть квадрат собственной частоты колебаний диска на невращающемся идеально упругом валу.

Для решения уравнений (III.45) положим подобно выражениям (III.37), что

$$v = a_1 e^{\lambda t}; \quad w = a_2 e^{\lambda t}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \left(\lambda^2 + p^2 \frac{k}{E} \lambda + p^2 \right) a_1 + \frac{kp^2}{E} \omega a_2 &= 0; \\ -\frac{kp^2}{E} \omega a_1 + \left(\lambda^2 + p^2 \frac{k}{E} \lambda + p^2 \right) a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Условие ненулевых решений для a_1 и a_2 имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + p^2 \frac{k}{E} \lambda + p^2 & \frac{kp^2}{E} \omega \\ -\frac{kp^2}{E} \omega & \lambda^2 + p^2 \frac{k}{E} \lambda + p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует характеристическое уравнение четвертой степени для λ :

$$\lambda^4 + 2p^2 \frac{k}{E} \lambda^3 + \left(2 + \frac{p^2 k^2}{E^2} \right) p^2 \lambda^2 + 2p^4 \frac{k}{E} \lambda + p^4 \left(1 + \frac{k^2 \omega^2}{E} \right) = 0.$$

Из условий Гурвица (III. 9) следует, что для устойчивости системы необходимо выполнение простого неравенства

$$\omega < p. \quad (\text{III.46})$$

Таким образом, пока угловая скорость вращения вала меньше критической, неравенство (III.46) выполняется и вращение устойчиво; при $\omega > p$, т. е. в закритической области, вращение вала неустойчиво.

Благодаря неучтенным здесь силам внешнего трения устойчивость может быть сохранена и в закритической области, конечно, если эти силы достаточно велики.

Автоматическая балансировка вращающихся валов

Для устранения изгиба, возникающего при вращении неуравновешенного вала, иногда применяют специальные устройства, обеспечивающие автоматическую балансировку. Такая балансировка особенно необходима, когда в условиях эксплуатации возможно существенное изменение несбалансированности вала или ротора; примером могут служить некоторые типы центрифуг, при загрузке которых может значительно нарушиться симметрия распределения масс относительно оси вращения.

Автоматическая балансировка способствует сохранению прямолинейной формы вала и этим отличается от самоцентрирования диска при высоких скоростях вращения (в последнем случае происходит центрирование массы диска при соответственно изогнутом вале).

Один из вариантов автоматического балансирующего показан на рис. III.18, а. Здесь схема вал—диск усложнена двумя маятниками, которые могут свободно вращаться на валу. Ограничимся рассмотрением стационарных режимов вращения и для упрощения будем пренебрегать силами веса и неупругими сопротивлениями.

Пусть точка O (рис. III.18) лежит на прямой, проходящей через центры подшипников; W — центр сечения вала; S — центр тяжести диска; M, M — центры масс маятников; $e_1 = \overline{WM}$ — длина маятника; $e = \overline{WS}$ — эксцентриситет.

При отсутствии маятников возможны две схемы взаимного

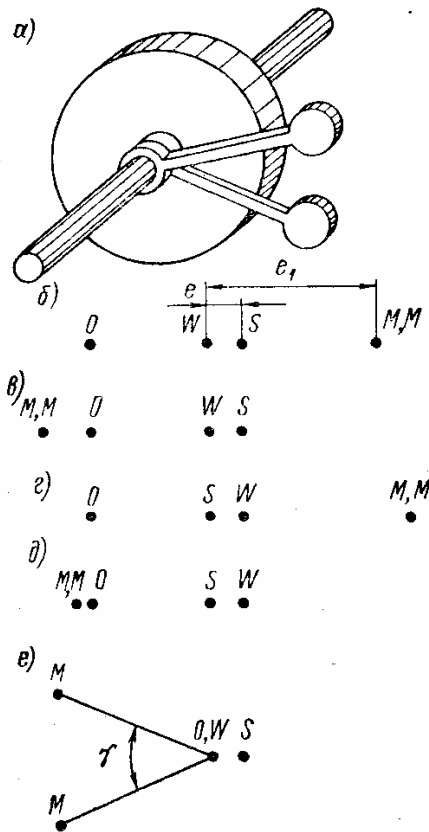


Рис. III.18

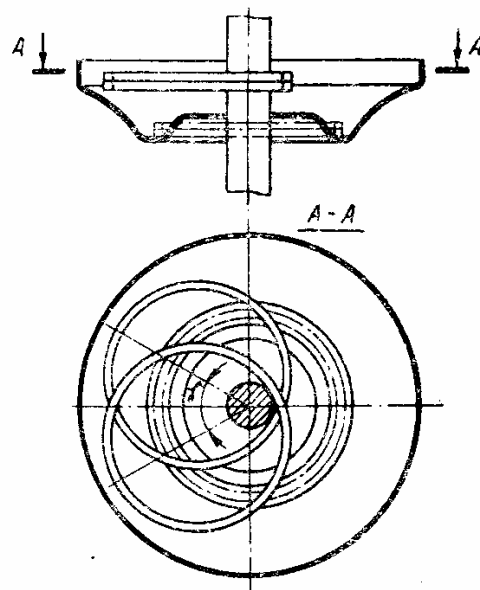


Рис. III.19

расположения точек O, W и S (см. рис. III.6). В каждой схеме центробежная сила и сила упругости вала действуют по одной прямой; поэтому, добавляя маятники, можно предположить, что в любой из этих схем оси обоих маятников совпадут с направлением той же прямой.

Это приводит к четырем вариантам взаимного расположения характерных точек. Варианты б и в (рис. III.18) соответствуют схеме, данной на рис. III.6, а, когда центр тяжести диска S лежит дальше от оси вращения, чем центр сечения вала W ; эти варианты различаются между собой относительным положением точек M, M . Варианты г и д соответствуют схеме, данной на рис. III.6, б, когда центр тяжести диска S лежит ближе к оси вращения, чем центр сечения вала W .

Эти четыре варианта исчерпывают все возможные принципиально различные случаи взаимного расположения точек $O,$

W, S, M, M , если все они лежат на одной прямой. Но, кроме того, возможен еще пятый вариант (рис. III.18, *e*), соответствующий полной балансировке вала, когда центр сечения вала W совпадает с центром вращения системы O . В этом варианте силы упругости отсутствуют (так как вал не изогнут), а центробежная сила диска уравновешена центробежными силами маятников; при этом оси маятников образуют некоторый угол γ , соответствующий данному эксцентриситету диска.

Хотя равновесие возможно в каждом из перечисленных вариантов стационарного режима, но не все эти режимы будут устойчивыми. Теоретический анализ и эксперименты показывают, что при $\omega > \omega_{кр}$ устойчивостью обладает только пятый вариант. Поэтому в докритической области такие маятники служат автоматическими балансировщиками и удерживают ось вала от изгиба; если в процессе вращения эксцентриситет увеличивается (точка S на рис. III.18 смещается вправо), то маятники сходятся ближе и угол γ уменьшается ровно настолько, насколько это необходимо для уравновешивания возросшей центробежной силы диска.

В докритической области при $\omega < \omega_{кр}$ устойчивым оказывается режим *б*, в котором маятники увеличивают прогиб вала и поэтому приносят только вред. Поэтому в конструкциях принимают меры по «выключению» маятников в докритической области.

На рис. III.19 показана схема автоматического балансировщика, применяемого в некоторых конструкциях стиральных машин. Здесь маятниками служат кольца, заключенные в кожух. При $\omega < \omega_{кр}$ центробежные силы, действующие на кольца, малы, кольца лежат на дне кожуха и балансировщик «выключен». При $\omega = \omega_{кр}$ центробежные силы оказываются достаточными, чтобы кольца «всплыли» и произошло включение балансировщика.

В некоторых конструкциях шлифовальных станков маятниками служат шары, заключенные в кожух.

Критические состояния ротора вертолета

Формулами, приведенными при рассмотрении вала с одним диском, пользоваться нельзя, если с вращающимся диском связаны массы, обладающие некоторой подвижностью по отношению к диску. В частности, в формулу (III.15) для критической угловой скорости нельзя подставлять вместо m суммарную массу диска вместе с подвижно присоединенными массами.

К схемам этого типа относится, например, горизонтальный вертолетный ротор, состоящий из втулки и лопастей, которые связаны с втулкой вертикальными шарнирами. На рис. III.20, *a* показана схема трехлопастного ротора, причем O — центр втулки, A, B, C — центры вертикальных шарниров. Предположим, что вертолет стоит на земле, а центр втулки O будем считать упруго закрепленным в горизонтальной плоскости; эта упругость со-

здается всей конструкцией вертолета (от центра втулки до точек опирания колес вертолета на земле).

Схематизируем массовые свойства системы и будем считать, что лопасти полностью уравновешены, причем масса m_* каждой лопасти сосредоточена на расстоянии b от центра соответствующего вертикального шарнира. Допустим также, что втулка уравновешена не полностью и ее центр тяжести G находится на расстоянии e от центра втулки O и на биссектрисе угла BOC . Такое пред-

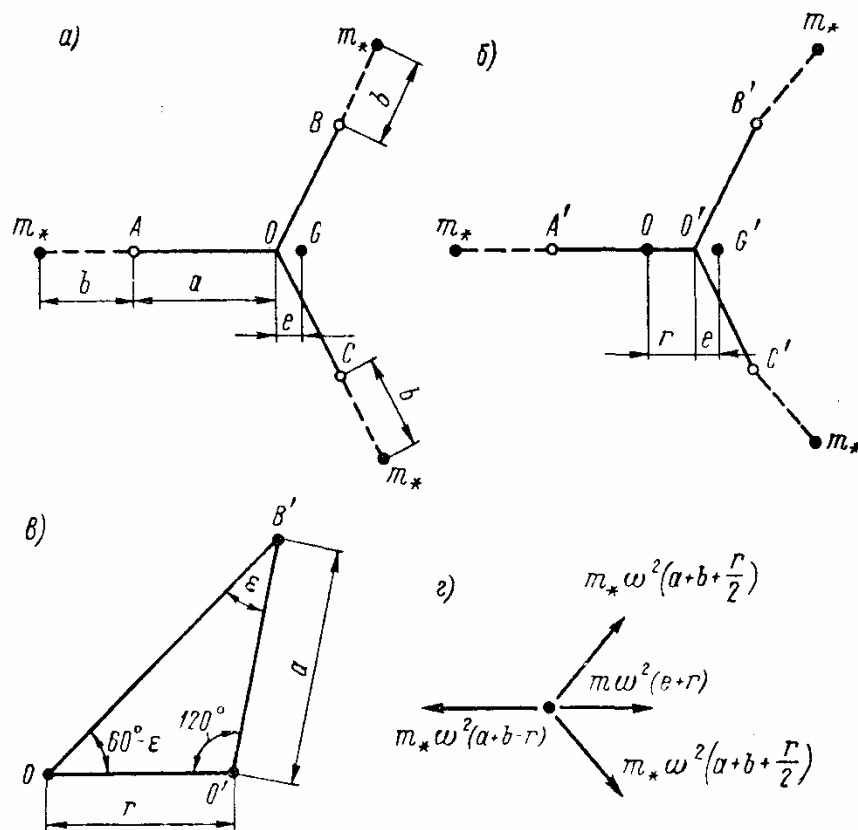


Рис. III.20

ставление о неуравновешенности ротора, очевидно, носит частный характер, что, однако, не повлияет на окончательные выводы. В то же время эта схема наиболее проста для анализа.

Вследствие неуравновешенности системы при вращении ротора возникает центробежная сила, которая вызовет дополнительное упругое смещение r центра втулки, как это представлено на рис. III.20, б. Здесь обозначено: O' — смещенное положение центра втулки; G' — ее центр тяжести; A' , B' и C' — центры вертикальных шарниров. Разумеется, что этими буквами обозначено некоторое мгновенное положение ротора; с течением времени точки O' , G' , A' , B' и C' описывают окружности с центром в точке O , которая определяет ось вращения системы. Важно заметить, что оси лопастей, подвешенных в шарнирах B' и C' , уже не будут располагаться на прямых $O'B'$ и $O'C'$, так как центробежные силы лопастей должны проходить через центр вращения O . Угол, который ось каждой из этих лопастей состав-

ляет с прямой $O'A'$, несколько меньше 60° ; обозначим его через $60^\circ - \varepsilon$ (рис. III.20, в).

Из треугольника $OO'B'$ имеем

$$\frac{r}{\sin \varepsilon} = \frac{a}{\sin (60^\circ - \varepsilon)} = \frac{\overline{OB'}}{\sin 120^\circ};$$

отсюда приближенно получается, что

$$\sin \varepsilon \approx \varepsilon \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r}{a}; \quad \overline{OB'} \approx a + \frac{r}{2}.$$

Теперь можно определить центробежные силы лопастей:

лопасти A

$$m_* \omega^2 (a + b - r);$$

лопасти B

$$m_* \omega^2 \left(a + b + \frac{r}{2} \right);$$

лопасти C

$$m_* \omega^2 \left(a + b + \frac{r}{2} \right).$$

Схема центробежных сил показана на рис. III.20, г. Кроме центробежных сил лопастей сюда включена центробежная сила втулки $m \omega^2 (e + r)$, где m — масса втулки.

Сумма всех этих сил направлена по прямой OO' и равна

$$J = 2m_* \omega^2 \left(a + b + \frac{r}{2} \right) \cos (60^\circ - \varepsilon) + m \omega^2 (e + r) - \\ - m_* \omega^2 (a + b - r).$$

Подставляя сюда

$$\cos (60^\circ - \varepsilon) \approx \cos 60^\circ + \varepsilon \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{r}{a},$$

находим

$$J = m \omega^2 (r + e) + 3m_* \omega^2 r \left(1 + \frac{b}{2a} \right). \quad (\text{III.47})$$

Между величинами J и r существует еще одно важное соотношение: смещение r равно частному от деления силы J на коэффициент жесткости c упругой системы: $r = J/c$. Подставляя сюда выражение (III.47), получим простое уравнение для определения смещения r ; решив его, найдем

$$r = \frac{e}{\frac{c}{m \omega^2} - 1 - 3 \frac{m_*}{m} \left(1 + \frac{b}{2a} \right)}.$$

Отсюда непосредственно видно, что критическая скорость составляет

$$\omega_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{c}{m + 3m_* \left(1 + \frac{b}{2a} \right)}}. \quad (\text{III.48})$$

Уравнение (III.50) совпадает с уравнением (II.160), полученным выше как условие для определения собственных частот поперечных колебаний той же системы при отсутствии вращения. Следовательно, критические скорости вращения многодискового вала равны частотам свободных колебаний изгиба того же вала, подсчитанным при отсутствии вращения. Этот вывод, являющийся обобщением результата, найденного для вала с одним диском, позволяет для определения $\omega_{кр}$ воспользоваться всеми способами, указанными при рассмотрении линейных систем с несколькими степенями свободы. Каждой из критических скоростей соответствует особая форма кривой изгиба вала, совпадающая с одной из собственных форм колебаний изгиба.

Критические состояния жесткого ротора на упругих опорах

Схема упругого вала с несколькими массивными дисками (см. выше) часто применяется при анализе критических скоростей многих реальных конструкций. Однако в случае, когда жесткость ротора велика сравнительно с жесткостью опор (например, в некоторых типах веретен ткацких станков), более подходящей оказывается схема упруго опертого абсолютно жесткого ротора.

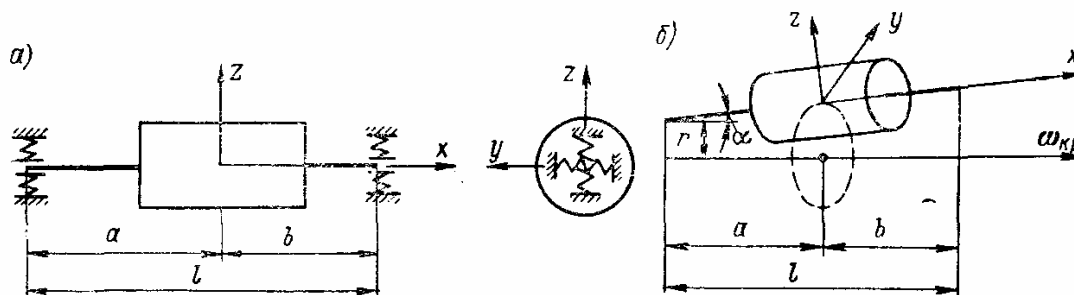


Рис. III.22

При рассмотрении этой схемы (рис. III.22, а) будем считать коэффициенты жесткости обеих опор c_1 и c_2 различными и не зависящими от направлений перемещений концов ротора, перпендикулярных к оси ротора x ; такие опоры называются изотропными. Ротор будем предполагать полностью уравновешенным; его моменты инерции относительно проходящих через центр тяжести осей x , y , z равны I_x , I_y .

Для определения критической скорости вращения рассмотрим предполагаемое возможным состояние прямой синхронной прецессии (рис. III.22, б). Здесь левый конец ротора описывает окружность радиуса r вокруг своего невозмущенного положения, а ось ротора отклонена на угол α от первоначального положения и описывает коническую поверхность.

Как было отмечено выше, в критическом состоянии система центробежных сил и упругих реакций находится в равновесии

независимо от масштаба отклонений. Поэтому в данном случае можно записать

$$m\omega_{кр}^2 (r + \alpha a) = c_1 r + c_2 (r + \alpha l), \quad (\text{III.51})$$

где $r + \alpha a$ — радиальное смещение центра тяжести ротора; $m\omega_{кр}^2 (r + \alpha a)$ — центробежная сила инерции ротора; $r + \alpha l$ — радиальное смещение правого конца ротора; $c_1 r$ и $c_2 (r + \alpha l)$ — реакции опор.

Кроме того, в рассматриваемом движении на ротор действует момент опорных реакций вокруг оси y

$$M_y = -c_1 r a + c_2 (r + \alpha l) b. \quad (\text{III.52})$$

Его значение должно удовлетворять динамическому уравнению Эйлера

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = M_y,$$

где ω_x , ω_y , ω_z — проекции угловой скорости ω на связанные с ротором оси x , y и z .

Соответственно на рис. III.22, б

$$\omega_x = \omega_{кр}; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = -\omega_{кр} \alpha.$$

Тогда уравнение Эйлера принимает вид

$$M_y = -(I_x - I_z) \omega_{кр}^2 \alpha. \quad (\text{III.53})$$

В частном случае весьма короткого ротора, который можно рассматривать как диск, $I_x = 2I_z$ и формула (III.53) переходит в выражение (III.22)*.

Приравнявая выражения (III.52) и (III.53), получим

$$-c_1 r a + c_2 (r + \alpha l) b = -(I_x - I_z) \omega_{кр}^2 \alpha. \quad (\text{III.54})$$

Система уравнений (III.49) и (III.54) однородна относительно перемещений r и α . Перепишем эту систему в виде

$$\left. \begin{aligned} r (m\omega_{кр}^2 - c_1 - c_2) + \alpha (am\omega_{кр}^2 - c_2 l) &= 0; \\ -r (c_1 a - c_2 b) + \alpha [(I_x - I_z) \omega_{кр}^2 + c_2 b l] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Чтобы r и α были отличными от нуля, необходимо равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов этой системы:

$$\begin{vmatrix} m\omega_{кр}^2 - c_1 - c_2 & am\omega_{кр}^2 - c_2 l \\ -(c_1 a - c_2 b) & (I_x - I_z) \omega_{кр}^2 + c_2 b l \end{vmatrix} = 0.$$

Развертывая определитель, получим биквадратное уравнение

$$\omega_{кр}^4 + \omega_{кр}^2 \left(\frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{I_x - I_z} - \frac{c_1 + c_2}{m} \right) + \frac{c_1 c_2 l^2}{m (I_x - I_z)} = 0,$$

позволяющее найти критическую скорость.

* Различие в знаках объясняется тем, что выражение (III.22) определяет действие диска на вал, противоположное рассматриваемому здесь действию вала на диск.

16. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ДИВЕРГЕНЦИИ И ФЛАТТЕРА

Если упругая конструкция типа крыла самолета находится в потоке газа (жидкости), то свойства состояния ее равновесия (устойчивость или неустойчивость) зависят от параметров потока, т. е. от плотности газа (жидкости) ρ и скорости v , или, проще, от скоростного напора $\rho v^2/2$. Как оказывается, система, устойчивая при малых значениях скоростного напора, может потерять устойчивость при достаточно больших его значениях; тогда после сколь угодно малого возмущения начинается движение, все дальше уводящее систему от ставшего неустойчивым состояния равновесия. Движение, представляющее собой монотонное воз-

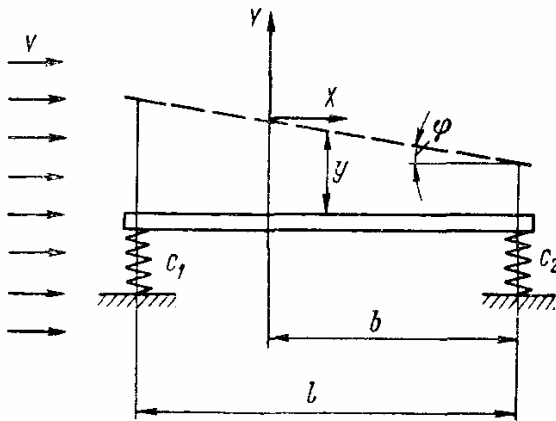


Рис. III.23

растание отклонений от состояния равновесия, называется дивергенцией, а движение, носящее характер колебаний с возрастающими пиковыми значениями, — флаттером. Скорость, при которой возникает потеря устойчивости того или иного типа, называется критической скоростью.

Для того чтобы получить хотя бы самое общее представление об этих явлениях дивергенции и флаттера, рассмотрим следующую простейшую задачу.

Жесткая упруго закрепленная пластинка находится в потоке газа (жидкости), скорость v которого направлена вдоль срединной плоскости в невозмущенном состоянии равновесия (рис. III.23). В этом положении аэродинамические силы равны нулю (если пренебречь весьма малой силой трения потока о поверхность пластинки) и пластинка находится в равновесии под действием силы тяжести и реакции опор. При отклонениях пластинки возникают аэродинамические давления, зависящие от угла отклонения пластинки φ . Такая схема может служить сильно упрощенной моделью сечения крыла самолета: ее вертикальные перемещения соответствуют изгибу крыла, а угловое перемещение — закручиванию. Соответствующие количественные закономерности устанавливаются в аэрогидродинамике; мы приведем их в готовом виде.

Равнодействующую давлений можно разложить на составляющие

$$X = k_x \frac{\rho v^2}{2} l \varphi; \quad Y = k_y \frac{\rho v^2}{2} l \varphi. \quad (\text{III.55})$$

Здесь k_x , k_y — постоянные аэродинамические коэффициенты; l — размер пластинки вдоль потока (перпендикулярный плоскости рисунка размер принят равным единице).

Точка приложения равнодействующей аэродинамических давлений находится на расстоянии b от оси шарнира, которое будем считать не зависящим от угла φ .

Переходя к исследованию устойчивости невозмущенного состояния равновесия рассматриваемой системы с двумя степенями свободы, обозначим: y — перемещение центра тяжести пластинки; c_1 и c_2 — коэффициенты жесткости упругих опор; $ml^2/12$ — момент инерции пластинки относительно оси, проходящей через ее центр тяжести перпендикулярно плоскости чертежа; b — расстояние от точки приложения подъемной силы до правого края; R_1 и R_2 — упругие реакции:

$$R_1 = c_1 \left(y + \frac{\varphi l}{2} \right); \quad R_2 = c_2 \left(y - \frac{\varphi l}{2} \right). \quad (\text{III.56})$$

Дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} -R_1 - R_2 + Y &= m\ddot{y}; \\ -R_1 \frac{l}{2} + R_2 \frac{l}{2} + Y \left(b - \frac{l}{2} \right) &= \frac{ml^2}{12} \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Сюда не включен момент силы x как величина второго порядка малости. Подставляя сюда (III.55) и (III.56), получаем

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + c_{11}y + c_{12}\varphi &= 0; \\ \ddot{\varphi} + c_{21}y + c_{22}\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.57})$$

в которой

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad c_{12} = \frac{(c_1 - c_2)l}{2m} - \frac{k_y l}{m} \cdot \frac{\rho v^2}{2}; \\ c_{21} &= \frac{6(c_1 + c_2)}{ml}; \quad c_{22} = \frac{3(c_1 + c_2)}{m} + 6 \frac{k_y(l - 2b)}{ml} \cdot \frac{\rho v^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Между прочим, отметим, что неравенство $c_{12} \neq c_{21}$ служит признаком неконсервативности системы.

Принимая частное решение системы (III.57) в виде

$$y = a_1 e^{\lambda t}; \quad \varphi = a_2 e^{\lambda t}, \quad (\text{III.59})$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} a_1 (\lambda^2 + c_{11}) + a_2 c_{12} &= 0; \\ a_1 c_{21} + a_2 (\lambda^2 + c_{22}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.60})$$

Отсюда следует равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{III.61})$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^2 (c_{11} + c_{22}) + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0. \quad (\text{III.62})$$

Вместо того чтобы воспользоваться условиями (III.9), можно непосредственно проанализировать свойства корней

$$\lambda_{1, 2, 3, 4} = \pm \sqrt{-\frac{c_{11} + c_{22}}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}. \quad (\text{III.63})$$

Если разность $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ — отрицательная, то один из корней, соответствующий двум знакам плюс в формуле (III.63), оказывается вещественным и положительным; отвечающее этому корню движение согласно (III.59) представляет собой апериодический монотонный уход системы от положения равновесия — дивергенцию.

Если же эта разность положительная и удовлетворяет неравенству

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2, \quad (\text{III.64})$$

то корни (III.63) оказываются комплексными:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta; \lambda_2 = \alpha - i\beta; \lambda_3 = -\alpha + i\beta; \lambda_4 = -\alpha - i\beta, \quad (\text{III.65})$$

где α и β — положительные и вещественные значения. Первой паре этих корней соответствует движение, описываемое уравнениями

$$y = a_{11}e^{\lambda_1 t} + a_{12}e^{\lambda_2 t} = B_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma_1); \quad (\text{III.66})$$

$$\varphi = a_{21}e^{\lambda_1 t} + a_{22}e^{\lambda_2 t} = B_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma_2), \quad (\text{III.67})$$

т. е. колебания с монотонно возрастающими амплитудами — флаттер. Отсюда заключаем, что в случаях, когда выполняется неравенство (III.64), состояние равновесия также неустойчиво.

Таким образом, для того чтобы рассматриваемая система после возмущения оставалась в окрестности положения равновесия (что и принимается здесь за признак устойчивости), необходимо, чтобы разность $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ удовлетворяла двум неравенствам:

$$0 < c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} < \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2. \quad (\text{III.68})$$

При нарушении первого неравенства возникает дивергенция (рис. III.24, а), а при нарушении второго неравенства — флаттер (рис. III.24, б).

Если вести исследование устойчивости системы по методу Эйлера, то нужно искать, при каких условиях наряду с невозмущенным состоянием равновесия существует смежное состояние равновесия, характеризующееся отличными от нуля значениями y

и φ . При этом система (III.57), в которой теперь нужно положить $\ddot{y} = 0$ и $\ddot{\varphi} = 0$, приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} c_{11}y + c_{12}\varphi &= 0; \\ c_{21}y + c_{22}\varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда следует, что для существования отклоненного состояния равновесия должен равняться нулю определитель

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, получится правильный ответ для критической скорости дивергенции, но опасность флаттера останется невыяв-

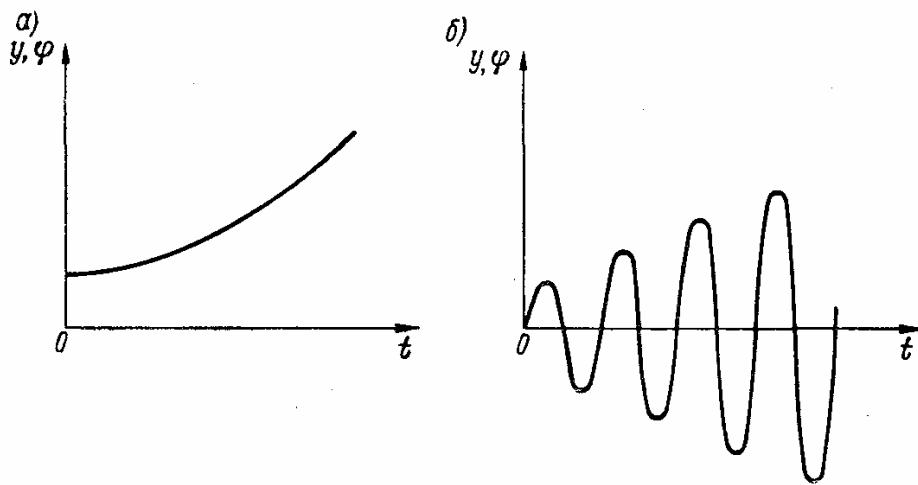


Рис. III.24

ленной. На этом примере можно видеть ограниченность и неполноту результатов, которые дает исследование устойчивости по методу Эйлера.

Вернемся к (III.68). Границы области устойчивости получим, заменив знаки неравенств в (III.68) на знаки равенств. Если затем подставить в (III.68) выражения (III.58), то можно найти два критических значения скорости, которая служит параметром, определяющим устойчивость:

1) критическая скорость дивергенции

$$v_d = \sqrt{\frac{2c_1c_2l}{\rho k_y [c_1(b-l) + c_2b]}}; \quad (\text{III.69})$$

2) критическая скорость флаттера

$$v_f = 2 \sqrt{\frac{1}{3\rho k_y} \cdot \frac{c_1^2 - c_1c_2 + c_2^2}{c_1 - c_2}}. \quad (\text{III.70})$$

Отметим, что при малых жесткостях правой опоры, когда $c_2 < c_1(l-b)/b$, критическая скорость v_d оказывается мнимой, т. е. аperiodическая неустойчивость невозможна. Если, напротив,

жесткость левой опоры меньше жесткости правой опоры, то мнимым становится выражение критической скорости u_{ϕ} , т. е. невозможен флаттер.

В изложенном решении аэродинамические силы считались чисто позиционными, т. е. зависящими только от положения пластинки (от угла поворота φ). Более точное решение можно получить, если учесть, что эффективный угол атаки зависит также от вертикальной скорости движения центра пластинки. Тогда для подъемной силы получится вместо (III.55) следующее выражение:

$$Y = k_y \frac{\rho v^2}{2} l \left(\varphi - \frac{y}{v} \right). \quad (\text{III.71})$$

Уравнения окажутся несколько более сложными, но общий ход дальнейшего решения в основном остается прежним.

17. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ АППАРАТА НА ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКЕ

Одним из эффективных средств уменьшения сопротивления движения транспортных средств является использование воздушной подушки, представляющей собой слой воздуха повышенного по сравнению с атмосферой давления. Аппараты (в частности, суда) на воздушной подушке приобретают все большее распространение в современной технике. Ниже рассматривается про-

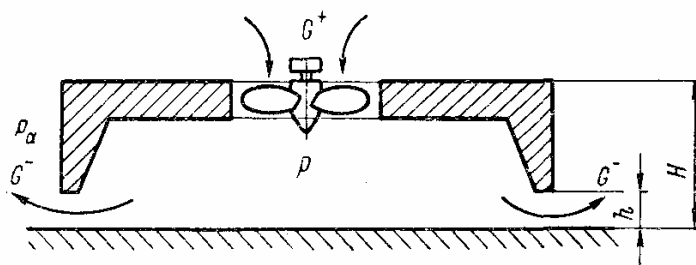


Рис. III.25

стейшая, так называемая камерная, схема такого парящего аппарата (рис. III.25). В этой схеме воздух нагнетается специальными вентиляторами в пространство под нижней поверхностью аппарата (подкупольный объем)

и затем выходит в атмосферу через щелевой зазор, расположенный внизу по периметру аппарата. Избыточное давление в подушке создает силу поддержания (подъемную силу), уравновешивающую вес аппарата. В зависимости от производительности вентиляторов возможно равновесное положение аппарата в достаточно широком диапазоне высот, но, как оказывается, не все эти положения устойчивы.

Рассмотрим возмущенное движение аппарата около равновесного положения, имея в виду только вертикальные поступательные перемещения. Введем следующие значения: p и $p_n = p - p_a$ — полное и избыточное давление воздуха в подушке (p_a — атмосферное давление); V — объем подушки (подкупольный объем); ρ — плотность воздуха в подушке; G^+ — массовый расход воз-

духа, подаваемого вентиляторами в подкупольный объем; G^- — массовый расход воздуха, вытекающего из подкупольного объема в атмосферу; h — высота щелевого зазора; H — средняя высота подкупольного объема. Значения этих величин для равновесного положения будем обозначать теми же буквами, но с дополнительным индексом 0. При этом $G_0^+ = G_0^-$ и верхний индекс можно вообще опустить. Далее можно записать

$$V = V_0 (1 - y/H); \quad h = h_0 (1 - y/h_0), \quad (\text{III.72})$$

где $y = h_0 - h$ — отклонение аппарата вниз от равновесного положения.

Связь между давлением в подкупольном объеме и плотностью воздуха примем в виде $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^n$, где n — показатель политропы, т. е.

$$\rho \approx \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{n p_0} \right), \quad (\text{III.73})$$

где Δp — отклонение давления от равновесного значения.

В основу дальнейших выкладок положим уравнение массообмена

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = G^+ - G^-. \quad (\text{III.74})$$

С помощью (III.72) и (III.73) и пренебрегая членами второго порядка малости, содержащими произведения $y\dot{\Delta p}$ и $\dot{y}\Delta p$, найдем для левой части (III.74)

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_0 V_0 \left(\frac{\Delta \dot{p}}{n p_0} - \frac{\dot{y}}{H} \right). \quad (\text{III.75})$$

Для слагаемых, входящих в правую часть, можно принять следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} G^+ &= G_0 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_{и0}} \right); \\ G^- &= G_0 \left(1 - \frac{y}{h_0} \right) \left(1 + \frac{\Delta p}{p_{и0}} \right)^{1/2} \approx G_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{2 p_{и0}} - \frac{y}{h_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.76})$$

Первое из этих выражений соответствует случаю неизменной мощности вентилятора. Второе выражение записано для условий изоэнтропийного истечения воздуха из подкупольного объема и учитывает изменение площади щелевого зазора при перемещениях аппарата.

Таким образом, вместо (III.74) имеем

$$\rho_0 V_0 \left(\frac{\Delta \dot{p}}{n p_0} - \frac{\dot{y}}{H} \right) = G_0 \left(\frac{y}{h_0} - \frac{3 \Delta p}{2 p_{и0}} \right). \quad (\text{III.77})$$

Введя обозначение $\theta = \rho_0 V_0 / G_0$, получим следующую связь между повышением давления Δp и перемещением аппарата y :

$$\frac{2 \theta p_{и0}}{3 n p_0} \Delta \dot{p} + \Delta p = \frac{2 \theta p_{и0}}{3 H} \dot{y} + \frac{2 p_{и0}}{3 h_0} y. \quad (\text{III.78})$$

Пусть F — площадь горизонтальной проекции подкупольного объема, тогда $P = F\Delta p$ есть приращение подъемной силы. При этом вместо (III.78) получим

$$a\ddot{P} + P = b\dot{y} + cy, \quad (\text{III.79})$$

где

$$a = \frac{2\theta p_{\text{ио}}}{3np_0}; \quad b = \frac{2\theta p_{\text{ио}}F}{3H} = \frac{2mg\theta}{3H}; \quad c = \frac{2p_{\text{ио}}F}{3h_0} = \frac{2mg}{3h_0} \quad (\text{III.80})$$

есть постоянные аппарата. Полезно отметить, что соотношение (III.79) аналогично соотношению (II.75), т. е. воздушная подушка обладает свойствами сложной вязко-упругой подвески.

При возмущенном движении аппарата нужно принять $m\ddot{y} = -P$. Здесь знаки соответствуют принятому выше правилу: положительное направление y — вниз, а положительное направление P — вверх.

Исключив с помощью этого соотношения из (III.79) силу P и ее производную $\dot{P}$, получим дифференциальное уравнение третьего порядка, подобное (II.84):

$$a\ddot{\ddot{y}} + \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{c}{m}y = 0. \quad (\text{III.81})$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + \frac{\lambda^2}{a} + \frac{b}{am}\lambda + \frac{c}{am} = 0. \quad (\text{III.82})$$

Для устойчивости аппарата необходимо, чтобы были удовлетворены условия Гурвица (III.8); в данном случае содержательным оказывается лишь последнее из них, остальные тождественно удовлетворяются, т. е. $b > ac$, или при учете (III.80) $\frac{3h_0np_0}{2H\rho_0} > 1$. Отсюда следует, что аппарат устойчив лишь при достаточно больших равновесных высотах парения, причем критическая высота парения равна $h_{\text{кр}} = \frac{2p_{\text{ио}}}{3np_0}H$. Так, если принять $p_{\text{ио}}/p_0 = 0,05$, $n = 1,4$, то $h_{\text{кр}} = 0,024H$.

Для устойчивости аппарата необходимо, чтобы эксплуатационная высота парения была больше критического значения. Разумеется, при выходе аппарата на эксплуатационный режим неизбежен переход через неустойчивую полосу значений высоты, но если это делается достаточно быстро, то неустойчивость в полной мере не успевает проявиться.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

18. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ БЕЗ НЕУПРУГИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Основное уравнение

Вернемся к простейшей системе, изображенной на рис. I.1, б, которая является как бы эталоном линейной системы с одной степенью свободы. В отличие от предыдущего будем рассматривать вынужденные колебания этой системы, т. е. колебания, вызываемые заданной возмущающей силой $P = P(t)$.

В любой момент процесса вынужденных колебаний на груз массы m действуют две силы: сила упругости пружины, пропорциональная смещению x груза, и возмущающая сила $P(t)$, изменяющаяся во времени по некоторому так или иначе заранее заданному закону (ниже будут исследованы наиболее важные частные случаи). При помощи схемы сил, изображенной на рис. IV.1, составляем дифференциальное уравнение движения груза



Рис. IV.1

$$P(t) - cx = m\ddot{x}, \quad (\text{IV.1})$$

где c — жесткость пружины.

Введя прежнее обозначение $p^2 = c/m$, перепишем уравнение (IV.1) в форме

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{P(t)}{m}, \quad (\text{IV.2})$$

которую и будем называть основной.

Конечно, уравнение (IV.2) представляет интерес не только в связи с простой схемой, показанной на рис. I.1, б. Дифференциальное уравнение колебаний любой механической системы с одной степенью свободы при отсутствии диссипативных сил также приводится к виду (IV.2).

В качестве простого примера рассмотрим задачу о колебаниях, вызываемых *единичным толчком*, т. е. внезапно прикладываемой

в момент времени $t = \tau$ и затем постоянно действующей силой $P = 1$ (рис. IV.2, а).

Для $t \geq \tau$ дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{1}{m}. \quad (\text{IV.3})$$

Решение уравнения должно удовлетворять начальным условиям (при $t = \tau$)

$$x = 0; \dot{x} = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Это решение представляет собой сумму, составленную из решения соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$x_1 = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt$$

и частного решения заданного дифференциального уравнения (IV.3)

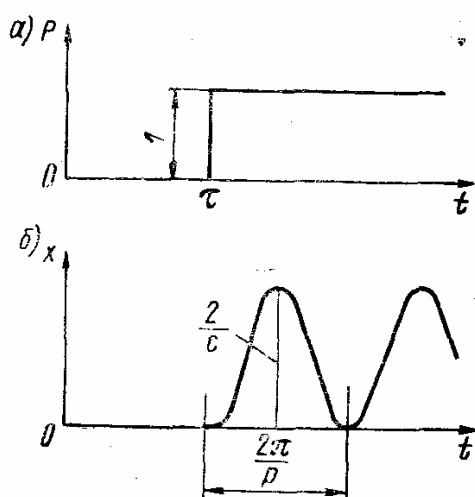


Рис. IV.2

$$x_2 = \frac{1}{mp^2} = \frac{1}{c},$$

т. е.

$$x = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt + \frac{1}{c}.$$

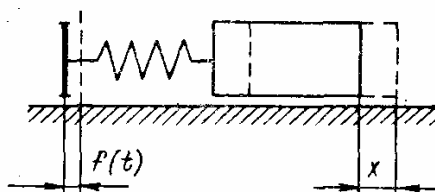


Рис. IV.3

Из условий (IV.4) определяем постоянные

$$C_1 = -\frac{\sin p\tau}{c}; \quad C_2 = -\frac{\cos p\tau}{c}$$

и находим

$$x = \frac{1 - \cos p(t - \tau)}{c}. \quad (\text{IV.5})$$

Полученный закон движения иллюстрирован на рис. IV.2, б. Как видно, наибольшее значение x составляет $x_{\max} = 2/c$, т. е. вдвое больше перемещения, вызываемого статически приложенной силой $P = 1$.

К той же форме (IV.2) можно привести задачу о вынужденных колебаниях, вызываемых кинематическим способом (т. е. при кинематическом возбуждении). Чтобы пояснить это, вновь рассмотрим ту же одномассовую систему, но предположим, что

причиной колебаний груза служат заданные колебания точки крепления пружины (рис. IV.3); положим, что закон движения этой точки задан в виде $f(t)$.

Рассмотрим сначала абсолютное движение груза и обозначим через x текущее значение его перемещения. Тогда удлинение пружины равно $x - f$ и, следовательно, на груз действует сила упругости пружины $-c(x - f)$. Соответственно дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$-c(x - f) = m\ddot{x},$$

или

$$\ddot{x} + p^2x = \frac{cf(t)}{m}.$$

Произведение $cf(t)$ можно рассматривать как *приведенную возмущающую силу*

$$P(t) = cf(t), \quad (\text{IV.6})$$

что вновь приводит к основной форме (IV.2).

В некоторых случаях (например, для расчета прочности пружины) представляет интерес не абсолютное, а относительное движение груза. Обозначим через x_* относительное перемещение груза в системе координат, связанной с левым концом пружины; тогда дифференциальное уравнение относительного движения запишется в виде

$$m\ddot{x}_* + cx_* = -m\ddot{f}$$

(где $-m\ddot{f}$ — переносная сила инерции груза) или также в форме (IV.2):

$$\ddot{x}_* + p^2x_* = -\ddot{f}.$$

Таким образом, при любом подходе к решению задачи кинематическое возбуждение может быть заменено некоторым эквивалентным силовым возбуждением.

Решение основного уравнения

Общее решение. Решение неоднородного уравнения (IV.2) следует искать в виде суммы решения соответствующего уравнения без правой части (т. е. уравнения свободных колебаний) и какого-либо частного решения заданного уравнения (IV.2). Вместо того чтобы в каждом конкретном случае подбирать частное решение, соответствующее заданному виду правой части, можно воспользоваться известным в теории линейных дифференциальных уравнений общим методом вариации произвольных постоянных.

Для того чтобы отчетливее выявить физическую сущность результатов, поступим по-иному и рассмотрим сначала свободные

колебания груза на упругой связи, вызываемые единичным мгновенным импульсом $S = 1$; пусть этот импульс прикладывается в мгновение τ .

Тогда при $t > \tau$ движение описывается выражением (II.3)

$$x = a \sin (pt + \alpha),$$

а скорость — выражением

$$v = \dot{x} = ap \cos (pt + \alpha).$$

Для определения постоянных a и α нужно использовать начальные условия, которые относятся к моменту исчезновения мгновенного импульса. В этот момент перемещение груза еще

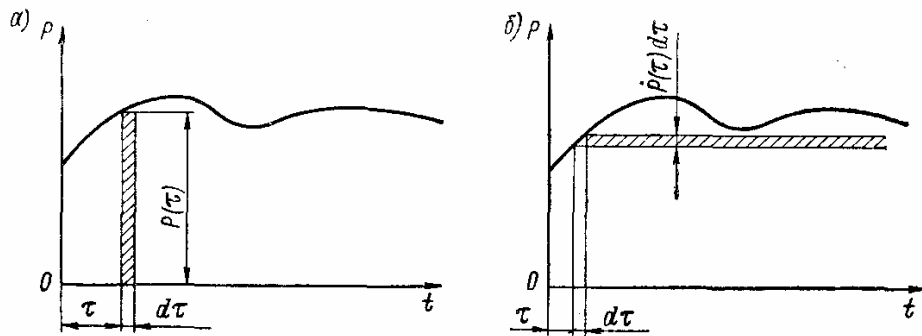


Рис. IV.4

отсутствует, т. е. $x(\tau) = 0$, а скорость согласно закону об изменении количества движения системы имеет конечное значение $v(\tau) = S/m$. Таким образом, начальные условия имеют вид:

$$0 = a \sin (p\tau + \alpha); \quad 1/m = ap \cos (p\tau + \alpha).$$

Отсюда находим

$$a = \frac{1}{mp}; \quad \alpha = -p\tau.$$

Следовательно, движение происходит по закону

$$x = \frac{1}{mp} \sin p(t - \tau). \quad (\text{IV.7})$$

Решив эту вспомогательную задачу, вернемся к случаю действия произвольной возмущающей силы и будем рассматривать ее как последовательность бесконечно малых импульсов $P(\tau) d\tau$ (рис. IV.4, а). От одного такого импульса перемещение в мгновение $t > \tau$ согласно формуле (IV.7) составит

$$\frac{P(\tau) d\tau}{mp} \sin p(t - \tau).$$

Перемещение, вызванное всей последовательностью импульсов, расположенных в интервале $(0, t)$, найдем при помощи интегрирования:

$$x = \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau. \quad (\text{IV.8})$$

Интегрирование ведется по переменной τ , и поэтому при вычислении интеграла, входящего в (IV.8), букву t следует считать постоянной; после подстановки пределов образуется зависимость перемещения x от времени t , что и представляет собой решение задачи, соответствующее начальным условиям $x_0 = 0, v_0 = 0$.

Подчеркнем, что использованное в процессе вывода формулы (IV.8) суммирование результатов справедливо ввиду линейности системы; подобный подход для нелинейной системы был бы необоснован.

В случае, когда система испытывает в мгновения $\tau_1, \tau_2, \dots$ серию мгновенных ударов* (их импульсы обозначим через $S_1, S_2, \dots$), интегрирование должно быть заменено суммированием, т. е.

$$y = \frac{1}{mp} \sum_{i=1}^n S_i \sin p(t - \tau_i),$$

где n — номер последнего импульса, предшествующего мгновению t .

Существует другой вариант записи общего решения, который можно получить, если представить заданную силу $P(\tau)$ в виде суммы бесконечной последовательности толчков (рис. IV.4, б).

Прежде всего выделим начальный толчок, соответствующий начальному значению силы $P(0)$. Его действие согласно выражению (IV.5) представляется в виде

$$x_1 = \frac{P(0) - P(0) \cos pt}{c}. \quad (\text{IV.9})$$

Дальнейший закон изменения заданной силы представим как последовательность бесконечно малых толчков $\dot{P}(\tau) d\tau$. Каждый из них вызывает движение, описываемое тем же выражением (IV.5), умноженным на значение толчка $\dot{P}(\tau) d\tau$, т. е.

$$\frac{\dot{P}(\tau)}{c} [1 - \cos p(t - \tau)] d\tau.$$

* Здесь речь идет о «безмассовых» ударах, импульсы которых наперед заданы и считаются не зависящими от движения самой системы.

Суммарное действие всей последовательности элементарных толчков определяется интегралом

$$\begin{aligned} x_2 &= \int_0^t \frac{\dot{P}(\tau)}{c} [1 - \cos p(t - \tau)] d\tau = \\ &= \frac{P(t) - P(0)}{c} - \frac{1}{c} \int_0^t \dot{P}(\tau) \cos p(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Сложив это выражение с (IV.9), окончательно получим

$$x = \frac{1}{c} \left[P(t) - P(0) \cos pt - \int_0^t \dot{P}(\tau) \cos p(t - \tau) d\tau \right]. \quad (\text{IV.10})$$

Случай кинематического возбуждения. Вернемся к случаю, показанному на рис. IV.3, когда вынужденные колебания являются результатом движения точки крепления упругой связи. Согласно соотношению (IV.6) при колебаниях этой точки по закону $f(t)$ груз колеблется так, как если бы на него действовала возмущающая сила $cf(t)$. Это соотношение позволяет записать основное решение (IV.8) в виде

$$x = p \int_0^t f(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau.$$

Аналогично вместо формулы (IV.10) получим при $f(0) = 0$

$$x = f(t) - \int_0^t \dot{f}(\tau) \cos p(t - \tau) d\tau. \quad (\text{IV.11})$$

Некоторые случаи непериодического возбуждения. С помощью общих решений (IV.8) и (IV.10) можно найти движение, вызываемое произвольно заданной возмущающей силой. Однако в случаях периодического возбуждения обычно пользуются другими способами получения общего решения (см. ниже), а выражения (IV.8) и (IV.10) применяют лишь к задачам о непериодическом возбуждении. Рассмотрим некоторые типичные задачи такого характера.

Действие линейно возрастающей силы (рис. IV.5, а). Если изменение силы задано законом $P = \beta t$ (β — коэффициент, характеризующий темп возрастания силы), то из (IV.10) найдем

$$x = \frac{\beta t}{c} - \frac{\beta}{cp} \sin pt. \quad (\text{IV.12})$$

Первое слагаемое полученного решения представляет собой статическое действие силы, а второе слагаемое — динамическую поправку к статическому решению. Перемещения возрастают по

сложному закону, представляющему собой сумму линейной функции и синусоиды (рис. IV.5, б).

Рассмотрим теперь случай, когда сила сначала возрастает, а затем, достигнув в момент t_* некоторого значения $P_* = \beta t_*$, остается неизменной (рис. IV.5, в). Такую силу можно представить в виде суммы двух сил P_1 и P_2 , графики которых показаны

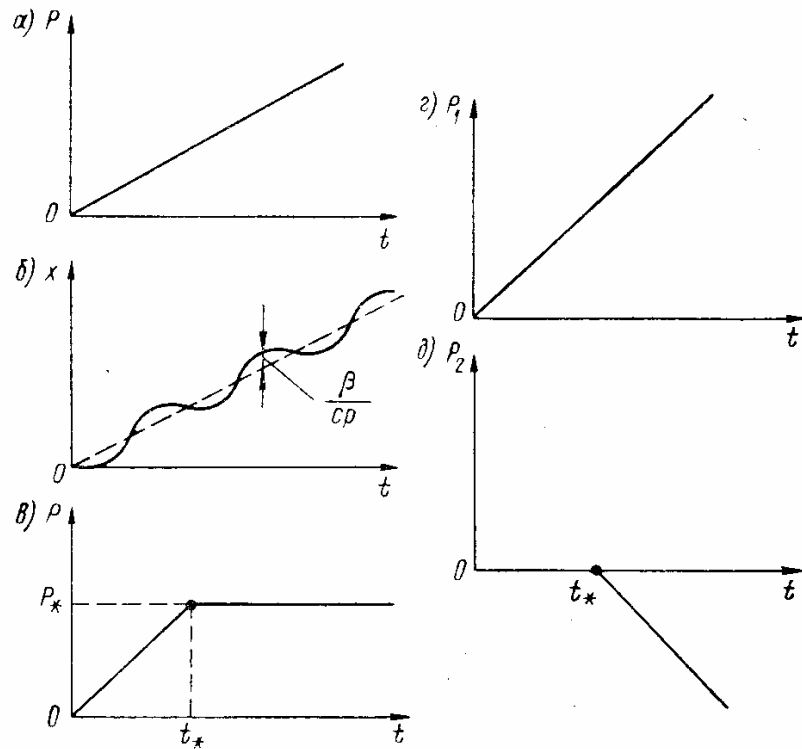


Рис. IV.5

на рис. IV.5, г и д. Действие первой силы P_1 определяется непосредственно по выражению (IV.12), т. е.

$$x_1 = \frac{\beta t}{c} - \frac{\beta}{cp} \sin pt.$$

Движение, вызываемое второй силой P_2 , также можно найти по выражению (IV.12), изменив знак результата и заменив t на $t - t_*$:

$$x_2 = - \left[\frac{\beta (t - t_*)}{c} - \frac{\beta}{cp} \sin p (t - t_*) \right].$$

При $t < t_*$ движение описывается функцией x_1 , а при $t > t_*$ — суммой функций x_1 и x_2 :

$$x = \frac{P_*}{c} - \frac{P_*}{cpt_*} [\sin pt - \sin p (t - t_*)].$$

Преобразуя выражение, входящее в квадратные скобки, получаем

$$x = \frac{P_*}{c} \left[1 - 2 \frac{\sin \frac{pt_*}{2}}{pt_*} \cos \left(pt - \frac{pt_*}{2} \right) \right]. \quad (\text{IV.13})$$

Здесь дробь P_*/c представляет собой перемещение, которое вызвала бы статически прикладываемая сила P_* . Из (IV.13) видно, что система продолжает совершать колебания и после того, как прекратилось изменение силы. Они описываются вторым слагаемым в квадратных скобках, причем его наибольшее значение составляет

$$2 \frac{\sin \frac{pt_*}{2}}{pt_*}. \quad \text{Сумма}$$

$$\mu = 1 + 2 \frac{\sin \frac{pt_*}{2}}{pt_*} \quad (\text{IV.14})$$

есть коэффициент динамичности в рассматриваемом случае. Значения μ лежат в интервале 1—2 и зависят от характерного произведения pt_* , отражающего как собственные свойства системы, так и быстроту возрастания силы. При весьма быстром возрастании силы, когда величина t_* (а вместе с этим и величина pt_*) мала, коэффициент динамичности близок к значению 2, что соответствует и полученному выше выражению (IV.5). При весьма медленном возрастании силы коэффициент динамичности близок к единице, так как значение pt_* велико и второе слагаемое в выражении (IV.14) мало.

При решении статических задач обычно оговаривают, что нагрузка возрастает весьма медленно. С помощью выражения (IV.14) можно дать количественную оценку достаточной медленности возрастания нагрузки. Примем, например, что если $\mu < 1,05$, то такое нагружение допустимо практически считать статическим. Из (IV.14) можно найти, что это условие выполняется, когда $pt_* > 40$; это означает, что длительность возрастания нагрузки должна быть, по крайней мере, в шесть раз (приблизительно) большей, чем период свободных колебаний системы.

Из полученных решений (IV.5) и (IV.13) следует, что колебания, вызываемые рассмотренными типами сил, продолжаются неограниченно долго. Конечно, это результат того, что в решении не были учтены силы трения. При учете таких сил выясняется, что в названных случаях колебания постепенно затухают, однако это практически не влияет на полученные выражения для коэффициентов динамичности, поскольку в начале процесса трение не успевает заметно повлиять на отклонения системы.

А. Н. Крылов дал оценку динамической поправки для более общего случая возмущающей силы, когда $P(0) = 0$ и кривая $P(t)$ имеет один максимум (рис. IV.6). Обозначив максимальное значение $\dot{P}(t)$ через $\dot{P}_{\max}$, получим

$$\left| - \int_0^t \dot{P}(\tau) \cos p(t - \tau) d\tau \right| < \frac{\dot{P}_{\max} T}{2}.$$

Произведение $\dot{P}_{\max} T/2$ — максимально возможное приращение возмущающей силы за промежуток времени, равный полупериоду

свободных колебаний. Отношение этого произведения к максимальному значению силы определяет максимум возможной относительной динамической поправки $\dot{P}_{\max} T / (2P_{\max})$. Отсюда также видно, что если период свободных колебаний мал по сравнению с продолжительностью возрастания силы, она может считаться медленно изменяющейся, а ее действие можно рассчитывать без учета динамичности, т. е. считать силу приложенной статически.

Действие быстро исчезающих сил. Обратимся теперь к случаям, когда возмущающая сила действует в течение весьма короткого промежутка времени. Как будет показано, даже весьма значитель-

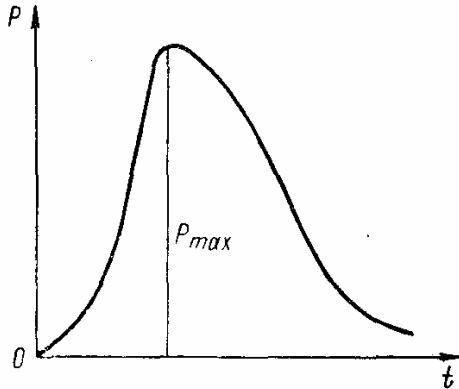


Рис. IV.6

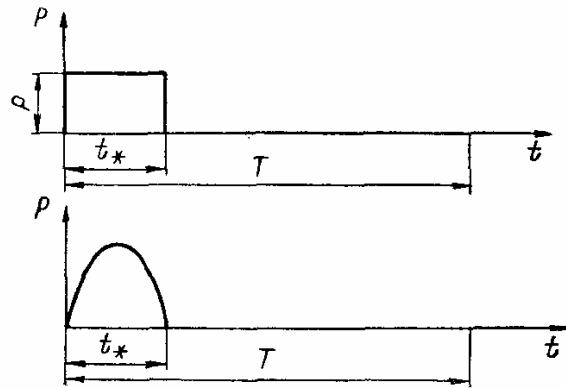


Рис. IV.7

ная нагрузка может оказаться безопасной, если длительность ее действия мала сравнительно с периодом T свободных колебаний системы.

Рассмотрим действие силы P , которая внезапно прикладывается в мгновение $t = 0$, остается постоянной в течение некоторого времени t_* , а затем так же внезапно исчезает (рис. IV.7). Можно показать, что если $t_* < T/2$, то максимальное отклонение системы достигается после исчезновения силы. В таком случае для $t > t_*$ согласно решению (IV.8) имеем

$$x = \frac{P}{mp} \int_0^{t_*} \sin p(t - \tau) d\tau = \frac{2P}{c} \sin \frac{pt_*}{2} \sin \left(t - \frac{t_*}{2} \right). \quad (\text{IV.15})$$

Обозначим отношение промежутка времени t_* к периоду свободных колебаний T через α , тогда

$$\frac{pt_*}{2} = \frac{\pi t_*}{T} = \pi \alpha.$$

Максимальное отклонение соответственно выражению (IV.15)

$$x_{\max} = 2x_{\text{ст}} \sin \pi \alpha.$$

Следовательно, коэффициент динамичности

$$\mu = \frac{x_{\max}}{x_{\text{ст}}} = 2 \sin \pi \alpha$$

имеет следующие значения:

α	0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,15	0,25	0,5
μ	0	0,062	0,126	0,188	0,313	0,618	0,908	1,413	2,000

Отсюда видно, что $\mu < 1$ при $\alpha < 1/6$; если сила действует в течение весьма малой доли периода свободных колебаний, то эффект такой кратковременной силы во много раз меньше статического. Аналогичный вывод можно сделать в случае, когда возмущающая

сила в интервале t_* изменяется по иному закону.

Покажем, что действие любой кратковременной силы приближенно может быть оценено ее импульсом. Для $t > t_*$ имеем решение в виде

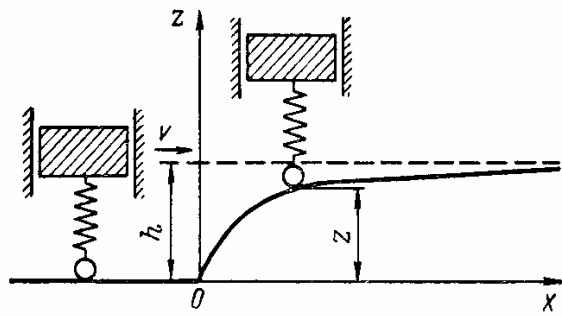


Рис. IV.8

$$x = \frac{1}{mp} \int_0^{t_*} P(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau,$$

или

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{mp} \left[\sin pt \int_0^{t_*} P(\tau) \cos p\tau d\tau - \cos pt \int_0^{t_*} P(\tau) \sin p\tau d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{mp} \left[\sin pt \int_0^{t_*} P(\tau) \cos \frac{2\pi\tau}{T} d\tau - \cos pt \int_0^{t_*} P(\tau) \sin \frac{2\pi\tau}{T} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Но так как отношение τ/T меньше отношения t_*/T , то τ/T есть малое число. В таком случае можно приближенно записать

$$x \approx \frac{\sin pt}{mp} \int_0^{t_*} P(\tau) d\tau.$$

Входящий сюда интеграл есть импульс силы $P(t)$; обозначая его через S , получим

$$x \approx \frac{S}{mp} \sin pt.$$

Как видно, движение системы определяется величиной импульса, а подробности изменения силы за промежутки времени t_* неважны.

Колебания подрессоренного груза при движении по неровной дороге (рис. IV.8). Примем, что профиль дороги задан уравнением

$$z = h(1 - e^{-\gamma x}),$$

где h — предел, к которому стремится высота профиля; γ — параметр, характеризующий кривизну профиля.

Обозначим буквой G вес груза, буквой v — горизонтальную скорость его движения и примем начало отсчета времени в мгновение, когда опорная точка проходит начало неровности. Тогда $x = vt$ и движение опорной точки по вертикали определится законом

$$f(t) = h(1 - e^{-\gamma vt}).$$

Дифференцируя, находим

$$\dot{f}(t) = \gamma v h e^{-\gamma vt}.$$

Пользуясь формулой (IV.11), получим закон движения груза по вертикали:

$$z = f(t) - \int_0^t \gamma v h e^{-\gamma v \tau} \cos p(t - \tau) d\tau.$$

Так как важно не абсолютное изменение положения груза, а его колебания относительно опорной точки, то рассмотрим разность, определяющую дополнительную деформацию пружины:

$$z_* = z(t) - f(t) = - \int_0^t \gamma v h e^{-\gamma v \tau} \cos p(t - \tau) d\tau.$$

Интегрируя, находим

$$z_* = h \cos^2 \alpha \left[e^{-\gamma vt} + \frac{\sin(pt - \alpha)}{\sin \alpha} \right],$$

где α определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{\gamma v}.$$

Отсюда видно, что при весьма малой скорости $\alpha \rightarrow \pi/2$; $z - f \rightarrow 0$. Наоборот, при весьма большой скорости (а также при весьма большом значении параметра γ) $\alpha \rightarrow 0$ и колебания приближенно описываются законом

$$z_* = h(e^{-\gamma vt} - \cos pt).$$

Дальнейший анализ позволит найти максимальное значение разности z_* , ускорения и т. д.

Действие гармонической силы. Случай, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону

$$P = P_0 \sin \omega t \quad (\text{IV.16})$$

(P_0 — амплитуда силы; ω — ее частота), является одним из наиболее частых в расчетной практике.

Описание колебательного процесса, вызываемого такой силой, при нулевых начальных условиях можно получить при помощи формулы (IV.8):

$$x = \frac{P_0}{mp} \int_0^t \sin \omega \tau \sin p(t - \tau) d\tau. \quad (\text{IV.17})$$

Вычислив интеграл, найдем (при $\omega \neq p$)

$$x = \frac{P_0}{m(p^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right). \quad (\text{IV.18})$$

Заменив $mp^2 = c$ и обозначив далее $P_0/c = x_{\text{ст}}$ (прогиб, вызываемый статически приложенной постоянной силой P_0), получим

$$x = \frac{x_{\text{ст}}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right). \quad (\text{IV.19})$$

Рассматривая решение (IV.19), замечаем, что при нулевых начальных условиях возникают сложные колебания, состоящие из двух частей: колебаний, происходящих с частотой ω возмущающей силы (первое слагаемое), и колебаний, происходящих с собственной частотой p (второе слагаемое) *.

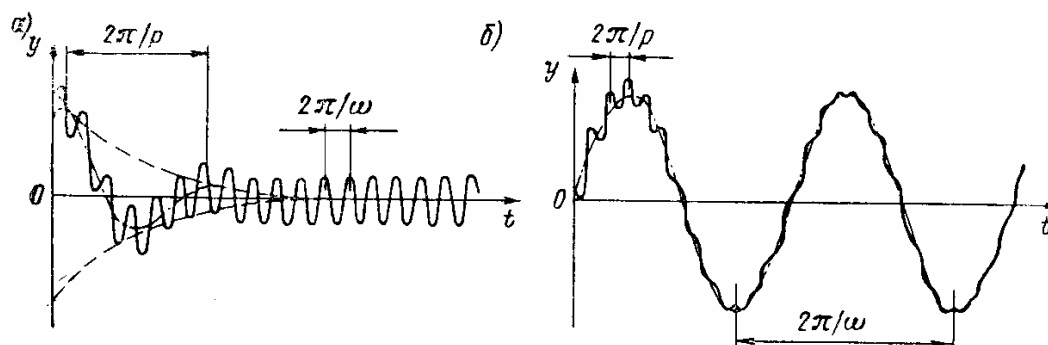


Рис. IV.9

Отметим, что допущенное при выводе (IV.19) пренебрежение силами трения скрывает важный факт: второе слагаемое с течением времени в действительности затухает, тогда как первое сохраняет постоянную амплитуду. Если учесть это влияние трения, то результирующий процесс вынужденных колебаний будет происходить так, как это показано на рис. IV.9. Рис. IV.9, а относится к случаю, когда $\omega > p$, а рис. IV.9, б — к случаю, когда $\omega < p$. Для обоих случаев характерно быстрое исчезновение сопровождающих сво-

* Иногда первые колебания называют вынужденными, а вторые — свободными. Следует иметь в виду условность применения второго термина в данном случае. Дело в том, что и вторые колебания вызваны заданной возмущающей силой и что их амплитуда зависит от той же силы; в этом смысле вторые колебания также можно признать вынужденными. Для того чтобы избежать смешения понятий, эти колебания иногда называют *сопровождающими свободными*.

бодных колебаний. Поэтому часто ограничиваются изучением *стационарной, незатухающей* части решения (IV.19)

$$x = \frac{x_{\text{ст}}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \sin \omega t. \quad (\text{IV.20})$$

Как видно, вынужденные колебания совершаются с частотой возмущающей силы, которая как бы подчиняет движение системы характеру своего изменения. Амплитуда вынужденных колебаний

$$a = \frac{x_{\text{ст}}}{\left| 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \right|} \quad (\text{IV.21})$$

отличается от перемещения $x_{\text{ст}}$, соответствующего статическому действию силы P_0 . Данная в выражении (IV.21) зависимость амплитуды колебаний a от частоты возмущающей силы называется *амплитудно-частотной характеристикой* системы.

Отношение $a/x_{\text{ст}}$ можно назвать *коэффициентом динамичности*; он равен

$$\mu = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \right|} \quad (\text{IV.22})$$

и зависит только от отношения частот ω/p . Кривая зависимости коэффициента μ от ω/p приведена на рис. IV.10.

При малой частоте возмущающей силы коэффициент динамичности близок к единице. С ростом частоты ω он быстро увеличивается и при $\omega = p$ обращается в бесконечность. Это соответствует состоянию резонанса, когда амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности.

Если $\omega > p$, то амплитуды снова оказываются конечными; при $\omega/p > \sqrt{2}$ динамический коэффициент становится меньше единицы, т. е. динамический эффект слабее соответствующего статического эффекта. При очень больших значениях отношения ω/p динамический коэффициент становится весьма малым. Это означает, что сила высокой частоты не вызывает ощутимых колебаний в низкочастотной упругой системе, последняя как бы не успевает отзываться на весьма быстрые изменения возмущающей силы.

Несколько подробнее остановимся на случае совпадения частот $\omega = p$ (*резонанс*). При этом интеграл (IV.17) приобретает вид

$$x = \frac{P_0}{mp} \int_0^t \sin p\tau \sin p(t - \tau) d\tau.$$

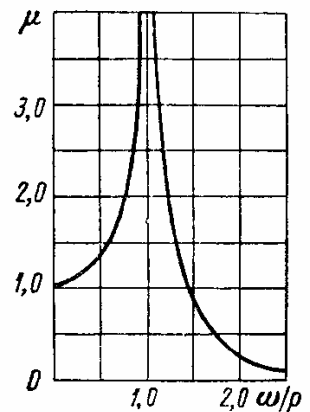


Рис. IV.10

После вычисления получим

$$x = x_{\text{ст}} (\sin pt - pt \cos pt).$$

График движения показан на рис. IV.11. Как видно, при совпадении частот пиковые значения возрастают по линейному закону и за конечный промежуток времени не обращаются в бесконечность. Из этого вытекает принципиальная возможность перехода через резонанс в процессе разгона машин: равенство $\omega = p$ выполняется лишь одно мгновение и пиковые значения отклонения могут не достигнуть опасных величин. Впрочем, это особая задача и мы обратимся к ней ниже.

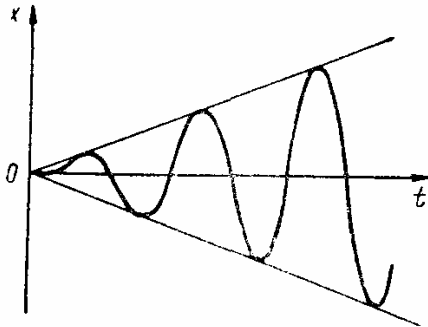


Рис. IV.11

Пример 18. Посередине двухопорной свободно опертой балки пролетом 5 м установлен неуравновешенный двигатель весом 4 тс с $n = 800$ об/мин. Определить динамический коэффициент, если балка стальная, прокатная, двутаврового сечения № 30а ($J = 8950 \text{ см}^4$).

Находим собственную частоту системы, принимая $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2$ и не учитывая относительно малую массу самой балки:

$$p = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 8950 \cdot 981}{4000 \cdot 500^3}} = 42,1 \text{ с}^{-1}.$$

Частота возмущающей силы

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 800}{300} = 83,8 \text{ с}^{-1}.$$

Динамический коэффициент

$$\mu = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{83,8^2}{42,1^2} \right|} = 0,338$$

оказывается значительно меньшим единицы. Отметим, что замена этой балки более жесткой может ухудшить, а не улучшить условия работы конструкции. Так, например, замена двутавра № 30а двутавром № 45а ($J = 35\,280 \text{ см}^4$) приводит к повышению собственной частоты до значения $83,7 \text{ с}^{-1}$, причем динамический коэффициент, подсчитываемый по формуле (IV.22), увеличится в сотни раз.

Пример 19. Определить динамические напряжения в среднем сечении балки, рассмотренной в примере 18, если центробежная сила, развиваемая двигателем, составляет 1000 кгс.

Изгибающий момент, вызываемый статической нагрузкой,

$$M_{\text{ст}} = \frac{Pl}{4} = \frac{4000 \cdot 500}{4} = 500\,000 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Наибольший изгибающий момент, вызываемый динамической нагрузкой,

$$M_{\text{дин}} = 0,338 \frac{1000 \cdot 500}{4} = 42\,200 \text{ кгс} \cdot \text{см}.$$

Полный изгибающий момент

$$M = 500\,000 + 42\,200 = 542\,200 \text{ кгс}\cdot\text{см.}$$

Напряжение изгиба

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{542\,200}{597} = 907 \text{ кгс/см}^2.$$

Пример 20. Двигатель весом 2,4 тс установлен на десяти одинаковых пружинах диаметром $D = 12$ см. Диаметр сечения витка пружины $d = 3$ см; модуль сдвига материала пружины $G = 0,8 \cdot 10^6$ кгс/см², $n = 800$ об/мин. Определить число витков пружины, необходимое для того, чтобы динамический коэффициент установки был равен 0,2.

Из условия

$$\frac{1}{\left| 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \right|} = 0,2$$

находим

$$\omega/p = 2,45.$$

Так как

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 800}{30} = 83,8 \text{ с}^{-1},$$

то необходимое значение собственной частоты

$$p = \frac{83,8}{2,45} = 34,2 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$\sqrt{c/m} = 34,2 \text{ с}^{-1}.$$

Подставляя сюда $m = 2400/981 = 2,44$ кгс·с²/см, находим необходимую жесткость всех пружин

$$c = 34,2^2 \cdot 2,44 = 2850 \text{ кгс/см.}$$

Коэффициент жесткости одной пружины

$$c_1 = 2850/10 = 285 \text{ кгс/см.}$$

Пользуясь табл. 1, находим

$$c_1 = \frac{Gd^4}{8D^3n} = 285 \text{ кгс}\cdot\text{см},$$

т. е.

$$\frac{0,8 \cdot 10^6 \cdot 3^4}{8 \cdot 12^3 \cdot n} = 285,$$

отсюда $n = 16,5$.

Следует принять, по крайней мере, 17 витков, так как увеличение числа витков снижает жесткость системы и уменьшает динамический коэффициент. Если принять $n < 16,5$, то динамический коэффициент окажется большим, чем задано в условии.

Выше считалось, что амплитудное значение возмущающей силы не связано с ее частотой. Однако чаще бывает обратное; например,

при вращении неуравновешенного ротора на опоры передается возмущающая сила

$$P = m_0 \omega^2 e \sin \omega t,$$

где m_0 — масса ротора; e — ее эксцентриситет; ω — угловая скорость.

В данном случае амплитуда возмущающей силы $m_0 \omega^2 e$ пропорциональна квадрату частоты ω^2 и вместо решения (IV.18) следует принимать (при $\omega \neq p$)

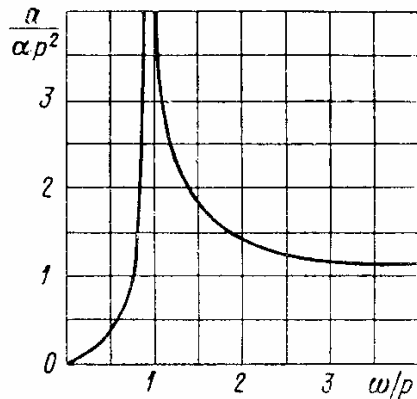


Рис. IV.12

$$x = \frac{m_0 e \omega^2}{m(p^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right).$$

Амплитуда стационарных колебаний при этом определяется выражением

$$a = \frac{\alpha p^2}{\left| \frac{p^2}{\omega^2} - 1 \right|},$$

в котором параметр системы $\alpha = m_0 e / m$ не зависит от частоты ω .

На рис. IV.12 представлено изменение амплитуды колебаний в зависимости от отношения ω/p . Как видно, при $\omega = p$ имеет место резонанс, а при $\omega \gg p$ амплитуда стремится к значению αp^2 .

Рассмотрим теперь случай кинематического возмущения. Согласно сказанному выше амплитуда эквивалентной возмущающей силы вычисляется путем умножения амплитуды возмущающего колебания на коэффициент жесткости связи. Так, если амплитуда гармонических колебаний основания равна A , то амплитуда эквивалентной возмущающей силы составляет $P_0 = cA$. Соответственно $x_{ст} = P_0/c = A$.

Согласно формуле (IV.21) амплитуда колебаний системы равна

$$a = \frac{A}{\left| 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \right|}. \quad (IV.23)$$

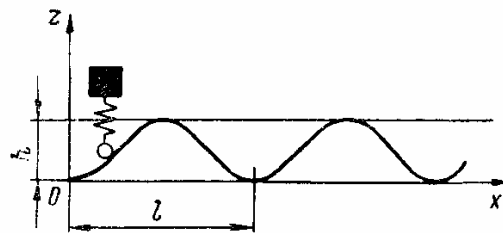


Рис. IV.13

Пример 21. Определить скорость движения автомобиля, при которой наступает резонанс задней подвески. Профиль дороги описывается законом (рис. IV.13)

$$x = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right),$$

где h — глубина впадины; l — длина одной волны (принять $l = 7$ м).

Статическая нагрузка на заднюю рессору $G = 715$ кгс, жесткость рессоры $c = 2250$ кгс/м. При расчете считать колебания задней части автомобиля не зависящими от колебаний передней части и не учитывать упругости шин.

Находим собственную частоту

$$\rho = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{2250 \cdot 9,81}{715}} = 5,56 \text{ с}^{-1}.$$

Вертикальные колебания колеса описываются законом

$$f = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{7} \right);$$

их частота

$$\omega = \frac{2\pi v}{7} \text{ с}^{-1}.$$

Приравнивая эту величину собственной частоте, находим резонансную скорость

$$v = \frac{5,56 \cdot 7}{2 \cdot 3,14} = 6,2 \text{ м/с}.$$

При дальнейшем увеличении скорости движения коэффициент динамичности быстро уменьшается. Например, при $v = 25 \text{ м/с}$

$$\mu = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{2\pi \cdot 25}{7 \cdot 5,56} \right)^2 \right|} = 0,066,$$

т. е. амплитуда колебаний кузова составит всего 6,6% от половины глубины впадины.

В связи с примером 21 остановимся на вопросе о плавности движения автомобиля.

На первый взгляд, естественным критерием плавности движения является вертикальное ускорение. Однако при колебаниях кузова по закону $x_1 = a_1 \sin \omega_1 t$ и по закону $x_2 = a_2 \sin \omega_2 t$ физиологические ощущения могут быть разными даже при совпадении наибольших ускорений: $a_1 \omega_1^2 = a_2 \omega_2^2$.

Дело, оказывается, не только в величине наибольшего ускорения, но и в том темпе, с которым происходят изменения ускорения. При данном максимальном ускорении более неприятны колебания с быстрым изменением ускорения, т. е. с большей частотой. Поэтому иногда полагают, что мерой плавности движения следует считать произведение максимального ускорения на частоту колебаний $a\omega^3$. Эта величина представляет собой максимальное значение третьей производной $\ddot{x}_{\max}$ и иногда называется резкостью.

По некоторым экспериментам за меру комфортабельности езды следует принимать величину $a\omega^{2,7}$, близкую к третьей производной. В вагоностроении принято оценивать плавность движения вагона величиной $a^3\omega^5$, что эквивалентно оценке $a\omega^{1,67}$.

Действие двух гармонических сил с близкими частотами; биения. Если система с одной степенью свободы испытывает действие двух различных гармонических возмущающих сил, то вследствие ее линейности суммарный эффект может быть определен путем сложения эффектов, вызываемых каждой из сил. Так, возму-

щающая сила вида $P = P_1 \sin \omega_1 t + P_2 \sin \omega_2 t$ вызовет сложные колебания

$$x = a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t. \quad (\text{IV.24})$$

Если частоты ω_1 и ω_2 близки одна к другой, то суммарное движение принимает своеобразный характер и называется биениями (рис. IV.14, а). Особенностью биений является периодическое изменение пиковых значений. Для анализа этого явления преобразуем сначала решение (IV.24) следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t = \frac{a_1 + a_2}{2} [\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t] + \\ &+ \frac{a_1 - a_2}{2} [\sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t] = (a_1 + a_2) \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \\ &+ (a_1 - a_2) \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \end{aligned}$$

Обозначив

$$b_1 = (a_1 + a_2) \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t; \quad b_2 = (a_1 - a_2) \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t,$$

напишем предыдущую формулу в виде

$$x = b_1 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + b_2 \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t,$$

или

$$x = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right),$$

где $\operatorname{tg} \alpha = b_1/b_2$.

Подчеркнем, что ввиду близости ω_1 и ω_2 величины b_1 , b_2 и α меняются медленно. Таким образом, движение можно описать выражением

$$x = a \sin (\omega t + \alpha),$$

где $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ — среднее значение частоты; $a = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ — медленно меняющаяся амплитуда колебаний; α — медленно меняющаяся фаза.

Итак, движение носит почти синусоидальный характер, причем амплитуда колебаний a есть медленно меняющаяся функция времени. Период изменения амплитуды (период биений) составляет

$$T_a = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2).$$

Так как разность $\omega_1 - \omega_2$ мала, то период T_a значительно больше периода колебаний

$$T = 2\pi/(\omega_1 + \omega_2).$$

Кстати, отметим, что биения могут возникнуть и при действии одной возмущающей силы $P_0 \sin \omega t$ вблизи резонанса, когда частота ω близка к соответственной частоте p . Из решения (IV.18) видно, что в данном случае колебания состоят из двух гармоник с близкими частотами ω и p . Преобразования, подобные выполненным выше, приводят к выводу, что и здесь суммарные колебания носят синусоидальный характер с переменной амплитудой. Однако в данном случае этот процесс не является установившимся; сопровождающие свободные колебания вследствие затухания постепенно исчезают, остаются только вынужденные колебания, и биения прекращаются (рис. IV.14, б).

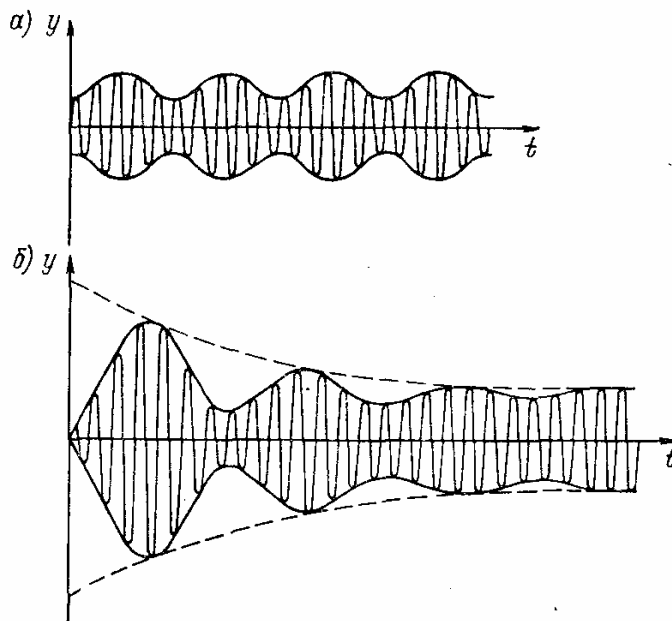


Рис. IV.14

Действие произвольной периодической возмущающей силы (способ разложения на гармонические составляющие). В практических приложениях часто встречаются периодические возмущающие силы более сложного характера, чем рассмотренные выше. Так, на рис. IV.15, а показан закон изменения крутящего момента, создаваемого четырехтактным двигателем внутреннего сгорания. Другой пример (периодические «безмассовые» удары) показан на рис. IV.15, б.

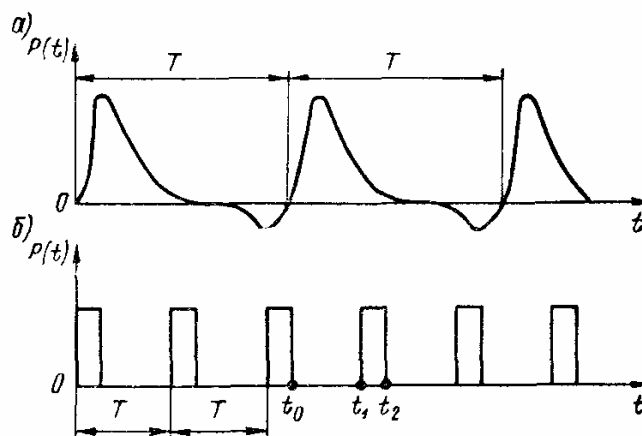


Рис. IV.15

Силы (моменты) рассматриваемого вида имеют четко выраженный период колебаний T , но не описываются единым аналитическим выражением. В подобных случаях чаще всего пользуются разложением периодической силы в ряд Фурье. При этом сила представляется в виде суммы гармонических составляющих, а затем определяется эффект, вызываемый каждой из составляющих; после этого полученные частные эффекты суммируются.

Периодическую силу $P(t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots \\ \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots,$$

где $\omega = 2\pi/T$ — основная частота возбуждения.

Коэффициенты a и b вычисляются при помощи известных из теории рядов Фурье формул:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt; \\ a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos \omega t dt; \quad b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin \omega t dt; \\ a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos 2\omega t dt; \quad b_2 = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin 2\omega t dt; \\ \dots$$

Пользуясь решением (IV.20), полученным для одной гармоники, найдем

$$x = \frac{a_0}{c} + \frac{a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t}{c \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)} + \frac{a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t}{c \left[1 - \left(\frac{2\omega}{p}\right)^2\right]} + \dots \quad (\text{IV.25})$$

Это решение состоит из постоянного слагаемого a_0/c , соответствующего среднему значению возмущающей силы, и ряда гармонических колебаний с частотами $\omega, 2\omega, \dots$. Если собственная частота совпадает с частотой какой-либо одной гармоники $n\omega$ ($n = 1, 2, \dots$), то соответствующее слагаемое в формуле (IV.25) становится неограниченным. Следовательно, в общем случае периодической возмущающей силы резонанс наступает не только когда собственная частота p равна основной частоте возмущающей силы ω , но и когда p кратно ω . В частных случаях в формуле (IV.25) отсутствуют некоторые слагаемые и резонанс наступает не при любой кратности.

Рассмотренный способ отчетливо выявляет, при каких условиях возникает резонанс. Недостатком этого способа является относительная сложность вычислений, необходимых для учета весьма большого числа слагаемых в выражении (IV.25). Так, возмущающую силу, показанную на рис. IV.15, а, для достаточной точности приходится заменять примерно десятью гармониками.

Действие периодических импульсов (замкнутая форма решения). Исследуем действие периодических импульсов (рис. IV.15, б), считая длительность каждого из них исчезающе малой. Для решения этой задачи, конечно, можно воспользоваться выражением

(IV.25). Однако в данном случае гораздо удобнее замкнутая форма решения, не содержащая бесконечных сумм.

Рассмотрим какой-либо один из периодов T , принимая начало отсчета времени в конце действия предшествующего импульса (например, в мгновение t_0 на рис. IV.15, б). Обозначим перемещение и скорость в начальный момент времени соответственно через x_0 и v_0 .

До приложения следующего импульса колебания являются свободными и происходят с собственной частотой p , т. е. описываются уравнением

$$x = x_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt, \quad (\text{IV.26})$$

и, следовательно,

$$v = \dot{x} = -px_0 \sin pt + v_0 \cos pt.$$

В конце этого интервала, непосредственно перед следующим импульсом (мгновение t_1), получим

$$x_1 = x_0 \cos pT + \frac{v_0}{p} \sin pT; \quad v_1 = -px_0 \sin pT + v_0 \cos pT.$$

В результате действия очередного импульса скорость мгновенно изменится на величину S/m (где S — значение импульса). Поэтому непосредственно после следующего импульса (мгновение t_2)

$$x_2 = x_1 = x_0 \cos pT + \frac{v_0}{p} \sin pT;$$

$$v_2 = v_1 + \frac{S}{m} = -px_0 \sin pT + v_0 \cos pT + \frac{S}{m}.$$

Будем считать, что рассматриваемому периоду предшествует бесконечно длинная серия импульсов. В таком случае периодические импульсы вызывают также периодическое движение с тем же периодом. Поэтому величины x_2 и v_2 должны быть соответственно равны x_0 и v_0 :

$$x_0 = x_0 \cos pT + \frac{v_0}{p} \sin pT;$$

$$v_0 = -px_0 \sin pT + v_0 \cos pT + \frac{S}{m}.$$

В этих уравнениях содержатся две неизвестные величины, а именно x_0 и v_0 . Решая уравнения, находим

$$x_0 = \frac{S}{2mp} \operatorname{ctg} \frac{pT}{2}; \quad v_0 = \frac{S}{2m}.$$

После замены $T = 2\pi/\omega$ закон движения (IV.26) принимает вид

$$x = \frac{S}{2mp} \left(\sin pt + \cos pt \operatorname{ctg} \frac{\pi p}{\omega} \right). \quad (\text{IV.27})$$

Полученным результатом можно пользоваться лишь в интервале времени $0, T$. В других интервалах закон движения полностью повторяется с соответствующим смещением начала отсчета.

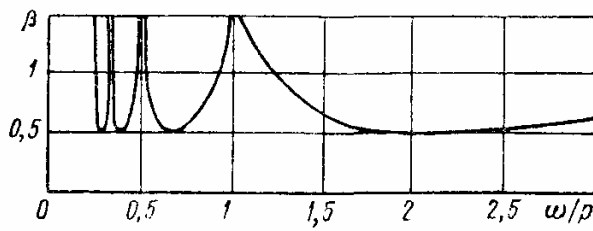


Рис. IV.16

Амплитуда колебаний определяется формулой

$$a = \frac{S}{2mp} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi p}{\omega}} = \frac{S}{2mp \left| \sin \frac{\pi p}{\omega} \right|}.$$

Дробь $S/(mp)$ есть максимальное отклонение, вызванное одним импульсом, поэтому выражение

$$\beta = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi p}{\omega} \right|}$$

может быть названо коэффициентом влияния повторности импульсов.

На рис. IV.16 показано изменение коэффициента β в зависимости от отношения частот ω/p . Из последней формулы и рис. IV.16 видно, что при совпадении частот или их кратности ($p = n\omega$; $n = 1; 2; \dots$) возникает резонанс; $\beta_{\min} = 0,5$.

Действие произвольной периодической возмущающей силы (замкнутая форма решения). Только что изложенный способ может быть использован также для замкнутого решения о действии произвольной периодической силы.

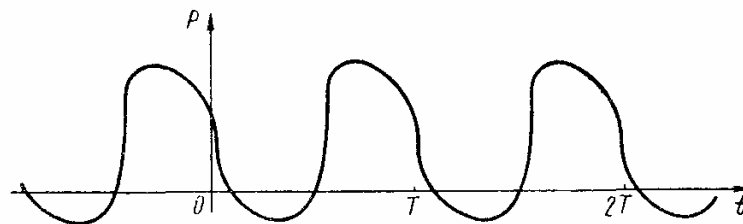


Рис. IV.17

Пусть на систему действует некоторая заданная периодическая сила P с периодом T (рис. IV.17). Выберем произвольное начало отсчета времени (см. точку 0 на рисунке). Тогда для любого момента времени t можно записать

$$x = x_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau.$$

Первые два члена этого выражения описывают влияние начальных условий, т. е. влияние перемещения x_0 и скорости v_0 в момент,

обозначенный на рис. IV.17 через 0; второй член учитывает силу, действующую на систему в интервале 0, t [см. формулу (IV.8)].

Соответственно для скорости в момент времени t получим

$$v = -px_0 \sin pt + v_0 \cos pt + \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) \cos p(t - \tau) d\tau.$$

Применим последние два выражения к моменту времени T , т. е. к концу периода. По условиям периодичности результаты должны соответственно быть равны x_0 и v_0 :

$$x_0 = x_0 \cos pT + \frac{v_0}{p} \sin pT + \frac{1}{mp} \int_0^T P(\tau) \sin p(T - \tau) d\tau;$$

$$v_0 = -px_0 \sin pT + v_0 \cos pT + \frac{1}{m} \int_0^T P(\tau) \cos p(T - \tau) d\tau.$$

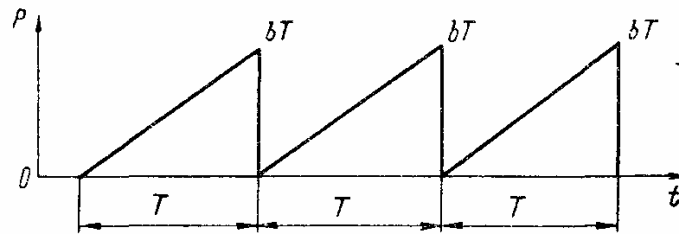


Рис. IV.18

Отсюда можно найти неизвестные x_0 и v_0 , после чего, вернувшись к исходной записи для перемещения x , получим

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{2mp} \left[C \left(\operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \cos pt - \sin pt \right) + \right. \\ & \left. + S \left(\operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \sin pt + \cos pt \right) \right] + \\ & + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

где

$$C = \int_0^T P(\tau) \cos p\tau d\tau; \quad S = \int_0^T P(\tau) \sin p\tau d\tau.$$

Конечно, последним результатом можно пользоваться для значений t , не выходящих за пределы интервала времени 0, T (в остальных интервалах движение повторяется).

Пусть, например, $P = bt$ в пределах 0, T (рис. IV.18). Выкладки совершенно элементарны и приводят к замкнутой форме решения:

$$x = \frac{b}{cp} \left[2pt + pT \left(\cos pt - \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \sin pt \right) \right] \quad (0 \leq t \leq T).$$

19. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛ НЕУПРУГОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Влияние вязкого сопротивления

Общее решение. Если учесть вязкое сопротивление, то основное уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = \frac{P(t)}{m}. \quad (\text{IV.29})$$

Оно отличается от дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний (II.52) наличием правой части, а от уравнения вынужденных колебаний системы без неупругих сопротивлений (IV.2) — вторым слагаемым в левой части. Для получения общего решения воспользуемся способом, который выше был применен для подобной задачи при $n = 0$.

Пусть в системе с одной степенью свободы в мгновение τ прикладывается мгновенный импульс S , последующий колебательный процесс можно описать уравнением (II.53). Определим постоянные a и α из условий начала движения: при $t = \tau$ должно быть $x = 0$; $\dot{x} = S/m$. Первое условие дает

$$\alpha = -p_*\tau.$$

Из второго условия найдем

$$a = \frac{Se^{n\tau}}{mp_*},$$

где p_* определяется формулой (II.55).

Таким образом, свободные колебания, вызванные импульсом S , описываются законом

$$x_* = -\frac{S}{mp_*} e^{-n(t-\tau)} \sin p_*(t-\tau)$$

и носят затухающий характер.

Как и выше, представим возмущающую силу $P(\tau)$ в виде последовательности бесконечно малых импульсов $P(\tau) d\tau$. Тогда при нулевых начальных условиях общее решение задачи примет вид

$$x = \frac{1}{mp_*} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin p_*(t-\tau) d\tau. \quad (\text{IV.30})$$

Эта формула применима при любом законе $P(t)$ и переходит в формулу (IV.8) при $n = 0$.

Гармоническая возмущающая сила. В частном случае действия гармонической силы $P = P_0 \sin \omega t$ из (IV.29) можно найти установившиеся колебания в виде

$$x = a \sin (\omega t - \gamma), \quad (\text{IV.31})$$

где a и γ выражаются следующим образом:

$$a = \frac{x_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{p^4}}}; \quad (IV.32)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\omega n}{p^2 - \omega^2}. \quad (IV.33)$$

Здесь принято прежнее обозначение: $x_{ст} = P_0/c = P_0/mr^2$.

Зависимость амплитуды колебаний от частоты возбуждения (IV.32) представляет собой амплитудно-частотную характеристику системы.

Введем, как и выше, коэффициент динамичности

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{a}{x_{ст}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{p^4}}}. \end{aligned} \quad (IV.34)$$

Отметим, что он не обращается в бесконечность ни при каких значениях частоты возмущения ω ; этим найденный результат существенно отличается от решения, полученного выше без учета неупругого сопротивления. Зависимость μ от отношения частот ω/p при различных значениях $2n/p$ приведена на рис. IV.19, а.

Общий вид кривых напоминает рис. IV.10, однако наибольшее значение динамического коэффициента остается при $\omega = p$ конечным. Максимум коэффициента динамичности несколько смещен в сторону от абсциссы $\omega/p = 1$, но это смещение мало, и можно приближенно определить $\mu_{\max} = p/(2n)$, подставляя в формулу (IV.34) $\omega = p$. Таким образом, максимум коэффициента динамичности обратно пропорционален коэффициенту n .

Из графиков на рис. IV.19, а видно, что силы вязкого сопротивления оказывают заметное действие лишь в околорезонансной области. Это позволяет в удалении от резонанса принимать для μ кривую, построенную без учета вязкого сопротивления, а во всей околорезонансной области принимать $\mu = \mu_{\max}$ (рис. IV.19, б).

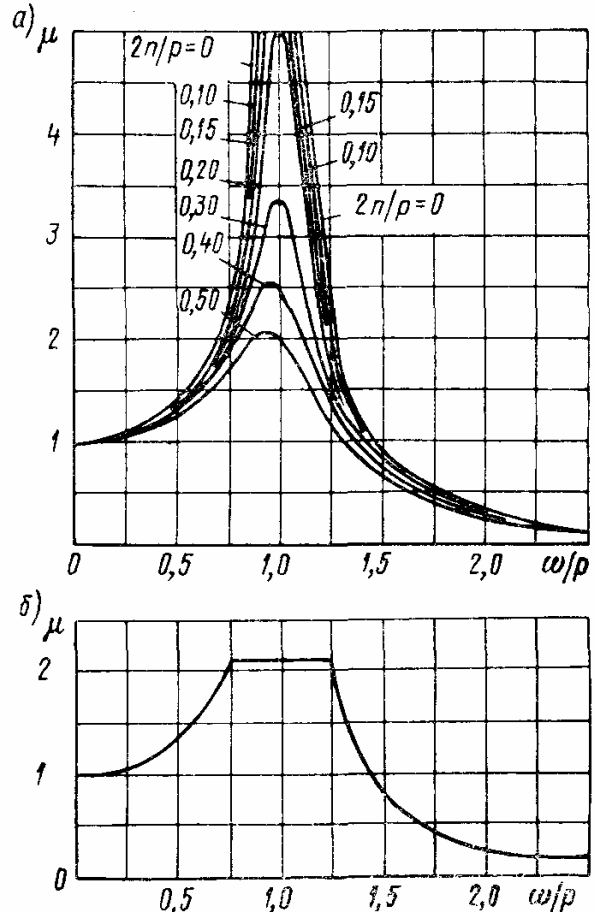


Рис. IV.19

Такие упрощенные кривые особенно удобны в случаях, когда силы неупругого сопротивления нелинейно связаны со скоростью; при этом достаточно вместо определения всей кривой ограничиться вычислением только резонансной амплитуды.

Из выражения (IV.31) видно, что перемещения системы происходят с частотой возмущающей силы, но отстают от изменения силы по фазе. Это отставание характеризуется углом γ , который определяется формулой (IV.33) и зависит от отношения частот ω/p . Как видно, при малых частотах ω угол γ невелик. При резонансе ($\omega = p$) фазовый угол равен $\pi/2$, т. е. в те мгновения, когда сила максимальна, перемещение равно нулю. При весьма высоких частотах фазовый угол близок к π , т. е. максимуму силы соответствует минимум перемещения.

Вязкое сопротивление существенно влияет на общую силу, передающуюся от колеблющегося объекта основанию. Эта сила состоит из двух слагаемых, соответствующих упругой и вязкой связи:

$$N = cx + k\dot{x}.$$

Подставляя сюда

$$x = \mu x_{\text{ст}} \sin(\omega t - \gamma); \quad \dot{x} = \mu \omega x_{\text{ст}} \cos(\omega t - \gamma),$$

получим

$$N = c\mu x_{\text{ст}} \left[\sin(\omega t - \gamma) + \frac{2n\omega}{p^2} \cos(\omega t - \gamma) \right].$$

Для максимального значения N найдем

$$N_{\text{max}} = \mu P_0 \sqrt{1 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}} = \mu_* P_0,$$

где

$$\mu_* = \mu \sqrt{1 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}.$$

Величина μ_* называется *коэффициентом усиления*. На рис. IV.20 показано изменение этого коэффициента в зависимости от отношения ω/p при различных значениях $2n/p$. Все кривые проходят через одну и ту же точку, абсцисса которой равна $\sqrt{2}$, а ордината 1. В области $\omega/p < \sqrt{2}$ затухание полезно, так как снижает коэффициент передачи силы; в области $\omega/p > \sqrt{2}$ с ростом демпфирования увеличивается коэффициент передачи силы. Поэтому в случаях, когда режим работы находится в зарезонансной области, сила, передающаяся основанию, возрастает вследствие демпфирования.

Физический смысл этого явления связан с тем, что при колебаниях основанию передаются как бы две силы — по «упругому пути» и по «вязкому пути»; при высокой частоте возбуждения

имеют место относительно большие скорости и соответственно возникает большая сила вязкого сопротивления.

Пример 21. При испытании свободных затухающих колебаний автомобиля обнаружено: 1) собственная частота составляет $7,33 \text{ с}^{-1}$; 2) пиковые значения образуют геометрическую прогрессию, причем отношение двух последовательных амплитуд равно 3,1. Определить максимальный коэффициент динамичности, который может быть достигнут при вынужденных колебаниях этой системы.

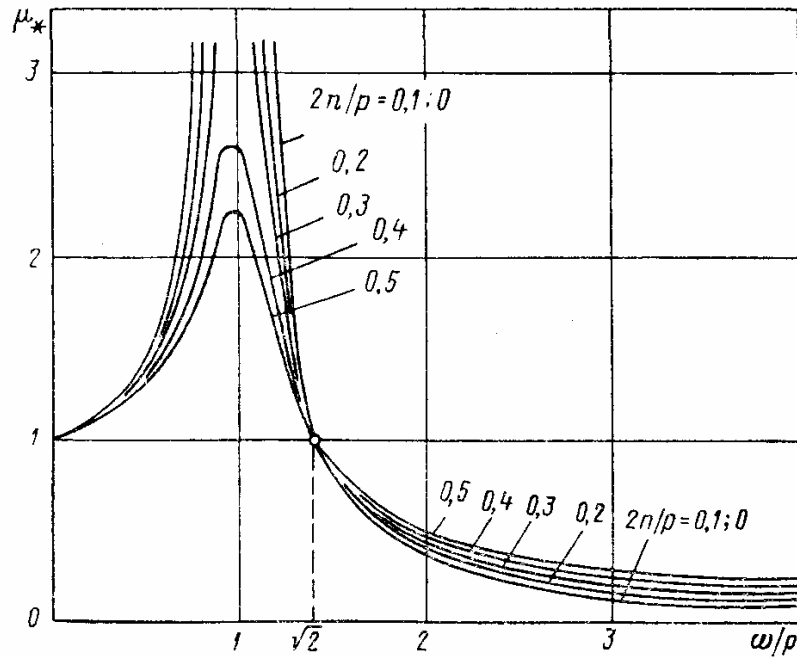


Рис. IV.20

Находим период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{6,28}{7,33} = 0,856 \text{ с.}$$

Подставив в выражение логарифмического декремента (II.56) значение периода T и отношение пиковых значений, получим

$$n = \frac{\ln 3,1}{0,856} = 1,32.$$

Максимальный коэффициент динамичности [см. формулу (IV.34)]

$$\mu_{\max} = \frac{p}{2n} = \frac{7,33}{2 \cdot 1,32} = 2,77.$$

При решении этой задачи не учитывалось различие между частотой p_* , обнаруженной в эксперименте, и частотой p , которая должна быть подставлена в формулу для $\mu_{\max}$. Эта разница не очень велика; действительно, если $p_* = \sqrt{p^2 - 1,32^2} = 7,33 \text{ с}^{-1}$, то $p = 7,45 \text{ с}^{-1}$.

В последнее время приобретает все большее распространение комплексная форма решения. К ней можно прийти следующим путем.

При действии синусоидальной возмущающей силы уравнение (IV.29) запишется в виде

$$m\ddot{x}_1 + k\dot{x}_1 + cx_1 = P \sin \omega t,$$

а при действии косинусоидальной силы — в виде

$$m\ddot{x}_2 + k\dot{x}_2 + cx_2 = P \cos \omega t.$$

Умножим первое уравнение на мнимую единицу i и сложим со вторым уравнением. Имея в виду равенство $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, получим дифференциальное уравнение задачи о колебаниях в комплексной форме:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = Pe^{i\omega t}. \quad (\text{IV.35})$$

Здесь $Pe^{i\omega t}$ — комплексная возмущающая сила; $x = ix_1 + x_2$ — комплексное перемещение, мнимая часть которого описывает движение, вызываемое силой $P \sin \omega t$, а действительная часть — движение, вызываемое силой $P \cos \omega t$. Установившееся движение следует искать в форме

$$x = Ae^{i\omega t}.$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (IV.35), получим равенство

$$-m\omega^2 A + ik\omega + cA = P,$$

из которого можно найти комплексную амплитуду

$$A = \frac{P}{-m\omega^2 + ik\omega + c}. \quad (\text{IV.36})$$

Последнее выражение запишем также в показательной форме:

$$A = ae^{i\gamma}. \quad (\text{IV.37})$$

При переходе от (IV.36) к (IV.37) можно убедиться в том, что символы a и γ имеют прежний смысл [см. выражения (IV.32) и (IV.33)]. Таким образом, модуль комплексной амплитуды a есть амплитуда колебаний, а аргумент γ — сдвиг фаз. Поэтому можно сказать, что комплексная амплитуда содержит информацию не только об амплитуде колебаний, но и об их фазе.

Знаменатель выражения (IV.36)

$$D = -m\omega^2 + ik\omega + c$$

представляет собой отношение амплитуды силы к комплексной амплитуде перемещения и называется *динамической жесткостью системы*. Обратная величина

$$W = \frac{1}{-m\omega^2 + ik\omega + c} \quad (\text{IV.38})$$

есть комплексная амплитуда колебаний, вызываемых единичной возмущающей силой, и называется *частотной характеристикой*

системы. Она описывает зависимости амплитуды и фазы от частоты возмущающей силы, и поэтому ее также называют *амплитудно-фазовой характеристикой*.

Влияние энергетических особенностей источника возбуждения. Во многих случаях резонансные явления вредны и нужно принимать специальные меры, чтобы в рабочем режиме система была достаточно далека от резонанса. Но существуют технологические процессы (например, вибротранспортирование), которые основаны на использовании колебаний. Для эффективности таких процессов желательны возможно большие амплитуды колебаний, это может

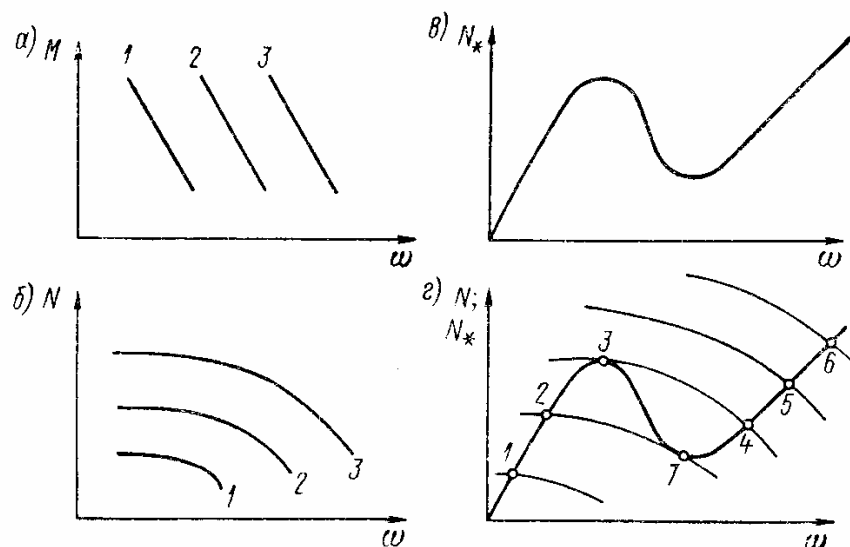


Рис. IV.21

быть достигнуто путем создания резонансных или околорезонансных режимов. Практически установлено, что иногда работа подобных систем в резонансной области оказывается неустойчивой и система как бы самопроизвольно выходит из этой области. Эти явления были объяснены сравнительно недавно и, как оказалось, связаны с энергетическими свойствами источников возбуждения.

На рис. IV.21, а изображено семейство характеристик 1—3, типичных для шунтового электродвигателя. Здесь по оси абсцисс отложена угловая скорость ω вращения якоря, а по оси ординат — крутящий момент M , который может создать двигатель при данной угловой скорости ω .

При изменении положения регулировочного органа путем изменения сопротивления в цепи возбуждения фиксируется та или иная характеристика.

Характеристики позволяют перейти к определению мощности по формуле $N = M\omega$. На рис. IV.21, б приведены кривые мощности 1—3, соответствующие характеристикам на рис. IV.21, а. Каждому положению регулировочного органа (реостата) также соответствует своя кривая 1, 2, 3, ...

Обратимся теперь к определению энергетических потерь. Для простоты примем, что эти потери имеются только в самой колебательной системе, причем трение носит вязкий характер. При этом за один цикл рассеивается энергия Ψ , определяемая формулой (II.61); если в нее подставить $n = 1$; $S = \pi$ и частоту ω вместо соответствующей частоты p , то получим $\Psi = \pi k \omega a^2$. Разделив эту величину на период вынужденных колебаний $2\pi/\omega$, получим мощность, фактически расходуемую при колебаниях:

$$N_* = \frac{1}{2} k \omega^2 a^2.$$

Подставляя сюда $k = 2mn$ и выражение амплитуды a по формуле (IV.32), находим для случая, когда амплитуда возмущающей силы пропорциональна ω^2 и составляет $\alpha\omega^2$ (при этом $x_{ст} = \alpha\omega^2/c$)

$$N_* = \frac{n\alpha^2\omega^6}{m[(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2n^2]}.$$

Кривая $N_*(\omega)$ приобретает вид, показанный на рис. IV.21, в.

Теперь можно сопоставить величины N и N_* (рис. IV.21, г). Допустим, что реостат находится в таком положении, что характеристикой двигателя является кривая 1; тогда установится режим, которому соответствует точка 1.

Пусть далее производится медленное выведение реостата и происходит постепенный разгон системы. На рис. IV.21, г видно, что при постепенном выведении реостата кривые будут подниматься выше и выше. Соответственно после состояний 1 и 2 в точке 3 произойдет быстрый разгон системы до режима 4. Затем, по мере дальнейшего выведения реостата, осуществляются режимы 5; 6 и т. д.

При постепенной остановке машины, когда сопротивление в цепи возбуждения постепенно растет, колебательная система будет последовательно проходить состояния 6, 5, 4, 7, 2, 1 и т. д., причем переход из состояния 7 в состояние 2 будет происходить в виде быстрого падения частоты ω .

Как видно, в обоих случаях (разгона и остановки) ветвь кривой 3—7 остается нереализованной. Режимы на этой ветви практически нереализуемы, даже если при разгоне после достижения точки 3 снижать мощность N . Как оказывается, они неустойчивы, и система уходит от этих режимов на устойчивые режимы. Таким образом, диапазон частот ω_3 — ω_7 вообще неосуществим. Ясно, что такое явление будет возникать во всех тех случаях, когда кривые располагаемых мощностей N могут пересекать кривую необходимых мощностей N_* более, чем в одной точке. Необходимо заметить, что в подобных случаях точка вверху резонансного пика всегда будет точкой неустойчивого режима; это и служит причиной явлений, о которых было сказано выше.

Действие периодических импульсов. В качестве исходного выражения примем вместо выражения (IV.26) закон свободных затухающих колебаний (II.54) и представим скорость в виде

$$v = \dot{x} = e^{-nt} \left(v_0 \cos p_* t - \frac{nv_0 + p_*^2 x_0}{p_*} \sin p_* t \right).$$

Начало отсчета времени по-прежнему совместим с мгновением t_0 (см. рис. IV.15, б). Для мгновения t_1 можно записать

$$x_1 = e^{-nT} \left(x_0 \cos p_* T + \frac{v_0 + nx_0}{p_*} \sin p_* T \right);$$

$$v_1 = e^{-nT} \left(v_0 \cos p_* T - \frac{nv_0 + p_*^2 x_0}{p_*} \sin p_* T \right).$$

В мгновение t_2 перемещение и скорость вновь равны x_0 и v_0 :

$$x_0 = x_1 = e^{-nT} \left(x_0 \cos p_* T + \frac{v_0 + nx_0}{p_*} \sin p_* T \right);$$

$$v_0 = v_1 + \frac{S}{m} = e^{-nT} \left(v_0 \cos p_* T - \frac{nv_0 + p_*^2 x_0}{p_*} \sin p_* T \right) + \frac{S}{m},$$

где S — величина импульса.

Из этих уравнений находим

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{Se^{nT} \sin p_* T}{mp_* (e^{2nT} - 2e^{nT} \cos p_* T + 1)}; \\ v_0 &= \frac{Se^{nT} \left(e^{nT} - \cos p_* T - \frac{n}{p_*} \sin p_* T \right)}{m (e^{2nT} - 2e^{nT} \cos p_* T + 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.39})$$

Вычислив по этим формулам x_0 и v_0 , можно затем воспользоваться решением, данным в формуле (II.54).

Особенный интерес представляют резонансные режимы, когда период импульсов T в целое число раз больше собственного периода колебаний T_* . Обозначив это число буквой r , имеем

$$T = rT_* = \frac{2\pi r}{p_*}.$$

Тогда $\sin p_* T = 0$; $\cos p_* T = 1$, и по формулам (IV.39) находим

$$x_0 = 0; \quad v_0 = \frac{Se^{nT}}{m(e^{nT} - 1)}.$$

При малых значениях nT можно положить $e^{nT} \approx nT + 1$, т. е.

$$v_0 = \frac{S}{mnT},$$

и решение принимает вид

$$x = \frac{S}{2\pi mnr} e^{-nt} \sin p_* t.$$

Наибольшее значение (резонансная амплитуда) приблизительно составляет

$$x_{\max} = \frac{S}{2\pi mnr},$$

т. е. обратно пропорционально коэффициенту вязкого сопротивления, как и в случае гармонического возбуждения.

Коэффициент β при резонансе получим, разделив $x_{\max}$ на амплитуду колебаний $S/(mp)$, вызванных однократным импульсом:

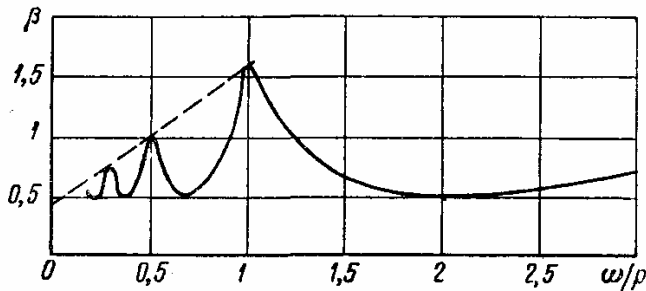


Рис. IV.22

$$\beta = \frac{p}{2\pi nr},$$

т. е. с увеличением r (уменьшением частоты импульсов) резонансные амплитуды убывают.

На рис. IV.22 показана кривая, подобная изображенной на рис.

IV.16, но построенная с учетом сил неупругого сопротивления (для случая $n/p = 0,1$). Из рисунка видно, что с уменьшением частоты импульсов резонансные амплитуды убывают (по линейному закону). Это означает, что показанное на рис. IV.16 сгущение резонансов при убывании частоты импульсов практической опасности не представляет.

Действие произвольной периодической силы. Соответствующие этому случаю выкладки в принципе не отличаются от сделанных на стр. 212 для более простого случая, когда нет затухания. Окончательная формула несколько более сложна, чем формула (IV.28), но имеет ту же структуру:

$$x = \frac{e^{-nt}}{mp_*} \left\{ \frac{C [e^{nT} \sin p_* (t+T) - \sin p_* t] - S [e^{nT} \cos p_* (t+T) - \cos p_* t]}{1 - 2e^{nT} \cos p_* T + e^{2nT}} + \int_0^t P(\tau) e^{n\tau} \sin p_* (t-\tau) d\tau \right\},$$

где

$$C = \int_0^T P(\tau) e^{n\tau} \cos p_* \tau d\tau; \quad S = \int_0^T P(\tau) e^{n\tau} \sin p_* \tau d\tau.$$

Подчеркнем, что эти формулы выгодно отличаются от зависимостей, которые получаются при разложении возмущающей силы в ряд Фурье, так как избавляют от использования бесконечных сумм.

Действие силы переменной частоты. Выше (см. рис. 1.9) был дан пример возникновения гармонической возмущающей силы при вращении неуравновешенного ротора. При этом предполагалось, что угловая скорость вращения постоянна во времени. Рассмотрим колебания, развивающиеся в процессе разгона машины, когда угловая скорость постепенно увеличивается от нуля до некоторого конечного значения. Особенно важен случай, когда в процессе разгона происходит переход через резонанс. Если переход совершается не очень медленно, то возникающие колебания значительно отличаются от колебаний при установившемся режиме. Поэтому было бы неверным оценивать опасность перехода через резонанс по тем амплитудам, которые могут быть вычислены при расчете установившихся резонансных колебаний.

Если принять, что угловая скорость увеличивается равномерно, и обозначить через ε угловое ускорение, то угловая скорость составит εt , а угол поворота $\varepsilon t^2/2$. Соответственно центробежная сила составит $mr (\varepsilon t)^2$, где mr — произведение вращающейся массы на эксцентриситет; при этом вертикальная составляющая этой силы (возмущающая сила) будет

$$P(t) = mr (\varepsilon t)^2 \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Колебания, вызванные такой силой, можно описать при помощи общего решения (IV.30). Однако получаемый при этом интеграл не поддается представлению в элементарных функциях. В искусственно упрощенной задаче, когда амплитуда силы

$$P = P_0 \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

принимается постоянной (рис. IV.23, а, где за аргумент принято «безразмерное время» $\varepsilon t/p$), развитие процесса колебаний следует кривым, показанным на рис. IV.23, б и относящимся к некоторому определенному значению коэффициента поглощения. Кривые соответствуют различным скоростям разгона, причем за меру этих скоростей принят безразмерный параметр ε/p^2 . Как видно из рисунка, чем больше темп разгона, тем меньше значение максимума амплитуды колебаний.

В качественном отношении к этому близки результаты решения более сложной задачи, в которой учитывается возрастание амплитуды возмущающей силы в процессе разгона. Эти результаты приводят к следующим выводам:

1) максимальные амплитуды колебаний при переходе через резонанс меньше, чем в случае установившихся резонансных колебаний, причем различие тем больше, чем быстрее происходит переход через резонанс;

2) максимальные амплитуды колебаний достигаются не в момент совпадения частоты возмущающей силы с собственной частотой системы, а несколько позже; в процессе разгона максимум

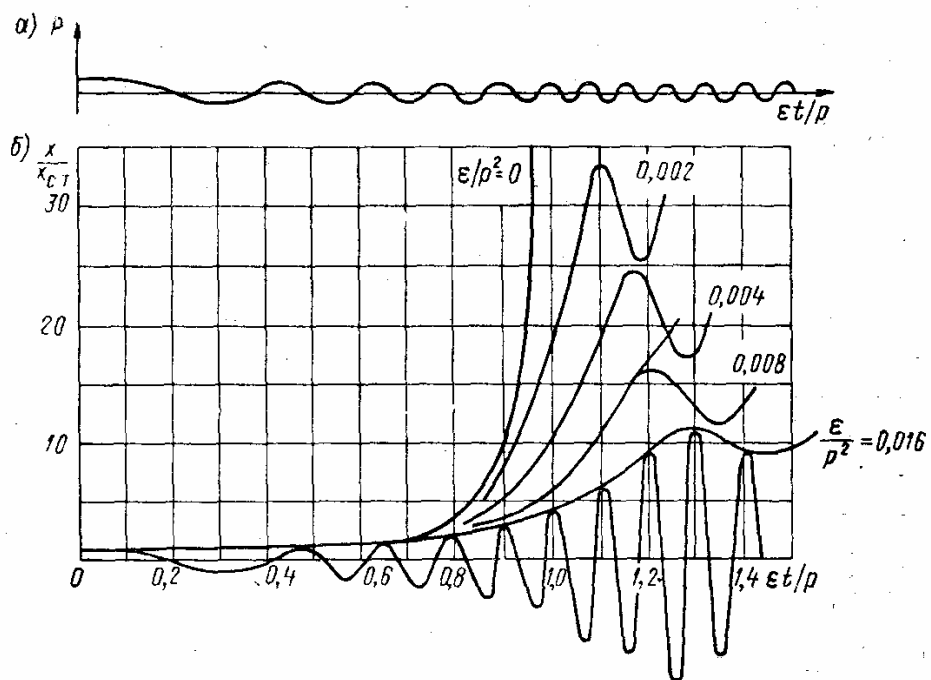


Рис. IV.23

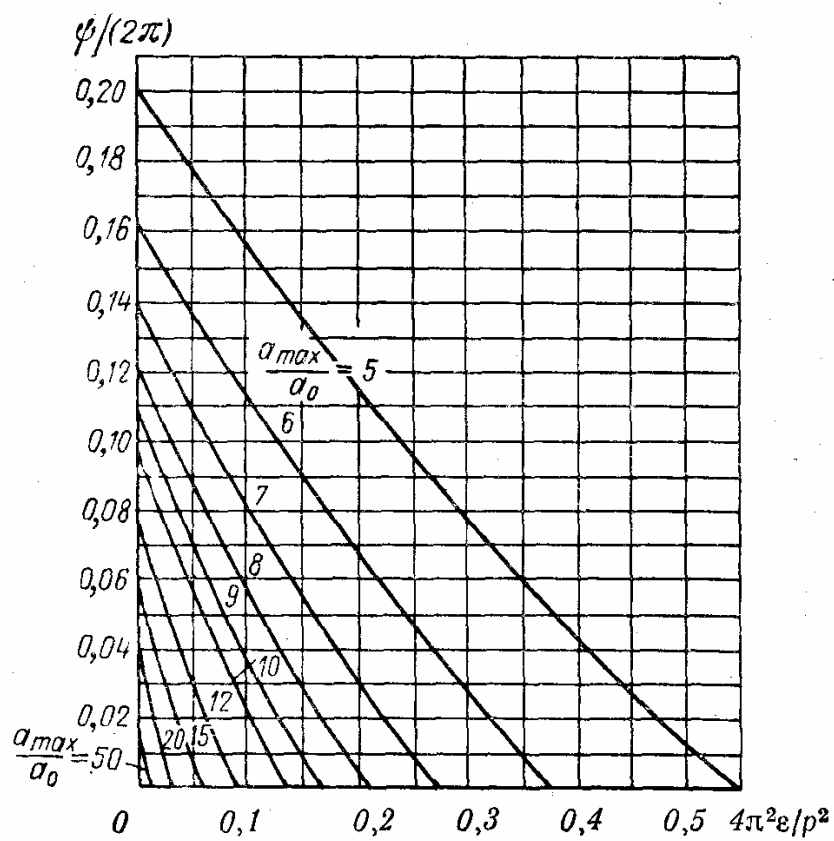


Рис. IV.24

амплитуды смещается в сторону больших частот, а в процессе остановки — в сторону меньших частот.

На рис. IV.24 показаны зависимости максимальной амплитуды колебаний, достигаемой в процессе перехода через резонанс, от темпа перехода (параметр ε/p^2) и диссипативных свойств системы (параметр $\psi/(2\pi)$), где ψ — коэффициент поглощения). Каждой кривой соответствует определенное значение отношения максимума амплитуды $a_{\max}$ к амплитуде колебаний a_0 в рабочем режиме. Показанными здесь графиками пользуются также для того, чтобы найти необходимый коэффициент поглощения системы, если параметр ε/p^2 задан, а отношение амплитуд $a_{\max}/a_0$ выбрано определенным образом. Если найденная по графикам величина $\psi/(2\pi) \leq \leq 0,03$, то можно не вводить в систему никаких специальных средств увеличения демпфирования (см. [41]).

Влияние произвольно заданных сил неупругого сопротивления

Рассмотрим общий случай, когда сила неупругого сопротивления является некоторой нелинейной функцией скорости: $R = R(\dot{x})$. Ввиду сложности точного учета влияния такой силы ограничимся приближенным простым приемом. Заменим силу R эквивалентной силой вязкого трения

$$R_* = -k_* \dot{x} \quad (\text{IV.40})$$

и определим коэффициент k_* из условия равенства работ, произведенных силами R и R_* за период колебаний. При этом придется ввести еще определенное предположение о характере колебательного процесса. При действии гармонической возмущающей силы естественно предположить, что и в общем случае сил неупругого сопротивления колебательный процесс описывается законом (IV.31), т. е. является гармоническим.

Удобнее сместить начало отсчета времени с таким расчетом, чтобы закон колебаний принял более простой вид

$$x = a \cos \omega t. \quad (\text{IV.41})$$

Тогда элементарная работа эквивалентной силы R_* определится в виде

$$R_* dx = R_* \dot{x} dt. \quad (\text{IV.42})$$

Подставляя сюда выражение (IV.40), получаем

$$-k_* \dot{x}^2 dt = -a^2 \omega^2 k_* \sin^2 \omega t dt;$$

соответственно этому работа силы R_* за период равна

$$\int_0^T R_* \dot{x}^2 dt = -\pi k_* a^2 \omega. \quad (\text{IV.43})$$

Аналогично должна быть представлена работа, совершаемая заданной нелинейной силой неупругого сопротивления. Положим, что указанные операции выполнены и определен эквивалентный коэффициент k_* (как правило, его величина окажется зависящей от амплитуды колебания a).

Подставим найденное выражение k_* в решение (IV.32):

$$a = \frac{x_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{k_* \omega}{c}\right)^2}}. \quad (\text{IV.44})$$

Следует заметить, что неизвестная амплитуда входит в обе части этого равенства. Определив из выражения (IV.44) зависимость амплитуды от частоты колебаний ω , можно построить кривую, подобную кривым на рис. IV.15, a .

Проследим за этими операциями на примере силы неупругого сопротивления, заданной в виде

$$R = -k\dot{x}|\dot{x}|^{n-1}. \quad (\text{IV.45})$$

Аналогично выражению (IV.42) элементарная работа этих сил

$$R dx = R\dot{x} dt = -k\dot{x}^2|\dot{x}|^{n-1} dt.$$

Если сюда подставить выражение (IV.41), то получится

$$-k\dot{x}^2|\dot{x}|^{n-1} dt = ka^{n+1}\omega^{n+1}|\sin \omega t|^{n+1} dt,$$

и работа силы R за период равна

$$\begin{aligned} \int_0^T R\dot{x} dt &= -ka^{n+1}\omega^{n+1} \int_0^T |\sin \omega t|^{n+1} dt = \\ &= -ka^{n+1}\omega^n \int_0^{2\pi} |\sin \gamma|^{n+1} d\gamma. \end{aligned}$$

Входящий сюда интеграл был выше обозначен через S [см. формулу (II.62)], так что

$$\int_0^T R\dot{x} dt = -ka^{n+1}\omega^n S. \quad (\text{IV.46})$$

Приравниваем выражения (IV.43) и (IV.46):

$$\pi k_* a^2 \omega = ka^{n+1} \omega^n S,$$

отсюда находим эквивалентный коэффициент вязкого сопротивления

$$k_* = \frac{kS}{\pi} (a\omega)^{n-1},$$

который и следует подставить в соотношение (IV.44); из последнего можно определить амплитуду колебаний. Так, например, если

$n = 2$, то на стр. 55 находим $S = 2,667$, т. е. $k_* = 0,85ka\omega$. Подставляя это выражение в формулу (IV.44), получим

$$a = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{0,85ka\omega^2}{c}\right)^2}}.$$

Решив это биквадратное уравнение, получим окончательное выражение для амплитуд колебаний

$$a = \frac{c}{1,20k\omega^2} \sqrt[4]{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^4 + 4x_{\text{ст}}\left(\frac{0,85k\omega^2}{c}\right)^2} - \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2}.$$

Резонансная амплитуда приблизительно соответствует равенству $\omega = p$ и равна

$$a_{\text{max}} \approx 1,085 \sqrt{\frac{mx_{\text{ст}}}{k}},$$

где m — приведенная масса.

С помощью того же способа можно найти эквивалентный коэффициент для случая гистерезисного трения. Приравнявая выражение (II.51), определяющее потерю механической энергии за один цикл деформирования системы, абсолютной величине выражения (IV.43), найдем

$$k_* = \frac{ka^{n-1}}{\pi\omega}.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что эквивалентный коэффициент трения обратно пропорционален частоте колебаний.

Для того чтобы найти амплитуду колебаний, подставим полученное выражение k_* в соотношение (IV.32). Тогда получится следующее уравнение относительно a :

$$a = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{ka^{n-1}}{c}\right)^2}}. \quad (\text{IV.47})$$

В некоторых частных случаях из уравнения (IV.47) может быть сразу получено решение. При $n = 2$ соотношение (IV.47) приводится к биквадратному уравнению, из которого получим

$$a = \frac{m(p^2 - \omega^2)}{\sqrt{2}k} \sqrt[4]{\sqrt{\frac{4P_0k^2}{m^4(p^2 - \omega^2)^4} + 1} - 1}.$$

При $n = 1$ из соотношения (IV.47) находим

$$a = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{c}\right)^2}}.$$

Обратим внимание на одинаковую структуру последней формулы и формулы (IV.32), полученной для случая вязкого сопротивления.

При $n = 0$ (кулоново трение) соотношение (IV.47) дает

$$a = \frac{x_{ст}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \sqrt{1 - \frac{k^2}{P_0^2}}.$$

Из этой формулы виден неограниченный рост амплитуд при совпадении частот $\omega = p$. При $k > P_0$ колебания невозможны.

Полученные выражения позволяют полностью построить соответствующие амплитудно-частотные характеристики. Однако чаще всего такое построение дает лишь иллюзию высокой точности, поскольку исходные значения n известны лишь сугубо приближенно и, кроме того, приближенной является сама исходная зависимость (II.51). Поэтому более логично и практически достаточно воспользоваться упрощенным построением, идея которого была пояснена выше в связи с рис. IV.19, б. Для этого нужно сначала построить амплитудно-частотную характеристику без всякого учета трения в системе, а затем произвести «срезку» ординат на уровне, соответствующем резонансной амплитуде. Это значение легко найти из соотношения (IV.47), положив там $\omega = p$; при этом для любых значений n получим простую формулу

$$a_{рез} = \sqrt[n]{P_0/k},$$

которая с достаточной точностью решает весь вопрос.

Случайные колебания

Любому закономерному явлению в той или иной степени сопутствуют случайные отклонения. Однако во многих практических задачах этими случайными «примесями» можно пренебречь и считать рассматриваемые явления полностью определенными, детерминированными. В частности, именно так рассматривались выше возмущающие силы, которые полагались детерминированными функциями времени, хотя в действительности такие силы всегда содержат некоторые случайные составляющие, которые не были учтены вследствие их предполагаемой малости.

Наряду с этим существуют задачи, в которых возмущающие силы вообще не поддаются детерминистическому описанию и представляют собой случайные функции времени (случайные процессы). Примерами таких сил могут служить нагрузки на рабочие органы экскаваторов, сельскохозяйственных машин, горных выемочных машин, действие ветра на инженерные сооружения или морского волнения на корабль, сейсмические нагрузки и т. п. Со случайными функциями времени приходится иметь дело и в некоторых задачах о кинематическом возбуждении, например при анализе колебаний автомобиля, движущегося по неровной дороге; детерминистическое решение этих задач сугубо условно.

Приведем основные сведения, относящиеся к описанию случайных функций и к анализу случайных колебаний.

Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, причем заранее неизвестно, какой именно. Конкретный вид, принимаемый функцией в результате опыта, называется *реализацией случайной функции*. Случайный характер рассматриваемых здесь явлений не означает, что при их протекании отсутствуют какие бы то ни было закономерности. Случайным функциям (в частности, случайным функциям времени) свойственны некоторые закономерности, которые, однако, имеют только статистический смысл.

Всякую случайную функцию характеризуют неслучайными функциями — *математическим ожиданием, дисперсией и корреляционной функцией*. Эти характеристики случайной функции по самому своему существу не могут быть заранее определены на основании каких-либо теоретических соображений, и их можно найти только путем обработки результатов экспериментальных наблюдений. В задачах о случайных колебаниях механических систем наиболее сложно и ответственно именно определение названных характеристик для возмущающих сил; последующий анализ движения системы (которое при этом также представляет собой случайную функцию времени) поддается теоретическому определению и относительно прост, в особенности для линейных механических систем.

Обозначим через $X(t)$ случайную функцию времени, а через $X_i(t)$ — ее i -ую реализацию. Конечно, задать (описать) функцию $X(t)$ — это значит задать (описать) достаточно обширную серию ее реализаций. Математическим ожиданием случайной функции называется ее среднее (по всем реализациям) значение

$$m_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M[X_i(t)] = M[X(t)]. \quad (\text{IV.48})$$

Буквой M обозначена операция вычисления среднего значения для одной реализации.

При обработке опытных результатов здесь, конечно, принимается конечная сумма, число членов которой равно числу осуществленных в опыте реализаций. Из выражения (IV.48) видно, что математическое ожидание есть неслучайная функция времени. Если из случайной функции вычесть ее математическое ожидание, то получится центрированная случайная функция

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t). \quad (\text{IV.49})$$

Если случайной функцией времени является возмущающая сила, то ее действие на линейную механическую систему можно найти как сумму действий математического ожидания и центрированной случайной функции. При этом первая задача оказывается

детерминистической, и все специфические особенности решения относятся только ко второй задаче; по этой причине ниже рассматриваются только центрированные случайные функции.

Дисперсия случайной функции характеризует степень случайности, т. е. разброс функции относительно среднего значения (т. е. относительно нуля, если речь идет о центрированной случайной функции). Дисперсия определяется выражением

$$D_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N M [\dot{X}_i^2(t)] = M [\dot{X}^2(t)] \quad (\text{IV.50})$$

и представляет собой математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины. Как видно из (IV.50), дисперсия также является неслучайной функцией времени. С дисперсией непосредственно связана другая характеристика разброса случайной функции — *среднеквадратическое отклонение*, которое определяется формулой

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (\text{IV.51})$$

Описание случайной функции с помощью ее математического ожидания и дисперсии оказывается далеко не полным. Можно представить себе две существенно различающиеся случайные функции, хотя их математические ожидания и дисперсии соответственно одинаковы. Поэтому вводится еще одна характеристика случайной функции — *корреляционная функция*, которая определяется выражением

$$K_x(t, t') = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{X}_i(t) \dot{X}_i(t') = M [\dot{X}(t) \dot{X}(t')] \quad (\text{IV.52})$$

и представляет собой математическое ожидание произведения центрированных значений случайной функции, взятых в различные моменты времени t и t' . Как видно, корреляционная функция является неслучайной функцией двух аргументов.

Во многих реальных ситуациях вероятностные характеристики случайных функций достаточно однородны во времени; такие случайные функции называют *стационарными*. Большинство названных выше возмущающих сил практически в течение достаточно большого времени можно считать стационарными случайными функциями времени. Очевидным исключением являются кратковременные сейсмические нагрузки.

Благодаря стационарности характеристики рассматриваемых случайных функций значительно упрощаются. Математическое ожидание и дисперсия становятся постоянными числами *, а корреля-

* Имеется в виду нецентрированная функция. Для центрированной функции математическое ожидание равно нулю, даже если случайная функция не обладает свойством стационарности.

ляционная функция оказывается зависящей только от одного аргумента — разности $\tau = t' - t$. Тогда имеем

$$K_x(t, t + \tau) = k(\tau). \quad (\text{IV.53})$$

При этом дисперсия равна значению корреляционной функции при $\tau = 0$:

$$D_x = k(0). \quad (\text{IV.54})$$

Поскольку случайная функция стационарна, то естественно предположить, что одна реализация достаточной продолжительности может содержать достаточно опытного материала для получения характеристик случайной функции. Нередко оказывается, что это предположение верно и одна достаточно продолжительная реализация практически эквивалентна (по объему сведений о случайной функции) множеству реализаций той же общей продолжительности. Тогда характеристики случайной функции могут быть приближенно найдены не как средние по ряду реализаций, а как средние по времени. Такие стационарные случайные функции называются *эргодическими* (следует иметь в виду, что стационарность случайной функции в принципе не гарантирует эргодичность).

Рассмотрим достаточно продолжительную реализацию * эргодической стационарной случайной функции и обозначим эту вполне конкретную зависимость через $x(t)$. Тогда математическое ожидание можно найти по формуле

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (\text{IV.55})$$

где T — длительность всего интервала времени, на котором получена реализация. Далее следует центрировать реализацию $x(t)$, т. е. вычесть из нее найденное значение математического ожидания:

$$\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x, \quad (\text{IV.56})$$

и по формуле

$$k_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t + \tau) d\tau \quad (\text{IV.57})$$

найти корреляционную функцию. Конечно, при практических вычислениях интегралы в (IV.56) и (IV.57) заменяют соответствующими конечными суммами, так что корреляционная функция оказывается определенной дискретной серией своих значений. При этом значение $k_x(0)$ определяет дисперсию.

* Приведем пример. Согласно ГОСТ 16526—70 при транспортных испытаниях самоходных сельскохозяйственных или строительно-дорожных колесных машин требуется, чтобы запись колебаний на рабочих местах имела продолжительность не менее 100 с.

Такая обработка результатов наблюдений основана на предположении о стационарности и эргодичности случайного процесса, но наличие названных свойств в каждой задаче должно быть достаточно обосновано. Не вдаваясь в подробности, отметим, что признаком стационарности может служить независимость математического ожидания и дисперсии от длительности интервала времени T (при условии, что он достаточно большой), а признаком эргодичности — затухание корреляционной функции с увеличением τ .

Для использования полученных таким образом результатов в задачах о колебаниях механических систем под действием случайных сил удобно представить корреляционную функцию в аналитической форме, приняв подходящее аналитическое выражение и подобрав надлежащие значения параметров в принятой зависимости.

Например, при рассмотрении профиля дороги как случайной функции принимают корреляционную функцию в виде

$$k_y(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}.$$

Для усилий, действующих на породоразрушающий инструмент в горной промышленности, принимают корреляционную функцию в том же виде или в виде

$$k_p(\tau) = De^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau.$$

Построением подобных выражений завершаются выкладки по определению характеристик возмущающих сил.

Предположим, что корреляционная функция случайной возмущающей силы известна (найдена, задана) и требуется найти движение, вызываемое такой силой. Нужно отметить, что искомое движение в этих задачах также является случайной функцией времени, и поэтому определить движение — это значит найти характеристики такой случайной функции. Если речь идет о воздействии централизованной возмущающей силы, то главной целью расчета обычно служит определение среднеквадратического значения перемещения (скорости, ускорения, какого-либо внутреннего усилия и т. п.). Для решения такой задачи нужно прежде всего найти спектральную плотность возмущающей силы

$$S_p(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} k_p(\tau) \cos \omega\tau d\tau,$$

после чего спектральная плотность искомого перемещения определится выражением

$$S_x(\omega) = |W_x|^2 S_p(\omega),$$

где W_x — частотная характеристика системы [см. формулу (IV.38)], т. е.

$$|W_x|^2 = \frac{1}{c^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4} \right]}.$$

Теперь можно найти дисперсию перемещения по формуле

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

и, наконец, среднеквадратическое значение перемещения $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

20. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ К ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

Измерительные приборы или измерительные установки, предназначенные для измерения параметров механических колебаний (вибраций), называются виброметрами*. Действие многих виброметров непосредственно основано на закономерностях теории вынужденных колебаний.

Принципы устройства простейших виброметров

Виброметры частоты. Виброметры частоты служат для опытного определения частот колебаний вибрирующих объектов и основаны на резонансном принципе. На рис. IV.25, а показана схема язычкового прибора. Прибор содержит ряд заделанных в корпус пластинок, к концам которых прикреплены небольшие дополнительные массы. Пластины имеют различные длины и различные собственные частоты, которые заранее определены и помечены

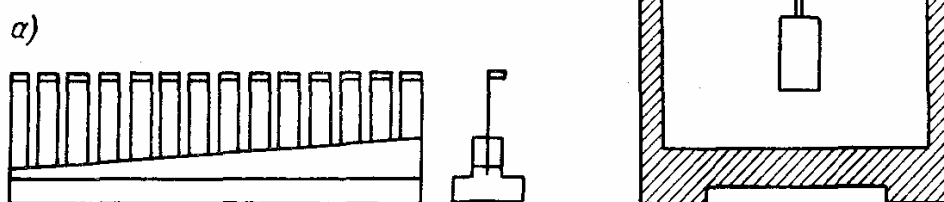


Рис. IV.25

возле каждой пластинки. Корпус прибора укрепляется на колеблющемся объекте, так что пластинки оказываются в условиях колебаний, вызванных кинематическим возбуждением. Пластина,

* Терминология, относящаяся к виброизмерительным приборам, стандартизована (ГОСТ 16819—71) — так же, как и общие требования к выполнению измерений механических колебаний (ГОСТ 13731—68).

собственная частота которой близка к частоте измеряемых колебаний, приходит в состояние особенно интенсивных вибраций; таким образом и выясняется частота измеряемых колебаний.

Обычно разность собственных частот двух соседних полосок составляет 0,5 Гц, так что ошибка измерения не может превышать этой величины. Диапазон измеряемых частот невелик и составляет 10—20 Гц.

Основной деталью виброметра частоты, показанного на рис. IV.25, б, является упругий стержень 1 с грузом на конце. После установки прибора на колеблющийся объект свободная длина стержня, а следовательно, и его собственная частота постепенно меняются при плавном перемещении планки 4 винтом 2.

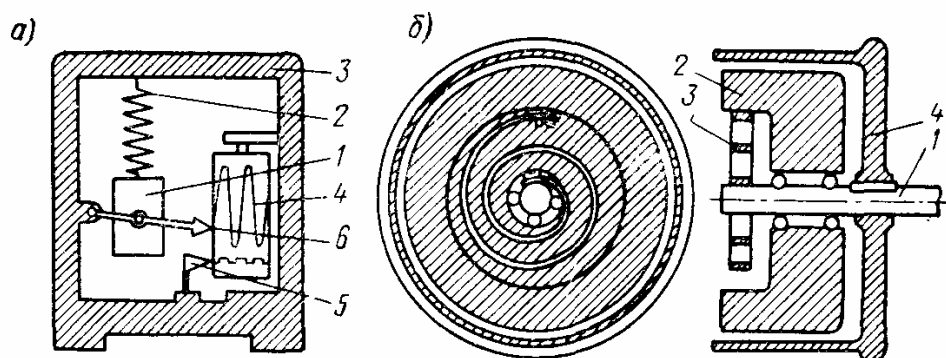


Рис. IV.26

Когда вибрации стержня становятся особенно интенсивными, перемещение планки прекращают и по размеченной шкале 3 определяют частоту колебаний.

Вибрографы инерционного (сейсмического) типа. Такие вибрографы используют для записи перемещений точек вибрирующих объектов или для записи углов поворота. Корпус прибора жестко связывается с объектом, колебания которого измеряются; в приборе имеется практически неподвижное тело, по отношению к которому фиксируются перемещения корпуса, т. е. в конечном счете перемещения колеблющегося объекта.

Простейшая схема вибрографа показана на рис. IV.26, а. Основной частью вибрографа является массивный груз 1 (сейсмическая масса), подвешенный в корпусе 3 на податливой упругой пружине 2. Корпус вибрографа укрепляют на конструкции, колебания которой изучают, и он колеблется вместе с последней. При этом система груз—пружина оказывается также в условиях колебаний, вызванных кинематическим возбуждением. Если собственная частота этой системы мала из-за малой жесткости пружины, то отношение ω/p велико и согласно формуле (IV.23) амплитуда колебаний груза составляет малую часть амплитуды колебаний корпуса прибора, так что практически можно считать груз 1 неподвижным.

Прибор устанавливают так, чтобы ось вращающегося барабана 4 совпадала с направлением исследуемых колебаний. Тогда

перо 6, связанное с грузом 1, будет вычерчивать кривую колебаний на ленте, движущейся вместе с барабаном. При помощи часового механизма на ленте автоматически делаются отметки времени (отметчик времени обозначен цифрой 5). Рычажная передача обеспечивает запись колебаний в увеличенном масштабе; это позволяет измерять колебания с амплитудой от 0,01 м и выше.

Чтобы погрешность вибрографа была достаточно малой, необходимо, чтобы собственная частота системы груз—пружина была значительно меньше измеряемой частоты. Кроме того, для точной работы вибрографа его масса должна быть значительно меньше массы колеблющейся конструкции, иначе установка вибрографа изменит колебательные свойства исследуемой системы (то же относится и к виброметрам частоты).

Тот же принцип использован в угловых вибрографах — приборах для записи крутильных колебаний (рис. IV.26, б). На ось 1 прибора свободно насаживается тяжелый маховичок 2. Маховичок и ось прибора связаны между собой гибкой спиральной пружиной 3, так что соб-

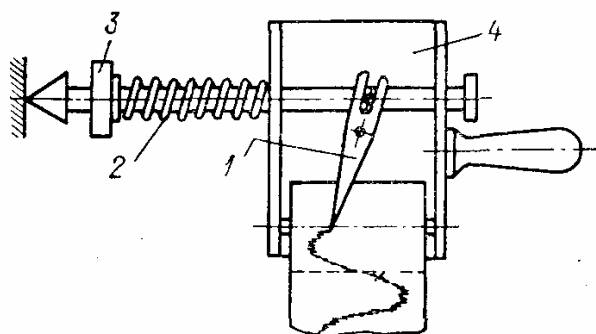


Рис. IV. 27

ственная частота крутильных колебаний системы весьма мала. На оси прибора заклинен шкив 4, соединяемый с валом, крутильные колебания которого изучаются

При вращении вала прибор также вращается, но ввиду малой жесткости пружины высокочастотные крутильные колебания практически не передаются маховичку, и он равномерно вращается со средней угловой скоростью вала. Колебания оси прибора по отношению к маховичку передаются записывающему перу при помощи рычажной системы.

Из-за ряда недостатков рычажной системы записывающего устройства в современных приборах инерционного действия это устройство заменено электрическим. Механические колебания преобразуются в электрические колебания; последние после необходимого усиления записываются при помощи осциллографа. Однако основной принцип — наличие инерционного элемента на упругом (и обычно несколько демпфированном) подвесе — остается и в этой схеме.

Ручные вибрографы. Если в стационарном вибрографе неподвижным является перо, а подвижным — корпус, с которым связано движение ленты, то в ручном вибрографе (рис. IV.27) движется перо 1, следуя за колебаниями упорной иглы 3; корпус прибора 4 удерживается рукой и ввиду малой жесткости пружины 2 может считаться неподвижным. Хотя при работе вибрографа неизбежны некоторые перемещения корпуса, вызванные произвольными

движениями руки, однако в полученной записи эти колебания корпуса могут быть легко выделены, так как они заметно отличаются от основных колебаний своим относительно большим периодом.

Пружина 2 должна обеспечить следящее движение упорной иглы. Для исправной работы прибора необходимо, чтобы сила

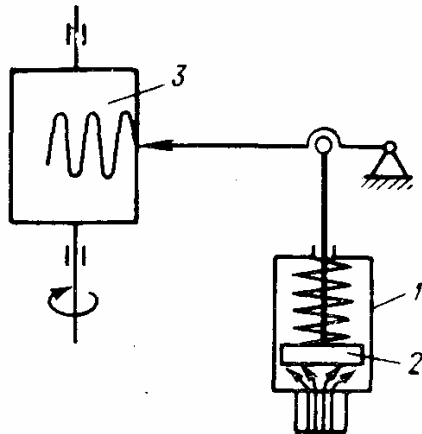


Рис. IV.28

сжатия пружины P могла обеспечить контакт конца иглы с колеблющимся объектом. При недостаточном сжатии пружины контакт может нарушиться, когда колеблющаяся деталь начнет двигаться в обратную сторону (от иглы). Ускорение этого движения равно (при гармонических колебаниях) $a\omega^2$, где a — амплитуда исследуемых колебаний. Для непрерывности контакта необходимо, чтобы сила начального сжатия пружины P обеспечивала не меньшее ускорение иглы. Обозначив через m массу иглы и связанных с ней частей прибора, приходим к условию $P/m \geq a\omega^2$, или $P \geq ma\omega^2$.

Пример 22. Определить необходимую силу начального сжатия пружины ручного вибрографа, предназначенного для записи колебаний с амплитудой до 0,6 см и частотой до 500 с^{-1} ; вес иглы и движущихся частей 0,05 кгс.

Масса подвижной части

$$m = \frac{0,05}{981} \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}.$$

Необходимая сила сжатия пружины

$$P \geq \frac{0,05}{981} 0,6 \cdot 500^2 = 7,6 \text{ кгс}.$$

Индикаторы динамического давления. Для измерений переменного давления в цилиндрах поршневых машин иногда применяются пружинные индикаторы (рис. IV.28). Цилиндр индикатора 1 сообщается с рабочей полостью цилиндра двигателя. Движение поршенька индикатора 2 под действием давления записывается на движущейся ленте 3. Для увеличения масштаба записи используется система рычагов (на рисунке она не показана). Барабан с лентой 3 связан с поршнем двигателя, поэтому в результате получается запись давления в зависимости от положения поршенька в цилиндре двигателя (индикаторная диаграмма).

Для того чтобы запись перемещения поршенька можно было читать, как запись давления, необходимы малая инерция подвижной системы прибора и большая жесткость пружины, иначе возникают недопустимо большие динамические искажения. Таким образом, требования к конструкции индикатора противоположны требованиям, которые предъявляются к конструкциям описанных выше

инерционных вибрографов. Отсутствие заметных динамических искажений может быть достигнуто, если период свободных колебаний подвижной системы прибора в несколько раз меньше длительности интервала возрастания (или убывания) давления. Чем быстрее машина, тем труднее удовлетворить этому требованию, поэтому описанные индикаторы применяются только для тихоходных машин.

Пример 23. Определить относительную ошибку показаний индикатора при следующих данных: время нарастания давления до наибольшего значения $t_* = 0,1$ с; площадь сечения цилиндра индикатора $F = 1,6$ см²; приведенный вес подвижных частей индикатора 60 гс. Известно, что при статическом давлении 2 кгс/см² конец стрелки индикатора перемещается на 0,5 см; передаточное число рычажной системы $i = 4$.

Найдем жесткость c пружины индикатора. При давлении 2 кгс/см² сила сжатия пружины $2 \cdot 1,6 = 3,2$ кгс, а деформация пружины $0,5/4 = 0,125$ см. Следовательно,

$$c = \frac{3,2}{0,125} = 25,6 \text{ кгс/см.}$$

Масса подвижных частей

$$m = \frac{0,06}{981} = 0,0000612 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{см.}$$

Собственная частота колебаний прибора

$$p = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{25,6}{0,0000612}} = 646 \text{ с}^{-1}.$$

Относительная ошибка показаний прибора определяется вторым слагаемым в выражении (IV.14) и приближенно равна $2/(pt_*) = 0,03$.

Принципы действия виброизоляторов и демпферов

Названные средства борьбы с вредными динамическими явлениями нашли разнообразное применение. В основе действия этих устройств лежат теоретические соображения, о которых шла речь выше:

1) амплитуды вынужденных колебаний могут быть достаточно малы, если собственная частота системы значительно меньше частоты возбуждения;

2) трение приводит к поглощению колебательной энергии, и вынужденные колебания происходят с меньшими амплитудами, чем при отсутствии трения; этот эффект особенно заметен в резонансной области;

3) благодаря поглощающей роли сил трения свободные колебания постепенно затухают.

На первом соображении основано устройство *виброизоляторов*, т. е. упругих элементов, специально вводимых в механиче-

скую систему для защиты от колебаний путем значительного уменьшения собственной частоты.

Второе соображение кладется в основу действия *демпферов* (поглотителей колебаний); главной частью всякого демпфера является элемент трения (жидкостного, сухого, гистерезисного и т. д.).

Для защиты от толчков и ударов применяют *амортизаторы*, которые представляют собой комбинации виброизоляторов и демпферов; иногда упругие и поглощающие свойства сочетаются в едином конструктивном элементе. В соответствии с третьим соображением демпфирование в амортизаторах способствует быстрому за-

туханию свободных колебаний, возникающих после толчков или ударов*.

Ниже (см. стр. 259) будет описан принцип действия еще одного средства борьбы с колебаниями — *гасителей колебаний* (виброгасителей); он основан на теории колебаний систем более чем с одной степенью свободы.

Прежде всего остановимся на виброизоляторах. Различают активную и пассивную системы виброизоляции.

В активной системе виброизоляторы устанавливаются под объектами, которые являются источниками вибрации (например, под двигателями) и служат для защиты основания от возмущающих сил $P(t)$ (рис. IV. 29, а). В противоположность этому пассивная система служит для защиты тех или иных объектов (приборов, прецизионных станков и т. д.) от возможных колебаний основания $f(t)$, т. е. от кинематического возбуждения (рис. IV.29, б). Во всех случаях необходим расчет виброизоляции; применение виброизолирующих устройств без расчета не допускается, так как случайная, необоснованная установка упругих элементов может принести не пользу, а вред. При виброизоляции быстроходных машин требуется, чтобы $\omega/p \geq 4$; при этом коэффициент динамичности оказывается меньшим, чем $1/15$. При активной виброизоляции тихоходных машин (с частотой вращения меньше 500 об/мин) разрешается как исключение принимать $\mu < 1/8$. С этой целью под корпус изолируемой машины или под постамент, на котором укрепляется машина, вводится система упругих элементов, которыми обычно являются стальные пружины или рессоры либо резиновые элементы. Для того чтобы предотвратить появление больших колебаний при переходе через резонанс (при пуске или остановке машины), может оказаться необходимым введение трения в систему. Применяются принципиально равноценные ва-

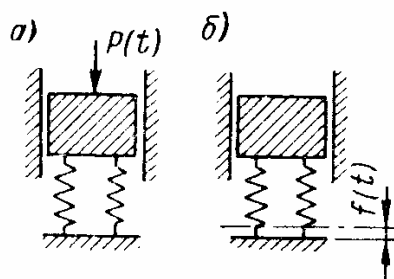


Рис. IV.29

* Впрочем, демпфирующими свойствами в некоторых случаях должны обладать и виброизоляторы (см. ниже). В этих случаях они принципиально не отличаются от амортизаторов.

рианты установки: опорный вариант, когда виброизоляторы располагаются под постаментом машины (рис. IV.30, а), и подвесной вариант, когда виброизоляторы располагаются выше подошвы постаментов; в последнем случае возможна работа виброизоляторов на сжатие (рис. IV.30, б) или растяжение (рис. IV.30, в).

Если в изолируемой машине преобладают горизонтальные возмущающие силы, то кроме указанных способов можно использовать маятниковую подвеску (рис. IV.30, г). Путем применения длинных подвесок могут быть достигнуты весьма малое значение собственной частоты и существенный эффект виброизоляции. Этот способ используется, в частности, при установке грохотов. Для

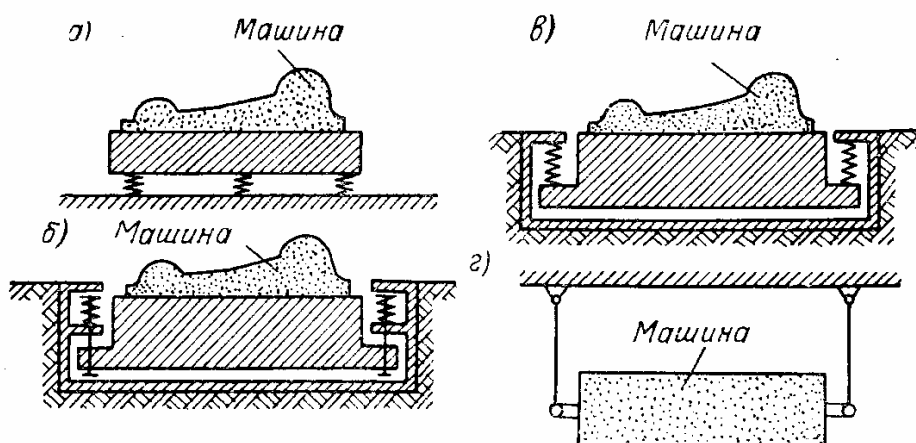


Рис. IV.30

виброизоляции станков применяют фасонные стальные пружины, придающие системе свойства равночастотности (см. стр. 69), а также виброизолирующие коврики.

Отметим, что в принципе смягчение подвески требуется лишь в направлении действия возмущающей силы (или пары). Так, например, при работе однофазных электродвигателей развивается переменный крутящий момент. Поэтому для виброизоляции податливой должна быть связь, соответствующая поворотам статора; в то же время необходимо обеспечить жесткость при вертикальных и горизонтальных перемещениях. Рациональный вариант подвески такого электродвигателя показан на рис. IV.31. Опорой подшипника служит стальная полоса, изогнутая так, чтобы оси наклонных участков пересекались на оси вала. При всяком вертикальном или горизонтальном перемещении такая опора оказывается весьма жесткой (наклонные участки работают на растяжение — сжатие и деформируются мало), тогда как при поворотах статора эта опора относительно податлива (наклонные участки работают на изгиб и легко деформируются).

По тем же соображениям в подвеске автомобильного двигателя создаются малая жесткость при упругих поворотах вокруг продольной оси и значительно большая жесткость в других направлениях.

Следует иметь в виду, что при виброизоляции тихоходных машин (когда частота возмущения невелика) могут потребоваться весьма малая собственная частота и соответственно трудно осуществимая большая податливость. Для преодоления этих затруднений в подобных случаях иногда искусственно увеличивают массу конструкции.

Главная особенность пассивной виброизоляции связана с тем, что частоты возбуждения сторого не фиксированы, а само возбуждение нередко носит полигармонический характер или является случайным процессом. Поэтому системы пассивной виброизоляции должны быть обеспечены надлежащим демпфированием, которое исключит опасность больших колебаний при любых частотах возбуждения. Эти соображения учитываются, например,

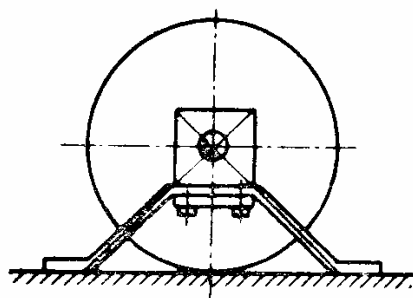


Рис. IV.31

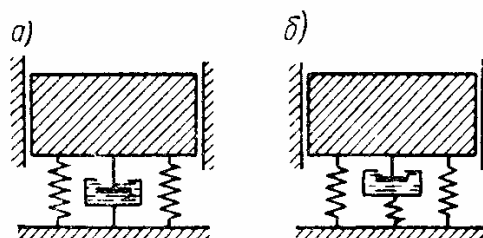


Рис. IV.32

при конструировании автомобильной подвески, которая, очевидно, должна обладать одновременно свойствами виброизолятора и амортизатора. В данном случае чисто упругая подвеска без демпфирования неприемлема и поэтому в систему подвески всегда вводят гидравлические демпферы, обеспечивающие значительное рассеяние энергии при колебаниях (рис. IV.32, а). Изображенная система подвески автомобиля имеет свой недостаток: она не обеспечивает достаточной комфортабельности езды при резких ударах, которые почти без смягчения (если не считать шин) передаются кузову.

Для достижения необходимой мягкости подвески целесообразно устройство подвески с дополнительным гибким элементом (рис. IV.32, б).

В некоторых случаях демпферы (поглотители колебаний) применяются в чистом виде, без параллельно включенных упругих элементов. Так, существуют различные схемы поглотителей крутильных колебаний: жидкостного трения (рис. IV.33, а), сухого трения (рис. IV.33, б) и гистерезисного типа (рис. IV.33, в). Диск, крутильные колебания которого необходимо погасить, обозначен на схемах цифрой 1.

В схеме на рис. IV.33, а имеется торообразная полость 2, в которой с некоторым зазором помещается кольцо 3. Зазор заполнен вязкой жидкостью, и демпфирование создается силами вязкости, возникающими при относительных крутильных колебаниях

диска и кольца. В последнее время часто применяется силиконовая жидкость, не меняющая своих свойств при изменениях температуры. В поглотителе сухого трения (рис. IV.33, б) система пружин 3 прижимает к стенкам кольцевой полости 4 диски 2. Если сила прижатия слишком велика, то диски будут двигаться вместе с диском и из-за отсутствия проскальзывания энергия не будет рассеиваться; если же прижатие будет очень слабым, то рассеивание будет мало из-за незначительности силы трения дисков о стенки. Поэтому такая конструкция поглотителя требует специального выбора оптимальной силы прижатия дисков. Нормальную работу может нарушить износ трущихся поверхностей.

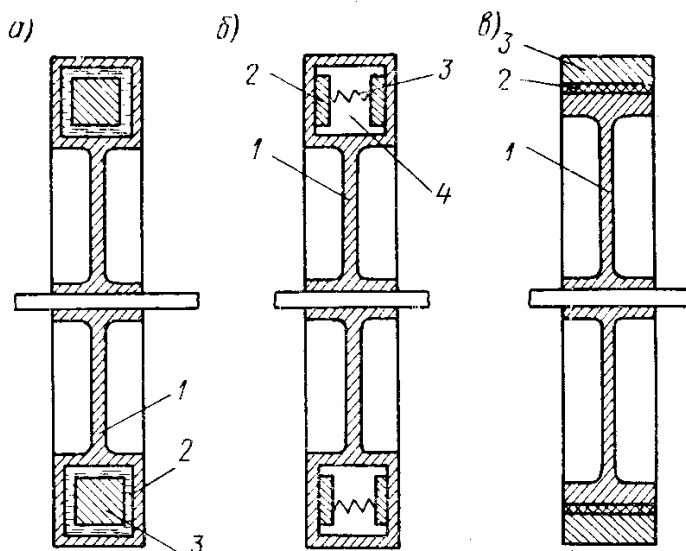


Рис. IV.33

В схеме на рис. IV.33, в с диском связано демпфирующее кольцо 2, на которое напрессован бандаж 3; при колебаниях диска происходит интенсивное рассеяние энергии в кольцевой прокладке 2, которая выполняется из материала с большим внутренним трением.

Колебания могут быть уменьшены или полностью устранены путем устройства поглотителей ударного действия. Плавающий

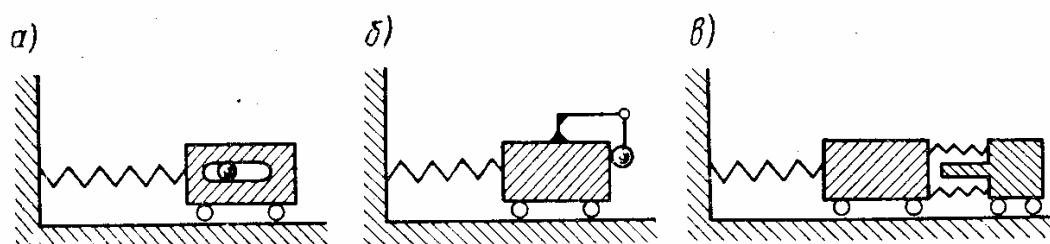


Рис. IV.34

ударный демпфер (рис. IV.34, а) представляет собой дополнительный груз, который свободно, с некоторым зазором помещается в демпфируемый объект; такие демпферы применяются для гашения колебаний тяг органов управления самолетов и вертолетов, станков и т. п. Маятниковый ударный демпфер (рис. IV.34, б) предназначен для гашения колебаний высотных конструкций — радиомачт, башенных сооружений, дымовых труб и т. п. Ударные

пружинные демпферы (рис. IV.34, в) в различных конструктивных оформлениях используются для устранения высокочастотных вибраций резцов и расточных оправок и для уменьшения колебаний виброизолированных машин при прохождении через резонанс.

21. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, ИМЕЮЩИЕ НЕЛИНЕЙНУЮ ВОССТАНАВЛИВАЮЩУЮ СИЛУ

Системы при отсутствии сопротивлений

Основное уравнение. Рассмотрим вынужденные колебания системы с нелинейной восстанавливающей силой при действии гармонической возмущающей силы, предполагая, что неупругие сопротивления отсутствуют. Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \frac{F(x)}{m} = \frac{P_0}{m} \sin \omega t \quad (\text{IV.58})$$

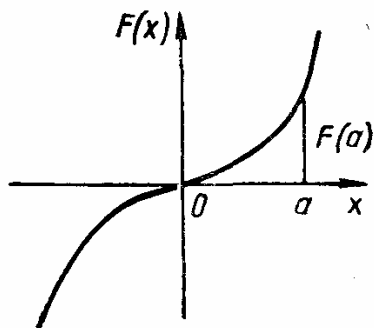


Рис. IV.35

при произвольно заданной характеристике восстанавливающей силы $F(x)$ (рис. IV.35) не может быть решено в замкнутой форме. Поэтому для решения уравнения пользуются различными приближенными способами.

Графическое решение уравнения. При симметричной характеристике $F(x)$ общий характер движения можно определить, пользуясь простым, хотя и наименее точным приемом, предположив, что колебания в рассматриваемой системе описываются законом

$$x = a \sin \omega t, \quad (\text{IV.59})$$

как и в линейных системах. Выражение (IV.59) является точным решением задачи только в случае, когда характеристика линейна, но в общем случае подстановка (IV.59) в уравнение (IV.58) не обращает его в тождество. Потребуем, чтобы уравнение (IV.58) выполнялось хотя бы в те мгновения, когда сила $P(t)$ и отклонение x достигают максимума: $P_{\max} = P_0$; $x_{\max} = a$. При этом максимальным оказывается также ускорение: $\ddot{x}_{\max} = -a\omega^2$, и согласно уравнению (IV.58) получим соотношение

$$F(a) = P_0 + ma\omega^2. \quad (\text{IV.60})$$

Величина $F(a)$ представляет собой максимальное значение упругой восстанавливающей силы.

Соотношение (IV.60) следует рассматривать как уравнение для неизвестной амплитуды колебаний a . Воспользуемся графическим способом решения этого уравнения.

Кривую $F(x)$, показанную на рис. IV.35, можно также рассматривать как зависимость наибольшей силы $F(a)$ от наибольшего отклонения a (амплитуды колебаний). Рассматривая теперь координатную систему $a, F(a)$, проведем прямую

$$z = P_0 + m\omega^2 \quad (\text{IV.61})$$

соответственно заданным значениям m, P_0 и ω . Положим, что частота ω невелика; тогда прямая пройдет достаточно полого

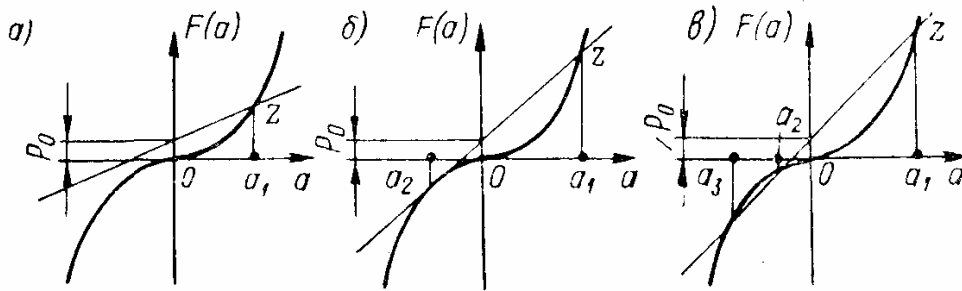


Рис. IV.36

(рис. IV.36, а). Очевидно, что абсцисса a_1 точки пересечения кривой и прямой удовлетворяет уравнению (IV.60), т. е. является единственным вещественным корнем этого уравнения.

Произведение $m\omega^2$ есть угловой коэффициент прямой. Поэтому, если рассматривать большие значения ω , то прямая (IV.61) пройдет круче; наконец, при достаточно большом значении ω прямая z коснется кривой $F(a)$ в третьем квадранте (рис. IV.36, б). При еще больших значениях ω прямая пересечет кривую $F(a)$ дважды в третьем квадранте (рис. IV.36, в). В этих случаях обнаруживается уже несколько корней уравнения: два для прямой, показанной на рис. IV.36, б (абсциссы a_1 и a_2), и три для прямой, показанной на рис. IV.36, в (абсциссы a_1, a_2 и a_3). Изменение значений этих корней при постепенном увеличении частоты ω показано сплошными линиями на рис. IV.37.

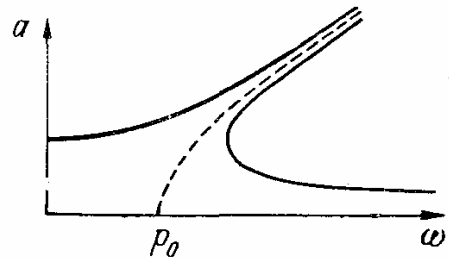


Рис. IV.37

Можно отметить следующие две главные особенности процесса вынужденных колебаний в рассматриваемой нелинейной системе: при достаточно высоких частотах ω решение становится неоднозначным (одному и тому же значению частоты ω могут соответствовать три значения амплитуды); амплитуда колебаний остается ограниченной даже при отсутствии неупругих сопротивлений.

Зависимость между амплитудой и частотой свободных колебаний этой нелинейной системы изображена штриховой линией на рис. IV.37. Для построения этой кривой может быть использовано графическое решение, подобное показанному на рис. IV.35;

в данном случае нужно положить $P_0 = 0$ и искать точки пересечения кривой $F(a)$ и прямой $z = m\mu^2 a$, проходящей через начало координат (рис. IV.38). Каждому значению частоты соответствует одно значение амплитуды. Точка p_0 (рис. IV.37) соответствует случаю исчезающе малых амплитуд колебаний. Кривая амплитуд свободных колебаний (штриховая линия на рис. IV.37) является скелетной линией, разделяющей две ветви амплитуд вынужденных колебаний.

Кривые, приведенные на рис. IV.37, типичны для систем с жесткой характеристикой, т. е. систем с постепенным увеличением жесткости. Если система имеет мягкую характеристику (когда жесткость уменьшается при росте x), то скелетная кривая оказывается искривленной влево.

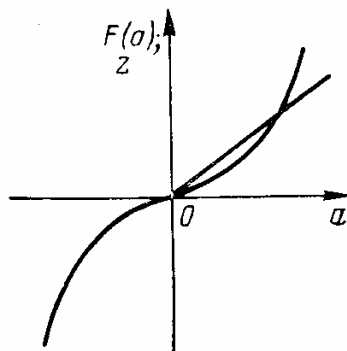


Рис. IV.38

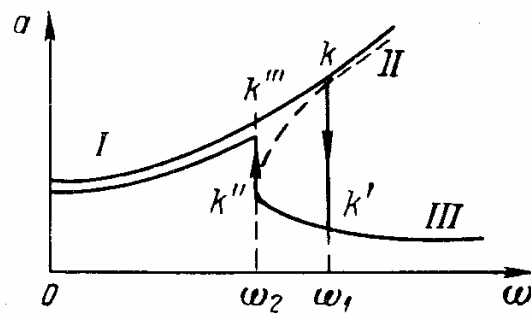


Рис. IV.39

Рассмотрим изменение амплитуды вынужденных колебаний при постепенном увеличении частоты возбуждения ω (рис. IV.39). Сначала при увеличении ω амплитуды также увеличиваются, следуя ветви *I*. Если при некотором значении частоты ω_1 система испытывает достаточно большое мгновенное возмущение, то происходит «срыв» амплитуды на ветвь *III* (точки k и k'). Дальнейшему возрастанию частоты будет соответствовать постепенное уменьшение амплитуд вдоль ветви *III*. Если после срыва в точке k частота ω начнет уменьшаться, то амплитуды колебаний будут сначала плавно увеличиваться, а затем, при значении частоты ω_2 (точка k'') произойдет обратный срыв амплитуды на ветвь *I* до значения, соответствующего точке k''' . Дальнейшему уменьшению частоты будет соответствовать уменьшение амплитуды вдоль ветви *I* вплоть до оси ординат. Ветви *II* соответствуют неустойчивым, следовательно, физически неосуществимым режимам (см. стр. 284).

Примененный способ решения задачи правильно выявляет общие закономерности, связывающие амплитуду вынужденных колебаний с частотой возбуждения, но для получения более точных количественных результатов необходимы уточненные способы решения той же задачи.

Решение уравнения методом Бубнова—Галеркина. Согласно этому методу нужно задаться искомым решением в виде суммы

$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots$, в которой $x_i(t)$ — избранные подходящие функции (их выбор подчиняется физическим соображениям о возможных частотах искомого режима); a_i — неопределенные коэффициенты, значения которых определяются из уравнений

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [m\ddot{x} + F(x) - P_0 \sin \omega t] x_i dt = 0.$$

Например, приняв в виде решения одночленное выражение (IV.59), получим

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [-ma\omega^2 \sin \omega t + F(a \sin \omega t) - P_0 \sin \omega t] \sin \omega t dt = 0.$$

Выполняя интегрирование, получим нелинейное алгебраическое уравнение для амплитуды колебаний a ; в развернутой форме оно может быть записано после конкретизации вида характеристики $F(x)$. Общий характер решения соответствует установленному выше (см. рис. IV.33).

Решение уравнения способом прямой линеаризации. Согласно этому способу нелинейное уравнение (IV.58) заменяется линейным

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{P_0}{m} \sin \omega t, \quad (\text{IV.62})$$

в котором величина p^2 определяется так, как было пояснено выше (см. стр. 81).

Стационарная часть решения линейного уравнения (IV.62) имеет вид

$$x = \frac{P_0 \sin \omega t}{m(p^2 - \omega^2)},$$

так что для амплитуды можно записать

$$a = \frac{P_0}{m(p^2 - \omega^2)}. \quad (\text{IV.63})$$

Если, например, $\frac{F(x)}{m} = p_0^2 x + \alpha x^3$, то, как было найдено выше, $p^2 = p_0^2 + \frac{5}{7} \alpha a^2$, и соотношение (IV.63) принимает вид

$$a = \frac{P_0}{mp_0^2 + \frac{5}{7} m \alpha a^2 - m \omega^2},$$

т. е.

$$\frac{5}{7} m \alpha a^3 + m(p_0^2 - \omega^2) a = P_0; \quad (\text{IV.64})$$

далее из этого нелинейного уравнения нужно определить неизвестную амплитуду a .

Решение уравнения методом Дурффинга. В основе этого метода лежит прием исключения вековых членов, указанный М. В. Остроградским для задачи о свободных колебаниях нелинейной системы. Следуя Дурффингу, ограничимся рассмотрением кубической характеристики

$$\frac{F(x)}{m} = p_0^2 x + \alpha x^3,$$

когда уравнение вынужденных колебаний принимает вид

$$\ddot{x} + p_0^2 x + \alpha x^3 = \frac{P_0}{m} \sin \omega t. \quad (\text{IV.65})$$

В качестве первого приближения примем

$$x = a \sin \omega t, \quad (\text{IV.66})$$

что является точным в случае линейной системы (т. е. при $\alpha = 0$).

Прежде чем искать следующее приближение, перепишем дифференциальное уравнение (IV.65) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - p_0^2) x - \alpha x^3 + \frac{P_0}{m} \sin \omega t. \quad (\text{IV.67})$$

Подставим в правую часть уравнения (IV.67) решение (IV.66):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \left[(\omega^2 - p_0^2) a - \frac{3}{4} \alpha a^3 + \frac{P_0}{m} \right] \sin \omega t + \frac{1}{4} \alpha a^3 \sin 3\omega t.$$

Если выражение, стоящее в квадратных скобках, отлично от нуля, то в решении появится вековой член и оно будет носить резонансный характер. Для исключения векового члена необходимо положить

$$(\omega^2 - p_0^2) a - \frac{3}{4} \alpha a^3 + \frac{P_0}{m} = 0. \quad (\text{IV.68})$$

Это соотношение, совпадающее по своей структуре с уравнением (IV.64), может быть использовано для определения амплитуды a .

Если соотношение (IV.68) выполнено, то уравнение (IV.67) приобретает вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{4} \alpha a^3 \sin 3\omega t.$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\alpha a^3 \sin 3\omega t}{4\omega^2 \left[1 - \left(\frac{3\omega}{\omega} \right)^2 \right]} = - \frac{\alpha a^3}{32\omega^2} \sin 3\omega t,$$

так что общее решение будет

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - \frac{\alpha a^3}{32\omega^2} \sin 3\omega t.$$

Полагая, что решение носит периодический характер с периодом $2\pi/\omega$, найдем постоянные из условий $x=a$, $\dot{x}=0$ при $t=\pi/(2\omega)$:

$$C_1 = a + \frac{\alpha a^3}{32\omega^2}; \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x} = a \sin \omega t + \frac{\alpha a^3}{32\omega^2} (\sin \omega t - \sin 3\omega t).$$

Таким образом, уже в этом приближении видно, что гармоническая сила $P_0 \sin \omega t$ вызывает в нелинейной системе не только колебания основного тона с частотой ω , но и колебания с более высокой частотой.

Для построения следующего приближения нужно подставить выражение (IV.64) в правую часть уравнения (IV.67). Далее для исключения возможности появления векового члена необходимо вновь положить коэффициент при $\sin \omega t$ равным нулю; это даст уточненное уравнение типа (IV.68), связывающее частоту ω и амплитуду a , и т. д.

Найденные в этом решении колебания с частотой 3ω (а также колебания с частотами 5ω , 7ω , . . . , которые можно обнаружить в следующих приближениях) называются *супергармоническими*. Их амплитуды быстро убывают с увеличением номера гармоники.

Наряду с этим в нелинейных системах могут возникнуть также *субгармонические* колебания, частота которых в целое число раз меньше основной частоты. Как оказывается, эти колебания могут иметь значительные амплитуды, но они полностью исчезают при достаточно больших диссипативных влияниях.

Системы с вязким сопротивлением

В данном случае естественно предполагать, что колебания будут отставать от возмущающей силы, так что если сила меняется по закону $P = P_0 \sin \omega t$, то колебания в первом приближении описываются уравнением $x = a \sin (\omega t - \gamma)$, где γ — фазовый угол. Можно описать колебания уравнением $x = a \sin \omega t$, принимая закон изменения силы в виде $P = P_0 \sin (\omega t + \gamma)$; при этом дифференциальное уравнение колебаний записывается так:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + F(x) = P_0 \sin (\omega t + \gamma), \quad (\text{IV.69})$$

а приближенное решение — в виде

$$x = a \sin \omega t. \quad (\text{IV.70})$$

Потребуем, как и выше, чтобы уравнение (IV.69) удовлетворялось в моменты наибольших отклонений, когда $\sin \omega t = 1$. При этом $x = a$; $\dot{x} = 0$; $\ddot{x} = -a\omega^2$; $\sin (\omega t + \gamma) = \cos \gamma$ и дифференциальное уравнение (IV.69) заменяется соотношением

$$-ma\omega^2 + F(a) = P_0 \cos \gamma. \quad (\text{IV.71})$$

Кроме того, потребуем, чтобы решение (IV.70) удовлетворяло уравнению (IV.69) в моменты перехода через положение равновесия. Подставляя в уравнение (IV.69) $x = 0$; $F(x) = 0$; $\dot{x} = a\omega$; $\ddot{x} = 0$; $\sin(\omega t + \gamma) = \sin \gamma$, получим

$$ka\omega = P_0 \sin \gamma. \quad (\text{IV.72})$$

Таким образом, для определения неизвестных a и γ служат уравнения (IV.71) и (IV.72). Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, исключим фазовый угол γ и получим уравнение для искомой амплитуды:

$$F(a) = \sqrt{P_0^2 - (ka\omega)^2} + ma\omega^2. \quad (\text{IV.73})$$

Отсюда, при отсутствии сил вязкого сопротивления, когда $k = 0$, следует полученное ранее уравнение (IV.60). При малых амплитудах a второе слагаемое под радикалом мало сравнительно

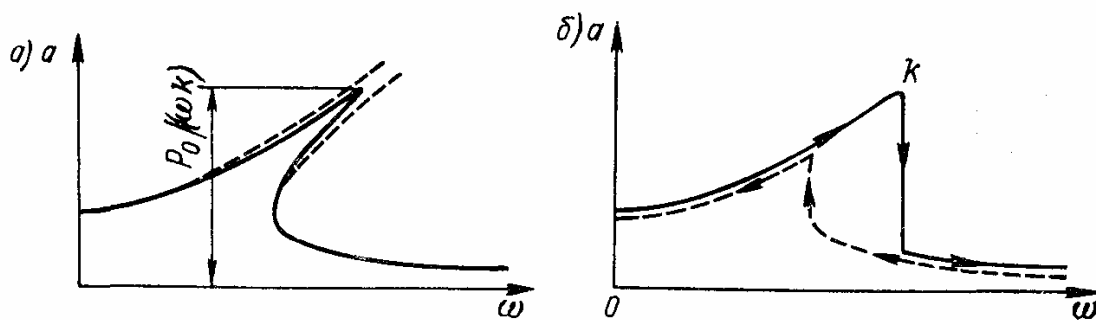


Рис. IV.40

с первым, так что решение (IV.37), полученное выше, приближенно верно и в рассматриваемом случае. Значительная разница появится при больших амплитудах, когда второе слагаемое под знаком корня станет близким к первому слагаемому. Такое сближение двух слагаемых означает, что эффективное значение силы P_0 мало, т. е. решение приближается к решению задачи о свободных колебаниях.

Наконец, при $ka\omega = P_0$ радикал обращается в нуль, и дальнейший рост амплитуд становится невозможным. Таким образом, значение амплитуды

$$a = \frac{P_0}{k\omega} \quad (\text{IV.74})$$

является максимальным. При этом уравнение (IV.73) принимает вид $F(a) = ma\omega^2$, и если сюда подставить амплитуду по (IV.74), то можно вычислить резонансную частоту

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{F(a)}{ma}}.$$

На рис. IV.40, а показаны кривая амплитуд с учетом сил затухания (сплошная линия) и кривая амплитуд без этого учета

(штриховая линия). Процесс постепенного увеличения частоты ω приводит к изменению амплитуд в соответствии с рис. IV.40, б (сплошная линия); последующий процесс уменьшения частоты показан штриховой линией. В данном случае неизбежен срыв амплитуды (точка k) даже при непрерывном увеличении частоты ω .

22. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Принципы решения уравнений колебаний систем

Если внешние возмущающие силы изменяются по гармоническому закону $P_i \sin \omega t$, т. е. имеют одинаковую частоту и фазу, то проще всего воспользоваться непосредственным способом решения, разыскивая установившееся движение в форме $x_i = a_i \sin \omega t$. Этот способ можно применить и к более сложным задачам, когда возмущающие силы изменяются по периодическому закону; в этих случаях необходимо предварительно разложить возмущающие силы на гармонические составляющие.

Более общим является способ, основанный на разложении решения по собственным формам колебаний. Главное достоинство этого способа состоит

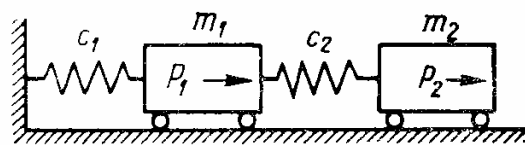


Рис. IV.41

в том, что с его помощью можно получить решение задачи о вынужденных колебаниях при любых заданных возмущающих силах и, в частности, непериодических. Если же силы изменяются по периодическому закону, то предварительное разложение их на гармонические составляющие становится излишним.

Особенности каждого из этих способов проследим на простейшем примере двухмассовой системы (рис. IV.41).

Непосредственное решение. Исследуем движение системы, вызванное одной гармоникой возбуждения, предполагая, что внешняя нагрузка изменяется по гармоническому закону (или по периодическому закону, но разложена в тригонометрический ряд). Силы, действующие на каждую массу, обозначим через $P_1 \sin \omega t$ и $P_2 \sin \omega t$.

Записывая уравнения движения каждой из масс, получим подобно выражениям (II.129) и (II.130):

$$\left. \begin{aligned} P_1 \sin \omega t - c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) &= m_1 \ddot{x}_1; \\ P_2 \sin \omega t - c_2 (x_2 - x_1) &= m_2 \ddot{x}_2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.75})$$

или

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= P_1 \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= P_2 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.76})$$

Решение этой системы, как и решение одного уравнения, составляется из двух частей: решения соответствующей однородной системы, имеющего вид выражения (II.142), и частного решения неоднородной системы (IV.76).

Раньше отмечалось, что слагаемое, описывающее колебания с собственной частотой, меняется во времени, быстро уменьшаясь вследствие действия неизбежных сил затухания. Основной интерес представляет вторая часть решения, соответствующая незатухающему, установившемуся процессу вынужденных колебаний.

Приняв частное решение в виде

$$x_1 = a_1 \sin \omega t; \quad x_2 = a_2 \sin \omega t \quad (\text{IV.77})$$

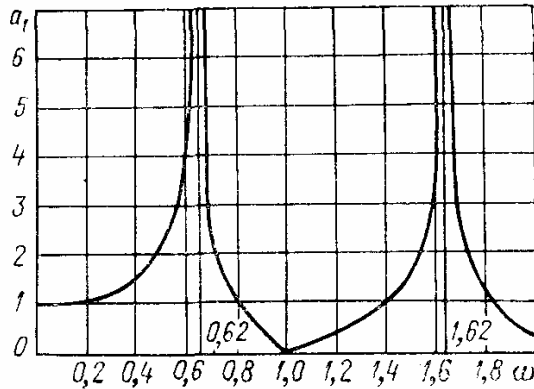


Рис. IV.42

и подставив его в выражение (IV.76), получим два уравнения с двумя неизвестными амплитудами колебаний a_1 и a_2 :

$$\left. \begin{aligned} -m_1 \omega^2 a_1 + c_1 a_1 - c_2 (a_2 - a_1) &= P_1; \\ -m_2 \omega^2 a_2 + c_2 (a_2 - a_1) &= P_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.78})$$

Решение (IV.77) означает, что колебания происходят с той же частотой, с которой происходит изменение самих сил.

Решая систему уравнений (IV.78), находим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{P_1 (c_2 - m_2 \omega^2) + P_2 c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) (c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}; \\ a_2 &= \frac{P_2 (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) + P_1 c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) (c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.79})$$

Знаменатели полученных выражений совпадают с левой частью частотного уравнения (II.138), если заменить в нем букву p буквой ω . Следовательно, если частота возбуждения ω совпадает с любой из двух собственных частот p_1 или p_2 , то знаменатели формул (IV.79) согласно уравнению (II.138) обратятся в нуль, а амплитуды a_1 и a_2 станут бесконечно большими (резонанс).

При $\omega = 0$ формулы (IV.79) определяют статические отклонения обеих масс, вызванные силами P_1 и P_2 :

$$a_1 = \frac{P_1 + P_2}{c_1}; \quad a_2 = \frac{P_1 + P_2}{c_1} + \frac{P_2}{c_2}.$$

При $\omega \rightarrow \infty$ решения (IV.79) стремятся к нулю. Зависимость амплитуды a_1 от частоты показана на рис. IV.42; график построен для случаев $P_1 = 1$; $P_2 = 0$; $c_1 = c_2 = 1$; $m_1 = m_2 = 1$. В этом

случае число резонансов равно двум, что соответствует числу степеней свободы системы и числу ее собственных частот.

При $\omega = 1$ амплитуда $a_1 = 0$; этот случай антирезонанса рассмотрен на стр. 259, 260.

При помощи выражений (IV.79) можно найти форму вынужденных колебаний, определяемую отношением a_2/a_1 . В общем случае эта форма не совпадает ни с одной из собственных форм; лишь при резонансах форма вынужденных колебаний совпадает с формой свободных колебаний.

Если возмущающие силы имеют полигармоническую структуру, то резонанс становится возможным при совпадении любой из частот возмущающей силы с любой из двух собственных частот системы.

Разложение решения по собственным формам колебаний. Предварительно образуем вспомогательные соотношения исходя из уравнений (II.129) и (II.130). Эти уравнения удовлетворяются как решениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11} \sin(p_1 t + \alpha_1); \\ x_2 &= a_{21} \sin(p_1 t + \alpha_1), \end{aligned} \right\} \quad (IV.80)$$

так и решениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{12} \sin(p_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= a_{22} \sin(p_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (IV.81)$$

Подставляем в уравнения (II.129) и (II.130) сначала решения (IV.80):

$$\left. \begin{aligned} -c_1 a_{11} + c_2 (a_{21} - a_{11}) &= -m_1 p_1^2 a_{11}; \\ -c_2 (a_{21} - a_{11}) &= -m_2 p_1^2 a_{21}, \end{aligned} \right\} \quad (IV.82)$$

а затем решения (IV.81):

$$\left. \begin{aligned} -c_1 a_{12} + c_2 (a_{22} - a_{12}) &= -m_1 p_2^2 a_{12}; \\ -c_2 (a_{22} - a_{12}) &= -m_2 p_2^2 a_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (IV.83)$$

Эти соотношения определяют собственные формы колебаний рассматриваемой системы и необходимы для дальнейшего.

В дифференциальных уравнениях (IV.76) неизвестными являются функции x_1 и x_2 . Основная идея рассматриваемого способа состоит в замене этих функций двумя новыми функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ согласно равенствам

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11} f_1 + a_{12} f_2; \\ x_2 &= a_{21} f_1 + a_{22} f_2, \end{aligned} \right\} \quad (IV.84)$$

где a_{11} и a_{12} — произвольные числа (можно, например, принять $a_{11} = a_{12} = 1$), с которыми a_{21} и a_{22} связаны соотношениями (IV.82) и (IV.83).

Подставив выражения (IV.84) в уравнения (IV.76), получим систему уравнений относительно новых функций f_1 и f_2 :

$$\left. \begin{aligned} m_1 (a_{11}\ddot{f}_1 + a_{12}\ddot{f}_2) + f_1 [c_1 a_{11} - c_2 (a_{21} - a_{11})] + \\ + f_2 [c_1 a_{12} - c_2 (a_{22} - a_{12})] = P_1 \sin \omega t; \\ m_2 (a_{21}\ddot{f}_1 + a_{22}\ddot{f}_2) + f_1 c_2 (a_{21} - a_{11}) + \\ + f_2 c_2 (a_{22} - a_{12}) = P_2 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.85})$$

На первый взгляд эта система уравнений ничуть не проще системы уравнений (IV.76). Однако последующие выкладки покажут, что возможно существенное упрощение уравнений (IV.85).

Прежде всего при помощи соотношений (IV.82) и (IV.83) перепишем уравнения (IV.85):

$$\left. \begin{aligned} m_1 (a_{11}\ddot{f}_1 + a_{12}\ddot{f}_2) + m_1 (p_1^2 a_{11} f_1 + p_2^2 a_{12} f_2) = \\ = P_1 \sin \omega t; \\ m_2 (a_{21}\ddot{f}_1 + a_{22}\ddot{f}_2) + m_2 (p_1^2 a_{21} f_1 + p_2^2 a_{22} f_2) = \\ = P_2 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.86})$$

Дальнейшие упрощения вытекают из свойств ортогональности собственных форм колебаний. Умножим первое уравнение (IV.86) на a_{11} , а второе — на a_{12} ; сложив затем полученные уравнения, найдем

$$\begin{aligned} (m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2) \ddot{f}_1 + (m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22}) \ddot{f}_2 + \\ + p_1^2 f_1 (m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2) + p_2^2 f_2 (m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22}) = \\ = (P_1 a_{11} + P_2 a_{21}) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Согласно свойству ортогональности

$$m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22} = 0$$

из записанного уравнения выпадают функция f_2 и ее вторая производная $\ddot{f}_2$; в результате получается дифференциальное уравнение для одной функции f_1 :

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = \frac{P_1 a_{11} + P_2 a_{21}}{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2} \sin \omega t. \quad (\text{IV.87})$$

Совершенно так же может быть получено дифференциальное уравнение относительно функции f_2 . Для этого нужно первое уравнение (IV.86) умножить на a_{12} , второе уравнение — на a_{22} и сложить полученные уравнения. Используя затем то же свойство ортогональности, получим

$$\ddot{f}_2 + p_2^2 f_2 = \frac{P_1 a_{12} + P_2 a_{22}}{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2} \sin \omega t. \quad (\text{IV.88})$$

Таким образом, способ разложения по собственным формам колебаний приводит к отдельным уравнениям (IV.87) и (IV.88),

каждое из которых описывает колебания некоторой системы с одной степенью свободы.

Если обозначить правые части дифференциальных уравнений (IV.87) и (IV.88) соответственно через $F_1 \sin \omega t$ и $F_2 \sin \omega t$, где

$$F_1 = \frac{P_1 a_{11} + P_2 a_{21}}{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2}; \quad F_2 = \frac{P_1 a_{12} + P_2 a_{22}}{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2},$$

то установившуюся часть решения можно записать в виде

$$f_1 = \frac{F_1}{p_1^2 - \omega^2} \sin \omega t; \quad f_2 = \frac{F_2}{p_2^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Теперь при помощи соотношений (IV.84) образуем решения

$$x_1 = \left(\frac{F_1 a_{11}}{p_1^2 - \omega^2} + \frac{F_2 a_{12}}{p_2^2 - \omega^2} \right) \sin \omega t;$$

$$x_2 = \left(\frac{F_1 a_{21}}{p_1^2 - \omega^2} + \frac{F_2 a_{22}}{p_2^2 - \omega^2} \right) \sin \omega t.$$

Нужно отметить, что указанные приемы обеспечивают разделение уравнений и при большем числе степеней свободы.

Разложение решения по собственным формам колебаний при сохранении заданного вида периодических нагрузок. Основное преимущество рассмотренного выше способа — разделение уравнений — никак не связано с тем или иным конкретным видом возмущающих сил: оно столь же легко достигается в случае произвольно заданных возмущающих сил $P_1(t)$, $P_2(t)$, как и в рассмотренном случае гармонических возмущающих сил $P_1 \sin \omega t$ и $P_2 \sin \omega t$. Не повторяя выкладок, приведем сразу окончательные уравнения для общего случая:

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = \frac{P_1(t) a_{11} + P_2(t) a_{21}}{m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2};$$

$$\ddot{f}_2 + p_2^2 f_2 = \frac{P_1(t) a_{12} + P_2(t) a_{22}}{m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2}.$$

В п. 18 мы видели, что подобные уравнения без особых затруднений интегрируются при любом виде правых частей; там же был рассмотрен случай произвольной периодической возмущающей силы. Таким образом, способ разложения решения по собственным формам колебаний вовсе не требует предварительного разложения возмущающих сил на гармонические составляющие. Определение гармонических составляющих является громоздкой операцией и требует учета иногда большого числа гармоник; эта операция оправдана, когда намечено вести решение первым способом, но представляется необязательной или даже излишней, если используется разложение по собственным формам колебаний.

Уравнение крутильных колебаний валов

Общие сведения. Вынужденные колебания валов являются неизбежным следствием переменности вращающих моментов, действующих на вал; эти моменты носят периодический характер и обусловлены как давлением газа в цилиндрах, так и силами инерции движущихся частей.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда на отдельные диски эквивалентной системы (см. рис. II.34) действуют любым образом заданные переменные моменты. Средние во времени значения этих моментов вызывают также постоянную во времени деформацию вала; поэтому для анализа колебаний достаточно учесть влияние лишь переменных частей каждого момента. Эти части обозначим через $M_1(t)$, $M_2(t)$, ..., $M_n(t)$ и будем называть их возмущающими моментами.

Если считать неупругие сопротивления отсутствующими, то уравнения вынужденных колебаний будут отличаться от уравнений свободных колебаний (II.146) наличием возмущающих моментов:

[illegible]

Для решения полученной системы уравнений могут быть использованы оба указанных выше способа.

Непосредственное решение. Для применения первого способа необходимо предварительно разложить периодические возмущающие моменты в ряды Фурье. После этого уравнения (IV.89) решаются несколько раз — отдельно для каждой гармоники возбуждения. Это приводит к ряду однотипных частных задач, каждая из которых требует анализа действия возмущающих моментов одинаковой частоты ω :

$$\left. \begin{aligned} M_{1s}(t) &= M_1 \sin \omega t; \\ M_{2s}(t) &= M_2 \sin \omega t; \\ . &. \\ M_{ns}(t) &= M_n \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.90})$$

При этом стационарные колебания будут происходить с частотой возбуждения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 \sin \omega t; \\ \varphi_2 &= a_2 \sin \omega t; \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_n &= a_n \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.91})$$

Номер составляющей . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Амплитуда составляющей	2,38	2,69	2,65	2,31	1,95	1,64	1,01	0,76	0,59	0,47

Разложение решения по собственным формам колебаний. Этот способ требует предварительного расчета частот и форм свободных колебаний, после чего определение вынужденных колебаний становится сравнительно простым. Обоснование расчетного способа совпадает с данным выше.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= f_0 + a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots + a_{1, n-1}f_{n-1}; \\ \varphi_2 &= f_0 + a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{2, n-1}f_{n-1}; \\ &\vdots \\ \varphi_n &= f_0 + a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \cdots + a_{n, n-1}f_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.95})$$
$$\ddot{f}_i + p_{if}^2 f_i = \frac{M_1 a_{1i} + M_2 a_{2i} + \dots + M_n a_{ni}}{a_{1i}^2 I_1 + a_{2i}^2 I_2 + \dots + a_{ni}^2 I_n}. \quad (\text{IV.96})$$

При практическом расчете крутильных колебаний валов существенными оказываются решения, соответствующие первым двум-трем собственным формам колебаний. Это значит, что достаточно решение двух-трех уравнений типа (IV.96) для $i = 1; 2; 3$.

256

ния. При этом становится реальной возможность совпадения частоты какой-либо гармоники возмущения с одной из собственных частот. В случае такого совпадения система оказывается в резонансном режиме и в расчет амплитуд колебаний следует ввести силы неупругого сопротивления.

Полное решение задачи (даже в простейшем предположении о вязких свойствах сил трения) оказывается очень громоздким, поэтому практические расчеты производят приближенными способами. Основное упрощение состоит обычно в том, что форма колебаний при резонансе принимается совпадающей с соответствующей собственной формой, определенной без учета сил затухания.

Пусть, например, одна из гармоник возмущающей силы имеет частоту ω_s , равную i -й собственной частоте. Тогда в расчете колебаний учитывается только i -я собственная форма, и если затухание носит вязкий характер, то вместо уравнения (IV.96) получится

$$\ddot{f}_i + 2n_i \dot{f}_i + p_i^2 f_i = Q_i \sin p_i t,$$

где n_i — коэффициент затухания (зависящий от номера резонирующей гармоники); Q_i — приведенная амплитуда возмущающей силы.

Это уравнение по смыслу совпадает с уравнением (IV.29). Согласно формуле (IV.32) резонансная амплитуда в данном случае

$$a^* = \frac{Q_i}{2np_i}.$$

После вычисления резонансного значения a^* следует образовать резонансные значения амплитуд углов поворота; при помощи формулы (IV.95) получим (в каждой строке опущены как малые все слагаемые, кроме i -го)

$$\varphi_1 = a_{1i} a^*; \quad \varphi_2 = a_{2i} a^*; \quad \dots; \quad \varphi_n = a_{ni} a^*.$$

Уравнения изгибных колебаний балок

Исследование вынужденных колебаний многомассовых систем, подобных изображенной на рис. II.11, можно вести любым из способов, указанных выше. Если возмущающие силы заданы в виде одной-двух гармоник, то предпочтительнее первый способ, не требующий предварительного исследования свободных колебаний.

Допустим, что на k -ю массу многомассовой системы действует возмущающая сила

$$P(t) = P_k \sin \omega t, \quad (\text{IV.97})$$

где P_k — амплитуда силы; ω — ее частота.

Тогда в уравнениях (II.157) появятся дополнительные сла-
гаемые, соответствующие этому виду возбуждения:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{11} - m_2\ddot{y}_2\delta_{12} - \dots - m_n\ddot{y}_n\delta_{1n} + P_k\delta_{1k}\sin\omega t; \\ y_2 &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{21} - m_2\ddot{y}_2\delta_{22} - \dots - m_n\ddot{y}_n\delta_{2n} + P_k\delta_{2k}\sin\omega t; \\ &\vdots \\ y_n &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{n1} - m_2\ddot{y}_2\delta_{n2} - \dots - m_n\ddot{y}_n\delta_{nn} + P_k\delta_{nk}\sin\omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.98})$$

Стационарная часть решения имеет вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin \omega t; \\ y_2 &= a_2 \sin \omega t; \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= a_n \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.99})$$

Подстановка выражений (IV.99) в уравнения (IV.98) приводит к системе уравнений, служащих для определения амплитуд колебаний $a_1, a_2, \dots, a_n$:

[illegible]

В этих уравнениях известны все коэффициенты (массы m_i , перемещения δ_{ik} , частота ω), и для определения n амплитуд нужно решить полученную систему n алгебраических уравнений.

Пример 25. На среднюю массу системы (рис. IV.43, а) действует возмущающая сила $P \sin \omega t$. Определить амплитуды перемещений всех масс и построить энтуру динамических изгибающих моментов. Момент инерции поперечного сечения балки $J = 35\,520 \text{ см}^4$; модуль упругости материала балки $E = 2,1 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2$; пролет балки $l = 400 \text{ см}$; вес груза $Q = 4000 \text{ кгс}$; масса $m = Q/g = 4,08 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{см}$; амплитуда возмущающей силы $P = 600 \text{ кгс}$; частота возмущающей силы $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$.

Для определения единичных перемещений воспользуемся выражениями, приведенными в примере 12, и вычисляем

$$k = \frac{l^3}{9.1296 EJ} = \frac{400^3}{9.1296 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 35\,520} = 7,38 \cdot 10^{-8} \text{ см/кrc};$$

$$\delta_{11} = \delta_{33} = 75k = 5,53 \cdot 10^6 \text{ см/кгс}; \delta_{22} = 243k = 17,92 \cdot 10^{-6} \text{ см/кгс};$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \delta_{32} = \delta_{23} = 117k = 8,64 \cdot 10^{-6} \text{ см/кгс};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 51k = 3,76 \cdot 10^{-6} \text{ см/кгс.}$$

Уравнения (IV.100) принимают вид

$$\begin{aligned} & (1 - 4,08 \cdot 5,53 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4) a_1 - 4,08 \cdot 8,64 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 a_2 - \\ & \quad - 4,08 \cdot 3,76 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 a_3 = 600 \cdot 8,64 \cdot 10^{-6}; \\ & - 4,08 \cdot 8,64 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 a_1 + (1 - 4,08 \cdot 17,92 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4) a_2 - \\ & \quad - 4,08 \cdot 8,64 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 a_3 = 600 \cdot 17,92 \cdot 10^{-6}; \\ & - 4,08 \cdot 3,76 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 a_1 - 4,08 \cdot 8,64 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 a_2 + \\ & \quad + (1 - 4,08 \cdot 5,53 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4) a_3 = 600 \cdot 8,64 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем $a_1 = a_3 = -0,064$ см и $a_2 = -0,128$ см.

Найденные амплитуды колебаний более чем в 10 раз превосходят величины соответствующих статических перемещений:

$$y_{1ст} = y_{3ст} = P_2 \delta_{12} = 600 \cdot 8,64 \cdot 10^{-6} = 0,0052 \text{ см};$$

$$y_{2ст} = P_2 \delta_{22} = 600 \cdot 17,92 \cdot 10^{-6} = 0,0107 \text{ см},$$

что объясняется близостью частоты возбуждения к собственной частоте p_1 . Действительно, пользуясь данными, полученными в примере 12, находим, что первая собственная частота незначительно отличается от частоты ω :

$$p_1 = \frac{5,692}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}} =$$

$$= \frac{5,692}{400} \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 35 \cdot 520}{4,08 \cdot 400}} =$$

$$= 96,3 \text{ с}^{-1}.$$

Для построения эпюры динамических изгибающих моментов нужно рассмотреть нагружение скелета балки амплитудными значениями возмущающей силы и сил инерции $ma_i \omega^2$, развиваемых сосредоточенными массами (рис. IV.43, б). При этом следует учесть, что инерционные силы находятся в фазе, противоположной заданному возмущению (так как $\omega > p_1$). Подсчет дает:

$$ma_1 \omega^2 = -2610 \text{ кгс}; \quad ma_2 \omega^2 =$$

$$= -5220 \text{ кгс}; \quad ma_3 \omega^2 = -2610 \text{ кгс}.$$

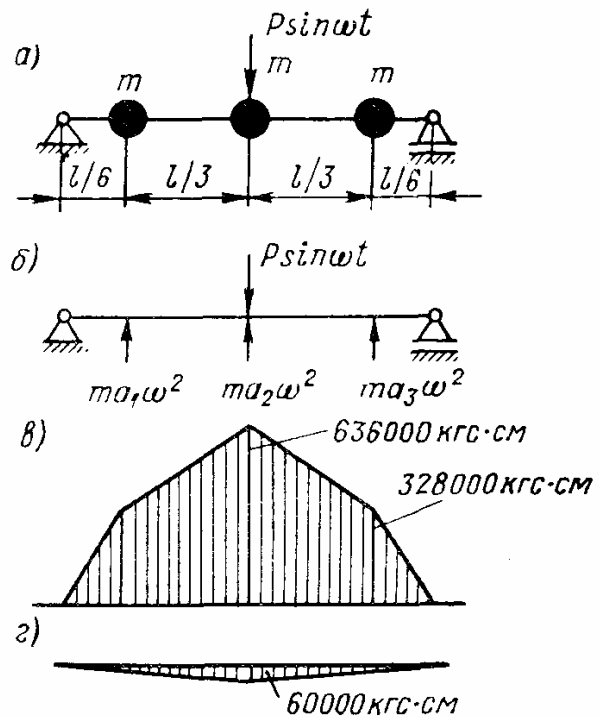


Рис. IV.43

Эпюра моментов, соответствующая указанному нагружению, показана на рис. IV.43, в. Для сравнения на рис. IV.43, г приведена эпюра изгибающих моментов, возникающих в условиях статического нагружения той же балки силой 600 кгс (обе эпюры соответствуют дополнительному нагружению к чисто статическому нагружению силами mg).

Динамические гасители колебаний

Вернемся к схеме на рис. IV.41 и рассмотрим решение (IV.79) в случае, когда возмущающая сила действует только на первую массу, т. е. $P_1 \neq 0$; $P_2 = 0$:

$$a_1 = \frac{P_1 (c_2 - m_2 \omega^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) (c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2};$$

$$a_2 = \frac{P_1 c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) (c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}.$$

Из этих формул видно, что в частном случае, когда

$$c_2 - m_2 \omega^2 = 0, \quad (\text{IV.101})$$

амплитуды a_1 и a_2 получают следующие значения:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = -P_1/c_2, \quad (\text{IV.102})$$

т. е. первая масса остается неподвижной, хотя именно к ней приложена возмущающая сила (антирезонанс).

Этот любопытный результат положен в основу устройства динамического гасителя колебаний (виброгасителя). Пусть, например, имеется система (рис. IV.44, а), испытывающая действие возмущающей силы $P \sin \omega t$. Чтобы погасить колебания этой системы, достаточно присоединить к ней дополнительную массу на упругой связи (рис. IV.44, б), подчинив параметры присоединяемой системы условию (IV.101). Тогда колебания основной массы исчезнут, а амплитуды колебаний дополнительной массы определяются второй из формул

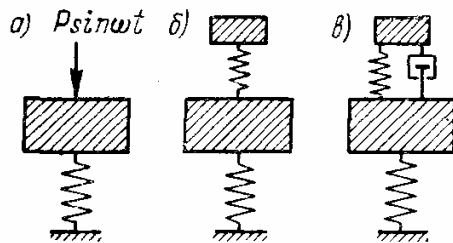


Рис. IV.44

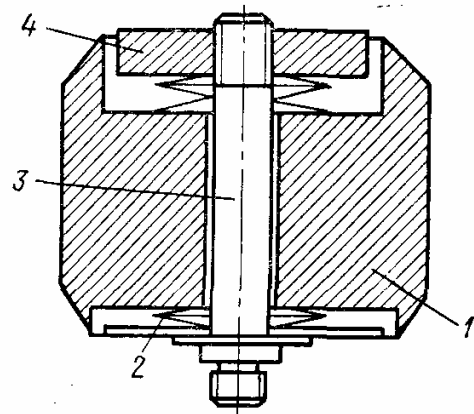


Рис. IV.45

(IV.102). Такая дополнительная масса играет роль динамического гасителя колебаний (виброгасителя) для основной массы. Идея этого устройства нашла разнообразное практическое применение, в особенности в тех случаях, когда частота возбуждения достаточно стабильна. Если это условие не соблюдено, то возникают опасности появления резонансов полученной системы с двумя степенями свободы. Для того чтобы избежать появления значительных амплитуд колебаний при возможных изменениях частоты возбуждения, в систему гасителя обычно вводятся демпфирующие элементы (рис. IV.44, в).

Существует ряд конструкций виброгасителей для станков. На рис. IV.45 показана одна из схем виброгасителя для расточных и токарных станков. Здесь 1 — груз гасителя; 2 — тарельчатые шайбы, служащие упругим элементом; 3 — центральный стержень, который ввертывается в вибрирующее звено станка (резец или расточная оправка); 4 — гайка. В этой схеме демпфирование создается трением тарельчатых шайб. В некоторых системах виброгасителей станков для целей демпфирования используется сухое или вязкое трение или эффект удара (в последнем случае образуется система, близкая к показанной на рис. IV.34, в).

Для того чтобы виброгаситель был способен гасить колебания с некоторой заданной частотой ω , нужно, чтобы его параметры удовлетворяли условию (IV.101), т. е.

$$p_2 = \omega, \quad (\text{IV.103})$$

где $p_2 = \sqrt{c_2/m_2}$ — «парциальная» частота гасителя, т. е. его собственная частота, определяемая при неподвижности основной массы системы.

Тот же принцип может быть применен и для гашения крутильных колебаний. Малый дополнительный диск может при надлежащей настройке служить динамическим гасителем крутильных колебаний двухмассовой системы (рис. IV.46). Если необходимо исключить колебания основной системы, подверженной возбуждению частоты ω , то, как следует из формулы (IV.103), собственная частота гасителя p_0 , подсчитанная при неподвижности точки его крепления, должна быть равна частоте ω , т. е.

$$\sqrt{c/I_p} = \omega,$$

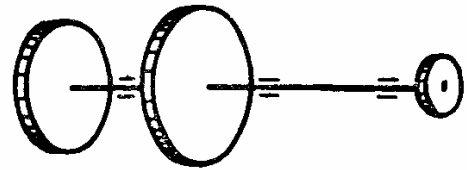


Рис. IV.46

где c — коэффициент жесткости вала гасителя; I_p — полярный момент инерции массы диска гасителя.

Очевидно, что настроенный на одну определенную частоту дополнительный упруго прикрепленный диск окажется гасителем колебаний только этой частоты, а при других частотах возбуждения может оказаться неэффективным или даже стать причиной резонанса. Это особенно важно для валов двигателей внутреннего сгорания, поскольку с изменением частоты вращения пропорционально меняется и частота возбуждения. Поэтому в подобных случаях желательно обеспечить гаситель следящей настройкой, чтобы при изменении частоты возбуждения соответственно менялась и собственная частота гасителя. Так как упругое крепление дополнительного диска не в состоянии обеспечить следящую настройку, то для гашения колебаний вращающихся валов применяют маятниковые гасители.

В п. 4 было показано, что маятник, подвешенный к вращающемуся диску, имеет собственную частоту, пропорциональную угловой скорости вращения:

$$p = \omega \sqrt{R/l}, \quad (\text{IV.104})$$

где R — расстояние от центра диска до точки подвеса маятника; l — длина маятника.

С другой стороны, в двигателях внутреннего сгорания частота всякой гармоникой возбуждения также пропорциональна угловой скорости вращения ω . Поэтому такой маятник может служить динамическим гасителем колебаний, вызываемых одной определенной гармоникой при любой скорости вращения.

В первую очередь должна быть устранена наиболее опасная гармоника. Пусть, например, решено исключить колебания, вызываемые гармоникой возбуждения, имеющей частоту 3ω . Тогда из формулы (IV.104) следует $\omega \sqrt{R/l} = 3\omega$, т. е. $R/l = 9$. Для гашения колебаний, вызываемых какой-либо иной гармоникой, потребовалось бы иное отношение R/l .

Так как размер R ограничен, то величина l оказывается очень малой; это делает затруднительным конструктивное оформление маятника, показанного на рис. II.8. Однако в системе двойного подвеса маятника (см. рис. II.9) согласно формуле (II.17) расчетная длина l может быть сделана сколь угодно малой; для этого нужно лишь соответственно уменьшить разность между диаметрами роликов и отверстий.

Хотя изложенное выше предполагает линейный характер колебаний, но линейность системы не следует считать условием успешного гашения колебаний. Напротив, нелинейность, появляющаяся при больших колебаниях маятника, дополнительно способствует гашению колебаний.

23. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Указанные в п. 22 два способа решения задачи о вынужденных колебаниях систем с несколькими степенями свободы пригодны и для анализа колебаний систем с распределенной массой. Выбор способа подсказывается характером возмущающих сил: при гармоническом возмущении удобнее первый способ, а при произвольно заданном возмущении — второй.

Уравнение продольных колебаний стержней

Гармоническое возбуждение; непосредственное решение. Рассмотрим случай, когда стержень испытывает действие одной сосредоточенной продольной силы, изменяющейся по гармоническому закону

$$P = P_0 \sin \omega t. \quad (\text{IV.105})$$

Стационарные вынужденные колебания происходят с частотой возбуждения и, следовательно, описываются законом

$$u(x, t) = U(x) \sin \omega t, \quad (\text{IV.106})$$

где $U(x)$ — подлежащая определению функция абсциссы (форма вынужденных колебаний).

Для элемента стержня (см. рис. II.49, в) получим уравнение (II.180); подставив в него выражение (IV.106), придем к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $U(x)$:

$$U'' + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0, \quad (\text{IV.107})$$

где c^2 определяется формулой (II.181).

Уравнение (IV.107) отличается от уравнения (II.184) для формы свободных колебаний тем, что частота ω заранее известна. Подобно выражению (II.186) решение уравнения (IV.107) запишем в виде

$$U = C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x. \quad (\text{IV.108})$$

Постоянные C и D должны быть определены из граничных условий, которые формулируются следующим образом.

1. Закрепленный конец стержня. В этом случае $u=0$ при любом t ; это требует, чтобы в данном сечении $U = 0$.

2. К концу стержня приложена возмущающая сила (IV.105). Она должна быть равна продольной силе в концевом сечении. Согласно формуле (II.178) имеем

$$N = EF \frac{\partial u}{\partial x} = EF U' \sin \omega t. \quad (\text{IV.109})$$

Приравняв выражения (IV.105) и (IV.109), получим граничное условие

$$U' = \frac{P_0}{EF}. \quad (\text{IV.110})$$

3. Конец стержня свободен от нагрузки. Согласно формуле (IV.110) $U' = 0$.

4. На конце стержня имеется сосредоточенная масса m_0 . Развиваемая ею сила инерции $-m_0 \ddot{u}_0 = m_0 \omega^2 U_0 \sin \omega t$ (здесь u_0 и U_0 — величины, относящиеся к точке прикрепления массы m_0) должна быть равна продольной силе $N_0 = EF \frac{\partial u}{\partial x} = EF U'_0 \sin \omega t$. Следовательно,

$$\frac{m_0 \omega^2}{EF} U_0 = U'_0.$$

Пример 26. Определить амплитуду колебаний конца стержня, к которому приложена возмущающая сила $P = P_0 \sin \omega t$. Другой конец стержня закреплен.

Совмещая начало координат с закрепленным концом, имеем граничные условия: $U = 0$ при $x = 0$; $U' = \frac{P_0}{EF}$ при $x = l$. Подставив это в решение (IV.108), получим

$$C = \frac{P_0}{EF \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} l}; \quad D = 0.$$

Следовательно, амплитуда колебаний конца стержня

$$U(l) = \frac{P_0 c}{EF \omega} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c}. \quad (\text{IV.111})$$

При весьма малой частоте (т. е. при медленном изменении силы P) $\operatorname{tg} \frac{\omega l}{c} \approx \frac{\omega l}{c}$ и формула (IV.111) преобразуется в выражение статического перемещения

$$U(l) = \frac{P_0 l}{EF}.$$

При $\omega l/c = \pi/2$, т. е. когда $\omega = \pi c/(2l)$, амплитуда $U(l)$ обращается в бесконечность, что соответствует резонансу, при этом частота ω равна низшей собственной частоте. Резонанс с высшими частотами соответствует частотам возбуждения

$$\omega = (2n + 1) \frac{\pi c}{2l} \quad (n = 2; 3; \dots).$$

При $\omega l/c = n\pi$ ($n = 1; 2; \dots$) концевое сечение неподвижно (антирезонанс).

Пример 27. Решить ту же задачу в предположении, что на конце стержня имеется сосредоточенная масса m_0 .

Пользуясь прежней координатной системой, имеем граничные условия: при $x = 0$ имеем $U = 0$; при $x = l$

$$U' = \frac{P_0}{EF} + \frac{m_0 \omega^2}{EF} U.$$

Второе граничное условие выражает равенство продольной силы на правом конце стержня сумме возмущающей силы и силы инерции концевой массы. Подставив первое из условий в выражение (IV.108), найдем $D = 0$; из второго условия получим

$$C = P_0 \left(EF \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} - m_0 \omega^2 \sin \frac{\omega l}{c} \right).$$

Амплитуда колебаний конца стержня

$$U(l) = \frac{P_0 \sin \frac{\omega l}{c}}{EF \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} - m_0 \omega^2 \sin \frac{\omega l}{c}}.$$

Если стержень имеет переменное сечение, меняющееся по ступенчатому закону, решение (IV.108) должно быть записано отдельно для каждого из n участков:

$$U_1 = C_1 \sin \frac{\omega}{c} x_1 + D_1 \cos \frac{\omega}{c} x_1;$$

$$U_2 = C_2 \sin \frac{\omega}{c} x_2 + D_2 \cos \frac{\omega}{c} x_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$U_n = C_n \sin \frac{\omega}{c} x_n + D_n \cos \frac{\omega}{c} x_n.$$

Постоянные C_i и D_i определяются из двух условий на концах стержня и $2(n - 1)$ условий сопряжения. Последние выражают равенство перемещений и продольных сил на границе двух участков:

$$U_{i-1}(l_{i-1}) = U_i(0); (EFU')_{i-1}(l_{i-1}) = (EFU')_i(0).$$

Аналогично следует поступать и в тех случаях, когда возмущающая сила приложена в ряде промежуточных сечений.

Обратимся к случаю, когда внешняя нагрузка непрерывно распределена по длине стержня:

$$q(x, t) = q_0(x) \sin \omega t. \quad (\text{IV.112})$$

Возвращаясь к рис. II.49, запишем уравнение движения с учетом элементарной внешней нагрузки $q_0(x) dx \sin \omega t$. Тогда при помощи соотношения (IV.106) при $EF = \text{const}$ получим

$$U'' + \frac{\omega^2}{c^2} U = \frac{q_0}{EF}.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения зависит от вида правой части. Так, если $q_0 = \text{const}$, то

$$U = C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x + \frac{q_0}{\rho F \omega^2}.$$

В общем случае

$$U = C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x + \frac{c}{EF\omega} \int_0^x q_0(\xi) \sin \frac{\omega}{c} (x - \xi) d\xi. \quad (\text{IV.113})$$

Если сечение стержня непрерывно меняется, то исходное дифференциальное уравнение запишется в виде

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(при отсутствии распределенной внешней нагрузки). После подстановки выражения (IV.106) это уравнение принимает форму

$$(FU')' + \frac{\omega^2}{c^2} FU = 0; \quad (\text{IV.114})$$

оно имеет переменные коэффициенты и в общем случае не может быть решено в замкнутом виде. Поэтому приходится пользоваться приближенными способами, например, методом Бубнова—Галеркина. В первом приближении, принимая для $U(x)$ подходящую функцию U_1 , получаем уравнение в виде

$$\int_0^l \left[(FU_1)' + \frac{\omega^2}{c^2} FU_1 \right] U_1 dx = 0. \quad (\text{IV.115})$$

Функция U_1 должна удовлетворять граничным условиям, причем по крайней мере одно из них зависит от амплитуды возмущающей силы [например, условие (IV.110)]. Поэтому нужно задаваться функцией U_1 так, чтобы удовлетворить обоим гранич-

ным условиям задачи и, кроме того, иметь один неопределенный параметр, который найдется из уравнения (IV.115).

Разложение решения в ряд по собственным функциям. В общем случае внешняя нагрузка произвольным образом распределена по длине и является какой угодно функцией времени:

$$q = q(x, t).$$

В частности, нагрузка может меняться во времени по закону, общему для всех точек:

$$q = q_0(x) H(t). \quad (\text{IV.116})$$

Согласно рис. II.49, учитывая элементарную внешнюю нагрузку $q dx$, получим при $EF = \text{const}$

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (\text{IV.117})$$

Далее нагрузка $q(x, t)$ и перемещение $u(x, t)$ представляются в виде рядов по собственным функциям соответствующей задачи о свободных колебаниях [см. формулу (II.186)]:

$$\left. \begin{aligned} q &= X_1(x) S_1(t) + X_2(x) S_2(t) + \dots; \\ u &= X_1(x) T_1(t) + X_2(x) T_2(t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.118})$$

Для определения функций времени $S_i(t)$ умножим обе части уравнения (IV.117) на $X_i(x)$ и проинтегрируем результат по всей длине стержня. При интегрировании в правой части исчезнут все слагаемые, кроме i -го (вследствие свойства ортогональности собственных функций), и для $S_i(t)$ получится формула

$$S_i(t) = \frac{\int_0^l q(x, t) X_i(x) dx}{\int_0^l X_i^2(x) dx}. \quad (\text{IV.119})$$

Если нагрузка меняется по закону (IV.116), то

$$S_i(t) = H(t) \frac{\int_0^l q_0(x) X_i(x) dx}{\int_0^l X_i^2(x) dx}, \quad (\text{IV.120})$$

т. е. функции $S_i(t)$ для всех номеров i различаются лишь масштабом.

Если нагружение осуществляется сосредоточенными силами $P_a(t), P_b(t), \dots$ в сечениях с абсциссами $a, b, \dots$, то формула (IV.119) принимает вид

$$S_i(t) = \frac{P_a(t) X_i(a) + P_b(t) X_i(b) + \dots}{\int_0^l X_i^2(x) dx}. \quad (\text{IV.121})$$

Определение функций $T_i(t)$ основано на том, что каждое слагаемое в правой части верхнего ряда (IV.118) вызывает движение, определяемое соответствующим слагаемым нижнего ряда (IV.118). Поэтому в уравнение (IV.117) можно подставить

$$q = X_i(x) S_i(t); u = X_i(x) T_i(t).$$

Тогда получим уравнение

$$EFX_i''T_i - \rho FX_i\ddot{T}_i = X_i S_i,$$

или после деления на $\rho FX_i T_i$

$$c^2 \frac{X_i''}{X_i} = \frac{\ddot{T}_i}{T_i} + \frac{S_i}{\rho F T_i}.$$

Согласно первой формуле (II.183) левая часть полученного равенства постоянна и равна $-p_i^2$. Следовательно, тому же равна и правая часть; отсюда

$$\ddot{T}_i + p_i^2 T_i = -\frac{S_i}{\rho F}.$$

Как было указано выше (см. стр. 195), решение такого уравнения имеет вид

$$T_i = -\frac{1}{\rho F p_i} \int_0^t S_i(\tau) \sin p_i(t - \tau) d\tau.$$

Эта формула и решает задачу, так как дает возможность образовывать вторую из сумм (IV.118).

Если нагрузка следует закону (IV.116), то с учетом выражения (IV.120) можно написать

$$T_i = -\frac{\int_0^l q_0(x) X_i(x) dx}{\rho F p_i \int_0^l X_i^2(x) dx} \int_0^t H(\tau) \sin p_i(t - \tau) d\tau. \quad (\text{IV.122})$$

В случае произвольной периодической функции $H(\tau)$ следует воспользоваться способами, изложенным в п. 18. Конечно, в простейшем случае (IV.112) проще искать решение в виде (IV.106), определяя $U(x)$ по выражению (IV.113).

Уравнения изгибных колебаний балок

Гармоническое возбуждение; непосредственное решение. Рассмотрим в качестве типичного примера случай, когда возмущающая нагрузка задана в виде сосредоточенной силы

$$P = P_0 \sin \omega t \quad (\text{IV.123})$$

или комбинации нескольких нагрузок того же вида с одинаковой частотой. Решение для прогибов будем разыскивать в виде

$$y(x, t) = Y(x) \sin \omega t, \quad (\text{IV.124})$$

сводя задачу к определению формы колебаний (кривой амплитуд прогибов) $Y(x)$.

В случае $m = \text{const}$, подставив в уравнение (II.196) выражение (IV.124), получим подобно уравнению (II.199)

$$Y^{IV} - \frac{m\omega^2}{EJ} Y = 0. \quad (\text{IV.125})$$

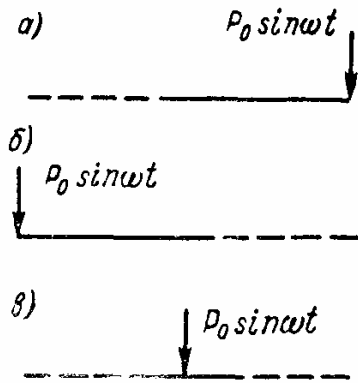


Рис. IV.47

Решение дифференциального уравнения (IV.125) имеет вид, подобный выражению (IV.126):

$$Y = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V, \quad (\text{IV.126})$$

где S , T , U и V — функции Крылова (II.202), в которых вместо выражения (II.200) нужно принять

$$k = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJ}}.$$

Для определения постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 , входящих в общее решение (IV.126), необходимо использовать граничные условия. Кроме сказанного выше [см. формулы (II.206) — (II.210)], здесь необходимо рассмотреть, по крайней мере, еще два случая.

Возмущающая сила $P_0 \sin \omega t$ приложена на конце балки (рис. IV.47, а, б). Тогда этой силе должна быть равна поперечная сила:

$$Q = EJy'' = EJY'' \sin \omega t,$$

и граничное условие принимает вид

$$Y'' = \pm \frac{P_0}{EJ}$$

(верхний знак соответствует силе, приложенной к правому концу, нижний знак — силе, приложенной к левому концу). Кроме того, здесь же должно быть $Y'' = 0$.

Возмущающая сила $P_0 \sin \omega t$ приложена в промежуточном сечении балки (рис. IV.47, в). В этом сечении должны выполняться четыре условия сопряжения:

$$Y(a_-) = Y(a_+); \quad Y'(a_-) = Y'(a_+); \quad Y''(a_-) = Y''(a_+); \\ Y'''(a_-) - Y'''(a_+) = \frac{P_0}{EJ},$$

где a — абсцисса сечения, в котором приложена возмущающая сила. Индексы — и + соответствуют сечениям, расположенным непосредственно рядом слева и справа от сечения a .

Первые три условия означают непрерывность прогиба, угла поворота сечения и изгибающего момента в точке приложения возмущающей силы; четвертое условие выражает разрыв функции поперечной силы в указанном сечении на величину P_0 .

При большом числе возмущающих сил удобен предложенный Н. И. Безуховым способ начальных параметров.

Пример 28. Определить кривую амплитуд колебаний консольной балки длиной l , если к ее свободному правому концу приложена возмущающая сила (IV.123).

Граничные условия имеют вид:

$$Y(0) = 0; Y'(0) = 0; Y''(l) = 0; Y'''(l) = \frac{P_0}{EJ}.$$

Первые два условия дают $C_1 = C_2 = 0$, а третье и четвертое условия приводят к уравнениям

$$k^2 (C_3 S_l + C_4 T_l) = 0; \quad k^3 (D_3 V_l + C_4 S_l) = \frac{P_0}{EJ};$$

отсюда находим

$$C_3 = - \frac{T_l}{k^3 EJ (S_l^2 - T_l V_l)} P_0; \quad C_4 = \frac{S_l}{k^3 EJ (S_l^2 - T_l V_l)} P_0.$$

Подставив это в выражение (IV.126), получим

$$Y = \frac{P_0 (S_l V_x - T_l U_x)}{k^3 EJ (S_l^2 - T_l V_l)}. \quad (IV.127)$$

Амплитуда прогиба конца консоли равна

$$Y(l) = \frac{P_0 (S_l V_l - T_l U_l)}{k^3 EJ (S_l^2 - T_l V_l)}.$$

Если подставить сюда выражения функций Крылова, то получится

$$Y(l) = \frac{P_0 (\operatorname{sh} kl \cos kl - \operatorname{ch} kl \sin kl)}{k^2 EJ (\operatorname{ch} kl \cos kl + 1)}.$$

Отсюда видно, что при $\operatorname{ch} kl \cos kl = 0$ наступает резонанс; этот случай соответствует совпадению частоты возмущающей силы с какой-либо из собственных частот. В то же время, если выполняется равенство $\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl$, то конец консоли будет оставаться неподвижным (антирезонанс).

Разложение решения в ряд по собственным функциям. В общем случае, когда возмущающая поперечная нагрузка задана произвольным законом

$$q = q(x, t),$$

дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{q}{m} \quad (IV.128)$$

и отличается от уравнения (II.196) наличием правой части.

Как и выше (см. стр. 266), представим $q(x, t)$ в виде ряда

$$q(x, t) = X_1(x) S_1(t) + X_2(x) S_2(t) + \dots \quad (\text{IV.129})$$

и также в виде ряда будем разыскивать решения для прогиба

$$y(x, t) = X_1(x) T_1(t) + X_2(x) T_2(t) + \dots \quad (\text{IV.130})$$

Для определения функций времени $S_i(t)$ умножим обе части равенства (IV.129) на $X_i(x)$ и проинтегрируем результат по всей длине балки; ввиду ортогональности собственных функций в правой части остается только одно слагаемое, соответствующее номеру i , так что

$$S_i(t) = \frac{\int_0^l q(x, t) X_i(x) dx}{\int_0^l X_i^2(x) dx}. \quad (\text{IV.131})$$

Эта формула совпадает по записи с формулой (IV.119), введенной выше для случая продольных колебаний, но в выражении (IV.131) $X_i(x)$ представляют собой собственные функции задачи о свободных колебаниях балки. Поэтому здесь также справедлива формула (IV.121), относящаяся к случаю сосредоточенных возмущающих сил.

Учитывая, что каждое слагаемое ряда (IV.129) вызывает движение, описываемое соответствующим слагаемым ряда (IV.130), можно записать уравнение (IV.128) в виде

$$X_i \ddot{T}_i + \frac{EJ}{m} X_i^{IV} T_i = \frac{X_i S_i}{m}.$$

Разделив обе части на $X_i T_i$, получим

$$-\frac{EJ}{m} \cdot \frac{X_i^{IV}}{X_i} = \frac{\ddot{T}_i}{T_i} - \frac{S_i}{mT_i}.$$

Левая часть этого равенства равна $-p_i^2$, поэтому

$$\frac{\ddot{T}_i}{T_i} - \frac{S_i}{mT_i} = -p_i^2.$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение для T_i :

$$\ddot{T}_i + p_i^2 T_i = \frac{S_i}{m}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (IV.8):

$$T_i(t) = \frac{1}{mp_i} \int_0^t S_i(\tau) \sin p_i(t - \tau) d\tau. \quad (\text{IV.132})$$

Изложенный способ позволяет получить решения и в случаях переменного сечения, если заранее найдены собственные формы X_i и собственные частоты p_i .

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

24. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

В ряде случаев параметры механической системы (т. е. ее жесткость или масса) не остаются неизменными, а являются некоторыми заданными функциями времени (обычно периодическими).

Если нарушить состояние равновесия такой системы, то будут совершаться своеобразные колебания: с одной стороны, их нельзя назвать свободными, поскольку система неавтономна и испытывает заданное внешнее воздействие в виде изменения параметра, а с другой стороны, они не являются вынужденными, так как внешнее воздействие не проявляется в виде заданной силы. Эти колебания называются параметрическими и в зависимости от свойств системы и характера изменения ее параметров могут иметь ограниченные или возрастающие во времени пиковые значения; последний случай называют параметрическим резонансом.

Если на систему с переменными во времени параметрами действует внешняя возмущающая сила, то задача приводит к изучению вынужденных колебаний в параметрической системе; этот относительно сложный вопрос ниже не рассматривается.

Последующее изложение посвящено в основном определению условий возникновения параметрического резонанса, т. е., в конечном счете, исследованию устойчивости системы. Это сближает содержание настоящей главы с гл. III, где речь шла об устойчивости автономных систем.

Простейшая система

Рассмотрим систему, показанную на рис. V.1. Как видно, сосредоточенная масса I закреплена на конце невесомого стержня 2, причем свобода перемещений стержня дополнительно ограничена втулкой 3, удаленной от нижнего конца стержня на расстояние l . Составим уравнение свободных колебаний груза, считая, что они происходят в плоскости чертежа. Если в текущий момент времени t перемещение груза составляет x , то восстанавливающая

сила упругости стержня равна $-cx$ и уравнение движения груза имеет вид

$$-cx = m\ddot{x}, \quad (V.1)$$

где c — коэффициент жесткости системы.

Втулка 3 при ее достаточной длине обеспечивает практически полное защемление нижней части стержня, и коэффициент c можно определить по известной формуле $c = 3EJ/l^3$. Здесь предполагается, что стержень имеет постоянное поперечное сечение с моментом инерции J ; E — модуль упругости материала стержня. Таким образом, дифференциальное уравнение (V.1) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{3EJ}{ml^3} x = 0. \quad (V.2)$$

Если расстояние l постоянно, то уравнение (V.2) описывает свободные колебания массы около ее среднего положения, причем дробь $3EJ/(ml^3)$ представляет собой квадрат собственной частоты колебаний.

Допустим теперь, что втулка 3 скользит вдоль стержня 2 по заданному закону

$$z = A \cos \omega t,$$

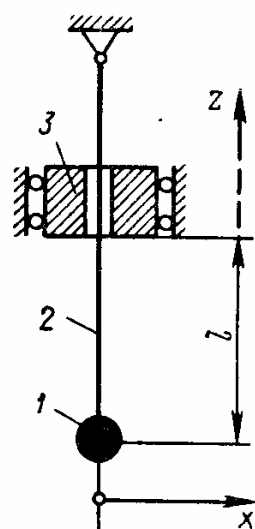


Рис. V.1

т. е. совершает около среднего положения l гармонические колебания с амплитудой A и круговой частотой ω . В этом случае коэффициент жесткости оказывается функцией времени:

$$c = \frac{3EJ}{(l+z)^3} = \frac{3EJ}{(l+A \cos \omega t)^3}, \quad (V.3)$$

и дифференциальное уравнение (V.2) становится уравнением с переменными коэффициентами:

$$\ddot{x} + \frac{3EJ}{m(l+A \cos \omega t)^3} x = 0. \quad (V.4)$$

Именно переменность коэффициентов типична для систем с параметрическим возбуждением колебаний.

Уравнение Матье

Существует много других механических систем, подверженных параметрическому возбуждению. Ряд примеров, приведенных ниже, убеждает, что во многих практически важных случаях дифференциальное уравнение параметрических колебаний можно привести к стандартной форме

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) x = 0, \quad (V.5)$$

где a и q — некоторые постоянные.

Вернемся для примера к механической системе, показанной на рис. V.1, и положим, что амплитуда A колебаний втулки весьма мала по сравнению с длиной l ; тогда вместо выражения (V.3) приближенно получается

$$c = \frac{3EJ}{(l + A \cos \omega t)^3} \approx \frac{3EJ}{l^3 + 3l^2 \cos \omega t} \approx \frac{3EJ}{l^3} \left(1 - \frac{3A}{l} \cos \omega t \right), \quad (\text{V.6})$$

и дифференциальное уравнение (V.4) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{3EJ}{ml^3} \left(1 - \frac{3A}{l} \cos \omega t \right) x = 0. \quad (\text{V.7})$$

Переходя теперь к безразмерному времени τ ($2\tau = \omega t$), имеем

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\omega^2}{4} \cdot \frac{d^2x}{d\tau^2},$$

и дифференциальное уравнение (V.7) приобретает стандартную форму (V.5), причем

$$a = \frac{12EJ}{m\omega^2 l^3}; \quad q = \frac{18AEJ}{m\omega^2 l^4}. \quad (\text{V.8})$$

Преобразования этого рода типичны для случаев малой глубины пульсации переменного параметра системы.

Обратимся теперь к основному уравнению рассматриваемых здесь задач (V.5), которое называется уравнением Матье. Решения уравнения Матье носят колебательный характер, и их свойства зависят от конкретных значений параметров a и q . В одних случаях данной комбинации значениям a и q соответствуют колебания, ограниченные по амплитуде, а в других случаях — колебания с возрастающими амплитудами. Очень часто (при исследованиях устойчивости) подробности колебаний малосущественны, так как основную важность представляет именно тенденция колебательного процесса: если амплитуды остаются ограниченными, то система устойчива; в противном случае имеет место параметрический резонанс и система неустойчива.

Результаты решения уравнения Матье для двух различных комбинаций a и q показаны на рис. V.2, a , b (эти решения получены при помощи электронного аналогового устройства). Хотя в обоих случаях параметр q системы одинаков ($q = 0,1$), но колебания имеют резко различный характер из-за различия между значениями параметра a ($a = 1$; $a = 1,2$); в первом случае они возрастают, т. е. система неустойчива, а во втором случае остаются ограниченными, т. е. система устойчива.

Для практических целей наибольшее значение имеют границы между областями устойчивых и неустойчивых решений. Этот вопрос хорошо изучен, причем окончательные результаты пред-

ставляются в виде диаграммы, построенной в плоскости параметров a и q . Она называется диаграммой Айнса—Стретта. На рис. V.2, в изображена часть диаграммы Айнса—Стретта, относящаяся к малым значениям параметра q . Каждой данной системе, характеризуемой параметрами a и q , соответствует точка с координатами a, q на диаграмме Айнса—Стретта (изображающая точка). Если изображающая точка находится в пределах заштрихованных полей диаграммы, то система устойчива; неустойчивым системам соответствуют изображающие точки, расположенные на белых полях.

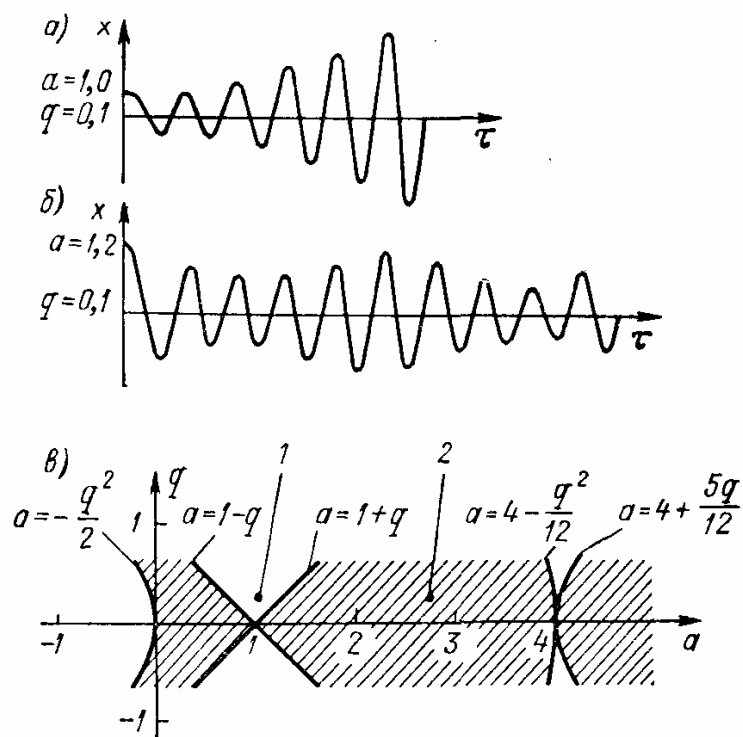


Рис. V.2

В качестве примера на диаграмме указаны точки 1 и 2, соответствующие параметрам $a_1 = 1; q_1 = 0,1; a_2 = 1,2; q_2 = 0,1$ (решение уравнения Матье для этих случаев даны на рис. V.2, а, б). Точка 1 находится в белой зоне (неустойчивость), и колебания происходят с возрастающими амплитудами (рис. V.2, а). Точка 2 находится в пределах заштрихованной зоны, ей отвечает движение с ограниченной амплитудой (рис. V.2, б).

Полная диаграмма Айнса—Стретта представлена на рис. V.3. Как видно, в плоскости параметров a, q области устойчивости чередуются с областями неустойчивости, причем наиболее широкая, а потому и наиболее важная область неустойчивости содержит точку $a = 1; q = 0$. В окрестности этой точки, т. е. при небольших значениях q , условия устойчивости $a < 1 - q$ и $a > 1 + q$ (см. рис. V.2) можно объединить в одно общее условие

$$q^2 < (1 - a)^2. \quad (\text{V.9})$$

Диаграмма Айнса—Стретта полностью освобождает от выполнения каких-либо операций по решению уравнения Матье. В каждом конкретном случае достаточно составить это уравнение, т. е. найти значения параметров системы a и q ; после этого диаграмма сразу дает ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости системы.

Проследим за изменением свойств параметрических колебаний при постепенном изменении частоты возбуждения. Возвращаясь для примера к выражениям (V.8), видим, что с возрастанием частоты оба параметра a и q пропорционально уменьшаются. Так как отношение обоих параметров остается постоянным, то последовательные состояния системы определяются изображающими точками на штриховом луче $q = ka$, проходящем через начало координат. На рис. V.3 отчетливо видно чередование устойчивых и неустойчивых состояний при возрастающих значениях частоты возбуждения.

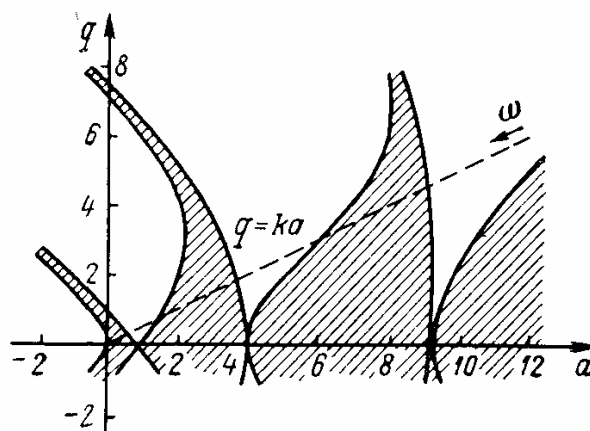


Рис. V.3

25. СЛУЧАИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ

Эти случаи весьма часто встречаются в системах самого различного вида. Приведем несколько примеров.

На рис. V.4, а показана система, упругой частью которой является зубчатый (шлицевый) вал 1. На нижнем конце вала нахо-

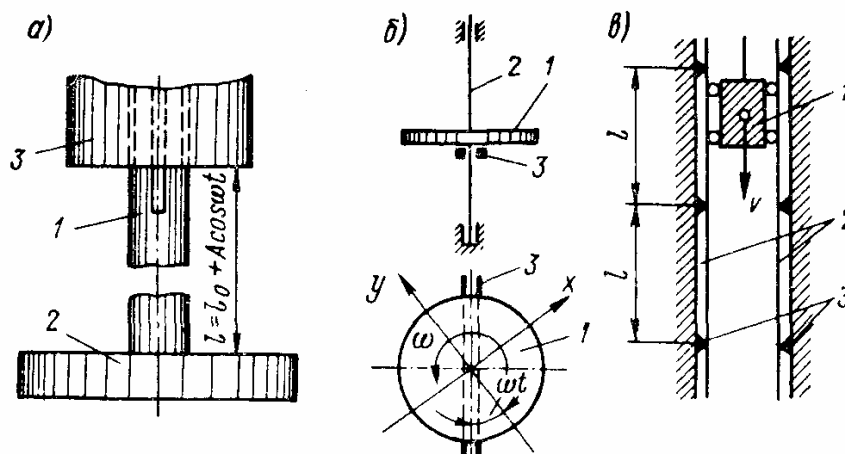


Рис. V.4

дится диск 2. С валом соединена зубчатая (шлицевая) массивная втулка 3, которая может скользить вдоль оси вала и совершать гармонические колебания в вертикальном направлении. В этой системе возможно возбуждение не только изгибных, но и крутиль-

ных колебаний. Пусть свободная длина вала в текущий момент времени t составляет

$$l = l_0 + A \cos \omega t.$$

При этом коэффициент жесткости вала на кручение

$$c = \frac{GJ_p}{l} = \frac{GJ_p}{l_0 + A \cos \omega t}.$$

Если амплитуда колебаний A значительно меньше среднего значения длины l_0 , то выражение для c можно представить в форме

$$c = \frac{GJ_p}{l_0} \left(1 - \frac{A}{l_0} \cos \omega t \right),$$

что по структуре полностью совпадает с выражением (V.6). Поэтому крутильные колебания рассматриваемой системы также описываются уравнением Матье (V.5), причем

$$a = \frac{4GJ_p}{\omega^2 l_0}; \quad q = \frac{2AGJ_p}{\omega^2 l_0^2}.$$

Следовательно, рассматриваемая система при некоторых условиях, определяемых диаграммой Айнса—Стретта, может оказаться в состоянии параметрического резонанса. Конечно, то же может быть и в случаях, когда ось вала не совпадает с вертикалью.

Другой пример системы с периодическим изменением жесткости представлен на рис. V.4, б. Система содержит диск 1, закрепленный посередине вертикального вала 2. На части длины вал имеет поперечное сечение с различными главными моментами инерции, по этой причине жесткость вала неодинакова в двух главных направлениях x и y . Направляющие 3 фиксируют плоскость, в которой может происходить изгиб вала. Поэтому при вращении вала в подшипниках его жесткость на изгиб в этой плоскости периодически меняется и возможно параметрическое возбуждение колебаний.

Заметим, что если направляющие отсутствуют, то, как было указано выше (см. стр. 170), вал неустойчив во всей области угловых скоростей:

$$\sqrt{c_1/m} < \omega < \sqrt{c_2/m}.$$

Поучительный пример параметрического возбуждения колебаний представляет собой система, показанная на рис. V.4, в. Шахтная клеть 1 равномерно движется по вертикальным направляющим 2, которые закреплены на шпалах 3. В этой системе поперечная жесткость, определяющая восстанавливающую упругую силу при поперечных колебаниях клетки, переменна: если клеть находится на уровне очередной пары шпал, то эта жесткость

достигает максимума; если же клеть расположена против середины свободного пролета направляющих, жесткость минимальна. Частота изменения жесткости зависит от расстояния между шпалами и от скорости движения клетки $\omega = 2\pi v/l$; отсюда ясно, что существует ряд «запретных» диапазонов скорости v , соответствующих условиям параметрического резонанса. Эти соображения позволили объяснить причину опасных колебаний шахтных клеток, которые неоднократно наблюдались в натуральных условиях.

26. СЛУЧАИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Простейший пример системы рассматриваемого типа представлен на рис. V.5, а. Масса 1 закреплена на верхнем конце вертикального совершенно жесткого стержня 2; внизу стержень имеет опору 3, упруго сопротивляющуюся повороту (упругий шарнир). На верхний конец стержня действует вертикальная сила P . Такая

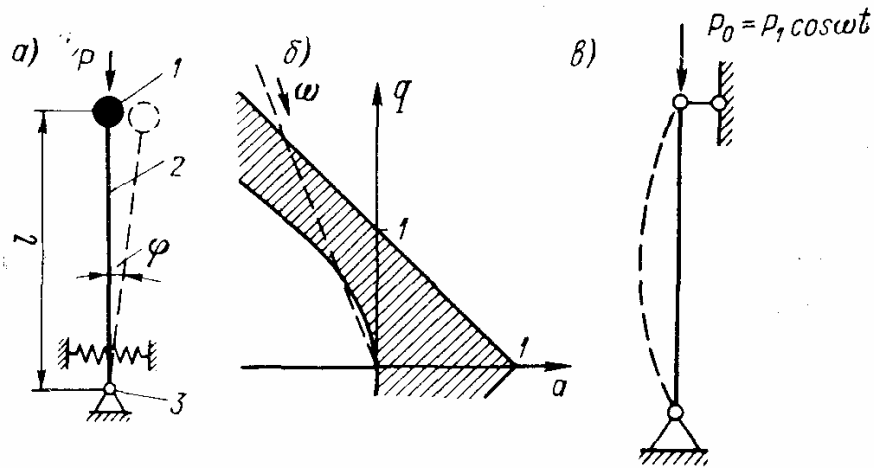


Рис. V.5

система представляет собой результат упрощенной схематизации реального стержня, обладающего распределенными массой и упругостью.

Сила P является параметрической нагрузкой, и, если она неизменна во времени, ее критическое значение можно найти при помощи метода Эйлера. Пусть φ — угол отклонения стержня от вертикали и c — коэффициент жесткости упругого шарнира. Тогда восстанавливающий момент (момент упругого шарнира) составляет $-c\varphi$, и уравнение равновесия стержня в отклоненном состоянии приобретает вид

$$Pl\varphi - c\varphi = 0. \quad (V.10)$$

Из условия $\varphi \neq 0$ находим, что отклоненное состояние равновесия возможно, если сила P равна

$$P_{кр} = c/l. \quad (V.11)$$

Этой формулой определяется критическое значение статически действующей силы P (например, веса груза l).

То же значение можно найти, рассматривая свободные колебания груза l . В отличие от уравнения статики (V.10) уравнение моментов относительно шарнира 3 содержит инерционный член и имеет вид

$$Pl\varphi - c\varphi = ml^2\ddot{\varphi}, \quad (\text{V.12})$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \frac{c - Pl}{ml^2} \varphi = 0.$$

При $c = Pl$ частота свободных колебаний системы обращается в нуль, т. е. система становится неустойчивой. Для значения критической силы вновь следует прежний результат (V.11).

Рассмотрим теперь случай, когда сила P изменяется во времени, следуя гармоническому закону

$$P = P_0 + P_1 \cos \omega t.$$

При этом уравнение колебаний стержня (V.12) запишется в виде

$$(P_0 + P_1 \cos \omega t) l\varphi - c\varphi = ml^2\ddot{\varphi},$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{ml^2} (c - P_0 l - P_1 l \cos \omega t) \varphi = 0;$$

это уравнение приводит к стандартной форме уравнения Матье (V.5), если положить

$$2\tau = \omega t; \quad a = \frac{4}{m\omega^2 l} \left(\frac{c}{l} - P_0 \right); \quad q = \frac{2P_1}{m\omega^2 l}. \quad (\text{V.13})$$

При возрастании частоты ω параметры a и q пропорционально уменьшаются. Штриховой луч на рис. V.3 указывает, что система проходит ряд последовательно чередующихся устойчивых и неустойчивых состояний. Наклон луча определяется отношением

$$k = \frac{q}{a} = \frac{P_1}{2(P_{\text{кр}} - P_0)},$$

где $P_{\text{кр}}$ — статическая критическая сила, определяемая выражением (V.11).

При данном значении P_1 величина k зависит от разности $P_{\text{кр}} - P_0$. Чем ближе значение статической составляющей P_0 к критическому значению $P_{\text{кр}}$, тем круче проходит луч и тем шире пересекаемые им участки областей неустойчивости; это естественно, так как приближение силы P_0 к эйлеровой силе должно облегчить возникновение неустойчивости.

Важно заметить, что потеря устойчивости возможна при сколь угодно малых значениях сжимающей статической составляющей P_0 и даже при изменении ее знака (т. е. при растягивающей стати-

ческой составляющей). Как видно из рис. V.3, луч $q = ka$ при $P_0 < 0$ проходит весьма полого, но также пересекает ряд областей неустойчивости.

С другой стороны, диаграмма Айнса—Стретта позволяет установить, что устойчивость системы возможна при $P_0 = P_{кр}$ и даже при $P_0 > P_{кр}$. В самом деле, если $P_0 = P_{кр}$, то $a = 0$, луч $q = ka$ совпадает с осью ординат диаграммы Айнса—Стретта, но система остается устойчивой, если $|q| < 1$. Согласно условиям (V.13), для этого необходимо выполнение неравенства

$$\omega > \sqrt{\frac{2P_1}{ml}}.$$

При $P_0 > P_{кр}$ луч $q = ka$ располагается во втором квадранте диаграммы Айнса—Стретта. На рис. V.5, б видно, что и в этом случае возможна устойчивость системы в надлежаще выбранном диапазоне изменения частот ω . Таким образом, вибрационная составляющая сжимающей силы при известных условиях может стабилизировать систему, которая неустойчива при отсутствии колебаний.

Аналогичным образом решается задача Н. М. Беляева о возможности параметрического резонанса для шарнирно-опертого стержня, на который, как и в предыдущем случае, действует продольная сила $P_0 + P_1 \cos \omega t$ (рис. V.5, в). Подставив последнее выражение в уравнение (II.219), получим дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами в частных производных

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{P_0 + P_1 \cos \omega t}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Для решения этого уравнения положим

$$y = A(t) \sin \frac{\pi x}{l},$$

где $A(t)$ — неизвестная функция времени. При этом уравнение приобретает вид

$$\ddot{A} + \frac{\pi^2}{ml^2} (P_{кр} - P_0 - P_1 \cos \omega t) A = 0,$$

где $P_{кр} = \pi^2 EJ/l^2$ — первая эйлера критическая сила для рассматриваемого стержня. Если теперь положить

$$\omega t = 2\tau; \quad a = \frac{4\pi^2 (P_{кр} - P_0)}{m\omega^2 l^2}; \quad q = \frac{2\pi^2 P_1}{m\omega^2 l^2},$$

то вновь получится стандартная форма уравнения Матье и можно прежним образом установить условия возникновения параметрического резонанса. Еще ряд возможностей параметрического резонанса обнаружится, если принять $y = A(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$ и последовательно положить $n = 2; 3; \dots$

Еще одним примером параметрической системы с аналогичными свойствами может служить маятник, показанный на рис. V.6, а. Если точка подвеса неподвижна, то единственной силой, создающей момент относительно точки подвеса, является вес груза mg . Соответственно уравнение малых колебаний имеет вид

$$-mgl\varphi = ml^2\ddot{\varphi},$$

где l — длина маятника; φ — угол отклонения.

Если же точка подвеса колеблется вдоль оси y по закону

$$y = A \cos \omega t,$$

то при составлении уравнения моментов нужно учесть переносную силу инерции $-m\ddot{y} = mA\omega^2 \cos \omega t$; ее момент составляет

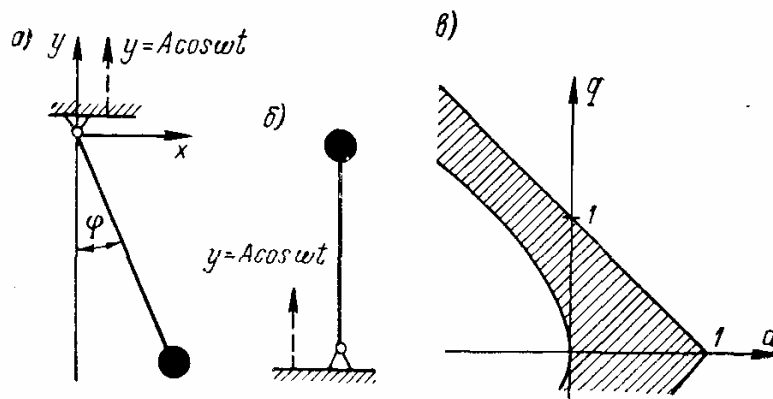


Рис. V.6

$mA\omega^2 l \varphi \cos \omega t$, и уравнение колебаний маятника запишется в виде

$$-mgl\varphi + mA\omega^2 l \varphi \cos \omega t = ml^2\ddot{\varphi},$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\omega^2}{l} \varphi \cos \omega t \right) \varphi = 0. \quad (V.14)$$

Это уравнение можно привести к стандартному виду (V.5), если положить

$$2\tau = \omega t; \quad a = \frac{4g}{\omega^2 l}; \quad q = \frac{2A}{l}.$$

Теперь из диаграммы Айнса—Стретта непосредственно видно, что параметр a не зависит от амплитуды колебаний точки подвеса и сколь бы малой ни была амплитуда A , неустойчивость нижнего положения маятника наступает вблизи значений $a = 1; 4; 9; \dots$, т. е. при

$$\omega = 2\sqrt{g/l}; \quad \omega = \sqrt{g/l}; \quad \omega = \frac{2}{3}\sqrt{g/l}.$$

Обсудим теперь вопрос об устойчивости верхнего положения маятника (рис. V.6, б). При неподвижной опоре это положение,

конечно, неустойчиво; однако вибрации основания могут придать этому положению устойчивость. Чтобы получить уравнение движения для данного случая, достаточно изменить знак перед членом, содержащим ускорение g в уравнении (V.14); соответственно параметр a становится отрицательным:

$$a = -\frac{4g}{\omega^2 l}, \quad (\text{V.15})$$

остальные величины останутся прежними.

Из рис. V.6, в видно, что верхнее положение маятника может быть устойчивым. При небольших амплитудах A колебаний точки подвеса (когда $q < 1$) устойчивость верхнего положения достигается, если удовлетворяется неравенство $|a| < q^2/2$. Согласно выражению (V.15) это условие устойчивости принимает вид

$$\omega > \sqrt{2gl/A}.$$

27. СЛУЧАИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ

Решим вспомогательную задачу о крутильных колебаниях системы, показанной на рис. V.7, а. Примем, что в этой системе массой обладают только диск 1 и груз 4, причем I — полярный момент инерции диска; m — масса груза. Вал 2 закреплен одним концом и может только закручиваться. Тяга 3 является совершенно жесткой и служит лишь связью между диском 1 и грузом 4, который может перемещаться по горизонтали вдоль неподвижной втулки 5; длина тяги значительно больше радиуса диска. Такая система имеет одну степень свободы.

Положим, что диск совершает свободные колебания около положения равновесия. Очевидно, что в этот процесс будет вовлечен и груз 4, влияние инерции которого можно определить энергетическим методом.

Пусть φ — угол поворота диска в процессе колебаний, так что закон свободных колебаний диска имеет вид

$$\varphi = a \sin pt,$$

где p — собственная частота системы; a — амплитуда крутильных колебаний диска.

Максимальная угловая скорость вращения диска $\dot{\varphi}_{\max} = ap$, максимальная кинетическая энергия диска

$$T_1 = \frac{I \dot{\varphi}_{\max}^2}{2} = \frac{I (ap)^2}{2}.$$

Из рис. V.7, б видно, что углу поворота диска φ соответствует горизонтальное смещение точки M , равное $r\varphi \sin \alpha$ (r — радиус

диска). При большой длине тяги 3 допустимо считать, что перемещение груза 4 равно той же величине

$$x = r\varphi \sin \alpha.$$

Скорость груза 4

$$\dot{x} = r\dot{\varphi} \sin \alpha,$$

ее максимальное значение

$$\dot{x}_{\max} = rap \sin \alpha,$$

так что максимальная кинетическая энергия груза составляет

$$T_2 = \frac{m\dot{x}_{\max}^2}{2} = \frac{m(rap \sin \alpha)^2}{2}.$$

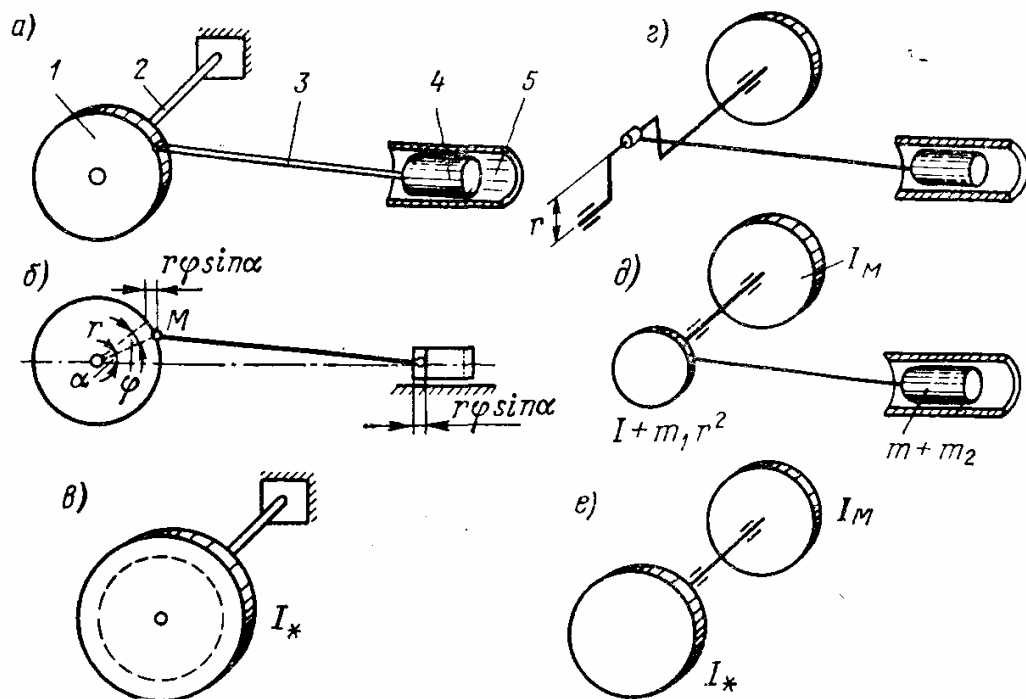


Рис. V.7

Следовательно, максимальная кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 = \frac{(ap)^2}{2} \left[I + \frac{mr^2}{2} (1 - \cos 2\alpha) \right];$$

отсюда видно, что величина

$$I_* = I + \frac{mr^2}{2} (1 - \cos 2\alpha) \quad (V.16)$$

может быть истолкована как приведенный момент инерции массы диска и позволяет вместо системы на рис. V.7, а рассматривать эквивалентную систему (рис. V.7, в). Из выражения (V.16) видно, что влияние инерции груза 4 на процесс колебаний зависит от угла α.

Основываясь на выражении (V.16), обратимся к задаче о колебаниях простейшего кривошипно-ползунного механизма (рис. V.7, з). Если, как обычно, массу шатуна заменить двумя массами, из которых одна (m_1) вращается вместе с кривошипом, а другая (m_2) движется вместе с поршнем, то получится схема, показанная на рис. V.7, д. Здесь кривошип вместе с присоединенной частью массы шатуна заменен одним диском с полярным моментом инерции $I + m_1 r^2$, а общая масса поршня вместе с другой присоединенной частью шатуна равна $m + m_2$. Теперь на основании приведенного выше решения вспомогательной задачи от этой схемы можно перейти к схеме на рис. V.7, е, состоящей из двух дисков: один из них (маховик) имеет момент инерции I_M , а второй — момент инерции I_* , определяемый по формуле (V.16); в данном случае

$$I_* = I + m_1 r^2 + \frac{(m + m_2) r^2}{2} (1 - \cos 2\omega t). \quad (V.17)$$

Здесь $m + m_2$ — общая масса поршня и соответствующей части шатуна.

Уравнение колебаний такой системы имеет вид [см. формулы (II.9) и (II.12)]

$$\ddot{\varphi} + \frac{c(I_* + I_M)}{I_* I_M} \varphi = 0.$$

Подставляя сюда выражение (V.17), получим

$$\ddot{\varphi} + c \left\{ \frac{1}{I_M} + \frac{1}{I_0 \left[1 - \frac{(m + m_2) r^2}{2I_0} \cos 2\omega t \right]} \right\} \varphi = 0, \quad (V.18)$$

где

$$I_0 = I + m_1 r^2 + \frac{(m + m_2) r^2}{2}$$

есть среднее значение приведенного момента инерции кривошипа.

Из уравнения (V.18) видно, что коэффициент при функции φ зависит от времени t , как и в рассмотренных выше случаях. Однако в нашей задаче переменность коэффициента связана с периодическими изменениями момента инерции, а не коэффициента жесткости.

Ввиду того что $\frac{(m + m_2) r^2}{2I_0} \ll 1$, допустимо принять

$$\frac{1}{1 - \frac{(m + m_2) r^2}{2I_0} \cos 2\omega t} \approx 1 + \frac{(m + m_2) r^2}{2I_0} \cos 2\omega t.$$

Тогда уравнение (V.18) примет вид

$$\ddot{\varphi} + c \left[\frac{1}{I_M} + \frac{1}{I_0} + \frac{(m + m_2) r^2}{2I_0^2} \cos 2\omega t \right] \varphi = 0. \quad (V.19)$$

Для определения областей параметрического резонанса нужно представить это выражение в стандартном виде (V.5), полагая

$$\omega t = \tau; \quad a = \frac{c(I_0 + I_M)}{I_0 I_M \omega^2}; \quad q = \frac{c(m + m_2)r^2}{4I_0^2 \omega^2}.$$

Вычислив значения этих параметров, можно проконтролировать устойчивость системы по диаграмме Айнса—Стретта.

28. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Выше, при рассмотрении вынужденных колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой (см. п. 20) было отмечено, что в широком диапазоне частот возбуждения возможно несколько стационарных режимов колебаний. Для того чтобы выделить из нескольких решений физически осуществимые случаи, необходимо исследовать устойчивость названных режимов; ясно, что в действительности реализуются только устойчивые режимы. Как будет показано, исследование устойчивости стационарных режимов приводит к задаче о параметрическом возбуждении.

Допустим, что основное дифференциальное уравнение (IV.58) тем или иным способом решено, т. е. найдены функции $x_i(t)$, удовлетворяющие этому уравнению. Для того чтобы выяснить, устойчиво ли какое-то определенное решение $x_i(t)$, нужно исследовать возмущенное движение $x_i + \delta x_i$, которое возникнет после того, как режим нарушен некоторым мгновенным возмущением. Здесь $\delta x_i(t)$ — вариация функции $x_i(t)$, т. е. дополнительное движение, отличающее возмущенное движение от исследуемого стационарного режима. Начальная тенденция дополнительного движения $\delta x_i(t)$ позволит сделать заключение об устойчивости движения x_i .

Так как возмущенное движение должно удовлетворять уравнению (IV.58), подставим в него $x_i + \delta x_i$ вместо x_i и $F(x_i + \delta x_i)$ вместо $F(x_i)$. Тогда получится

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_i + \delta x_i) + \frac{F(x_i + \delta x_i)}{m} = \frac{P_0}{m} \sin \omega t. \quad (\text{V.20})$$

Если считать вариацию δx_i малой, то можно принять

$$F(x_i + \delta x_i) = F(x_i) + \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Подставляя это в уравнение (V.20) и затем вычитая из полученного уравнения уравнение (IV.58), описывающее невозмущенную форму, приходим к дифференциальному уравнению для вариации δx_i :

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta x_i + \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{m} \delta x_i = 0.$$

Так как коэффициент при втором члене является известной функцией времени, то полученное уравнение относится к уравнениям параметрического типа.

Пусть, например, $\frac{F(x)}{m} = p_0^2 x + \alpha x^3$. Тогда $\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} = p_0^2 + 3\alpha x_i^2$; подставляя сюда решение $x_i = A_i \sin \omega t$, получим

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta x_i + (p_0^2 + 3\alpha A_i^2 \sin^2 \omega t) \delta x_i = 0,$$

или, после перехода к безразмерному времени $\omega t = \tau$,

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \delta x_i + \left[\frac{p_0^2}{\omega^2} + \frac{3\alpha A_i^2}{2\omega^2} (1 - \cos 2\tau) \right] \delta x_i = 0.$$

Из этой записи непосредственно видно, что, положив

$$a = \frac{p_0^2 + \frac{3}{2} \alpha A_i^2}{\omega^2}; \quad q = \frac{3\alpha A_i^2}{4\omega^2},$$

мы приходим к стандартной форме уравнения Матье. Подставляя последние выражения в условие устойчивости (V.9), получим

$$\left(\frac{3}{4} \alpha A_i^2 \right)^2 < \left(p_0^2 + \frac{3}{2} \alpha A_i^2 - \omega^2 \right)^2. \quad (\text{V.21})$$

Теперь нужно вспомнить, что согласно (II.113) уравнение скелетной линии для рассматриваемой системы имеет вид

$$p_0^2 - \omega^2 + \frac{3\alpha}{4} A_*^2 = 0, \quad (\text{V.22})$$

где A_* — ординаты этой линии; ω — абсциссы, которые выше (см. стр. 79) обозначались буквой p , поскольку там речь шла о свободных колебаниях. Из (V.22) находим

$$p_0^2 - \omega^2 = -\frac{3}{4} A_*^2,$$

после чего условие (V.21) примет следующую форму:

$$\left(2 - \frac{A_*^2}{A_1^2} \right)^2 > 1. \quad (\text{V.23})$$

Отсюда видно, что решение, отвечающее амплитудам A_1 (см. ветвь I на рис. IV.39), устойчиво, так как $A_*/A_1 < 1$, а решение $A_2 \sin \omega t$ неустойчиво (см. ветвь II на рис. IV.39), поскольку $A_*/A_2 > 1$. Дальнейшие вычисления могут показать, что решение, соответствующее ветви III на рис. IV.39, удовлетворяет условию (V.23) и, следовательно, устойчиво.

АВТОКОЛЕБАНИЯ

29. ПРИРОДА АВТОКОЛЕБАНИЙ

В гл. III для исследования устойчивости состояний равновесия были использованы линеаризованные уравнения, описывающие малые возмущенные движения, происходящие вблизи названных состояний. Такой анализ позволяет уловить начальные тенденции возмущенного движения, но в случаях неустойчивости не дает возможности проследить все дальнейшее развитие процесса движения при возрастании отклонений и скоростей.

Исследование возмущенных движений с большими отклонениями в принципе невозможно с помощью линеаризованных уравнений: нелинейные члены уравнений, будучи пренебрежимо малыми при малых отклонениях системы от состояния равновесия, начинают играть все более заметную роль при увеличении отклонений; при этом вид нелинейности существенно влияет на характер процесса при неограниченном возрастании времени. В частности, во многих случаях возрастание колебаний постепенно замедляется и движение стремится к некоторому устойчивому режиму с постоянными амплитудами (пиковыми значениями) — режиму *автоколебаний*.

В общих чертах природу этого явления можно понять, рассматривая, например, колебательную систему с трением, когда характеристика трения описывается нелинейной функцией скорости — $b_1\dot{x} + b_3\dot{x}^3$, где b_1 и b_3 — положительные постоянные. При этом дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} - b_1\dot{x} + b_3\dot{x}^3 + cx = 0.$$

Если отклонения очень малы, то нелинейным членом (содержащим $\dot{x}^3$) можно пренебречь; тогда обнаруживается неустойчивость системы вследствие эффекта отрицательного затухания, о котором шла речь еще в гл. III. Таким образом, сколь угодно малые начальные возмущения вызовут постепенно возрастающие колебания. Но при этом будет увеличиваться демпфирующее влияние нелинейного члена уравнения, так что рост колебаний станет замедляться и движение будет стремиться к установившемуся режиму с постоянными амплитудами, как это показано на рис. VI.1, а. Такой режим

называется автоколебательным. Развитие процесса на фазовой плоскости показано на рис. VI.1, б: постепенно раскручивающаяся спираль все больше приближается к некоторой замкнутой кривой, соответствующей установившимся автоколебаниям; эта кривая называется *предельным циклом*.

Следует отметить, что в рассматриваемой системе стремление к предельному циклу обнаружится и в тех случаях, когда начальное возмущение состояния равновесия весьма значительно и изображающая точка, соответствующая начальному состоянию системы, располагается вне предельного цикла. Вследствие больших значений скорости демпфирующее действие нелинейного члена сначала окажется сильнее дестабилизирующего действия

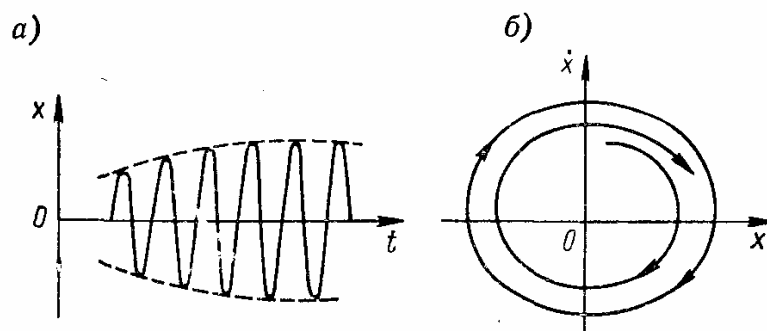


Рис. VI.1

линейного члена (отрицательного затухания) и движение представится спиралью, постепенно накручивающейся на предельный цикл снаружи.

Сопоставляя демпфирующее влияние нелинейного члена уравнения и дестабилизирующее влияние линейного члена, мы, в сущности, имеем в виду изменение энергии системы вследствие работы, совершаемой различными составляющими силы трения. Линейная составляющая совершает положительную работу, т. е. вносит энергию в систему, а нелинейная составляющая совершает отрицательную работу, т. е. уменьшает энергию системы. При стационарных автоколебаниях приток энергии компенсирует ее расход (в среднем за один колебательный цикл) и система внешне ведет себя так, как если бы она была консервативной; здесь полезно напомнить, что фазовые траектории консервативных систем также представляют собой замкнутые кривые, геометрически похожие на кривую предельного цикла, изображенную на рис. VI.1, б. Но, конечно, сходство это только внешнее: предельный цикл представляет собой *изолированную* замкнутую фазовую траекторию, и в ее окрестности нет других замкнутых траекторий, тогда как замкнутые фазовые траектории свободных колебаний консервативных систем сплошным образом заполняют фазовую плоскость*.

* В более сложных автоколебательных системах может существовать несколько предельных циклов; однако и в этих случаях предельные циклы представляют собой изолированные фазовые траектории.

Другая важная особенность автоколебаний состоит в том, что их амплитуда полностью определяется свойствами системы и не зависит от начальных условий, тогда как амплитуда свободных колебаний консервативной системы существенно зависит от начальных условий. Таким образом, особенностью предельного цикла является его полная независимость от начальных условий; после любого возмущения состояния равновесия система приближается к одному и тому же предельному циклу. Для выявления параметров (частоты, амплитуды) установившихся автоколебаний необходим анализ соответствующей нелинейной задачи.

Хотя автоколебания могут происходить только при наличии внешнего источника энергии, но сам по себе этот источник не обладает колебательными свойствами, а колебательный характер отбора энергии от источника управляется самим движением системы.

В некоторых случаях стационарные автоколебания носят почти гармонический характер и совершаются с частотой свободных колебаний системы; соответствующие системы называются *квазилинейными*. В других случаях стационарные автоколебания резко отличаются от гармонических, сопровождаются остановками и скачками скорости; такие автоколебания (и соответствующие системы) называются *релаксационными* или *разрывными*.

30. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

Вернемся к системе, рассмотренной в гл. III (см. рис. III.1, а), но не ограничимся линейным приближением и исследуем влияние нелинейных слагаемых в выражении силы трения R . Положим, что в окрестности состояния равновесия силу трения можно представить в виде суммы

$$R = R_0 + \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 \Delta v + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 R}{dv^2} \right)_0 (\Delta v)^2 + \\ + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 R}{dv^3} \right)_0 (\Delta v)^3 + \dots,$$

где Δv — изменение скорости скольжения по отношению к ее номинальному значению v_0 . Так как $\Delta v = -\dot{x}$, то можно написать

$$R = R_0 - R'_0 \dot{x} + \frac{1}{2} R''_0 \dot{x}^2 - \frac{1}{6} R'''_0 \dot{x}^3 + \dots \quad (\text{VI.1})$$

Если ограничиться выписанными слагаемыми, то уравнение колебаний примет вид

$$m\ddot{x} + cx + (R'_0 + k) \dot{x} - \frac{R''_0}{2} \dot{x}^2 + \frac{R'''_0}{6} \dot{x}^3 = 0. \quad (\text{VI.2})$$

При этом предполагается, что скорость v_0 соответствует падающему участку характеристики, причем $R'_0 + k < 0$.

Стационарные автоколебания

Для решения уравнения (VI.2) используем метод энергетического баланса. Положим, что стационарные автоколебания могут быть приближенно описаны гармоническим законом

$$x = a \sin pt \quad (\text{VI.3})$$

с частотой p свободных колебаний системы. Выражение (VI.3) становится совершенно точным, если переменная часть силы трения R , выраженная тремя последними членами (VI.1):

$$\tilde{R} = -(R'_0 + k) \dot{x} + \frac{R''_0}{2} \dot{x}^2 - \frac{R'''_0}{6} \dot{x}^3, \quad (\text{VI.4})$$

тождественно равна нулю. Конечно, вычисляя сумму этих членов при помощи уравнения (VI.3), убедимся, что это не так; однако можно для получения приближенного решения ограничиться смягченным требованием, чтобы работа сил трения оказалась равной нулю за один цикл колебаний.

Работа силы трения $\tilde{R}$ за время dt составляет

$$\tilde{R} dx = \tilde{R} \dot{x} dt;$$

следовательно, работа силы трения за период

$$\int_0^T \tilde{R} \dot{x} dt = 0,$$

где T — период автоколебаний, полагаемый равным собственному периоду.

Подставляя сюда силу трения $\tilde{R}$ по выражению (VI.4), получим

$$\int_0^T \left[-(R'_0 + k) \dot{x}^2 + \frac{R''_0}{2} \dot{x}^3 - \frac{R'''_0}{6} \dot{x}^4 \right] dt = 0. \quad (\text{VI.5})$$

Согласно выражению (VI.3) $\dot{x}_1 = ap \cos pt$, следовательно,

$$\int_0^T \left[(R'_0 + k) \cos^2 pt - \frac{R''_0}{2} ap \cos^3 pt + \right. \\ \left. + \frac{R'''_0}{6} a^2 p^2 \cos^4 pt \right] dt = 0.$$

После интегрирования найдем амплитуду установившихся автоколебаний

$$a_{\text{ст}} = \frac{2}{p} \sqrt{-\frac{2(R'_0 + k)}{R'''_0}}. \quad (\text{VI.6})$$

Так как сумма $R'_0 + k$ отрицательна, то подкоренное выражение положительно лишь при положительной третьей производной R''_0 ; следовательно, предельный цикл существует при условии, что $R''_0 > 0$.

Часто можно пренебречь всеми неупругими сопротивлениями, кроме силы трения R . Полагая $k = 0$, получим более простую

форму для амплитуды:

$$a_{\text{ст}} = \frac{2}{p} \sqrt{-\frac{2R'_0}{R''_0}}. \quad (\text{VI.7})$$

Пример 29. Определить амплитуду установившихся автоколебаний для случая, когда характеристика трения описывается уравнением (рис. VI.2)

$$R = 3R_* \left(1 - \frac{v}{v_*} + \frac{v^3}{3v_*^3} \right), \quad (\text{VI.8})$$

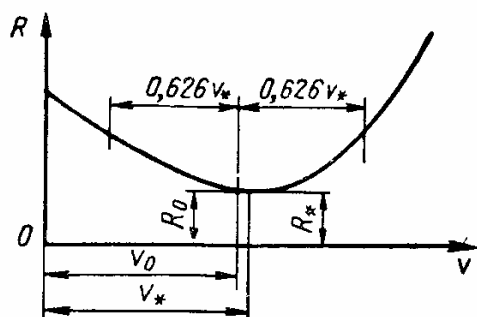


Рис. VI.2

где R_* и v_* — соответственно сила трения и скорость относительного движения в точке минимума характеристики.

Номинальная скорость скольжения v_0 находится на падающем участке характеристики вблизи точки минимума v и равна $0,95 v_*$.

Дифференцируя заданное уравнение, находим

$$R' = \frac{3R_*}{v_*} \left(-\frac{v^2}{v_*^2} - 1 \right); \quad R'' = -\frac{6R_*}{v_*^3} v.$$

Подставляя в выражение R' значение $v_0 = 0,95 v_*$, получим

$$R'_0 = -\frac{0,2925R_*}{v_*}.$$

По формуле (VI.7) находим амплитуду автоколебаний

$$a_{\text{ст}} = \frac{2v_*}{p} \sqrt{0,0975} = \frac{0,626v_*}{p}.$$

Максимальная скорость автоколебаний

$$\dot{x}_{1 \text{ max}} = ap = 0,626v_*.$$

На рис. VI.2 показаны пределы колебаний скорости $\dot{x}_1$, эти колебания сравнительно с v_0 весьма велики.

Максимальные скорости колебаний при других отношениях v_0/v_* имеют следующие значения:

v_0/v_*	0,900	0,925	0,950	0,975	1,000
$\dot{x}_{1 \text{ max}}/v_*$	0,873	0,761	0,626	0,445	0,000

При $v_0 > v_*$ автоколебания невозможны, так как величина R'_0 положительна. При $v_0 < 0,9 v_*$ соответствующие вычисления не производились: колебания скорости становятся столь значительными, что относительная скорость уменьшается до нуля, и в некоторые интервалы времени груз находится в состоянии покоя относительно ленты (т. е. движется равномерно). Это делает недопустимым использование гармонического закона движения (VI.3) (см. пример 31).

Переходный процесс

При помощи метода энергетического баланса можно не только определить амплитуду стационарных автоколебаний, но и исследовать *переходный процесс*. Для этого нужно исходить не из выражения (VI.3), соответствующего движению с постоянной амплитудой, а из более общего выражения

$$x = a(t) \sin pt,$$

считая, что амплитуда постепенно меняется.

Однако это изменение можно считать медленным, полагая, что приращение Δa за один период мало по сравнению с амплитудой a . В таком случае выражение для скорости приближенно имеет вид

$$\dot{x} = a(t) p \cos pt.$$

Соответственно этому работа силы трения за один период выразится интегралом (VI.5), в данном случае этот интеграл не равен нулю, а представляет собой приращение энергии системы за один цикл:

$$\int_0^T \left[-(R'_0 + k) \dot{x}^2 + \frac{R''_0}{2} \dot{x}^3 - \frac{R'''_0}{6} \dot{x}^4 \right] dt = \Delta \Pi. \quad (\text{VI.9})$$

Вычисляя это в предположении постоянства амплитуды a , находим

$$-\pi p a^2 \left(R'_0 + k + \frac{1}{8} R''_0 a^2 p^2 \right) = \Delta \Pi.$$

Приращение $\Delta \Pi$ было найдено выше [см. (II.57)] в виде

$$\Delta \Pi \approx ca \Delta a. \quad (\text{VI.10})$$

Следовательно,

$$-\pi p a^2 \left(R'_0 + k + \frac{1}{8} R''_0 a^2 p^2 \right) = ca \Delta a. \quad (\text{VI.11})$$

Рассматривая теперь a как непрерывную функцию аргумента t , заменим согласно (II.58) $\Delta a = \frac{da}{dt} T$. Тогда вместо выражения (VI.11) получится дифференциальное уравнение

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{2m} \left(R'_0 + k + \frac{1}{8} R''_0 a^2 p^2 \right).$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение при начальном условии $a = a_0$ при $t = 0$, получим уравнение огибающей (уравнение установления):

$$a = \frac{a_{\text{ст}}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a_{\text{ст}}^2}{a_0^2}\right) e^{\frac{k + R'_0}{m} t}}}, \quad (\text{VI.12})$$

где

$$a_{\text{ст}} = \frac{2}{p} \sqrt{-\frac{2(R'_0 + k)}{R''_0}}.$$

При $t \rightarrow \infty$ отсюда вновь следует формула (VI.6) для амплитуды установившихся автоколебаний.

Переходный процесс, а также предельный цикл можно построить на фазовой плоскости графо-аналитическим путем при помощи дельта-метода. Обозначив координату x через y , имеем

$$\frac{dy}{dt} = v. \quad (\text{VI.13})$$

Теперь дифференциальное уравнение (VI.2) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = f(v) - p^2 y, \quad (\text{VI.14})$$

где

$$f(v) = -\frac{R'_0 + k}{m} v + \frac{R''_0}{2m} v^2 - \frac{R'''_0}{6m} v^3. \quad (\text{VI.15})$$

Разделив уравнение (VI.14) на (VI.13), получим основное дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{f(v) - p^2 y}{v}. \quad (\text{VI.16})$$

Совокупность интегральных кривых этого дифференциального уравнения образует фазовый портрет системы.

Введем безразмерное время $\tau = pt$ и обозначим $v = \frac{dy}{d\tau} = \frac{v}{p}$. Тогда дифференциальное уравнение (VI.16) примет вид

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{\delta(v) + y}{v}, \quad (\text{VI.17})$$

где

$$\delta(v) = -\frac{f(pv)}{p^2}. \quad (\text{VI.18})$$

В малых интервалах времени и соответственно при малых приращениях v величину δ можно считать постоянной. При этом в дифференциальном уравнении (VI.17) переменные y и v разделяются, и после интегрирования получается конечное уравнение

$$v^2 + (y + \delta)^2 = \text{const};$$

это уравнение описывает окружность, центр которой расположен на оси абсцисс в точке $y = -\delta$; $v = 0$. Таким образом, для малого интервала времени отрезок фазовой траектории представляет собой дугу окружности с центром в указанной точке.

Построение фазовой траектории начинается с точки, имеющей координаты $y_0 = y(0)$; $v_0 = v(0)$, определяемые начальными условиями при $\tau = 0$. Значение v_0 подставляют в выражение (VI.18) и находят $\delta(v_0)$. Найденное значение δ определяет абсциссу центра окружности (рис. VI.3).

Теперь можно провести малую дугу окружности из начальной точки фазовой траектории (y_0, δ_0) по ходу часовой стрелки; таким образом определяется первый элемент фазовой траектории. С чертежа можно снять новое значение фазовой координаты v_1 , вновь подставить ее в выражение (VI.18) и найти $\delta(v_1)$, т. е. определить на оси абсцисс положение нового центра окружности. При помощи этого центра строят второй элемент фазовой траектории и т. д.

Конечно, при этом построении нужно следовать общим правилам графических решений и, в частности, не брать слишком больших длин последовательных отрезков.

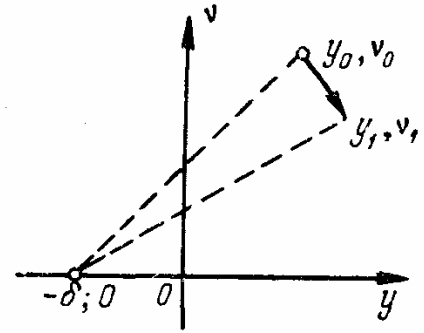


Рис. VI.3

Пример 30. Построить фазовую кривую для переходного процесса фрикционных автоколебаний, описываемых дифференциальным уравнением (VI.2), если сила трения дана в виде (VI.8). Параметры системы: $m = 0,102$ кгс·с/см; $c = 1000$ кгс/см; $R_* = 10$ кгс; $v_0 = 9,5$ см/с; $v_* = 10$ см/с.

Находим:

$$R'_0 = \frac{3R_*}{v_*} \left(\frac{v_0^2}{v_*^2} - 1 \right) = -0,2925 \text{ кгс·с/см};$$

$$R''_0 = \frac{6R_*v_0}{v_*^3} = 0,57 \text{ кгс·с}^2/\text{см}^2; \quad R'''_0 = \frac{6R_*}{v_*^3} = 0,06 \text{ кгс·с}^3/\text{см}^3.$$

Тогда выражение (VI.15) принимает вид

$$f(v) = +2,87v + 2,80v^2 - 0,10v^3.$$

Определим частоту автоколебаний:

$$p = \sqrt{c/m} = 100 \text{ с}^{-1}.$$

По формуле (VI.18) находим

$$\delta(v) = -0,029v - 2,80v^2 + 10v^3 \quad (\text{VI.19})$$

и приступаем к построению фазовой траектории, начиная с любой (заданной начальными условиями) точки фазовой плоскости.

Пусть $y_0 = 0$; $v_0 = 0,09$. Тогда по формуле (VI.19) $\delta = -0,018$.

На рис. VI.4, а показано начало построения. Первый отрезок фазовой траектории имеет центр в точке с координатами $0,018$; 0 . Из этого центра проведена дуга окружности из исходной точки C_0 до точки C_1 , в которой $v = 0,08$. По формуле (VI.19) получится $\delta = -0,015$. Центр второй дуги находится в точке с координатами $0,015$; 0 ; из этого центра проведена вторая дуга до точки C_2 , в которой $v = 0,07$, и т. д.

Фазовая траектория в целом изображена на рис. VI.4, б и обозначена цифрой II. Она представляет собой свертывающуюся спираль. Другая фазовая траектория, начинающаяся в точке 0; 0,045, является развертывающейся спиралью; она обозначена цифрой I. Фазовые траектории типа I и II неограниченно приближаются к замкнутой траектории A, являющейся предельным циклом.

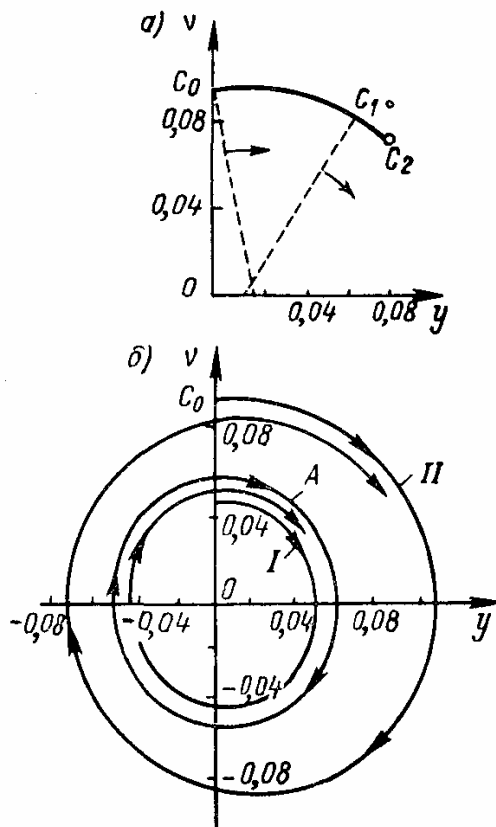


Рис. VI.4

Кривая A несимметрична, причем особенно значительно нарушение симметрии относительно вертикальной оси. Максимальное и минимальное отклонения системы при ее движении по предельному циклу равны соответственно 0,06 и 0,05 см. Таким образом, центр колебаний несколько смещен в направлении оси y и полуразмах колебаний составляет 0,055 см. Наибольшее значение $v = 0,055$ см, и максимальная скорость $v_{\max} = \nu r = 100 \cdot 0,055 = 5,5$ см/с. Эти результаты удовлетворительно согласуются с решением (VI.6), согласно которому амплитуда автоколебаний $a = 0,064$ см и максимальная скорость $v_{\max} = ar = 6,4$ см/с.

В данном случае более точными следует считать результаты графо-аналитического решения при помощи дельта-метода; во всяком случае, оно свободно от произвольного предположения о гармоническом характере процесса, которое было принято в аналитическом решении энергетическим методом.

31. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

Автоколебания безмассовой системы

Рассмотренный выше метод определения амплитуды автоколебаний пригоден только в случаях слабой нелинейности, когда сила трения невелика и колебания приближенно можно считать синусоидальными.

Ниже рассмотрен приближенный метод, относящийся к случаю весьма большой силы трения. Вернемся к схеме на рис. III.1 и будем считать, что движение определяется только этой силой и силой упругости и что силой инерции груза можно пренебречь. Уравнение движения такой безмассовой вырожденной системы имеет вид

$$cx = R(v), \quad (\text{VI.20})$$

где cx — сила упругости пружины; $R(v)$ — сила трения, являющаяся функцией относительной скорости.

Нужно помнить, что соотношением (VI.20) установлена пропорциональность координаты x силе трения R . Поскольку координата x не может во времени изменяться скачком, то и сила трения должна оказаться непрерывной функцией времени t .

На рис. VI.5 точке A соответствует состояние равновесия груза, при этом сила трения R_0 уравнивает силу упругости cx_0 (x_0 — статическое отклонение груза). Убедимся, что это состояние равновесия неустойчиво, и для этого рассмотрим возмущенное движение. Если $\dot{x}$ — абсолютная скорость груза, то возмущенная скорость скольжения $v = v_0 - \dot{x}$. Отсюда видно, что при положительной скорости $\dot{x}$ (движение груза вправо) для определения скорости v на рис. VI.5 нужно откладывать значения $\dot{x}$ влево от значения v_0 ; поэтому направления осей v и $\dot{x}$ противоположны.

Пусть груз оттянут дополнительно на величину Δx некоторой добавочной силой ΔP и удерживается в этом положении; ввиду неподвижности груза относительная скорость движения равна v_0 и состояние системы характеризуется той же точкой A .

Пусть в некоторое мгновение, которое будем считать начальным, сила ΔP исчезает и груз предоставляется самому себе. Так как начальная сила упругости $c(x_0 + \Delta x) = R_0 + \Delta P$ больше, чем R_0 , то равенство (VI.20) потребует появления силы трения R_1 большей, чем R_0 . Как видно из рис. VI.5, мгновенное возрастание силы трения от значения R_0 до значения R_1 (в точке 1) возможно только вследствие скачка относительной скорости — уменьшения ее до величины v_1 . Конечно, мгновенное изменение скорости является лишь удобным приближенным описанием весьма быстрого изменения скорости. Началу колебаний соответствует точка 1.

Уменьшение относительной скорости до значения v_1 означает появление положительной абсолютной скорости груза $\dot{x} = v_0 - v_1$. Следовательно, как только оттянутый вправо груз будет предоставлен самому себе, он немедленно приобретает направленную также вправо скорость $\dot{x}$. Это вызовет дальнейшее перемещение груза вправо от положения равновесия. Такому процессу соответствует участок характеристики 1—2; с кинематической стороны он характеризуется непрерывным ростом как координаты x , так и скорости $\dot{x}$, а со статической стороны — одновременным (и одинаковым) возрастанием как силы упругости пружины, так и силы трения. В точке 2 относительная скорость обращается в нуль, т. е. абсолютная скорость $\dot{x}$ становится равной скорости ленты v_0 и груз перестает скользить по ленте.

Продолжение движения вправо означало бы рост силы упругости cx , и соответственно формуле (VI.20) потребовалось бы увеличение силы трения R . Однако сила трения возрастать далее не может; поэтому, как только изображающая точка достигает положения 2, движение груза вправо мгновенно прекращается.

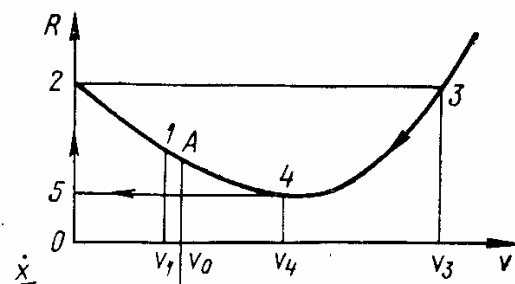


Рис. VI.5

Для определения нового значения скорости $\dot{x}$ нужно иметь в виду, что сила трения R должна остаться неизменной. Следовательно, новое значение скорости отвечает изображающей точке 3.

Так как $v_3 > v_0$, то скорость груза $\dot{x}$ меняет знак. Следовательно, после мгновенного изменения скорости от значения $\dot{x}_2$ до значения $\dot{x}_3$ начнется движение груза влево. При этом движении деформация пружины будет убывать и, следовательно, будут уменьшаться как сила упругости, так и сила трения R . Убывание силы R возможно лишь вследствие уменьшения относительной скорости v и соответствует участку 3—4; на этом участке уменьшение относительной скорости будет непрерывным до точки 4.

Однако дальнейшее движение не может описываться ветвью 4—1—2, так как этой ветви соответствует рост силы трения R . Это противоречит уравнению (VI.20), показывающему, что при движении груза влево сила упругости должна убывать, а не возрастать. Поэтому в точке 4 скорость вновь должна мгновенно измениться — изображающая точка скачком переходит в положение 5. Как и на участке 2—3, скачок 4—5 обозначает разрыв скорости при неизменном значении R . Затем груз будет двигаться вправо вместе с лентой без скольжения, и сила упругости вновь начнет увеличиваться; при этом будет возрастать и сила трения R . Это увеличение соответствует участку 5—2.

В точке 2 вновь произойдет разрыв скорости, изображающая точка переместится в положение 3 и т. д. Таким образом, установится периодическое движение по циклу 2—3—4—5—2—3 . . . без возврата на ветвь 4—1—2.

Описанный автоколебательный цикл установится при условии, что исходная изображающая точка лежит на падающей ветви характеристики трения, т. е. при достаточно малой рабочей скорости v_0 .

Весь автоколебательный цикл состоит из двух этапов (описание начинаем с точки 5).

Первый этап. Движение груза происходит с постоянной скоростью v_0 вправо совместно с лентой (участок 5—2). Смещение x определяется через силу трения по формуле (VI.20) и имеет следующие значения: в начале этапа (точка 5) $x_5 = R_5/c$; в конце этапа (точка 2) $x_2 = R_2/c$.

Второй этап. Движение груза происходит с убывающей скоростью влево (участок 3—4). В начале этапа (точка 3) скорость $\dot{x}_3 = -(v_3 - v_0)$ и смещение $x_3 = R_3/c$, причем $x_3 = x_2$. В конце этапа (точка 4) скорость $\dot{x}_4 = -(v_4 - v_0)$ и смещение $x_4 = R_4/c$ ($x_4 = x_5$).

На рис. VI.6, а и б представлены графики движения $x = x(t)$ и скорости $\dot{x} = \dot{x}(t)$. График движения имеет «пилообразный» характер и резко отличается от закона гармонического движения. Наибольшие отклонения от значения $x_0 = R_0/c$ неодинаковы в обе

стороны, поэтому удобнее говорить не об амплитуде, а о размахе автоколебаний; он определяется суммой

$$|x_2| + |x_5| = (R_2 - R_5)/c \quad (\text{VI.21})$$

и может быть вычислен по характеристике трения.

Длительность первого этапа движения вычисляется по законам равномерного движения

$$t_1 = \frac{R_2 - R_5}{cv_0}. \quad (\text{VI.22})$$

Несколько сложнее вычисление длительности второго этапа движения. Рассмотрим производную

$$R'_x = \frac{dR}{dx},$$

взятую по скорости движения $\dot{x}$. Из уравнения (VI.20) получим

$$dR = cdx = c\dot{x}dt.$$

Следовательно,

$$\frac{dR}{d\dot{x}} = c\dot{x} \frac{dt}{d\dot{x}}.$$

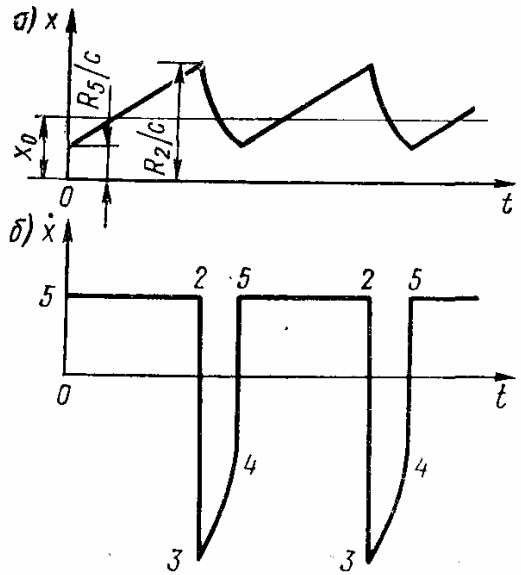


Рис. VI.6

Отсюда находим длительность второго этапа движения

$$t_2 = \frac{1}{c} \int_{\dot{x}_3}^{\dot{x}_4} \frac{R'_x}{\dot{x}} d\dot{x}. \quad (\text{VI.23})$$

Нижний предел интегрирования соответствует изображающей точке 3 (см. рис. VI.5), где $\dot{x}_3 = v_0 - v_3$; верхний предел соответствует точке 4, для которой $\dot{x}_4 = v_0 - v_4$.

Период автоколебаний составляет

$$T = t_1 + t_2.$$

Пример 31. Как и в примере 30, характеристика трения имеет вид

$$R = 3R_* \left(1 - \frac{v}{v_*} + \frac{v^3}{3v_*^3} \right) = 3R_* \left[1 - \frac{v_0 - \dot{x}}{v_*} + \frac{(v_0 - \dot{x})^3}{3v_*^3} \right]$$

и $v_0 = 0,5v_*$. Найти период и размах автоколебаний.

По характеристике трения находим

$$v_3 = \sqrt{3}v_* = 3,468v_0; \quad R_3 = R_2 = 3R_*; \quad v_4 = v_* = 2v_0; \quad R_4 = R_5 = R_*.$$

Пределы интегрирования в формуле (VI.23):

$$\dot{x}_3 = v_0 - v_3 = -2,468v_0; \quad \dot{x}_4 = v_0 - v_4 = -v_0.$$

Длительность первого этапа движения по формуле (VI.22)

$$t_1 = \frac{3R_* - R_*}{cv_0} = \frac{2R_*}{cv_0}.$$

Производная R по скорости $\dot{x}$:

$$R'_{\dot{x}} = \frac{3R_*}{v_*} \left(\frac{3}{4} + \frac{\dot{x}}{v_*} - \frac{\dot{x}^2}{v_*^2} \right).$$

Длительность второго этапа движения по формуле (VI.23)

$$t_2 = \frac{3R_*}{cv_*} \int_{-2,468v_0}^{-v_0} \left(\frac{3}{4} + \frac{\dot{x}}{v_*} - \frac{\dot{x}^2}{v_*^2} \right) \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{1,023R_*}{cv_0}$$

оказывается почти вдвое меньшей длительности первого этапа.

Период автоколебаний

$$T = t_1 + t_2 = \frac{3,02R_*}{cv_0}.$$

Размах колебаний по формуле (VI.21)

$$(3R_* - R_*)/c = 2R_*/c.$$

Фрикционные автоколебания при упрощенной характеристике трения

Хотя одновременный учет массы колеблющегося объекта и значительных сил трения оказывается в общем случае затруднительным, однако в некоторых случаях размеры колеблющихся объектов никак не допускают предположения о безмассовости системы. Так, например, отмечено, что не всегда обеспечивается плавное движение с весьма малыми скоростями, необходимыми при подаче на металлорежущих станках: вместо него получается движение с периодическими остановками. Этот вопрос важен для тяжелых станков, где применяются малые скорости подачи и перемещаемые узлы имеют очень большой вес.

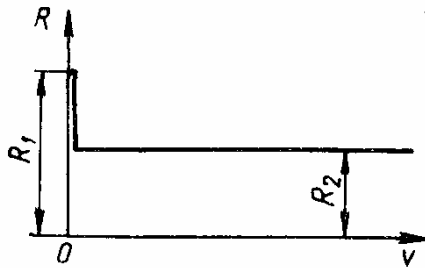


Рис. VI.7

Приближенное решение подобных вопросов возможно при помощи упрощенной характеристики трения, приведенной на рис. VI.7. Эта характеристика дает два значения силы трения: максимальную силу трения покоя R_1 и постоянную силу трения движения R_2 .

Рассмотрим движение массивного груза 1 (см. рис. III.3, б), связанного пружиной 2 с ведущим звеном 3. Скорость движения последнего будем считать постоянной и равной v_0 .

Пусть движение груза 1 и звена 3 совершается с общей скоростью v_0 . Сила упругости пружины P равна силе трения R_2 . Если скорость v_0 весьма мала, то малое случайное препятствие

может оказаться достаточным для остановки груза. Рассмотрим, что произойдет после этого.

Ведущее звено, продолжая движение вправо, будет сжимать пружину до тех пор, пока сила сжатия P не сравняется с максимальной силой трения покоя R_1 . Так как после этого дальнейший рост силы трения невозможен, то произойдет «срыв» груза I . При этом сила трения R_1 мгновенно уменьшится до значения R_2 , тогда как сила сжатия пружины $P = R_1$ мгновенно не может измениться и в первое мгновение начавшегося движения будет по-прежнему равна R_1 . Мгновение срыва примем за начало отсчета времени ($t = 0$); при этом равны нулю как смещение x , так и скорость груза $\dot{x}$, т. е. $x = 0$; $\dot{x} = 0$.

При срыве нельзя предполагать мгновенного скачка скорости. Такому скачку соответствует бесконечно большое ускорение, а следовательно, и бесконечно большие силы; здесь на груз в первое мгновение движения действует конечная сила $R_1 - R_2$.

Рассмотрим последующее движение груза. К текущему мгновению длина пружины изменится на величину $x - v_0 t$ и сила упругости пружины уменьшится до величины

$$P(t) = R_1 - c(x - v_0 t). \quad (\text{VI.25})$$

Дифференциальное уравнение движения груза запишется в виде

$$R_1 - c(x - v_0 t) - R_2 = m\ddot{x},$$

или

$$\ddot{x} + p^2 x = p^2 v_0 t + \frac{R_1 - R_2}{m}.$$

Решение этого уравнения, отвечающее начальным условиям (VI.24), имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{p} \sin pt + \frac{R_1 - R_2}{c} (1 - \cos pt). \quad (\text{VI.26})$$

Первое слагаемое правой части выражает движение со скоростью ведущего звена, а остальные слагаемые — дополнительные колебания груза.

Скорость движения груза меняется по закону

$$\dot{x} = v_0 - v_0 \cos pt + \frac{p(R_1 - R_2)}{c} \sin pt. \quad (\text{VI.27})$$

Следующая остановка груза произойдет в мгновение, когда $\dot{x}$ вновь обратится в нуль. Условие остановки $\dot{x} = 0$ приводит согласно соотношению (VI.27) к уравнению

$$v_0 - v_0 \cos pt_1 + \frac{p(R_1 - R_2)}{c} \sin pt_1 = 0,$$

где t_1 — время от момента срыва до новой остановки.

Введем безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{p(R_1 - R_2)}{cv_0} = \frac{g}{pv_0} \Delta f, \quad (\text{VI.28})$$

где Δf — разность коэффициентов трения покоя и движения.
Условие остановки принимает вид

$$\alpha \sin pt_1 = \cos pt_1 - 1. \quad (\text{VI.29})$$

Решая это трансцендентное уравнение, находим

$$\sin pt_1 = -\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}; \quad \cos pt_1 = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}. \quad (\text{VI.30})$$

Получив отсюда значение t_1 , можно по формуле (VI.26) определить абсциссу x_1 груза в момент новой остановки, т. е. путь, пройденный грузом за время t_1 :

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{v_0}{p} \sin pt_1 + \frac{R_1 - R_2}{c} (1 - \cos pt_1) = v_0 t_1 + \frac{2\alpha v_0}{p}.$$

С учетом выражений (VI.30) найдем по формуле (VI.25) силу сжатия пружины в момент остановки:

$$P(t_1) = 2R_2 - R_1.$$

Так как $R_2 < R_1$, то $P(t_1) < R_1$; следовательно, после остановки груз некоторое время будет оставаться на месте, пока сила упругости пружины вновь не достигнет значения предельной силы трения покоя R_1 .

За время, в течение которого груз покоится, сила сжатия пружины постепенно возрастает на величину

$$\Delta P = R_1 - P(t_1) = 2(R_1 - R_2),$$

и соответствующее укорочение пружины составит

$$\Delta l = \frac{\Delta P}{c} = \frac{2(R_1 - R_2)}{c}.$$

Этой же величине равен путь, который проходит ведущее звено за время, пока груз стоит на месте. Следовательно, длительность состояния покоя груза равна

$$t_2 = \frac{\Delta l}{v_0} = \frac{2(R_1 - R_2)}{cv_0} = \frac{2\alpha}{p}. \quad (\text{VI.31})$$

Тот же результат можно найти из условия

$$v_0(t_1 + t_2) = x_1,$$

выражающего равенство перемещений груза и ведущего звена за период.

Таким образом, период автоколебаний груза определяется формулой

$$T = t_1 + t_2,$$

для пользования которой нужно сначала найти t_1 из выражения (VI.30), а затем t_2 из формулы (VI.31). В момент $t = T$ происходит следующий срыв груза, и начинается новый цикл автоколебаний. Характер движения показан на рис. VI.8.

Чем меньше скорость ведущего звена, тем более резко выражен процесс автоколебаний. Действительно, при малых значениях v_0 безразмерный параметр α становится весьма большим, и из выражения (VI.30) в этом случае приближенно следует

$$\sin pt_1 \rightarrow 0; \quad t_1 = \pi/p.$$

При учете выражения (VI.31) период автоколебаний приближенно равняется

$$T = \frac{\pi + 2\alpha}{p},$$

Значение второго слагаемого в числителе увеличивается с уменьшением скорости v_0 .

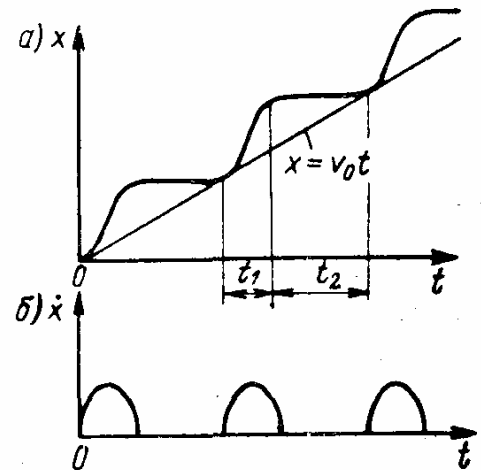


Рис. VI.8

Пример 32. Определить, при каком значении параметра α длительность остановки груза равна длительности его движения. Найти соответствующую скорость v_0 , если $p = 50 \text{ с}^{-1}$ и $\Delta f = 0,05$.

Согласно условию $t_2 = t_1$. Поэтому, обозначив $pt_1 = pt_2 = \beta$, имеем из выражений (VI.30) и (VI.31)

$$\sin 2\beta = -\frac{2\beta}{1 + \beta^2}.$$

Наименьший отличный от нуля корень этого трансцендентного уравнения $\beta = 2,03$.

Теперь из формулы (VI.28) можно получить соответствующую среднюю скорость движения

$$v_0 = \frac{g}{\alpha p} \Delta f = 0,48 \text{ см/с}.$$

Если средняя скорость движения $v_0 < 0,48 \text{ см/с}$, то интервалы остановок будут короче интервалов движения.

Как видно, чем жестче система (т. е. чем больше ее собственная частота p), тем меньшей оказывается скорость v_0 , отвечающая условию задачи.

32. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ

Ударные явления в механических системах весьма разнообразны, но их объединяют следующие общие черты:

1) с кинематической стороны — кратковременность акта удара, в течение которого происходят резкие изменения скоростей точек системы;

2) с динамической стороны — возникновение, а затем исчезновение весьма больших ударных сил.

В некоторых случаях ударные силы можно считать заданными внешними силами, не зависящими от свойств и движения механической системы (например, действие взрывной волны на сооружение).

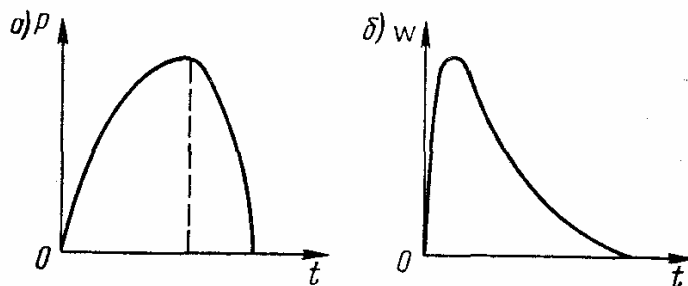


Рис. VII.1

В сущности, это обычные возмущающие силы P (рис. VII.1, а), и их действие может быть исследовано так, как это было пояснено в гл. IV, где речь шла о вынужденных колебаниях.

Иногда внешние воздействия задаются кинематическим способом. В частности, это относится к случаям, когда некоторый контейнер испытывает кратковременное интенсивное сотрясение, заданное в виде зависимости ускорения w от времени (рис. VII.1, б), и нужно определить движения тел, которые закреплены в контейнере. Обычно именно так ставится вопрос при исследованиях ударостойкости аппаратуры и оборудования, установленных на движущихся объектах, которые подвержены сотрясениям. Однако нет необходимости отдельно изучать этот случай, так как переход от заданных ускорений основания к эквивалентным силам, приложенным к телам, движение которых исследуется, очевиден: нужно исследовать относительное движение тел по отношению к контейнеру, введя в рассмотрение переносную и кориолисову силы инерции. После

этого получается обычная задача о вынужденных колебаниях (движениях) рассматриваемых тел.

Таким образом, задачи названных двух типов в сущности относятся к теории вынужденных колебаний, хотя формально их иногда относят к задачам об ударе; ниже эти задачи не рассматриваются.

Весьма просты задачи, в которых рассматривается удар движущихся тел по упругим безынерционным конструкциям. Такова, например, задача об ударе горизонтально движущегося тела о буфер, масса которого пренебрежимо мала (рис. VII.2, а). Сюда также относятся задачи о падении тяжелых грузов на упругие системы, если их массу можно приближенно не учитывать

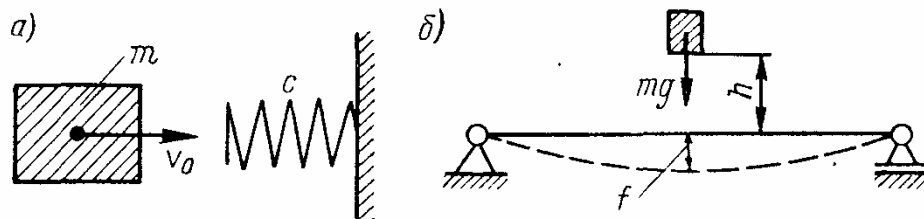


Рис. VII.2

(рис. VII.2, б). Благодаря тому, что при такой постановке задач массой обладает только ударяющее тело, его движение на внезапно возникшей упругой связи может быть найдено с помощью теории свободных колебаний.

Рассмотрим, например, случай, показанный на рис. VII.2, а, и обозначим: m — масса ударяющего тела; c — жесткость буфера; v_0 — скорость тела перед ударом; x — текущее значение обжатия буфера. Принимая момент первого контакта тела с буфером за начало отсчета времени, можно для последующего движения тела записать

$$-cx = m\ddot{x},$$

т. е. имеем обычное дифференциальное уравнение свободных колебаний. Это уравнение нужно решить при следующих начальных условиях: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = v_0$. Его решение имеет вид

$$x = \frac{v_0}{p} \sin pt, \quad (\text{VII.1})$$

где $p = \sqrt{c/m}$. Отсюда, в частности, следует, что наибольшее обжатие буфера

$$x_{\max} = v_0/p. \quad (\text{VII.2})$$

Соответственно наибольшая сила сжатия

$$N_{\max} = cx_{\max} = v_0 \sqrt{mc}.$$

Обычно в подобных задачах практический интерес представляют две последние величины, а подробности процесса движения,

которое описывается решением (VII.1), малосущественны. Но для определения указанных величин можно вообще обойтись без составления дифференциального уравнения движения, а воспользоваться элементарными энергетическими соображениями. В самом деле, кинетическая энергия груза, которой он обладает в момент первого контакта с буфером, $mv_0^2/2$ переходит в потенциальную энергию буфера к моменту его полного обжатия $cx_{\max}^2/2$. Из равенства этих выражений немедленно следует выражение (VII.2).

С помощью уравнения энергии легко решается также задача об ударе при падении груза (с высоты h) на упругую безынерционную систему (рис. VII.2, б). Работа, которую совершает сила тяжести груза от начала его падения до момента, когда скорость груза

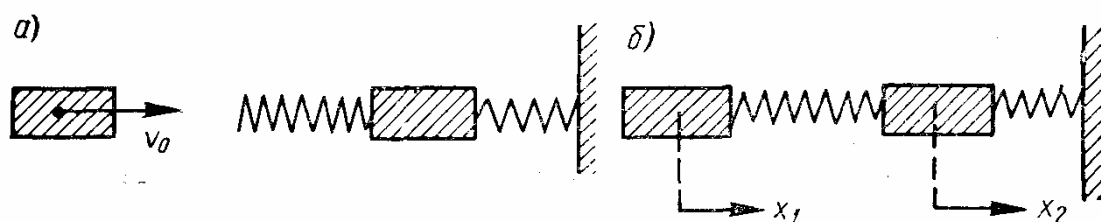


Рис. VII.3

обращается в нуль (т. е. момента достижения наибольшего прогиба f), равна $mg(h + f)$. Она переходит в потенциальную энергию деформации системы $cf^2/2$. Приравнивая последние два выражения, получаем для наибольшего прогиба следующую формулу:

$$f = \frac{mg}{c} + \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \frac{2mgh}{c}}.$$

Здесь перед корнем опущен второй знак (минус), поскольку он соответствует наибольшему отклонению балки не вниз, а вверх (на дальнейшем этапе возвратного движения груза).

Если обозначить $f_{\text{ст}} = mg/c$ — статический прогиб, вызываемый силой тяжести груза, то отношение динамического прогиба к статическому составит

$$\mu = \frac{f}{f_{\text{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}}}}.$$

Это выражение можно назвать коэффициентом динамичности для рассматриваемой задачи. Отметим, что при $h = 0$ коэффициент динамичности равен не единице, а двум единицам; этому случаю соответствует не статическое приложение груза, а внезапное нагружение балки полным весом груза.

Впрочем, иногда (в более сложных случаях того же типа) все же приходится пользоваться теорией свободных колебаний, так как запись уравнения энергии оказывается недостаточной. К таким случаям относится, например, задача об ударе груза, имеющего скорость v_0 , по системе, состоящей из двух пружин и промежуточной массы (рис. VII.3, а). Для решения этой задачи нужно рассмотреть свободные колебания системы, показанной на рис. VII.3, б,

при следующих начальных условиях: $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = 0$; $\dot{x}_1(0) = v_0$; $\dot{x}_2(0) = 0$.

Пользуясь способами, которые были пояснены выше, в гл. I, можно найти законы движения обоих грузов. После этого определяются наибольшие значения обжатия пружин и внутренних сжимающих условий. В этой задаче можно также поставить вопрос об оптимальных соотношениях между массами и жесткостями пружин и т. д. (в практике последнего времени уже находит применение показанная на рис. VII.3, а двухкаскадная система амортизации; как оказывается, при надлежащем выборе ее параметров она рациональнее обычной однокаскадной системы).

В рассмотренных выше задачах об ударе не возникают те специфические трудности, которые типичны для случаев соударения твердых обладающих массой тел; по этой причине решение таких задач не требует привлечения каких-либо дополнительных соображений, кроме тех, которые обычны для теории колебаний.

33. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОУДАРЕНИЯХ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Главная особенность задач о соударениях твердых тел состоит в том, что для их решения принципиально недостаточны соотношения, устанавливаемые в механике абсолютно твердых тел и материальных точек. Это обнаруживается, например, уже при попытке решить задачу об изменении скоростей материальных точек, происходящем в результате их столкновения. Примем, что перед столкновением точки A и B (рис. VII.4) движутся вдоль одной прямой, которую примем за ось x , и что проекции скоростей перед соударением соответственно равны v_{A0} и v_{B0} , причем $v_{A0} > v_{B0}$. Так как за время удара импульс внешних (по отношению к системе двух точек) сил равен нулю, то количество движения системы остается неизменным:



Рис. VII.4

$$m_A v_{A0} + m_B v_{B0} = m_A v_{A1} + m_B v_{B1}, \quad (\text{VII.3})$$

где v_{A1} и v_{B1} — проекции скоростей точек после удара. Это единственное независимое уравнение, которое можно получить из общих теорем механики. Но оно содержит две неизвестные скорости v_{A1} и v_{B1} , так что задача оказывается неопределенной.

Конечно, не приведет к успеху и попытка применить закон об изменении количества движения к каждой из точек:

$$m_A (v_{A1} - v_{A0}) = -S; \quad m_B (v_{B1} - v_{B0}) = S, \quad (\text{VII.4})$$

где S — ударный импульс, приложенный к точке B . В данном случае мы располагаем двумя уравнениями, но содержащими три неизвестные величины.

Такой же недостаток числа уравнений обнаруживается и при попытках решения любых задач о соударениях тел, которым приписывается свойство абсолютной твердости. Нужные для полной обусловленности задачи дополнительные соотношения невозможно найти в рамках классической механики. Такая неопределенность есть следствие чрезмерной схематичности самого понятия об абсолютно твердом теле (или материальной точке). Конечно, достаточно отказаться от этих упрощенных понятий и учесть деформируемость соударяющихся тел, как задача становится вполне определенной. Но строгие решения, которые могут быть получены таким путем, оказываются, как правило, очень сложными (простейший случай рассмотрен ниже в п. 32), и поэтому часто пользуются приближенными способами, позволяющими получить полную систему уравнений без явного учета деформаций.

Наиболее распространен предложенный Ньютоном способ, основанный на допущении, что относительная скорость соударяющихся материальных точек после удара пропорциональна их относительной скорости перед ударом:

$$v_{A1} - v_{B1} = -k(v_{A0} - v_{B0}). \quad (\text{VII.5})$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом восстановления*. По мысли Ньютона, он отражает собственные физические свойства материальных точек (тел) и не зависит от скорости соударения; при этом значения k подлежат опытному определению (проще всего — путем наблюдения за высотой отскока тела, падающего на горизонтальную плоскость). Знак минус в правой части соотношения (VII.5) введен для того, чтобы значения коэффициента k оказались положительными.

Таким образом, в этом варианте теории уравнения (VII.3) и (VII.5) образуют полную систему, из которой следует

$$\left. \begin{aligned} v_{A1} &= \frac{(m_A - km_B)v_{A0} + m_B(1+k)v_{B0}}{m_A + m_B}; \\ v_{B1} &= \frac{m_A(1+k)v_{A0} + (m_B - km_A)v_{B0}}{m_A + m_B}. \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.6})$$

Возможные значения коэффициента восстановления располагаются в промежутке от 0 до 1. Значение $k = 0$ соответствует случаю, когда при ударе происходит «слипание» материальных точек и их относительная скорость после удара равна нулю; такой удар называется абсолютно неупругим. При другом крайнем значении коэффициента восстановления ($k = 1$) относительная скорость материальных точек после соударения меняет знак, но сохраняет свою величину; в этом случае удар называется абсолютно упругим. В промежуточных случаях, когда $0 < k < 1$, удар называется не вполне упругим.

В этой постановке задачи длительность удара считается равной нулю и, соответственно, предполагается, что скорости соударяю-

щихся материальных точек изменяются мгновенно. Во всех случаях (кроме случая точного равенства $k = 1$) при соударении происходит мгновенная потеря кинетической энергии.

Мерой динамического взаимодействия соударяющихся материальных точек служит *мгновенный ударный импульс* (или, короче, *мгновенный импульс*). Понятие о таком импульсе получается следующим образом. Сначала рассматривается кратковременная сила взаимодействия, когда длительность удара мала, но конечна (см., например, рис. VII.1, а), и импульс силы определяется интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt.$$

Здесь $P(t)$ — ударная сила; t_1 и t_2 — моменты времени, соответствующие началу и концу удара. Этому выражению можно придать следующую форму:

$$S = P_{\text{ср}}(t_2 - t_1), \quad (\text{VII.7})$$

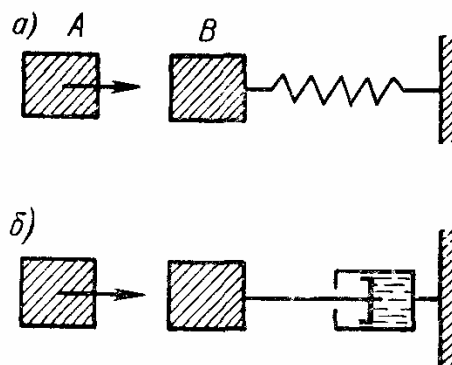


Рис. VII.5

где $P_{\text{ср}}$ — среднее значение силы за время удара. Далее рассматривается предельный переход к случаю, когда в выражении (VII.7) первый множитель неограниченно возрастает, а второй — неограниченно убывает, причем их произведение сохраняется неизменным. Полученная при таком переходе ударная сила оказывается бесконечно большой; ее называют *мгновенной ударной силой* или, проще, *мгновенной силой*. Конечный импульс мгновенной ударной силы и представляет собой мгновенный ударный импульс*.

Представление о мгновенном ударном импульсе как о конечном воздействии нулевой продолжительности, конечно, несколько искусственно, однако не более, чем, например, широко используемое в сопротивлении материалов понятие о сосредоточенной нагрузке как предельном случае нагрузки большой интенсивности, распределенной на малой части длины бруса.

Наличие упругих связей (см., например, рис. VII.5, а) не нарушает соотношений (VII.6), потому что за нулевое время соударения координаты точек системы не изменяются и реакции в упругих связях не возникают. Конечно, дальнейшее послеударное движение будет происходить по-разному, в зависимости от наличия или отсутствия упругих связей. Соотношения (VII.6) сохраняются и в тех случаях, когда в системе есть вязкие элементы

* Для понятия, которое здесь определено как мгновенный ударный импульс, некоторые авторы пользуются терминами «сила удара» или «ударная сила». Но при этом получается, что «сила» измеряется в единицах импульса, и возникает неудобство, сходное с тем, которое в свое время возникало из-за неудачного термина «живая сила».

(см., например, рис. VII.5, б). Хотя при ударе в этом случае мгновенно возникают реакции в вязких связях, но они имеют конечные значения (поскольку скорости конечны), и, следовательно, их импульс за нулевое время удара равен нулю.

Условность изложенного представления об ударе очевидна. Основное соотношение (VII.5) есть, в сущности, произвольное допущение и, как теперь твердо установлено, не отражает истинных закономерностей: в действительности относительная скорость после удара не пропорциональна относительной скорости перед ударом. Тем не менее до сих пор в практике нередко пользуются предложением Ньютона, достоинством которого является большая

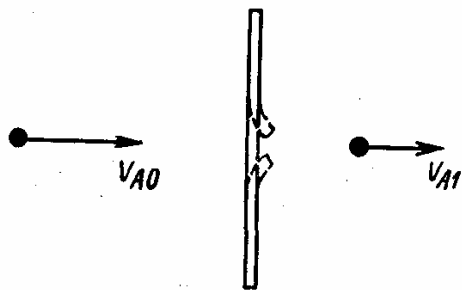


Рис. VII.6

простота. Однако нужно всегда иметь в виду, что значения коэффициента восстановления, полученные в определенных условиях эксперимента, можно лишь с осторожностью применять для других условий.

Выше мы считали, что соударение завершается отскоком тел и что их относительная скорость вследствие удара меняет знак. Однако существуют случаи, в которых со-

ударение завершается не отскоком, а пробиванием одного тела другим (рис. VII.6). В этих случаях относительная скорость вследствие удара меняется по величине, но сохраняет прежний знак.

Для задач о пробивании также можно ввести понятие о коэффициенте восстановления, но вместо соотношения (VII.5) принять

$$v_{A1} - v_{B1} = k(v_{A0} - v_{B0}), \quad (\text{VII.8})$$

изменив знак в правой части.

Можно было считать последнее соотношение вполне общим, охватывающим как случаи пробивания ($k > 1$), так и случаи отскока ($k < 1$), т. е. отойти от традиции и считать коэффициент восстановления при отскоке отрицательным.

В практических задачах, конечно, не ограничиваются определением послеударных скоростей по формулам (VII.6), а находят окончательные эффекты соударения из условий послеударного движения.

Рассмотрим в качестве типичного примера случай удара двух тел A и B , показанных на рис. VII.5, а. Для того чтобы найти наибольшее обжатие пружины, нужно прежде всего найти скорость тела B , которую оно приобретает сразу после соударения; согласно второй формуле (VII.6) она равна

$$v_{B1} = \frac{m_A(1+k)}{m_A + m_B} v_{A0}.$$

Теперь можно найти кинетическую энергию этого тела в первый послеударный момент:

$$T = \frac{m_B v_{B1}^2}{2} = \frac{m_A^2 m_B (1+k)^2 v_{A0}^2}{2(m_A + m_B)^2}. \quad (\text{VII.9})$$

Приравняв найденную величину наибольшей потенциальной энергии пружины $cf^2/2$, найдем искомое обжатие пружины

$$f = \frac{m_A (1+k) v_{A0}}{m_A + m_B} \sqrt{\frac{m_B}{c}}.$$

Часто в подобных случаях предполагают, что соударение абсолютно неупругое и происходит слипание ударяющего тела с ударяемым. В этом случае по формулам (VII.6) получается

$$v_{B1} = v_{A1} = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A0},$$

и кинетическая энергия в первый послеударный момент оказывается равной

$$T_* = \frac{(m_A + m_B) v_{B1}^2}{2} = \frac{m_A^2 v_{A0}^2}{2(m_A + m_B)}. \quad (\text{VII.10})$$

Приравняв ее наибольшей потенциальной энергии пружины, найдем для максимального обжатия пружины выражение

$$f = \frac{m_A v_{A0}}{\sqrt{c(m_A + m_B)}}.$$

В таком расчете неявно предполагается, что допущение $k = 0$ направлено в запас, так как кинетическая энергия определяется не для массы m_B , а для суммарной массы $m_A + m_B$. Но в действительности такой расчет может привести к приуменьшению эффекта удара, а не к его преувеличению. В самом деле, отношение выражений (VII.10) и (VII.9)

$$\frac{T_*}{T} = \frac{m_A + m_B}{m_B (1+k)^2}$$

может быть и больше и меньше единицы — это зависит от значений коэффициента восстановления и отношения масс m_A/m_B :

- 1) $T_*/T > 1$ при $m_A/m_B > 2k + k^2$;
- 2) $T_*/T < 1$ при $m_A/m_B < 2k + k^2$.

Таким образом, часто принимаемое предположение о том, что удар является абсолютно неупругим, может привести к недооценке последствий удара.

Нужно отметить, что во многих случаях удар представляет собой серию повторных соударений, и это должно быть учтено при определении деформации упругих связей. Возвращаясь

к рис. VII.5, а и рассматривая первую из формул (VII.6), замечаем, что если $m_A/m_B > k$, то после удара груз A хотя и потеряет скорость, но все же будет продолжать двигаться вправо (равномерно). При этом груз B , приобретший мгновенно начальную скорость v_{B1} , станет двигаться замедленно, так что после промежутка времени, удовлетворяющего равенству

$$v_{A1}t = \frac{v_{B1}}{p} \sin pt,$$

произойдет повторное соударение. Если упругая связь имеет небольшую жесткость и продолжительность процесса обжатия достаточно велика, то произойдет несколько таких соударений, пока груз A полностью не потеряет скорость. Точно так же при падении груза по вертикали груз по прошествии некоторого времени после отскока вновь упадет на упругую конструкцию и возникает длинная серия повторных ударов.

34. УЧЕТ МЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ УДАРЕ

Представление о мгновенности акта соударения, принимаемое в предложенной Ньютоном упрощенной схеме удара, не позволяет определить силы взаимодействия между соударяющимися твердыми телами — формально эти силы получаются бесконечно большими. Для того чтобы хотя бы приближенно найти силы ударного взаимодействия, часто пользуются следующей схемой. Если соударяющиеся тела имеют выступы, то считают, что деформации при ударе возникают только в зоне этих выступов, а так как соответствующие объемы материала относительно весьма малы, то можно пренебречь массой деформируемых объемов. В таком случае связь между силой P и сближением x соударяющихся тел можно принять такой же, как и при статическом нагружении, и если начальное касание тел осуществляется в одной точке, а расстояния между поверхностями тел вблизи этой точки описываются уравнением второго порядка, то

$$P = \beta x^{3/2}. \quad (\text{VII.11})$$

Это — формула статической теории упругости (формула Герца); она отражает нелинейную зависимость между силой и сближением тел. В частности, если выступы имеют сферическую форму, то

$$\beta = \frac{2}{3(1-\mu^2)} E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

где E — модуль упругости материала; μ — коэффициент Пуассона; R_1 и R_2 — радиусы сферических поверхностей.

При таком подходе к решению задачи она приобретает полную определенность. Но в отличие от способа, предложенного Ньютоном, дополнительное соотношение, необходимое для составления

полной системы уравнений, формулируется с помощью деформационных соображений.

Рассмотрим соударение двух тел со сферическими выступами. Будем отсчитывать координаты центров тяжести тел x_1 и x_2 от состояния, соответствующего моменту первого контакта, и совместим начало отсчета времени с этим моментом.

В таком случае сближение центров тяжести тел в процессе соударения определяется выражением

$$x = x_1 - x_2. \quad (\text{VII.12})$$

Уравнения движения обоих тел в этом процессе записываются в виде

$$m_1 \ddot{x}_1 = -P(x); \quad m_2 \ddot{x}_2 = P(x). \quad (\text{VII.13})$$

Исключив из этих уравнений координаты x_1 и x_2 с помощью равенства (VII.12), приходим к следующему уравнению:

$$\ddot{x} = -\frac{P(x)}{m}.$$

Здесь $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса системы.

Первое интегрирование дает (ср. со стр. 71—72)

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = -\frac{1}{m} \int_0^x P(x) dx + C. \quad (\text{VII.14})$$

Для определения постоянной C воспользуемся начальным условием: в начальный момент процесса (когда $t = 0$) относительная скорость тел равна $v_{20} - v_{10}$; обозначив эту скорость через v_0 , находим, что постоянная интегрирования C равна $v_0^2/2$ и, следовательно,

$$\dot{x}^2 - v_0^2 = -\frac{2}{m} \int_0^x P(x) dx. \quad (\text{VII.15})$$

Из (VII.15) можно найти наибольшее сближение тел и наибольшую ударную силу. Для этого нужно учесть, что в момент наибольшего сближения относительная скорость равна нулю ($\dot{x} = 0$) и, следовательно,

$$\frac{2}{m} \int_0^{x_{\max}} P(x) dx = v_0^2.$$

Пользуясь выражением (VII.11), имеем

$$\int_0^{x_{\max}} \beta x^{3/2} dx = \frac{2}{5} \beta x_{\max}^{5/2}.$$

Следовательно,

$$x_{\max} = \left(\frac{5mv_0^2}{4\beta} \right)^{2/5}. \quad (\text{VII.16})$$

Соответствующее (наибольшее) значение ударной силы составляет

$$P_{\max} = \beta x_{\max}^{3/2} = \beta^{2/5} \left(\frac{5mv_0^2}{4} \right)^{3/5}. \quad (\text{VII.17})$$

Продолжительность соударения можно найти при помощи второго интегрирования:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m} \int_0^x P(x) dx}.$$

Отсюда следует

$$\tau = 2 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m} \int_0^x P(x) dx}}.$$

Подставляя сюда (VII.11), находим с учетом (VII.16)

$$\tau = 2,943 \left(\frac{5m}{4\beta} \right)^{2/5} v_0^{-1/5}. \quad (\text{VII.18})$$

Здесь учтено, что поскольку материал соударяющихся тел абсолютно упругий, то при разжатии контакта процесс будет повторяться в обратном порядке, так что продолжительность этапа разжатия равна продолжительности этапа сжатия.

35. ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ УДАРЕ

Если при решении задач об ударе полностью учитывать деформационные и инерционные свойства соударяющихся тел, то чаще всего возникают большие вычислительные трудности. Рассмотрим лишь простейшую задачу этого типа — внезапное приложение сжимающей силы к торцу призматического стержня (рис. VII.7).

В первый момент сила N вызовет сжатие бесконечно малого элемента, непосредственно примыкающего к торцу. Это сжатие передается следующему элементу и т. д., причем этот процесс будет постепенно (не мгновенно) развиваться во времени. В любой момент процесса сжатой будет лишь некоторая часть длины стержня (она заштрихована на рисунке), тогда как остальная часть еще не испытывает сжатия. Обозначим через s скорость, с которой распространяется деформация сжатия вдоль оси стержня. Тогда st есть длина сжатого участка стержня в момент времени t . Считая, что материал стержня подчиняется закону Гука, найдем, что

укорочение сжатой части равно $\frac{N}{EF} ct$. Но это выражение также определяет перемещение торца стержня в рассматриваемый момент времени. Следовательно, скорость движения торца определяется выражением

$$v = \frac{Nc}{EF}. \quad (\text{VII.19})$$

С этой скоростью движутся все частицы, принадлежащие сжатой части, причем, конечно, скорость v во много раз меньше скорости c .

Составим уравнение количества движения. Количество движения стержня в момент времени t равно импульсу силы N за время t :

$$\rho F v c t = N t. \quad (\text{VII.20})$$

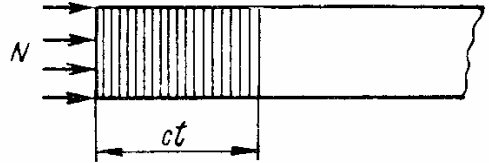


Рис. VII.7

Здесь $\rho F c t$ — масса сжатой части;
 $\rho F v c t$ — ее количество движения.

Из соотношений (VII.19) и (VII.20) находим скорость распространения деформации сжатия (скорость волны)

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (\text{VII.21})$$

и скорость движения частиц материала

$$v = \frac{N}{F \sqrt{E\rho}} = \frac{\sigma}{\sqrt{E\rho}}. \quad (\text{VII.22})$$

Эту задачу легко обратить и рассмотреть стержень, который первоначально двигался вдоль своей оси с некоторой заданной скоростью v , а затем ударился о жесткую преграду. В такой задаче известно изменение скорости частиц, принадлежащих торцу v , и неизвестным является напряжение σ . Из соотношения (VII.22) находим

$$\sigma = v \sqrt{E\rho}. \quad (\text{VII.23})$$

Далее можно определить, например, при какой скорости $v_{\text{пц}}$ в сечении стержня достигаются напряжения, равные пределу пропорциональности:

$$v_{\text{пц}} = \frac{\sigma_{\text{пц}}}{\sqrt{E\rho}}.$$

Если, например, удар происходит вследствие падения стержня на горизонтальную плоскость, то найденному значению скорости соответствует высота падения

$$h = \frac{\sigma_{\text{пц}}^2}{2E\rho g}.$$

Например, для стали, принимая $E = 2,1 \cdot 10^6$ кгс/см², $\sigma_{\text{пц}} = 3200$ кгс/см², $\rho g = 0,0078$ кгс/см³, находим $h \approx 312$ см.

При падении стержня с большей высоты в его сечениях возникают напряжения, превосходящие предел пропорциональности.

Конечно, изложенное решение очень схематично, так как в реальных условиях невозможно обеспечить, чтобы при ударе все точки торца стержня одновременно коснулись преграды, т. е. неизбежны некоторые перекосы и эксцентриситеты, из-за которых фактические напряжения окажутся больше расчетных.

После того как волна сжатия охватит всю длину стержня, начнется постепенная разгрузка сечений — от свободного конца к начальному сечению, пока не исчезнут напряжения во всех сечениях; после этого произойдет отскок стержня. Общая продолжительность удара вдвое больше времени, необходимого для того, чтобы волна сжатия прошла всю длину стержня l :

$$t_{\text{общ}} = 2l/c = 2l\sqrt{\rho/E}.$$

Например, для стального стержня длиной 50 см время соударения $t = 2 \cdot 10^{-4}$ с.

Теория Герца применима только при малых скоростях соударения, когда развивающиеся в контактной зоне напряжения не превосходят предела упругости. В других случаях нужно исходить из законов пластического деформирования и, в частности, учитывать различие между кривыми напряжение — деформация на двух этапах деформирования (при обжатии и разжатии контакта). Для первого этапа можно пользоваться зависимостью [38]

$$P = \beta_* x^s, \quad (\text{VII.24})$$

где β_* и s — постоянные, определяемые из опыта. При этом аналогично (VII.17) получится следующее наибольшее значение ударной силы:

$$P_{\text{max}} = \left[\frac{mv_0^2 (s+1)}{2} \beta_*^{1/s} \right]^{s/(s+1)}, \quad (\text{VII.25})$$

и наибольшее сближение соударяющихся тел

$$x_{\text{max}} = \left[\frac{mv_0^2 (s+1)}{2\beta_*} \right]^{1/(s+1)}. \quad (\text{VII.26})$$

Для второго этапа следует пользоваться законом упругой разгрузки

$$P = \beta (x - x_*)^{3/2}, \quad (\text{VII.27})$$

где x_* — остаточное перемещение, определяемое из равенства выражений (VII.24) и (VII.27) при $x = x_{\text{max}}$:

$$x_* = x_{\text{max}} - \left(\frac{\beta_* x_{\text{max}}^s}{\beta} \right)^{2/3}. \quad (\text{VII.28})$$

Дальнейшие вычисления могут показать, что в данном случае эффективный коэффициент восстановления

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^{-1/3} [(mv_0^2)^{2s-3} \beta_*^5 2^{s+6} (s+1)^{5s}]^{\frac{1}{6(s+1)}}, \quad (\text{VII.29})$$

т. е. зависит от скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев А. М., Сборовский А. К. Судовые виброгасители. Л., Судпромгиз, 1962, 196 с.
2. Алексеев С. П., Казаков А. М., Колотилов Н. Н. Борьба с шумом и вибрацией в машиностроении. М., «Машиностроение», 1970, 208 с.
3. Ананьев И. В., Тимофеев П. Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. М., «Машиностроение», 1965, 526 с.
4. Ананьев И. В., Колбин Н. М., Серебрянский И. П. Динамика конструкций летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1972, 416 с.
5. Бабаков И. М. Теория колебаний. М., «Наука», 1965, 560 с.
6. Беляковский Н. Г. Конструктивная амортизация механизмов, приборов и аппаратуры на судах. Л., «Судостроение», 1965, 524 с.
7. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М., «Наука», 1964, 410 с.
8. Блехман И. И. Синхронизация механических систем. М., «Наука», 1971, 894 с.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963, 410 с.
10. Быховский И. И. Основы теории вибрационной техники. М., «Машиностроение», 1969, 364 с.
11. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971, 256 с.
12. Бондарь Н. Г. Нелинейные стационарные колебания. Киев, «Наукова думка», 1974, 212 с.
13. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. Л., Судпромгиз, 1962, 194 с.
14. Бутенин Н. В. Теория колебаний. М., «Высшая школа», 1963, 186 с.
15. Вейц В. Л. Динамика машинных агрегатов. Л., «Машиностроение», 1969, 368 с.
16. Вейц В. Л., Качура А. Е., Мартыненко А. М. Динамические расчеты приводов машин. Л., «Машиностроение», 1971, 352 с.
17. Вибрация энергетических машин. Справочное пособие. Под ред. Н. В. Григорьева. Л., «Машиностроение», 1974, 464 с.
18. Вожжова А. И., Захаров В. К. Защита от шума и вибрации на современных средствах транспорта. Л., «Медицина», 1968, 326 с.
19. Вольперт Э. Г. Динамика амортизаторов с нелинейными упругими элементами. М., «Машиностроение», 1972, 136 с.
20. Вульфсон И. И., Колковский М. З. Нелинейные задачи динамики машин. Л., «Машиностроение», 1968, 282 с.
21. Гаврилов М. Н. Вибрация на судне. М., «Транспорт», 1970, 128 с.
22. Гевондян Т. А., Киселев Л. Т. Приборы для измерения и регистрации колебаний. М., Машгиз, 1962, 467 с.
23. Гик Л. Д. Измерение вибраций. Новосибирск, «Наука» (Сиб. отд-ние), 1972, 292 с.
24. Гладких П. А., Хачатурян С. А. Предупреждение и устранение колебаний нагнетательных установок. М., «Машиностроение», 1964, 275 с.

25. Гладких П. А. Борьба с шумом и вибрацией в машиностроении. М., «Машиностроение» 1966, 100 с.
26. Григорьев Е. Т. Расчет и конструирование резиновых амортизаторов. М., Машгиз, 1960, 160 с.
27. Гладких П. А. Борьба с шумом и вибрацией в судостроении. Л., «Судостроение», 1971, 176 с.
28. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания механических систем. Киев, «Наукова думка», 1966, 336 с.
29. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил. М., Госстройиздат, 1961, 320 с.
30. Гольдсмит В. Удар. М., Стройиздат, 1965, 448 с.
31. Горошко О. А. Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета. Киев, «Наукова думка», 1965, 168 с.
32. Гуров А. Ф. Расчеты на прочность и колебания в ракетных двигателях. М., «Машиностроение», 1966, 456 с.
33. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. М., Физматгиз, 1960, 580 с.
34. Диментберг Ф. М., Шаталов К. Т., Гусаров А. А. Колебания машин. М., «Машиностроение», 1964, 308 с.
35. Дондошанский В. К. Расчет колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. М.—Л., «Машиностроение», 1965, 368 с.
36. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем. Справочное пособие. М., Машгиз, 1969, 200 с.
37. Ильинский В. С. Вопросы изоляции вибраций и ударов. М., «Советское радио», 1960, 160 с.
38. Инженерные методы исследования ударных процессов. Авт.: Батуев Г. А. и др. М., «Машиностроение», 1969, 324 с.
39. Инструкция по устранению вредных воздействий вибрации рабочих мест на предприятиях железобетонных изделий. М., Стройиздат, 1962, 76 с.
40. Инструкция по определению динамических нагрузок от машин, устанавливаемых на перекрытиях промышленных зданий. М., Стройиздат, 1966, 131 с.
41. Инструкция по проектированию и расчету виброизоляции машин с динамическими нагрузками и оборудования, чувствительного к вибрациям. М., Госстройиздат, 1956, 55 с.
42. Инструкция по расчету перекрытий на импульсивные нагрузки. М., Стройиздат, 1966, 134 с.
43. Инструкция по расчету покрытий промышленных зданий, воспринимающих динамические нагрузки. М., Стройиздат, 1967, 88 с.
44. Инструкция по мерам борьбы с вибрационными воздействиями технологического оборудования при проектировании зданий и сооружений промышленности нерудных строительных материалов. М., Стройиздат, 1968, 111 с.
45. Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки. М., Стройиздат, 1970, 288 с.
46. Иориш Ю. И. Виброметрия. М., «Машиностроение», 1964, 772 с.
47. Истоин П. А. Крутильные колебания в судовых ДВС. Л., «Судостроение», 1968, 304 с.
48. Канингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М., Госэнергоиздат, 1962, 456 с.
49. Карпушин В. Б. Вибрации и удары в радиоаппаратуре. М., «Советское радио», 1971, 344 с.
50. Кер-Вильсон У. Вибрационная техника. М., Машгиз, 1963, 415 с.
51. Кильчевский Н. А. Теория соударения твердых тел. Киев, «Наукова думка», 1969, 246 с.
52. Кин Н. Тонг. Колебания механических систем. М., Машгиз, 1963, 352 с.
53. Клюкин И. И. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л., «Судостроение», 1971, 416 с.
54. Кобринский А. Е. Механизмы с упругими связями. М., «Наука», 1964, 390 с.

55. Кобринский А. Е., Кобринский А. А. Виброударные системы. М., «Наука», 1973, 592 с.
56. Кожевников С. Н. Динамика машин с упругими звеньями. Киев, изд-во АН УССР, 1961, 160 с.
57. Колебания и вибрации в поршневых компрессорах. Авт.: Видякин Ю. А. и др. М., «Машиностроение», 1972, 224 с.
58. Колебания сложных механических систем. Авт.: Рагульскис К. М. и др. Вильнюс, «Минтис», 1969, 246 с.
59. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. М., «Наука», 1966, 318 с.
60. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. М., Стройиздат, 1965, 632 с.
61. Кононенко В. О. Колебания систем с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964, 254 с.
62. Конструкционное демпфирование в узлах вибрационных машин. Авт.: Хвингия М. В. и др. Тбилиси, Груз. политехн. ин-т, 1973, 138 с.
63. Коритыцкий Я. И. Колебания в текстильных машинах. М., «Машиностроение», 1973, 320 с.
64. Корреляционный анализ нагрузок выемочных машин. Авт: Докукин А. В. и др. М., «Наука», 1969, 136 с.
65. Костерин Ю. И. Механические автоколебания при сухом трении. М., изд-во АН СССР, 1960, 76 с.
66. Кудинов В. А. Динамика станков. М., «Машиностроение», 1967, 360 с.
67. Курдюмов А. А. Вибрация корабля. Л., Судпромгиз, 1961, 320 с.
68. Лазарев Г. С. Автоколебания при резании металлов. М., «Высшая школа», 1971, 244 с.
69. Липсман С. И., Музыка А. Г., Липсман В. С. Предупреждение и устранение вибраций роторных машин. Киев, «Техника», 1968, 196 с.
70. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М., «Наука», 1972, 470 с.
71. Маслов Г. С. Расчеты колебаний валов. М., «Машиностроение», 1967, 272 с.
72. Найдено О. К., Петров П. П. Амортизация судовых двигателей и механизмов. Л., Судпромгиз, 1962, 288 с.
73. Новацкий В. Динамика сооружений. М., Госстройиздат, 1963, 376 с.
74. Остапенко В. А. Механические виброударные системы. Киев, «Наукова думка», 1966, 244 с.
75. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1960, 194 с.
76. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967, 420 с.
77. Певзнер Я. М., Горелик А. М. Пневматические и гидропневматические подвески. М., Машгиз, 1963, 319 с.
78. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев, «Наукова думка», 1970, 380 с.
79. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. Киев, «Наукова думка». 1971, 376 с.
80. Подольский В. Г. Вибрация конструкций при сухом трении между элементами. Киев, «Прапор», 1970, 176 с.
81. Прокофьев К. С., Самсонов Ю. А., Чернов С. К. Вибрации деталей судовых турбоагрегатов. В 2-х т. Т. 1; 2. Л., Судпромгиз, 1961—1966.
82. Прочность, устойчивость, колебания. Справочное руководство. Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. В 3-х т. Т. 3. М., «Машиностроение», 1968, 568 с.
83. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. Авт.: Рабинович И. М. и др. М., Стройиздат, 1970, 304 с.
84. Рагульскис К. М., Юркаускас А. Ю., Атступенас В. В. Вибрации подшипников. Вильнюс, «Минтис», 1974, 392 с.

85. **Рекомендации** по расчету резервуаров и газгольдеров на сейсмические воздействия. М., Стройиздат, 1969, 47 с.
86. **Руководство** по проектированию виброизоляции машин и оборудования. М., Стройиздат, 1972, 47 с.
87. **Ротенберг Р. В.** Подвеска автомобиля. Колебания и плавность хода. М., «Машиностроение», 1972, 392 с.
88. **Санитарные** нормы и правила по ограничению вибраций рабочих мест. Министерство здравоохранения СССР, 1966, 32 с.
89. **Светлицкий В. А., Стасенко И. В.** Сборник задач по теории колебаний. М., «Высшая школа», 1973, 452 с.
90. **Сергеев С. И.** Демпфирование механических колебаний. М., Физматгиз, 1963, 408 с.
91. **Силаев А. А.** Спектральная теория поддресоривания транспортных машин. М., Машгиз, 1963, 167 с.
92. **Синицын А. П.** Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки. М., Стройиздат, 1967, 144 с.
93. **Скучик Е.** Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1971, 558 с.
94. **Случайные** колебания. Под ред. С. Кренделла. М., «Мир», 1967, 356 с.
95. **Сорокин Е. С.** К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., Госстройиздат, 1960, 132 с.
96. **Справочник** по динамике сооружений. Под ред. Б. Г. Коренева и И. М. Рабиновича. М., Стройиздат, 1972, 512 с.
97. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967, 444 с.
98. **Тондл А.** Динамика роторов турбогенераторов. Л., «Энергия», 1971, 388 с.
99. **Тондл А.** Нелинейные колебания механических систем. М., «Мир», 1973, 334 с.
100. **Ударостойкость** судового энергетического оборудования. Авт.: Крючков Ю. С. и др. Л., «Судостроение», 1969, 254 с.
101. **Филиппов А. П.** Колебания деформируемых систем. М., «Машиностроение», 1970, 732 с.
102. **Хаяси Т.** Нелинейные колебания в механических системах. М., «Мир», 1968, 432 с.
103. **Хвингия М. В., Мгалоблишвили Д. Б.** Динамическая устойчивость цилиндрических пружин. Тбилиси, Груз. политехн. ин-т, 1966, 220 с.
104. **Хвингия М. В.** Вибрации пружин. М., «Машиностроение», 1969, 288 с.
105. **Хронин Д. В.** Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1970, 412 с.
106. **Шейнин И. С.** Колебания конструкций гидросооружений в жидкости. Л., «Энергия», 1967, 314 с.
107. **Шмырев А. Н., Мореншильдт В. А., Ильина С. Г.** Успокоители качки судов. Л., Судпромгиз, 1961, 516 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Глава I. Общие сведения	6
1. Число степеней свободы механической системы	—
2. Классификация сил	10
3. Способы составления уравнений движения	16
Глава II. Свободные колебания	19
4. Линейные системы с одной степенью свободы без неупругих сопротивлений	—
5. Влияние сил неупругого сопротивления на свободные колебания линейной системы с одной степенью свободы	48
6. Системы с одной степенью свободы без неупругих сопротивлений при нелинейной восстанавливающей силе	64
7. Линейные системы с несколькими степенями свободы	85
8. Колебания стержней постоянного сечения (точные решения)	113
9. Колебания стержней переменного сечения (приближенные решения)	133
10. Плоские колебания дисков	141
11. Изгибные колебания дисков	146
12. Изгибные колебания прямоугольных пластин	149
Глава III. Критические состояния механических систем	152
13. Устойчивость состояний равновесия и стационарных режимов движения	—
14. Неустойчивость при действии сил сухого трения	156
15. Критические состояния вращающихся валов и роторов	159
16. Элементарная теория дивергенции и флаттера	184
17. Потеря устойчивости аппарата на воздушной подушке	188
Глава IV. Вынужденные колебания	191
18. Линейные системы с одной степенью свободы без неупругих сопротивлений	—
19. Линейные системы с одной степенью свободы при действии сил неупругого сопротивления	214
20. Приложение теории вынужденных колебаний к измерительной технике	233
21. Системы с одной степенью свободы, имеющие нелинейную восстанавливающую силу	242
22. Линейные системы с несколькими степенями свободы	249
23. Линейные системы с распределенными параметрами	262
	319

Г л а в а V. Параметрические колебания	271
24. Основное уравнение	—
25. Случай периодического изменения жесткости	275
26. Случай периодического изменения параметрических нагрузок	277
27. Случай периодического изменения инерции системы	281
28. Устойчивость стационарных режимов вынужденных колебаний	284
Г л а в а VI. Автоколебания	286
29. Природа автоколебаний	—
30. Квазилинейные автоколебания	288
31. Релаксационные автоколебания	294
Г л а в а VII. Удар	302
32. Простейшие задачи	—
33. Решения задач о соударениях с помощью коэффициента восстановления	305
34. Учет местных деформаций при ударе	310
35. Волновые явления при ударе	312
Список литературы	315