

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
20 ВЕКА

THEORETICAL PHYSICS
IN THE
TWENTIETH CENTURY

A MEMORIAL VOLUME TO
WOLFGANG PAULI

EDITED BY

M. FIERZ

Zürich, Switzerland

and

V. F. WEISSKOPF

CAMBRIDGE, U. S. A.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 20 ВЕКА

МОСКВА

1 9 6 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ



Перевод
Л. Д. Пузикова и А. А. Сазыкина

Под редакцией
Я. А. Смородинского

Редакция литературы по физике

ПАМЯТИ
ВОЛЬФГАНГА
ПАУЛИ

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ИЗДАНИЯ

Теоретическая физика первой трети XX века начиналась и росла в нескольких центрах: у Нильса Бора в Копенгагене, в Гёттингене, где учился Вернер Гейзенберг, в Кембридже, где был Поль Дирак, и в Цюрихе—городе Вольфганга Паули. Отсюда она распространилась по всему миру. Молодые физики, работавшие там в эти героические годы, разнесли новые идеи в новые физические столицы. Но время не могло разорвать связей: когда одному из патриархов Вольфгангу Паули должно было исполниться 60 лет, его ученики и друзья решили издать сборник в его честь — сборник, который стал книгой об идеях современной физики. К несчастью, Паули умер, и написанные статьи предстают перед читателем уже как воспоминания.

Статьи книги написаны очень увлекательно. О начале квантовой эры рассказывают Бор, Крониг, Гейзенберг. В их статьях воссоздается живая картина тех лет, полных поисков и побед. Их продолжают статья об истории физики твердого тела Пайерлса и статья Ван дер Вардена об истории спиноров. Другие статьи книги дают обзоры современного состояния тех направлений, где влияние Паули было особенно велико; это статьи по теории поля, как по старой (Вентцель), так и по современным ее аспектам (Вилларс, Иост), статья Ву Цзянь-сюн о нейтрине и, наконец, полемическая статья Ландау о дальнейших путях теории. История, обзоры и прогнозы, объединенные в одной книге, как нельзя лучше сохраняют для новых поколений физиков молодость их науки.

Статьи сборника разные по уровню. Некоторые читаются легко, некоторые требуют изучения, но все они настолько напол-

нены новыми или малоизвестными фактами или идеями, что любой физик найдет в этой книге много интересного.

Мы сочли, что будет полезно добавить к голосам друзей и учеников Паули и голос его самого. Для этого в сборник было добавлено несколько его статей и выступлений последних лет, которые малоизвестны нашим читателям. Среди них два отрывка по теории относительности, написанные Паули для нового издания его первой книги «Теория относительности». Примечания, сделанные шестидесятилетним Паули к работе Паули двадцатилетнего, кажутся сейчас особенно интересными.

Этот сборник должен быть знаком всем советским физикам, и особенно физикам, только начинающим свою жизнь в той науке, которой отдал свою жизнь Вольфганг Паули.

Я. Смородинский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несколько лет назад, когда Паули был еще с нами, был запланирован сборник в честь его 60-летия (25 апреля 1960 г.). Нарушая обычную практику создания таких сборников, согласно которой следовало получать как можно больше работ его учеников и друзей, мы решили подобрать только такие статьи ряда его близких сотрудников, в которых отражалось бы современное состояние всех разделов физики, испытавших на себе влияние Паули. Вскоре мы обнаружили, что это непосильная задача, поскольку в физике практически нет такого раздела, на который идеи Паули не наложили бы свой отпечаток. Поэтому буквальное выполнение нашего плана было бы равносильно написанию полной энциклопедии современной физики. В связи с этим нам пришлось умерить аппетиты и ограничиться статьями двух основных видов. Во-первых, это статьи, в которых делается попытка кратко рассказать о прогрессе в решении некоторых физических проблем, наиболее интересовавших Паули; во-вторых, это воспоминания о героическом периоде физики (1920—1930 гг.), когда собственные работы Паули и его постоянная готовность критического подхода к новым течениям оказывали решающее влияние на зарождение основных идей квантовой механики.

Безвременная смерть Паули застигла нас во время подготовки этого сборника, сборника, который из юбилейного превратился теперь в сборник памяти Паули. Недостаточность нашего плана стала особенно очевидной перед лицом этой новой задачи. Ни один сборник статей не может воздать должное памяти Паули и отразить влияние его трудов на современную физику. Память

о Паули живет среди всех физиков. Но истинным памятником ему может быть только дальнейший прогресс физики в том смысле, как он понимал его.

Инициатором этого сборника был Пауль Розбауд, близкий друг Паули. Мы рассматриваем этот сборник как скромный вклад в признание заслуг Паули перед миром Физики.

М. Фирц

В. Вайскопф

НИЛЬС БОР

ВВЕДЕНИЕ

Прогресс физики в нашем столетии характеризуется не только расширением круга познаний, но равным образом и построением новых теоретических основ для анализа и синтеза экспериментальных данных. Вольфганг Паули, памяти которого посвящается эта книга, внес в этот прогресс огромный вклад не только собственными выдающимися работами, но и тем вдохновением и воодушевлением, которые мы все от него получали.

Глубокая интуиция и способность к критическим суждениям проявились у Паули очень рано в его известной энциклопедической статье по теории относительности, опубликованной, когда ему было всего 20 лет. Эта статья до сих пор остается одним из наиболее ценных пособий, в котором изложены основы и общее содержание первоначальных идей Эйнштейна. Раннее знакомство Паули с этой теорией, содержавшей радикальный пересмотр фундаментальных физических понятий, а также отличное владение математическим аппаратом подготовили почву для важного вклада в квантовую физику.

Теория относительности уже в руках Эйнштейна достигла высокой степени совершенства как в своих принципах, так и в приложениях, тогда как в квантовой теории положение было совсем иным. Далеко от того, чтобы дать общую картину явлений в атомных масштабах, великое открытие Планком кванта действия представляло собой попытку включения совершенно новых элементарных понятий в последовательное описание физических процессов. Как известно, путь к этой цели, усеянный многими препятствиями, был проложен лишь постепенно совместным трудом целого поколения физиков.

Окончив школу в Вене, Паули продолжил образование в Мюнхене под руководством Зоммерфельда, уникальное мастерство которого в области математической физики оказывало глубокое влияние на всех его учеников. Позднее Паули поддерживал тесный контакт со своим старым учителем и часто говорил о нем с любовью и восхищением. Когда Паули, после совместной работы с Борном в Гёттингене, прибыл в 1922 г. в Копенгаген, он, со своим остро критическим и неустанно ищущим умом, стал для нашей группы истинным источником воодушевления. Особенно понравилось всем нам его интеллектуальное благородство, проявлявшееся с прямоотой и юмором как в научных дискуссиях, так и в простых человеческих взаимоотношениях.

В те годы всеобъемлющие методы квантовой физики еще не были созданы, и интерпретация экспериментальных данных основывалась главным образом на принципе соответствия, в котором выражена попытка сохранения классического описания до определенной степени, совместимой с индивидуальностью атомных процессов. Такая эмпирическая процедура позволила более или менее последовательно использовать спектральные данные для того, чтобы получить картину связывания электронов в атомах и, в частности, найти первый подход к интерпретации взаимоотношений между физическими и химическими свойствами элементов.

Я живо вспоминаю дискуссии с Паули, в которых он выражал свою неудовлетворенность слабостью аргументации, на которой основывалась попытка объяснить особую стабильность замкнутых электронных оболочек, имеющую столь фундаментальное значение для объяснения периодичности в свойствах элементов, расположенных в соответствии с зарядом их ядер. Обоснованность его замечаний самым поразительным образом была доказана неустанными работами Паули в последующие годы, завершившимися открытием принципа запрета, выражающего фундаментальное свойство систем тождественных частиц, для которого, как и для самого кванта действия, классическая физика не имеет аналога.

Изобретательность, с которой Паули использовал в те годы соображения принципа соответствия в пределах их применимости, иллюстрируется проведенным им изыскным анализом комптоновского рассеяния излучения на свободных электронах. Исходя из общих статистических соображений Эйнштейна об обмене энергией и импульсом в радиационных процессах, Паули

доказал, что вероятность рассеяния зависит от интенсивности обеих компонент излучения, участвующих в процессе. Метод, примененный в этой работе, в действительности находится в очень близкой связи с общей теорией дисперсии, сформулированной Крамерсом, которая оказалась весьма существенной для дальнейших больших открытий.

Для Паули, с его отвращением ко всякого рода неясностям в физических теориях, огромным облегчением было развитие рациональной квантовой механики, исключаяющей всякое неуместное использование классических представлений. Едва ли нужно напоминать, что это развитие, в частности, позволило гармонично включить в соответствующую¹⁾ квантовую статистику принцип запрета Паули. Энергия, с которой Паули принимался за исследование новых методов, и совершенное владение ими, которое он вскоре приобретал, демонстрируются его статьей по основам квантовой механики, напечатанной в *Handbuch der Physik* в 1932 г. Эта статья занимает в научной литературе такое же положение, как его предыдущее изложение теории относительности.

Вся научная подготовка Паули неизбежно привела к тому, что он глубоко заинтересовался проблемой приведения основ квантовой физики в соответствие с требованиями теории относительности. С самого начала он не только принял выдающееся участие в формулировании квантовой теории электромагнитных полей, но и содействовал своими трудами по релятивистской теории электрона полному выяснению ее смысла. Дейтельный интерес Паули в значительной степени стимулировал разрешение кажущихся парадоксов, которые выявились в ходе последовавшей дискуссии по вопросу об измеримости компонент поля и электрических зарядов.

В последующие годы Паули проявляет еще более глубокий интерес к проблемам теории элементарных частиц и квантованных полей, соответствующих этим частицам. На ранней стадии он внес фундаментальный вклад в развитие этой теории, выдвинув гипотезу нейтрино, которая обеспечила выполнение законов сохранения при β -распаде атомных ядер. В этой связи интересно также напомнить, что в 1926 г. Паули первый обратил внимание на то, что сверхтонкая структура спектральных линий служит источником информации о спинах ядер и их электромагнитных моментах.

¹⁾ Т. е. статистику Ферми—Дирака.—Прим. ред.

В этой книге, посвященной памяти Паули, специалисты в различных областях рассказывают о его разносторонних фундаментальных работах и о влиянии их на последующее развитие физики. Говоря о большом жизненном пути Паули, важно помнить, что он воодушевлял не только многочисленных учеников, собиравшихся вокруг него сначала в Гамбурге, а потом в Цюрихе, где он работал последние 30 лет своей жизни, исключая военные годы, проведенные в Принстоне. Благодаря его участию в научных конференциях и обширной переписке с коллегами и друзьями влияние Паули распространялось на значительно более широкие круги.

Действительно, все с нетерпением хотели узнать мнение Паули о новых открытиях и идеях, всегда выражавшееся убедительно и с юмором, а также его симпатии и антипатии к открывающимся перспективам. Мы всегда извлекали пользу из замечаний Паули, даже когда временно были с ним не согласны; если он чувствовал необходимость изменить свои взгляды, он признавал это весьма откровенно, а если новые идеи встречали его одобрение, то в этом мы чувствовали большую поддержку. Анекдоты о его личности вырастали в настоящую легенду, и он все более и более становился самой совестью сообщества физиков-теоретиков.

Пытливый ум Паули охватывал все аспекты человеческой деятельности. В Цюрихе он нашел коллег, разделявших его многосторонние интересы, и его исследования по вопросам истории, эпистемологии и психологии вылились в ряд очерков, доставляющих обильную пищу для размышлений. Ему посчастливилось встретить подругу жизни, которая, тонко понимая силу его интеллекта и цельность его характера, дала ему тот покой и умиротворенность, в которых он так нуждался при своей большой исследовательской и педагогической работе. В лице Вольфганга Паули мы потеряли не только блестящего и вдохновенного товарища по работе, но и настоящего друга, который многим из нас казался утесом среди бурлящего моря.

Р. КРОНИГ

ПЕРЕЛОМНЫЕ ГОДЫ

Как много есть способов сказать правду, не вскрывая ее до конца! Не позволяет ли абсолютное отрешение от вещей бросить взгляд издалека на то, от чего мы отказались? И чье сердце настолько уверено в себе, что между смирением, которое зависит от нас, и забвением, которое приходит только со временем, в нем не промелькнет сожаления?

Эжен Фромантэн

7 января 1925 г., когда мне было 20 лет от роду и был я еще очень неопытен, прибыл я в маленький, живописный немецкий университетский город Тюбинген и остановился в отеле «У золотого быка». Я прибыл в качестве сотрудника Колумбийского университета для свидания с Ланде и Герлахом, которые возглавляли соответственно кафедры теоретической и экспериментальной физики; кроме того, мне нужно было повидаться с Баком. В Институте физики меня любезно принял Ланде, заметив, что я прибыл очень кстати, так как на следующий день должен приехать Паули. В самом деле, Паули написал ему длинное и очень интересное письмо, которое Ланде дал мне прочитать. В этой связи полезно обрисовать состояние физики в то время, чтобы объяснить причины моих скитаний, приведших меня в Тюбинген.

Во второй половине прошлого века упрочилось благородное здание классической феноменологической физики, полностью завершенное в начале нашего столетия построением теории относительности. Конечно, многие частные проблемы еще ждали своего анализа: свойства систем с нелинейными членами в теории упругости, явления турбулентности в гидродинамике, явления дифракции в акустике и оптике. Однако все эти проблемы имели общую особенность: основы теории, в рамках которой следовало искать решение, были известны, и оставалось лишь преодолеть главным образом математические трудности.

Совершенно иное положение сложилось в области атомной теории, развитие которой было заметно ускорено в девятнадцатом

платом века в результате изучения химических реакций и электролиза, термодинамического исследования вещества и, наконец, открытия катодных лучей и радиоактивности. Здесь постепенно было признано, что классическая физика не способна дать удовлетворительное описание экспериментальных данных.

Уже первый шаг ясно показал, что в атомной физике появляются новые черты, совершенно чуждые классической физике. Этот шаг сделал Планк в 1900 г. [71], введя в механику линейного гармонического осциллятора гипотезу о квантах, позволившую получить формулу для излучения черного тела, которая отвечала экспериментальным данным. Само утверждение Планка, что энергия гармонического осциллятора с частотой ν может принимать только дискретные значения, отличающиеся на $h\nu$, резко противоречило возможности непрерывного изменения энергии в механике Ньютона. В 1905 г. Эйнштейн [26] в теории световых квантов обобщил гипотезу Планка, выдвинутую для механической системы, на случай электромагнитных колебаний, что позволило дать простую интерпретацию фотоэлектрического эффекта. Энергия электромагнитных волн с частотой ν может быть только кратной той же величине $h\nu$ — энергии светового кванта, или фотона. В обе теории — Планка и Эйнштейна — вошла новая универсальная постоянная h , имеющая размерность действия.

Наиболее обширная область для применения квантовых идей была обязана идее об атоме с центральным ядром, выдвинутой Резерфордом в 1913 г. [73] на основе проведенных им блестящих экспериментов по рассеянию α -частиц в веществе. Объединение этой картины с теорией квантов явилось большим достижением Бора в 1913—1915 гг. [2—4]. Своим хорошо известным первым постулатом Бор выдвинул общее представление о стационарных состояниях с вполне определенными значениями энергии, применимое к любой атомной системе, причем линейный гармонический осциллятор являлся лишь частным случаем; точнее, Бор утверждал, что *дискретными* стационарными состояниями должны обладать *замкнутые* системы, подразумевая, что *незамкнутые* системы в общем случае еще могут изменять свою энергию непрерывно. В этом постулате выражался экспериментальный факт стабильности атомов и молекул. Вторым постулатом излучение, испускаемое или поглощаемое атомыми системами, связывалось с переходами между двумя стационарными состояниями, причем частота излучения ν как функция энергий W_j , и W_k определялась в согласии с гипотезой Эйн-

штейна о световых квантах уравнением

$$h\nu = W_j - W_k. \quad (1)$$

На этой основе сразу удавалось объяснить комбинационный принцип Ридберга—Ритца, утверждающий, что волновые числа в спектре произвольной атомной системы всегда можно представить в виде попарных разностей серий характерных для системы величин, так называемых спектроскопических термов; для этого следовало отождествить термы с энергиями стационарных состояний, деленными на h и на скорость света c .

С одной стороны, благодаря этому проявился резкий контраст между классической и квантовой физикой. С другой стороны, Бор [5] очень рано ясно осознал, что квантовую физику следует рассматривать как обобщение классической физики. В то время, когда окончательная формулировка квантовой физики была еще невозможной, принцип соответствия Бора, устанавливавший качественную аналогию двух теорий, стал неоценимым орудием дальнейших исследований. Он пронизал все творчество Бора и его сотрудников. Их труд завершил наконец Гейзенберг созданием квантовой механики.

Вдохновляемые постулатами Бора, физики середины двадцатых годов нашего века старались отыскать общие принципы, которые позволили бы определять энергии стационарных состояний в согласии с опытом. Для замкнутых систем с одной степенью свободы, описываемой координатой q , решение задачи обеспечивалось, по-видимому, методом фазового интеграла, утверждавшим, что для стационарного состояния должно выполняться соотношение

$$\oint p dq = nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где p — импульс, сопряженный q , определяется как функция q законами классической механики, а интегрирование проводится по одному полному циклу движения (периодического). В случае линейного гармонического осциллятора это требование снова приводило к первоначальной гипотезе Планка. Рассматривая круговые орбиты в атомах с одним электроном, т. е. в водородоподобных атомах, Бор в 1913 г. [2] пришел к выводу, что момент количества движения частицы также квантуется, принимая целочисленные кратные значения в единицах $h/2\pi$. Кроме того, классическая связь между энергией и моментом количества движения в предположении кулонова взаимодей-

ствия электрона с ядром привела Бора в 1914 г. [3] к следующей формуле для уровней энергии:

$$W = - \frac{2\pi^2 Z^2 e^4 \mu}{h^2 (1 + \mu/M)} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (3)$$

здесь Z — атомный номер элемента, e — заряд электрона, μ и M — масса электрона и ядра соответственно.

Большой первоначальный успех теории Бора был обусловлен тем, что формулы (1) и (3) непосредственно давали выражение для частот в водородоподобных спектрах, согласующееся с эмпирическими выражениями для частот, полученными Бальмером и Пашеном для водорода и Фаулером и Пикерингом для пониженного гелия в видимой и близкой инфракрасной областях спектра, тогда как в ультрафиолетовой и далекой инфракрасной областях они предсказывали новые серии линий, которые позднее и были обнаружены экспериментально.

В истории физики одним из счастливых совпадений следует считать тот факт, что метод фазового интеграла приводит к значениям энергетических уровней, количественно подтверждаемым спектроскопическими данными не только для случая линейного гармонического осциллятора, но и для водородоподобных атомов, хотя теперь известно, что в общем случае он дает только приближенные значения. То же самое можно заметить по поводу применения Резерфордом классической механики для объяснения его экспериментов по рассеянию α -частиц. Найденное в обоих случаях согласие с опытом, хотя и случайное по существу, бесспорно явилось сильнейшим стимулом для дальнейших исследований на избранном пути.

Побочным результатом исследований Бора явилось открытие кванта магнитного момента, известного теперь как магнетон Бора. Действительно, в атоме, в котором тяжелое ядро можно считать практически неподвижным (а следовательно, орбитальный момент количества движения обусловленным главным образом электронами), классическое соотношение между магнитным моментом и моментом количества движения, которое давало для их отношения величину $e/2mc$, заставляло полагать, что магнитные моменты атомов всегда будут целыми кратными величине $eh/4\pi mc$.

Квантование круговых орбит водородоподобных атомов следует рассматривать как одну из первых попыток распространить квантовую теорию на системы с одной степенью свободы, отличные от линейного гармонического осциллятора. Однако в дей-

ствительности две частицы в водородоподобных атомах движутся в трехмерном пространстве, и поэтому требовалось обобщить метод квантования на случай систем, имеющих больше одной степени свободы. Такое обобщение было осуществлено Зоммерфельдом в 1915 и 1916 гг. [75—77] для частного случая, для которого можно разделить переменные в дифференциальном уравнении Гамильтона—Якоби соответствующим выбором обобщенных координат q_r . Обозначая сопряженные импульсы символом p_r (каждый импульс p_r представляет собой функцию соответствующей координаты q_r , определяемую разделением переменных), естественно обобщить (2) с помощью условия

$$\oint p_r dq_r = n_r h, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где интегрирование снова должно проводиться по одному полному циклу для каждой координаты q_r . Этим способом из всех движений, возможных согласно классической механике, отбираются разрешенные движения, причем энергия стационарных состояний оказывается функцией квантовых чисел n_r .

Некоторые из успешных применений формулы (4) заслуживают особого внимания. В 1913—1915 гг. Бор [2—4] рассмотрел водородоподобные атомы, не ограничиваясь случаем круговых орбит. В этой связи Бор подчеркнул особый характер движения электрона в кулоновом поле, когда орбиты, соответствующие отрицательной энергии, являются эллипсами, т. е. замкнутыми кривыми, так что движение происходит только с одним периодом. Такая система называется вырожденной, так как она допускает разделение переменных при разном выборе координат q_r , и в этом случае (4) следует заменить более слабым требованием

$$\oint \sum_i p_i dq_i = \oint 2T dt = nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где T — кинетическая энергия; t — время; n — полное квантовое число. Для водородоподобных атомов значение $n=0$ исключается, поскольку оно соответствовало бы падению электрона на ядро. На основании (5) энергия стационарных состояний снова определяется формулой (3).

В 1916 г. Зоммерфельд [77] первый полностью рассмотрел влияние релятивистского изменения массы в случае водородоподобных атомов, выражающееся в медленной прецессии эллиптической орбиты в своей плоскости. В то время как в слу-

чае нерелятивистского движения условие (5) фиксирует только большую полуось орбиты, оставляя эксцентриситет и ориентацию в пространстве неопределенными, наличие второго периода в движении обуславливает квантование момента количества движения, который опять оказывается целым азимутальным квантовым числом (в современном обозначении l), умноженным на $\hbar/2\pi$. Энергия в этом случае тоже явно зависит от n и l , в результате чего возникает тонкая структура уровней энергии и спектральных линий. Это было с очевидностью подтверждено экспериментом, хотя и на этот раз сыграло свою роль счастливое совпадение.

Применяя условие (4) к водородоподобному атому в постоянном магнитном поле, где ларморова прецессия вводит третью частоту, Дебай [20] и Зоммерфельд [78] в 1916 г. показали, что компоненты момента количества движения в направлении поля также квантуются, принимая значения $m\hbar/2\pi$, причем магнитное квантовое число m принимает целые значения от $-l$ до $+l$ (с современной нормировкой l). Таким образом, в физику вошло важное понятие о пространственном квантовании, вскоре подтвержденное опытами Штерна и Герлаха. Оказалось возможным также показать, что магнитное поле вызывает изменение энергии, равное

$$\Delta W = m \frac{eh}{4\pi mc} H, \quad m = -l, -l+1, \dots, l, \quad (6)$$

в результате чего стало возможным, опираясь на соотношение (1), получить простую интерпретацию нормального эффекта Зеемана в спектральных линиях.

Рассмотрение (нерелятивистского) водородоподобного атома в присутствии постоянного электрического поля привело к новым успехам. Значения энергии, полученные в 1916 г. Эпштейном [30] с помощью разделения переменных в параболических координатах, находились в хорошем согласии с измерениями эффекта Штарка в линейчатом спектре водорода.

Наконец, трактовка двухатомных молекул как колеблющихся ротаторов с помощью условия (4) привела в работах различных авторов к пониманию основных свойств полосатых спектров таких молекул.

Во всех этих случаях теоретики были поставлены перед новой задачей. Правило частот Бора позволяло вычислить из значений энергии, полученных методом квантования, все возможные значения частот в спектре рассматриваемой системы. Опыт

показал, однако, что не все предсказанные таким способом спектральные линии появляются в действительности; многие линии запрещены правилами отбора, и их интенсивность оказывается равной нулю. Эти правила отбора можно сформулировать с помощью квантовых чисел. Возникал, вообще говоря, вопрос о том, каким методом можно вычислить не только частоты, но и интенсивности спектральных линий.

Частично такой метод был подготовлен в фундаментальной работе Эйнштейна в 1917 г. [27], в которой было введено понятие вероятностей перехода A_{jk} , B_{jk} и B_{kj} для спонтанного и вынужденного испусканий и поглощения света; число переходов в единицу времени в ансамбле систем дается соответственно выражениями $N_j A_{jk}$, $N_j B_{jk} \varrho(\nu)$, $N_k B_{kj} \varrho(\nu)$, где N_j и N_k — числа систем в верхнем и нижнем состояниях j и k , а $\varrho(\nu)$ — плотность излучения с частотой перехода ν . Таким образом, задача сводилась к вычислению этих вероятностей перехода из свойств системы.

В этом месте вступает в действие принцип соответствия. Этот принцип, исходя из аналогии с классической физикой, утверждает, что в переходах решающую роль играет электрический момент. Если разложить его в ряд Фурье по собственным частотам движения и их гармоникам ω_r и $\sum \tau_r \omega_r$, то квадрат амплитуды каждой гармоники следует рассматривать как количественную меру вероятности перехода, в котором изменения Δn_r квантовых чисел n_r равны τ_r . В частности, если амплитуда равна нулю, то соответствующий переход не должен происходить. Такая точка зрения была успешно применена Крамерсом в 1919—1920 гг. [44, 45] для вычисления интенсивности и поляризации компонент Штарка в водородоподобных атомах.

Естественно, что в начале двадцатых годов велись энергичные поиски обобщения теории водородоподобных атомов на атомы более чем с одним электроном. Такая задача представлялась наиболее простой для внутренних областей атома, где поле ядра намного превышало взаимодействие электронов. Действительно, экспериментальные работы по рентгеновским спектрам Баркла, Мосли и их последователей, особенно Зигбана и Костера, показали, что энергии, необходимые для удаления сильно связанных электронов из сферы притяжения ядер, лежат более или менее близко к значениям, даваемым формулой (3). Отклонения легко можно объяснить возмущающим влиянием остальных электронов; вводя вместо истинного заряда ядра Ze экранированный заряд $Z'e$, можно также описать их формально.

Таким образом, рентгеновские уровни поддавались классификации с помощью квантовых чисел n и l , относящихся к выбранному электрону и открытѣх ранее при релятивистском рассмотрении водородоподобных атомов.

Давно уже известная спектроскопистам простая структура оптических спектров щелочных и щелочноземельных металлов также указывала на возможность применения к этим атомам уже установленных принципов. В частности, Зоммерфельд в 1915—1916 гг. [75, 76] предположил, что эти спектры должны приписываться переходам валентного электрона, движущегося в поле ядра, экранированном внутренними электронами. Предположив, что экранированное поле все же остается центрально-симметричным, можно было сохранить классификацию стационарных состояний с помощью двух квантовых чисел n и l . Зоммерфельд пришел к выводу, что различные серии термов, установленные с помощью комбинационного принципа, соответствуют различным значениям азимутального квантового числа l , тогда как термы внутри каждой серии отличаются значениями главного квантового числа n . Возможность задания l таким образом, чтобы соблюдалось правило отбора $\Delta l = \pm 1$, была прямым следствием принципа соответствия.

В 1922 г. Бор [6] указал в этой связи на весьма существенное различие между орбитами, которые проникают в атомный остов, и теми, которые не проникают. Для последних поле ядра практически полностью экранируется электронами остова, и поэтому соответствующие значения энергии очень мало отличаются от уровней водородоподобных атомов. С другой стороны, для проникающих орбит главное квантовое число n должно быть больше главного квантового числа образующих остов внутренних электронов с тем же значением l . На основе более количественного рассмотрения можно получить так называемую формулу Ридберга, которая определяет приближенные значения энергии,

$$W = - \frac{2\pi^2 Z_{\text{эфф.}}^2 e^4 \mu}{h^2} \frac{1}{[n + a(l)]^2}; \quad (7)$$

здесь $Z_{\text{эфф.}}$ — результирующее число элементарных зарядов остова, а $a(l)$ — функция l , не зависящая от n .

Рассуждая таким образом, Бор в 1923 г. [7] наметил путь построения периодической системы элементов последовательным захватом электронов полем ядра. Комбинируя данные по

поглощению рентгеновских лучей и по эмиссионным спектрам с данными по оптическим спектрам, а также с данными химии и магнетизма [10], он пришел к представлению об оболочечной структуре атома, основанному на классификации электронных орбит по квантовым числам n и l . То обстоятельство, что на орбитах различного типа может накапливаться только ограниченное число электронов, представляло дополнительную гипотезу, необходимую для объяснения всех эмпирических данных, поскольку был найден ключ для их расшифровки. Эту гипотезу можно считать предшественницей принципа запрета, который будет обсуждаться позднее.

Именно в этом месте представляется уместным начать обзор работ Паули, выполненных в рассматриваемый период. Паули уже приобрел известность, написав в возрасте 20 лет главу по теории относительности для Энциклопедии математических наук (*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*); эта статья-обзор может быть рекомендована и в наше время всем, кто хочет приобрести знания в этом основном разделе классической физики. Работая под руководством Зоммерфельда в Мюнхене, Паули вскоре стал интересоваться атомной физикой.

В этой связи следует упомянуть прежде всего его исследование диамагнетизма одноатомных газов в 1920 г. [60]. Учитывая ларморову прецессию, совершаемую атомом в магнитном поле, Паули вычислил диамагнитную восприимчивость единицы объема:

$$\chi = -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum R^2, \quad (8)$$

где N — число атомов в единице объема; R — расстояние электрона от ядра; суммирование проводится по всем электронам, а черта означает среднее по всем ориентациям. Эта формула остается справедливой и в квантовой механике, если усреднение заменить взятием диагонального матричного элемента рассматриваемой величины. В начале вывода делается важное замечание, что парамагнетизм будет отсутствовать не только в случае, когда рассматриваемые атомы не имеют магнитного момента, но и тогда, когда атомы с магнитным моментом, не равным нулю, не перераспределяются по различным ориентациям по формуле Максвелла—Больцмана. В действительности такая ситуация складывается не для атомов, а для свободных электронов в проводнике, которые подчиняются принципу запрета, и именно на этой основе Паули [69] смог развить через семь лет свою теорию не зависящего от температуры парамагнетизма металлов.

Несколько позже Паули [61] исследовал теорию диэлектрической поляризации газа, состоящего из твердых двухатомных молекул с постоянным дипольным моментом p вдоль их межъядерной оси. Эта проблема уже изучалась Дебаем в рамках классической физики, получившим для диэлектрической постоянной ϵ в достаточно слабых электрических полях соотношение

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{Np^2}{3kT}, \quad (9)$$

где N — число диполей в единице объема; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Рассматривая молекулы как ротаторы с моментом количества движения, принимающим квантованные значения $J\hbar/2\pi$ ($J=0, 1, 2, \dots$), учитывая пространственное квантование ориентаций момента количества движения во внешнем поле и вводя формулу Максвелла—Больцмана для распределения молекул по различным ориентациям, Паули получил уравнение типа (9), но с другим числовым множителем в правой части. То обстоятельство, что разница между классическим и квантотеоретическим результатом сохранялась и при высоких температурах, уже тогда указывало на то, что в старой квантовой теории не все обстоит благополучно.

Следующая публикация Паули (в 1922 г.) по молекулярному иону водорода [62] содержит основные результаты его докторской диссертации. В этой работе система, состоящая из двух ядер водорода, фиксированных в пространстве, и одного электрона, квантовалась в соответствии с ранее описанными правилами, причем расстояние между ядром рассматривалось как параметр, от которого зависели значения энергии стационарных состояний. Разделение переменных в этой задаче возможно в эллиптических и гиперболических координатах. Вычисления представляют интерес с исторической точки зрения: автор рассматривал не только квантование, но и устойчивость орбит, отобранных квантовыми условиями, относительно малых возмущений. Дело в том, что в то время многие разделяли мнение, что неустойчивые орбиты должны исключаться, даже если они удовлетворяют квантовым условиям.

К этому периоду относится фундаментальное открытие Комптоном эффекта, названного его именем. Квант света, рассеянный на свободном электро́не, меняет свою длину волны $\Delta\lambda$, что можно продемонстрировать в рентгеновской области спектра. В 1923 г. Комптон [19] и одновременно Дебай [21] дали этому

явлению теоретическую интерпретацию. Еще в 1917 г. Эйнштейн [27] предполагал, что квант света обладает не только энергией $h\nu$, но и импульсом $h\nu/c$ в направлении распространения, так что испускание и поглощение излучения атомом будет сопровождаться передачей импульса. Как показал Эйнштейн, эта передача импульса обеспечивает максвелловское распределение скоростей в газе, атомы которого находятся в равновесии с излучением, подчиняющимся закону Планка. Чтобы объяснить сдвиг в длине волны рассеянных рентгеновских лучей, Комптон и Дебай приписали налетающему и рассеянному квантам импульсы $h\nu/c$ и $h\nu'/c$ соответственно; векторная разность импульса передается электрону, а соответствующая энергия отбирается от света. Для первоначально покоившегося электрона ν' поэтому будет меньше ν , и, применяя релятивистскую механику, упомянутые авторы получили хорошо известную формулу для изменения длины волны

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \quad (10)$$

причем θ — угол рассеяния.

Эти результаты побудили Паули в 1923 г. [64] изучить тепловое равновесие между газом свободных электронов и излучением абсолютно черного тела с энергией, распределенной по закону Планка. Если считать, что обмен импульсом между электронами и полем излучения совершается с помощью классического механизма радиационного давления, то, как уже показали Лоренц и Фоккер, не может поддерживаться ни спектральное распределение энергии излучения, ни максвелловское распределение электронов по скоростям. Паули смог показать, что эта трудность не возникает, если в основу рассмотрения при разумных предположениях о вероятности процесса положить элементарный механизм рассеяния, предложенный Комптоном и Дебаем.

Упомянув лишь мимоходом работы Борна и Паули [16] о методах теории возмущений в старой квантовой теории и Крамерса и Паули [48] о квантовании молекулярных вращений, мы перейдем теперь к двум важным работам Паули 1923 г. [63, 65], посвященным явлению, сыгравшему весьма существенную роль в дальнейшем развитии атомной физики, а именно — аномальному эффекту Зеемана. Мы уже говорили о попытках добиться понимания оптических спектров атомов с числом электронов, большим единицы, и об успехе, достигнутом для эле-

ментов первого столбца периодической системы. Однако мы намеренно умалчивали раньше о так называемой тонкой структуре. Действительно, энергетические уровни, переходы между которыми определяют оптические спектры щелочных металлов, далеко не полностью характеризуются главным и азимутальным квантовыми числами n и l , но для $l \neq 0$ обнаруживают дублетную структуру, требующую введения еще одного квантового числа.

В тот период было выдвинуто предположение, что замкнутые оболочки — остов атомов щелочных металлов — каким-то образом имеют момент количества движения $s=1/2$ и что этот момент складывается векторно с орбитальным моментом количества движения валентного электрона l , образуя результирующий момент $j=l \pm 1/2$, кроме случая $l=0$, когда $j=1/2$. Предполагалось далее, что моменты количества движения l и s равномерно прецессируют вокруг результирующего момента j , и принцип соответствия немедленно приводил тогда к правилу отбора $\Delta j=0, \pm 1$, подтверждаемому спектроскопическими данными. Аналогично, в щелочноземельных металлах остову приписывался момент, равный 0 или 1. Следовательно, при векторном сложении его с моментом количества движения валентного электрона l должны получаться синглетные и триплетные термы. Принцип соответствия в руках Зоммерфельда и Гейзенберга [80] позволил предсказать примерную интенсивность различных компонент тонкой структуры.

Область применения этих идей значительно расширилась в результате анализа мультиплетов в более сложных спектрах, например в спектрах переходных элементов первого длинного периода периодической системы. В частности, в работах Бехера, Каталана, Лапорта и Расселла было установлено, что по аналогии с уже известным объяснением спектров щелочных и щелочноземельных металлов структуру мультиплетных термов можно объяснять результатом сложения моментов количества движения L и S в полный момент J по правилу

$$J = |L - S|, |L - S| + 1, \dots, L + S. \quad (11)$$

Величина мультиплетного расщепления позволяла заключить, что энергия взаимодействия векторов L и S пропорциональна косинусу угла между ними. После этого можно было сопоставить различным энергетическим уровням определенной мультиплетности числа L, S, J , учитывая при этом правила отбора $\Delta L=0, \pm 1, \Delta J=0, \pm 1$. К этому же вопросу принадлежит и открытие Лапортом нового эффекта — наличия двух типов уров-

ней (четных и нечетных); так что при испускании или поглощении излучения могут комбинироваться только уровни разных типов.

Изучение влияния магнитного поля на спектры показало, что во всех случаях, когда наблюдается мультиплетная структура термов, эффект Зеемана проявляется более сложным образом, чем нормальный, описываемый формулой (6). Векторная модель для интерпретации мультиплетной структуры наводила на мысль о рассмотрении этого аномального эффекта Зеемана на основе методов, применявшихся для квантования многопериодных систем. Это и было сделано в уже цитированных двух работах Паули [63, 65]. Величины магнитных моментов связывались с величинами моментов количества движения, так что с моментом S связано $2S$ магнетонов Бора, а с моментом L — L магнетонов Бора. Удвоенный магнитный момент, связанный с S , был введен в то время *ad hoc*, без какого-либо теоретического обоснования. Разбирая свойства системы с учетом энергии связи между моментами L и S и взаимодействия магнитных моментов с внешним магнитным полем, Паули смог проследить полный переход от случая слабого поля к случаю сильного поля. В слабых полях результирующий магнитный момент J подвергается пространственному квантованию, и мультиплетный уровень расщепляется на $2J+1$ эквидистантные компоненты, различающиеся магнитным квантовым числом M , представляющим компоненту J в направлении поля. Уравнение (6) заменяется на

$$\Delta W = gM \frac{eh}{4\pi mc} H, \quad M = -J, -J+1, \dots, J, \quad (12)$$

причем выражение для множителя g через L , S и J было получено еще Ланде в 1923 г. [57]:

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (13)$$

В сильных полях моменты количества движения L и S квантуются по отдельности, давая компоненты M_L и M_S в направлении поля. Это поведение энергетических уровней в спектрах известно под названием эффекта Пашена—Бака. Более подробно этот вопрос обсуждается в данной книге в статье Ван дер Вардена.

В связи с этим уместно вспомнить другое исследование, проведенное Паули в 1924 г. [66]. Многие энергетические уровни J мультиплетов при очень высоком разрешении обнаружи-

вают дальнейшее расщепление меньшего порядка по величине, известное под названием сверхтонкой структуры. Паули первый указал, что это явление следует приписать моменту количества движения атомного ядра I , имеющему небольшой магнитный момент, причем I складывается с J , образуя результирующий момент F совершенно аналогично тому, как S и L образуют результирующий момент J . Различные подуровни F проявляются затем в радиационных переходах в виде дальнейшего расщепления спектральных линий.

Таким в общих чертах было положение, существовавшее в атомной физике в конце 1924 г., когда я выехал из Нью-Йорка в Европу. Интересно здесь напомнить, каково было состояние физики в Соединенных Штатах в то время. В экспериментальной физике такие исследователи как Майкельсон, Милликен, Лэнгмюр, Комpton и Р. Вуд, принадлежавшие к числу наиболее видных ученых мира, продолжали традицию пионерских исследований, восходящую к Франклину, Генри и Роулэнду, тогда как теоретическая физика, после блеснувшего как метеор Гиббса, не могла похвастать таким созвездием имен. В университете я получил солидную подготовку по классической теоретической физике, но знания в области атомной физики я должен был в значительной степени приобретать самостоятельно. Правда, в Америке существовала разобщенная группа молодых физиков, старавшихся что-то делать в этом направлении; среди них я должен упомянуть Кембла, Ван Флека, Брейта, Слетера и Мелликена, но они были слабо связаны друг с другом. Как и на большинство молодых физиков того периода, на меня сильнейшее влияние оказала книга Зоммерфельда «Строение атомов и спектральные линии». Кроме того, встреча с Эренфестом, читавшим в 1924 г. лекции в Америке, произвела на меня огромное впечатление, и я с радостью принял его предложение поехать за границу и, в частности, посетить его институт.

Итак, сначала я поехал в Кембридж, потом в Лейден, где провел несколько недель. В то время в Утрехте Орнштейн и его ученики, тщательно измеряя компоненты Зеемана в спектральных линиях и компоненты мультиплетов, показали, что интенсивности их находятся в простом рациональном отношении, подчиняясь так называемым правилам сумм. Вместе с Гаудсмитом [34], который тогда работал в Лейдене (1925 г.), я получил общую формулу для относительных интенсивностей компонент Зеемана, выразив эти интенсивности через квантовые числа J и M . Принцип соответствия наводил на мысль, что эти интен-

сивности должны быть полиномами второй степени по J и M . Коэффициенты этого полинома определялись требованием, чтобы выполнялись эмпирические правила Орнштейна. Вместе с правилами отбора и g -формулой Ланде это была одна из первых попыток заменить качественные утверждения принципа соответствия количественным результатом, который впоследствии был подтвержден квантовой механикой.

Естественно, что при этих обстоятельствах я желал видеть тех, кто так много сделал для лучшего понимания эффекта Зеемана, и именно поэтому, как уже говорилось раньше, я приехал в начале 1925 г. в Тюбинген. В моих глазах Паули означал так много, что, ожидая встречи с ним, я жадно вчитывался в письмо, которое Ланде показал мне. В этом письме фактически содержалось изложение принципа запрета в ясном и критическом стиле, столь характерном для его автора. В письме говорилось, что в атоме, находящемся в сильном магнитном поле, *каждый* электрон должен классифицироваться теми четырьмя квантовыми числами, которые *применялись для классификации термов щелочного атома, возникающих при возбуждении валентного электрона*, а именно: главным квантовым числом n , азимутальным квантовым числом l и двумя магнитными квантовыми числами m_1 и m_2 . Магнитное квантовое число m_1 представляет собой составляющую момента количества движения в направлении магнитного поля, будучи суммой компоненты m_l орбитального момента l и компоненты $m_s = \pm \frac{1}{2}$ момента $s = \frac{1}{2}$, о котором упоминалось и который в случае щелочных металлов приписывался раньше атомному остову. С другой стороны, $m_2 = m_1 + 2m_s$ есть энергия магнитного взаимодействия с внешним полем, выраженная в соответствующих единицах. Кроме того, выдвигалась гипотеза, что в состоянии, характеризуемом заданным набором четырех квантовых чисел, может находиться один и только один электрон.

На основе этих предположений сразу удавалось объяснить большое количество фактов. Непосредственным следствием этих предположений были максимальные числа заполнения оболочек, введенные Бором в его теории периодической системы. Рассматривая величины Σm_1 и Σm_2 для всех электронов атома соответственно как компоненту полного момента в направлении поля и полную энергию магнитного взаимодействия с внешним полем, можно было предсказывать, какие мультиплеты могут появиться, если известно число электронов с заданными n и l . Отсюда немедленно следовало, что замкнутая оболочка имеет

$L=S=0$ и что замкнутая оболочка, из которой удалено k электронов, дает такое же количество мультиплетов, как и оболочка, содержащая k электронов. В частности, становилась понятной и наблюдаемая дублетная структура рентгеновских уровней, поскольку для них можно пренебречь присутствием слабо связанных электронов сверх замкнутой оболочки, ибо связь между внешними и внутренними электронами вообще слишком слаба и не замечается на опыте.

Новая точка зрения оказалась чрезвычайно плодотворной для интерпретации оптических спектров. В случае элементов первого и третьего столбцов периодической таблицы, где в нормальном состоянии все электроны, кроме одного, входят в замкнутые оболочки, квантовые числа l и s для электрона совпадают с квантовыми числами L и S для конфигурации атома как целого. Для элементов второго столбца периодической таблицы, вообще говоря, l для одного из внешних электронов обращается в нуль, так что l для другого электрона совпадает с L ; однако для S возможны значения 0 и 1, приводящие к синглетным и триплетным термам. Таким образом, хорошо известные результаты укладывались в общую схему. Более интересным был случай аргона, сложный спектр которого анализировался ранее Пашеном. Исключая основное состояние, в этом случае имелась замкнутая оболочка с одним удаленным электроном плюс один электрон вне оболочки. В смысле характера термов такая система формально эквивалентна системе с двумя электронами вне замкнутых оболочек и обладает синглетными и триплетными уровнями. Однако самый богатый урожай был собран при предсказании мультиплетов, возможных для элементов в других столбцах периодической таблицы и для переходных элементов. Целью приезда Паули в Тюбинген было, в частности, подтверждение таких предсказаний на конкретных примерах. Спектры элементов четвертого столбца периодической системы, особенно свинца, изучались Баком, и низлежащие уровни для соображений Паули стали пробным камнем.

Наблюдать творческий разум в период его созидательной деятельности необычайно интересно, это остается в памяти навсегда. Письмо Паули произвело на меня огромное впечатление и, естественно, мне захотелось осмыслить тот факт, что *каждый отдельный* электрон в атоме должен описываться квантовыми числами, известными из спектров атомов щелочных металлов, в частности открытыми там двумя моментами количества движения l и $s=\frac{1}{2}$. Очевидно, теперь уже нельзя было при-

писывать s остову, и мне сразу пришла мысль, что s можно рассматривать как собственный момент количества движения электрона. На языке моделей, который до создания квантовой механики был единственной основой для обсуждения, этот собственный момент электрона можно наглядно изобразить только как вращение электрона вокруг своей оси. Правда, такое представление сопряжено с рядом серьезных трудностей. Однако эта идея была заманчивой, и к вечеру того же дня под влиянием прочитанного письма я получил формулу для так называемых релятивистских дублетов.

Величина расщепления уровней тонкой структуры в оптических спектрах щелочных металлов представляла в то время (1924 г.) большую загадку, к которой привлек внимание Ланде [58]. Согласно представлению о магнитном взаимодействии между орбитой валентного электрона и магнитным моментом, соответствующим моменту количества движения электронов остова, промежутки в тонкой структуре должны быть пропорциональными третьей степени эффективного ядерного заряда, тогда как в действительности была обнаружена пропорциональность четвертой степени. Экспериментальная пропорциональность четвертой степени заряда создавала затруднения и в случае так называемых релятивистских рентгеновских дублетов. Однако теперь, когда электрону наряду с собственным моментом количества движения $s = \frac{1}{2}$ приписывался собственный момент, равный одному магнетону Бора, электрон, движущийся вокруг ядра (экранированного), испытывал не только электростатическое притяжение, но и магнитное взаимодействие. Действительно, при переходе от системы отсчета, в которой покоится ядро, к системе, движущейся со скоростью электрона v , в результате преобразования Лоренца из радиального электрического поля E ядра (экранированного) возникает магнитное поле

$$H = \frac{E \times v}{(c^2 - v^2)^{1/2}},$$

перпендикулярное плоскости орбиты в системе отсчета, связанной с электроном.

Учитывая взаимодействие этого магнитного поля с собственным магнитным моментом электрона b (равным одному магнетону Бора) с энергией $\mp bH$ (в зависимости от ориентации момента — параллельной или антипараллельной H) и рассматривая это взаимодействие как малое возмущение, можно было получить формулу для дублетного расщепления в зависимости от заряда

ядра, полностью согласующуюся с экспериментальными данными Ланде.

При этом, конечно, необходимо было требовать, чтобы эта интерпретация не противоречила экспериментальным данным по тонкой структуре водородоподобных спектров, которые, казалось, до конца объяснялись теорией Зоммерфельда. Высказывалась надежда, что релятивистская прецессия орбиты в ее плоскости и взаимодействие собственного магнитного момента электрона с орбитальным движением должны взаимно скомпенсироваться таким образом, чтобы уровни с разными l , но с одинаковым j совпадали, давая такое же число и расположение уровней энергии, какое предсказывалось первоначальной теорией Зоммерфельда. Такая надежда подкреплялась тем обстоятельством, что оба эффекта оказались пропорциональными четвертой степени атомного номера; однако при ближайшем рассмотрении оказалось, что новое взаимодействие вдвое превышало взаимодействие, необходимое для компенсации, о чем дальше еще будет сказано. Когда я сообщил свои выводы Ланде, он ответил, что я обязательно должен рассказать о них Паули, как только он приедет.

На следующий день мы пошли на вокзал встречать Паули. Почему-то я представлял себе его намного старше и с бородой. Он был совсем не похож на созданный моим воображением образ, но я сразу почувствовал силу, исходящую от него; это привлекало и в то же время волновало. Скоро началась дискуссия в институте Ланде, и я получил возможность изложить свои мысли. Паули заметил: «Это очень остроумная выдумка», но не поверил в ее реальность. Затем началось обсуждение спектра свинца, причем в ходе беседы подтвердились выводы работы Паули. Эта работа появилась через несколько месяцев в печати [67] с некоторыми уточнениями, но существо ее совпадало с содержанием показанного мне письма.

Из Тюбингена я поехал ненадолго в Гёттинген, другой центр атомных исследований. Кафедры теоретической и экспериментальной физики возглавляли там Борн и Франк, объединившие вокруг себя группу молодых исследователей. Одной из задач, которыми они тогда занимались, было вычисление энергетических уровней нейтрального атома гелия. Пользуясь методами теории возмущений, Борн и Гейзенберг [13] получали результаты, совершенно противоречившие эксперименту; с каждым днем все сильнее росло убеждение, что существовавшие тогда методы квантования нуждаются в пересмотре. Из Гёттингена

я направился в Берлин, где посетил Гроттриана, чья книга о спектрах элементов с одним, двумя и тремя валентными электронами в то время была библией всех спектроскопистов, а затем поехал в Копенгаген.

В институте Бора происходили новые и захватывающие события. За год до этого (1924 г.) Бор, Крамерс и Слетер [41] опубликовали статью, в которой рассматривалась радикальная возможность того, что в элементарных процессах испускания и поглощения излучения энергия и импульс сохраняются только статистически. Это экстремистское мнение вызывало, естественно, большие споры, которые затихли только после того, как Гейгер и Боте экспериментально доказали, что природа не использует эту возможность.

Более важную роль на этом длинном пути сыграла формула для дипольного момента атомных систем, индуцированного излучением, которая была получена Крамерсом и Гейзенбергом в 1925 г. [47], продолжавшими старые работы Ладенбурга [55] и Ладенбурга и Рейхе [56]. Эта формула выходила за рамки качественных следствий принципа соответствия и в действительности представляла результат, который получается из квантовой механики в ее современной форме. Кроме значений энергии стационарных состояний, в эту формулу входили значения амплитуд электрического момента, соответствующих переходам между стационарными состояниями, или, говоря на современном языке, недиагональные матричные элементы электрического момента. Продолжая прежнюю работу по интенсивностям зеемановских компонент спектральных линий, я закончил вывод формул для относительных интенсивностей мультиплетных компонент, согласующихся с экспериментальными данными Орнштейна и его школы (см. [49]). Эта задача была также решена одновременно и независимо в 1925 г. Зоммерфельдом и Хенлем [81], а также Расселлом [72]. В современной квантовой механике эти результаты являются прямым следствием свойств функций Лежандра. Наконец, Кун [54] в том же году и Томас [82] получили формулу для суммы квадратов амплитуд электрических моментов, соответствующих всем переходам, начинающимся с одного энергетического уровня, которая при последующем развитии теории также оказалась справедливой количественно.

Таким образом, появились результаты, претендовавшие на точность и все более настоятельно требовавшие обобщающего синтеза. Насколько неудовлетворительным было общее поло-

жение, ясно из письма, полученного мной от Паули и датированного 21 мая 1925 г. Он писал:

«Физика теперь снова зашла в тупик, во всяком случае для меня она слишком трудна, и я предпочел бы быть комиком в кино или кем-нибудь вроде этого и не слышать ничего о физике!»

Я бы не удивился, если бы узнал, что аналогичные настроения преобладали в период, предшествовавший появлению механики Ньютона. В то время также были известны многие частные результаты по статике и динамике материальных тел, например закон сохранения импульса, кинематическое поведение свободно падающих объектов, теоремы об упругом и неупругом соударении шаров и законы Кеплера. Они были разрознены друг от друга до тех пор, пока принципы Ньютона не внесли единство в их интерпретацию. Именно в этой атмосфере летом 1925 г. родилась квантовая механика Гейзенберга. Я не могу удержаться от того, чтобы не привести полную выдержку из письма Гейзенберга, написанного из Гёттингена в период создания квантовой механики и датированного 5 июня 1925 г.¹⁾:

«Теперь я немножко расскажу Вам о моих собственных соображениях по поводу интенсивностей, и жду Вашей (как можно более острой) критики.

Основная идея заключается в следующем. В классической теории знание ряда Фурье для движения достаточно, чтобы вычислить все, т. е. не только дипольный момент (и излучение), но и квадрупольный момент, высшие мультипольные моменты и т. д. Рассмотрим пример. Пусть по оси x колеблется ангармонический осциллятор

$$x = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots;$$

тогда можно, например, вычислить периодическую силу в точке P (на расстоянии a от нулевой точки):

$$K = -\frac{e^2}{a^2} + \frac{e^2}{a^2 + x^2} = \frac{e^2}{a^2} \left(-1 + \frac{1}{1 + x^2/a^2} \right).$$

Если разложение $1/(1 + x^2/a^2)$ в ряд Фурье записать в виде

$$b_0 + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots,$$

¹⁾ Как заметит читатель, во втором уравнении, приведенном в этом письме, имеется ошибка, вкраившаяся, вероятно, из-за спешки. Для общей аргументации эта ошибка не существенна.

то

$$b_0 = 1 - \frac{a_0^2 + \frac{1}{2} a_1^2 + \dots + \dots}{a_2},$$

$$b_1 = - \frac{2(a_0 a_1 + \frac{1}{2} a_1 a_2 + \dots)}{a^2}, \quad b_2 = \dots \quad (1)$$

Следовательно, коэффициенты Фурье выражаются через первоначальные a_n . Теперь напрашивается предположение, что и в квантовой теории все определяется знанием вероятностей перехода или соответствующих амплитуд. Поэтому можно попытаться интерпретировать уравнения (1) в смысле квантовой теории, и такая интерпретация оказывается естественной, например

$$b_1(n, n-1) = - \frac{1}{a^2} [a_0(n) a_1(n, n-1) + a_1(n, n-1) a_0(n-1) +$$

$$+ a_1(n-1, n-2) a_2(n, n-2) +$$

$$+ a_2(n+1, n-1) a_1(n+1, n) + \dots].$$

При этой интерпретации, с моей точки зрения, существенно выбрать аргументы квантовотеоретических амплитуд так, чтобы это соответствовало связи между частотами. Например, если в классической теории имеем

$$b_2 e^{2i\omega t} = (a_1 e^{i\omega t})^2, \quad (2)$$

то квантовотеоретическое обобщение этого равенства должно гласить

$$b_2(n, n-2) e^{i\omega(n, n-2)t} =$$

$$= a_1(n, n-1) a_1(n-1, n-2) \exp \{i [\overbrace{\omega(n, n-1) + \omega(n-1, n-2)}^{=\omega(n, n-2)}] t\};$$

следовательно,

$$b_2(n, n-2) = a_1(n, n-1) a_1(n-1, n-2).$$

Если теперь признать, что такое вычисление и квантовотеоретическое обобщение действительно имеют смысл, то сразу получатся квантовотеоретические законы для интенсивностей. Ибо для интенсивностей в классической теории всегда имеют место соотношения вида (2). В виде примера опять возьмем ангармонический осциллятор и положим

$$x = \lambda a_0 + a_1 \cos \omega t + \lambda a_2 \cos 2\omega t + \lambda^2 a_3 \cos 3\omega t + \dots \lambda^{\tau-1} a_\tau \cos \tau \omega t \dots$$

Уравнение движения гласит:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^2 = 0.$$

Отсюда в первом приближении ($\omega^2 \approx \omega_0^2$) следует

$$a_2 (-4\omega^2 + \omega_0^2) = -\frac{1}{2} a_1^2,$$

$$a_3 (-9\omega^2 + \omega_0^2) = a_1 a_2 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, квантовомеханическое обобщение для этого случая имеет вид

$$a_2(n, n-2) \cdot 3\omega_0^2 = \frac{1}{2} a_1(n, n-1) a_1(n-1, n-2),$$

$$a_3(n, n-3) \cdot 8\omega_0^2 = \frac{1}{2} [a_1(n, n-1) a_2(n-1, n-3) + \\ + a_2(n, n-2) a_1(n-2, n-3)].$$

Занимаясь из теории гармонического осциллятора, зависимость от n_{\pm} считая, что a пропорционально \sqrt{n} (и в квантовой теории тоже), находим в классической теории

$$a_{\tau}(n) = \lambda^{\tau-1} k(\tau) \sqrt{n^{\tau}};$$

в квантовой теории

$$a_{\tau}(n, n-\tau) = \lambda^{\tau-1} k(\tau) \sqrt{n(n-1)(n-2) \dots (n-\tau+1)}.$$

Эта формула на самом деле уже обсуждалась в свое время (см. дискуссию с Паули), и я мог бы себе представить, что тем самым мы действительно имеем общий закон для вычисления интенсивностей: из уравнений движения получаются простые соотношения между a_{τ} , которые и определяют a_{τ} (при f степенях свободы с точностью до f независимых постоянных). В соответствии с квантовомеханическим обобщением эти соотношения следует непосредственно перенести в квантовую теорию и получить таким образом интенсивности (опять с точностью до f независимых постоянных). Определение постоянных представляет особую задачу, и я не буду сегодня писать об этом. Однако можно показать, например, что Ваши формулы для интенсивностей мультиплетов и эффекта Зеемана, по-видимому, также следуют из только что изложенной схемы.

В этой схеме мне больше всего нравится то, что все взаимодействия атома с внешним миром на самом деле можно свести к вероятностям перехода (отвлекаясь от случаев вырождения). Не нравится мне прежде всего математическая сторона (до сих пор я не вижу воз-

можностей для простого вычисления интенсивностей) и определение f постоянных. Физический смысл вышеизложенной схемы вычисления интенсивностей также выглядит весьма странно».

Из этого письма видно, как начал складываться закон умножения квантовомеханических величин, позднее выраженных в матричном виде. Упомянутое Гейзенбергом определение f постоянных стало возможным в конечном счете благодаря квантовомеханическому правилу коммутаций для канонически-сопряженных переменных, которое в действительности выражало на новом языке содержание вышеупомянутого правила сумм Куна и Томаса для интенсивностей.

О фактическом построении квантовой механики Гейзенбергом и другими будет рассказано в других статьях этой книги; здесь же мы коснемся его только в связи с спектроскопией. В июле 1925 г., когда я снова провел несколько дней в Гёттингене, в центре внимания стояла работа Борна и Иордана, в которой теория Гейзенберга была сформулирована в матричной форме. Наряду с этим Гаудсмит [33] и Гунд [41] систематизировали следствия из принципа запрета для мультиплетов, возникающих при данной электронной конфигурации атома. Из Гёттингена я поехал в Сан Вито ди Кадоре в Доломитовых Альпах, где провел свой отпуск вместе с Ферми и группой итальянских математиков, а затем возвратился в Копенгаген в начале сентября.

О чувстве большого облегчения, которое все испытали в связи с новой ситуацией, говорит и другое письмо Паули ко мне, датированное 9 октября 1925 г.:

«Механика Гейзенберга снова вернула мне радость жизни и надежду. Хотя она и не дает решения загадки, но я верю, что теперь снова можно продвигаться вперед. Прежде всего надо освободить механику Гейзенберга от гёттингенской формальной оболочки учености, чтобы лучше раскрыть ее физическое содержание. Потом надо бы попытаться с одной стороны, разработав глубже основы, понять «Zwang»¹⁾, а с другой — связать эти основы естественным путем с процессами столкновения».

Последняя из упомянутых проблем была решена только через год, после создания волновой механики, когда Борн, интерпретируя волновую функцию как амплитуду вероятности, указал способ рассмотрения столкновений. Другая проблема, названная словом «Zwang», сводилась к распространенному тогда

¹⁾ Этим словом, обозначающим «натяжение», Паули описывает силы, которые вводились вместо спина (ср. статью Ван дер Вардена, стр. 246). — *Прим. ред.*

в Копенгагене и усиленно защищавшемся Бором [7, 8] представлению о том, что удвоение термов, которое проявляется в виде четвертого квантового числа, как того требует Паули в своей формулировке принципа запрета, есть явление, индуцированное в атомах с числом электронов, большим единицы, и лишь частично осуществляющееся в гелии. В то время кажущаяся дублетная структура ортогелия еще не была заменена на триплетную из-за недостаточного спектроскопического разрешения. (Дальнейшие подробности см. в статье Ван дер Вардена.) Представление о внутреннем моменте количества движения электрона, к которому я пришел в Тюбингене, не соответствовало этим идеям.

Поздней осенью 1925 г. появилась заметка Уленбека и Гаудсмита [84], в которой эти авторы независимо выдвинули идею о внутреннем моменте количества движения электрона и связанном с ним магнитным моментом, равным одному магнетону Бора, но не поняли природы связи этого момента с орбитальным движением и возможность получения зависимости результирующей тонкой структуры от атомного номера согласно закону четвертой степени. В интересном обзоре своих работ, написанном в 1955 г. [83], Уленбек особенно подчеркивает ту моральную поддержку, которую он вместе с Гаудсмитом получал в этом вопросе от Эренфеста. В конце ноября 1925 г., на лекции по интерпретации спектров, прочитанной мной перед физическим форумом Датского физического общества, на котором присутствовало большинство физиков Копенгагена, я вновь обратил внимание на понятие о внутреннем моменте количества движения электрона, ссылаясь на заметку Уленбека и Гаудсмита, но отклика не получил.

Примерно 10 декабря 1925 г. я возвратился в Америку с тем, чтобы начать преподавательскую деятельность в Нью-Йорке. Эксперименты Дэвиса по преломлению рентгеновских лучей в твердых телах заставили меня заинтересоваться теорией дисперсии в веществе, имеющем непрерывные полосы поглощения вместо дискретных линий поглощения. Обобщение теории дисперсии Крамерса и Гейзенберга [47] привело в этом случае к интегральной формуле, известной теперь как одно из дисперсионных соотношений [50]. Обратное соотношение, выражающее коэффициент поглощения через показатель преломления, было опубликовано Крамерсом в 1927 г. [46], причем он рассмотрел эту проблему с математической точки зрения. Интересно заметить, что, как оказалось впоследствии, дисперсион-

ные соотношения применимы в значительно более широкой области [53]. Действительно, они были снова открыты независимо инженерами-электриками в применении к действительной и мнимой частям электрического импеданса.

В марте 1926 г. появилась вторая заметка Уленбека и Гаудсмита [85], посвященная спектру водорода. Еще раньше эти авторы предложили [84] формально перенумеровать уровни водорода по аналогии с классификацией стационарных состояний в атомах щелочных металлов. Введя три квантовых числа n, l, j , они *предположили*, что уровни с равными j , но разными l попарно совпадают, не указывая, однако, на природу взаимодействия, которое могло бы привести к этому совпадению. Тип связи, обрисованный выше в связи с моей деятельностью в Тюбингене, был замечен ими благодаря Гейзенбергу. В 1955 г. Уленбек [83] говорил об этом следующее:

«В конце октября появилось наше сообщение, и там содержалось именно это предположение. Через несколько дней после опубликования мы получили письмо Гейзенберга, в котором говорилось, что, сообщая нам модель дублетного расщепления в спектрах щелочных металлов, он, вероятно, пропустил множитель два и спрашивал наше мнение о такой возможности».

В письме от 26 марта 1926 г. Бор писал мне об этом же:

«Теперь я даже подозреваю, что понимание взаимной связи между спином и орбитальным движением распространилось среди физиков благодаря Вам. Действительно, по возвращении из Лейдена в Гёттинген я обсуждал некоторые проблемы с Гейзенбергом, от которого лейденские физики узнали причину связи, и он говорил мне, что сам слышал это от кого-то год назад, но, к сожалению, не мог припомнить, от кого».

Как подробно рассказано в статье Ван дер Вардена, идея о спин-орбитальной связи в корне изменила положение вещей, устранив квантовомеханическое «натяжение», и Бор [9] написал одобрительный комментарий к последней заметке Уленбека и Гаудсмита. В этих заметках впервые появился термин «спин».

Ввиду этого решительного поворота во взглядах ведущих физиков на квантовомеханическое «натяжение» мне оставалось лишь подчеркнуть те трудности, которые все еще оставались на пути к предложенному объяснению [51]. Эти трудности тоже рассматриваются подробно в статье Ван дер Вардена.

Развитие теории в последующие годы пролило совершенно новый свет на комплекс этих проблем, решающая роль в выяснении которых принадлежала Паули. Поэтому мы остановимся

теперь на истории квантовой теории в период между 1926 и 1928 гг.

Как уже говорилось, соображения, высказанные Гейзенбергом в 1925 г. [36], явились исходным пунктом для матричной формулировки квантовой механики, установленной Борном совместно с Иорданом [15, 14]. Действительно, соотношение для амплитуд, набросанное уже в цитированном выше письме Гейзенберга, представляет не что иное, как применение правила умножения матриц. В полном согласии с идеями принципа соответствия Бора, сохранялись формальные аспекты классической механики, но вместо обыкновенных величин в канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (14)$$

вводились некоммутативные матрицы с правилами коммутации

$$\begin{aligned} q_r q_s - q_s q_r &= 0, \\ p_r p_s - p_s p_r &= 0, \\ p_r q_s - q_s p_r &= \frac{h}{2\pi i} \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (15)$$

Поистине можно было сказать, что в старые меха влилось новое вино. Дирак [22, 23] независимо получил результаты, по существу эквивалентные результатам упомянутых выше авторов.

После работы Гейзенберга [36] о линейном гармоническом осцилляторе, результаты которой с точностью до появления нулевой энергии совпадали с выводами прежней квантовой теории, назрела необходимость показать, что и для водородоподобных атомов новые основы теории приводят к правильным значениям энергии (3). В период, когда была введена математическая техника матричного исчисления, но волновой механики еще не было, это представляло довольно трудную проблему. В остроумной работе [68] Паули с помощью матричного метода показал, что квантовая механика на самом деле дает такие же результаты, как и старая теория.

Если

$$\mathbf{P} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

представляет собой постоянный момент количества движения электрона относительно ядра, а

$$\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}$$

есть импульс, то из уравнений движения классической механики следует, что вектор

$$\mathbf{A} = \frac{1}{Ze^2\mu} \mathbf{P} \times \mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r}$$

не зависит от времени. Умножая \mathbf{A} скалярно на \mathbf{r} , получаем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = -\frac{1}{Ze^2\mu} \mathbf{P}^2 + r.$$

Вычитая квадрат каждой части этого уравнения из единицы, находим далее

$$1 - \mathbf{A}^2 = -\frac{2W}{Z^2e^4\mu} \mathbf{P}^2,$$

где W — энергия. Паули показал, что в квантовой механике можно ввести матричные векторы \mathbf{A} и \mathbf{P} , формально удовлетворяющие рассмотренным уравнениям. Используя перестановочные соотношения (15), он получил систему матричных уравнений, содержащих только матрицы \mathbf{A} , \mathbf{P} и W , так как координаты из них исключались. Решение этих уравнений, получаемое элементарным путем, приводило к уровням энергии (3) (для ядер с бесконечной массой).

Примерно в это же время описанные выше исследования стали сливаться с другим направлением, также возникшим в 1925 г. В этом же году де Бройль [18] опубликовал замечательную работу, не сразу получившую, однако, то признание, которого она заслуживала. В этой работе было высказано предположение о том, что двойственность в природе света, который в давних пор рассматривался как волновое движение, но проявляющее корпускулярные свойства при взаимодействии с материальными частицами, должна существовать также и для вещества, с которым наряду с корпускулярными свойствами следует ассоциировать волновой процесс. Исходя из теории относительности, де Бройль выдвинул постулат о связи между импульсом \mathbf{p} и энергией W свободной частицы, с одной стороны, и волновым вектором \mathbf{k} и частотой ν ассоциированной плоской волны, с другой стороны:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad W = h\nu. \quad (16)$$

Первое соотношение вскоре было подтверждено экспериментами Девиссона и Джермера, а также Дж. Томсона и др. по дифракции электронов в кристаллах.

В то время как де Бройль рассматривал, по существу, свободные частицы, высказывая для других случаев только каче-

ственные соображения, Шредингер [74] обобщил его работу, прежде всего на случай нерелятивистского движения частицы с массой μ под действием силы, обладающей потенциальной энергией V . Пользуясь отчасти интуитивными соображениями, Шредингер получил зависящее от времени волновое уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu}\Delta\Psi + V\Psi = -\frac{\hbar}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (17)$$

которому должна удовлетворять волновая функция Ψ . Для систем в стационарном состоянии с энергией W , когда зависимость волновой функции от времени имеет вид

$$\Psi = \psi \exp \left[-\frac{2\pi i W t}{\hbar} \right],$$

получается стационарное волновое уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu}\Delta\psi + V\psi = W\psi, \quad (18)$$

приводящее к задаче о собственных значениях параметра W в случае, если на ψ накладываются разумные математические условия. Таким образом, определение значений энергии стационарных состояний стало возможным новым способом, на первый взгляд очень далеким от матричного метода.

Однако сам Шредингер продемонстрировал существенную эквивалентность двух теорий. Действительно, развитая им теория обеспечивала систематический метод для вычисления матричных элементов теории Гейзенберга, Борна и Иордана. Прежде всего, Шредингер обобщил свои результаты на системы многих частиц и на силы, описываемые векторным потенциалом, используя в случае необходимости вместо прямоугольных координат обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_n . В этом случае волновая функция будет определена в абстрактном многомерном конфигурационном пространстве q . Существенная особенность построения квантовомеханических матриц состоит в том, что правила вычисления, которые по Борну, Гейзенбергу и Иордану должны выполняться для функций $2n$ величин $q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n$, полностью соответствуют правилам, применяемым в обыкновенном анализе для вычисления линейных дифференциальных операторов от n переменных q_1, q_2, \dots, q_n . Соответствие устанавливается следующим образом: в классической функции все p_r заменяются на оператор $\partial/\partial q_r$. Действительно, оператор $\partial/\partial q_r$ коммутирует с $\partial/\partial q_s$ для произвольного s , а с q_s коммутирует только при условии $s \neq r$. Оператор, полученный

для случая $s=r$ коммутацией и вычитанием

$$\frac{\partial}{\partial q_r} q_r - q_r \frac{\partial}{\partial q_r} \cdot$$

действуя на произвольную функцию q , воспроизводит ее и потому является тождественным оператором. Используя полную ортонормированную систему собственных функций $u_1(q)$, $u_2(q), \dots$ в пространстве переменных q с весовой функцией $\varrho(q)$, мы получаем для матричных элементов квантовой механики Борна, Гейзенберга и Иордана формулу

$$F_{jk} = \int u_j^*(q) [F u_k(q)] \varrho(q) dq.$$

Исследования Шредингера прояснили также отношение квантовой механики к классической: оказалось, что квантовая механика представляет обобщение классической механики в том же смысле, в каком физическая оптика есть обобщение геометрической оптики. Для решения задач атомной физики, следовательно, сразу стала применяться целая отрасль математики — теория дифференциальных уравнений в частных производных и их решение с помощью собственных функций, с успехом использованная в других разделах теоретической физики.

Более глубокий смысл волновой функции Ψ , естественно, стал предметом многочисленных дискуссий, особенно после того, как Шредингер показал, что величина $\Psi^* \Psi$ удовлетворяет закону сохранения в конфигурационном пространстве. Де Бройль и Шредингер сначала надеялись, что с помощью этого закона физика снова вернется к детерминизму, утраченному ею в таких понятиях, как вероятности перехода, однако скоро стало очевидным, что преимущества новой точки зрения полностью проявляются только при дальнейшем отказе от детерминистского описания. В частности, в связи с рассмотрением задачи о столкновениях Борн в 1926 г. [12] подчеркнул необходимость интерпретировать волновую функцию как амплитуду вероятности, а квадрат ее модуля $\Psi^* \Psi$ как плотность вероятности найти систему при заданных значениях ее координат. Бор использовал весь свой авторитет, чтобы разъяснить дополнительный характер корпускулярных и волновых представлений, так отчетливо сформулированный Гейзенбергом в 1927 г. [29] в соотношениях неопределенностей для канонически-сопряженных переменных

$$\Delta q \Delta p \approx h. \quad (19)$$

В то время в Копенгагене происходили длительные и полезные дискуссии между Бором и Эйнштейном, выступавшим за более детерминистскую формулировку физики, хотя именно Эйнштейну мы в значительной степени обязаны введением в физику понятия вероятности перехода со всеми ее индетерминистскими чертами. С тех пор этот спор время от времени вспыхивал вновь, хотя подавляющее большинство физиков считало тогда и продолжает считать теперь, что квантовая теория должна сохранить вероятностную интерпретацию, с помощью которой можно дать адекватный ответ на все вопросы, выдвигаемые экспериментом в масштабе атомных систем.

Пока мы рассматривали формулировку квантовой механики для случая, когда материальные частицы характеризуются только координатами, описывающими их положение. Теперь возникла настоятельная необходимость включить в новую схему явление, названное словом «спин». Первые шаги на этом пути были сделаны самим Паули в 1927 г. [70]. Он выдвинул предложение, согласно которому волновая функция электрона, определяемая непрерывно изменяющимися пространственными координатами, должна также зависеть от спиновой переменной, способной принимать только два значения. Читатель, интересующийся деталями этого обобщения теории, найдет их в статье Ван дер Вардена. Таким образом, для обсуждения спектроскопических проблем, и, в частности, аномального эффекта Зеемана, был создан базис, уже не нуждающийся в обращении к классическим моделям заряда, вращающегося вокруг своей центральной оси. Тем самым Паули проложил дорогу для релятивистской теории электрона и водородоподобных атомов, развитой в 1925 г. Дираком [25].

Действительно, один из недостатков обсуждавшихся до сих пор теорий, за исключением оригинального исследования де Бройля о свободных частицах и некоторых предложений Шредингера, состоял в том, что они давали квантовоеоретический перевод нерелятивистской классической механики. Фундаментальный характер этого ограничения, а также тот факт, что релятивистские эффекты в случае водородоподобных атомов приводили к экспериментально наблюдаемому явлению тонкой структуры спектра, вызывали необходимость надлежащего учета требований теории относительности. Дирак показал, что для одного электрона во внешних электрическом и магнитном полях можно сформулировать релятивистски инвариантное волновое уравнение для четырехкомпонентной волновой функ-

ции, а не двухкомпонентной, как могло показаться с первого взгляда после работы Паули.

С появлением теории электрона Дирака был сделан последний фундаментальный шаг, необходимый для интерпретации спектров (если не считать малых радиационных поправок к уровням энергии, рассматриваемых в квантовой теории поля). Волновое уравнение Дирака устранило все остававшиеся трудности одним ударом. В применении к водородоподобным атомам оно давало наблюдаемую тонкую структуру, пропорциональную четвертой степени заряда ядра; в присутствии внешнего магнитного поля возникали сдвиги энергий, обусловленные двумя моментами количества движения: во-первых, орбитальным моментом, несущим нормальный магнитный момент, и, во-вторых, спинным моментом, несущим удвоенный магнитный момент. Эти магнитные моменты также можно было объяснить распределением токов по всему атому.

Волновое уравнение Дирака неявно содержало в себе еще следствие, понятое до конца гораздо позднее. Введение четырехкомпонентной волновой функции вместо двухкомпонентной, предлагавшейся Паули, влекло за собой дальнейшее удвоение числа стационарных состояний: каждому состоянию с положительной энергией соответствует состояние с отрицательной энергией. Это открыло путь теории позитрона, которая будет рассмотрена в другом месте в связи с квантованием полей.

Интересные и фундаментальные особенности волновой механики были вскрыты Гейзенбергом [37, 38], исследовавшим инвариантность волнового уравнения относительно различных преобразований. Ясно, что волновое уравнение инвариантно по отношению к обмену координатами тождественных частиц, например двух электронов в атоме или двух одинаковых ядер в молекуле. Как следствие, волновая функция невырожденного стационарного состояния в результате этого преобразования либо сохраняет, либо меняет знак. Из спектроскопических данных вскоре был сделан вывод, что для данного сорта частиц в природе существуют волновые функции только одного типа, например для электрона и протона — антисимметричные волновые функции, а для ядер He^4 — симметричные волновые функции. Действительно, таким способом на языке волновой механики был сформулирован принцип запрета Паули. В статье Вандер Вардена этот вопрос обсуждается подробнее.

Более систематическое исследование роли, которую играет для спектроскопии инвариантность волнового уравнения атома

относительно вращений системы координат и обмена координатами электронов, было проведено, в частности, Вигнером [86, 87]. Он первый применил к рассматриваемым проблемам методы теории групп. В этой связи он указал также, что, кроме упомянутых преобразований, существует еще одна операция, не изменяющая волнового уравнения, — отражение в начале координат. Отражение позволяло разделить стационарные состояния на два класса — четные и нечетные состояния. В то время как для спектроскопии атомов это понятие четности послужило теоретическим обоснованием уже известных результатов, гораздо большее значение оно приобрело недавно для случая неэлектродинамических сил, господствующих в атомных ядрах, обсуждение которых выходит за рамки этой статьи.

Естественно, что после объяснения атомных спектров возникла необходимость применить квантовую механику к молекулярным спектрам, в частности к спектрам двухатомных молекул. Последовавшие исследования привели к гораздо лучшему пониманию структуры молекул, но ничего не прибавили к фундаментальным принципам физики. В связи с упоминавшимися выше работами можно отметить, что задача о диэлектрической постоянной газа, молекулы которого вращаются, была заново рассмотрена в 1926 г. Мензингом и Паули [59] и Кронигом [52], причем было показано, что классическая формула Дебая (9) для диэлектрической постоянной в слабых полях сохраняется также и в квантовой механике. Особого упоминания заслуживает квантовомеханическая интерпретация химической связи в гомополярных молекулах, данная Гайтлером и Лондоном [40] и открывшая большие перспективы для теоретической химии.

В огромной степени расширились возможности теоретического рассмотрения таких проблем атомной физики, как столкновения. В этой области старая квантовая теория позволяла получать количественные результаты лишь для немногих случаев. В волновой механике проблемы столкновений сводятся к исследованию рассеяния атомной системой плоской волны, представляющей падающие частицы. В 1926 г. Борн [14] первый указал метод решения этой задачи. Прототипом работ подобного рода явилось вычисление рассеяния электронов в центральном силовом поле, проведенное в 1927 г. Факсенем и Хольцмарком [31] с помощью математических методов, восходящих к Рэлею. Вскоре были развиты приближенные методы решения задач для случаев, когда, кроме упругого рассеяния, происходило

неупругое рассеяние налетающих частиц с передачей энергии атомной системе.

Развитие квантовой теории существенно отразилось на статистической механике. Уже в 1924 г. Эйнштейн [28] пришел к выводу, что для системы тождественных частиц в общем силовом поле, например для молекул газа в ящике, определение количества различных состояний, дающих одно и то же макроскопическое состояние, должно быть рассмотрено методом, впервые предложенным Бозе [17] при выводе закона излучения черного тела Планка. Распространив этот метод с фотонов на случай частиц с массой, отличной от нуля, Эйнштейн получил уравнение состояния, позднее сыгравшее важную роль при обсуждении свойств жидкого гелия. Во второй статье в 1925 г. Эйнштейн [29] указал на связь этих результатов с работой де Бройля [18].

В статистике Бозе — Эйнштейна принцип запрета не вводился, так что этот формальный аппарат можно применять к системам частиц, описываемым волновой функцией, симметричной по координатам. В 1926 г. Ферми [32] и Дирак [24] рассмотрели аналогичную проблему для систем частиц, обладающих антисимметричной волновой функцией, в частности для систем электронов.

Две статистики характеризуются выражением для вероятности f найти в термодинамическом равновесии занятое невырожденное стационарное состояние. Соответствующая формула имеет вид

$$f = \frac{1}{\exp[(W - \zeta)/kT] \mp 1}, \quad (20)$$

где ζ — термодинамический потенциал; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; верхний знак относится к статистике Бозе—Эйнштейна, а нижний — к статистике Ферми—Дирака. Последняя статистика вскоре была применена в ранее упоминавшейся работе Паули [70] о парамагнетизме металлов и в исследовании Зоммерфельда [79], посвященном электрическим свойствам металлов.

В нашей статье, задуманной главным образом как обзор старой квантовой теории и ее связи со спектроскопией, а также как обзор последовавшего затем развития современной квантовой механики для систем с конечным числом степеней свободы, более поздние и более известные работы лишь кратко упоминаются.

В работах Иордана и Клейна [42] и Иордана и Вигнера [43] было показано, что результаты нерелятивистской квантовой механики, полученные с помощью описания системы волновой функцией в конфигурационном пространстве, можно получить и в трехмерном пространстве, применяя метод вторичного квантования. Значение этого результата заключается в том, что он открыл путь для теорий поля, которые не являются предметом настоящей статьи.

В области спектроскопии исчерпывающее исследование энергетических уровней атомов в кристаллических решетках было проведено Бете в 1929 г. [1] с помощью теории групп. Новый интерес к спектроскопии вспыхнул уже в годы второй мировой войны, когда применение микроволновой техники позволило изучать спектры в области, прежде недоступной для экспериментатора. На основе этой техники появилась возможность исследовать переходы между различными зеемановскими уровнями атомного или молекулярного терма (известные под названием магнитного резонанса) в случае влияния как электронных, так и ядерных магнитных моментов. Этот метод был применен к интересным проблемам химического строения и физики твердого тела, однако он ничего не добавил к фундаментальным принципам. В области чрезвычайно коротких длин волн возникла новая отрасль экспериментальной физики — γ -спектроскопия. Здесь изучается ядро, его стационарные состояния и радиационные переходы. Все понятия, известные из области атома, появились и в этом случае: уровни энергии, четность, моменты количества движения отдельных нуклонов и их сложение в результирующий момент, принцип запрета, правила отбора и вероятности перехода. Большое разнообразие явлений обусловлено тем, что в излучении спектра участвуют два сорта частиц — протоны и нейтроны, а также тем, что, помимо электрических дипольных переходов, в ядре часто наблюдаются магнитные дипольные переходы и переходы еще более высокой мультипольности. Ядерные реакции при бомбардировке быстрыми частицами также следует рассматривать как аналог атомных столкновений. Все имеющиеся данные, по-видимому, доказывают, что фундаментальные понятия квантовой механики применимы для описания ядра в той же мере, как и для описания атома.

Мне хотелось бы закончить этот обзор некоторыми личными воспоминаниями. В 1928 г. Паули был назначен заведующим кафедрой теоретической физики Высшей технической школы в Цюрихе. В конце 1927 г. он спросил меня, не соглашусь

ли я стать его ассистентом. В письме от 22 ноября 1927 г. он писал:

«Вряд ли это наложит на Вас тяжелые обязанности; Ваша задача будет состоять в том, чтобы каждый раз, когда я что-нибудь скажу, противоречить мне, тщательно все обосновывая».

Предложение я принял; и впоследствии время, проведенное в Цюрихе, всегда вспоминалось мне как один из самых волнующих, самых поучительных периодов моей жизни. Паули приступил к своим новым обязанностям в конце апреля 1928 г., приехав накануне дня своего рождения, и Шеррер по этому поводу в комнате Паули поставил букет цветов на письменный стол. В Цюрихе весна — лучшее время года, и когда стало теплее, Шеррер, Паули и я часто стали ходить на пляж, где, устроившись на песке, с аппетитом съедали свой завтрак. Одна из моих обязанностей, не оговоренная заранее, состояла в том, чтобы ограничивать Паули в поглощении мороженого в кондитерской Шпрюнгли на Параденплац, куда мы ходили в обеденный перерыв. В частности, я помню, как мы заказывали шоколадное мороженое, и на вопрос официантки, должно ли оно быть очень твердым, я отвечал, что мне лучше подать в жидком виде, а моему спутнику — в газообразном. Эти «экспедиции» часто бывали заполнены дискуссиями по вопросам физики, в которых Паули не был склонен терпеть небрежность в рассуждениях, но был всегда готов воздать должное тогда, когда этого заслуживали, и признать свою ошибку, если она ему убедительно доказана. Паули также охотно позволял компенсировать свое превосходство в плавании на Цюрихском озере, соглашаясь совершать воскресные прогулки, где он оказывался в невыгодном положении по сравнению с людьми менее плотного телосложения.

Я уверен, что многие физики, которые занимали этот пост после меня, всегда вспоминали об этом времени с такой же благодарностью. После первой встречи наши пути с Паули не раз пересекались, и всегда у меня оставалось чувство, что в творческой атмосфере, окружавшей Паули, я почерпнул больше, чем мог сам дать.

Примечание, добавленное 31 декабря 1958 г.

Последние страницы этой статьи были написаны вечером 14 декабря, накануне дня смерти Паули, явившейся большим ударом для всех его друзей. В их памяти, как и в истории физики, Паули всегда будет сохранять особое место.

ЛИТЕРАТУРА

1. B e t h e H., Ann. d. Phys., **3**, 133 (1929).
2. B o h r N., Phil. Mag., **26**, 1, 476, 857 (1913).
3. B o h r N., Phil. Mag., **27**, 506 (1914).
4. B o h r N., Phil. Mag., **29**, 332; **30**, 394 (1915).
5. B o h r N., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Nat. Mat. Medd. Series IV, **8**, 1 (1918).
6. B o h r N., Zs. f. Phys., **9**, 1 (1922).
7. B o h r N., Ann. d. Phys., **1**, 228 (1923).
8. B o h r N., Nature, **116**, 845 (1925).
9. B o h r N., Nature, **117**, 265 (1926).
10. B o h r N., C o s t e r D., Zs. f. Phys., **12**, 342 (1923).
11. B o h r N., K r a m e r s H. A., S l a t e r J. C., Zs. f. Phys., **24**, 69 (1924).
12. B o r n M., Zs. f. Phys., **37**, 863; **38**, 803 (1926).
13. B o r n M., H e i s e n b e r g W., Zs. f. Phys., **16**, 259 (1923).
14. B o r n M., H e i s e n b e r g W., J o r d a n P., Zs. f. Phys., **35**, 557 (1926).
15. B o r n M., J o r d a n P., Zs. f. Phys., **34**, 858 (1925).
16. B o r n M., P a u l i W., Zs. f. Phys., **10**, 137 (1922).
17. B o s e S. N., Zs. f. Phys., **26**, 178 (1924).
18. d e B r o g l i e L., Ann. d. Phys., **3**, 22 (1925).
19. C o m p t o n A. H., Phys. Rev., **21**, 483 (1923).
20. D e b y e P., Phys. Zs., **17**, 507 (1916).
21. D e b y e P., Phys. Zs., **24**, 161 (1923).
22. D i r a c P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A109**, 642 (1925).
23. D i r a c P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A110**, 561; **111**, 279 (1926).
24. D i r a c P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A112**, 661 (1926).
25. D i r a c P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A117**, 610; **118**, 351 (1928).
26. E i n s t e i n A., Ann. d. Phys., **17**, 132 (1905).
27. E i n s t e i n A., Phys. Zs., **18**, 121 (1917).
28. E i n s t e i n A., Sitzber. preuss. Akad. Wiss., 261 (1924).
29. E i n s t e i n A., Sitzber. preuss. Akad. Wiss., 3 (1925).
30. E p s t e i n P. S., Ann. d. Phys., **50**, 489 (1916).
31. F a x é n H., H o l t s m a r k J., Zs. f. Phys., **45**, 307 (1927).
32. F e r m i E., Zs. f. Phys., **36**, 902 (1926).
33. G o u d s m i t S., Zs. f. Phys., **32**, 794 (1925).
34. G o u d s m i t S., K r o n i g R., Naturwiss., **13**, 90 (1925).

35. Goudsmit S., Uhlenbeck G. E., *Physica*, 5, 266 (1925).
36. Heisenberg W., *Zs. f. Phys.*, 33, 879 (1925).
37. Heisenberg W., *Zs. f. Phys.*, 38, 411; 39, 499 (1926).
38. Heisenberg W., *Zs. f. Phys.*, 41, 239 (1927).
39. Heisenberg W., *Zs. f. Phys.*, 43, 172 (1927).
40. Heitler W., London F., *Zs. f. Phys.*, 44, 455 (1927).
41. Hund F., *Zs. f. Phys.*, 33, 345; 34, 296 (1925).
42. Jordan P., Klein O., *Zs. f. Phys.*, 45, 751 (1927).
43. Jordan P., Wigner E., *Zs. f. Phys.*, 47, 631 (1928).
44. Kramers H. A., *Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Nat. Mat. Medd. Series III*, 8, 3 (1919).
45. Kramers H. A., *Zs. f. Phys.*, 3, 199 (1920).
46. Kramers H. A., *Atti Congr. dei Fisici Como*, 1927, p. 545.
47. Kramers H. A., Heisenberg W., *Zs. f. Phys.*, 31, 681 (1925).
48. Kramers H. A., Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 13, 351 (1923).
49. Kronig R., *Zs. f. Phys.*, 31, 885; 33, 261 (1925).
50. Kronig R., *Journ. Opt. Soc. Amer.*, 12, 547 (1926).
51. Kronig R., *Nature*, 117, 550 (1926).
52. Kronig R., *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 12, 488, 608 (1926).
53. Kronig R., *Physica*, 12, 543 (1946).
54. Kuhn W., *Zs. f. Phys.*, 33, 408 (1925).
55. Ladenburg R., *Zs. f. Phys.*, 4, 451 (1921).
56. Ladenburg R., Reiche F., *Naturwiss.*, 11, 584 (1923).
57. Landé A., *Zs. f. Phys.*, 15, 189 (1923).
58. Landé A., *Zs. f. Phys.*, 24, 88; 25, 46 (1924).
59. Mensing L., Pauli W., *Phys. Zs.*, 27, 509 (1926).
60. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 2, 201 (1920).
61. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 6, 319 (1924).
62. Pauli W., *Ann. d. Phys.*, 68, 177 (1922).
63. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 16, 155 (1923).
64. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 18, 272 (1923).
65. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 20, 371 (1923).
66. Pauli W., *Naturwiss.*, 12, 741 (1924).
67. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 31, 765 (1925).
68. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 36, 336 (1926).
69. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 41, 81 (1927).
70. Pauli W., *Zs. f. Phys.*, 43, 601 (1927).

71. Planck M., Verh. deutsch. phys. Ges., **2**, 237 (1900).
72. Russell H. N., Nature, **115**, 835 (1925).
73. Rutherford E., Phil. Mag., **21**, 669 (1913).
74. Schrödinger E., Ann. d. Phys., **79**, 361, 489, 734; **80**, 437; **81**, 109 (1926).
75. Sommerfeld A., Sitzber. bayer. Akad. Wiss., 425, 459 (1915).
76. Sommerfeld A., Sitzber. bayer. Akad. Wiss., 131 (1916).
77. Sommerfeld A., Ann. d. Phys., **51**, 1 (1916).
78. Sommerfeld A., Phys. Zs., **17**, 491 (1916).
79. Sommerfeld A., Zs. f. Phys., **47**, 1, 43 (1928).
80. Sommerfeld A., Heisenberg W., Zs. f. Phys., **11**, 131 (1922).
81. Sommerfeld A., Hönl H., Sitzber. preuss. Akad. Wiss., 141 (1925).
82. Thomas W., Naturwiss., **13**, 627 (1925).
83. Uhlenbeck G. E., Oude en Nieuwe Vragen der Natuurkunde, Amsterdam, 1955.
84. Uhlenbeck G. E., Goudsmit S., Naturwiss., **13**, 953 (1925).
85. Uhlenbeck G. E., Goudsmit S., Nature, **117**, 264 (1926).
86. Wigner E., Zs. f. Phys., **40**, 492, 883 (1926).
87. Wigner E., Zs. f. Phys., **43**, 624 (1927).

В. ГЕЙЗЕНБЕРГ

ВОСПОМИНАНИЯ ОБ ЭПОХЕ РАЗВИТИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В критические годы развития квантовой теории (1922—1927 гг.) Паули работал с присущей ему работоспособностью и увлечением. Всеобщую известность приобрели опубликованные им в эти годы работы и статья по квантовой теории в *Handbuch der Physik*. Однако в этих статьях благодаря необычайно критической позиции Паули содержится лишь небольшая часть фактически проделанной им работы. В своих статьях Паули сообщал только готовые результаты, но никогда не говорил о длинном и часто сложном пути, по которому он пришел к ним, и ничего не писал о незавершенных попытках. Частично об этой незаметно совершавшейся им работе сказано в обширной переписке, которая велась в то время между Паули и мной; и хотя теперь в моем распоряжении, к сожалению, нет его ответов, а имеются только мои письма того времени с некоторыми пометками, сделанными Паули на полях, однако и они все же воссоздают живую картину борьбы вокруг основных проблем квантовой теории, борьбы, в которой участвовал тогда небольшой круг физиков. Сохранившаяся часть этой переписки поможет здесь хотя бы частично восстановить содержание тогдашних страстных дискуссий по основным физическим проблемам.

К началу этого периода совершенно запутанным образом переплелись круги трех задач; разделить их и пояснить оказалось очень трудно. Этими задачами были: аномальный эффект Зеемана для многих спектральных линий, обусловленный спинном электроном, затем принцип запрета и, наконец, самое важное — фундаментальные вопросы квантовой теории, связанные с дуализмом волна—частица. Тот факт, что при этом речь шла

именно о трех принципиально различных проблемах, был выяснен лишь в конце рассматриваемого периода. Сначала же при неудаче почти каждой теоретической попытке, исходившей из чисто феноменологического описания экспериментальных данных, было совершенно неясно, следует ли отказываться от конкретного модельного представления (например, от представления о сферически-симметричном электроны) или от всяких моделей вообще, или же, наконец, дело было в неправильном выборе исходных принципов для определения стационарных состояний.

Первый принципиальный результат получил Паули, доказавший (летом 1922 г.), что, применяя квантовые условия Бора—Зоммерфельда к молекулярному иону водорода, нельзя получить правильных стационарных состояний. Правда, этот результат был еще недостаточен, чтобы раз и навсегда в глазах физика дискредитировать атомные модели; слишком велики и поразительны были успехи моделей для объяснения атома водорода, эффекта Штарка и эффекта Зеемана для спектральных линий водорода, а также периодической системы элементов. Однако впервые вера в наглядные модели этой работой Паули была серьезно поколеблена. В этой ситуации большое значение имели эмпирические результаты по аномальному эффекту Зеемана. Именно здесь работами Зоммерфельда, Ланде и других было установлено, что, применяя сравнительно простую, наглядную модель, можно вывести эмпирические формулы только качественно, но не количественно. К тому же в конце вычислений приходилось всегда вносить определенные изменения, например заменять квантовое число k на $k - \frac{1}{2}$ или I^2 на $I(I+1)$. В дискуссиях, которые разгорелись по этому поводу между мной и Паули, уже в октябре 1923 г. было зафиксировано следующее положение: «Модельные представления принципиально имеют только символический смысл, они являются классическими аналогами „дискретной“ квантовой теории». Тем самым во всей остроте был поставлен вопрос о том, каким должно быть математическое оформление «дискретной» квантовой теории или, как мы говорим сегодня, квантовой механики.

Но теория тонкой структуры и аномального эффекта Зеемана содержала еще и другие загадки. Паули уже давно заметил, что не все обстояло благополучно с определением числа стационарных состояний в периодической системе и что, в частности, из релятивистской теории Зоммерфельда совершенно невозможно получить тонкую структуру рентгеновских линий в том виде, в каком она наблюдалась на опыте: число дискретных

состояний оказывалось больше, чем это следовало из теории Зоммерфельда.

В декабре 1924 г. Паули прислал мне свою новую работу по этому вопросу. Электрону необходимо приписать еще одну, четвертую степень свободы, которая могла бы принимать только два значения. Паули говорил об удвоении состояний, не поддающемуся механическому описанию. Это позволяло навести порядок в счете состояний и добиться естественного описания периодической системы на основе принципа запрета, сформулированного Паули. Каждое квантовое состояние могло быть занято только один раз. Наглядное значение новой степени свободы, равно как и связь принципа запрета со свойствами симметрии волновой функции, тогда были еще совсем неизвестны.

Другими важными моментами нашей дискуссии стали затем правила Орнштейна для интенсивности мультиплетов и теория дисперсии Крамерса. В обоих случаях Паули и я придерживались того мнения, что переход от модельной механики в духе условий Бора—Зоммерфельда, имеющей только символическое значение и потому справедливой лишь качественно, к истинной квантовой механике удавалось здесь совершить путем догадки; принцип соответствия Бора следовало бы уточнять математически до тех пор, пока из него не начнут получаться правильные формулы. Следовательно, не было исключено, что когда-нибудь переход к полной математической схеме квантовой механики будет совершен просто путем удачной догадки.

Весной 1925 г., изучая в первую очередь разложение в ряд Фурье кеплеровской орбиты в атоме водорода, я пытался получить формулы для интенсивности спектральных линий водорода в надежде просто угадать в конце концов правильные квантово-теоретические формулы для интенсивности. Конечно, задача Кеплера оказалась для этого чересчур сложной, но при этом само собой возникло представление о том, что совокупность «элементов перехода» может характеризовать координаты электрона так же хорошо, как ряд Фурье в классической физике. Не вполне ясно сформулированным результатом этого вычисления явилось сведение эмпирически получаемой информации к матрице координат электрона или вообще к матрицам, которые следовало строить для любой величины, имеющей физический смысл.

В мае 1925 г. я применил эти представления к более простой проблеме — к ангармоническому осциллятору. Вынужденное пребывание на острове Гельголанд в конце мая 1925 г., причи-

ной которого явилось легкое заболевание лихорадкой, предоставило мне желанную возможность проделать подробные вычисления ангармонического осциллятора в соответствии с новыми представлениями. Хотя сначала мне не удалось доказать в совершенно общем виде, что матрица энергии при этом обязательно будет диагональной, т. е. что энергия будет сохраняться, весь процесс выглядел настолько разумным, что, возвратившись в Гёттинген уже 24 июня, я написал о нем в письме к Паули.

Письмо начиналось так: «Основная аксиома состоит в том, что при вычислении каких-либо величин, например энергии, частоты и т. д., должны использоваться только соотношения между принципиально наблюдаемыми величинами». Ответ Паули был явно положительным и поощрял мою дальнейшую работу в этом направлении. Как известно, математическое оформление в замкнутую теорию было завершено в последующие месяцы Борном и Иорданом в Гёттингене и независимо Дираком в Кембридже. Сам я был тогда несколько удручен тем, что мне никак не удавалось вывести из новой теории простой спектр водорода. Однако уже в октябре того же года Паули преподнес мне сюрприз: законченную квантовую механику атома водорода. Мой ответ от 3 ноября начинался словами: «Едва ли нужно писать, как сильно я радуюсь новой теории водорода и насколько велико мое удивление, что Вы смогли так быстро ее разработать».

Приблизительно в то же время появилась работа Гаудсмита о вращательном моменте электрона. Эта работа также подверглась живому обсуждению в письмах Паули. Однако теория спина электрона будет рассматриваться в другом месте этой книги. Четвертая степень свободы, предложенная Паули, приобрела теперь простой, наглядный смысл, правомерность которого во всех деталях была выяснена в наших письмах.

Летом 1925 г. важным предметом обсуждения явились уже основы волновой механики. Поддержанная работой Эйнштейна мысль, что опыты Рамзауэра, с одной стороны, а также Девиссона и Кунсмана, с другой, должны объясняться дифракцией электронов, медленно пробивала себе дорогу. Весной 1926 г. последовали знаменитые работы Шредингера об атоме водорода и тем самым завершилось создание законченного математического аппарата волновой механики. Мы с Паули усиленно обсуждали теорию Шредингера. Признавая в первую очередь большой математический прогресс, мы относились скептически к физической интерпретации. Меня очень беспокоила попытка сделать физическим основанием теории волновые представления.

В письмах, написанных летом 1926 г., читаем: «Чем больше я размышляю о физической части теории Шредингера, тем ужаснее она мне кажется. Ведь Шредингер просто выбрасывает за борт все квантотеоретическое: т. е. фотоэлектрический эффект, ионизационные толчки Франка, опыты Штерна—Герлаха и т. д. После этого нетрудно построить теорию; однако она-то и не согласуется с опытом. Большое достижение теории Шредингера состоит в вычислении матричных элементов».

Так мы стали, естественно, интересоваться все еще непонятной интерпретацией математического аппарата квантовой и волновой механики. Летом 1926 г. Борн развил свою теорию процессов столкновения и, усовершенствовав прежние идеи Бора, Крамерса и Слетера, дал правильную интерпретацию волны в многомерном конфигурационном пространстве как волны вероятности. В одном из писем Паули объяснил мне, что интерпретация Борна является лишь частным случаем значительно более общей интерпретации. Например, $|\psi(p)|^2 dp$ можно интерпретировать как вероятность того, что частица обладает импульсом в интервале $(p, p+dp)$. Это вполне соответствовало и моим собственным мыслям о колебательных процессах. Осенью 1926 г. Дирак развил свою теорию преобразований, в которой квадрат модуля матричных элементов унитарной матрицы преобразования интерпретировался как вероятность в общем случае.

В летние месяцы того же года была выяснена также и связь принципа запрета Паули с квантовой и волновой механикой. С одной стороны, в квантовой механике атома гелия, которой я тогда занимался, удалось показать, что правильные термы, удовлетворяющие принципу Паули, можно получить только при условии, что волновая функция антисимметрична по координатам частиц; с другой стороны, Ферми и Дирак доказали, что в совершенно общем случае принципу Паули эквивалентно требование об антисимметрии волновой функции при обмене координат у двух произвольных электронов и что в применении к идеальному газу это приводит к новой статистике. Так окончательно был выяснен физический смысл принципа запрета Паули.

В это время, осенью 1926 г., в моей переписке с Паули постепенно стало вырисовываться соотношение неопределенностей. В письме от 28 октября 1926 г. имеются следующие слова: «Следовательно, в волновом представлении уравнение $p q - q p = -i\hbar$ всегда соответствует тому факту, что не имеет смысла говорить о монохроматической волне в определенный момент времени (или в очень коротком промежутке времени)». Паули

при этом замечает: «В промежутке времени, коротком по сравнению с периодом, не имеет смысла говорить также о состоянии (значении энергии)».

Далее в письме указывалось: «Аналогично, нет смысла говорить о положении частицы с определенной скоростью. Если же положение и скорость предполагать не такими точными, то это вполне будет иметь смысл». В ответном письме Паули выдвинул гипотезу, что фазовое пространство следует в принципе разбить на конечные ячейки размером h и что о частице можно только сказать, в какой ячейке она находится. На это я возразил: «Если Вы точно укажете положение стенок ячеек и все же сможете определить, сколько частиц находится в каждой ячейке, то разве нельзя будет определить и число атомов в как угодно малых ячейках, выбирая новое положение стенок ячейки рядом с первоначальным? Я думаю, имеет ли какой-нибудь физический смысл выбор определенных границ ячейки? Может быть дело в том, что можно, например, точно указать взаимное расположение двух стенок ячейки, но не положение определенной границы ячейки».

Хотя эти рассуждения и были очень близки к правильной интерпретации квантовой теории, прошло все же еще около трех месяцев, прежде чем формулировка настолько прояснилась, что Паули и я отважились говорить об окончательном понимании квантовой теории. В эти месяцы я почти ежедневно обсуждал основные проблемы квантовой теории с Бором в Копенгагене. Бор пытался сделать исходным пунктом физической интерпретации дуализм между волновой и корпускулярной картинками, тогда как я старался, не прибегая к волновой механике, достичь цели, вырисовывавшейся на пути квантовой механики и теории преобразований Дирака. Эти интенсивные дискуссии, повторявшиеся на все новых физических примерах, вели не только к тому, что постепенно начал перебрасываться мост между двумя столь различавшимися сперва точками зрения, но они доставляли также новый материал, который можно было с пользой рассматривать с обеих точек зрения. Однако несмотря на все эти усилия, мы никак не могли внести в квантовую теорию истинную ясность. Новые взаимосвязи оказались настолько непривычными, настолько отличными от всего, составлявшего для физики проверенное, передаваемое по наследству идейное богатство, что мы все еще не могли разобраться в них до конца. 23 ноября 1926 г. после длиннейшего разбора теории преобразований Дирака я писал Паули: «Я часто размышляю,

в чем, собственно, смысл всех этих формальных соотношений, но понять все это ужасно трудно».

Дискуссии о смысле квантовой теории лишь ненадолго были прерваны рождественскими каникулами. Вероятно, тот факт, что в середине февраля 1927 г. Бор уехал на отдых в Норвегию, показал всем нам, насколько велика усталость, вызванная длительными дискуссиями. Конечно, Бор хотел использовать время не только для хождения на лыжах, но и для спокойного и неторопливого обдумывания основ квантовой теории. Мне в это время тоже было легче собраться с мыслями, и 23 февраля я написал Паули письмо на 14 страницах; содержание его в основном совпадало с содержанием последующей работы о соотношении неопределенностей. Ответ Паули оказался намного оптимистичнее, чем я мог ожидать. «Да будет в квантовой теории день», — приблизительно так звучал его ответ, побудивший меня изложить все содержание моих размышлений в подробной работе. Через несколько дней я снова послал эту работу Паули, чтобы получить его критические замечания, так что после возвращения Бора я показал ему работу, уже одобренную Паули. Правда, Бор был тогда естественно недоволен некоторыми положениями работы, так что в печать она смогла быть отправлена лишь несколько позднее в исправленном виде. Между тем и Бор развил выдвинутое им понятие дополнительности настолько, что физическое содержание квантовой теории стало одинаково ясным с различных точек зрения. Если и оставались еще различия в понятиях, то они относились только к различной исходной точке зрения или к различному языку, а не к физической интерпретации теории. Эта интерпретация приобрела теперь полную ясность, и Паули был первый вне копенгагенского кружка, кто безоговорочно согласился с новой интерпретацией, в которую он сам внес такой большой вклад.

Видимым завершением всего этого развития явился затем Сольевевский конгресс, состоявшийся осенью 1927 г. в Брюсселе, причем Эйнштейн и Г. Лоренц были для нас, копенгагенцев, важнейшими оппонентами в дискуссии об интерпретации квантовой теории. Основными на конгрессе явились дискуссии между Бором и Эйнштейном; и хотя Эйнштейна не удалось убедить в том, что новую интерпретацию квантовой теории следует считать удовлетворительной во всех отношениях, в конце концов ему пришлось все же признать, что она замкнута в себе и непротиворечива. В этом решающую роль сыграл также неоднократно выступавший Паули.

Г. ВЕНЦЕЛЬ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ (до 1947 г.)

§ 1. НАЧАЛО КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Идея квантования поля возникла около пятидесяти лет тому назад. Особенно отчетливо характерные черты будущей теории проявились в работе Эренфеста [1]. Рассматривая теорию черного излучения Планка и обсуждая свойства спектра теплового равновесного излучения в терминах нормальных колебаний Рэля—Джинса, Эренфест использовал аналогию между амплитудой собственных колебаний в полости и координатой механического осциллятора. Если классическая теорема о равномерном распределении приводит к спектру Рэля—Джинса, то, как же следует видоизменить теорию, чтобы получить спектр Планка? Квантование механических осцилляторов, введенное Планком, подсказало Эренфесту следующую гипотезу: энергия поля, сосредоточенная в одном нормальном колебании с частотой ν , может быть только целым кратным $h\nu$. Это же предположение позволило Дебаю [2] в 1910 г. действительно получить спектр Планка. Как теперь известно, квантование энергии поля связано с корпускулярными свойствами поля, однако связь с теорией световых квантов Эйнштейна [3] была установлена много позже. Лишь после создания квантовой механики, когда был понят корпускулярно-волновой дуализм, можно было увидеть эквивалентность теории Дебая и статистической теории фотонного газа Бозе [4]. Характерные особенности подсчета состояний в теории Бозе (а именно, перестановка тождественных фотонов не приводит к новому состоянию) соответствуют невырожденности квантового состояния n линейного осциллятора [5].

Если справедливо, что элементарная световая волна эквивалентна гармоническому осциллятору с собственными значениями энергии $nh\nu(+\frac{1}{2}h\nu)$, то естественно также применять квантовую механику к *амплитуде* волны и интерпретировать ее как оператор, или, точнее, как матрицу, подобную матрице координаты линейного осциллятора

$$(n' | q | n) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{при } n' = n - 1, \\ \sqrt{n+1} & \text{при } n' = n + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Эту идею в 1926 г. использовали Борн, Гейзенберг и Иордан [5] при определении среднего квадрата флуктуаций энергии черного излучения; однако в полной мере ее оценил Дирак [6], положивший ее в основу созданной им теории взаимодействия излучения с атомными системами. Гамильтониан взаимодействия (в первом порядке) содержит матрицы q как множители, что приводит в первом порядке теории возмущений к атомным переходам в комбинации с переходами $n \rightarrow n \pm 1$ в полевых осцилляторах, или, другими словами, в комбинации с поглощением или излучением фотонов. Энергия системы, состоящей из атомов и фотонов, сохраняется, насколько это допускается соотношением неопределенности. Вероятность перехода в единицу времени определяется квадратом матричного элемента и при поглощении фотона пропорциональна начальному числу заполнения n в системе фотонов. В случае испускания фотонов вероятность пропорциональна $(n+1)$, причем первое слагаемое, пропорциональное n , соответствует вынужденному излучению, а второе слагаемое — спонтанному излучению.

Сейчас трудно оценить новизну и смелость предложенного Дираком решения задачи об излучении. В течение предшествовавшего десятилетия установилась традиция полагаться в таких вопросах исключительно на принцип соответствия Бора. Попытки придать этому принципу количественную формулировку привели к идеям, легшим в основу матричной механики Гейзенберга. Новые аспекты проблемы возникли, когда появилась возможность рассчитать методом квантовой теории возмущений атомные переходы под влиянием заданных внешних волновых полей (например, фотоэлектрический эффект). Рассчитанные таким образом переходы можно было рассматривать как процессы, связанные с поглощением, но их «обратное действие на поле» (сопутствующее им исчезновение фотона) теорией не рас-

смаatrивалось. Спонтанное излучение также не находило себе объяснения в рамках существовавшей теории. Принцип соответствия, казавшийся в этих вопросах незаменимым, представлял собой чужеродный элемент («волшебную палочку», как говорил Зоммерфельд) в теории, которая в остальном была вполне последовательной. Предложенное тогда Дираком объяснение, основанное на использовании q -матриц, явилось полным откровением. Хотя были выведены заново лишь известные результаты, но это было сделано единым методом. Новая теория возбудила интерес к применению квантовой механики к электромагнитным и другим полям.

В последующей работе [7] Дирак применил теорию возмущений второго порядка к взаимодействию между атомом и полем и получил заново формулу Крамерса—Гейзенберга [8] для рассеяния света атомными системами. Более тонкие проблемы, связанные с процессами излучения (например, вычисление ширины линии, связанной с затуханием), потребовали использования более сложных математических приемов [9]. (Другие ссылки можно найти в книге Гайтлера [10].) Вопросы о скорости распространения света или о когерентности рассеянного света решаются легче, если вспомнить, что в любой квантовой системе средние значения наблюдаемых величин подчиняются уравнениям движения для соответствующей классической системы. В применении к операторам электромагнитного поля это обстоятельство приводит к классическим уравнениям поля [11]. Как нетрудно убедиться, классическая оптика в значительной мере остается справедливой.

В теории Дирака квантованию подвергается не все электромагнитное поле, а лишь его «радиационная часть», состоящая из плоских поперечных световых волн. Электростатические поля включаются в виде кулоновой энергии взаимодействия в гамильтониан для частиц. Такой неравноправный подход к двум слагаемым поля не только противоречит духу теории Максвелла, но вызывает возражения с точки зрения теории относительности. Преобразование Лоренца перемешивает эти части между собой; соответствующее разбиение оказывается неинвариантным. Возникающая проблема формулируется таким образом: как построить релятивистски инвариантную квантовую теорию максвеллова поля, взаимодействующего с заряженными частицами? В 1927 г. эта задача казалась неразрешимой, хотя в то время можно было предвидеть далеко не все трудности, с которыми пришлось столкнуться впоследствии.

Один из первых шагов совершили в 1928 г. Иордан и Паули [12], найдя лоренц-инвариантную запись соотношений коммутации для поля в отсутствие зарядов (т. е. для радиационного поля Дирака). Они ввели зависящие от времени операторы поля и коммутатор двух компонент поля, взятых в различных пространственно-временных точках, выразили через ставшую ныне знаменитой «инвариантную дельта-функцию». Впоследствии Бор и Розенфельд [13] проанализировали физический смысл полученных ими соотношений в связи с фундаментальными соотношениями неопределенности, возникающими при измерении компонент поля.

Релятивистское описание электронов, свободных или находящихся в данном внешнем поле, было предложено Дираком [14] в его волновой теории частиц со спином, равным $\frac{1}{2}$. В этой теории, однако, были свои затруднения, связанные с «состояниями с отрицательной энергией», и только построение теории позитронов (см. § 2) открыло путь к освобождению квантовой электродинамики от этих трудностей.

Первая попытка сформулировать квантовую электродинамику принадлежит Гейзенбергу и Паули [15], которые ввели общую схему квантования полей, надеясь что она будет применима для поля Максвелла. Поскольку в обычной квантовой механике основную роль играет гамильтониан, Гейзенберг и Паули предположили, что уравнения поля, подобно уравнениям движения в механике, можно вывести, исходя из принципа наименьшего действия, который позволяет определить поля P_α , «канонически-сопряженные» с исходными полями Q_α , и найти «канонические соотношения коммутации» и гамильтониан системы. Можно доказать, что найденные соотношения коммутации инвариантны относительно бесконечно малых преобразований Лоренца, если инвариантна плотность лагранжиана (см. [16])¹⁾. Этот канонический формализм, оказавшийся впоследствии столь мощным орудием при исследовании скалярного и других полей, тем не менее был недостаточен для решения той задачи, ради которой он создавался, — для построения электродинамики. Если записать плотность лагранжиана для поля в отсутствие зарядов в виде

$$L = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2 = \frac{1}{2} (E^2 - H^2)$$

¹⁾ Об этом доказательстве Паули обычно говаривал: «Ich warne Neugierige» [я предостерегаю любопытных (нем.)].

[где Q_α — четырех-вектор потенциала ($\alpha=1\dots 4$; $x_4=ict$)], то P_4 тождественно обращается в нуль вместе с дивергенцией от $\mathbf{P} = -\mathbf{E}$. Таким образом, канонические соотношения коммутации использовать в этом случае нельзя. Как выяснилось впоследствии, это связано с равенством нулю массы покоя фотона и инвариантностью теории относительно градиентного преобразования

$$Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha + \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha}.$$

Гейзенберг и Паули [15, 17] указали на два формальных приема, позволявших обойти эту трудность. Первый способ заключался в добавлении к плотности лагранжиана члена $\frac{1}{2} \epsilon (\sum_\alpha \partial Q_\alpha / \partial x_\alpha)^2$ с тем, чтобы в окончательных выражениях устремить ϵ к нулю. В работе [17] эти авторы предлагали с помощью градиентного преобразования обратить Q_4 в нуль (преобразование Лоренца дополнялось градиентным преобразованием); при этом нужно было потребовать, чтобы (не зависящая от времени) пространственная функция $C = \text{div } \mathbf{E} + \rho$ была тождественно равна нулю. Оба способа вели к поставленной цели, однако представлялись несколько искусственными и потому не вполне подходящими для такой фундаментальной теории, как теория электромагнитного поля. Особенно большое разочарование вызвало то обстоятельство, что принципиальная трудность классической теории Лоренца — бесконечность собственной энергии точечного электрона — сохранялась, по-видимому, и в квантовом варианте теории (см. [18, 19]).

Другой подход к теории, предложенный независимо Ферми [20], больше соответствовал духу будущей теории. Ферми выбрал лагранжиан таким образом, чтобы возникающие уравнения поля имели вид

$$\sum_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} Q_\alpha = -s_\alpha$$

(s_α — ток и плотность заряда). Уравнения Максвелла следуют из этих уравнений, если дополнить их условием Лоренца, т. е. равенством нулю четырехмерной дивергенции:

$$\Omega \equiv \sum_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

Ферми (рассматривавший фурье-преобразования уравнений поля) указал, что в квантовой теории нет необходимости постулировать условие Лоренца как операторное тождество, достаточно наложить соответствующие дополнительные условия, или «ограничения», на вектор состояния Ψ

$$\Omega\Psi = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\Omega}\Psi = 0 \quad \left(\dot{\Omega} = \frac{i}{\hbar} [H, \Omega] \right),$$

т. е. операторы Ω и $\dot{\Omega}$ обращают Ψ в нуль во все моменты времени. Эти условия допустимы, поскольку они эквивалентны двум непротиворечивым (соответствующие операторы коммутируют) начальным условиям для Ψ (например, при $t = 0$). Дополнительные условия позволяют сразу установить, как зависит Ψ от «скалярного» потенциала (Q_4) и продольной части «векторного» потенциала ($\text{div } \mathbf{Q}$). Остальная часть Ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = H' \Psi',$$

где H' оказывается равным гамильтониану теории излучения Дирака, включая кулоново взаимодействие между заряженными частицами (а также их бесконечные собственные энергии). (В теории Гейзенберга—Паули кулоновы члены возникали только во втором порядке теории возмущений.) Поскольку уравнения теории Ферми, в которую равноправно входят статические и волновые поля, с самого начала можно записать в произвольной системе координат, то оказывается, что квантовая теория излучения Дирака по существу релятивистски инвариантна при условии, что заряженные частицы также описываются должным образом, например подчиняются волновому уравнению Дирака для частиц со спином, равным $\frac{1}{2}$.

Ферми не затруднял себя проверкой релятивистской инвариантности принятой им схемы квантования (например, соотношения коммутации для полей), хотя это можно было проделать для бесконечно малых преобразований и затем сослаться на групповые свойства преобразований Лоренца (так поступили в своей работе Гейзенберг и Паули). Более ясное и изящное доказательство лоренцовой инвариантности содержится в работе Дирака, Фока и Подольского [21], посвященной обобщению теории.

Во всех предлагавшихся прежде вариантах теории релятивистская инвариантность была далеко не очевидной, поскольку

ку временная и пространственные координаты вводились несимметрично: положение каждого электрона характеризовалось собственным радиусом-вектором \mathbf{r}_n (в конфигурационном пространстве), поля определялись в функции от другого вектора \mathbf{r} , а временная координата t вводилась только одна (в векторе состояния Ψ , если использовалось представление Шредингера). Эту несимметрию устранял «многовременной» формализм Дирака, Фока и Подольского, в котором каждой заряженной частице приписывалась индивидуальная временная координата t_n ; вектор состояния Ψ рассматривался как функция всех четырех-векторов (\mathbf{r}_n, t_n) и подчинялся нескольким волновым уравнениям Дирака по одному для каждого электрона. В эти волновые уравнения входил четырехмерный потенциал Максвелла в представлении, которое ныне называется «представлением взаимодействия»,

$$Q_\alpha(\mathbf{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_F t\right) Q_\alpha(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_F t\right)$$

(H_F — гамильтониан без взаимодействия); в волновом уравнении для n -го электрона потенциал Q_α следует брать в точке (\mathbf{r}_n, t_n) . Вектор состояния Ψ снова нужно подчинить дополнительным условиям $\Omega\Psi=0$, которые являются обобщением условий Ферми. Релятивистская инвариантность, а также градиентная инвариантность всех этих уравнений и соотношений коммутации для операторов поля очевидна. Если мы рассмотрим Ψ в одновременном подпространстве (т. е. положим $t_n=t$ для всех n), то мы придем снова к теории Ферми и, в конце концов, к теории излучения Дирака, но никаких доказательств релятивистской инвариантности для этих частных форм теории уже не требуется. Блох [22] проанализировал внутреннюю непротиворечивость многовременной теории; все частицы должны быть разделены пространственно-подобными интервалами

$$c|t_n - t_{n'}| < |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}|.$$

Блох указал также физический смысл обобщенного вектора состояния Ψ : он описывает результаты измерений, выполненных для каждой частицы в ее индивидуальное время t_n .

Теория Дирака — Фока — Подольского является прямой предшественницей более новых теорий [23, 24], в которых рассматривались не заряженные частицы в конфигурационном пространстве, а квантованные поля (например, электронное поле) и набор дискретных мировых точек (\mathbf{r}_n, t_n) заменялся про-

странственно-подобной «поверхностью» в пространстве Минковского. Какую роль этот формализм сыграл в выполнении программы перенормировок в квантовой электродинамике, будет рассказано в этой книге другими авторами.

В классической теории поля, соответствующей многовременной теории, функции поля явно зависят от времени t_n каждой частицы [25]. Эту обобщенную теорию Лоренца можно использовать для сформулирования таких классических уравнений движения заряженных частиц, в которых сила действия на себя для каждой частицы остается конечной; в частности, при этом обращается в нуль электромагнитная масса (инерция). К этому результату можно прийти, воспользовавшись некоторым предельным переходом при определении лоренцевой силы, при котором «полевая точка» приближается к «точке частицы» по времениподобному направлению. Действуя таким образом, можно обойти все трудности, связанные с собственной энергией в классической теории точечных электронов, взаимодействующих через поле Максвелла. Можно было надеяться также, что подобная процедура предельного перехода поможет избавиться от соответствующих трудностей в квантовой теории. Надежда эта не оправдалась. Такой предельный переход затрагивает лишь классические бесконечности типа электромагнитной массы (расходящиеся линейно по импульсу обрезания k_c). Но в квантовой теории возникают бесконечности другого типа, подобные бесконечности Валлера [18] ($\sim k_c^2$) для одного электрона Дирака (состояния с отрицательной энергией свободны). Впоследствии, когда дырочная теория позитронов стала более привычной, в теории остались только логарифмические расходимости, но они зато выдержали все математические ухищрения, пока не появилась перенормировка массы и возможность новой непротиворечивой интерпретации. Тем временем, однако, продолжалась дискуссия о математической переформулировке теории. Создав новый вариант классической теории [27], Дирак [26] попытался видоизменить соотношения коммутации для полей, введя в них малый времениподобный вектор (« λ -предельный процесс»). Однако Дираку пришлось прибегнуть к ряду искусственных приемов, например ввести кванты света с отрицательной энергией и отрицательной вероятностью [28]. Обзор и обсуждение этих работ можно найти в статье Паули [29].

Вся эта деятельность вокруг проблемы собственной энергии ныне заброшена и представляет только исторический интерес.

Несмотря на все неудачи, квантовая электродинамика пользуется общим доверием, как лучшее, хотя и несовершенное, орудие атомистической теории. Конечно, во всех частных случаях использовалась теория излучения Дирака и появлявшиеся бесконечности устранялись самым примитивным образом (прямое вычитание и обрезание). Противоречий с экспериментальными данными не возникало (о «сдвиге Лэмба» в то время только подозревали). Однако принципиальные трудности теории тяжелым грузом лежали на нашей совести.

Для завершения картины добавим, что в начале 30-х годов вызвала беспокойство не только собственная энергия. Мы уже говорили о состоянии дираковского электрона с отрицательной энергией; ниже мы расскажем о трудном пути развития «дырочной» теории. Следует упомянуть также о бесконечной нулевой энергии ($\Sigma \frac{1}{2} h\nu$) поля излучения; и хотя сегодня устранение этой бесконечности может показаться тривиальным отбрасыванием бесконечной аддитивной постоянной, в 1933 г. такие люди, как Паули [30], специально останавливались на записи гамильтониана в такой форме, в которой нулевой энергии не возникает.

Существует бесконечность иного рода, названная «инфракрасной катастрофой», поскольку расходимость возникает при малых частотах в отличие от «ультрафиолетовой катастрофы», возникающей при вычислении собственной энергии. С такого рода расходимостями сталкиваются в задачах типа тормозного излучения, если вычисляется полная вероятность какого-либо процесса излучения (испускания фотона), причем взаимодействие электрона с полем излучения предполагается малым. Теория возмущений приводит к выражению, которое расходится как $\int dv/v$ при $v=0$. В 1937 г. Блох и Нордсик [31] указали, что причина расходимости лежит в использовании теории возмущений; при малых частотах взаимодействие оказывается слишком сильным. Они построили стационарные состояния свободно движущегося электрона, окруженного собственным полем и полем фотонов. Слабое внешнее поле (оно и является малым возмущением) вызывает переходы между такими стационарными состояниями; и если первоначально свободных фотонов не было, то они могут возникнуть в конечном состоянии в результате изменения собственного поля при переходе. Среднее число испущенных фотонов бесконечно (за счет испускания фотонов со сколь угодно малой энергией), но полная энергия и вместе

с ней полное сечение рассеяния электрона на заданный угол оказываются конечными. Найденное сечение совпадает с результатом, полученным в приближении Борна при полном пренебрежении полем вообще. Явный вид формул показывает, почему разложение по степеням e (постоянной связи для взаимодействия поля с электроном), хотя и приводит формально снова к теории возмущений, недопустимо при малых частотах. В 1938 г. Паули и Фирц [32] повторили этот вывод заново, заменив «электрон» протяженным заряженным телом. Возникающее обрезание (которым также пользовались Блох и Нордсик, и которое запутывает возможную связь с расходимостью в собственной энергии) приобрело таким образом физическую причину и описывалось формфактором. Размеры тела предполагались настолько большими, что добавками, связанными с электромагнитной массой, можно было пренебречь. Задача рассматривалась при нерелятивистских энергиях; в остальном закон сохранения энергии учитывался строго. Результаты этого более подробного анализа совпадают с результатами Блоха и Нордсика, за одним исключением. Паули и Фирц указывают, что зависимость вероятности очень малых потерь энергии от размеров (формфактора) заряженного тела по своему характеру «исключает возможность перенести результаты на случай реального электрона». Хотя вывод оказался пессимистическим, все же, по общему мнению, низкочастотную часть спектра можно будет объяснить, если удастся построить теорию точечного электрона, свободную от более серьезных высокочастотных расходимостей.

§ 2. КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПОЛЯ

Когда в 1927 г. Иордан [35] впервые попытался проквантовать электронное волновое поле, многим из нас его идея показалась довольно странной. В отличие от фотонов, электроны обладают зарядом и массой (и спином, равным $\frac{1}{2}$). Существовала хорошо разработанная волновая механика многоэлектронных систем, которая казалась вполне достаточной, по крайней мере в нерелятивистской области. Было известно, что принцип запрета Паули эквивалентен требованию антисимметрии волновых функций.

С другой стороны, Дирак [34], подготавливая свою теорию испускания и поглощения света, уже рассмотрел вопрос о квантовании (комплексной) волновой функции Шредингера и заменил амплитуды вероятностей для «невозмущенных состоя-

ний» на операторы уменьшения и увеличения на единицу чисел заполнения этих же невозмущенных состояний; соотношения коммутации для этих операторов таковы:

$$b_r b_s^* - b_s^* b_r = \delta_{rs}, \quad b_r b_s - b_s b_r = 0.$$

Если гамильтониан имеет вид

$$\sum_r W_r b_r^* b_r + \sum_{rs} V_{rs} b_r^* b_s,$$

то квантованная теория не дает для одной частицы ничего нового

$$\sum_r b_r^* b_r = 1,$$

и эквивалентная гамильтониану матрица равна

$$H_{rs} = W_r \delta_{rs} + V_{rs}.$$

Однако N тождественных частиц, как это и должно быть, подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, т. е. описываются симметричными волновыми функциями. Другими словами, при рассмотрении системы симметричных бозонов нет нужды прибегать к конфигурационному пространству, если волновая функция в обычном пространстве проквантована. Этот прием носит название «вторичного квантования», или «гиперквантования», поскольку использование волновой функции Шредингера уже равносильно «первичному квантованию». В 1927 г. Иордан и Клейн [35] обобщили эту теорию, введя взаимодействие вида $\sim b_r^* b_s^* b_k b_l$, например кулоново взаимодействие заряженных бозонов. Они указали, что собственная кулонова энергия заряженных частиц формально исключается, если записать некоммутирующие операторы b, b^* именно в указанном порядке (т. е. два оператора уничтожения справа).

Иордан высоко оценивал перспективы этой теории, в частности, в отношении релятивистских обобщений. Он сразу задался построением аналогичного аппарата для фермионов. Поскольку принцип Паули запрещает числа заполнения, большие единицы, операторы b_r должны сводиться к двухрядным матрицам

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_r,$$

умноженным на единичные матрицы (при $r \neq s$). Аппарат, эквивалентный волновой механике в конфигурационном пространстве с антисимметричными волновыми функциями, был построен Иорданом и Вигнером в 1928 г. [36].

Этот аппарат основан на использовании новых операторов a_r , которые отличаются от b_r только должным образом выбранным знаком и подчиняются «соотношениям антикоммутации»

$$a_r a_s^* + a_s^* a_r = \delta_{rs}, \quad a_r a_s + a_s a_r = 0,$$

которые, очевидно, инвариантны относительно унитарных преобразований ($a_r \rightarrow S^{-1} a_r S$; $S^* = S^{-1}$). При практическом применении никогда не требуется знать явного матричного выражения операторов a_r с учетом знака, поскольку соотношения антикоммутации позволяют выразить все результаты через физические величины, например через средние значения числа заполнения $N_r = a_r^* a_r$. Это обстоятельство, однако, стало общеизвестным лишь много позже (как и в случае с матрицами Дирака γ_μ : $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$).

Как и нерелятивистская теория многоэлектронных систем, аппарат Иордана—Вигнера оказался очень полезным, например, при изучении электронного газа в металлических проводниках (этого вопроса мы не касаемся в настоящей статье). Но был ли этот формализм чем-то большим, чем простым орудием для решения частных задач? Не мог ли он явиться существенным звеном в построении релятивистской теории, соединенной с квантовой электродинамикой?

Мы уже упоминали о релятивистской волновой механике Дирака для электрона со спином и о ее трудностях, связанных с «отрицательными энергиями». Чтобы обойти эти трудности, Дирак в 1930 г. [37] предложил рассматривать состояние, в котором заполнены все уровни с отрицательной энергией (и только эти уровни, как «вакуум»), что, однако, не приводит к появлению наблюдаемой плотности заряда. «Дырка» в фоне отрицательных энергий ведет себя как частица с положительной энергией и положительным зарядом, и Дирак сначала попытался отождествить ее с протоном. Вскоре, однако, оказалось, что такое отождествление недопустимо. В том же году Оппенгеймер [38] указал, что при этом атом водорода был бы неустойчив и быстро превращался бы в два фотона. Особенно четкий вывод содержится в книге Вейля [39, стр. 263]: согласно теории Дирака «масса протона должна быть равна массе электрона; более

того, независимо от выбора взаимодействия (до тех пор, пока оно инвариантно относительно замены правого на левое), эта гипотеза приводит к существенной эквивалентности положительного и отрицательного электричества при всех обстоятельствах, даже если будет строго учтено взаимодействие между веществом и излучением.

В 1932 г. позитрон был обнаружен экспериментально. Оправдавшееся предсказание повысило доверие к теории дырок, однако последовательной математической формулировки этой теории еще не существовало. Можно было лишь с помощью теории возмущений рассчитать, например, рассеяние света на электронах, образование и аннигиляцию пар или рассеяние позитронов на электронах (с учетом обменных эффектов) [40]. В этих случаях трудности появлялись только при расчете высших приближений, которыми можно было пренебречь.

Центральной проблемой являлась «поляризация вакуума»: внешнее электромагнитное поле искажает электронную волновую функцию, относящуюся к фону отрицательных энергий, и приводит, следовательно, к появлению некоторого распределения токов и зарядов, которое в свою очередь искажает поле. Как выполнить в этом случае вычитание «вакуумных величин», которое тривиально осуществляется в отсутствие поля? Даже слабое внешнее поле приводит к появлению виртуальных электронно-позитронных пар, и их вклад в плотности заряда или поляризации описывается расходящимся интегралом. Какая конечная часть этого интеграла соответствует наблюдаемой поляризации вакуума?

Эта проблема рассматривалась с разных точек зрения и оказалась очень сложной. По этому поводу имеются характерные высказывания. Пайерлс [41] сказал: «Неизвестно, сводится ли необходимое усовершенствование теории лишь к математическому видоизменению, которое позволило бы избежать появления бесконечных величин, или требуется коренная ломка фундаментальных понятий, лежащих в основе уравнений теории». Высказывание Фарри и Оппенгеймера [42] свелось к следующему: «По своему характеру эти трудности таковы, что их, по-видимому, нельзя устранить путем видоизменения электромагнитного поля электрона на малых расстояниях; необходимы более глубокие изменения наших представлений о пространстве и времени...». Следует заметить, что Фарри и Оппенгеймер пользовались аппаратом квантования электронного поля Иордана и Вигнера, но особенного успеха не добились.

На этот раз пессимисты оказались неправы: в 1934 г. Дирак [43] и Гейзенберг [44] сумели построить хотя и сложную, но вполне приемлемую формулировку теории дырок. Используя приближение самосогласованного поля Хартри, Дирак ввел зависящие от времени матрицы плотности

$$\sum \psi_{\sigma'}(x't') \psi_{\sigma''}^*(x''t'')$$

(суммирование выполняется по занятым состояниям) и рассмотрел их особенности на световом конусе

$$[|x' - x''|^2 = c^2(t' - t'')^2],$$

вычитая сингулярные функции, зависящие явно от поля и подобранные таким образом, чтобы конечная разность при $x' = x''$, $t' = t''$ могла служить для определения наблюдаемых величин. Гейзенберг устранил оставшиеся неоднозначности в вычитании, используя законы сохранения заряда, энергии и импульса. Он подчеркнул также недостаточность приближения Хартри («наглядной теории», как он называл его) и обобщил правила вычитания, используя формализм Иордана и Вигнера, который в этом пункте играл уже существенную роль. Теория является формально лоренц-инвариантной и симметричной относительно замены электронов позитронами. Ее можно непосредственно соединить с квантовой электродинамикой и получить таким образом общую теорию взаимодействующих электронов, позитронов и фотонов. Малая величина постоянной связи $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ существенна для возможности разложения по степеням электронного заряда. (Сжатое изложение этой теории можно найти в книге Вентцеля [45].)

Однако, как мы уже говорили выше, трудность с собственной энергией тоже сохранилась. По сравнению с одноэлектронной теорией ситуация несколько улучшилась — сохранились только логарифмические расходимости [46]. Расходимости более высоких порядков, связанные со спиновой энергией и с «вынужденными колебаниями под влиянием нулевых флуктуаций поля излучения», сократили друг друга [47]. Расходимости остаются логарифмическими и в высших порядках по $e^2/\hbar c$ (точнее, расходимости пропорциональны степеням $\ln k_c$ [47]). Выбрав должным образом обрезание, можно добиться того, чтобы собственная энергия электрона составляла малую часть ($\sim \frac{1}{137}$) от mc^2 . Обычно считалось само собой разумеющимся, что обрезание приводит к нарушению релятивистской инвариант-

ности, если полностью не пренебрегать собственной энергией.

Более серьезным оказался тот факт, что фотон, согласно теории позитронов, тоже обладает бесконечной собственной энергией, поскольку он может создавать электронно-позитронные пары. В варианте теории, предложенном Гейзенбергом в 1934 г. [44], эта расходимость сводилась к логарифмической (в первом порядке по $\sim e^2$). Казалось, ничто не могло спасти релятивистскую и градиентную инвариантность теории. Гейзенберг ожидал, что решить проблему поможет только теория, «в которой постоянная Зоммерфельда принимает определенное значение». Много лет спустя «регуляризация» вместе с перенормировкой позволила построить схему, последовательную по крайней мере с математической точки зрения (см. статью Вилларса в настоящей книге, стр. 94).

Хотя эти запутанные вопросы приходилось оставлять в стороне, исследование поляризации вакуума интенсивно продолжалось. Уже на Сольевевском конгрессе в 1933 г. Дирак [48] рассказал об исследовании слабого статического потенциала в первом порядке теории возмущений. Он получил следующее выражение для плотности заряда δq , индуцированного полем φ :

$$\delta q = \frac{e^2}{\hbar c} \left[A \Delta \varphi + B \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \Delta \Delta \varphi \right]$$

(Δ — лапласиан). Коэффициент B является конечным, а коэффициент A логарифмически расходится, но при надлежащем выборе параметра обрезания ($k_c \sim 137 mc/\hbar$) A становится величиной порядка единицы. Поскольку $(-\Delta\varphi/4\pi)$ есть «внешняя» плотность заряда q_0 , являющаяся источником поля φ , то наличие члена, пропорционального A , в выражении для δq означает, что малая часть ($\sim \frac{1}{137}$) внешнего заряда нейтрализуется (по крайней мере, в случае статического поля). В варианте теории, принадлежавшем Гейзенбергу [44], член $\sim A\Delta\varphi$ автоматически вычитался, что в принятой сейчас терминологии эквивалентно перенормировке заряда. (Идея перенормировки заряда смутно проскальзывала уже в упоминавшихся работах Пайерлса [41] и Фарри и Оппенгеймера [42].) Величина δq оказывается таким образом пропорциональной $-\Delta q_0$, или, точнее говоря, пространственному среднему от $-\Delta q_0$, вычисленному с определенной весовой функцией на сфере радиуса $\sim \hbar/mc$ [49, 50]. Потенциал φ также претерпевает соответствующее изменение ($\rightarrow \varphi + \delta\varphi$), что несколько видоизменяет законы электростатики.

Возможность наблюдения эффектов изменения дф, например изменение энергии связи электронов, изучалась Улингом в 1935 г. [49], но результаты были неблагоприятны. Ныне причина этого ясна: поляризация вакуума действительно сказывается на сдвиге Лэмба, но ее вклад составляет лишь около $(-)2,2\%$. Реальность этого эффекта ныне гарантирована точностью измерений.

В этом приближении (первый порядок по $e^2/\hbar c$) не возникает новых трудностей и в общем случае зависящего от времени электромагнитного поля: плотность индуцированных заряда и тока даются аналогичным выражением с заменой лапласиана на даламбертиан [44, 50, 51].

При переходе к высшим порядкам по $e^2/\hbar c$ мы сталкиваемся с замечательной особенностью теории дырок — в уравнениях Максвелла появляются дополнительные члены, нелинейные (например, третьего порядка) по напряженностям поля и их производным. Принцип суперпозиции в электродинамике и оптике теряет свою силу. Например, фотоны могут рассеиваться фотонами или электростатическим полем. На это еще в 1933 г. указывали Гальперн [52] и Дельбрюк [53], по мнению которых такие процессы могут происходить через виртуальное рождение электронно-позитронных пар. Необходимо было, однако, прибегнуть к вычитательной процедуре Гейзенберга, чтобы сечения процессов такого рода оказались достаточно малыми, в частности в предельном случае малых частот. Реальное вычисление этих сечений было весьма трудоемким (диаграмм Фейнмана еще не существовало) даже в самых простых случаях для малых частот и малых углов рассеяния (см., например, [54]). Последующие вычисления [55, 56] показали, что к тем же результатам можно было прийти, если ввести в лагранжиан дополнительные члены четвертого порядка:

$$L = \frac{1}{2} (E^2 - H^2) + \frac{1}{360\pi^2} \frac{e^4 \hbar}{m^4 c^7} \{ (E^2 - H^2)^2 + 7 (E \cdot H)^2 \} + \dots$$

(в единицах Хевисайда). В 1936 г. Гейзенберг и Эйлер [57], а также Вайскопф [58] получили замкнутое выражение для лагранжиана, пригодное во всех порядках по e в пределе больших длин волн ($\gg \hbar/mc$).

В результате всех этих исследований к концу 30-х годов сложилась следующая картина: если отвлечься от расходимости в собственной энергии и связанных с ней трудностей (например, «поправок на излучение» [59]), то теория позитронов содержит

хорошо определенную и правдоподобную схему для количественного объяснения всех наблюдаемых явлений. Однако экспериментальных методов, которые позволили бы проверить более тонкие черты теории (связанные с поляризацией вакуума), тогда еще не существовало. Методы вычитания казались слишком искусственными и не завоевали общего признания. Паули, который, казалось, активно интересовался развитием теории (см., например, [51]), выдал свои чувства, употребив полупрезрительный термин — «вычитательная физика», а в его работе [51] можно прочесть следующие слова: «Формализм принятой ныне теории позитронов, которая не заменена еще, к сожалению, более удовлетворительной...». С нашей современной точки зрения теория оказалась правильной во всех вопросах, к которым она могла быть применена.

§ 3. ДРУГИЕ ПОЛЯ; ВЫСШИЕ СПИНЫ

В первых попытках построить релятивистское обобщение уравнения Шредингера, «скалярное волновое уравнение»

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{\alpha}^2} = \mu^2 Q$$

($\mu = mc/\hbar$), в соответствии со взглядами де Бройля на связь волн и частиц, казалось естественным исходным пунктом [60, 61, 62]. Этот подход, однако, в 1928 г. подвергся критике со стороны Дирака [14], который указывал, что общая интерпретация квантовой механики требует, чтобы волновое уравнение было линейным по $\partial/\partial t$. Исходя из этого требования, Дирак построил релятивистское волновое уравнение для электрона со спином. Это отвлекло внимание от скалярного (релятивистского) поля, но в 1934 г. Паули и Вайскопф [63] показали, что, используя канонические правила квантования поля (разработанные в 1929 г. Гейзенбергом и Паули в их первой работе по квантовой электродинамике), можно построить последовательную теорию скалярного поля. В предложенном ими формализме дифференциальному уравнению первого порядка по $\partial/\partial t$ подчинялся вектор состояния системы Ψ

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi,$$

и его физическая интерпретация не встречала затруднений. Соответствующие частицы не обладают спином, и сопоставить их с реально существующими элементарными частицами в 1934 г.

было, конечно, невозможно. Задача представляла лишь академический интерес до конца 40-х и начала 50-х годов, когда был открыт π -мезон, спин которого оказался равным нулю.

Сейчас теория «заряженного скалярного» мезона служит стандартным примером для иллюстрации методов квантования поля и нет необходимости подробно излагать ее здесь (см., например, гл. 8 и 11 книги Вентцеля [45]). Паули и Вайскопф в качестве положительной стороны теории подчеркнули то обстоятельство, что энергия поля является с самого начала положительно определенной величиной (нет необходимости прибегать к вычитанию), что позволяет ввести корпускулярную интерпретацию поля. Заряд оказывается неопределенным: частицы могут нести либо положительный, либо отрицательный заряд. Квантовый характер заряда (его собственные значения являются целыми кратными элементарного заряда) есть следствие формализма. В соответствии с выбором правил коммутации частицы подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, тогда как предположение об антикоммутации полей привело бы к трудностям (см. ниже). В остальном результаты удивительно сходны с результатами теории позитронов. Например, фотоны с энергией $> 2 mc^2$ в статическом кулоновом поле должны рождать пары, и рассчитанное Паули и Вайскопфом сечение этого процесса по порядку величины совпадает с сечением Бете—Гайтлера для рождения электронно-позитронных пар (*ceteris paribus*). Существуют также поляризация вакуума, связанная с рождением виртуальных бозонных пар, и соответствующая логарифмическая расходимость, требующая перенормировки заряда. Электромагнитная собственная энергия заряженного бозона расходится как квадрат параметра обрезания ($\sim k_c^2$) [47].

В 1937 г. интерес к квантованным полям более общего характера значительно возрос в связи с открытием в космических лучах «мезотронов» и последовавшим бумом вокруг «мезонной теории ядерных сил», которой будет посвящен § 4. В этом параграфе мы остановимся на некоторых вопросах более математического характера, связанных со строением полей, описывающих частицы с заданным спином (эти вопросы в значительной мере интересовали самого Паули).

При систематическом подходе естественно отделить классическую сторону вопроса от квантовомеханической: как нужно обобщить классические релятивистские уравнения поля, чтобы после надлежащего квантования наблюдаемые величины можно было отнести к частицам со спином s , заряженным или незаря-

женным, с массой покоя, равной или не равной нулю? Нельзя ожидать, что классическая («с-числовая») теория сама по себе сможет описать отдельные частицы — это невозможно даже при $s = 0$ и $s = \frac{1}{2}$ (при $s = 0$ плотность вероятности не является положительно определенной величиной, а при $s = \frac{1}{2}$ возникают состояния с отрицательной энергией). Можно было, однако, надеяться, что последующее квантование (с дополнениями типа теории дырок) приведет к последовательной теории.

Общая теория классических полей главным образом для свободных частиц была впервые построена в 1936 г. Дираком [64], который использовал дифференциальные уравнения первого порядка, подобные его волновому уравнению для частиц со спином, равным $\frac{1}{2}$. Спинорные обозначения Ван дер Вардена [65] оказались весьма полезным орудием. Структура этих теорий была разобрана Фирцом (который выразил Паули благодарность за руководство). В более простом случае целых спинов классическое поле является тензором ранга s ($Q_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$; $\alpha_r = 1 \dots 4$), симметричным по всем индексам, со следом, равным нулю. Тензор подчиняется волновому уравнению Шредингера—Клейна—Гордона и дивергенция его равна нулю. В плоской волне при $m \neq 0$ эти условия оставляют только $(2s+1)$ независимую компоненту амплитуды, в чем проще всего убедиться, если перейти к «системе покоя» [$Q_{\alpha_1 \dots} = \exp(-i\mu t) \cdot \text{const}$]. При пространственных вращениях эти независимые компоненты преобразуются по неприводимому представлению \mathcal{D}_s , и состояния одной частицы соответствуют $(2s+1)$ возможной ориентации спина s . Все соотношения можно переписать в спинорных индексах и обобщить их так, чтобы включить случай полуполого спина. (Можно также прийти к случаю полуполого спина, добавляя к целому спину спин, равный $\frac{1}{2}$; по такому пути пошли Рарита и Швингер [67].) Фирц рассмотрел возможные выражения для плотности энергии-импульса и плотности четырехмерного тока; выбор этих выражений неоднозначен, хотя полная энергия и полный заряд всегда определены единственным образом. В случае целого спина энергия положительна, но при полуполом спине она может быть как положительной, так и отрицательной. Это обстоятельство играет решающую роль при выборе способа квантования: соотношения коммутации и статистика Бозе—Эйнштейна при целом спине, соотношения антикоммутации (принцип запрета Паули) или статистика Ферми—Дирака при полуполом спине. Фирц [66, 68] получил общее выражение для этих соотношений (анти-)коммутации.

При наличии состояний с отрицательной энергией введение принципа запрета, очевидно, неизбежно; гораздо менее ясен вопрос, почему квантование, соответствующее принципу запрета, следует исключать при целом спине. Для Паули этот вопрос представлял, естественно, большой интерес [69, 66, 70]. Здесь существенным является следующий постулат: «Измерения в двух пространственных точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, не могут повлиять друг на друга, поскольку никакие сигналы не могут распространяться со скоростью, большей скорости света». Этот постулат запрещает использование « D_1 -функций» в лоренц-инвариантных соотношениях антикоммутации, и при целом s возникает математическое противоречие (см. также статью Йоста в настоящей книге, стр. 128).

Особенно интересен случай массы покоя, равной нулю, поскольку сюда относится электромагнитное поле ($s=1$) и (линеаризованное) гравитационное поле в общей теории относительности Эйнштейна ($s=2$). В обеих этих физических теориях существует группа градиентных преобразований

$$Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha + \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha},$$

$$Q_{\alpha\beta} \rightarrow Q_{\alpha\beta} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \sum_\gamma \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\gamma}$$

(возможных только при $m=0$), относительно которых все наблюдаемые величины инвариантны. (В общей теории относительности градиентные преобразования эквивалентны бесконечно малым преобразованиям координат.) Поэтому естественно предположить, что в случае $m=0$ при произвольном спине s любые два решения физически эквивалентны, если их можно перевести друг в друга градиентным преобразованием. Для плоских волн это приводит (при $s \geq 1$) к тому, что число независимых поляризационных состояний равно двум — обстоятельство, хорошо известное для электромагнитных и гравитационных волн (при $m=0$ не существует «системы покоя»). В квантованной теории s по-прежнему можно связать со «спином» или внутренним моментом количества движения одной частицы (например, фотона или гравитона); проекции спина на направление движения обладают собственными значениями, равными $\pm s$. В 1940 г. Фирц [71] доказал, что полный момент количества движения одной частицы в такой теории $\geq s$.

Существование градиентной группы при $m=0$ и ее отсутствие при $m \neq 0$ приводит к некоторым типичным различиям в структуре квантованных теорий в обоих случаях. Примером может служить (действительное) векторное поле ($s=1$), описываемое либо уравнениями Максвелла, либо уравнениями Прока [72]. (В качестве модели для «векторных мезонов» квантованная теория Прока рассматривалась в многочисленных работах в 1938 г.; см. [85—125].) Каноническая процедура квантования, применяемая непосредственно к трем независимым амплитудам плоской волны при $m \neq 0$, не допускает автоматического перехода к пределу при $m \rightarrow 0$. В частности, условие Лоренца

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0,$$

которое в канонической теории рассматривается как тождественное соотношение между четырьмя компонентами Q_{α} поля, при $m=0$ вырождается и теряет смысл. Именно с этой трудностью по существу и столкнулись Гейзенберг и Паули в 1929 г., впервые пытаясь сформулировать квантовую электродинамику. Выход из положения указал Ферми, предложивший заменить рассматриваемое как тождество условие Лоренца дополнительным условием, налагаемым на вектор состояния Ψ . Другой вариант векторной мезонной теории сформулировал Штюкельберг в 1938 г. [73], который ввел дополнительное скалярное поле Q и некоторое условие, налагаемое на Ψ . Его теория формально охватывает также случай $m=0$ (при этом $Q \equiv 0$), однако настоящего единства двух теорий не возникает. (Сравнительно недавно к этим вопросам возвращались Белинфанте [74] и Костер [75].)

Во всех рассмотренных случаях классические уравнения поля можно получить с помощью вариационного принципа, задавшись некоторой плотностью лагранжиана. Свойства инвариантности лагранжиана (в отсутствие внешних полей) позволяют построить сохраняющиеся величины и соответствующие им плотности, которые подчиняются «условиям непрерывности» типа соотношений

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} = 0$$

для тензора натяжений энергии-импульса $T_{\alpha\beta} (= T_{\beta\alpha})$ или соотношений

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}} = 0$$

для тензора момента количества движения $M_{\alpha\beta\gamma}(=-M_{\alpha\gamma\beta})$. Общие выражения для $T_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta\gamma}$ впервые получил в 1939 г. Белинфанте [76] (выразивший благодарность Крамерсу и Подольскому) из свойства инвариантности лагранжиана относительно бесконечно малых преобразований Лоренца. Независимо Розенфельд в 1940 г. [77] использовал для той же цели инвариантность относительно произвольных бесконечно малых преобразований координат в общей теории относительности. Полученный результат совпадает с результатом Белинфанте в предельном случае метрики Минковского. Лагранжиан *комплексных* полей $Q_{\alpha_1}\dots$ может оказаться инвариантным относительно (постоянного) приращения фазы этих полей ($Q_{\alpha_1}\dots\rightarrow Q_{\alpha_1}\dots e^{i\epsilon}$); и при бесконечно малом ϵ прямым следствием этого свойства является уравнение непрерывности

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial J_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0,$$

где величину J_{α} следует интерпретировать как четырехмерную плотность заряда—тока. Физический смысл, который приписывался введенным плотностям, связан, естественно, с предположением, что последние определяют взаимодействие полей Q или соответствующих частиц с гравитационным или электромагнитным полем. В этой связи Белинфанте [78] подчеркнул, что лагранжиан L для поля, вообще говоря, определен неоднозначно; любая подстановка вида

$$L \rightarrow L + \sum_{\alpha} \frac{\partial \Lambda_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$$

оставляет уравнения поля неизменными. Если можно построить четырехмерный вектор Λ_{α} (инвариантный относительно изменения фазы для комплексных полей) из компонент поля¹⁾, то существует некоторый произвол в выборе L , и соответствующая неоднозначность в определении $T_{\alpha\beta}$ и J_{α} (что, однако, не затрагивает полной энергии и полного импульса $\int d^3x T_{4\beta}$,

¹⁾ Первые производные от компонент $\partial Q_{\alpha_1}\dots/\partial x_{\beta}$ также могут входить в Λ_{α} при условии, что вторые производные сокращаются в $\sum_{\alpha} \partial \Lambda_{\alpha}/\partial x_{\alpha}$. — Прим. ред.

а также полного заряда $\int d^3x J_4$). Дополнительный член, возникающий, например, в J_α имеет вид $\sum_\beta \partial P_{\alpha\beta} / \partial x_\beta$, где тензор $P_{\alpha\beta} (= -P_{\beta\alpha})$ связан со спиновой поляризацией [при $s=1$, $P_{\alpha\beta} = i(Q_\alpha^* Q_\beta - Q_\beta^* Q_\alpha) \cdot \text{const}$] и определен с точностью до произвольного множителя; в системе покоя эта добавка приводит к изменению магнитного момента частицы. Поэтому следует ожидать, что волновое уравнение для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле можно записать, придав произвольное значение спиновому магнитному моменту (исключая, конечно, случай $s=0$). Анализ Корбена и Швингера [79] показал, что это действительно можно осуществить для векторного мезонного поля; кроме того, еще раньше было известно, что в волновое уравнение Дирака для $s=1/2$ можно ввести добавочный «член Паули», приписав тем самым электрону аномальный магнитный момент (см. уравнение (91) в работе Паули [80]).

Общая задача построения волновых уравнений и лагранжианов для заряженных частиц со спином s во внешнем поле [81] оказалась при $s > 1$ очень сложной. Обычный прием, заключающийся в подстановке $\partial/\partial x_\alpha - i(e/\hbar c)\varphi_\alpha$ вместо $\partial/\partial x_\alpha$, во избежание противоречий, следует использовать с большой осторожностью. Фирц и Паули взялись за разрешение этой проблемы, вводя, кроме основного тензора или спинора, тензоры или спиноры низших рангов (например, скаляр в случае $s=2$), которые, однако, тождественно обращались в нуль в отсутствие внешнего поля. Грубо говоря, при наличии внешнего поля вводится примесь состояний со спинами $s-1$, $s-2$, ..., но таким образом, чтобы при выключении внешнего поля совершался переход снова к частице со спином s . Теория была разработана сколько-нибудь подробно, но только для случаев $s=2$ и $s=3/2$. Для целых значений спина ≥ 3 были лишь перечислены дополнительные спиновые состояния и указан странный результат; вся схема существенно однозначна только при $s \leq 4$.

Возникает также вопрос, можно ли естественным образом описать частицу с несколькими спиновыми состояниями (например, одним основным и одним возбужденным) в рамках формализма теории поля. Например, спин, равный 0 и 1, можно описать совместно, не нарушая свойств каждой из частиц с помощью алгебры 16-рядных матриц, которая, однако, являясь приводимой и распадается на представления, соответствующие спину, равному 0 и 1 [82, 83] (см. также часть II, 4 обзора

Паули [80]). Существование неприводимых волновых уравнений, допускающих интерпретацию с помощью понятия «элементарной частицы» с двумя различными массовыми и спиновыми состояниями, доказал Баба [84]. Он привел пример волнового уравнения, в которое входит неприводимый набор двадцатирядных матриц; собственные состояния с $s = 3/2$ и $s = 1/2$ соответствовали различным значениям массы. Поскольку плотность заряда положительно определена, возможно квантование в соответствии с принципом запрета (в духе теории дырок). Собственные функции, описывающие частицу в каждом из состояний, естественно, совершенно не походили на волновые функции Дирака или Фирца—Паули для частиц с определенным значением спина.

Все теории, описывающие частицы со спином, большим единицы ($s > 1$), сложны по своей структуре и за исключением гравитационного поля не привлекли особого внимания; природа, по-видимому, предпочитает «простые» пути. Тем не менее тот факт, что аппарат теории поля предлагает гораздо больше возможностей, чем осуществляется в действительности (насколько нам известно), имеет принципиальное значение, поскольку указывает, что нужны совершенно новые идеи, чтобы объяснить, почему реальные частицы обладают своими специфическими свойствами.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ К ПРОБЛЕМАМ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Вернемся еще раз к концу 20-х и началу 30-х годов. Хотя к тому времени мы научились с успехом описывать поглощение и испускание фотонов, интерпретируя амплитуды электромагнитного поля как квантовомеханические операторы, идея об использовании аналогичного описания для других процессов рождения и аннигиляции еще не получила широкого распространения. Не было известно даже, что выражения «рождение» и «уничтожение» пригодны также для описания таких явлений, как β -распад. В этом отношении переворот произвела теория β -распада Паули—Ферми, и чтобы проиллюстрировать роль, которую она сыграла, мы приведем перевод нескольких абзацев из введения к статье Ферми, написанной им в 1933 г. [85]. Упомянув о предложенном Паули объяснении непрерывности β -спектра путем введения «нейтрино», которое, ускользая от наблюдения, уносит с собой часть высвобождаемой энергии

(см. статью Ву в настоящей книге, стр. 290), Ферми продолжает:

«Помимо трудностей, связанных с непрерывностью распределения по энергиям, теория β -лучей сталкивается еще с одной значительной трудностью: существующие теории легких частиц не объясняют сколько-нибудь удовлетворительно, как эти частицы могут оказаться связанными в устойчивом или квазиустойчивом состоянии внутри ядра, учитывая малость последнего.

Простейший путь к построению теории, которая позволила бы количественно рассмотреть это явление, открывает предположение, что электроны, как таковые, не существуют внутри ядра, пока не произойдет β -излучения, и они, так сказать, обретают существование в тот самый момент, когда излучаются (аналогично тому, как световой квант, испущенный атомом в квантовом переходе, никоим образом нельзя рассматривать как существовавший в атоме до процесса испускания). В предлагаемой теории, таким образом, полное число электронов и нейтрино (подобно полному числу световых квантов в процессе излучения) не обязательно постоянно, поскольку могут существовать процессы рождения и уничтожения этих легких частиц.

В соответствии с идеями Гейзенберга мы будем рассматривать тяжелые частицы нейтрон и протон, как два квантовых состояния, отвечающих двум возможным значениям внутренней координаты q тяжелых частиц. Мы припишем ей значение $+1$, если частица есть нейтрон, и -1 , если частица — протон.

Мы постараемся теперь отыскать выражение для энергии такого взаимодействия между легкими и тяжелыми частицами, которое разрешило бы переходы между состояниями, отвечающими значениям q , равным $+1$ и -1 , или, другими словами, разрешило бы превращение нейтрона в протон и наоборот, причем такое превращение нейтрона в протон должно быть обязательно связано с рождением электрона, который наблюдается как β -частица, и нейтрино, тогда как обратное превращение протона в нейтрон должно сопровождаться исчезновением электрона и нейтрино;...

Простейший способ построения теории, в которой число частиц (электронов и нейтрино) не обязательно сохраняется, заключается в использовании метода «квантованных амплитуд вероятности» Дирака — Иордана — Клейна. Согласно этому методу, амплитуды вероятности ψ для электрона и ϕ для нейтрино и комплексно сопряженные к ним амплитуды ψ^* и ϕ^* следует рассматривать как некоммутующие операторы, действующие на функции от чисел заполнения квантовых состояний электронов и нейтрино...

Ферми переходит затем к написанию в обозначениях теории поля своего знаменитого β -взаимодействия (по случайности, он выбрал взаимодействие, которое ныне именуется «векторным»). Мы не можем проследить здесь последующего развития теории β -взаимодействий, которое часто шло кружным путем, а лишь кратко упомянем недолго жившую, но имевшую большое историческое значение « β -теорию ядерных сил». Речь идет об идее

[86], возникшей в 1934 г., согласно которой во втором порядке теории возмущений нейтрон и протон могут взаимодействовать, испуская и снова поглощая виртуальные электронно-нейтринные пары. Взаимодействие это крайне слабо, но быстро расходуется на малых расстояниях и допускает разумное обрезание. Впоследствии было предложено еще несколько вариантов этой теории (например, с виртуальными электронно-позитронными парами) и обсуждение их продолжалось даже после открытия «мезотрона».

Тем временем Юкава [87] в 1935 г. опубликовал остроумную гипотезу, согласно которой ядерные силы действуют через посредство бозонного поля, т. е. переносятся не парами, а *отдельными* частицами, подобно электромагнитным силам, однако с тем существенным отличием, что эти частицы должны обладать неравной нулю *массой покоя*; соответствующая этой массе комптоновская длина волны определяет радиус взаимодействия ядерных сил, как указывает стационарное решение ($e^{-\mu r}/r$, где $\mu = mc/\hbar$) «скалярного волнового уравнения». Юкава оценил массу покоя бозона в 200 электронных масс. Промежуточные бозоны несут заряд, что приводит к «обменному характеру» ядерных сил. Интересно отметить, что Юкава предположил также, что бозоны неустойчивы по отношению к β -распаду, и ядерный β -распад, следовательно, можно было бы рассматривать как двухступенчатый процесс с испусканием виртуального бозона на первом этапе. (В последнее время эта идея снова стала модной, с тем лишь отличием, что понадобился *новый* гипотетический бозон. Иной многоступенчатый механизм β -распада и ядерных сил, с участием бозона более тяжелого, чем нуклоны, — радиус действия сил определялся в этом случае разностью масс, — был предложен Вентцелем [88].)

Когда работа Юкавы [87] стала известна, она не сразу встретила одобрение и поддержку. Однако через два года она внезапно оказалась в центре внимания, когда эксперименты по космическим лучам обнаружили, а затем уверенно подтвердили существование заряженных частиц, более легких, чем протон, но более тяжелых, чем электрон. Юкава предсказал их существование! Впоследствии было даже обнаружено, что эти частицы распадаются на электроны (и, по-видимому, на нейтрино). Заблуждение, связанное с ошибочным отождествлением « μ -мезона» с «мезоном ядерного поля», сохранилось около десяти лет и имело отрицательные, хотя и не очень серьезные, последствия для мезонной теории.

Между тем, все бо́льшую роль стало играть расширение наших познаний о свойствах ядерных сил. Зависимость ядерных сил от спинов, казалось, требовала введения скорее *векторного* мезона, нежели скалярного, и квантованное поле Прока, а также его возможное взаимодействие с нуклонами сделалось предметом многочисленных исследований [89—92]. Кеммер [93] первым рассмотрел также *псевдоскалярное* поле, сыгравшее потом такую важную роль в описании π -мезона. Кеммер указал, что хотя скалярные и псевдоскалярные частицы, будучи свободными, или находясь в поле электромагнитных сил, ведут себя одинаково, их взаимодействие с нуклонами различно из-за различия в четности операторов бозонного поля. Другим значительным достижением Кеммера [94] было введение аппарата *изотопического спина* в теорию мезонного поля; при этом результаты оказывались «зарядово-симметричными», а ядерные силы — «зарядово-независимыми» (в любом приближении), на что, казалось, уже указывали экспериментальные данные (например, по протон-протонному рассеянию).

Хотя недостатки теории возмущений были уже хорошо известны (см., например, [95]), для сравнения с экспериментом обычно продолжали использовать результаты, полученные во втором порядке. Помимо нуклон-нуклонных данных важным критерием являлась устойчивость тяжелых ядер («насыщение» ядерных сил). Наиболее предпочтительной казалась сначала векторная теория, но она столкнулась с серьезной трудностью, когда стал известен знак «тензорных сил» (из эксперимента Раби и его сотрудников по измерению электрического квадрупольного момента дейтрона), и в начале 40-х годов все большее внимание стало уделяться псевдоскалярной теории. Сингулярные члены ($\sim r^{-3}$) в стационарном тензорном взаимодействии можно устранить, вводя наряду с псевдоскалярным взаимодействием примесь векторного (см. [96, 97]; о попытках привести такую теорию в согласие с экспериментом рассказано в разделе 1 обзора [98]).

Другой вызывавший оживленное обсуждение вопрос относился к аномальному магнитному моменту протона и нейтрона, который приписывался «мезонному облаку». Аналогичная идея высказывалась еще Вико [99] применительно к теории β -поля, но более сильное взаимодействие нуклон — мезон, казалось, давало больше шансов на успех, хотя и было связано с произвольным обрезанием. Этой надежде не суждено было оправдаться — вопрос об аномальном магнитном моменте и другие аналогичные вопросы и поныне остаются нерешенными.

Большая интенсивность ядерных сил вскоре вызвала сильное желание избавиться от теории возмущений и других методов, характерных для слабых взаимодействий. Квантово-электродинамический метод Блоха — Нордсика, хотя и правильно ориентировал, тем не менее не мог быть перенесен на мезон-нуклонное взаимодействие вследствие характерной зависимости последнего от спина и (или) изотопического спина (см., например, работу Штукельберга [100]). Если, однако, параметр связи g настолько велик, что возможно разложение по обратным степеням g , то мезонное поле разделяется на поле, связанное с нуклоном (стационарным и конечным), и свободное поле, которое в высших приближениях рассеивается на составном нуклоне. «Теория сильной связи» была впервые разработана Вентцелем [102] для простейшего нетривиального случая — скалярного поля Юкавы. Самым интересным результатом оказалось предсказание «нуклонных изобар», т. е. возбужденных состояний составного нуклона с зарядом Z и энергией возбуждения, пропорциональной $Z(Z - 1)/g^2$. (Значение коэффициента пропорциональности впоследствии было уточнено Вентцелем [101]; см. также работу Оппенгеймера и Швингера [103].) Чтобы перенести эти результаты на псевдоскалярное и векторное поля, теорию нужно было обобщить, введя связанные p -состояния системы мезон—нуклон вместо s -состояний; в нейтральной псевдоскалярной теории возможны три p -состояния, а в зарядово-симметричной — девять p -состояний [104, 105]. В зарядово-симметричной псевдоскалярной теории (а также в некоторых векторных и смешанных теориях [106, 107]) энергия изобара сходна с энергией вращения симметричного волчка и ее значения пропорциональны $j(j + 1)$, где (полуцелое) j имеет смысл как спина, так и изотопического спина изобарного состояния; при данном j возможны $(2j + 1)$ ориентация спина и $(2j + 1)$ зарядовое состояние ($Z = -j + \frac{1}{2}, \dots, j + \frac{1}{2}$). Основные состояния с $j = \frac{1}{2}$ следует отождествить с обычными нейтронным и протонным состояниями, тогда как первые возбужденные состояния $j = \frac{3}{2}$ обладают в точности такими же свойствами, как хорошо известные ныне резонансные $p(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ -состояния, наблюдаемые при рассеянии π -мезонов на нуклонах, и энергия возбуждения которых составляет около 300 Мэв [108]. Забавно было обнаружить эту же величину в работе Вилларса 1946 г. [109], в которой анализировалось влияние примеси изобарных состояний на систему протон — нейтрон (в дейтронном состоянии и при рассеянии в области малых энергий): для согласия

теории сильного взаимодействия с экспериментом требовалось, чтобы энергия возбуждения была не меньше по крайней мере 300 $M\bar{e}v$ (неожиданно большое значение!).

Подбирая параметры смешанной теории (в том числе параметр обрезания k_c) так, чтобы удовлетворить данным эксперимента, Паули и Кусака старались получить очень малое сечение мезон-нуклонного рассеяния при больших энергиях в соответствии с результатами изучения космических лучей; этого действительно можно добиться, выбрав k_c достаточно большим [103]. В этом отношении мы все были введены в заблуждение ошибочным сопоставлением мезонов космических лучей с предсказанием Юкавы! По иронии судьбы, кажущаяся слабость их взаимодействия с нуклонами являлась одним из главных обоснований для работ по теории сильной связи и для других работ того времени. Лишь очень редко высказывалось подозрение о существовании нескольких типов мезонов (например, высказывание Сакавы и Таникавы, приведенное в работе Томонаги 1942 г. [110]).

Поскольку считалось, что энергия возбуждения изобар порядка 50 $M\bar{e}v$ или даже меньше, то приходилось ставить вопрос, не приводят ли высшие изобарные состояния в тяжелых ядрах к ликвидации насыщения ядерных сил. Вскоре было обнаружено [106, 111], что в зарядово-симметричных теориях насыщение сохраняется, хотя равновесное значение заряда (точнее, отношения Z/A) может оказаться слишком малым, поскольку кулоново взаимодействие благоприятствует появлению отрицательно заряженных изобар [112]. Этот недостаток теории был, конечно, устранен при переходе к более высоким энергиям возбуждения. Другое возражение Паули против теории сильной связи было связано с ее полной неспособностью объяснить магнитные моменты нейтрона и протона. В пределе сильного взаимодействия отношение магнитных моментов оказывалось равным -1 , и учет высших порядков не приводил к сколько-нибудь заметному улучшению ситуации [113]. Более того, разность масс нейтрона и протона предсказывалась с неправильным знаком. (Об этих трудностях теории сильной связи рассказано в разделе 2 обзора [98].)

Предположение, что в действительности связь может оказаться не «сильной» и не «слабой», породило многочисленные попытки рассмотреть случай «промежуточной» связи. Томонага [114] (а также в ранее упоминавшейся работе) предложил остроумный вариационный метод, который, например, в заряженной скалярной теории позволял построить интерполяцию между пре-

дельными случаями слабой и сильной связи (для протяженного покоящегося нуклона)¹⁾. Использовался и часто с надеждами на успех (ввиду пресловутой малости сечения) также классический или полуклассический подход, основанный на описании ядерных спиновых и зарядовых состояний при помощи классических вращений, при этом подчеркивалась роль затухания (реакция) в мезон-нуклонном рассеянии [115—119]. В 1941 г. Гайтлер [125] построил квантовую теорию радиационного затухания и применил ее к мезон-нуклонному рассеянию.

Можно ли быть уверенным в том, что мезон-нуклонное взаимодействие действительно имеет указанный Юкавой характер? Старая идея о взаимодействии нуклонов через испускание и поглощение *пар* частиц (при этом энергия взаимодействия квадратична по амплитудам поля) была снова подхвачена и применена к мезонным парам [121]. Скалярная теория пар, развитая Вентцелем [122], представляет и сейчас некоторый интерес с математической точки зрения, как одна из немногих задач теории поля, допускающих строгое решение. Зависящее от спинов взаимодействие через пары рассматривали в приближении сильной связи Паули и Ху [123] и Блатт [124] (о более ранних работах, посвященных этому взаимодействию, упоминалось выше).

После 1950 г. быстрое накопление экспериментальных данных поставило мезонную теорию на более твердую основу; однако то, что ныне называется «теорией», в большей части представляет собой свод полуэмпирических правил, и теория мезонных полей как дедуктивная схема не добилась особенного успеха. Одно время было распространено мнение (и некоторые физики, по-видимому, придерживаются его и поныне), что псевдоскалярное поле с псевдоскалярной (γ_5) связью с нуклонами правильно объясняет все факты, относящиеся к π -мезонам и нуклонам. В действительности, эта претензия почти ни на чем не основана, коль скоро основные черты взаимодействия, главной из которых является $p(3/2, 3/2)$ -резонанс, считаются само собой разумеющимися. Эта ситуация заставляет поставить вопрос более общего характера (см., например, работу Гейзенберга [125]) — в какой мере наша схема вообще адекватна действительности? Насколько допустимо исходить из свободных

¹⁾ Многие работы Томонаги и его сотрудников, выполненные в различное время, начиная с 1941 г., и посвященные различным вариантам теории сильной и промежуточной связи, были опубликованы в 1955 г. в Suppl. № 2 к журналу Progress of Theoretical Physics.

полей, описывающих «голые» частицы, и затем вводить в лагранжиан взаимодействие, которое делает эти частицы «одетыми» или «составными», превращая таким образом исходные «голые» частицы в наблюдаемые объекты? Справедливо, что такой подход в сочетании с перенормировочными предписаниями позволяет построить пригодную для использования схему квантовой электродинамики, но быть может это связано лишь с тем, что ряд по степеням $e^2/\hbar c$ быстро сходится. Что касается мезонной теории и других более сложных теорий поля с более сильными взаимодействиями, то на поставленный вопрос пока нет ответа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ehrenfest P., Phys. f. Zs., **7**, 528 (1906).
2. Debye P., Ann. d. Phys., Lpz. **4**, **33**, 1427 (1910).
3. Einstein A., Ann. d. Phys., Lpz. **4**, **17**, 132 (1905).
4. Bose S. N., Zs. f. Phys., **26**, 178 (1924).
5. Born M., Heisenberg W., Jordan P., Zs. f. Phys., **35**, 557 (1926).
6. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A114**, 243 (1927).
7. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A114**, 710 (1927).
8. Kramers H. A., Heisenberg W., Zs. f. Phys., **31**, 681 (1925).
9. Weisskopf V., Wigner E., Zs. f. Phys., **63**, 54 (1930).
10. Heitler W., Quantum Theory of Radiation, 3rd ed., New York, 1954. (См. перевод: В. Т а й т л е р, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1959.)
11. Heisenberg W., Ann. d. Phys., Lpz. **5**, **9**, 338 (1931).
12. Jordan P., Pauli W., Zs. f. Phys., **47**, 151 (1928).
13. Bohr N., Rosenfeld L., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., **12**, 8 (1933).
14. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A117**, 610 (1928).
15. Heisenberg W., Pauli W., Zs. f. Phys., **56**, 1 (1929).
16. Rosenfeld L., Zs. f. Phys., **63**, 574 (1930).
17. Heisenberg W., Pauli W., Zs. f. Phys., **59**, 168 (1930).
18. Waller I., Zs. f. Phys., **62**, 673 (1930).
19. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., **35**, 461 (1930).
20. Fermi E., R. C. Accad. Lincei, **9**, 881; **12**, 431 (1929—1930).
21. Dirac P. A. M., Фок В. А., Подольский Б., Phys. Zs. Sowjetunion, **2**, 468 (1932).
22. Bloch F., Phys. Zs. Sowjetunion, **5**, 301 (1934).

23. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., Osaka, 1, 27 (1946). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 1.)
24. Schwinger J., Phys. Rev., 74, 1439 (1948). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 12.)
25. Wentzel G., Zs. f. Phys., 86, 479, 635; 87, 726 (1933).
26. Dirac P. A. M., Ann. Inst. Poincaré, 9, 13 (1939).
27. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A167, 148 (1938).
28. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A180, 1 (1942).
29. Pauli W., Rev. Mod. Phys., 15, 175 (1943).
30. Pauli W., Handbuch der Physik Geiger-Scheel, Bd. 24, 1933, S. 255. (См. перевод: В. Паули, Общие принципы волновой механики, М.—Л., 1947.)
31. Bloch F., Nordsieck A., Phys. Rev., 52, 54 (1937).
32. Pauli W., Fierz M., Nuovo Cimento, 15, 167 (1938).
33. Jordan P., Zs. f. Phys., 44, 473 (1927).
34. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A114, 243 (1927).
35. Jordan P., Klein O., Zs. f. Phys., 45, 751 (1927).
36. Jordan P., Wigner E., Zs. f. Phys., 47, 631 (1928).
37. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A126, 360 (1930).
38. Oppenheimer J. R. Phys. Rev., 35, 562 (1930).
39. Weyl H., The Theory of Groups and Quantum Mechanics, New York, 1941.
40. Bhabha H. J., Proc. Roy. Soc., A154, 195 (1936).
41. Peierls R., Proc. Roy. Soc., A146, 420 (1934).
42. Furry W. H., Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 45, 260 (1934).
43. Dirac P. A. M., Proc. Cambr. Phil. Soc., 30, 150 (1934).
44. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 90, 209 (1934).
45. Wentzel G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Wien, 1943. (См. перевод: Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., 1947.)
46. Weisskopf V., Zs. f. Phys., 89, 27; 90, 817 (1934).
47. Weisskopf V. F., Phys. Rev., 56, 72 (1939).
48. Dirac P. A. M., Rapport du 7^{me} Conseil Solvay de Physique, 1933, p. 203.
49. Uehling E. A., Phys. Rev., 48, 55 (1935).
50. Serber R., Phys. Rev., 48, 49 (1935).
51. Pauli W., Rose M., Phys. Rev., 49, 462 (1936).
52. Halpern O., Phys. Rev., 44, 855 (1933).
53. Delbrück M., Zs. f. Phys., 84, 144 (1933).
54. Euler H., Ann. d. Phys., Lpz. 5, 26, 398 (1936).
55. Euler H., Kockel B., Naturwiss., 23, 246 (1935).

56. Kemmer N., *Helv. phys. Acta*, **10**, 112 (1937).
57. Heisenberg W., Euler H., *Zs. f. Phys.*, **98**, 714 (1936)
58. Weisskopf V., *Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd.*, **14**, 6 (1936).
59. Dancoff S. M., *Phys. Rev.*, **55**, 959 (1939).
60. Schrödinger E., *Ann. d. Phys.*, *Lpz.* **4**, **81**, 109 (1926).;
61. Gordon W., *Zs. f. Phys.*, **40**, 117 (1926).
62. Klein O., *Zs. f. Phys.*, **41**, 407 (1927).
63. Pauli W., Weisskopf V., *Helv. phys. Acta*, **7**, 709 (1934).
64. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, **A155**, 447 (1936).
65. van der Waerden B. L., *Nachr. Ges. Wiss. Cöttingen*, 1929, S. 100.
66. Fierz M., *Helv. phys. Acta*, **12**, 3 (1939).
67. Rarita W., Schwinger J., *Phys. Rev.*, **60**, 61 (1940).
68. Fierz M., *Helv. phys. Acta*, **23**, 416 (1950). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 239.)
69. Pauli W., *Ann. Inst. Poincaré*, **6**, 137 (1936).
70. Pauli W., *Phys. Rev.*, **58**, 716 (1940).
71. Fierz M., *Helv. phys. Acta*, **13**, 45 (1940).
72. Proca A., *Journ. de phys. et rad.*, **7**, 347 (1936).
73. Stueckelberg E. C. G., *Helv. phys. Acta*, **11**, 225, 299 (1938).
74. Belinfante F. J., *Phys. Rev.*, **76**, 66 (1949).
75. Coester F., *Phys. Rev.*, **83**, 798 (1951).
76. Belinfante F. J., *Physica*, **6**, 887 (1939).
77. Rosenfeld L., *Mém. Acad. R. Belg.*, **18**, Fasc. 6 (1940).
78. Belinfante F. J., *Physica*, **7**, 449 (1940).
79. Corben H. C., Schwinger J., *Phys. Rev.*, **58**, 953 (1940).
80. Pauli W., *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203 (1941).
81. Fierz M., Pauli W., *Proc. Roy. Soc.*, **A173**, 211 (1939).
82. Duffin R. J., *Phys. Rev.*, **54**, 1114 (1938).
83. Kemmer N., *Proc. Roy. Soc.*, **A173**, 91 (1939).
84. Bhabha H. J., *Phil. Mag.*, **43**, 33 (1952).
85. Fermi E., *Ric. sci.*, **2**, No. 12 (1933).
86. Тамм И., Иваненко Д., *Nature*, **133**, 981 (1934).
87. Yukawa H., *Proc. phys.-math. Soc., Japan*, **17**, 48 (1935).
88. Wentzel G., *Zs. f. Phys.*, **104**, 34 (1936).
89. Yukawa H., Sakata S., Taketani M., *Proc. phys.-math. Soc., Japan*, **20**, 319 (1938).
90. Stueckelberg E. C. G., *Helv. phys. Acta*, **11**, 299 (1938).
91. Fröhlich H., Heitler W., Kemmer N., *Proc. Roy. Soc.*, **A166**, 154 (1938).
92. Bhabha H. J., *Proc. Roy. Soc.*, **A166**, 501 (1938).

93. Kemmer N., Proc. Roy. Soc., **A166**, 127 (1938).
94. Kemmer N., Proc. Cambr. Phil. Soc., **34**, 354 (1938).
95. Stueckelberg E. C. G., Patry J. F. C., Helv. phys. Acta, **12**, 300; **13**, 167 (1939—1940).
96. Møller C., Rosenfeld L., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., **17**, 8 (1940).
97. Schwinger J., Phys. Rev., **61**, 387 (1942).
98. Wentzel G., Rev. Mod. Phys., **19**, 1 (1947).
99. Wick G., R. C. Accad. Lincei, **21**, 170 (1935).
100. Stueckelberg E. C. G., Phys. Rev., **54**, 889 (1938).
101. Wentzel G., Helv. phys. Acta, **13**, 269 (1940).
102. Wentzel G., Helv. phys. Acta, **14**, 633 (1941).
103. Oppenheimer J. R., Schwinger J., Phys. Rev., **60**, 150 (1941).
104. Serber R., Dancoff S. M., Phys. Rev., **63**, 143 (1943).
105. Pauli W., Dancoff S. M., Phys. Rev., **62**, 85 (1942).
106. Pauli W., Kusaka S., Phys. Rev., **63**, 400 (1943).
107. Wentzel G., Helv. phys. Acta, **16**, 222, 551 (1943).
108. Brueckner K. A., Phys. Rev., **86**, 106 (1952).
109. Villars F., Helv. phys. Acta, **19**, 323 (1946).
110. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., Suppl., No. 2, 80 (1955).
111. Coester F., Helv. phys. Acta, **17**, 35 (1944).
112. Fierz M., Helv. phys. Acta, **14**, 105 (1941).
113. Houriet A., Helv. phys. Acta, **18**, 473 (1945).
114. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., Osaka, **2**, 6 (1947).
115. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **113**, 61 (1939).
116. Иваненко Д., Соколов А., Journ. of Phys. (CCCP), **3**, 57, 417 (1940).
117. Bhabha H. J., Proc. Roy. Soc., **A178**, 324 (1941).
118. Fierz M., Helv. phys. Acta, **14**, 257 (1941).
119. Pauli W., Meson Theory of Nuclear Forces, New York, 1946. (См. перевод: В. Паули, Мезонная теория ядерных сил, ИЛ, 1947.)
120. Heitler W. Proc. Cambr. Phil. Soc., **37**, 291 (1941).
121. Marshak R. E., Phys. Rev., **57**, 1101 (1940).
122. Wentzel G., Helv. phys. Acta, **15**, 111 (1942).
123. Pauli W., Hu N., Rev. Mod. Phys., **17**, 267 (1945).
124. Blatt J. M., Phys. Rev., **69**, 285 (1946).
125. Heisenberg W., Zs. f. Naturforsch., **1**, 609 (1946).

Ф. В И Л Л А Р С

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И НЕСИНГУЛЯРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Более двадцати лет Паули активно интересовался проблемой расходимостей в квантовой теории поля, и в настоящем обзоре мы хотели бы рассказать о разных этапах развития этой проблемы, подчеркнув взгляды Паули и полученные им результаты. Чтобы изложение было более связным, об этих результатах будет здесь рассказано на фоне развития общей теории. Мы не будем пытаться, однако, воздать должное всем значительным достижениям в этой обширной области исследований. Мы надеемся, что эта статья явится лишь скромным признанием роли Паули в решении новых увлекательных задач.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема расходимостей в квантовой электродинамике имеет долгую историю. Мы не будем рассказывать здесь о всех попытках ее решения; соответствующую информацию можно найти в статье Г. Вентцеля (стр. 60). Мы остановимся лишь на некоторых результатах и точках зрения и непосредственно перейдем к тому времени, когда Паули принял участие в попытках разобраться в этом вопросе.

Первые попытки решения проблемы расходимостей предпринимались на пути, который можно назвать полуклассическим: рассматривались дискретные источники, взаимодействующие через квантованное поле. Вопрос о собственной энергии этих источников был еще близко связан с соответствующей классической проблемой, и классические методы, подобные λ -процессу Вентцеля [1] и Дирака [2], с тем же успехом переносились на

квантовую теорию. Напомним, что в основе λ -процесса лежит тот факт, что кулонов потенциал $U(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, t - t_1)$ точечного заряда, помещенного в точке $\mathbf{x}_1(t_1)$, связан с инвариантной D -функцией Иордана и Паули:

$$D(x, t) = \frac{1}{4\pi|x|} [\delta(|x| - ct) - \delta(|x| + ct)]. \quad (1.1)$$

Связь эта выражается соотношением

$$U(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, t - t_1) = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t d\tau D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \tau - t_1) - \frac{c}{2} \int_t^{\infty} d\tau D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \tau - t_1) \quad (1.2)$$

(см. [3], § 18 и 19).

Величина U равна нулю всюду вне $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| > c|t - t_1|$; следовательно, $U(0) = 0$, если предельный переход $\lim_{x \rightarrow 0} U(x)$ осуществляется по времениподобному направлению. Это обстоятельство использовано в λ -процессе, в котором D -функция Иордана и Паули заменяется на

$$D_\lambda(x - x') = \frac{1}{2} [D(x - x' + \lambda) + D(x - x' - \lambda)], \quad (1.3)$$

где $\lambda = (\lambda, \lambda_0)$ — времениподобный вектор; в окончательных выражениях осуществляется предельный переход $\lambda^2 \rightarrow 0$.

Интересно сравнить этот метод с более примитивным подходом, в котором использовались протяженные источники, т. е. нековариантное обрезание по импульсам в интегрировании по виртуальным переходам. Например, взаимодействие скалярного мезонного поля с нуклоном в точке \mathbf{x}_p описывается гамильтонианом

$$H = g \int d\mathbf{x} v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \varphi(\mathbf{x}, t) = g \sum_k v(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p} \varphi(\mathbf{k}, t).$$

Паули [4], который первым использовал λ -процесс в мезонной теории, указал, что подстановка $D \rightarrow D_\lambda$ в (1.3) формально эквивалентна введению формфактора $v(k) = [\cos(\mathbf{k} \cdot \lambda - k_0 \lambda_0)]^{1/2}$. С этой точки зрения λ -процесс представляется весьма радикальным приемом, и, действительно, он соответствует замене поло-

жительно определенного обрезания $v(k)$ $v^*(k)$ в процессе виртуального испускания и поглощения на индефинитную функцию $\cos(\lambda \cdot k - \lambda_0 k_0)$. Как показал Яух [5], λ -процесс приводит к неправильному знаку аномального магнитного момента нуклонов, в противоположность вычислениям, основанным на надлежащем выборе формфактора $v(k)$ [6].

Этот метод также потерпел неудачу как реальный квантовомеханический предельный процесс. Вайскопф в своей давней работе [7], посвященной собственной энергии электрона в теории дырок, показал, что поляризация электронно-позитронного вакуума приводит к глубоким изменениям в проблеме собственной энергии. Возможность рождения электронно-позитронных пар превращает задачу в многочастичную, и, как указал Паули [8], λ -процесс в этом случае бесполезен. Действительно, в одноэлектронной задаче собственное кулоново поле электрона, определенное как предел, полученный при приближении к электрону по времениподобному направлению, равно нулю. В теории дырок, однако, ситуация коренным образом меняется из-за присутствия виртуальных пар в пространственно-подобных направлениях (по отношению к исходной частице). Соответствующая кулонова энергия не обращается в нуль λ -процессом. Вполне очевидно, таким образом, что рассмотрение расходимостей при классическом описании источников представляет лишь исторический интерес. Квантование источников существенно меняет проблему.

Весьма своеобразный характер придает проблеме расходимостей взаимосвязь между чисто физической задачей *формулировки* основных уравнений и более тонкой математической проблемой их *решения*. Уравнения поля в конце концов являются экстраполяцией из классической динамики, и, естественно, возникает вопрос, в какой мере можно описывать «реальность», взяв эти уравнения в качестве основы квантовой динамики. Отсюда возникают попытки модифицировать сами решения, как, например, процедура обрезания Гайтлера [9], теория свободной от расходимостей S -матрицы Штюкельберга [10], введение дополнительных полей в уравнения (f -поля Пайса [11]) или, наконец, расширение принципиальных основ квантовой механики, скажем путем введения индефинитной метрики в гильбертовом пространстве. В основе всех этих приемов лежит убеждение, что задача физики заключается не столько в непосредственном решении данной системы уравнений, сколько в установлении определенного принципа соответствия, который

позволил бы получить взаимно однозначную связь между данными эксперимента и некоторой математической схемой. Вполне возможно, что в существующей квантовой динамике связь между реальностью и формализмом все еще слишком тесна, или, иными словами, теория еще слишком «наивна».

Стремление к модификации решений находит некоторое оправдание в том обстоятельстве, что трудности, связанные с расходимостями, по-видимому, коренятся в самих принципиальных положениях, лежащих в основе принятого ныне формализма: лоренцовой инвариантности, локальности взаимодействия (микроскопической причинности) и положительности метрики в гильбертовом пространстве. Лоренцова инвариантность предполагает использование пространственно-временного континуума и связанной с ним кинематики. Никакие новые понятия, подобные, например, идее об универсальной длине, не сумели с успехом заменить эту быть может «наивную» основу для описания события во времени и пространстве, и мы не будем касаться здесь этих вопросов. С другой стороны, имя Паули связано как с попытками ввести в теорию нелокальные взаимодействия, так и с исследованиями квантовых состояний с неположительной нормой. В § 5 и 6 мы остановимся на этих вопросах.

Создание в 1947 г. формально ковариантной теории возмущений представило проблему расходимостей в новом свете. Несмотря на успех аппарата перенормировок в квантовой электродинамике, задача о расходимостях (или об определении значений перенормировочных постоянных) не потеряла своего интереса. Во-первых, далеко не очевидно, что неперенормированные значения заряда и массы не могут входить в наблюдаемые величины. В ряде последних работ (например, в работе Швингера [12]) подчеркивается, в частности, что при очень больших передачах импульса процессы определяются неперенормированным значением постоянной взаимодействия. Во-вторых, использование перенормировок в других теориях поля не принесло столь большого успеха. Но самое важное заключается в существовании групп элементарных частиц, связанных друг с другом процессами превращения (барионы, легкие фермионы и т. д.). Законченная теория перенормировок, по-видимому, должна отказаться от интерпретации отношений реальных масс и других величин внутри этих групп. Иначе говоря, существует ряд ожидающих разрешения вопросов, которые могут оказаться вне теории перенормировок, добившейся такого большого успеха в квантовой электродинамике.

Следующий параграф мы посвятим регуляризации. Этот метод, очевидно, не выходит за рамки ковариантной теории возмущений и преследует сравнительно скромную цель — обеспечить использование в теории лишь хорошо определенных, с математической точки зрения, выражений. В § 3 и 4 мы рассмотрим некоторые приложения этого метода.

§ 2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Когда в 1948 г. в Цюрихе стали известны работы Томонага [13], Швингера [14], Фейнмана [15] и впоследствии Дайсона [16], они быстро сделались центром всеобщего внимания. Как и во всем остальном, новые методы имели свою связь с прошлым. Мы упомянем здесь работу Штюкельберга¹⁾, которая предвосхитила многие черты будущей теории, в частности, характерное для теории Фейнмана выражение для S -матрицы через так называемые «причинные» функции Грина S_F и D_F . Однако Штюкельберг под влиянием Гейзенберга [18] интересовался главным образом возможностью построения конечной S -матрицы. (О попытках создания такой теории рассказано в обзоре Вентцеля [19].) Работы упомянутых авторов убедительно подтвердили, что по крайней мере в то время не было необходимости занимать столь крайнюю позицию как позиция Гейзенберга. Использование новой методики показало, что все бесконечности электродинамики связаны с двумя релятивистски инвариантными бесконечными величинами — электромагнитной массой электрона и поляризационным зарядом. Именно эта новая черта лоренц-инвариантной теории возмущений позволила отделить бесконечности от конечных поправок на излучение и приписать последним физический смысл. Она позволила также систематически использовать несовместимость конечной массы фотона с градиентной инвариантностью для отбрасывания неоднозначных, но формально ковариантных членов с тем, чтобы получить в конце концов градиентно-инвариантное выражение.

Необходимо подчеркнуть, что область применимости нового подхода была далеко не ясна, и сейчас интересно проследить, как постепенно выяснялся этот вопрос и напомнить о некоторых заблуждениях и неоправданных надеждах, возникавших вокруг новой теории. Мы можем упомянуть, например, о быстро раз-

¹⁾ Результаты этой работы изложены в статье Ривьера [17], которая содержит обзор работ Штюкельберга.

веявшейся надежде вычислить постоянную тонкой структуры путем вычитания расходимостей в выражении для собственного заряда электрона. Пост и Латтинджер [20] указали, что квадрат отношения перенормированного заряда к перенормированному можно записать в виде

$$\frac{e^2}{e_0^2} = \frac{1}{1+C}$$

где C — расходящийся ряд: $C = e_0^2 c_1 + e_0^4 c_2 + \dots$. Они обнаружили, что знаки c_1 и c_2 совпадают, и позднее, в 1949 г., Швингер¹⁾ доказал в общем виде, что $C > 0$.

Паули проявлял в своем отношении к возможностям новой теории характерный для него критический оптимизм. Его критика в основном была направлена на утверждение об однозначности физических предсказаний (после выделения бесконечностей); его оптимизм и живой интерес был связан с надеждой узнать что-либо новое путем анализа оставшихся трудностей, а не с преждевременной надеждой на окончательный успех.

Причина неоднозначности теории заключалась, очевидно, в сингулярном характере функций Грина $D(x - x')$ и $S(x - x')$, описывающих соответственно распространение электромагнитного и электронно-позитронного поля. Паули отважился высказывать утверждение, что такого рода сингулярности будут отсутствовать в будущем варианте динамики поля. Единственный и очевидный шаг, который можно сделать в этом направлении, заключается в замене одной массы, связанной с каждым полем на спектр масс $\varrho(m)$. При этом вместо функции Грина

$$\Delta(x) = (2\pi)^{-4} \int_C d^4k e^{ik \cdot x} \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (2.1)$$

(C — надлежащим образом выбранный контур в плоскости k_0) мы связываем с бозонным полем несингулярную функцию пространства

$$\Delta^{(r)}(x) = (2\pi)^{-4} \int_C d^4k e^{ik \cdot x} \int d\mu^2 \frac{\varrho(\mu^2)}{k^2 + \mu^2}. \quad (2.2)$$

Функция $\Delta^{(r)}$ регулярна на световом конусе, если выполняется условие

$$\int d\mu^2 \varrho(\mu^2) = 0, \quad \int d\mu^2 \mu^2 \varrho(\mu^2) = 0. \quad (2.3)$$

¹⁾ Не опубликовано.

Случай конечного числа дискретных масс особенно поучителен

$$\varrho(\mu^2) = \sum_i \eta_i \delta(\mu^2 - M_i^2). \quad (2.4a)$$

Минимальное число масс, необходимое, чтобы удовлетворить условиям

$$\sum \eta_i = 0, \quad \sum M_i^2 \eta_i = 0, \quad (2.4б)$$

равно трем, и в этом случае компонента Фурье

$$\int d\mu^2 \varrho(\mu^2) (k^2 + \mu^2)^{-1}$$

регуляризованной функции Грина оказывается равной

$$\sum_i \frac{\eta_i}{k^2 + M_i^2} = \frac{\text{const}}{(k^2 + M_1^2)(k^2 + M_2^2)(k^2 + M_3^2)}. \quad (2.5)$$

Если считать $\Delta^{(r)}(x)$ истинной функцией Грина бозонного поля $\varphi(x)$, то последнее должно удовлетворять уравнению поля

$$\prod_i (\square^2 - M_i^2) \varphi(x) = s(x) \quad (2.6)$$

$\{s(x) — \text{плотность источников}\}$. Как показали в 1950 г. Пайс и Уленбек [21], использование уравнения с многими массами типа (2.6) приводит к индефинитной метрике в гильбертовом пространстве. В интересах дальнейшего изложения мы кратко покажем, как можно прийти к этому результату.

Из определения функции Грина $\Delta_+(x)$, например,

$$\begin{aligned} \Delta_+(x) &= \langle 0 | \varphi(x+x') \varphi(x') | 0 \rangle = \\ &= \sum_{nk} \langle 0 | \varphi(x+x') | nk \rangle \langle nk | \varphi(x') | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

следует [22], что весовая функция $\varrho(\mu^2)$ в уравнении (2.2) определяется соотношением

$$\int d\mu^2 \varrho(\mu^2) \delta(k^2 + \mu^2) = \sum_n \langle 0 | \varphi(0) | nk \rangle \langle nk | \varphi(0) | 0 \rangle \quad (2.8)$$

и, следовательно, не может быть отрицательна. Это противоречит условиям (2.4a) и (2.4б), если не предполагать, что норма состояний является индефинитной:

$$\langle nk | n'k' \rangle = g_{nn'} \delta(k - k'),$$

где $g_{nn'}$ — эрмитова, неположительная и несингулярная матрица. В этом случае, очевидно, правую часть уравнения (2.8) следует

заменить выражением

$$\sum_{nn'} g_{nn'}^{-1} \langle 0 | \varphi(0) | nk \rangle \langle n'k | \varphi(0) | 0 \rangle,$$

которое уже не является положительно определенным.

Отсюда следует вывод, что нельзя построить внутренне непротиворечивую теорию с несингулярными функциями распространения, не затронув обширного круга новых проблем. Мы упомянем здесь только две из них. Во-первых, нужно научиться, как поступать с «нефизическими» состояниями, норма которых неположительна. Пример такой ситуации встретился в работах Блейлера [23] и Гупты [24], посвященных продольным и скалярным фотонам, но из него мало что можно было почерпнуть. В этом случае градиентная инвариантность гарантирует, что нефизические состояния не встретятся при описании физических явлений. В общем случае подматрица \tilde{S} матрицы рассеяния S , связывающая только «физические состояния», сама по себе не будет унитарной. Можно, конечно, искать другие пути физической интерпретации матричных элементов S , как поступил недавно Боголюбов [25], но это грозит утратой даже макроскопической причинности [25] и не может служить естественным решением проблемы.

Снова следует напомнить, что в 1948—1949 гг. такие мысли еще никому не приходили в голову. Паули пытался выяснить, как следует обращаться с неопределенными математическими выражениями, возникавшими при совпадении особенностей в произведениях функций Грина. Чтобы избежать такого совпадения, функцию распространения

$$\frac{1}{k^2 + M^2}$$

следовало заменить выражением, стоящим в левой части соотношения (2.5), положив $M_1 = M$ и $\eta_1 = 1$ и используя соотношения (2.4б). Этот метод можно рассматривать просто как предельный процесс, физический результат определяется как предел при $M_i (i > 1) \rightarrow \infty$. Описанный прием получил название «формальной регуляризации» [26].

В этом методе, однако, были свои опасности. Аналогичную схему независимо предложили Штюкельберг и Ривьер [27], которые пришли к выводу, что окончательные результаты, полученные на этом пути (они рассмотрели в качестве примера магнитный момент нуклонов), еще не являются однозначно опре-

деленными. Неоднозначности возникали из-за того, что их выражение для магнитного момента содержало функции Δ_1 и $\bar{\Delta}$ по отдельности; согласно предложенному ими рецепту, они заменили $\bar{\Delta}$ соответствующим регуляризованным выражением. Результат оказался зависящим от способа, каким M_1 стремится к бесконечности.

Аналогичные трудности возникают при рассмотрении поляризации вакуума и тензора натяжений $T_{\mu\nu}$ фермионного поля. Как у этого тензора, так и у тензора поляризации $K_{\mu\nu}$

$$\langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle = \int dx' K_{\mu\nu}(x-x') A_\nu(x')$$

дивергенции должны обращаться в нуль, и схема «формальной регуляризации» отдельных функцией распространения не гарантирует выполнения этих равенств. В обоих случаях построены удовлетворительные приемы формальной регуляризации, но они имеют характер псевдофизической теории. Взаимодействие с вспомогательными (нефизическими) квантами следует выводить из градиентно-инвариантного лагранжиана, который включает эти вспомогательные поля. Такой прием позволяет, например, избежать появления индивидуально регуляризованных электронных функций Грина

$$S^{(r)}(p) = \sum_i \eta_i \frac{i\gamma \cdot p + M_i}{p^2 + M_i^2}$$

во всех выражениях, в которые входят виртуальные электроно-позитронные пары. Регуляризуются (как целое) только произведения функций распространения, отвечающие замкнутым петлям, тогда как функции распространения, связанные с внешними линиями, не затрагиваются.

Эти факты заставляют поставить вопрос о реальном видоизменении лагранжиана, т. е. о модификации динамики поля. С этой точки зрения нет, конечно, необходимости переходить к пределу $M_i \rightarrow \infty$ для всех масс «нефизических квантов». Возникает вопрос об экспериментальном доказательстве отсутствия таких квантов с конечной массой. Этот вопрос недавно рассматривался Дреллом [28] и его сотрудниками в связи с предположившимися экспериментами в области больших энергий. Оказалось, что поправки на излучение типа сдвига Лэмба в атоме водорода или аномального значения g -фактора электрона замечательным образом нечувствительны к величине вспо-

могательных масс M_i , если только последние достаточно велики, например порядка нуклонной массы. Использование регуляризованной фотонной функции распространения

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + M_2^2}$$

приводит, например, к уменьшению сдвига Лэмба ΔE_L на величину

$$\left(\frac{m_e}{M_2}\right)^2 \ln\left(\frac{m_e}{M_2}\right) / \ln C,$$

где m_e — масса электрона и $\ln C = 7,6$. Аномальный электронный момент $(\alpha/2\pi)$ умножается на величину $2/3(m_e/M_2)^2$. При M_2 порядка нуклонной массы такое изменение совершенно ничтожно и находится далеко за пределами точности эксперимента.

В § 3 мы рассмотрим несколько подробнее поляризацию вакуума и собственную энергию электрона.

§ 3. СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОНА

Формально ковариантные методы пролили новый свет на свойства отдельной физической частицы, в том числе на электромагнитные и инерционные свойства. Уже изучение электромагнитных поправок порядка e^2 к одноэлектронным состояниям позволило получить много интересных сведений, часть из которых мы приведем в этом параграфе. Сравнительно недавно Челлен [29] и Швингер [30] более подробно рассмотрели свойства физического электрона — как собственного состояния взаимодействующих электрона (позитрона) и электромагнитного поля, не прибегая к теории возмущений.

Первые ковариантные вычисления собственной энергии электрона (в первом порядке по e^2) были выполнены Швингером [14] и Фейнманом [15]. Метод Швингера заключался в использовании ковариантного канонического преобразования, связывавшего электрон и поле излучения. Этот прием был хорошо известен и широко использовался в предшествующие годы, особенно в мезонной теории [31, 32], но большей частью в форме, не зависящей от времени теории возмущений. Швингер воспользовался вариантом уравнения Шредингера, предложенным Томонагой [13]:

$$\frac{\delta\Phi(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = H_{\text{int}}(x)\Phi(\sigma), \quad (3.1)$$

где σ — пространственно-подобная поверхность; $\delta/\delta\sigma(x)$ — вариация по σ вблизи от точки x . При помощи контактного преобразования $e^{iS(\sigma)}$ член H_{int} исключался и оставалось выражение

$$\frac{i}{2} [S(\sigma), H_{\text{int}}(x)], \quad (3.2)$$

содержавшее собственную энергию электрона в приближении c^2 . Используя ковариантный коммутатор и усреднение по вакууму, можно выделить из (3.2) одноэлектронную часть в виде $\delta m \bar{\psi} \psi$, где δm — формально инвариантный (не зависящий от σ), но расходящийся интеграл.

Подход Фейнмана был основан на построении функций Грина, описывавших распространение в пространстве и времени электронного полевого оператора $\psi(xt)$ в присутствии поля излучения. Характерной чертой этого подхода являлась замена запаздывающих функций распространения классической теории на так называемые «причинные» функции Грина S_F и D_F (для электронно-позитронного и электромагнитного полей соответственно). Напомним, что $S_F(x, t)$ и $D_F(x, t)$ подчиняются граничным условиям, требующим, чтобы при $t > 0$ оставались только положительные частоты, а при $t < 0$ — только отрицательные. То обстоятельство, что S_F и D_F выражают условие «причинности» в квантовой теории поля, подчеркивалось еще Штюкельбергом [47]; вопрос этот обсуждал также Фирц [33]. Впоследствии Дайсон показал, что все элементы S_{fi} матрицы рассеяния для системы взаимодействующих релятивистских полей можно выразить через причинные функции Грина для отдельных полей.

Граничные условия для причинной функции Грина учтены в определении

$$iS_{F\alpha\beta}(x, x') = \begin{cases} \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle & (t > t'), \\ -\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) | 0 \rangle & (t < t'), \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\psi(x)$ — оператор свободного электронного поля, а $|0\rangle$ — функция состояния свободного вакуума. При наличии взаимодействия с фотонным полем соотношение (3.3) определяет функцию Грина $G_{\alpha\beta}(x, x')$ физического электрона, если ψ и $\bar{\psi}$ — гейзенберговы операторы электронного поля, а $|0\rangle$ определяет состояние «физического» вакуума. Разложение по степеням взаимодействия выражает G через функции распространения

для голых частиц S_F и массовый оператор $M = e^2 M_1 + e^4 M_2 + \dots$:

$$G(x, x') = S_F(x - x') + \int \int S_F(x - x'') M(x'', y'') G_1(y'', x'). \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что $G(x, x')$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) G(x, x') + \int \{ e^2 M_1(x x'') + \dots \} G(x'', x') = -\delta(x - x').$$

Одноэлектронные матричные элементы $\langle 1 | \psi(x) | 0 \rangle$ должны при этом подчиняться соответствующему однородному уравнению. В структуре оператора M_1 проще разобраться в импульсном пространстве, где он выражается следующим образом:

$$e^2 M_1(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \gamma_\lambda S_F(p - k) \gamma_\lambda D_F(k), \quad (3.5)$$

или

$$e^2 M_1(p) = A + B(i\gamma \cdot p + m) + (i\gamma \cdot p + m)C(p^2)(i\gamma \cdot p + m). \quad (3.6)$$

Вследствие сингулярности S_F и D_F постоянные A и B бесконечны. Электромагнитная масса δm в силу соотношений $(i\gamma \cdot p + m)\psi(p) = 0$ определяется равенством $\delta m = A$. Регуляризованная фотонная функция распространения

$$D_F^{(\nu)}(x) = D_F(x) + \sum_i' \eta_i D_F(x; M_i) \quad (\sum_i' \eta_i = -1) \quad (3.7)$$

приводит к конечному выражению для

$$\delta m = -\frac{3\alpha}{2\pi} m \left[\sum_i' \eta_i \ln\left(\frac{M_i}{m}\right) + \text{const} \right]. \quad (3.8)$$

Введение единственного вспомогательного поля позволяет получить конечное выражение для δm , и даже при M_1 порядка массы нуклона мы находим, что $\delta m \ll m$.

Более внимательное изучение проблемы электромагнитной массы привело, однако, к затруднениям. Пайс и Эпштейн [34] показали, что конечное значение собственной массы, полученное в результате любого формально инвариантного обрезания, не может входить в энергию и импульс физической частицы, которые преобразуются как четырехмерный вектор. Причина заключается в отличии от нуля собственного натяжения S . Эта ситуация хорошо известна по классической проблеме собственной

энергии. (Пайсу принадлежит обзор [35], посвященный этим вопросам.) Для покоящегося электрона S является средним значением оператора

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int dx \left(\sum_{\mu=1}^4 T_{\mu\nu} - T_{44} \right) &= \frac{1}{3} \left(H - m \int \bar{\psi} \psi dx \right) = \\ &= \frac{i}{3} \left(H - m \frac{\partial H}{\partial m} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса, а H — гамильтониан системы электрон—фотон. Из выражения (3.8) нетрудно получить

$$S = \frac{1}{3} \left(\delta m - m \frac{\partial}{\partial m} \delta m \right) = \frac{\alpha}{2\pi} m. \quad (3.10)$$

Рорлих [36] и Вилларс [37] показали впоследствии, что S обратится в нуль, если «вспомогательным полям» $\phi_{\lambda}^{(1)}$, входящим в функцию распространения фотона, придать физическую реальность и, в частности, включить их тензор энергии-импульса в $T_{\mu\nu}$. Это приводит к замене (3.9) оператором

$$\frac{1}{3} \left(H - m \frac{\partial H}{\partial m} - \sum_i' M_i \frac{\partial H}{\partial M_i} \right)$$

и к следующему выражению для S :

$$S = \frac{1}{3} \left(1 - m \frac{\partial}{\partial m} - \sum_i' M_i \frac{\partial}{\partial M_i} \right) \delta m,$$

которое, как нетрудно показать, обращается в нуль при использовании (3.8). (Можно показать, что этот результат не зависит от приближения по e^2 , в котором вычислено δm .) Этот факт интересен тем, что он указывает на неудовлетворительность отождествления бесконечной собственной энергии с инвариантной добавкой к массе. «Перенормировка» бесконечностей еще не является гарантией непротиворечивости теории.

§ 4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

В предыдущем параграфе уже упоминалась проблема поляризации вакуума в теории позитронов. Мы лишь кратко обрисует сложившуюся здесь ситуацию с точки зрения ковариантных методов, созданных после 1946 г. Эти методы позволили пол-

ностью обосновать конечный результат для эффекта поляризации точечного заряда, полученный Улингом [38] и Паули и Роузом [39], а также нелинейные поправки к уравнениям Максвелла, найденные Гейзенбергом и Эйлером [40] и Вайскопфом [41] старым вычитательным методом Гейзенберга.

В новом подходе центральную роль играет инвариантная функция Грина $G(x; x')$ для электронно-позитронного поля

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = \begin{cases} -i \langle 0 | \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(x') | 0 \rangle & (t > t'), \\ +i \langle 0 | \bar{\psi}_{\beta}(x') \psi_{\alpha}(x) | 0 \rangle & (t < t'), \end{cases} \quad (3.11)$$

где $|0\rangle$ — вектор состояния вакуума. При наличии внешнего классического поля $A_{\mu}^{\text{ext}}(x)$ функция G удовлетворяет неоднородному уравнению Дирака

$$\left\{ \gamma_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ie A_{\mu}(x) \right) + m \right\} G(x, x') = -\delta(x - x') \quad (3.12)$$

и при $A_{\mu} \rightarrow 0$ переходит в обычную функцию Фейнмана $S_F(x - x')$.

Из определения G следует, что среднее по вакууму от симметричного оператора тока

$$j_{\mu}(x) = -\frac{ie}{2} (\gamma_{\mu})_{\beta\alpha} [\psi_{\alpha}(x)_1 \bar{\psi}_{\beta}(x)] \quad (3.13)$$

равно

$$\langle 0 | j_{\mu}(x) | 0 \rangle = e \text{Spur} (\gamma_{\mu} G(x, x')) |_{x'=x}, \quad (3.14)$$

при условии, что предельный переход $x' \rightarrow x$ осуществляется симметрично по двум времениподобным направлениям. Вакуумное среднее $\langle 0 | j_{\mu} | 0 \rangle$ является нелинейной функцией A^{ext} ; линейные члены описывают поляризуемость вакуума, а члены высших порядков дают нелинейные поправки к уравнениям электромагнитного поля. Из интегрального уравнения, которому удовлетворяет G

$$G(x, x') = S_F(x - x') - ie \int dx'' S_F(x - x'') (\gamma \cdot A(x'')) G(x'', x'), \quad (3.15)$$

следует, что линейная по A часть вакуумного среднего от тока равна

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_{\mu}(x) | 0 \rangle &= -ie^2 \int dx'' \text{Spur} \{ \gamma_{\mu} S_F(x - x'') \gamma_{\lambda} S_F(x'' - x') \}_{x'=x} \times \\ &\times A_{\lambda}(x'') = \int dx'' K_{\mu\lambda}(x'') A_{\lambda}(x''). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Легко видеть, что полученное выражение для $K_{\mu\nu}$ не удовлетворяет условию $\partial K_{\mu\nu}/\partial x_\nu = 0$, необходимому для градиентной инвариантности тока $\langle 0 | j | 0 \rangle$. Дивергенция $K_{\mu\nu}$ оказывается равной

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -8ie^2 \frac{\partial \Delta_F(x)}{\partial x_\mu} \delta(x). \quad (3.17)$$

Выражение справа является неопределенным, поскольку вблизи от точки $x = 0$

$$\frac{\partial \Delta_F(x)}{\partial x_\mu} = -\frac{x_\mu}{2\pi} \left\{ \frac{d}{d\lambda} - \frac{m^2}{4} \right\} \left(\delta(\lambda) + \frac{1}{i\pi\lambda} \right) + \dots, \quad (3.18)$$

где $\lambda = -\Sigma x_\mu^2 = -x^2 + c^2 t^2$. Таким образом, правая часть (3.17) отлична от нуля. Однако формальная градиентная инвариантность теории позволяет надеяться, что при соответствующем подборе непротиворечивого предельного процесса возникающие неопределенности можно разрешить. Умедзава и его сотрудники в 1948 г. [42] и Райский в 1949 г. [43] первыми обнаружили, что вакуумный ток заряженных бозонов с массой m приводит к выражению для $\partial K_{\mu\nu}/\partial x_\nu$, которое отличается от соответствующего выражения для фермионов (3.17) множителем $-\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что для полного тензора поляризации

$$\sum_F K_{\mu\nu}^F + \sum_B K_{\mu\nu}^B,$$

отвечающего набору фермионных и бозонных пар, дивергенция равна

$$4ic^2 \delta(x) \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Delta_F(x, M_i)}{\partial x_\mu} - 2 \sum_{j=1}^M \frac{\partial \Delta_F(x, m_j)}{\partial x_\mu} \right\}. \quad (3.19)$$

Это выражение тождественно равно нулю в силу (3.18), если выполняются надлежащие соотношения между числом бозонных (N) и фермионных (M) полей. Эти соотношения таковы:

$$N = 2n, \quad \sum_1^N M_i^2 = 2 \sum_1^M m_j^2. \quad (3.20)$$

Умедзава и Кавабе [44] обобщили затем этот результат, включив в рассмотрение векторные мезоны. Сейчас эти соображения имеют только исторический интерес, но они замечательны как первая попытка добиться непротиворечивости лишь формализ-

ма, охватывающего все поля. Нет оснований думать, что массы бозонов и фермионов действительно связаны соотношением (3.20); кроме того, не принимались во внимание поправки на излучение для тензоров $K_{\mu\nu}$, которые уже не связаны аналогичными простыми соотношениями.

Насколько мы помним, Паули был занят в основном поисками модификаций существующей теории. Он выражал мнение, что коммутаторы полей и функции Грина для уравнений поля должны быть несингулярными в будущей теории, и чтобы достичь этого, необходимо в конечном счете отказаться от концепции точно определенной массы, связанной с данным полем. В качестве временной меры он предлагал использовать формальную регуляризацию в такой форме, чтобы придать математический смысл тензору $K_{\mu\nu}$.

Из (3.18) следует, что подстановка

$$K_{\mu\nu}(x; m) \rightarrow \tilde{K}_{\mu\nu}(x) = \int_0^\infty d\mu^2 \varrho(\mu^2) K_{\mu\nu}(x; \mu) \quad (3.21)$$

обеспечит градиентную инвариантность $\tilde{K}_{\mu\nu}$, если будут выполнены условия

$$\int d\mu^2 \varrho(\mu^2) = 0, \quad \int d\mu^2 \mu^2 \varrho(\mu^2) = 0. \quad (3.22)$$

Представляет интерес вопрос, в какой мере физически наблюдаемые слагаемые поляризованного тока затрагиваются этой «регуляризацией». Компонента Фурье тензора $\tilde{K}_{\mu\nu}$ строго определяется и, как следует из соображений градиентной инвариантности и соображений размерности, имеет вид

$$\tilde{K}_{\mu\nu}(p) = (p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu}) \int d\mu^2 \varrho(\mu^2) K\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right). \quad (3.23)$$

Поскольку выражение

$$(p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu}) A_\nu(p) = -J_\mu^{\text{ext}}(p)$$

представляет собой внешний ток, интеграл

$$\tilde{K} = \int d\mu^2 \varrho(\mu^2) K(0)$$

определяет часть $\langle 0 | j_\mu | 0 \rangle$, пропорциональную J_μ^{ext} , и тем самым перенормировку заряда. Условия регуляризации (3.22) обращают эту перенормировку в нуль. Остающиеся члены в прин-

ципе можно измерить; поскольку они содержат только четные степени p^2/μ^2 , введение весовой функции

$$\varrho(\mu^2) = \delta(\mu^2 - m_e^2) + \varrho'(\mu^2)$$

не затрагивает физических результатов при условии, что ϱ' равно нулю всюду вне области $\mu^2 \gg m_e^2$. Полученный вывод полностью согласуется с результатами Улинга [38] и Паули и Роуза [39].

Здесь уместно сказать несколько слов о собственной энергии фотона. Фактическое вычисление $K_{\mu\nu}$ из соотношения (3.16) приводит к следующему выражению:

$$K_{\mu\nu}(p) = (p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu}) K \left(\frac{p^2}{m_e^2} \right) + I m_e^2 \delta_{\mu\nu},$$

где I — неоднозначная постоянная, возникшая из неопределенности в (3.19); условие градиентной инвариантности обращает ее в нуль. В выражении для $\tilde{K}_{\mu\nu}$ она приводит к появлению дополнительного члена

$$I \delta_{\mu\nu} \int d\mu^2 \mu^2 \varrho(\mu^2) = \kappa^2 \delta_{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Более сильное из условий (3.22) тождественно обращает этот член в нуль. Если этот член не исключать, то видоизменяется распространение электромагнитных волн в свободном пространстве. Действительно, из равенства

$$(p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu}) A_\nu(p) = -\langle 0 | j_\mu(p) | 0 \rangle,$$

и из (3.24) следует, что A_μ удовлетворяет уравнению

$$\{(p_\mu p_\nu - p^2 \delta_{\mu\nu})(1 + \tilde{K}) + \kappa^2 \delta_{\mu\nu}\} A_\nu = 0. \quad (3.25)$$

Вопреки градиентной инвариантности (классическому) электромагнитному полю приписан массовый член. В квантованном электромагнитном поле этот член ведет себя как собственная энергия (или масса) фотона. Условие регуляризации (3.22) обеспечивает $\kappa \equiv 0$; в отсутствие регуляризации получается неоднозначный результат, зависящий от метода вычисления. Пример такой ситуации можно найти в работе Вентцеля [45].

Как математический прием, позволяющий обеспечить однозначность результатов для наблюдаемых величин, изложенный метод уступает более изящному методу, развитому Швингером [46], который ввел для функции $G(x; x')$ интегральное пред-

ставление

$$\begin{aligned} G(x, x') &= - \left(x \left| \frac{1}{i\gamma\pi + m - i\varepsilon} \right| x' \right) = \\ &= -i \int_0^\infty ds (x | e^{-is(i\gamma\pi + m)} | x'), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где π — оператор $p - eA$, написанный здесь в x -представлении

$$(x | \pi_\mu | x') = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA_\mu(x) \right) \delta(x - x').$$

Из соотношений (3.14) и

$$-ie\gamma_\mu \delta A_\mu(x) = \delta(i\gamma\pi + m)$$

следует, что поляризационный ток можно найти вариацией интеграла действия

$$\begin{aligned} \int dx \delta A_\mu(x) \langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle &= i \int dx \text{Spur}(\delta(i\gamma\pi + m) G) = \\ &= i\delta \int \frac{ds}{s} \int dx \text{Spur}(x | e^{-is(i\gamma\pi + m)} | x) = \delta \int dx \mathcal{L}^{(1)}(x) = \delta W^{(1)}. \end{aligned}$$

Плотность лагранжиана $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ должна быть градиентно-инвариантной. Ее можно представить в виде интеграла по инвариантному параметру

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = \int_0^\infty \frac{ds}{s} \Omega(x; s).$$

Все бесконечности связаны с расходимостью этого интеграла на нижнем пределе; функция $\Omega(x, s)$ конечна и, будучи градиентно-инвариантной, представляется через напряженности поля $F_{\mu\nu}$, а не через потенциалы A_μ . При постоянных (или медленно меняющихся) полях $\mathcal{L}^{(1)}$ можно вычислить в замкнутом виде. В этом случае излагаемый метод в точности воспроизводит давнишние результаты Гейзенберга — Эйлера и Вайскопфа, но позволяет выделить в явном виде расходящийся член в $\mathcal{L}^{(1)}$, пропорциональный лагранжиану свободного поля $\mathcal{L}^{(0)} = 1/2 (E^2 - B^2)$:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \left(\frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} \right) \mathcal{L}^{(0)} + \text{Конечные члены}.$$

Первый член исключается перенормировкой, т. е. изменением *масштаба* для обоих полей и электрического заряда. Для быстро меняющихся полей, например кулонова поля ядра, $W^{(1)}$ можно найти по теории возмущений; билинейные по полям члены имеют при этом вид

$$W = \frac{1}{2} \int \int dx dx' A_\mu(x) K_{\mu\nu}(x-x') A_\nu(x')$$

В методе Швингера $K_{\mu\nu}$ представляется в виде интеграла Фурье по s :

$$K_{\mu\nu}(x) = \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \mathcal{K}_{\mu\nu}(x; s),$$

Чтобы сравнить этот результат с результатом применения регуляризации, запишем регуляризованный тензор $\tilde{K}_{\mu\nu}$ Паули в виде

$$\tilde{K}_{\mu\nu}(x) = \int_0^\infty ds R(s) \mathcal{K}_{\mu\nu}(x; s);$$

условия регуляризаии требуют, чтобы

$$R(0) = \left. \frac{dR}{ds} \right|_{s=0} = 0.$$

Мы снова убеждаемся, что в методе Швингера все бесконечности возникают из-за расходимости интеграла по s в окончательных выражениях при $s = 0$. Подынтегральные выражения всегда корректно определены, конечны и градиентно-инвариантны.

Изящное решение проблемы градиентной инвариантности, предложенное Швингером, в значительной мере охладило надежды, что исследование проблемы расходимостей в квантовой электродинамике прольет свет на вопрос о том, как формулировать внутренне непротиворечивую конечную теорию.

Сейчас стало очевидным, что, приняв «перенормировочную философию», можно однозначно извлекать конечные результаты из аппарата теории. Остаются лишь упрямые вопросы о сходимости перенормированных рядов теории возмущений и о значениях перенормировочных постоянных. Последнее слово здесь, по всей вероятности, еще не сказано.

§ 5. ФОРМФАКТОРЫ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Качественный успех нерелятивистской процедуры обрезания (например, в мезон-нуклонном взаимодействии) хорошо известен. Неоднократно предпринимались попытки найти релятивистское обобщение метода обрезания. Для иллюстрации возникающих здесь трудностей мы введем локальное взаимодействие типа $g \int dx \varphi(x) \varrho(x)$, где φ — бозонное поле, а $\varrho(x)$ — некоторый источник; это выражение описывает поглощение и испускание одного кванта в точке x . Переход к нелокальному взаимодействию можно осуществить, например, следующим образом:

$$g \int \varphi'(x) \varrho(x) dx, \\ \varphi'(xt) \equiv \int dx' dt' F(x - x', t - t') \varphi(x', t'). \quad (4.1)$$

Формфактор F содержит характерную длину r_0 ; его компонента Фурье $g(k)$ может, например, иметь вид

$$g(k) = \frac{r_0^{-4}}{(k^2)^2 + r_0^{-4}}. \quad (4.2)$$

В 1948 г. Макманус [47] и Пайерлс построили классическую электродинамику со взаимодействием типа (4.1). Уравнения движения электрона становятся интегро-дифференциальными и при малых ускорениях ($d/dt \ll c/r_0$) допускают разложение по степеням r_0 . Собственные силы приводят к возникновению конечной электромагнитной массы и обычному члену с радиационным затуханием; внешние силы определяются средними значениями внешнего поля со структурным фактором F .

Нас интересует сейчас, в какой мере при этом сохраняется причинное описание физических систем, а также насколько возможно ввести упомянутые результаты в квантовую теорию. Что касается первого вопроса, то речь может идти только о макроскопической причинности. Чтобы удовлетворить этому требованию, необходимо предположить конечный «радиус» формфактора. Такие функции были успешно построены Макманусом и затем в квантовой теории Блохом [48] и Шреттьеном и Пайерлсом [49]. Инвариантные формфакторы $F(x)$ должны подчиняться общему требованию — они не могут быть функциями типа «функций распространения», или, другими словами, не могут переносить какую-либо часть волнового пакета $\varphi(x, t)$ на макро-

скопическое расстояние. Функции распространения можно охарактеризовать как мероморфные функции комплексного переменного k — они пропорциональны $1/(k^2 + M_i^2)$ и имеют полюса при значениях $-k^2$, равных квадратам масс квантов M_i^2 , распространение которых они описывают. В качестве формфакторов, как показали Шретъен и Пайерлс, допустимы функции с полюсами при комплексных $-k^2$, например функция $g(k)$, определенная соотношением (4.2), а также целые функции или комбинации тех и других. Более общий класс формфакторов возникает в квантовой теории, где плотность заряда ϱ имеет вид $\bar{\psi}(x)\psi(x)$, и $\varphi(x)\varrho(x)$ можно заменить более общим выражением

$$\int d^4y d^4y' F(x, y, y') \varphi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y'). \quad (4.3)$$

Такого рода трехточечные формфакторы рассматривались Блохом, а также Кристенсенем и Мёллером [50].

Введение таких формфакторов в квантовую теорию поля ставит нетривиальный вопрос об определении операторов поля. Для его решения можно, в частности, обратиться к формализму, развитому Янгом и Фельдманом [51], а также Челленом [52]; этот формализм основан на непосредственном применении операторных уравнений движения, т. е. на использовании операторов поля в представлении Гейзенберга. Уравнения поля записываются как интегральные уравнения с граничными условиями, наложенными при $t = \pm \infty$. Например, уравнение

$$(\square^2 - \mu^2) \varphi(x) = -g\varrho(x) = -g \int dy dy' F(xy y') \bar{\psi}(y) \psi(y') \quad (4.4)$$

можно переписать двумя способами:

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{in}}(x) - \int_{-\infty}^t dx' \Delta_{\text{ret}}(x - x') \varrho(x'), \quad (4.5a)$$

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{out}}(x) - \int_t^{\infty} dx' \Delta_{\text{av}}(x - x') \varrho(x'). \quad (4.5b)$$

Такой же прием можно применить к уравнениям для полей $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. Сходящиеся и расходящиеся поля удовлетворяют однородным уравнениям поля и правилам коммутации (антикоммутации) для свободных полей. Систему уравнений (4.5a) и (4.5b) (и соответствующих уравнений для полей ψ и $\bar{\psi}$) можно решать методом итераций, и связь между сходящимися и расходящимися-

ся полями последовательно устанавливается в итерации любого порядка. Поскольку функции ψ_{in} и ψ_{out} представляют собой асимптотические выражения для поля при $t = \pm \infty$, их можно использовать для определения начальных и конечных состояний в процессе рассеяния

$$\Psi_i = \varphi_{in}^{(-)}(k_1) \dots \varphi_{in}^{(-)}(p_1) \dots |0\rangle,$$

$$\Psi_f = \varphi_{out}^{(-)}(k'_1) \dots \varphi_{out}^{(-)}(p'_1) \dots |0\rangle.$$

Матрица рассеяния S_{fi} выражается через эти состояния соотношением

$$S_{fi} = \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle \quad (4.6)$$

и вычисляется обычными методами.

Описанная методика с тем же успехом переносится и на нелокальные взаимодействия при условии, что формфактор имеет конечный «радиус» в указанном выше смысле. Основной вопрос заключается в том, оказывается ли построенная таким образом теория действительно конечной, т. е. свободной от расходимостей. Этот вопрос еще не получил окончательного ответа. Укажем, в частности, что собственные энергии электрона и нуклона в первом порядке по $e^2(g^2)$ конечны, но в высших порядках конечность автоматически не сохраняется. Дополнительные правила, введенные Блохом и обеспечивающие конечность собственной энергии электрона во всех порядках, нарушают, как указал Паули [53], условие макроскопической причинности.

В 1953 г. Паули исследовал вопрос об эквивалентности теории с нелокальным взаимодействием гамильтоновой теории, т. е. вопрос о существовании канонических переменных. Паули показал сначала в явном виде, как в теории с нелокальным взаимодействием строятся интегралы движения, соответствующие полной энергии, полному импульсу и полному заряду. Эти интегралы содержат переменные поля, взятые в различные моменты времени, и при обычной схеме квантования это обстоятельство представляет принципиальную трудность. Здесь необходимо также указать на резкое различие между «нормальными» и «патологическими» формфакторами. К первому классу относятся формфакторы, определенные требованием, чтобы уравнения поля обладали тем же набором решений, что и в отсутствие взаимодействия. В этом случае для классических уравнений поля канонические переменные существуют. Ситуация для квантовых полей осложняется необходимостью соблюдать порядок

операторов, и наличие канонических переменных доказано только в первом порядке по взаимодействию.

Упомянем, наконец, что даже при введении нормальных формфакторов возникает проблема градиентной инвариантности, если использовать их в электродинамике. Хотя градиентную инвариантность можно обеспечить, вводя в формфактор надлежащие поправки (например, помножая двухточечный формфактор $F(x - x')$ на $\exp[ie \int_x^{x'} d\xi A(s)]$, можно задать

вопрос, соответствуют ли эти усложнения всему духу подхода. Как показали в упоминавшейся выше работе Пайс и Уленбек, градиентную инвариантность в среднем можно сохранить и без введения дополнительных членов; может выполняться более слабое условие

$$\int_D \frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} d^4x = 0$$

(D — небольшая пространственно-временная область, охватывающая объем, где сосредоточен формфактор F).

Мы добавим в заключение одно замечание, относящееся к «нормальным» и иным формфакторам, которое позволит нам перейти к последующим параграфам. Пайс и Уленбек рассматривали лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varphi K(-\square^2) \varphi + q(x) \varphi.$$

В этом случае решающую роль играют число и положение точек M_i^2 , где функция $K(k^2) = 0$. Если функция $K(k^2)$ имеет лишь один нуль в точке M_0^2 , то

$$K = (-\square^2 + M_0^2) e^{f(-\square^2)},$$

где f — целая функция. Тогда можно произвести замену

$$\varphi = e^{-f(-\square^2)/2} \varphi' = \int d^4x' F(x - x') \varphi'(x')$$

и, таким образом, лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \varphi' (-\square^2 + M_0^2) \varphi' + q(x) \int dx' F(x - x') \varphi'$$

описывает нелокальное взаимодействие. С другой стороны, если уравнение $K = 0$ имеет несколько корней M_i , то мы приходим к уравнению с многими массами, упоминавшемуся в § 2.

Заметим, что подстановкой

$$\psi = \prod_{i>0} \left(\frac{1}{M_i^2 - \square^2} \right)^{1/2} e^{-f(-\square^2)/2} \psi' \quad (4.7)$$

можно формально получить уравнение для ψ' с одной массой. Эта подстановка приводит к появлению «патологического» формфактора. В действительности этот подход соответствует исключению дополнительных степеней свободы в ψ (а именно квантов с массой M_i), что эквивалентно наложению дополнительных граничных условий на систему в промежутке между начальным и конечным состояниями. В результате оказывается, что «усеченная» система не может быть записана в гамильтоновой форме. Вопрос об использовании подобных усеченных систем недавно рассматривали Боголюбов [25], Медведев и Поливанов. Привлекательность такого подхода заключается, естественно, в эффективном обеспечении сходимости — исключаемые кванты частично имеют отрицательную энергию и соответствующие знаменатели в (4.7) служат «регуляризаторами». Особая ситуация возникает в том случае, когда корни M_i^2 уравнения $K(-\square^2) = 0$ являются кратными или все лежат в комплексной плоскости и попарно сопряжены. К этому случаю мы возвратимся в следующем параграфе.

§ 6. ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА

Понятие индефинитной метрики. Одна из наиболее характерных особенностей нерелятивистской квантовой теории заключается в описании квантовой кинематики движением единичного вектора ψ в пространстве с унитарной метрикой (гильбертовом пространстве). При измерении какой-либо величины вводится система координат, образованная собственными векторами $|n\rangle$ соответствующего оператора Q , и волновая функция ψ представляется в виде разложения $\psi = \sum_n a_n |n\rangle$. Унитарность метрики обеспечивает выполнение равенства $(\psi, \psi) = \sum_n |a_n|^2$ и позволяет представить среднее значение Q величины Q в виде суммы $\bar{Q} = \sum_n |a_n|^2 Q_n$. На этих соотношениях основана возможность последовательной вероятностной интерпретации результатов эксперимента.

Эта схема принята также в релятивистской квантовой теории. Тесная связь унитарной метрики с проблемой расходимостей приводит время от времени к попыткам видоизменения принятой схемы. Это не означает отказа от обычной интерпретации. В таких случаях физическое гильбертово пространство H_1 вкладывается в более широкое пространство $H = H_1 + H_2$, в котором оно образует подпространство с унитарной метрикой. Расширение пространства скажется на динамике, если H_1 не будет инвариантным подпространством, в этом случае функция ψ_1 (проекция ψ на H_1) не должна сохранять свою норму.

Предлагались различные способы обойти эту трудность. Гейзенберг [54] пытался показать, что при надлежащем выборе свойств состояний, принадлежащих H_2 , можно добиться по крайней мере того, чтобы из асимптотического соотношения

$$\psi(t = -\infty) \in H_1$$

следовало бы

$$\psi(t = +\infty) \in H_1,$$

что гарантировало бы унитарность матрицы рассеяния для физических состояний.

Другое предложение принадлежит Боголюбову [25], который указал, что матрица реакции K всегда имеет эрмитову подматрицу K_1 , принадлежащую H_1 . Согласно принятой им *ad hoc* схеме, следует вычислить K в H , выделить K_1 из K и определить унитарную матрицу S_1 обычным соотношением

$$S_1 = \frac{1 + i\pi K_1}{1 - i\pi K_1}.$$

Понятие индефинитной метрики впервые ввел в 1942 г. Дирак [55], чтобы устранить бесконечность собственной энергии электрона. Его метод легко демонстрируется на примере гармонического осциллятора

$$H = \frac{\omega}{2} (p^2 + q^2), \quad i[p, q] = 1. \quad (5.1)$$

Обычный прием заключается в использовании подстановки

$$a = \frac{p - iq}{\sqrt{2}}, \quad a^* = \frac{p + iq}{\sqrt{2}}, \quad (5.2)$$

откуда получается

$$H = \frac{\omega}{2} (a^*a + aa^*), \quad [a, a^*] = 1. \quad (5.3)$$

Собственные состояния $|m\rangle$ строятся путем определения основного состояния $|0\rangle$ соотношением $a|0\rangle=0$ и возбужденных состояний $|n\rangle$ соотношениями

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2} (a^*)^n |0\rangle.$$

Определив сопряженные состояния $\langle n|$ с помощью условия $\langle 0|0\rangle=1$ и $\langle an|m\rangle=\langle n|a^*m\rangle$, можно ввести скалярное произведение $\langle n|m\rangle$, которое, согласно правилу коммутации (5.3), равно δ_{nm} . Таким образом можно построить в явном виде матричное представление операторов a, a^* , удовлетворяющих равенству (5.3):

$$\begin{aligned} a^+|n\rangle &= (n+1)^{1/2}|n+1\rangle, & H|n\rangle &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega|n\rangle, \\ a|n\rangle &= n^{1/2}|n-1\rangle, \end{aligned}$$

Иного характера представление мы получаем из требования $a^+|0\rangle=0$. Обозначим в этом случае $a^+=b$ и $a=b^*$, откуда $[bb^+]=-1$, $H=(\omega/2)(bb^++b^*b)$. Рассуждая как прежде, получаем, в частности,

$$\langle nb|m\rangle=\langle n|b^*m\rangle,$$

и скалярное произведение $\langle n|m\rangle$ оказывается равным $(-1)^n\delta_{nm}$. Мы приходим, таким образом, к новому матричному представлению операторов p и q :

$$\begin{aligned} b^+|n\rangle &= (n+1)^{1/2}|n+1\rangle, & H|n\rangle &= -\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega|n\rangle, \\ b|n\rangle &= -n^{1/2}|n-1\rangle, \end{aligned}$$

в котором метрика индефинитна.

Дирак ввел индефинитную метрику такого рода, заменив оператор поглощения

$$a_k e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t)} \text{ на } \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t)} + b_{-k} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t)})$$

(при такой замене коммутатор $[A(\mathbf{x}), A(\mathbf{x}')]$ не меняется). Напомним, что λ -процесс приводил к инвариантному выражению для собственной энергии электрона, которое все же расходилось при $\lambda \rightarrow 0$ как λ^{-2} . После введения индефинитной метрики эта остаточная собственная энергия тождественно обращалась в нуль. Теперь этот вывод представляет только исторический интерес, поскольку, как показал в 1943 г. Паули, в теории дырок эта схема не проходит ни сама по себе, ни в соединении с λ -процессом.

В работе Пайса и Уленбека индефинитная метрика вводилась иным путем. Поле со спектром масс описывалось гамильтонианом, эквивалентным гамильтониану для системы осцилляторов с энергиями, равными

$$\pm \sum_k \frac{\omega_k}{2} (p_k^2 + q_k^2).$$

Используя вторую схему квантования для осцилляторов с отрицательной энергией, можно было сохранить положительными собственные значения поля. Тогда $|0\rangle$ действительно «основное» состояние, но достигалось это за счет введения переходов с отрицательной вероятностью в состояния с нечетным числом b -квантов.

Частный случай: поле с двумя массами. Трудность, связанную с существованием состояний с отрицательной вероятностью перехода, можно обойти, если потребовать, чтобы подобные состояния появлялись лишь в виртуальных процессах. В этом случае можно построить унитарную S -матрицу. Основываясь на анализе модели Ли, Гейзенберг [56] указал, что подобную схему можно построить, вводя вырожденный массовый дублет (слияние масс нормальной V -частицы и «призрачного» состояния). Впоследствии Паули [57] рассмотрел возможность использования для этой цели поля с двумя комплексно-сопряженными массами. Мы кратко остановимся на этом случае, чтобы показать, на каких соображениях основывалась такая возможность. Как показали Пайс и Уленбек [22], реальное поле φ , удовлетворяющее уравнению

$$(\square^2 - \mu_1^2)(\square^2 - \mu_2^2)\varphi(x) = \varrho(x), \quad (5.4)$$

динамически эквивалентно комбинации двух полей φ_a и φ_b с осцилляторными гамильтонианами

$$H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k \Omega_k b_k^\dagger b_k + \int \varrho \varphi dx, \quad (5.5)$$

где

$$\omega_k = (\mu_1^2 + k^2)^{1/2}, \quad \Omega_k = (\mu_2^2 + k^2)^{1/2}.$$

Поле $\varphi(x)$ (при $\mu_2 > \mu_1$) определяется разложением

$$\varphi = (\mu_2^2 - \mu_1^2)^{-1/2} \sum_k e^{ik \cdot x} \left\{ \left(\frac{1}{2V\omega_k} \right)^{1/2} (q_k + q_k^\dagger) - \left(\frac{1}{2V\Omega_k} \right)^{1/2} (b_k + b_{-k}^\dagger) \right\}. \quad (5.6)$$

Отрицательный знак перед вторым членом заставляет ввести индефинитную метрику для состояний второго осциллятора: $[bb^*] = -1$. В пределе, при

$$\mu_2^2 - \mu_1^2 = \Delta \rightarrow 0$$

матричный элемент φ , взятый между вакуумом и состояниями $a^+|0\rangle$ и $b^+|0\rangle$, обращается в бесконечность [это видно из (5.6)]. Это заставляет прибегнуть к другому представлению.

Определим операторы A_k и B_k

$$\sqrt{2}A_k = \left(\frac{\omega_k}{\varepsilon_k}\right)^{1/2}(a_k - b_k), \quad \sqrt{2}B_k = \left(\frac{\varepsilon_k}{\omega_k}\right)^{1/2}(a_k + b_k)$$

($\varepsilon_k = \Omega_k - \omega_k$) и введем их в φ и H . Тогда предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т. е. при $\Delta \rightarrow 0$) приведет соответственно к выражениям

$$H \rightarrow \sum \omega_k \left(A_k^\dagger B_k + B_k^\dagger A_k - \frac{1}{2} B_k^\dagger B_k \right) + \int \varphi dx \quad (5.7)$$

и

$$\varphi = \sum_k e^{ik \cdot x} \left(\frac{1}{2V\omega_k^2} \right)^{1/2} (A_k + A_{-k}^\dagger) + \frac{1}{4} (B_k + B_{-k}^\dagger). \quad (5.8)$$

Но обращаются в нуль коммутаторы

$$[A_k, B_k^\dagger] = [B_k, A_k^\dagger] = 1.$$

В результате получим для свободного гамильтониана H^0 два типа одночастичных состояний:

а) «нормальное» состояние $B_k^\dagger|0\rangle = \psi_B$, удовлетворяющее уравнению

$$H^0\psi_B = \omega\psi_B \langle \psi_B | \psi_B \rangle = 0;$$

б) «дипольное» состояние $A_k^\dagger|0\rangle = \psi_A$. Оно вообще не является собственным состоянием H^0 и удовлетворяет уравнению

$$H^0\psi_A = \omega\psi_A - \frac{1}{2}\omega\psi_B. \quad (5.9)$$

Его норма также равна нулю, но оно не ортогонально нормальному состоянию: $\langle \psi_B | \psi_A \rangle = 1$. Гейзенберг систематически использует затем этот дипольный предел. Вследствие (5.9) матричные элементы $\varphi(x, t)$ для состояний ψ_A патологически зависят от времени

$$\langle \psi_A | \varphi(x, t) | 0 \rangle \sim e^{-i\omega t} (1 - 2i\omega t).$$

Гейзенберг указывает, что благодаря этой зависимости все элементы S -матрицы между нормальными и дипольными состояниями равны нулю; следовательно, подматрица S -матрицы, связывающая только нормальные состояния, унитарна. В то же время мы получаем менее сингулярную функцию Грина $(k^2 + \mu^2)^{-2}$ в пределе при $\Delta \rightarrow 0$.

Модель Ли. Эта модель [58] полностью «разрешимой» теории поля сыграла важную роль в развитии идей, связанных с использованием индефинитной метрики благодаря поразительному результату, полученному Паули и Челленом [59] при изучении ее математической структуры. В своей первой работе, посвященной этой модели (в которой взаимодействие между «нуклонами» N и V осуществляется через легкий бозон θ , посредством превращений $V \xleftrightarrow{\quad} N + \theta$; реакции $N \xleftrightarrow{\quad} V + \theta$ запрещены), Ли уже привел соотношение между перенормированной и неперенормированной постоянными связи g и g_0 :

$$g^2 = \frac{g_0^2}{1 + g_0^2 C},$$

где C — расходящийся интеграл $(2V)^{-1} \sum_k \omega_k^{-3}$. Отсюда следует, что $g = 0$ при любом конечном g_0 . Поэтому Паули и Челлен ввели нуклонный формфактор $f(k)$, который превращал C в конечную величину $C = g_c^{-2}$, откуда

$$g^2 = \frac{g_0^2 g_c^2}{g_0^2 + g_c^2}.$$

Заметим, что $g < g_c$ при положительных g_0^2 . Паули и Челлен, а затем Гейзенберг, рассмотрели случай, когда g^2 положительно, но больше g_c^2 , к которому приводит любое конечное значение g^2 в пределе точечного взаимодействия. В этом случае $g_0^2 < 0$ и гамильтониан, следовательно, перестает быть эрмитовым. Это противоречие можно устранить, если ввести индефинитную метрику, приписав норму $(-1)^n$ состоянию с n голыми V -частицами. При этом гамильтониан по крайней мере остается самосопряженным. Как хорошо известно, при $g^2 > g_c^2$ в уравнении для физической («одетой») V -частицы появляется второй дискретный корень, норма этого «призрачного» состояния оказывается отрицательной. Процесс рассеяния

$$V + \theta \rightarrow V_g + \theta'$$

осуществляется с отрицательной вероятностью, и S -матрица не унитарна. Единственное исключение возникает в дипольном пределе, когда массы физической и «призрачной» частиц совпадают. Эта ситуация кратко обрисована в предыдущем параграфе.

Вопрос этот может иметь не только академический интерес, поскольку в обычных теориях поля конечность перенормированного взаимодействия, по-видимому, также должна приводить к обращению в нуль эффективной постоянной связи, и предположение о конечном (экспериментальном) ее значении может оказаться в противоречии с исходными уравнениями поля. Челлен [60] и Ландау [61] особенно подчеркивали эту сторону вопроса.

Нелинейная теория Гейзенберга [62]. Недавняя работа Гейзенберга представляет собой наиболее радикальную попытку разрубить узел, завязавшийся вокруг проблемы расходимостей и непротиворечивости теории. С его точки зрения, метод перенормировок следует полностью отбросить. Если теория (после последовательной перенормировки) в действительности является конечной, то почему не рассмотреть сразу возможную структуру перенормированной теории и не представить ее в заведомо конечной форме? Речь, очевидно, идет о том, какую систему уравнений следует считать «основной». Швингер, например, сформулировал полностью перенормированную квантовую теорию поля как систему связанных интегральных уравнений для бозонной и фермионной функций Грина и вершинного оператора [12]. Но эти уравнения показывают также, что перенормированные массы и заряд еще не исключены из теории и проявляются в процессах с очень большой передачей импульса. Гейзенберг [46] осуществил аналогичную программу в модели Ли, построив непосредственно перенормированные уравнения поля (которые оказались интегро-дифференциальными). В этой модели при $g^2 > 0$ кванты перенормированного V -поля порождают индефинитную метрику.

При отказе от программы перенормировок приходится отказываться также от понятия голых частиц (существующих в том же числе и столь же различных, как физические частицы, которые предполагается описать). По этой причине Гейзенберг вводит единственное спинорное поле, взаимодействующее само с собой; при этом предполагается, что индефинитная метрика обеспечит конечность теории. При построении такой схемы одной из задач

является введение в нее свойств инвариантности, которые могли бы служить для определения электрического заряда, числа нуклонов, изотопического спина, а также разъяснили бы таинственный вопрос о нарушении законов сохранения в некоторых взаимодействиях. И снова Паули¹⁾ принимает участие в разработке этой проблемы, но, с его точки зрения, более важен другой вопрос: как интерпретировать физически формализм, в котором существенную роль играет индефинитная метрика? Интересно в этой связи проследить, как вводится индефинитная метрика. Теория будет конечной, если нелинейность приведет к отсутствию у функции

$$S_{\alpha\beta}(x, x') = i \langle 0 | \{ \psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x') \} | 0 \rangle$$

бесконечностей типа δ и δ' на световом конусе. Если главная (сингулярная) часть антикоммутатора на световом конусе представляет собой c -число, то последнее удовлетворяет нелинейному уравнению, исследование которого может привести к выяснению характера сингулярностей. И действительно, сингулярности оказываются бесконечными осцилляциями, а не δ -функциями и производными от них. Как указывалось выше, это влечет за собой введение индефинитной метрики. Гейзенберг переходит затем к построению модели для S (в которую входят не осцилляции, а их предельное нулевое значение на световом конусе); регуляризация S осуществляется при помощи «дипольного призрачного состояния», описанного во второй части настоящего параграфа.

До сих пор, к сожалению, еще остается открытым вопрос о внутренней непротиворечивости всей этой программы; используемые математические методы пока слишком несовершенны. Характерно, что Паули считал по крайней мере преждевременными попытки извлечь сколько-нибудь достоверную информацию из этой схемы. Он настаивал на дальнейшем выяснении принципиальных положений при помощи простых моделей. При всей своей приверженности к радикально новым идеям в квантовой теории поля Паули еще раз подчеркнул, что главная его цель — ясность; во имя нее он относился критически к новым идеям на том их начальном этапе, когда они еще имеют довольно расплывчатый характер, как бы притягательны они ни были.

¹⁾ Heisenberg W., Pauli W., Неопубликованная работа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wentzel G., Zs. f. Phys., 86, 479 (1933); 87, 726 (1934).
2. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A167 (1938).
3. Wentzel G., Quantum Theory of Wave Fields, New York, 1943. (См. перевод: Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., 1947.)
4. Pauli W., Phys. Rev., 64, 332 (1943).
5. Jauch J. M., Phys. Rev., 63, 334 (1943).
6. Fröhlich H., Heitler W., Kemmer N., Proc. Roy. Soc., A166, 154 (1938).
7. Weisskopf V. F., Zs. f. Phys., 89, 27 (1934); 90, 817 (1934); Phys. Rev., 56, 72 (1939).
8. Pauli W., Rev. Mod. Phys., 15, 175 (1943).
9. Heitler W., Peng H. W., Proc. Cambr. Phil. Soc., 38, 296 (1942).
10. Stueckelberg E. C. G., Helv. phys. Acta, 18, 195 (1945); 19, 242 (1946).
11. Pais A., Verh. Akad. Wet. Amst., 19, No 1 (1947).
12. Schwinger J., Differential Equations of Quantum Field Theory, Stanford Research Institute, California, 1956.
13. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., Osaka, 1, 27 (1946); Phys. Rev., 74, 224 (1948). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 2.)
14. Schwinger J., Phys. Rev., 74, 1439 (1948); 75, 651 (1949); 76, 790 (1949). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 12.)
15. Feynman R. P., Phys. Rev., 76, 749, 769 (1949). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 138, 161.)
16. Dyson F., Phys. Rev., 75, 486 (1949). (См. перевод в сб. «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950, стр. 94.); Phys. Rev., 75, 1736 (1949). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 205.)
17. Rivier D., Helv. phys. Acta, 22, 265 (1949).
18. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 120, 513, 673 (1943).
19. Wentzel G., Rev. Mod. Phys., 19, 1 (1947).
20. Jost R., Luttinger J. M., Helv. phys. Acta, 23, 201 (1950).
21. Pais A., Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., 79, 145 (1950).
22. Lehmann H., Nuovo Cimento, 11 (Ser. 9), 542 (1954). [См. перевод: Проблемы современной физики, № 3, 132 (1955).]
23. Bleuler K., Helv. phys. Acta, 23, 567 (1950).
24. Gupta S. N., Proc. phys. Soc., 63, 681 (1950); 64, 850 (1951).

25. Боголюбов Н. Н., Annual International Conference on High Energy Physics at CERN, Geneva, 1958.
26. Pauli W., Villars F., Rev. Mod. Phys., **21**, 434 (1949). (См. перевод в сб. «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950, стр. 139.)
27. Rivier D., Stueckelberg E. C. G., Phys. Rev., **74**, 218 (1949).
28. Drell S. A., Ann. d. Phys., **4**, 75 (1959). [См. перевод: Проблемы современной физики, № 6, 10 (1958).]
29. Källén G., Lecture Notes on Quantum Electrodynamics, Geneva, CERN, 1956.
30. Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci., Wash., **37**, 379 (1951).
31. Stueckelberg E. C. G., Patry J. F. C., Helv. phys. Acta, **13**, 167 (1940).
32. Pauli W., Phys. Rev., **64**, 332 (1943).
33. Fierz M., Helv. phys. Acta, **23**, 731 (1950). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 239.)
34. Pais A., Epstein S. T., Rev. Mod. Phys., **21**, 445 (1949).
35. Pais A., Developments in the Theory of the Electron, New York, 1948.
36. Rohrlich F., Phys. Rev., **77**, 357 (1950).
37. Villars F., Phys. Rev., **79**, 122 (1950).
38. Uehling E., Phys. Rev., **48**, 55 (1935).
39. Pauli W., Rose M. E., Phys. Rev., **49**, 462 (1936).
40. Heisenberg W., Euler H., Zs. f. Phys., **98**, 714 (1936).
41. Weisskopf V. F., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., **14**, No. 6 (1936).
42. Umezawa H., Yukawa J., Yamada E., Progr. Theor. Phys., Osaka, **3**, 317 (1948); **4**, 25 (1949).
43. Jost R., Rayski J., Helv. phys. Acta, **22**, 457 (1949).
44. Umezawa H., Kawabe R., Progr. Theor. Phys., Osaka, **4**, 423, 443 (1949); **5**, 769 (1950).
45. Wentzel G., Phys. Rev., **74**, 1070 (1948).
46. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 664 (1951). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 254.)
47. McManus H., Proc. Roy. Soc., **A195**, 323 (1948).
48. Bloch C., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., **26**, No. 1 (1950); **27**, No. 8 (1952).
49. Chrétien M., Peierls R., Nuovo Cimento, **10** (Ser. 10), 668 (1953).
50. Kristensen P., Møller C., Kgl. Danske. Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., **27**, No. 7 (1952).
51. Yang C. N., Feldman D., Phys. Rev., **76**, 972 (1952).
52. Källén G., Ark. Fys., **2**, 371 (1951).

53. P a u l i W., Nuovo Cimento, **10** (Ser. 10), 648 (1953).
54. H e i s e n b e r g W., Rev. Mod. Phys., **29**, 269 (1957).
55. D i r a c P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A180**, 1 (1942).
56. H e i s e n b e r g W., Nucl. Phys., **4**, 532 (1957).
57. P a u l i W., Annual International Conference on High Energy Physics at CERN, Geneva, 1958.
58. L e e T. D., Phys. Rev., **95**, 1329 (1954).
59. K ä l l é n G., P a u l i W., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., **30**, No. 7 (1955).
60. K ä l l é n G., Helv. phys. Acta, **25**, 417 (1952); Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., **27**, No. 12 (1958).
61. Л а н д а у Л. Д., в книге «Niels Bohr and the Development of Physics», New York, 1955. (См. перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.)
62. H e i s e n b e r g W., Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, **27**, 111 (1953); Zs. f. Naturforsch., **A9**, 292 (1954); H e i s e n b e r g W., K o r t e l F., M i t t e r H., Zs. f. Naturforsch., **A10**, 425 (1955); A s c o l i R., H e i s e n b e r g W., Zs. f. Naturforsch., **A12**, 177 (1957); D u e r r H. P., H e i s e n b e r g W., M i t t e r H., S c h l i e d e r S., Y a m a z a k i K., Zs. f. Naturforsch. (в печати). (См. перевод всех этих работ в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959.)

РЕС ИОСТ

ПРИНЦИП ПАУЛИ И ГРУППА ЛОРЕНЦА

I. ИСТОРИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ВВЕДЕНИЕ

С момента своего возникновения теория квантованных полей стала основным направлением научной деятельности Паули. Его влияние на развитие этой теории было огромным не только благодаря собственным работам, но и в связи с постоянным изучением и критикой работ других физиков. Без преувеличения можно сказать, что Паули был совестью теории поля.

Но с особым интересом Паули занимался сопоставлением требований частной теории относительности и квантовой теории. Объединение этих требований в одной непротиворечивой теории — это, как известно, задача (для 4 измерений), решение которой не удавалось получить ни для одной модели даже нетривиальным способом.

И вот в процессе утомительных занятий этой проблемой совершенно неожиданно для самого Паули созрел ценный плод, выросший на почве большого достижения 1925 г., а именно принципа запрета.

Мы имеем в виду теорему о связи *спина и статистики*: в релятивистской теории, удовлетворяющей обычным постулатам квантовой теории, частицы с полуцелым спином подчиняются принципу запрета, а частицы с целочисленным спином — статистике Бозе — Эйнштейна.

В этой исторической части мы расскажем о ранних работах Паули, направленных к этой цели. Затем мы обсудим значительное число работ, посвященных самой теореме, и в заключение коснемся еще одной родственной проблемы (теорема *CPT*).

§ 1. РАБОТЫ ПАУЛИ ДО ОТКРЫТИЯ ПОЗИТРОНА

В этот период вышли две большие работы Паули и Гейзенберга [1], которыми, собственно, и были заложены первые основы систематической теории поля.

Еще раньше, в 1927 г., Дирак [2] первый с успехом применил принципы квантовой теории к максвелловскому полю и в результате получил первую и наиболее важную модель теории квантованного поля. В этой теории кванты поля (фотоны) подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Однако в случае волнового уравнения для электрона аналогичные методы квантования привели к совершенно неудовлетворительным результатам, поскольку при этом получалось, что электроны тоже подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

Затем появились работы Иордана [3] и Иордана и Вигнера [4], в которых было показано, что при соответствующем изменении перестановочных соотношений для компонент Фурье данного поля можно получить частицы, подчиняющиеся принципу запрета. Изменение это заключается в повсеместной замене коммутаторов антикоммутаторами. Тем самым формальный аппарат был развит до такой степени, что появилась возможность поставить вопрос о связи между трансформационными свойствами поля и статистикой частиц, вводимых при квантовании.

Особое значение для нас имеет законченная примерно за 6 недель до работы Иордана и Вигнера статья Иордана и Паули [5], в которой впервые последовательно проводится требование лоренц-инвариантности и при квантовании. В заключение для перестановочных соотношений там выводится уравнение

$$[F_{\mu\nu}(x), F_{\sigma\eta}(y)] = iD_{\mu\nu, \sigma\eta}(x - y), \quad (1.1)$$

где

$$D_{\mu\nu, \sigma\eta}(\xi) = (g_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\eta + g_{\mu\eta}\partial_\nu\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\eta - g_{\nu\eta}\partial_\mu\partial_\sigma) D(\xi), \quad (1.2)$$

а

$$D(\xi) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{|k|} \sin k\xi^0 \cdot e^{i(k\xi)} \quad (1.3)$$

является инвариантной функцией Иордана и Паули; ∂_μ означает $\partial/\partial\xi^\mu$. Эта функция обладает следующими основными свойствами:

$$D(-\xi) = -D(\xi) \quad (1.4)$$

и

$$\square D(\xi) = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu D = 0. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) и (1.5), а также требование, чтобы функция D оставалась инвариантной относительно собственной группы Лоренца L_+^\uparrow)

$$D(\Lambda\xi) = D(\xi), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow \quad (1.6)$$

определяют D с точностью до множителя. Только из свойств (1.4) и (1.6) следует также

$$D(\xi) = 0 \quad \text{для} \quad \xi^2 < 0, \quad (1.7)$$

т. е. обращение в нуль коммутатора для пространственно-подобных разностей $x - y$. [Это следует из того, что L_+^\uparrow преобразует точки гиперboloида $\xi^2 = -\alpha^2 < 0$ транзитивно, а инвариантная функция такого преобразования должна быть постоянной. В силу (1.4) эта постоянная должна быть нулем.] Следует удивляться, что это последнее утверждение не было достаточно отмечено в этой работе, хотя в одном из предшествующих томов того же журнала появилась работа Гейзенберга о соотношении неопределенностей. Следовательно, интерпретация уравнений (1.7) и (1.1) в духе этого соотношения представлялась очевидной.

Мы продвинемся теперь несколько дальше в духе цитированной работы и зададим вопрос, что можно сказать о величине

$$\langle [F_{\mu\nu}(x), F_{\sigma\eta}(y)] \rangle_0 = i\Delta_{\mu\nu, \sigma\eta}(x - y), \quad (1.8)$$

пользуясь одними соображениями инвариантности. Левая часть этого выражения означает среднее значение по вакууму. Предполагается (наряду с существованием вакуума) инвариантность теории относительно собственной неоднородной группы Лоренца²⁾.

Далее имеем

$$F_{\mu\nu}(x) + F_{\nu\mu}(x) = 0, \quad (1.9)$$

откуда легко получается самое общее выражение для правой

¹⁾ L_+^\uparrow означает преобразование Лоренца, не меняющее направление времени (ортохронное) и имеющее определитель, равный $+1$ ($L_{00} > 0$, $\text{Det} |L_{ik}| = 1$). — *Прим. ред.*

²⁾ Мы не будем здесь обсуждать вопрос, имеет ли смысл понятие вакуума в теории, содержащей частицы с массой, равной нулю.

части (1.8)

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu, \sigma\eta}(\xi) = & (g_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\eta + g_{\mu\eta}\partial_\nu\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\eta - g_{\nu\eta}\partial_\mu\partial_\sigma) A + \\ & + (g_{\nu\sigma}g_{\mu\eta} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\eta}) B + \\ & + (\varepsilon_{\mu\nu\sigma\varrho}\partial_\eta + \varepsilon_{\mu\nu\eta\varrho}\partial_\sigma - \varepsilon_{\sigma\eta\mu\varrho}\partial_\nu - \varepsilon_{\sigma\eta\varrho\nu}\partial_\mu) \partial^\varrho C + \varepsilon_{\mu\nu\sigma\eta} D. \end{aligned} \quad (1.10)$$

При этом A , B , C и D опять представляют собой функции ξ , инвариантные относительно L^\dagger_\perp . Но из определения $\Delta_{\mu\nu, \sigma\eta}(\xi)$ следует соотношение

$$\Delta_{\mu\nu, \sigma\eta}(\xi) = -\Delta_{\sigma\eta, \mu\nu}(-\xi), \quad (1.11)$$

которое, согласно (1.10), означает, что для функций A , B , C и D выполняются следующие условия:

$$A(-\xi) = -A(\xi), \quad B(-\xi) = -B(\xi), \quad D(-\xi) = -D(\xi), \quad (1.12)$$

но

$$C(-\xi) = C(\xi). \quad (1.13)$$

Следовательно, в то время как A , B и D обращаются в нуль для $\xi^2 < 0$, этого утверждать для C нельзя. Этот вывод не удастся усилить, даже учитывая уравнения поля

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0. \quad (1.14)$$

Эти уравнения неявно включают $D = 0$ и $\square C = 0$. Маловероятно, чтобы в 1927 г. кто-нибудь вообще принимал всерьез выражение (1.10), поскольку правая часть содержит смесь тензоров и псевдотензоров 4-го ранга. Таким образом, члены в правой части по-разному преобразуются при отражении

$$TP: \xi^{\nu'} = -\xi^\nu. \quad (1.15)$$

В действительности оказывается весьма разумным потребовать, чтобы выполнялись уравнения

$$\langle [F_{\mu\nu}(-x), F_{\sigma\eta}(-y)] \rangle_0 = -\langle [F_{\mu\nu}(x), F_{\sigma\eta}(y)] \rangle_0, \quad (1.16)$$

или

$$\Delta_{\mu\nu, \sigma\eta}(-\xi) = -\Delta_{\mu\nu, \sigma\eta}(\xi). \quad (1.16a)$$

Тогда C и D тождественно обратятся в нуль, и мы получим

$$\Delta_{\mu\nu, \sigma\eta}(\xi) = 0 \quad \text{для } \xi^2 < 0. \quad (1.17)$$

Это замечательное соотношение между инвариантностью при отражении и равенством нулю среднего значения коммутатора по вакууму представляет частный случай теоремы *CPT*. Тем не менее наше рассуждение в одном отношении вводит в заблуждение, поскольку для полной теоремы *CPT* необходимо еще одно существенно новое предположение (а именно, стабильность вакуума).

Вопрос о том, можно ли квантовать в соответствии с принципом запрета и максвелловское поле, по-видимому, впервые рассматривал Иордан в общеизвестной в те времена статье [7]. Этот факт, естественно, затрудняет изложение замечаний по этому вопросу.

Решающий аргумент против такого квантования, вероятно, впервые был высказан Паули в энциклопедической статье [8].

Поскольку в классическом предельном случае поле $F_{\mu\nu}(x)$ измеримо, то коммутатор (1.1) для пространственно-подобных интервалов должен обращаться в нуль, потому что измерение $F_{\mu\nu}$ в точке x может повлиять на измерение в точке y только при условии $(x - y)^2 > 0$. Соответствующая цитата из работы [8], описывающая ситуацию лучше, чем это сделал бы я, гласит:

«То обстоятельство, что в классическом предельном случае напряженности E и H (в смысле своего поведения в пространстве и времени), а также их фазы являются измеримыми величинами, приводит к следствию, что световые кванты имеют симметричные состояния (по статистике Бозе — Эйнштейна).

Иначе обстоит дело для материальных частиц. Здесь ψ -функции являются величинами, не поддающимися измерению, и случаи симметричного и антисимметричного состояний нескольких одинаковых частиц с точки зрения принципа соответствия равноценны... Фаза (ψ -функции)... не входит ни в оператор Гамильтона, ни в другие измеримые физические величины, ψ -функция неизмерима».

Две большие работы Гейзенберга и Паули [1] впервые заложили основы систематической теории квантования поля, включая также квантовую электродинамику. Одной из главных целей при этом было доказательство лоренц-инвариантности самого процесса квантования (каноническое квантование). По весьма понятным причинам формальный аппарат строился не в четырехмерном, как в работе Иордана, а в трехмерном пространстве. Известно, что увлечение каноническим формализмом и связанное с этим выделение роли времени препятствовали построению реля-

тивистски инвариантной теории возмущений и тем самым, возможно, замедлили развитие теории поля.

§ 2. РАБОТЫ, ПРОВЕДЕННЫЕ ДО 1940 г.

Это положение изменилось в корне после открытия позитрона Андерсоном, чем подтвердилась смелая «дырочная» теория Дирака. Сразу же стало ясно, что электроны Дирака должны квантоваться в соответствии с принципом запрета, если только удастся ввести понятие вакуума.

Далее, работа Бора и Розенфельда [9] существенно продвинула анализ понятий, применяемых в квантовой теории. В этой работе были указаны эксперименты, позволяющие производить измерения напряженностей поля $F_{\mu\nu}(x)$, которые находятся в полном соответствии с соотношениями неопределенности, следующими из (1.1). Тем самым эти эксперименты противостоят высказывавшимся ранее предположениям.

Все это намного усилило значение условия причинности и локальности, применявшегося выше к максвелловскому полю, и вселило надежду на то, что и плотность заряда может быть непротиворечивым образом локализована в рамках теории¹⁾. Такое предположение полностью соответствует теории дырок, в которой плотность заряда есть локально наблюдаемая величина, а плотность частиц такой величиной уже не является.

Это утверждение, устраняющее первоначальные аргументы Дирака против скалярного релятивистского уравнения и в пользу четырехкомпонентного уравнения, послужило исходным пунктом работы Паули и Вайскопфа [10] о квантовании скалярного релятивистского уравнения. Последнее описывает заряженные частицы без спина. Волновая функция $\psi(x)$ при этом комплексна, и вследствие существования группы градиентных преобразований ее фаза принципиально не наблюдаема. Следовательно, аргумент о локальности, применявшийся в случае максвелловского поля к полю ψ , непосредственно неприменим. Однако можно предположить существование локализуемой плотности заряда. Последняя, как и все другие существенные наблюдаемые величины, билинейна по ψ и ψ^* и для свободного поля равна

$$\rho = ie [(\partial_0 \psi^*) \psi - \psi^* \partial_0 \psi]. \quad (2.1)$$

¹⁾ Точнее, все локальные операторы должны еще усредняться с соответствующими весами по пространству и времени.

В то же время очевидно, что

$$[\varrho(x), \varrho(y)] = 0 \text{ для } (x-y)^2 < 0, \quad (2.2)$$

если $\psi(x)$ коммутирует с $\psi(x')$ и

$$[\psi^\star(x), \psi(y)] = 0 \text{ для } (x-y)^2 < 0. \quad (2.3)$$

Но то же самое справедливо, если $\psi(x)$ антикоммутирует с $\psi(x')$ и

$$[\psi^\star(x), \psi(y)]_\pm = 0 \text{ для } (x-y)^2 < 0, \quad (2.4)$$

так что уравнение (2.3) нельзя считать необходимым следствием локализуемости $\varrho(x)$.

Уравнение (2.3) соответствует каноническому квантованию, а следовательно, статистике Бозе — Эйнштейна. Однако уравнение (2.4) не соответствует квантованию по принципу запрета, и совершенно бессмысленно. В действительности, если предположить, что левая часть (2.4) есть c -число (а в случае теории свободных полей, квантуемых по принципу запрета, это правильно), то из (2.4) следует, что $F(x)$ необходимо будет нечетной функцией, так как выражение

$$[\psi^\star(x), \psi(y)]_\pm = F(x-y) \quad (2.5)$$

лоренц-инвариантно и удовлетворяет волновому уравнению

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m^2] F(\xi) = 0. \quad (2.6)$$

Следовательно, для произвольных x и y получаем

$$\psi^\star(x) \psi(y) + \psi^\star(y) \psi(x) + \psi(y) \psi^\star(x) + \psi(x) \psi^\star(y) = 0, \quad (2.7)$$

откуда очевидно, что $\psi = 0$.

Это одно из рассуждений, выдвигавшихся в цитированной работе против квантования в соответствии с принципом запрета. В последовавшей затем статье [11] было показано, что локальной плотности заряда не существует и в том случае, если составить для нее некоторые нелокальные относительно полей выражения.

Тем самым было получено удовлетворительное объяснение связи между спином и статистикой в важнейших случаях: спин 0, спин $1/2$ и фотоны. Однако прежде чем начать рассмотрение случая произвольного спина, необходимо было сначала построить теорию свободных полей в произвольном конечном представлении группы Лоренца. Вслед за Дираком [12] это

сделал Фирц [13]. При этом оказалось, что совершенно независимо от квантования полная энергия в случае двузначных представлений (т. е. для полуполого спина) становится индефинитной, а плотность заряда — дефинитной. Следовательно, чтобы получить стабильный вакуум, нужно квантовать в соответствии с принципом запрета. При этом получаются симметричным образом частицы с зарядом обоих знаков. Для однозначных представлений (т. е. для целого спина) полная энергия дефинитна, а заряд индефинитен. Поэтому возможно квантование по Бозе — Эйнштейну, а квантование в соответствии с принципом запрета недопустимо из-за нелокальной плотности заряда. При этом доказательство совершенно аналогично рассуждениям, приводящим к противоречивым уравнениям (2.4) и (2.7).

Для действительного тензорного поля доказательство, конечно, следует видоизменить. В этом случае, так же как и для максвелловского поля, предполагается наблюдаемость самого поля. Аналогичное замечание относится к двузначным полям, подчиняющимся условию действительности Майорана. И в этом случае необходимо потребовать, чтобы билинейные величины были локальными.

В связи с работой Фирца обязательно следует упомянуть и те работы, которые основываются на проделанном Вигнером (см. [14, 15]) анализе неприводимых унитарных представлений. В этих работах доказывалось, что теория Фирца приводит (по меньшей мере) к одному волновому уравнению для каждого представления неоднородной группы Лоренца с действительной ненулевой массой. Для нулевой массы получаются волновые уравнения только для тех представлений, которые получаются из предыдущего случая предельным переходом. Остальные представления для нулевой массы, содержащие вместо дискретных спиновых переменных непрерывные переменные, по-видимому, не имеют физического смысла. Мы не будем обсуждать их квантование.

Знаменитая работа Паули [16] о связи между спином и статикой прежде всего дала обобщение результатов Фирца на общий случай приводимых спинорных полей. Кроме того, Паули, пользуясь новыми и интересными методами, получил прямое доказательство того, что в (c -числовой) теории свободных полей, инвариантной относительно собственной группы Лоренца, плотность заряда дефинитна для однозначных, а плотность энергии для двузначных представлений. Отсюда следуют те же выводы, которые мы приводили выше, причем необходимо, конеч-

но, принять гипотезу Фирца о существовании положительной энергии в случае целого спина. Что же касается новых математических методов, то они заключались, с одной стороны, в классификации спиноров по четырем классам, а с другой — в использовании того обстоятельства, что волновое уравнение для свободных полей инвариантно относительно отражения и в том случае, если первоначально предполагается только инвариантность относительно собственной группы Лоренца.

Классификация спиноров осуществляется с помощью знаковой пары $[(-1)^m, (-1)^n]$. При этом m и n — числа спинорных индексов с точкой и без точки. Для однозначных представлений этот *характер* принимают соответственно значения $(+, +)$ и $(-, -)$. Первое значение относится к тензорам четного, а второе — к тензорам нечетного ранга. Для двузначных представлений этими значениями являются $(+, -)$ и $(-, +)$, причем выполняется символическое уравнение

$$\psi_{(+, -)}^* = \varphi(-, +) \quad (2.8)$$

Для однозначных представлений характер при комплексном сопряжении не меняется.

Оператор $i\partial_\nu = p_\nu$ принадлежит характеру $(-, -)$. Следовательно, линейное волновое уравнение для однозначных полей должно иметь символическую форму

$$\begin{aligned} \Sigma p \psi_{(+, +)} &= \Sigma \psi_{(-, -)}, \\ \Sigma p \psi_{(-, -)} &= \Sigma \psi_{(+, +)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поэтому оно остается инвариантным при преобразовании

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(+, +)} &\rightarrow \psi_{(+, +)}, \quad \psi_{(-, -)} \rightarrow -\psi_{(-, -)} \\ p &\rightarrow -p \end{aligned} \right\} (\theta).$$

Отсюда легко заключить, что образованное из p , $\psi_{(+, +)}(x)$ и $\psi_{(-, -)}(x)$ (посредством многократного умножения и суммирования) тензорное поле нечетного ранга меняет знак в результате преобразования (θ) . Следовательно, дефинитной плотности заряда не существует.

Интереснее случай двузначных представлений, когда волновое уравнение принимает символическую форму

$$\begin{aligned} \Sigma p \psi_{(+, -)} &= \Sigma \psi_{(-, +)}, \\ \Sigma p \psi_{(-, +)} &= \Sigma \psi_{(+, -)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Это уравнение опять инвариантно относительно преобразования, переводящего p в $-p$ и $\psi_{(\sigma_1, \sigma_2)}$ в $\sigma_1 \psi_{(\sigma_1, \sigma_2)}$. Однако это преобразование несовместимо с (2.8). Это решающее обстоятельство приводит Паули к следующему преобразованию:

$$\left. \begin{aligned} \psi(+, -) &\rightarrow i\psi(+, -), & \psi(-, +) &\rightarrow (-i)\psi(-, +) \\ p &\rightarrow -p \end{aligned} \right\} (\theta').$$

Однако теперь следует, что всякое билинейное по $\psi_{(+, -)}(x)$, $\psi_{(-, +)}(x)$ и их производным (любого порядка) тензорное поле четного ранга меняет знак при преобразовании (θ') . Таким образом, в случае двузначных полей энергия может не быть положительной.

Существование преобразований θ , θ' представляется важнейшим фактом. Их истинный смысл становится ясным только при рассмотрении теоремы *CPT*. Это исследование Паули было своего рода завершением рассмотрения нашей проблемы. Для свободных частиц было найдено удовлетворительное объяснение связи между спином и статистикой. Это можно рассматривать как «одно из важнейших применений частной теории относительности».

Перечислим еще раз предположения, существенные при выводе рассматриваемой связи:

- 1) инвариантность относительно собственной группы Лоренца;
- 2) существование наиболее низкого энергетического состояния, которое мы считаем нормируемым и невырожденным и которое отождествляется с вакуумом;
- 3) положительное скалярное произведение в линейном пространстве состояний;
- 4) физические величины (например, плотность заряда) при пространственно-подобном интервале между двумя точками коммутируют. Сами поля коммутируют или антикоммутируют на пространственно-подобном интервале (локальность).

§ 3. НОВЫЕ РАБОТЫ О СПИНЕ И СТАТИСТИКЕ

Т е о р е м а *CPT*. Новым стимулом для изучения ставшего уже классическим вопроса о спине и статистике явилось существенное развитие квантовой электродинамики в работах Швингера, Фейнмана и Дайсона.

Новые и несколько необычные взгляды Фейнмана сначала вызывали спор. В рамках его формализма неправильная стати-

стика приводила к тому, что вероятность отсутствия влияния внешнего слабого электромагнитного поля на вакуум оказывалась больше единицы. Анализ, проделанный Паули [19] с помощью обычного формального аппарата, приводит к модели, в которой выполняются следствия (2.1), (2.2) и (2.4), а следствие (2.3) не выполняется. Введение индефинитной, но все же действительной метрики в пространстве состояний предлагалось для другой цели Дираком и подробно обсуждалось Паули [20]. Однако это законно в ограниченных пределах только в квантовой электродинамике [21].

Более интересным оказался своеобразный способ, примененный Швингером [22] для обоснования правильной статистики при данном спине. Согласно Швингеру, правильная статистика следует из требования инвариантности относительно одновременного применения обращения времени T и сопряжения частица — античастица в теориях, инвариантных при пространственном отражении P ¹⁾.

Независимо от Швингера Людерс [24] получил очень близкий результат, по которому при весьма широких предпосылках P -инвариантная теория, в которой выполняются обычные правила коммутации, будет автоматически инвариантной относительно CT . Однако окончательная формулировка рассматриваемой здесь теоремы снова принадлежит Паули [25] и *теорема CPT* гласит: теория поля с нормальными правилами коммутации, инвариантная относительно собственной группы Лоренца, инвариантна также относительно CPT .

Достоинство новой формулировки состоит в том, что предполагается только инвариантность относительно собственной группы Лоренца (конечно, до открытия несохранения четности). Кроме того, теорема доказывается для произвольного спина, тогда как Людерс ограничивался важнейшими значениями спина 0, $1/2$ и 1. Теперь стало ясно, что корень теоремы следует искать в том обстоятельстве, что в *комплексной* группе Лоренца TP можно непрерывным образом получить из единицы. Таким образом, здесь формулировка проблемы и результатов существенно связывается с применяемыми методами доказательства.

В наши намерения не входит реферирование появившихся теперь новых работ. Интерес к этим вопросам возрос, конеч-

¹⁾ Упомянем между прочим, что обращение времени необходимо соответствует *антиунитарному преобразованию* [23] или автоморфизму; обращение порядка сомножителей — антиавтоморфизму [22].

но, в связи с тем, что теоретико-групповые основы физики поколеблены открытием несохранения четности.

К вопросу «Коммутатор или антикоммутатор для разных полей?» следует упомянуть работу Людерса [26]. Согласно этой работе, локальным уравнениям движения всегда соответствуют нормальные перестановочные соотношения, в которых поля, описываемые двузначными представлениями, антикоммутируют между собой на пространственно-подобных интервалах и коммутируют с полями, описываемыми однозначными представлениями, а последние коммутируют между собой. Однако в зависимости от выбора выражения для плотности энергии могут существовать и другие возможности, но все могут быть приведены к нормальному случаю с помощью преобразования полей, указанного Клейном (разумеется, неунитарного) для одного частного случая [27].

В последнее время были предприняты попытки придать новую форму самой теории поля. Из них наибольшую известность получили прежде всего работы Лемана и др. [28], затем Уайтмена и др. [29, 30].

Первая работа оказалась более полезной (если можно применить здесь это слово), чем более общая вторая, однако нам, несомненно, следует отдать должное выдержке и мужеству Уайтмена, доведшему до конца глубочайший и труднейший математический анализ проблемы.

В этих общих формах теории можно также поставить вопрос о *CPT*-инвариантности. Оказывается, что удовлетворительное рассмотрение и решение этого вопроса достигается в схеме Уайтмена [31].

Менее удовлетворительное, но возможно более интересное решение получает в этом формальном аппарате проблема спина и статистики. Поскольку поля Уайтмена, по-видимому, сначала не имеют ничего общего с частицами, то можно задать только вопрос, коммутирует (или антикоммутирует) данное поле с комплексно-сопряженным или нет?

Это, как обычно, опять зависит от характера преобразования поля. Обычно эту проблему также принято называть «связью между спином и статистикой». Она рассматривалась Бургойном [32]. Если вслед за Леманом и др. [28] ввести частицы, накладывая определенное требование на асимптотическое поведение операторов поля, то из неправильных *слабых* перестановочных соотношений простейшим способом следует, конечно, уничтожение рассматриваемого поля.

Упомянутое выше исследование Людерса [26] пока еще не переведено на язык этого общего формализма теории.

Наконец, следует указать еще на один недостаток: электромагнитное поле, взаимодействующее с заряженными частицами, не укладывается непосредственно в формальную схему Уайтмена. Именно оно требует введения весьма специальной индефинитной метрики в пространстве состояний [21]. Правда, это обстоятельство не отражается на теореме *CPT* (где дефинитная метрика используется несущественно) и на статистике фотонов, но оно может повлиять на статистику заряженных частиц, поскольку они описываются полями, неинвариантными относительно градиентных преобразований.

Наибольшую ясность могло бы внести, по-видимому, последовательное рассмотрение предельного случая, возникающего при условии, что масса фотона сначала предполагается малой, но отличной от нуля, и затем устремляется к нулю.

В части II я пытаюсь дать по возможности элементарное, но полное введение в обобщение теории Уайтмена, необходимое для исследования *CPT*-инвариантности и связи между спином и статистикой.

В § 1 сопоставляются свойства действительной и комплексной группы Лоренца в той мере, в какой они потребуются в дальнейшем, а в § 2 кратко напоминаются основные свойства *W*-функций. Для точного обоснования теории вакуумных средних необходимо обращаться к литературе [29, 30]. Наиболее важный § 3 содержит доказательство теоремы (для наших целей фундаментальной) о том, что вакуумные средние инвариантны относительно комплексных преобразований Лоренца. В § 4 характеризуются действительные точки регулярности *W*-функций. Наконец, в § 5 и 6 приготовленный ранее вспомогательный аппарат применяется к проблеме *CPT*-инвариантности и связи спина со статистикой.

II. СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. ОДНОРОДНАЯ ГРУППА ЛОРЕНЦА

Действительная однородная группа Лоренца L состоит из таких действительных линейных преобразований Λ над действительными векторами $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, которые оставляют инвариантной форму $\xi^2 = (\xi^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\xi^k)^2$.

Если через Λ обозначить также матрицу линейного преобразования, а через Λ^T — транспонированную матрицу, то преобразования Лоренца характеризуются формулами

$$\Lambda^T G \Lambda = G, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что определитель преобразования Лоренца равен ± 1 . В соответствии с этим L распадается на L_+ (определитель $|\Lambda| = +1$) и L_- (определитель $|\Lambda| = -1$), причем L_+ снова образует группу. Для нас существенны следующие инвариантные конусы:

1) Конус времени подобных векторов $\xi^2 > 0$; он распадается на *передний конус* V_+ ($\xi_0 > 0$ и $\xi^2 > 0$) и *задний конус* V_- ($\xi_0 < 0$ и $\xi^2 > 0$).

2) Конус нулевых векторов $\xi^2 = 0$ и $\xi \neq 0$; он тоже распадается на N_+ ($\xi_0 > 0$ и $\xi^2 = 0$) и N_- ($\xi_0 < 0$ и $\xi^2 = 0$).

3) Нуль-вектор $\xi = 0$.

4) Боковой конус, состоящий из пространственно-подобных векторов $\xi^2 < 0$.

Поскольку $\Lambda \in L_+$ преобразует передний конус либо в самого себя, либо в задний конус, то сама группа L_+ опять распадается на собственную группу Лоренца $L_+^\uparrow (\Lambda V_+ = V_+)$ и на $L_+^\downarrow (\Lambda V_+ = V_-)$. Аналогичным образом распадается и L_- . Так как нетрудно доказать, что L_+^\uparrow односвязна, то группа L не поддается дальнейшему геометрическому расщеплению. Четыре компоненты L можно записать в виде

$$\begin{aligned} L &= (L_+^\uparrow + P T L_+^\uparrow) + (P L_+^\uparrow + T L_+^\uparrow), \\ L &= \quad L_+ \quad \quad \quad + \quad L_- \quad. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом P и T — специальные преобразования Лоренца

$$P: \quad \begin{aligned} \xi^{0'} &= \xi^0; \\ \xi^{k'} &= -\xi^k; \end{aligned} \quad T: \quad \begin{aligned} \xi^{0'} &= -\xi^0; \\ \xi^{k'} &= \xi^k; \end{aligned} \quad PT: \quad \xi^{v'} = -\xi^v. \quad (1.2)$$

Комплексная однородная группа Лоренца $L(C)$ состоит из таких комплексных линейных преобразований Λ над комплексными векторами $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, которые сохраняют инвариантную форму $\xi^2 = (\xi^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\xi^k)^2$. Опять выполняется равен-

ство $\Lambda^T G \Lambda = G$. Поэтому $L(C)$ распадается на $L_+(C)$ ($|\Lambda| = +1$) и $L_-(C)$ ($|\Lambda| = -1$). Однако теперь уже $L_+(C)$ — односвязная группа, и мы получаем разложение

$$L(C) = L_+(C) + PL_+(C). \quad (1.3)$$

Следовательно, $L_+(C)$ содержит в себе действительные преобразования L_+^\uparrow и PTL_+^\uparrow . В частности, единичный элемент E в $L_+(C)$ можно связать с элементом PT разными способами, например

$$\Lambda(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi & 0 & 0 \\ i \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (1.4)$$

Конечно, соответствующую окрестность единичного элемента группы Лоренца аналитически можно параметризовать разными способами. Особенно элементарным оказывается следующий способ.

Пусть

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_4 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_5 & -\lambda_3 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_6 & \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

тогда

$$\Lambda = (E + R)(E - R)^{-1} \quad (1.6)$$

представляет собой преобразование Лоренца. Действительным λ соответствуют действительные преобразования, комплексным λ — комплексные преобразования.

Из (1.5) следует $R^T G + GR = 0$ и отсюда

$$\begin{aligned} \Lambda^T G \Lambda &= (E - R^T)^{-1} (E + R^T) G (E + R) (E - R)^{-1} = \\ &= (E - R^T)^{-1} (E - R^T) G (E - R) (E - R)^{-1} = G. \end{aligned}$$

Наконец, разрешая (1.6), получаем

$$R = (\Lambda - E)(\Lambda + E)^{-1}. \quad (1.7)$$

Это возможно, поскольку -1 не является собственным значением Λ , во всяком случае в достаточно малой окрестности единичного элемента.

Преобразования Лоренца, принадлежащие чисто мнимым R , можно назвать чисто мнимыми. Они обладают свойством $\Lambda^{\star T} \Lambda = \Lambda' \Lambda = E$ и поэтому определяются независимо от параметризации.

Особое значение для нас имеет следующее *представление группы Лоренца*. Положим, что для действительных векторов ξ $X = \xi^{\nu} \sigma_{\nu}$ и аналогично для комплексных векторов ζ $Z = \zeta^{\nu} \sigma_{\nu}$, причем

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\xi^2 = |X|$ и $\zeta^2 = |Z|$. Кроме того, $X^{\star} = X$. Пусть теперь A и B будут двухрядными матрицами, для которых $|A| = |B| = 1$. Тогда

$$X' = AXA^{\star} \quad (1.8)$$

представляет преобразование Лоренца $\Lambda(A) \in L_{+}^{\uparrow}$, а

$$Z' = AZB^T \quad (1.9)$$

преобразование Лоренца $\Lambda(A, B) \in L_{+}(C)$. Эти представления двузначные, поскольку в первом случае $\Lambda(-A) = \Lambda(A)$, а во втором $\Lambda(-A, -B) = \Lambda(A, B)$. Снова нетрудно убедиться, что каждое преобразование $\Lambda \in L_{+}$ допускает представление (1.8), а каждое $\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}(C)$ — представление (1.9).

Как известно, представление (1.8) образует основу *спинорного исчисления* [33]. Простейшие спиноры

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

преобразуются по уравнениям $u' = Au$ и $v' = A'v$. При этом A' — матрица, комплексно-сопряженная A ; следовательно, $A' = A^{\star T}$. Общий спинор $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}$ преобразуется как про-

изведение $u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_n} v_{\dot{\beta}_1} \dots v_{\dot{\beta}_m}$. Он принадлежит конечномер-

ному представлению группы L_{+}^{\uparrow} . Последняя неприводима, если спинор симметричен по индексам $\alpha_1 \dots \alpha_n$ и $\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m$, и ведет к однозначному представлению, если четности n и m одинаковы. Таким способом получают все конечномерные неприводимые представления. Кроме того, каждое конечномерное представле-

ние L_{\dagger}^{\uparrow} является вполне приводимым. Комплексно-сопряженный спинор $a^{\star}_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}$ преобразуется как $b_{\beta_1 \dots \beta_m, \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_n}$. Операцию свертывания спинора можно производить только с инвариантными спинорами

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждое из упомянутых представлений L_{\dagger}^{\uparrow} , очевидно, можно расширить до представления $L_+(C)$. При преобразовании $\Lambda(A, B)$ u и v должны преобразовываться по формулам $u' = Au$ и $v' = Bv$. Спинор $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}$ преобразуется далее как произведение $u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_n} v_{\dot{\beta}_1} \dots v_{\dot{\beta}_m}$. Это обобщение имеет для двузначных представлений весьма примечательное следствие, с особой силой подчеркнутое Паули: преобразование PT , заданное, например, равенствами $A = -E$ и $B = E$, не переводит пару комплексно-сопряженных двузначных спиноров снова в такую же пару. Действительно, при этом, очевидно, $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}$ умножается на $(-1)^n$, тогда как $a^{\star}_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}$ — на $(-1)^m$. Однако n и m обладают различной четностью.

Для однозначных представлений это обстоятельство не имеет места.

Характер представления Паули [16]. Под этим понимается знаковая пара $[(-1)^n, (-1)^m]$, сопоставленная представлению $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m}$. Произведение двух характеров определяется равенством $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$. Прямому произведению представлений соответствует произведение характеров, и в результате приведения представления всегда появляются только представления одного и того же характера. Однозначные представления принадлежат характеру $(1, 1)$ (тензоры четного ранга) или характеру $(-1, -1)$ (тензоры нечетного ранга). Двузначные представления распадаются на два класса: $(1, -1)$ и $(-1, 1)$.

Нормальная форма комплексного преобразования Лоренца. Определение: два комплексных преобразования Λ и $\check{\Lambda}$ из $L_+(C)$ называются эквивалентными относительно L_{\dagger}^{\uparrow} , если $\check{\Lambda} = \Lambda_1 \Lambda \Lambda_2$ и $\Lambda_{1,2} \in L_{\dagger}^{\uparrow}$.

Теперь возникает вопрос, каким образом можно найти внутри эквивалентного класса по возможности наиболее простое представление. Для этого служит следующая теорема.

Т е о р е м а. Комплексное преобразование Лоренца $\Lambda \in L_+(C)$ эквивалентно одному из двух следующих:

$$M(\varphi, \chi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi & 0 & 0 \\ i \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \chi & -i \operatorname{sh} \chi \\ 0 & 0 & i \operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi, \chi \text{ действительны,} \quad (1.10)$$

или

$$M_1(\tau) = \pm \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\tau^2 & \frac{1}{2}\tau^2 & i\tau & 0 \\ -\frac{1}{2}\tau^2 & 1 + \frac{1}{2}\tau^2 & i\tau & 0 \\ i\tau & -i\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \neq 0 \text{ и действительно.} \quad (1.11)$$

Доказательство. Применяя для эквивалентности обозначение « \sim », рассмотрим сначала представление (1.9). Пусть теперь $\Lambda = \Lambda(A, B)$, тогда $(A, B) \sim (CAD, C'BD') \sim (D^{-1}B'^{-1}AD, E)$; последнее получается при выборе $C'BD' = E$. Теперь необходимо еще подходящим выбором D преобразовать матрицу $B'^{-1}A$ к нормальной форме. Как известно, при этом возможны два случая: либо

$$(A, B) \sim \left(\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}, E \right) \sim \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^{\star-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{\star} \end{pmatrix} \right)$$

при $\lambda^2 = e^{\chi+i\varphi}$, либо

$$(A, B) \sim \left(\pm \begin{pmatrix} 1 & 2i\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E \right) \sim \left(\pm \begin{pmatrix} 1 & i\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

с произвольным действительным $\tau \neq 0$.

Вычисляя соответствующие преобразования Лоренца, находим обе эти нормальные формы.

Нормальные формы (1.10) и (1.11) — это, по существу, известные нормальные формы [15] действительного преобразования Лоренца, написанные для чисто мнимых преобразований. Приведенный выше вывод является частным, поскольку он основан на представлении (1.9). Однако аналогичный результат можно непосредственно получить и для произвольного числа измерений [36].

§ 2. СРЕДНЕЕ ПО ВАКУУМУ¹⁾

Рассмотрим релятивистскую теорию поля. Пусть она описывается конечным числом спинорных полей

$$\psi_{\nu_k}^{(k)}(x);$$

здесь ν_k сокращенно обозначает $\alpha_1 \dots \alpha_{n_k}, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_{m_k}$. Сделаем обычные предположения, из которых мы особо подчеркнем следующие:

1) Пространство состояний должно быть *гильбертовым пространством*, т. е. в нем определяется положительное скалярное произведение. При усреднении операторов поля с помощью некоторых функций они действуют на эти функции.

2) К теории должно принадлежать унитарное представление неоднородной группы Лоренца. Символ (Λ, a) обозначает преобразование $x' = \Lambda x + a$. При этом $\Lambda \in L_{\uparrow}^+$. Представление обозначается символом $U(\Lambda, a)$. Тогда выполняется равенство

$$U(\Lambda, a) \psi_{\nu_k}^{(k)}(x) U^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\mu_k} S_{\nu_k \mu_k}^{(k)}(\Lambda^{-1}) \psi_{\mu_k}^{(k)}(\Lambda x + a), \quad (2.1)$$

причем $S(\Lambda)$ означает конечномерные представления группы L_{\uparrow}^+ , рассмотренные в предыдущем параграфе. Следовательно, существует вектор энергии-импульса P_{ν} .

3) Существует вакуум, т. е. невырожденное состояние с минимальной энергией. Это состояние принадлежит нулевой энергии и остается инвариантным.

Как выясняется при более внимательном рассмотрении, теория поля полностью определяется значениями конечных произведений операторов поля, усредненными по вакууму, например

$$W_{\nu}(\xi_1 \dots, \xi_N) = \langle \psi_{\nu_0}^{(0)}(x_0) \psi_{\nu_1}^{(1)}(x_1) \dots \psi_{\nu_N}^{(N)}(x_N) \rangle_0. \quad (2.2)$$

При этом ν означает совокупность индексов $\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N$ и $\xi_k = x_k - x_{k-1}$. Трансляционная инвариантность, следующая

¹⁾ См. [29, 30].

из второго и третьего предположений, уже использована в формуле (2.2). Из этих предположений далее следует для $\Lambda \in L_+^\uparrow$

$$W_v(\Lambda \xi_1 \dots, \Lambda \xi_N) = \sum_{\mu} S_v^{\mu}(\Lambda) W_{\mu}(\xi_1 \dots, \xi_N). \quad (2.3)$$

Поскольку W_v — однозначная функция ξ , то она обращается в нуль, если $S(\Lambda)$ принадлежит двузначному представлению.

Однако решающее значение имеет для нас то следствие из второго и третьего предположений, которое утверждает, что трансформанта Фурье $\tilde{W}_v(p_1 \dots, p_N)$ от функции $W_v(\xi_1 \dots, \xi_N)$ обращается в нуль, если не все векторы удовлетворяют условию $p_k \in V_+$. Отсюда следует, что $W_v(\xi_1 \dots, \xi_N)$ есть граничное значение аналитической функции $W_v(\zeta_1 \dots, \zeta_N)$. Последняя определяется интегралом Фурье и является регулярной и аналитической при условии $\text{Im } \zeta_k \in V_+$. Обозначим символом \mathcal{R}_N область, определенную этим способом. Вместо \mathcal{R}_1 мы будем писать просто \mathcal{R} . Действительных точек внутри области \mathcal{R}_N нет; они лежат только на границе. Наконец, из определения функции $W_v(\zeta_1 \dots, \zeta_N)$ при $\Lambda \in L_+^\uparrow$ следует уравнение

$$W_v(\Lambda \zeta_1 \dots, \Lambda \zeta_N) = \sum_{\mu} S_v^{\mu}(\Lambda) W_{\mu}(\zeta_1 \dots, \zeta_N). \quad (2.4)$$

Закончим этот параграф двумя замечаниями:

а) Первое предположение до сих пор применялось нами неявно и именно там, где подразумевалось, что оператор энергии обладает действительным спектром. Мы еще воспользуемся этим предположением позднее и тогда же еще раз подчеркнем это обстоятельство.

б) Пока мы не делали никаких предположений о перестановочных соотношениях. Такие предположения также будут сделаны позднее.

§ 3. ТЕОРЕМА БАРГМАННА, ХОЛЛА И УАЙТМЕНА¹⁾

Перейдем теперь к важнейшему (и труднейшему) вспомогательному инструменту для дальнейшего исследования — к теореме, указанной в заголовке.

Эта теорема гласит: если функция $W_v(\zeta_1 \dots, \zeta_N)$ регулярна и однозначна в \mathcal{R}_N и если, кроме того, для каждого $\Lambda \in L_+^\uparrow$

¹⁾ См. [29, 30].

выполняется условие

$$W_v(\xi_1, \dots, \xi_N) = \sum_{\mu} S_v^{\mu}(\Lambda) W_{\mu}(\Lambda^{-1}\xi_1, \dots, \Lambda^{-1}\xi_N), \quad (3.1)$$

причем $S(\Lambda)$ есть конечномерное (и необходимо однозначное) представление собственной группы Лоренца, то $W_v(\xi_1, \dots, \xi_N)$ допускает *однозначное* аналитическое продолжение в область \mathcal{R}'_N , являющуюся пересечением всех $\Lambda \mathcal{R}_N$ с $\Lambda \in L_+(C)$. Кроме того, уравнение (3.1) выполняется для каждого $\Lambda \in L_+(C)$, причем в соответствии с первым параграфом $S(\Lambda)$ есть однозначно определенное продолжение в $L_+(C)$ первоначального представления.

Доказательство: А. Теорема, в частности, утверждает, что уравнение (3.1) с $\Lambda \in L_+(C)$ можно применять для *однозначного* определения $W_v(\xi_1, \dots, \xi_N)$ в тех точках \mathcal{R}'_N [т. е. точках (ξ_1, \dots, ξ_N) , переходящих при комплексном преобразовании Лоренца Λ^{-1} в точки области \mathcal{R}_N], которые не принадлежат \mathcal{R}_N . Однако для однозначности необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3.1) всегда выполнялось в тех случаях, когда $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathcal{R}_N$ и $(\Lambda^{-1}\xi_1, \dots, \Lambda^{-1}\xi_N) \in \mathcal{R}_N$, но $\Lambda \in L_+(C)$, т. е. когда (3.1) с $\Lambda \in L_+(C)$ не ведет к многозначностям уже в \mathcal{R}_N . Это следует из того обстоятельства, что $L_+(C)$ есть группа.

Как только это доказано, остальное получается легко. Дело в том, что продолжение с помощью уравнения (3.1) будет, очевидно, аналитическим: необходимо лишь выбрать Λ так, чтобы $(\Lambda^{-1}\xi_1, \dots, \Lambda^{-1}\xi_N) \in \mathcal{R}_N$, затем фиксировать Λ и варьировать (ξ_1, \dots, ξ_N) в достаточно малой окрестности.

Только что доказанную основную часть теоремы можно рассмотреть и под несколько иным углом зрения, фиксируя в правой части уравнения (3.1) (ξ_1, \dots, ξ_N) , но считая ее уже функцией $F(\Lambda)$ на $L_+(C)$. Конечно, эта функция первоначально определяется лишь там, где $(\Lambda^{-1}\xi_1, \dots, \Lambda^{-1}\xi_N)$ лежит в \mathcal{R}_N . Тем самым в $L_+(C)$ фиксируется область, зависящая от (ξ_1, \dots, ξ_N) . Остается показать, что $F(\Lambda)$ в этой области постоянна. Продолжение затем получается, если на всей группе $F(\Lambda)$ полагается равной этой постоянной (зависящей от ξ_1, \dots, ξ_N).

Б. Теперь легко получается частный результат:

$$F(\Lambda) = \sum_{\mu} S_v^{\mu}(\Lambda) W_{\mu}(\Lambda^{-1}\xi_1, \dots, \Lambda^{-1}\xi_N), \quad (3.2)$$

т. е. в достаточно малой окрестности единичного элемента $\Lambda = E$ постоянна на $L_+(C)$. При этом предполагается, что $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathcal{R}_N$. Чтобы убедиться в этом, введем в группе

$L_+(C)$ параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_6$, упомянутые в первом разделе. Далее рассмотрим такую малую окрестность $|\lambda_k| < a$, что в ней

- 1) $\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ и $\Lambda^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ регулярны и аналитичны;
- 2) представление $S_v^\mu(\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_6))$ регулярно и аналитично [собственно, это не будет новым ограничением, поскольку $S(\Lambda)$ как однозначное представление является полиномом по Λ];
- 3) если $(\Lambda^{-1}\zeta_1, \dots, \Lambda^{-1}\zeta_N) \in \mathcal{R}_N$, то $W_\mu(\Lambda^{-1}\zeta_1, \dots, \Lambda^{-1}\zeta_N)$, как итерированная функция, будет регулярной и аналитической относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_6$. Это имеет место для

$$F(\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_6)) = F_1(\lambda_1, \dots, \lambda_6).$$

Для действительных $\lambda_1, \dots, \lambda_6$, $F_1(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ постоянна, так как им соответствуют действительные преобразования из группы L_+^\uparrow ; следовательно, в рассматриваемой окрестности F_1 вообще будет постоянной.

В. Мы встретимся с трудностями лишь тогда, когда захотим доказать, что $F(\Lambda)$ постоянна во всей области, которая характеризуется условием $(\Lambda^{-1}\zeta_1, \dots, \Lambda^{-1}\zeta_N) \in \mathcal{R}_N$ и которую мы будем обозначать символом \mathcal{J} . Как мы знаем из пункта Б, это имеет место в окрестности E или вообще в соответствующей окрестности какой-нибудь точки \mathcal{J} . Это легко показать, пользуясь тем, что $S(\Lambda)$ есть представление и $L_+(C)$ — группа. Если \mathcal{J} — односвязная область, то отсюда следует постоянство $F(\Lambda)$ на \mathcal{J} . Таким образом, докажем, что каждая точка $\Lambda \in \mathcal{J}$ может быть связана с E линией, целиком расположенной в \mathcal{J} .

Это значит (если мы теперь заменим Λ^{-1} на Λ), что для каждой точки $(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathcal{R}_N$ и для каждого Λ , для которого $(\Lambda\zeta_1, \dots, \Lambda\zeta_N) \in \mathcal{R}_N$, мы должны найти путь $\Lambda(t)$ с $\Lambda(0) = E$ и $\Lambda(1) = \Lambda$, так что всегда

$$(\Lambda(t)\zeta_1, \dots, \Lambda(t)\zeta_N) \in \mathcal{R}_N \quad \text{для } 0 \leq t \leq 1.$$

Г. Последнюю задачу можно упростить. Пусть $\Lambda = \Lambda_1 M \Lambda_2$ и $\Lambda_{1,2} \in L_+^\uparrow$. При этом M означает нормальную форму (1.10). Тогда искомым путь можно составить из следующих отрезков:

- (1) $\Lambda(t) = \Lambda_2(t)$ для $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$, $\Lambda_2(0) = E$, $\Lambda_2\left(\frac{1}{3}\right) = \Lambda_2$,
- (2) $\Lambda(t) = M(t) \Lambda_2$ для $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$, $M\left(\frac{1}{3}\right) = E$, $M\left(\frac{2}{3}\right) = M$ (3.3)
- (3) $\Lambda(t) = \Lambda_1(t) M \Lambda_2$ для $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$, $\Lambda_1\left(\frac{2}{3}\right) = E$, $\Lambda_1(1) = \Lambda_1$.

Первый и третий отрезки пути, очевидно, не приводят ни к каким неприятностям, поскольку в группе L_+^1 выполняется условие (1), L_+^1 — односвязная группа, и область \mathcal{R}_N инвариантна относительно этой группы. Существование же второго отрезка устанавливается следующей леммой.

Л е м м а. Пусть $\zeta(\varphi, \chi) = M(\varphi, \chi) \zeta$ с действительными $|\varphi| < \pi$ и χ :

$$M(\varphi, \chi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi & 0 & 0 \\ i \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \chi & -i \operatorname{sh} \chi \\ 0 & 0 & i \operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \chi \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Кроме того, пусть $\zeta \in \mathcal{R}$ и $\zeta(\varphi, \chi) \in \mathcal{R}$. Тогда и $\zeta(t\varphi, t\chi) \in \mathcal{R}$ для $0 \leq t \leq 1$.

Поскольку упомянутый в лемме путь зависит только от φ и χ и не зависит от ζ , то и в случае многих векторов этот путь непосредственно является искомым вторым отрезком.

Прежде чем перейти к доказательству леммы, заполним пробел, относящийся к тем $\Lambda \in \mathcal{J}$, которые принадлежат к нормальной форме (1.11). Эти исключения здесь можно не рассматривать, потому что \mathcal{J} — открытая область, а также потому, что каждая окрестность такого преобразования содержит в себе преобразования, принадлежащие нормальной форме (1.10).

Д. Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $\zeta(\varphi, \chi) = \xi(\varphi, \chi) + i\eta(\varphi, \chi)$, находим

$$\eta^0(\varphi, \chi) = \eta^0 \cos \varphi + \xi^1 \sin \varphi > 0, \quad (3.5)$$

$$(\eta(\varphi, \chi))^2 = A - B > 0, \quad (3.6)$$

причем

$$A = (\eta^0 \cos \varphi + \xi^1 \sin \varphi)^2 - (\eta^1 \cos \varphi + \xi^0 \sin \varphi)^2 \quad (3.7)$$

и

$$B = (\eta^2 \operatorname{ch} \chi - \xi^3 \operatorname{sh} \chi)^2 + (\eta^3 \operatorname{ch} \chi + \xi^2 \operatorname{sh} \chi)^2. \quad (3.8)$$

Условие (3.5), а также условие $A > 0$, следующее из (3.6) и (3.8), определяют интервал φ в секторе $|\varphi| < \pi$, содержащий $\varphi = 0$, причем длина интервала меньше π . Обозначим через φ_0 середину этого интервала. Тогда $|\varphi_0| < \pi/2$ и

$$A = \alpha^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) - \beta^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0), \quad (3.9)$$

так что $|\varphi - \varphi_0| < \pi/2$.

Совершенно аналогично можно преобразовать к диагональному виду и B :

$$B = \gamma^2 \operatorname{ch}^2(\chi - \chi_0) + \delta^2 \operatorname{sh}^2(\chi - \chi_0), \quad (3.10)$$

причем всегда появляются особые случаи $\eta^2 = \varepsilon \xi^3$, $\eta^3 = -\varepsilon \xi^2$ при $\varepsilon = \pm 1$. В этих случаях (3.8) принимает вид

$$B = \gamma^2 e^{\pm 2\chi}. \quad (3.11)$$

Однако теперь для нормального случая в соответствии с предпосылками получаем для $t=0$ и $t=1$

$$F(t) = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \cos(t\varphi - \varphi_0) - \{\beta^2 + \gamma^2 + (\gamma^2 + \delta^2) \operatorname{sh}^2(t\chi - \chi_0)\}^{1/2} > 0. \quad (3.12)$$

Но теперь легко найти $F''(t) < 0$, по крайней мере если $\cos(t\varphi - \varphi_0) > 0$. Однако это выполняется для $0 \leq t \leq 1$, поскольку $|\varphi_0| < \pi/2$ и $|\varphi - \varphi_0| < \pi/2$. Следовательно, $F(t)$ — выпуклая функция на интервале $0 \leq t \leq 1$, и там выполняется условие

$$F(t) \geq tF(0) + (1-t)F(1) \geq \min\{F(0), F(1)\} > 0. \quad (3.13)$$

Используя теперь (3.6), (3.9) и (3.10), заключаем из условия (3.13), что для $0 \leq t \leq 1$

$$(\eta(t\varphi, t\chi))^2 > (F(t))^2, \quad (3.14)$$

тогда как в соответствии с (3.5) автоматически получаем

$$\eta^0(t\varphi, t\chi) > 0. \quad (3.15)$$

Особый случай (3.11) рассматривается, очевидно, аналогичным образом (или исходя из соображений непрерывности).

§ 4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В \mathcal{R}'_N

Благодаря теореме, приведенной в § 3, главная трудность теперь преодолена. Остальная часть исследования состоит в выводе элементарных следствий из этой теоремы. Разумеется,

¹) См. [31].

функцию $W_v(\zeta_1 \dots, \zeta_N)$, о которой говорится в теореме, мы будем отождествлять с одним из средних по вакууму, о которых говорилось в § 2. Тогда можно утверждать, что особое физическое значение имеют действительные точки в \mathcal{R}'_N [это такие точки, в которых регулярным является исходное вакуумное среднее (2.2), а не только его аналитическое продолжение, если оно существует)]. Это утверждение оказывается правильным. Обозначим эти точки $(q_1 \dots, q_N)$. Они характеризуются следующей теоремой.

Т е о р е м а. Действительная точка $(q_1 \dots, q_N)$ принадлежит \mathcal{R}'_N только, если при произвольных неотрицательных λ_k , сумма которых не равна нулю, вектор $\lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_N q_N$ будет пространственно-подобным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие является, очевидно, *необходимым*. Именно, если $(q_1 \dots, q_N) \in \mathcal{R}'_N$, то существует представление $\Lambda \in L_+(C)$, такое, что $q_k = \Lambda \zeta_k$ и $(\zeta_1 \dots, \zeta_N) \in \mathcal{R}_N$. Далее, сумма $(\sum \lambda_k \zeta_k)^2 = \zeta^2$ тогда будет действительной. Однако величина $\zeta = \sum \lambda_k \zeta_k$ принадлежит \mathcal{R} , так как ее мнимая часть находится в V_+ , поскольку все $\lambda_k \geq 0$. Нетрудно теперь убедиться, что *действительные* квадраты векторов из \mathcal{R} будут отрицательными.

Условие является *достаточным*. Если оно выполняется, то наименьший выпуклый конус \mathfrak{f} , содержащий все q_l , т. е. образованный всеми точками $\xi = \sum \lambda_l q_l$ с $\lambda_l \geq 0$, состоит из одних только пространственно-подобных векторов. Следовательно, этот конус имеет с передним конусом V_+ и задним конусом V_- только общую вершину $\xi = 0$. Поэтому существует касательная к V_+ плоскость $\alpha_v \xi^v = 0$, отделяющая V_+ от \mathfrak{f} . Имеем $\alpha_v \xi^v \geq 0$ для $\xi \in V_+$, $\alpha_v \xi^v \leq 0$ для $\xi \in \mathfrak{f}$ и, наконец, $\alpha_v \xi^v \leq 0$ для $\xi \in V_-$. Точно так же существует касательная к V_- плоскость $\beta_v \xi^v = 0$, отделяющая V_- от \mathfrak{f} , такая, что $\beta_v \xi^v \geq 0$ для $\xi \in V_-$, $\beta_v \xi^v \leq 0$ для $\xi \in \mathfrak{f}$ и $\beta_v \xi^v \leq 0$ для $\xi \in V_+$. При этом α и β — нулевые векторы, нормированные условием $(\alpha\beta) = -2$. Тогда существует преобразование $\Lambda \in L_+^\dagger$, переводящее α в $(1, 1, 0, 0)$ и β в $(-1, 1, 0, 0)$. Теперь для $\xi \in \mathfrak{f}$, во-первых, $\alpha_v \xi^v \leq 0$ и, во-вторых, $\beta_v \xi^v \leq 0$; следовательно $\xi^1 \geq \xi^0$ и $\xi^1 \geq -\xi^0$. В частности, в этой системе координат имеем $q_l^1 > |q_l^0|$ для $l = 1, 2, \dots, N$.

Теперь легко доказать, что q_l можно записать в виде $q_l = \Lambda^{-1} \zeta_l$, причем $(\zeta_1 \dots, \zeta_N) \in \mathcal{R}_N$ и $\Lambda \in L_+(C)$. Полагаем, например,

$$\zeta^0 = i q^1, \quad \zeta^1 = i q^0, \quad \zeta^2 = q^2, \quad \zeta^3 = q^3$$

или $\xi_l = \Lambda \varrho_l$, причем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_+(C).$$

Тем самым теорема доказана.

К сожалению, ответ на вопрос, можно ли еще расширить без дополнительных предположений область регулярности, полученную в предыдущем параграфе, остается, по-видимому, неизвестным. Однако достоверно известно, что действительные точки регулярности не будут затронуты этим расширением. Это следует из того, что можно без труда указать функции, хотя и регулярные в \mathcal{R}_N , но сингулярные в любой наперед заданной действительной точке вне \mathcal{R}_N . Например, пусть $(\xi_1 \dots, \xi_N)$ — действительная точка вне \mathcal{R}_N . Тогда по нашей теореме существуют $\lambda_k \geq 0$ при $\sum \lambda_k = 1$, такие, что $(\sum \lambda_k \xi_k)^2 = 0$ или $(\sum \lambda_k \xi_k)^2 - 1 = 0$. Вообще говоря, функции не обращаются в нуль внутри \mathcal{R}_N , хотя каждую из них можно сделать равной нулю в наперед заданной точке. Функция, обратная этой, и будет искомой.

§ 5. СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ ЛОКАЛЬНОСТЬ; ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО CPT 1)

Локальностью называется требование, чтобы физические величины, построенные из операторов поля путем локальных операций, коммутировали для пространственно-подобных интервалов. Несколько иное требование, из которого в разумных теориях следует первое, гласит, что два произвольных оператора поля в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, должны или коммутировать или антикоммутировать. Это требование *сильной локальности* приводит к расширению области регулярности для W -функций. Для обсуждения этого вопроса мы введем новые обозначения. Положим

$$\mathcal{W}_v(x_0, x_1 \dots, x_N) = \langle \overset{(0)}{\psi}_{v_0}(x_0) \overset{(1)}{\psi}_{v_1}(x_1) \dots \overset{(N)}{\psi}_{v_N}(x_N) \rangle_0 \quad (5.1)$$

и для комплексных векторов $(z_0, z_1 \dots, z_N)$

$$\mathcal{W}_v(z_0, z_1 \dots, z_N) = W_v(z_1 - z_0, z_2 - z_1, z_N - z_{N-1}). \quad (5.2)$$

1) См. [31].

Функция \mathcal{W} регулярна, если $(z_1 - z_0, z_2 - z_1, \dots, z_N - z_{N-1})$ лежит в \mathcal{R}'_N . Область, определенную таким способом, мы обозначим через \mathcal{S}'_N , содержащиеся в ней действительные точки — через (r_0, r_1, \dots, r_N) . Из теоремы, приведенной в § 4, следует, что для $i \neq k$ имеем $(r_i - r_k)^2 < 0$. Эта система неравенств, однако, в общем случае ничего не дает. Поэтому из локальности следует

$$\begin{aligned} \langle \psi_{v_0}^{(0)}(r_0) \psi_{v_1}^{(1)}(r_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(r_N) \rangle_0 = \\ = \sigma \langle \psi_{v_{k_0}}^{(k_0)}(r_{k_0}) \psi_{v_{k_1}}^{(k_1)}(r_{k_1}) \dots \psi_{v_{k_N}}^{(k_N)}(r_{k_N}) \rangle_0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

причем σ означает знак перестановки антикоммутирующих полей. Вводя \mathcal{W} -функции, перепишем (5.3) в виде

$$\mathcal{W}_v(r_0, r_1, \dots, r_N) = \sigma \tilde{\mathcal{W}}_v(r_{k_0}, r_{k_1}, \dots, r_{k_N}). \quad (5.4)$$

Функция $\tilde{\mathcal{W}}_v$ принадлежит операторам поля, полученным при перестановке. Очевидно, равенство (5.4) можно аналитически продолжить. Таким образом доказывается по меньшей мере регулярность функций в наименьшей инвариантной относительно перестановок z_0, z_1, \dots, z_N области, содержащей \mathcal{S}'_N . Мы не будем обсуждать вопрос о том, исчерпывается ли этим сильная локальность [37].

Далее, среди $(N+1)!$ перестановок z_k существует одна и притом только одна нетривиальная перестановка, не приводящая к увеличению области регулярности \mathcal{S}'_N . Она имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \psi_{v_0}^{(0)}(r_0) \psi_{v_1}^{(1)}(r_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(r_N) \rangle_0 = \\ = \sigma \langle \psi_{v_N}^{(N)}(r_N) \dots \psi_{v_1}^{(1)}(r_1) \psi_{v_0}^{(0)}(r_0) \rangle_0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

или (в достаточно ясных обозначениях)

$$\vec{\mathcal{W}}_{\vec{v}}(z_0, z_1, \dots, z_N) = \overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{\mathcal{W}}_{\overleftarrow{v}}(z_N, \dots, z_1, z_0). \quad (5.5a)$$

Если $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathcal{R}'_N$, где $\xi_k = z_k - z_{k-1}$, то будем иметь $(-\xi_N, -\xi_{N-1}, \dots, -\xi_1) \in \mathcal{R}'_N$, поскольку при операции PT эта точка переходит в точку $(\xi_N, \xi_{N-1}, \dots, \xi_1)$, и определение \mathcal{R}'_N симметрично по векторам ξ_k . Если в теории выполняются только перестановочные соотношения (5.5) и (5.5a) (конечно, это относится к действительным точкам \mathcal{S}'_N), то такая теория будет называться *слабо локальной*.

Следует отметить, что формула (5.5) приводит к соотношению для средних значений по вакууму в произвольных точках x_0, x_1, \dots, x_N . Именно, сначала из (3.1) и наших определений получаем, полагая $\Lambda = PT$ для действительных точек в \mathfrak{S}'_N ,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{v_0}^{(0)}(r_0) \psi_{v_1}^{(1)}(r_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(r_N) \rangle_0 = \\ = (-1)^n \langle \psi_{v_0}^{(0)}(-r_0) \psi_{v_1}^{(1)}(-r_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(-r_N) \rangle_0, \end{aligned}$$

или, учитывая (5.5),

$$\begin{aligned} \langle \psi_{v_0}^{(0)}(r_0) \psi_{v_1}^{(1)}(r_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(r_N) \rangle_0 = \\ = (-1)^n \sigma \langle \psi_{v_N}^{(N)}(-r_N) \dots \psi_{v_1}^{(1)}(-r_1) \psi_{v_0}^{(0)}(-r_0) \rangle_0. \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{v_0}^{(0)}(r_0) \psi_{v_1}^{(1)}(r_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(r_N) \rangle_0 = \\ = (-1)^n \sigma \langle \psi_{v_0}^{\star}(-r_0) \psi_{v_1}^{\star}(-r_1) \dots \psi_{v_N}^{\star}(-r_N) \rangle_0^{\star}. \quad (5.6) \end{aligned}$$

При этом n означает число индексов без точки, появившихся в (v_0, v_1, \dots, v_N) . Но соотношение (5.6) можно аналитически продолжить. Для этого определяем

$$\langle \psi_{v_0}^{\star}(x_0) \psi_{v_1}^{\star}(x_1) \dots \psi_{v_N}^{\star}(x_N) \rangle_0 = \tilde{W}_v(\xi_1, \dots, \xi_N), \quad (5.7)$$

после чего соотношение (5.6) для $\xi_k = \varrho_k$ принимает вид

$$W_v(\xi_1, \dots, \xi_N) = (-1)^n \sigma \tilde{W}_v^{\star}(-\xi_1^{\star}, \dots, -\xi_N^{\star}). \quad (5.8)$$

Аналитическое продолжение теперь очевидно. Сущность преобразования $\xi_k \rightarrow -\xi_k^{\star}$ состоит в том, что оно переводит \mathcal{R}_N в саму себя. Поэтому в обеих частях (5.8) можно перейти к действительной границе \mathcal{R} , и тогда с помощью (5.7) и (5.1) получается искомое соотношение

$$\begin{aligned} \langle \psi_{v_0}^{(0)}(x_0) \psi_{v_1}^{(1)}(x_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(x_N) \rangle_0 = \\ = (-1)^n \sigma \langle \psi_{v_N}^{(N)}(-x_N) \dots \psi_{v_1}^{(1)}(-x_1) \psi_{v_0}^{(0)}(-x_0) \rangle_0. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Относительно рассуждений, позволивших получить (5.9) из (5.5), необходимо сделать следующие замечания.

1) Достаточно предположить, что соотношение (5.5) выполняется в действительной окрестности произвольной точки $(r_0, r_1 \dots, r_N)$. Справедливость соотношений (5.5) для произвольной точки $(r_0, r_1 \dots, r_N)$ доказывается аналитическим продолжением.

2) Из соотношения (5.9) можно вывести снова (5.5). Для этого необходимо заменить в (5.9) $(x_0, x_1 \dots, x_N)$ точкой $(r_0, r_1 \dots r_N)$ и затем воспользоваться уравнением, аналогичным первому после формулы (5.5) уравнению. Таким образом, уравнения (5.5) и (5.9) эквивалентны.

3) Если можно найти такое преобразование $\theta\psi = \psi'$, при котором правую часть уравнения (5.9) можно привести к виду $\langle \psi_{v_N}^{(N)}(x_N) \dots \psi_{v_1}^{(1)}(x_1) \psi_{v_0}^{(0)}(x_0) \rangle_0$, то тогда θ будет антиавтоморфизмом теории (т. е. автоморфизмом с точностью до обращения порядка сомножителей)¹⁾. Наиболее важное значение при выборе имеет преобразование, впервые найденное в общем виде Паули:

$\psi'_v(x) = \theta\psi_v(x) = (-1)^n \psi_v(-x)$ для однозначного представления,
 $\psi'_v(x) = \theta\psi_v(x) = i(-1)^n \psi_v(-x)$ для двузначного представления.
 (5.10)

Это преобразование θ обладает существенным свойством: $\theta\psi^* = (\theta\psi)^*$, т. е. оно сохраняет действительность величин, существующую вначале²⁾. Требование, чтобы преобразование θ представляло антиавтоморфизм теории, обусловлено, разумеется, определенным выбором σ в (5.5). Из уравнений

$$\begin{aligned} \langle \psi_{v_0}^{(0)}(x_0) \psi_{v_1}^{(1)}(x_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(x_N) \rangle_0 = \\ = \langle \psi_{v_N}^{(N)}(x_N) \dots \psi_{v_1}^{(1)}(x_1) \psi_{v_0}^{(0)}(x_0) \rangle_0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

¹⁾ Другими словами, теория инвариантна по отношению к антиунитарному преобразованию $\theta\psi = \psi'^* = \psi^0$, поскольку правая часть уравнения (5.9) записывается в виде

$$\langle \psi_{v_0}^{(0)}(x_0) \psi_{v_1}^{(1)}(x_1) \dots \psi_{v_N}^{(N)}(x_N) \rangle_0^*.$$

²⁾ Как мы видели в § 1, наиболее естественное на первый взгляд условие $\psi'_v(x) = \tilde{\theta}\psi_v(x) = (-1)^n \psi_v(-x)$ для всех полей и $\sigma=1$ в (5.5) противоречит этому требованию. Кроме того, в § 6 мы увидим, что значение σ в (5.5) не может быть произвольным и должно подчиняться ограничениям, обусловленным положительно определенной метрикой в пространстве состояний. В нормальной теории эти ограничения запрещают значение $\bar{\theta}$, указанное в этом примечании.

с учетом (5.10) и (5.9) следует, что $\sigma = -1$, если число двузначных полей в (5.5) равно удвоенному нечетному числу, и $\sigma = +1$, если число двузначных полей в (5.5) кратно 4. Других случаев не бывает, так как средние значения по вакууму с нечетным числом двузначных полей равны нулю. Это значение σ совпадает со знаком перестановки двузначных полей в уравнении (5.5). Таким образом, получается следующая теорема.

Т е о р е м а *CPT*: Перестановочные соотношения (5.5), в которых σ есть знак перестановки полей с двузначными представлениями, эквивалентны (5.11), где штрихованные поля определяются преобразованием (5.10).

4) Остановимся теперь на этом выборе σ и кратко обсудим слабую локальность. Хорошо известно, что главная проблема математического характера состоит для теории поля в том, чтобы установить, допускают ли вообще нетривиальное решение общие постулаты квантовой теории вместе с требованием (сильной) локальности. При этом слова «нетривиальное решение» означают, что матрица рассеяния должна отличаться от единичной матрицы. Нам кажется излишним подчеркивать удручающее состояние наших знаний в этом вопросе.

Для слабой локальности *этой проблемы не существует*. В соответствии с полученной выше теоремой слабая локальность полностью эквивалентна симметрии θ . Легко доказать, что последняя согласуется с другими постулатами квантовой теории. Следовательно, всякой матрице рассеяния, инвариантной относительно *CPT*, можно сопоставить поля, подчиняющиеся условию (5.11), т. е. слабо локальные.

Напротив, сильная локальность приводит не к свойствам симметрии матрицы рассеяния, а к аналитическим свойствам матричных элементов, или в несколько обобщенном смысле, к дисперсионным соотношениям [28, 34].

§ 6. СВЯЗЬ СПИНА И СТАТИСТИКИ ¹⁾

В то время как значение σ в (5.5) оставалось до сих пор неизвестным, теорема о спине и статистике в своей наиболее узкой формулировке указывает, каким должно быть значение σ для усредненного по вакууму произведения некоторого поля на комплексно-сопряженное поле. Отсюда можно тогда заклю-

¹⁾ См. [32].

чить, какие из полей $\psi_\nu(x)$ безусловно не коммутируют с $\psi_\mu^\star(y)$ для пространственно-подобных интервалов.

В этом параграфе впервые будет существенно использоваться положительность скалярного произведения. Правда, уже в § 5 мы применяли поле ψ^\star , комплексно-сопряженное полю ψ . Однако там требовалось лишь, чтобы существовало эрмитово-скалярное произведение. Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а. Обозначим $\alpha_1 \dots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_m$ сокращенно символом ν . Из слабого перестановочного соотношения

$$\langle \psi_\nu^\star(x) \psi_\mu(y) \rangle_0 = (-1)^{n+m+1} \langle \psi_\mu(y) \psi_\nu^\star(x) \rangle_0 \quad (6.1)$$

для $(x-y)^2 < 0$ следует

$$\psi_\nu(x) \Omega = \psi_\mu^\star(x) \Omega = 0. \quad (6.2)$$

При этом Ω означает состояние вакуума.

З а м е ч а н и я. 1) Уравнение (6.1) в самом деле представляет собой слабое перестановочное соотношение, так как, согласно теореме из § 4, действительные векторы в \mathcal{R}_N тождественно совпадают с пространственно-подобными векторами. 2) Равенство (6.2) представляет собой сокращенную запись уравнения

$$\psi(f) \Omega = \psi^\star(f) \Omega = 0, \quad (6.2a)$$

причем

$$\psi(f) = \int f^\mu(x) \psi_\mu(x) d^4x \quad (6.3)$$

и

$$\psi^\star(f) = \int f^{\mu\star}(x) \psi_\mu^\star(x) d^4x \quad (6.3a)$$

являются операторами, усредненными по разрешенным пробным функциям.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (6.1) и (5.9) для произвольных x и y следует

$$\langle \psi_\nu^\star(x) \psi_\mu(y) \rangle_0 = - \langle \psi_\mu(-y) \psi_\nu^\star(-x) \rangle_0. \quad (6.4)$$

Умножая обе стороны на $f^{\nu\star}(x) f^\mu(y)$ и интегрируя по x и y , получаем

$$\|\psi(f) \Omega\|^2 = - \|\psi^\star(g) \Omega\|^2, \quad (6.5)$$

где $f^{\mu\star}(-x)$ обозначено через $g^{\mu}(x)$. Из равенства (6.5) следует утверждение теоремы¹⁾.

Наша теорема содержит существенное высказывание о спине и статистике, так как она утверждает, что *однозначное* поле, удовлетворяющее условию

$$\langle [\psi_{\nu}^{\star}(x), \psi_{\mu}(y)]_{+} \rangle_0 = 0 \quad \text{для } (x-y)^2 < 0,$$

уничтожает вакуум. То же самое справедливо для *двузначного* поля, для которого опять в случае $(x-y)^2 < 0$ выполняется условие

$$\langle [\psi_{\nu}^{\star}(x), \psi_{\mu}(y)]_{-} \rangle_0 = 0.$$

Однако получить желаемый результат [т. е. что из (6.4) следует *исчезновение* поля $\psi_{\nu}(x)$] без дополнительных предположений, по-видимому, нельзя.

В качестве такого дополнительного предположения можно применить, например, постулат о *сильной локальности*, в соответствии с которым операторы поля на пространственно-подобных интервалах либо коммутируют, либо антикоммутируют. Тогда имеем:

С л е д с т в и е. Из сильной локальности и из (6.1) вытекает, что $\psi_{\nu}(x) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала следует (6.2), и отсюда для действительных точек в \mathcal{S}'_N :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0(r_0) \varphi_1(r_1) \dots \psi_{\mu}(r_k) \dots \varphi_N(r_N) \rangle_0 = \\ = \sigma \langle \varphi_0(r_0) \varphi_1(r_1) \dots \varphi_N(r_N) \psi_{\mu}(r_k) \rangle_0 = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

При этом σ — знак, а φ_l — любые другие поля теории. Поскольку (r_0, r_1, \dots, r_N) есть точка, в которой правая часть равенства (6.6) регулярна, то отсюда следует

$$\langle \varphi_0(x_0) \varphi_1(x_1) \dots \psi_{\mu}(x_k) \dots \varphi_N(x_N) \rangle_0 = 0. \quad (6.7)$$

Итак, все средние по вакууму значения, содержащие в качестве множителя поле ψ_{μ} , исчезают. Значит, обращается в нуль и ψ_{μ} .

Разумеется, это следствие можно также получить и с другими дополнительными предположениями. Далеко не очевидно, почему равенство (6.2) нельзя объявить постулатом. Если же мы

¹⁾ Этот способ доказательства можно, очевидно, обобщить на специальные средние значения по вакууму произведений с большим числом сомножителей. Автору неизвестно, куда приводит такое обобщение.

хотим потребовать, чтобы для полей выполнялось асимптотическое условие [28], то (6.2) окажется противоречием. При этом возникает то преимущество, что можно говорить о частицах и следствие на самом деле будет относиться к статистике.

Однако прежде мы хотели бы утверждать, что вопрос о совместимости положительной метрики с (сильной) локальностью все-таки нельзя надолго откладывать в сторону. Ослабляя требование локальности, мы получаем значительно более широкие рамки для теории, свободные от противоречий, но и не дающие никаких интересных следствий. Отказываясь от положительной метрики, мы должны, конечно, разрешить еще очень много трудных проблем, но когда эти трудности будут преодолены, то возникнет опасность, что фундамент теории, казавшийся столь прочным, потонет в море произвола.

Тот факт, что теорема о спине и статистике странным образом требует предположений о сильной локальности и положительной метрике, хотелось бы рассматривать как указание на то, что исследование этого вопроса и в дальнейшем будет плодотворным — после того как этот вопрос долгое время был верным спутником великого физика.

Эта статья—дань уважения к дню 60-летия В. Паули—была закончена в ноябре 1958 г. После неожиданной кончины Вольфганга Паули автор не решился ее переработать.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Heisenberg W., Pauli W., Zs. f. Phys., 56, 1 (1929); 59, 168 (1930).
2. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A114, 243 (1927).
3. Jordan P., Zs. f. Phys. 44, 473 (1927).
4. Jordan P., Wigner E., Zs. f. Phys., 47, 631 (1928).
5. Jordan P., Pauli W., Zs. f. Phys., 47, 151 (1928).
6. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 43, 172 (1927).
7. Jordan P., Ergebn. exakt. Naturwiss., 7, 206 (1928).
8. Pauli W., Handbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. 24/1, S. 258 (См. перевод: В. Паули, Принципы волновой механики, М.—Л., 1947.)
9. Bohr N., Rosenfeld L., Mat.-fys. Medd., 12, No. 8 (1933).
10. Pauli W., Weisskopf V., Helv. phys. Acta, 7, 709 (1934).
11. Pauli W., Ann. Inst. Poincaré, 6, 137 (1936).
12. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A155, 447 (1936).
13. Fierz M., Helv. phys. Acta, 12, 3 (1939); 23, 412 (1950).
14. Wigner E., Ann. Math., Princeton, 40, 149 (1939).

15. Bargmann V., Wigner E., Proc. Nat. Acad. Sci., Wash., **34**, 211 (1948); Wigner E., Zs. f. Phys., **124**, 665 (1947).
16. Pauli W., Phys. Rev., **58**, 716 (1940).
17. Pauli W., Belinfante F. J., Physica, **7**, 177 (1940).
18. Фейнман Р. Р., Phys. Rev., **76**, 749 (1949). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954.)
19. Pauli W., Progr. Theor. Phys., Osaka, **15**, 145 (1943).
20. Pauli W., Rev. Mod. Phys., **15**, 145 (1943).
21. Källén G., Encyclopedia of Physics, Bd. 5/1, S. 199.
22. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 914 (1951). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954.)
23. Wigner E., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 546 (1932).
24. Lüders G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., **28**, No. 5 (1954).
25. Pauli W., в книге «Niels Bohr and the Development of Physics», London, 1955, p. 30. (См. перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.)
26. Lüders G., Zs. f. Naturforsch., **13a**, 254 (1958).
27. Klein O., Journ de phys. et rad., **9**, 7 (1938).
28. Lehmann H., Symonzik R., Zimmermann W., Nuovo Cimento, **6**, 319 (1957).
29. Wightman A., Phys. Rev., **101**, 860 (1956).
30. Hall D., Wightman A., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-fys. Medd., **31**, No. 5 (1957).
31. Jost R., Helv. phys. Acta, **30**, 409 (1957).
32. Burgoyne N., Nuovo Cimento, **8**, 607 (1958).
33. van der Waerden B. L., Die gruppentheoretische Methode, Berlin, 1932. (См. перевод: Б. Вандер Варден, Методы теории групп в квантовой механике, Харьков, 1938.)
34. Lehmann H., Nuovo Cimento, **10**, 579 (1958).
35. Källén G., Wightman A., Mat. Fys. Skr., **1**, No. 6 (1958).
36. Jost R., Helv. phys. Acta, Pauli Heft.
37. Ruelle D., Helv. phys. Acta, **32**, 135 (1959).

Х. КАЗИМИР

ПАУЛИ И ТЕОРИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ich mag diese Physik des festen Körpers nicht .
zwar habe ich damit angefangen. (Не нравится мне эта
физика твердого тела , хотя я сам с этого начинал —
нем.)

Это высказывание выражает чувства Паули по отношению к физике твердого тела. Действительно, это один из немногих разделов физики (наряду с теорией разряда в газах и теорией химической связи), которые Паули не любил. Паули в основном занимался фундаментальными проблемами, и это могло бы объяснить лишь его равнодушие, но не неприязнь. Например, к прикладным наукам он относился с насмешливой снисходительностью и очень забавлялся, когда, по его собственным словам, не понял ни слова из лекции, посвященной новым конструкциям термоионных ламп. В физике твердого тела его раздражало отсутствие математической строгости и логической полноты, использование плохо определенных моделей, равносильных введению неподдающихся проверке математических гипотез и имеющих силу лишь при умелой классификации огромного количества экспериментальных данных. С другой стороны, он восхищался работой Онзагера по переходам порядок — беспорядок: тут была модель, хотя и примитивная, но строго определенная; математическая задача представляла большой интерес и была решена Онзагером блестяще.

И все же Паули говорил, почти с сожалением, что сам был инициатором этой теории. Сейчас, когда физика твердого тела пытается объяснить свойства твердых тел, исходя из основных принципов, становится ясным, что каждый, кто участвовал в разработке основных идей квантовой механики, оказал также далеко идущее влияние на развитие физики твердого тела. С этой точки зрения влияние Паули быть может даже больше, чем он предполагал. Говоря более конкретно, мы можем упомянуть принцип Паули, лежащий в основе самих понятий элект-

ронных полос и дырок, созданную им волновую теорию электронных спинов, которая разъясняет и дополняет существовавшие ранее представления и имеет большое значение для всех работ по парамагнитному резонансу, и, наконец, представление о ядерном спине, который после продолжительного и несколько подчиненного положения в спектроскопии неожиданно после открытия ядерного спинового резонанса возродился к новой, удивительно плодотворной жизни. Но Паули говорил не о влиянии общего характера, он имел в виду свою единственную работу по парамагнетизму свободных электронов [1]. Действительно, эта работа сыграла выдающуюся роль в развитии теории твердого тела. Остановимся на ней подробнее.

В 1926 г., когда Паули написал свою первую и последнюю работу по теории твердого тела, построение квантовой теории быстро завершалось. Одна за другой странные экстраполяции старой квантовой механики, полученные кропотливым анализом спектроскопических данных, сводились к основным принципам. Гейзенберг указал, как ввести принцип запрета Паули в волновую механику систем из многих частиц: в частности, удалось объяснить отсутствие парамагнетизма в основном состоянии гелия. С другой стороны, еще не сложился квантовомеханический подход к статистике газов. Были известны обе статистики (Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака), но они рассматривались как более или менее эквивалентные возможности, и вопрос, какая из них описывает поведение газов, состоящих из частиц с массой, отличной от нуля, оставался спорным. Своей работой Паули по существу принял участие в этом споре. Он указывает, что соображения Гейзенберга о спектре гелия подтверждают применимость статистики Ферми — Дирака для электронного газа и затем вводит идеальный электронный газ как грубую модель для электронов в металле; его интересует прежде всего не описание свойства металла в свете идей новой квантовой механики, а возможность выбора между двумя статистиками.

В математическом подходе к задачам квантовой статистики проявилось обычное мастерство Паули. Он использует методы Гиббса и особенно метод «большого ансамбля», к которому многие из изучавших статистическую механику относились с подозрением, если вообще знали его. Паули объясняет подробно, что подобно тому, как введение канонического ансамбля позволяет обойтись без условия $E = \sum \varepsilon_s = \text{const}$, введение большого ансамбля исключает условие $N = \sum n_s = \text{const}$. После построения формализма ему было уже нетрудно

обобщить статистику Ферми — Дирака на частицы со спином. Это без сомнения самый прямой и элегантный из методов квантовой статистики и можно только удивляться тому, что некоторые авторы впоследствии предпочли использовать гораздо более неуклюжие и трудоемкие приемы.

Даже много лет спустя, в 1938 г., Крамерс пытался исправить положение, написав работу под названием «*Didaktisches zur Verwendung der Grand Ensembles in der Statistik*» (Уроки использования большого ансамбля в статистике) [2].

За разделами, посвященными общему формализму квантовой статистики, следует вычисление магнитной восприимчивости. Паули обнаруживает слабый зависящий от температуры парамагнетизм того же порядка величины, что и ожидавшийся диамагнетизм атомов. Таким образом, полная восприимчивость неферромагнитного металла может быть либо положительной, либо отрицательной, но по порядку величины она всегда одна и та же, что находится в согласии с экспериментом.

Однако Паули не решил спора. Он не утверждал, что электроны действительно подчиняются статистике Ферми — Дирака, тогда как статистика Бозе — Эйнштейна остается возможной для других газов (это оговаривается им в сноске в одной из последующих статей), и хотя он указывает на полное вырождение электронного газа, в работе отсутствует замечание, что это объясняет, почему электроны проводимости не оказывают ощутимого влияния на теплоемкость.

Лишь Зоммерфельд полностью оценил значение идей Паули. Начав там, где остановился Лоренц, и введя идею Паули об электронном ферми-газе, Зоммерфельд смог показать, что многие трудности старой теории автоматически ликвидируются. Вскоре затем Блох начал изучать волновую функцию электрона в периодическом потенциале. С этого момента физика твердого тела превратилась в быстро развивающуюся отрасль знания. Специалисты в этой области с благодарностью признают, что многим обязаны пионерской работе Паули. Попытаемся устранить те ее черты, которые он находил неприемлемыми.

В подготовке статьи большую помощь мне оказал доктор Г. Мейер, которому я выражаю искреннюю благодарность.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Pauli W., Zs. f. Phys., 41, 81 (1927).
2. Kramers H. A., Proc. Acad. Sci. Amst., 41, 10 (1938); Collected Papers, Amsterdam, p. 738.

Р. ПАЙЕРЛС

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предметом этой статьи является квантовая теория твердого тела, особенно те ее разделы, на которые работы Паули оказали наибольшее влияние.

Перечисляя те отрасли физики, в которые Паули внес важный вклад, можно не заметить теорию твердого тела, так как число его работ в этой области невелико, а также потому, что он часто высказывал сомнение, может ли исследование твердого тела быть серьезным занятием для физика-теоретика. Отрасль физики, где существенные черты каждой проблемы выявляются часто только в форме грубых предположений (и где стало обычаем делать предположения более грубые, чем необходимо), — такая отрасль физики не могла отвечать его высокой требовательности; тем не менее, Паули явился инициатором важных направлений в исследовании многих проблем в теории твердого тела и проявлял живой интерес к еще большему их числу.

По-видимому, не будет преувеличением сказать, что начало современной электронной теории металлов было положено в работе Паули о парамагнетизме электронного газа [1]. Вспомним обстановку в период написания статьи. Экспериментальные данные в то время уже ясно указывали, что носителями электричества в металлах должны быть электроны. Наиболее прямые доказательства были получены, по-видимому, в экспериментах по ускорению, в которых непосредственно измерялось отношение массы носителей к их заряду. Поэтому многие авторы пытались применить известные законы механики и термодинамики к движению электронов.

В результате этих исследований возникла ситуация, полная ложных надежд, когда каждому предсказанию, согласующемуся с опытом, можно было противопоставить другие, резко противоречившие ему, а каждому рассуждению, приводившему, казалось бы, к разумному определению одного из параметров теории из экспериментальных данных, противопоставлялись другие рассуждения, приводившие к совершенно непохожим результатам.

Например, из высокой проводимости типичных металлов следовало, что плотность электронов в металле велика, порядка одного электрона на атом. Проводимость электронного газа выражается формулой

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{e^2 n \tau}{m},$$

где e и m — заряд и масса носителей; n — их число в единице объема; τ — время между столкновениями, которое можно представить в виде l/v (причем v — скорость носителей, а l — их средняя длина свободного пробега). Если считать, что плотность равна числу валентных электронов, а v — их тепловая скорость, то из наблюдаемых значений проводимости следовало, что длина свободного пробега по крайней мере в десять раз больше периода решетки, даже при комнатной температуре; было бы очень странно, если бы порядок величины l оказался много больше.

Это подтвердилось порядком величины коэффициента Холла, который измеряет поперечную разность потенциалов, создаваемую поперечным магнитным полем в проводнике с током. Этот коэффициент пропорционален $1/ne$. Для некоторых металлов этот коэффициент имел знак, противоположный тому, который соответствует отрицательным носителям, что было трудно объяснить, но величина его почти всегда соответствовала одному или нескольким электронам на атом.

В таком случае удельная теплоемкость должна содержать электронную часть. Согласно закону равномерного распределения, каждый электрон должен вносить $\frac{3}{2}k$ в удельную теплоемкость металла, и в случае одного электрона на атом это превысило бы значение Дюлонга — Пти на 50%; однако удельные теплоемкости всех металлов при высоких температурах находились в отличном согласии с законом Дюлонга — Пти, а при низких температурах уменьшались в соответствии с теорией Дебая.

Причину такого противоречия можно было бы видеть в применении кинетической теории к электронам; возможно, кинетическая энергия электронов почему-то не возрастала с температурой, как следовало бы ожидать согласно кинетической теории. Этому, очевидно, противоречило значение коэффициента Видемана — Франца, измеряющего отношение теплопроводности к электропроводности, и тем самым отношение тепловой энергии, переносимой электронами, к их заряду. Значение этого коэффициента находилось в разумном согласии с предсказанием кинетической теории.

Другое серьезное противоречие было связано с магнитными свойствами металлов. Наличие свободных электронов, обладающих спином, должно вызывать парамагнетизм в соответствии с законом Кюри, постоянная которого зависит только от плотности электронов. Многие металлы на самом деле обладают парамагнитной восприимчивостью, но она практически не зависит от температуры (а не обратно пропорциональна абсолютной температуре, как того требует закон Кюри), и значительно меньше по величине предсказываемой теорией для плотности порядка одного электрона на атом при комнатной температуре.

В то время принцип запрета Паули уже оправдал себя при описании строения атомов, и Ферми [2] рассмотрел следствия из предположения, что этот принцип справедлив и для частиц газа. Ферми, по-видимому, имел в виду обыкновенный газ, состоящий из атомов и молекул, для которого квантовые поправки носят скорее академический характер, за исключением области крайне низких температур; кроме того, еще не было ясно, что принцип запрета, а следовательно, и статистика Ферми, применим только к некоторым частицам и неприменим к другим.

Решающий шаг, сделанный затем Паули, состоял в применении видоизмененной статистики к электронам в металлах. С одной стороны, принцип запрета безусловно соблюдался для различных электронов внутри атома, и логика требовала, чтобы он выполнялся также для «свободных» электронов в металле; с другой стороны, малая масса и высокая плотность электронов означали, что даже при комнатной температуре главным эффектом является вырождение.

В соответствии с этим Паули применил новый вид статистики к проблеме парамагнетизма электронов. Для этой цели он получил заново результат Ферми, используя не слишком распространенный в то время метод большого канонического

распределения и дал этому результату чрезвычайно ясное обоснование (вывод Ферми был более привычным и был основан на формуле Стирлинга, применимость которой для случая, когда на каждое состояние приходится 1 или 2 частицы, весьма сомнительна). Результат легко обобщался на случай, когда присутствовало магнитное поле. Магнитная восприимчивость на электрон оказывалась равной

$$\frac{3\mu^2}{2E_0},$$

где μ — магнетон Бора; E_0 — граничная энергия распределения Ферми (химический потенциал). Полученное значение отличается от значения Кюри множителем $2kT/3E_0$ и объясняет, следовательно, независимость от температуры и меньшую величину эффекта, поскольку для большинства металлов E_0 имеет величину порядка нескольких электрон-вольт, т. е. существенно больше, чем kT при комнатной температуре.

Качественно результат понять нетрудно; принцип запрета разрешает двум электронам с противоположно направленными спинами занимать одно орбитальное состояние. Если один из этих электронов под действием поля должен изменить направление спина на противоположное, то для этого он должен совершить переход в состояние орбитального движения, не занятое электроном с соответствующим направлением спина. Если разность энергий для этих орбитальных состояний больше kT , то такой переход невозможен, так что поле действует только на электроны в полосе kT вблизи наивысшего занятого состояния. Число этих электронов отличается от общего числа множителем порядка kT/E_0 , поэтому восприимчивость Кюри должна быть уменьшена на множитель такого же типа.

По порядку величины этот результат уже объяснял парамагнитную восприимчивость многих металлов. Полного же соответствия, подчеркивал Паули, ожидать не следует, так как электроны можно рассматривать как идеальный газ Ферми только в грубом приближении. Позднее мы еще укажем на некоторые существенные поправки к парамагнетизму.

И все же этот результат показывал, что новая статистика позволяет устранить ряд старых противоречий электронной теории металлов. Этот успех побудил Зоммерфельда [3] рассмотреть тем же способом проблему теплоемкости металлов. Оказалось, что и в этом случае величина теплоемкости, следующая из равномерного распределения, умножается на множитель порядка

$kT/E_0 < 1$, так как переходы в состояние с энергией возбуждения порядка kT возможны только для электронов в полосе шириной kT вблизи границы распределения Ферми. Таким образом, сразу объяснялось отсутствие электронного вклада в теплоемкость металлов. Электронная теплоемкость становится заметной только при очень низких температурах, когда решеточная часть теплоемкости следует закону Дебая ($\sim T^3$), так что электронная часть, линейная по температуре, оказывается в конце концов основной.

Зоммерфельд [4] и его сотрудники предприняли также попытку распространить новый подход на явления переноса в металлах, однако здесь в ряде случаев сохранились серьезные трудности. Согласно новой точке зрения, главными носителями тока были электроны с энергией вблизи границы распределения Ферми, так что скорость этих электронов должна быть намного выше тепловой скорости, соответствующей закону равнораспределения. Поэтому время между столкновениями, оцененное по наблюдаемой проводимости, соответствовало бы даже еще большим длинам свободного пробега, что плохо поддавалось объяснению. Кроме того, при обычном описании столкновений с атомами предполагают, что длина свободного пробега не зависит от температуры, что приводит к независимости проводимости от температуры, тогда как даже классическая пропорциональность $T^{-1/2}$ уже противоречила наблюдаемой при высоких температурах пропорциональности T^{-1} , не говоря уже о значительно более сильной зависимости от температуры, обнаруженной при низких температурах. Аномальный знак эффекта Холла и некоторых других гальваномагнитных и аналогичных коэффициентов для некоторых металлов, а также существование заметного эффекта магнетосопротивления оставались без объяснения.

Следующий важный шаг был сделан Блохом [5], изучавшим движение электронов в периодическом поле. Он показал, что периодичность идеальной решетки приводит к электронным волновым функциям, похожим на волновые функции свободных электронов, но содержащим модулирующий множитель с периодичностью самой решетки. Оказалось, что в отсутствие ускоряющего поля электроны могут двигаться в идеальной решетке с отличной от нуля средней скоростью (хотя последняя, вообще говоря, меньше, чем для свободных электронов той же энергии). Другими словами, проводимость электронов в идеальной решетке бесконечно велика, а, следовательно, сопротивление

обусловлено только отклонениями от идеальной периодичности. Таким образом, существуют две главные причины электропроводности: дефекты решетки и примеси, а также тепловые колебания решетки. Это соответствует экспериментальным данным, говорящим об увеличении сопротивления металла за счет примесей и механических искажений кристаллической решетки, а также о высоком сопротивлении сплавов. «Идеальная» проводимость, оставшаяся после исключения этих вторичных эффектов, очевидно, уже зависела от температуры. Выше температуры Дебая, когда колебания решетки можно описывать классически, их интенсивность пропорциональна T ; это сразу объясняет пропорциональность сопротивления температуре в этой области.

При низких температурах на первый взгляд можно ожидать, что по аналогии с рассеянием рентгеновских лучей нулевые колебания решетки должны создавать конечное сопротивление даже при абсолютном нуле. Блох показал, что эта аналогия ошибочна. Сопротивление зависит от столкновений, в которых электрон отклоняется от своего пути и требует, следовательно, изменения импульса. Поскольку даже в периодической решетке импульс сохраняется с точностью до векторов, кратных определенным базисным векторам импульса (соответствующих брэгговским отражениям), изменение импульса электронов должно сопровождаться рождением или поглощением колебательного кванта, или фонона, что необходимо сопровождается передачей энергии. Этот процесс легко происходит для рентгеновских лучей, энергия которых значительно выше энергии фононов; однако он невозможен для электронов, находящихся в тепловом равновесии с решеткой. Нормально не существует фононов с энергией больше kT , так что ни один фонон не может поглотиться или возникнуть, поскольку ни один электрон не может потерять энергию больше kT , не совершая перехода в уже занятое состояние. Поэтому единственными возможными являются процессы рождения и поглощения фононов с энергией меньше kT , и эти процессы идут с одинаковой интенсивностью.

Число таких «столкновений» пропорционально T^3 , как и среднее число фононов. Однако при очень низких температурах мы имеем дело с длинноволновыми фононами с импульсом, пропорциональным kT . Поэтому в процессе столкновения, в котором рождается или поглощается такой фонон, электрон отклоняется только на угол порядка kT/cp_0 (где c — скорость звука, а p_0 — импульс электрона на границе распределения

Ферми). Поскольку при последовательных столкновениях отклонения происходят в случайных направлениях, результирующее отклонение растет лишь как корень из числа столкновений и, следовательно, рассеяние на малые углы дает в сопротивление вклад, пропорциональный квадрату угла. С помощью таких рассуждений Блох получил для «идеального» сопротивления при низких температурах закон $\sim T^5$.

Аномальный знак коэффициента Холла и некоторых других смешанных явлений переноса был объяснен на основе идеи Гейзенберга; исходным пунктом этой идеи явилось замечание о том, что вещество, каждый атом которого обладает замкнутой оболочкой, т. е. в котором наивысшая заполненная оболочка содержит максимальное число электронов, разрешаемое принципом Паули, не может быть проводником электричества, поскольку электроны могут двигаться в этом веществе, только переходя в состояния с более высокой энергией, что требует конечной энергии возбуждения. Если же число электронов несколько меньше, чем необходимо для заполнения оболочек во всех без исключения атомах, оставшиеся вакансии, или «дырки», могут перемещаться, и эффективно ток будет переноситься дырками, которые являются носителями положительного заряда.

По предложению Гейзенберга мы подробно рассмотрели [6] эту картину и показали, что положительный эффект Холла возможен. Сначала этот вывод казался убедительным только для случая сильно связанных электронов, когда можно представить себе, что электроны большую часть времени движутся по орбитам и лишь случайно переходят на эквивалентную орбиту в соседний атом. В этой модели уровни энергии для электронов являются в основном атомными уровнями, но несколько расширенными в «полосы» вследствие движения от атома к атому. Поэтому ясно, что в такой модели существует возможность насыщения. Если электронов как раз столько, сколько надо для заполнения ряда полос, причем высшие полосы остаются пустыми, то никакой проводимости не возникает до тех пор, пока некоторое количество электронов не получит извне энергию, достаточную для перехода в следующую полосу. Такое вещество должно быть изолятором, а если число электронов окажется недостаточным, то возникнет дырочная проводимость.

Однако оставалось неясным, каким образом эту картину можно применить к более реалистическому случаю, когда главный эффект заключается в возмущении атомных орбит сосед-

ними атомами. Было показано [7], что в противоположном предельном случае, именно для практически свободных электронов с одним только слабым периодическим потенциалом, обусловленным атомами решетки, появляются разрывы в значениях электронного импульса, удовлетворяющих условиям Брэгга для дифракции на решетке. В одномерном металле это дало бы полосы, разделенные энергетическими щелями; и действительно, одномерный «металл» из цепочки эквидистантных атомов при четном числе электронов на атом всегда был бы изолятором.

В трех измерениях положение щели должно зависеть от направления движения электрона, и для достаточно слабого потенциала наивысшая энергия одной полосы в общем случае может превышать низшую энергию следующей полосы; однако ясно, что ответ на вопрос о том, будут ли полосы энергетически разделены, зависит от количественных характеристик симметрии решетки и силового поля, и возможность энергетической щели не ограничивается предельным случаем сильной связи.

Бриллюэн [8] до конца изучил вопрос о том, каким образом из брэгговских отражений для почти свободных электронов получались щели, определявшие характеристические «зоны» в импульсном пространстве для каждого типа структуры.

Вильсон [9] показал, что полупроводник, т. е. вещество, в котором число носителей изменяется с температурой экспоненциально, можно интерпретировать как случай, когда энергетическая щель между последней заполненной и следующей пустой зонами достаточно мала, так что электроны могут перескакивать через нее вследствие теплового возбуждения (внутренний полупроводник). Он указал также на альтернативную и на практике более частую возможность, когда полупроводником служит вещество с более широкой щелью, причем в примесных атомах содержатся электроны с энергией несколько ниже границы пустой зоны или вакантные состояния несколько выше верхнего края заполненной зоны («донорная» или «акцепторная» полупроводимость).

Эти достижения, решающую роль в которых сыграла работа Паули, привели к пониманию основных черт металлической проводимости, за существенным исключением явления сверхпроводимости. Все другие парадоксы были разрешены, и электронная теория металлов превратилась в область физики, в которой появилась возможность количественного и детального исследования конкретных явлений. Изложение дальнейшего разви-

тия современной электронной теории, последовавшей за этой ранней стадией, потребовало бы слишком много места.

Возвращаясь к проблеме магнетизма, отметим, что Паули отчетливо понимал грубый и качественный характер своей теории парамагнетизма и не ожидал количественного согласия между своей моделью и наблюдаемой восприимчивостью. В этой модели, в частности, не учитывались два существенных обстоятельства. Первое заключалось в том, что электроны не свободны, а движутся в периодическом потенциальном поле. Это влияет на плотность состояний как функцию энергии и соответственно изменяет величину энергии возбуждения электронов, необходимой для опрокидывания определенного числа электронных спинов.

Если пренебречь кулоновским взаимодействием, то эту величину можно легко оценить, поскольку плотность состояний влияет на парамагнитную восприимчивость точно так же, как и на электронную теплоемкость; поэтому можно точно выразить парамагнитную восприимчивость через теплоемкость, наблюдаемую при низких температурах, когда линейная электронная часть отделяется от вклада колебаний решетки, пропорционального T^3 .

Однако это сравнение не приводит (и не должно приводить) к согласию, и главная причина этого заключается, без сомнения, в электрон-электронном взаимодействии. Влияние этого взаимодействия (при прочих равных условиях) проявляется в тенденции к образованию электронных пар с параллельными спинами. Причина заключается в том, что два электрона с параллельным спином обладают антисимметричной волновой функцией, исчезающей в конфигурационном пространстве, если координаты этих электронов совпадают; поэтому эта функция мала, если электроны расположены близко друг к другу. Эта отрицательная корреляция уменьшает эффект их электростатического отталкивания.

Этот «обменный» эффект, ответственный, например, за то, что при одинаковом главном квантовом числе уровни ортоголия ниже уровней парагелия, будет благоприятствовать намагничиванию. Он нечувствителен также к температуре и поэтому не опровергает объяснения, данного Паули приближительному постоянству парамагнитной восприимчивости. Однако этот эффект увеличивает магнитную восприимчивость. В действительности, если он достаточно велик, то может сделать нормальным такое состояние металла, в котором существует большой

результатирующий спин, несмотря на то, что в соответствии с принципом запрета для ориентирования спинов требуется дополнительная кинетическая энергия. Результатом будет ферромагнетизм.

Мы не будем обсуждать здесь теории ферромагнетизма и ограничимся замечанием, что она обычно рассматривается на основе радикально отличающейся модели, в которой предполагается настолько большое взаимодействие электронов в каждом отдельном атоме, что вероятность найти более или менее нормальное число электронов в данном атоме пренебрежимо мала, хотя это и не противоречит принципу Паули. Эта модель аналогична классическому рассмотрению молекулы водорода Гайтлером и Лондоном.

Такая модель не оставляет места для проводимости и поэтому, по-видимому, противоречит изложенному выше подходу. Это очевидное противоречие становится более правдоподобным в свете замечания Мотта и Джонса [10]: единственными элементами, в которых обнаруживается ферромагнетизм, являются переходные элементы, содержащие, кроме внешних валентных электронов, незаполненную оболочку $3d$. Волновые функции $3d$ -электронов сконцентрированы в очень малой области и не могут сильно перекрываться для соседних атомов, так что в этом случае тенденция к уравниванию заряда может быть сильнее подчеркнутого выше эффекта переноса, ответственного за проводимость. Тот факт, что эта картина представляет лишь приближение, иллюстрируется аномально большой теплоемкостью этих ферромагнитных элементов. Добавочная теплоемкость имеет значительную величину не только ниже и в окрестности точки Кюри, как предсказывает модель Гайтлера — Лондона на основе зависимости ориентации спинов от температуры, но остается большой и даже возрастает при значительно более высоких температурах. Величина энтропии, соответствующая этой теплоемкости, значительно больше, чем следует из распределения по спинам, и, очевидно, обусловлена подвижностью магнитных электронов, не учитываемой в модели Гайтлера — Лондона.

Корректное рассмотрение этого эффекта, а также одновременного присутствия внутренних магнитных электронов и электронов проводимости представляет значительные трудности.

Интересно исследовать, может ли существовать ферромагнетизм также в предельном случае, когда все электроны можно считать электронами проводимости, т. е. когда можно наложить

их взаимодействие на одноэлектронные состояния Блоха. В простейшем виде эта проблема возникает при переходе к пределу свободных электронов, т. е. если пренебречь периодическим полем ионов решетки (необходимо только сохранить средний положительный заряд ионов во избежание нереалистичных эффектов), но включить кулоновское отталкивание между электронами.

Блох [11] рассмотрел эту задачу в теории возмущений и выяснил, что при достаточно низкой плотности электронов может возникнуть ферромагнетизм. Зависимость от плотности обусловлена тем, что кулоновское отталкивание обратно пропорционально расстоянию между электронами, т. е. изменяется, как кубический корень из плотности, в то время как кинетическая энергия, противодействующая в соответствии с принципом Паули ориентированию спинов, изменяется, как квадрат кубического корня из плотности. Однако как раз при условиях, когда взаимодействие достаточно сильно, чтобы преодолеть эффект кинетической энергии, теория возмущений, которую использовал Блох, становится неприменимой, так что его ответ представляет собой не более, чем качественное указание. Эта задача о ферромагнетизме свободных электронов — одна из немногих проблем в этой области, допускающих ясную математическую формулировку, но все-таки еще не решенных.

В модели Гайтлера — Лондона можно также обнаружить возможность антиферромагнетизма. Последний возникает при условии, что соседние атомы стремятся выстраивать свои спины в противоположных направлениях; поэтому если электронные спины в соседних атомах будут противоположными, то принцип Паули разрешает каждому электрону использовать пространство обоих атомов. В пределе свободных атомов эта тенденция уже учитывалась Паули при рассмотрении парамагнетизма, но убедительное исследование случая, промежуточного между состоянием свободных электронов и сильно упорядоченным антиферромагнитным состоянием, могущим возникнуть в пределе Гайтлера — Лондона, было бы трудным.

Ни один из упомянутых до сих пор факторов не может объяснить, почему многие металлы проявляют сильные диамагнитные свойства. Очевидно, ионные остовы, т. е. электроны внутренних оболочек, не участвующие в проводимости, дают диамагнитную восприимчивость того же порядка, что и атомы сравнимого радиуса с заполненными оболочками; однако их вклад обычно меньше парамагнетизма Паули и, безус-

ловно, не может объяснить что-нибудь подобное сильному диамагнетизму висмута.

Диамагнетизм атомов обусловлен влиянием магнитного поля на орбитальное движение электронов, которое до сих пор не учитывалось.

Хорошо известно, что в классической статистической механике орбитальное движение заряженных частиц не приводит к восприимчивости [12]. На первый взгляд можно высказать противоположное утверждение, поскольку электрон с компонентной скорости v в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, будет двигаться по траектории, проекция которой на эту плоскость есть окружность радиусом $r = mc v / e H$ [где e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света, H — магнитное поле (в системе единиц Гаусса)]. Отсюда можно заключить, что средний магнитный момент будет $evr/c = mv^2/H$. Этот результат, т. е. момент, не зависящий от заряда частицы, увеличивающийся со скоростью и уменьшающийся с H , не имеет физического смысла. Ошибка этого рассуждения состоит в том, что здесь не учитываются процессы, происходящие на границах области, доступной для электронов. Если мы представим электроны, содержащиеся в ограниченном объеме (например, в куске металла), то те электроны, орбиты которых пересекают поверхность, будут отражаться. Испытывая последовательно ряд таких отражений, эти электроны будут двигаться по траекториям, проекции которых охватывают всю область в направлении, противоположном направлению движения внутренних электронов по своим окружностям. Число таких поверхностных электронов мало, но площадь, охватываемая их орбитами, велика, и, продолжая это элементарное рассуждение, можно показать, что полный магнитный момент точно равен нулю.

Такое же рассуждение справедливо для небольшой части рассматриваемого объема, если учитывать все электроны, которые в каждый данный момент находятся внутри данного элемента объема, а не те электроны (как следовало бы из ошибочного рассуждения), для которых внутри элемента объема находятся центры кривизны.

Более простой и ясный способ получения того же результата состоит в том, чтобы начать с замечания о равенстве магнитного момента $-\partial F / \partial H$ (где F — свободная энергия, а H — магнитное поле). Поскольку в классической статистической механике свободную энергию можно получить, интегрируя содержа-

щуюся в ее определении функцию распределения сначала по импульсам и затем по координатам, и поскольку единственное влияние векторного потенциала A сводится к сдвигу импульса в каждой точке пространства на eA/c , то сразу очевидно, что свободная энергия не зависит от H .

Более прозаический вывод с помощью орбит, чувствительный к соответствующему использованию граничных условий, оставляет у многих впечатление, что мы имеем здесь дело с очень сложной ситуацией, и это, вероятно, отбило у многих желание обобщить рассмотрение проблемы на случай квантовых эффектов. Такое обобщение получил Ландау [13], показав, что в квантовой проблеме появляется новая особенность — дискретность уровней энергии, связанных с движением в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Классически это движение будет простым периодическим движением с удвоенной ларморовой частотой $\omega = eH/2mc$, а в квантовой механике ему соответствуют, естественно, дискретные энергетические уровни с интервалом между ними $2\hbar\omega = 2\mu H$ (где μ — магнетон Бора). Если интервал между этими уровнями пренебрежимо мал по сравнению с kT , т. е. с интервалом, на котором заметно изменяется функция распределения (Больцмана или Ферми), так что сумму можно заменить интегралом, то получается классический ответ. Разница между суммированием и интегрированием дает поправки порядка $(\mu H/kT)^2$ в относительной величине функции распределения или $(\mu H)^2/kT$ в свободной энергии, так что для невырожденного электронного газа получается восприимчивость, следующая закону Кюри. В случае вырожденного ферми-газа в намагничивании участвуют опять только частицы, энергия которых лежит в полосе шириной kT вблизи границы распределения Ферми, а в этой полосе содержится доля kT/E_0 от общего числа электронов. Таким образом, получается диамагнитная восприимчивость, не зависящая от температуры, как и парамагнетизм Паули.

Количественно рассмотрев эту проблему, Ландау показал, что как для вырожденного, так и для невырожденного случая диамагнетизм составляет треть спинового парамагнетизма, поэтому результаты Паули для свободных электронов должны быть умножены на $2/3$.

Простое и изящное рассмотрение Ландау не сразу получило всеобщее признание, так как возникло подозрение, что необходимо в явном виде учитывать поверхностные эффекты (при квантовом рассмотрении это трудно). В последовавшем споре

Паули с энтузиазмом поддержал результаты Ландау. В приближении свободных электронов диамагнетизм орбитального движения составляет точно одну треть спинового парамагнетизма; сильные диамагнитные свойства некоторых металлов этим эффектом не объясняются, даже при допущении диамагнитного эффекта замкнутой оболочки ионов. В то же время очевидно, что периодический потенциал решетки должен влиять на орбитальное движение иначе, чем на спин.

Один способ учета влияния периодического потенциала заключается в том, чтобы, исходя из зонной картины Блоха, включить магнитное поле, перемешивающее разные состояния Блоха в пределах одной зоны, и пренебречь при этом межзонными эффектами [14]. В этом случае диамагнетизм зависит от некоторой средней кривизны энергии как функции волнового вектора на поверхности Ферми. Джонс [15] показал, что особенно большая кривизна, а следовательно, и сильный диамагнетизм может получиться, если поверхность Ферми близко подходит к узкой щели между двумя зонами, и что это, по-видимому, имеет место в кристаллах, структура которых подобна висмуту, а также в некоторых сплавах, обладающих сильным диамагнетизмом. В этих случаях структуру можно представить как небольшое искажение более симметричной решетки. Область, занимаемая в более симметричном кристалле одной зоной, разделится тогда узкой щелью не менее чем на две зоны; это оказывается энергетически выгодным, когда щель почти совпадает с поверхностью Ферми; деформация в этом случае понизит электронные уровни под щелью, большинство из которых заполнено за счет повышения уровней энергии над щелью, в большинстве своем пустых.

Таким образом можно понять как своеобразную структуру этих веществ, так и тот факт, что они обладают энергетическими поверхностями, частично расположенными в такой близости к щели, что может встретиться большая кривизна, а следовательно, и сильный диамагнетизм.

Еще более яркий свет на эту ситуацию проливается эффектом де Гааза — ван Альфена. Эти авторы [16] открыли, что магнитная восприимчивость монокристаллов висмута как функция магнитного поля осциллирует при низких температурах. Это соответствует теории Ландау, предсказывающей аналогичное поведение [17]. При низких температурах функция распределения чрезвычайно сильно зависит от того, совпадает ли энергия Ферми E_F с одним из квантовых уровней Ландау

или нет. Поскольку интервал между этими уровнями пропорционален магнитному полю, то из сказанного непосредственно следуют осцилляции.

Если поверхность Ферми расположена вблизи минимума или максимума энергии как функции волнового вектора, так что эту функцию можно считать квадратичной, то теория Ландау будет справедлива с точностью до масштабных множителей. В этом случае изучение периода осцилляций, эквидистантного в переменной $1/H$, их амплитуды и зависимости от температуры и от ориентации кристалла обеспечивает большое количество экспериментальных данных, позволяющих воссоздать детальную картину движения электронов.

Увеличив точность эксперимента, Шенберг и его сотрудники [18] измерили эффект во многих металлах.

Выходя за пределы частного случая квадратичной функции для энергии, Онзагер [19] заметил, что в магнитном поле энергия движения в плоскости, перпендикулярной полю, сохраняется, но волновой вектор в этой плоскости (перпендикулярной импульсу), говоря на классическом языке, будет изменять свое направление со временем. Поэтому электрон описывает в импульсном пространстве траекторию, во многих случаях замкнутую, и систему можно проквантовать, пользуясь условиями Бора — Зоммерфельда для замкнутой орбиты. Такое полуклассическое рассмотрение оправдывается тем, что обычно здесь речь идет о больших квантовых числах, поскольку энергия Ферми очень велика по сравнению с «квантом» $2\mu H$.

Полуклассическое приближение было разработано Лифшицем [20], а его обоснование изучалось Харпером [21] и Брэйлсфордом [22]. Исследование этого эффекта оказалось наиболее плодотворным для выяснения формы энергетических поверхностей во многих металлах; ввиду простоты модели (не учитывающей многие сложные явления, например взаимодействие между электронами, колебания решетки и межзонные эффекты) получение хороших результатов в таких поразительных деталях кажется удивительным.

Дангл [23] обратил внимание на расширение уровней вследствие столкновений, уменьшающее эффект де Гааза — ван Альфена, а Адамс [24] подчеркнул значение межзонных эффектов, особенно в веществах вроде висмута, в которых существует узкая щель между двумя зонами. По-видимому, эти межзонные эффекты существенны для объяснения постоянства восприимчивости в слабых полях или при высоких температурах.

Влияние их на осцилляции де Гааза — ван Альфена по-настоящему пока еще не рассматривалось. Выдвигалось предположение [25], что в случае узкой щели межзонное взаимодействие приводит к сильной спин-орбитальной связи, вследствие которой в восприимчивости появляется заметная спиновая часть.

До этих строк наш обзор затрагивал лишь работы, основанные прямо или косвенно на работе Паули о парамагнетизме электронного газа. Исторически это была не первая его работа по физике твердого тела; первыми проблемами, привлечшими его внимание, были проблемы поглощения инфракрасных лучей в ионных кристаллах и родственная проблема теплопроводности изоляторов.

В современной физике едва ли найдется еще одна такая проблема, которая насчитывала бы столько неверных начинаний и столько теорий, не принимавших во внимание ряд существенных явлений, как это было в проблеме теплопроводности непроводящих кристаллов. В некоторых первых попытках эта проблема рассматривалась только с точки зрения чисто гармонических сил между атомами. В этом случае при нагревании группы атомов, т. е. при резком увеличении амплитуды их колебаний, энергия колебаний этих атомов распространяется через кристалл. Однако задача о переносе энергии в этом случае не описывается обыкновенными феноменологическими уравнениями теплопроводности, аналогично ситуации, возникающей при движении выбранной группы быстрых атомов в идеальном газе без столкновений.

Для корректного описания необходимо помнить, что предположение о гармонических силах, т. е. о силах, зависящих линейно от смещений атомов относительно их положений равновесия, справедливо лишь в первом приближении, кроме того, ангармонические члены, содержащие вторую или более высокие степени смещений, хотя и малы, но существенны для проблемы теплопроводности совершенно так же, как в почти идеальном газе столкновения редки, но существенны для явлений переноса. Для описания теплопроводности удобно применять понятие фононов, которые в отсутствие ангармоничности двигались бы в одном направлении бесконечно, причем ангармонические эффекты можно трактовать как столкновения, нарушающие движение фононов и приводящие к ограниченной длине их свободного пробега. Эта картина, которая будет использована и здесь, представляет удобный способ наглядной формулировки

проблемы даже при высоких температурах, где квантовые эффекты пренебрежимо малы и понятие фононов по существу излишне.

Дебай [26] хорошо понимал значение ангармонических сил; он построил характерную для него упрощенную картину, в которой фононы рассеивались флуктуациями плотности. Если упругие свойства твердого тела зависят от плотности, как это должно быть при учете ангармонических членов, то области с переменной плотностью будут рассеивать фононы. Поскольку средние квадратичные значения флуктуации плотности пропорциональны температуре, то эта модель дает тепловое сопротивление, также пропорциональное температуре, что приблизительно правильно для классической области выше дебаевской температуры. Модель Дебая описывает некоторые существенные черты процесса, но некорректна в деталях, поскольку флуктуации плотности в ней считаются статическими, тогда как в действительности они создаются звуковыми волнами; эти волны распространяются со скоростью, по порядку величины сравнимой со скоростью волн, рассеяние которых рассматривается, что имеет фундаментальное значение для динамики процесса.

Орнштейн и Цернике [27] пытались решить проблему для упругой сплошной среды с ангармоническими силами; однако и в этом случае также не учитывались некоторые существенные явления, поэтому при правильном рассмотрении модель сплошной среды, как мы увидим, все же не дает конечного сопротивления.

Паули рассмотрел проблему для модели Борна — Кармана, т. е. для линейной цепочки атомов с силами, действующими между ближайшими соседями, так что имелась только одна силовая постоянная для гармонических и вторая для ангармонических сил. По-видимому, он получил ненулевой результат для затухания колебаний решетки, о чем доложил на собрании Германского физического общества. В опубликованном изложении этого доклада [28] мы находим, по-видимому, единственную неправильную формулу, связанную с именем Паули.

Квадратичные члены в силах приводят к связи между различными модами, если комбинируемые частоты находятся в резонансе, т. е. если частота одной моды равна сумме или разности частот двух других. Передачу энергии между различными модами удобно описывать с помощью фононов; здесь мы имеем дело с процессом, когда из двух фононов образуется один, или наоборот.

Однако трансляционная симметрия решетки обеспечивает сохранение волнового вектора также и при взаимосвязи таких мод; и для того чтобы этот процесс происходил, сумма волновых векторов двух начальных фононов должна быть равна сумме волновых векторов конечных фононов с точностью до базисного вектора в пространстве обратной решетки.

В модели линейной цепочки это означает, что

$$f_1 + f_2 = f_3 + \text{кратное } \frac{2\pi}{a},$$

где a — период; f — вектор фононной решетки, по определению обычно лежащий между $-\pi/a$ и $+\pi/a$. Условие резонанса (сохранения энергии фононов) для соответствующих частот требует, чтобы

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3.$$

Поскольку для модели Борна — Кармана частота равна

$$\omega = A \left| \sin f \frac{a}{2} \right|$$

(где A — постоянная), то f_3 можно исключить и прийти к условию

$$\left| \sin f_1 \frac{a}{2} \right| + \left| \sin f_2 \frac{a}{2} \right| = \left| \sin (f_1 + f_2) \frac{a}{2} \right|,$$

которое можно свести к уравнению

$$\left| \sin (f_1 + f_2) \frac{a}{4} \cos (f_1 - f_2) \frac{a}{4} \right| = \left| \sin (f_1 + f_2) \frac{a}{4} \cos (f_1 + f_2) \frac{a}{4} \right|,$$

допускающему только решения $f_1 + f_2 = 4n\pi/a$ или $f_1 = 2n\pi/a$, или $f_2 = 2n\pi/a$ (где n — целое число). Однако эти решения тривиальны, так как они говорят о том, что один из рассматриваемых фононов имеет нулевую частоту и соответствует однородному смещению решетки. Для этого случая коэффициент, определяющий вероятность перехода, обращается в нуль, и во всяком случае мы не получаем истинного рассеяния. Результат Паули, вероятно, был получен на основе впечатления, что колебания с волновыми векторами f и $f + (2\pi/a)$ принадлежат разным модам.

Паули не был удовлетворен и продолжил исследование проблемы [29]. Оно привело к заключению, что в одномерной

модели с частотной кривой типа спектра Борна — Кармана в общем случае невозможно удовлетворить одновременно резонансному условию и условию сохранения волнового вектора. В трех измерениях эти условия могут выполняться главным образом ввиду существования разных ветвей спектра, т. е. разных мод колебаний с одинаковым волновым вектором, но различными направлениями колебаний. Если волновой вектор направлен по одной из осей кристалла, то это соответствует продольным и поперечным колебаниям, причем продольные моды в общем случае имеют более высокую частоту. Тогда для процессов, в которых, например, из двух поперечных фононов образуется один продольный или поперечный фонон комбинируется с продольным с образованием другого продольного фонона, можно найти решения законов сохранения.

По-видимому, это указывает на то, что в этом случае всегда может произойти число столкновений, достаточное для установления равновесия между фононными модами и для получения конечной теплопроводности. Количественно вычислить теплопроводность трудно, поскольку для этого требуется детальное знание фононного спектра, что в случае трех измерений сопряжено с большим объемом вычислительных работ даже при простых предположениях о силах. Зная спектр, необходимо определить комбинации волновых векторов, для которых выполняются законы сохранения, оценить величину ангармонической связи между ними и затем в заключение решить интегральное уравнение для распределения фононов.

Однако и без таких вычислений было очевидно, что если решение этого интегрального уравнения существует, то перенос тепла, обусловленный данным градиентом температуры, будет обратно пропорционален температуре (если можно пренебречь квантовыми эффектами, т. е. для температур выше дебаевской). Причина этого полностью объясняется простым рассуждением Дебая, хотя механизм фононного взаимодействия сложнее, чем в модели Дебая. Закон T^{-1} для теплопроводности, по-видимому, подтверждается опытом, хотя данные по теплопроводности при высоких температурах были и все еще остаются чрезвычайно скудными.

Однако на этом история не закончилась, Померанчук [30] заметил, что процессы столкновения, рассмотренные Пайерлсом, изменяют число длинноволновых продольных фононов не иначе, как посредством их взаимодействия с другими фононами сравнимой длины волны. Это можно увидеть из приве-

денных выше законов сохранения, предполагая, например, что f_1 — малый вектор (теперь уже трехмерный). Тогда, поскольку градиент ω по f есть групповая скорость, совпадающая для длинных волн со скоростью звука, находим

$$\omega_3 - \omega_2 = c_1 |f_1| = c_1 |f_3 - f_2|.$$

Следовательно, f_2 и f_3 должны представлять два фоновых с почти одинаковыми волновыми векторами и почти одинаковой частотой, причем отношение двух разностей равно продольной скорости звука. Это невозможно, если оба фоновых принадлежат одной ветви (оба продольные или оба поперечные), поскольку градиент полных частотных кривых меньше продольной скорости звука для длинных волн. Это невозможно и в том случае, когда f_2 и f_3 принадлежат разным ветвям, но не малы, так как в противном случае между частотами двух ветвей существовала бы конечная разность.

Отсюда следует, что длинноволновые продольные фоновые имеют среднюю длину свободного пробега, пропорциональную λ^5 или f^{-5} . Поскольку для малых f число мод, столкновения с которыми возможны, уменьшается в силу того, что оно пропорционально $f^2 df$, и поскольку коэффициенты связи также стремятся к нулю (в пределе $f=0$) мы будем иметь дело с однородным сдвигом решетки, который, очевидно, не может влиять на динамику. Если же средняя длина свободного пробега зависит от длины волны так сильно, то теплопроводность, обусловленная очень длинными волнами, расходится; по этой же причине интегральное уравнение, обсуждавшееся Пайерлсом, решения не имеет.

Отсюда Померанчук заключил, что конечный результат можно получить, только учитывая возможность четырехфононных процессов, например столкновение двух фононов, при котором последние исчезают и появляются два других. Для таких процессов всегда существует несколько возможных решений уравнений сохранения. Однако такие процессы возможны только при условии, что либо учитываются кубические члены в силах, либо квадратичные члены рассматриваются во втором порядке теории возмущений. Эти же эффекты зависят от более высокой степени фононных амплитуд. Кубические члены дают в интегральное уравнение вклад, пропорциональный T^2 , а члены второго порядка в квадратичных силах приводят к зависимости $T^{3/2}$. Поэтому приходится рассматривать интегральное уравнение, в котором имеются члены с разной температурной

зависимостью, причем линейные по T члены играют главную роль, а остальные необходимы для разрешимости уравнения. Померанчук высказал предположение, что решение этого уравнения приведет к закону $T^{3/2}$ или $T^{5/4}$ для сопротивления, в зависимости от того, какие члены учитывать в четырехфононном взаимодействии — кубические или второго порядка. Экспериментальных данных о зависимости такого типа в каких-либо реальных кристаллах не существует.

Затем последовал еще один сюрприз. Херринг [31] указал, что в рассуждениях Померанчука не учитывается то обстоятельство, что во многих кристаллах нельзя рассматривать высокочастотную (продольную) и низкочастотную (поперечную) ветви по отдельности, поскольку соответствующие частотные кривые для некоторых направлений пересекаются или сливаются. В результате в спектре всегда существуют определенные точки, в окрестности которых возможен переход с малым изменением частоты. В кристаллах подобного типа чрезмерно длинные свободные пробеги для длинноволновых продольных фононов отсутствуют, и мы возвращаемся к закону T для сопротивления. Поэтому следует ожидать, что в некоторых кристаллах будет наблюдаться этот закон, а в других — более сложная зависимость, предсказанная Померанчуком.

Насколько известно, это утверждение правильно отражает состояние теории в настоящее время; однако детальная классификация кристаллов, в которых должна проявляться та или иная зависимость, а также оценка величины проводимости для различных случаев и экспериментальная проверка этих заключений пока предоставлены будущему.

Тот факт, что такое положение существует сейчас через 34 года после того, как эту проблему изучал Паули, подтверждает его мнение о том, что это интересная проблема, а также объясняет, почему первое приближение не могло сразу раскрыть все существенные особенности ситуации.

Совершенно иные проблемы возникают при переходе к низким температурам, когда требуется включение квантовых эффектов. Как отмечено Пайерлсом [29], жизненно важное значение для этой области приобретает структура решетки. Если кристалл заменяется упругим континуумом, то закон сохранения волнового вектора будет выполняться без возможного добавления базисного вектора обратной решетки. Этот закон будет тогда играть такую же роль, как закон сохранения импульса при столкновении молекул, и сумма волновых векторов по всем

фононам будет сохраняться так же, как сохраняется полный импульс газа. Столкновения между фононами тогда не смогут остановить общий дрейф фононного газа, аналогично тому, как столкновения между молекулами не могут затормозить поток газа в трубе с гладкими стенками.

Для теплопроводности газа это не существенно, поскольку число молекул при их столкновениях сохраняется, поэтому в трубе с закрытыми концами дрейф приведет к накоплению газа на одном конце, в результате чего возникнет градиент давления, который прекращает дрейф. (Необходимо, однако, учитывать, что теплопроводность газа можно измерить только при условии, что конвекция отсутствует.) В случае фононов закона сохранения их числа не существует, и температурный градиент по необходимости сопровождается градиентом фононной плотности, приводящим к появлению дрейфа.

Таким образом, теплопроводность идеального кристалла может иметь конечное значение только при учете структуры решетки, разрешающей столкновения, в которых суммарный волновой вектор изменяется на базисный вектор обратной решетки. Простым примером такого процесса служит столкновение двух фононов, движущихся направо, с длинами волн, несколько меньшими, чем учетверенный основной период решетки. Поскольку длина волны, равная удвоенному периоду решетки, соответствует стоячей волне, в которой поперечные плоскости атомов колеблются в противофазе, результатом будет волна, распространяющаяся влево. Из-за такой перемены направления групповой скорости на обратное эти процессы приобрели непривлекательное наименование процессов переброса (Umklapp).

Столкновение подобного типа может произойти, очевидно, только при условии, если хотя бы один из первоначально существовавших фононов будет иметь волновой вектор, равный по крайней мере $\frac{2}{3}$ наименьшего вектора обратной решетки. Поскольку число фононов заданной частоты при низких температурах уменьшается экспоненциально, то количество актов переброса при низких температурах также должно становиться экспоненциально малым, а это приводит к экспоненциальному возрастанию теплопроводности. Экспоненциальный рост был обнаружен на опыте в Оксфорде Берманом и др. [32]. То обстоятельство, что он не был открыт раньше, можно объяснить несколькими причинами. Первая из них заключается в отсутствии количественной теории, которая позволила бы найти

температуру, ниже которой экспоненциальный закон становится преобладающим. В прежней теории температура, при которой это происходит, сильно завышалась. Кроме того, экспоненциальная зависимость отчетливо проявляется только для почти идеального кристалла, поскольку дефекты решетки, не обладая трансляционной симметрией, могут приводить к рассеянию без сохранения волнового вектора даже в случае длинных волн.

Не обращалось внимания и на то, что дефектами решетки в этом смысле будут служить также разные изотопы атомов, образующих решетку, так как разность масс изотопов сказывается на прохождении волн различным образом, а это тоже будет отклонением от свойств идеальной решетки. Это обстоятельство было упомянуто Померанчуком [33]; однако для интерпретации экспериментов оно стало применяться только после того, как тщательные исследования в области низких температур показали, что предсказанная экспоненциальная зависимость в некоторых веществах наблюдается, а в других отсутствует, причем к первым относятся вещества, в которых преобладает один изотоп каждого элемента.

Наконец, укажем на особенность, связанную с конечным размером образцов. При низких температурах длина свободного пробега фононов увеличивается настолько, что может стать сравнимой с размерами рассматриваемого кристалла, и мы приближаемся к условиям, аналогичным режиму Кнудсена в сильно разреженных газах, когда рассеяние на границах преобладает над рассеянием внутри объема, а кажущаяся проводимость начинает зависеть от размеров. Такое влияние размеров обсуждалось Казимиром [34], а совместное влияние всех указанных факторов на низкотемпературную проводимость рассматривалось Клеменсом [35].

Проблема возникновения дрейфа фононов и электронов усложняет также теорию электропроводности металлов, но вряд ли стоит обсуждать этот вопрос здесь; вероятно, он может служить лучшим примером таких проблем твердого тела, которые Паули считал слишком сложными, чтобы они привлекали его внимание.

Поскольку работы Паули по спиновым переходам в переменных полях, а также по общей проблеме неравновесных состояний в статистической механике (весьма существенные для важных разделов теории твердого тела) рассматриваются в других статьях этой книги, то мы не будем их касаться.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Pauli W., Zs. f. Phys., **41**, 81 (1927).
2. Fermi E., Zs. f. Phys., **36**, 902 (1926).
3. Sommerfeld A., Zs. f. Phys., **47**, 1 (1928).
4. Sommerfeld A., Zs. f. Phys., **47**, 43 (1928).
5. Bloch F., Zs. f. Phys., **52**, 555 (1928).
6. Peierls R., Zs. f. Phys., **53**, 255 (1929).
7. Peierls R., Ann. d. Phys., **4**, 121 (1930).
8. Brillouin L., Quantenstatistik, Berlin, 1931. (См. перевод: Л. Бриллюэн, Квантовая статистика, Харьков — Киев, 1934.)
9. Wilson A. H., Proc. Roy. Soc., **A133**, 458 (1931); **134**, 277 (1931).
10. Mott N. F., Jones H., Properties of Metals and Alloys, Oxford, 1936.
11. Bloch F., Zs. f. Phys., **57**, 545 (1929).
12. Bohr N., Диссертация, Copenhagen, 1911; van Leeuwen, Диссертация, Leiden, 1919.
13. Ландау Л. Д., Zs. f. Phys., **64**, 629 (1930).
14. Peierls R., Zs. f. Phys., **80**, 763 (1933).
15. Jones H., Proc. Roy. Soc., **A144**, 225 (1934); **147**, 396 (1934).
16. de Haas W. J., van Alphen, Proc. Acad. Sci. Amst., **33** (1930).
17. Peierls R., Zs. f. Phys., **81**, 186 (1933).
18. Shoenberg D., Phil. Trans., **A245**, 1 (1952); Progress of Low-Temperature Physics, vol. 2, 1957.
19. Onsager L., Phil. Mag., **43**, 1006 (1952).
20. Лифшиц И. М., Козевич А. М., ЖЭТФ, **29**, 730 (1955).
21. Harper P. G., Proc. Phys. Soc., **A68**, 874 (1955).
22. Brailsford A. D., Proc. Phys. Soc., **A70**, 275 (1957).
23. Dingle R. B., Proc. Roy. Soc., **A211**, 517 (1952).
24. Adams E. N., Phys. Rev., **89**, 633 (1953).
25. Yafet Y., Phys. Rev., **85**, 478 (1952); **106**, 679 (1957).
26. Debye P., Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, Leipzig, 1914.
27. Ornstein L. S., Zernike F., Proc. Acad. Sci. Amst., **19** (1925).
28. Pauli W., Verh. deutsch. phys. Ges., (3) **6**, 10 (1925).
29. Peierls R., Ann. d. Phys., **3**, 1055 (1929).
30. Померанчук И. Я., Journ. of Phys. (CCCP), **4**, 259 (1941).
31. Herring C., Phys. Rev., **95**, 954 (1954).
32. Berman R., Adv. Phys., **2**, 103 (1953); Berman R., Foster E. L., Ziman J. M., Proc. Roy. Soc., **A237**, 344 (1956).
33. Померанчук И. Я., Journ. of Phys. (CCCP) **7**, 197 (1943).
34. Casimir H. B. G., Physica, **5**, 495 (1938).
35. Klemens P. G., Proc. Roy. Soc., **A208**, 108 (1951).

МАРКУС ФИРЦ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ВВЕДЕНИЕ

Долгие годы В. Паули регулярно читал курс лекций по статистической механике, неизменно пробуждая в своих внимательных слушателях представление о красоте и большом значении этой увлекательной теории. Естественно, что за все написанное мною я несу полную ответственность, но я все же думаю, что точка зрения на проблемы и подход к их решению в этой статье будут носить отчетливый отпечаток всего, чему я научился на лекциях Паули.

Когда в конце прошлого столетия Больцман и Гиббс выступали с систематическим обоснованием статистической механики, положение их было очень трудным во многих отношениях. В то время атомы и их движения, которые должны были объяснить термодинамические свойства тел, многим еще казались всего лишь гипотетическими вымыслами. Во всяком случае ничего достоверного о физических свойствах атомов тогда не было известно, и в адрес статистической механики можно было с известным правом бросить упрек, что она пытается объяснить известное (т. е. феноменологические законы термодинамики) неизвестным. Напуганные неудачей всех попыток свести законы оптики и электродинамики к механическим моделям, многие ученые полагали, что от механической модели надо отказаться и в учении о теплоте. Они считали более правильным рассматривать теплоту наравне с электрической энергией как особую форму энергии, превращение которой в другие формы энергии описывается термодинамикой. Вынужденный защищаться под напором авторов подобных рассуждений, Больцман писал во введении к своей «Теории газов» [1]:

«Действительно, если история науки показывает, как часто теоретическо-познавательные обобщения оказывались ложными, то не может ли модное в настоящее время направление, так же как и признание качественно различных видов энергии, оказаться шагом назад? Кто предвидит будущее? Поэтому шире дорогу для любого направления, прочь с дороги любая догматика в атомистическом или антиатомистическом смысле! Кроме того, называя представления теории газов механическими аналогиями, мы уже этим ясно показываем, как далеки мы от того, чтобы считать, что эти представления во всех своих подробностях соответствуют истинным свойствам мельчайших частиц тел».

Сегодня, после того как атомная физика повсюду оказалась в центре научных исследований, нам уже нелегко представить себе, как трудно было Больцману и Гиббсу бороться за признание своих идей. Показательно в этой связи, что даже Планк принял больцмановскую статистическую интерпретацию энтропии лишь тогда, когда у него не осталось никакого иного пути для вывода открытого им закона излучения. Теперь же каждый физик считает естественным атомистическое обоснование термодинамики, так как иначе все здание этой теории выглядело бы очень странно на фоне остальных областей теоретической физики.

Особенно странным нам кажется, что в термодинамике необходимо всюду делать строгое различие между теплотой и работой, хотя первое начало говорит об их эквивалентности. Причем такое различие возможно только в том случае, если оно обосновывается наличием адиабатических стенок. Последние, хотя и не должны обладать никакими термодинамическими свойствами, тем не менее должны препятствовать выравниванию температур. Кроме того, в теории химических равновесий приходится предполагать существование катализаторов, позволяющих осуществлять любые химические реакции. Здесь, безусловно, речь идет о фикциях, не могущих быть подтвержденными на опыте, и Паули с полным правом называл их «волшебными снадобьями».

Статистическая механика не нуждается ни в каких волшебных средствах. Она объясняет своеобразные термодинамические свойства макроскопическим поведением системы, обладающей невообразимо большим числом степеней свободы. Различие между теплотой и работой теряет при этом свой абсолютный смысл: теплота — это та часть энергии, которую следует

приписать макроскопически ненаблюдаемым степеням свободы. Однако то, что наблюдается макроскопически, существенно зависит от возможностей наблюдения. Поэтому теплота и тем самым энтропия определяются в статистической механике, строго говоря, всегда только по отношению к макроскопическому наблюдателю. Однако здесь, выходя за пределы термодинамики, можно приписать энтропию всем макроскопическим состояниям, независимо от того, равновесны ли они или нет.

Энтропия, как показал Больцман, оказывается мерой «вероятности» рассматриваемого макроскопического состояния. Она определяется количеством микроскопических состояний, которые приводят к одному макроскопическому состоянию. Одновременно она указывает, как часто может встречаться такое состояние с течением времени. Предполагается, что количество микроскопических состояний измеряется в классической механике соответствующим фазовым объемом, а в квантовой теории — числом содержащихся в нем стационарных состояний. Однако то обстоятельство, что тем самым одновременно измеряется временная частота, с которой появляется соответствующее этому числу макроскопическое состояние, представляет собой механическую теорему, называемую «эргодической гипотезой».

Общего доказательства этой теоремы получить еще не удалось, хотя в ее справедливости не сомневается, вероятно, никто. Ибо все достижения статистической механики существенно основываются на этой гипотезе. В особенности это относится к теории тепловых флуктуаций, т. е. теории произвольных отклонений от равновесия.

В последующем изложении мы сначала дадим, как нам кажется, физически удовлетворительную формулировку эргодической теоремы. После этого мы рассмотрим различные статистические распределения, которые мы всегда будем понимать как распределения во времени, и обсудим их связь с различными возможностями термодинамического описания системы, причем особенно подчеркнем то обстоятельство, что в критических точках, в тройной точке или в точках фазовых переходов различные распределения будут уже неравновесными. Иллюстрацией этому должно служить подробное рассмотрение флуктуационных процессов. Прежде всего следует указать, что решающую роль в этих случаях играют поверхностные эффекты.

§ 1. ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ¹⁾

Рассмотрим замкнутую, конечную, консервативную, классическую механическую систему с очень большим числом степеней свободы f , микроскопическое состояние которой описывается $2f$ каноническими координатами $p_k(t)$, $q_k(t)$. Мы рассматриваем их как декартовы координаты точки $P(t)$ в евклидовом фазовом пространстве. Макроскопическое состояние характеризуется значениями таких макроскопических переменных, как E — энергия, V — объем, в котором находится система, $\rho(X, t)$ — распределение плотности внутри этого объема и т. д. Обозначим эти переменные через (E, α) , где α охватывает все остальные переменные, кроме энергии. Когда наблюдается состояние (E, α) , то фазовая точка $P(t)$ лежит в определенной области фазового пространства $G_{E, \alpha}$. Поэтому макроскопическим состояниям соответствует разбиение фазового пространства на области $G_{E, \alpha}$, тем меньшие по размеру, чем больше число различных состояний. Все состояния с одинаковой макроскопической энергией образуют энергетическую оболочку G_E :

$$G_E = \sum_{\alpha} G_{E, \alpha}, \quad (1.1)$$

которая задается неравенством

$$E \leq H(p_k, q_k) < E + \Delta E. \quad (1.2)$$

Интервал ΔE зависит от точности макроскопического измерения энергии, однако следует считать, что $\Delta E/E$ принимает конечное, не слишком малое значение.

Если $\varepsilon = H(p_k, q_k)$ — значение микроскопической энергии, то оно определяет в фазовом пространстве «энергетическую поверхность», по которой движется точка $P(t)$. Энергетическая поверхность также подразделяется соответственно областям $G_{E, \alpha}$ на области $\gamma_{E, \alpha}$, обладающие фазовым объемом

$$\omega_{\varepsilon, \alpha} = \int_{G_{E, \alpha}} \delta \{H(p, q) - \varepsilon\} dp dq. \quad (1.3)$$

Фазовый объем самой поверхности энергии определяется тогда формулой

$$\omega_{\varepsilon} = \sum_{\alpha} \omega_{\varepsilon, \alpha}. \quad (1.4)$$

¹⁾ См. [2, 3].

Он должен быть конечным. Предположим далее, что области $G_{E,\alpha}$ таковы, что их фазовый объем $\Omega_{E,\alpha}$ приближенно можно считать равным $\omega_{E,\alpha} \Delta E$:

$$\Omega_{E,\alpha} = \int_{G_{E,\alpha}} dp dq \sim \omega_{E,\alpha} \Delta E. \quad (1.5)$$

Энергетическая оболочка тогда будет иметь объем

$$\Omega_E = \omega_E \Delta E. \quad (1.6)$$

Максвелл и Больцман полагали, что фазовая точка $P(t)$ с течением времени проходит через каждую точку энергетической поверхности (эргодическая гипотеза). В таком случае по теореме Лиувилля отсюда следует, что среднее время пребывания системы в состоянии (E, α) должно быть пропорциональным $\Omega_{E,\alpha} \sim \omega_{E,\alpha}$. Однако эргодическая гипотеза, конечно, неправоверна. Но ее можно заменить следующим более слабым предположением.

Пусть

$$\begin{aligned} X_{E,\alpha}(t) &= 1, \quad \text{когда } P(t) \text{ в } G_{E,\alpha}, \\ X_{E,\alpha}(t) &= 0, \quad \text{когда } P(t) \text{ вне } G_{E,\alpha}. \end{aligned}$$

Тогда будет существовать среднее по времени $\overline{X_{E,\alpha}}$ «почти для всех» начальных значений $P(0)$. Оно равно

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_{E,\alpha}(t) dt = \frac{\Omega_{E,\alpha}}{\Omega_E}. \quad (1.7)$$

Мы называем эту гипотезу «эргодической теоремой». В этой формулировке слова «почти для всех» означают, что из множества всех начальных состояний p_k, q_k можно выделить часть p_k, q_k , которая обладает нулевой мерой и для которой среднее по времени (1.7) не существует или, хотя и существует, но не совпадает с (1.7).

Эргодическая теорема содержит утверждение не только о системе, но и о наблюдателе, поскольку ее формулировка предполагает разбиение фазового пространства на области $G_{E,\alpha}$. Можно сказать, что если она справедлива, то система будет эргодической по отношению к некоторому наблюдателю.

Утверждение о том, что среднее по времени $\overline{X_{E,\alpha}}$ существует почти для всех начальных значений p_k, q_k , доказано.

Однако значение этого среднего в общем случае неизвестно. Поэтому неизвестно, каким образом, независимо от эргодической теоремы, можно характеризовать эргодические системы или каким образом наблюдатели могут установить, что по отношению к ним система эргодична.

Как показал Биркгофф, эргодическая теорема является следствием метрической транзитивности системы. Система называется транзитивной, если в фазовом пространстве существует одно и притом только одно инвариантное определение меры, а именно каноническое определение меры. В силу теоремы Лиувилля, именно это определение меры инвариантно. Однако метрическая транзитивность означает нечто гораздо большее, чем условие (1.7), поскольку теперь не требуется никакого разбиения фазового пространства на области $G_{E,\alpha}$ в результате макроскопического наблюдения. Поэтому метрически транзитивная система эргодична относительно произвольного наблюдателя. Ее можно назвать «абсолютно эргодической» системой. Кроме того, то обстоятельство, что макроскопические системы обладают колоссальным числом степеней свободы, не играет здесь никакой роли. Большое число степеней свободы $f \sim 10^{20}$ все же ведет к следствию, при котором условие (1.7) вовсе не должно выполняться точно, и $\overline{X_{E,\alpha}}$ может отличаться от $\Omega_{E,\alpha}/\Omega_E$ на много порядков, причем физически это ничего не означает. (Если $\overline{X_{E,\alpha}} = a \cdot \Omega_{E,\alpha}/\Omega_E$, то пренебрежимо малым по сравнению с f должен быть лишь $\lg a$!)

Поэтому вполне вероятно, что для каждого физически возможного макроскопического наблюдателя уравнениям (1.7) приближенно удовлетворяют и такие макроскопические системы, которые не являются метрически транзитивными.

Хопф [2]¹⁾ доказал, что материальная точка, движущаяся по поверхности постоянной отрицательной кривизны, представляет «абсолютно эргодическую» систему. Число степеней свободы в этом случае $f=2$. То обстоятельство, что такая простая система является «абсолютно эргодической», дает основание полагать, что несравненно более сложные системы статистической механики обладают значительно более слабым свойством (1.7). Доказательство этого предположения возможно, разумеется, лишь при использовании колоссальности числа степеней свободы f и при условии, что макроскопические опыты обладают физическим смыслом.

¹⁾ См. также [3].

До сих пор мы предполагали, что система описывается классической механикой. Однако нашу формулировку эргодической проблемы можно перенести без существенных изменений и в квантовую механику [4]. Тогда $X_{E,\alpha}(t)$ будет квантовомеханической вероятностью состояния (E, α) , принимающей значения от 0 до 1; $\Omega_{E,\alpha}$ — число нестационарных собственных состояний, принадлежащих данному макроскопическому состоянию; Ω_E — число стационарных состояний на энергетической оболочке. Легко видеть, что среднее значение (1.7) существует, и можно снова потребовать, чтобы оно приближенно равнялось $\Omega_{E,\alpha}/\Omega_E$. Это требование представляет собой утверждение о макроскопическом наблюдателе, и фон Нейман [5]¹⁾ пытался доказать, что оно выполняется почти всегда. При этом он использовал предположение о «распределении вероятности» для наблюдателей. Но если это предположение принимается, то, как указали Ландсберг и Фаркхар [7], из него следует, что достаточно большая система должна находиться в равновесии почти для всех наблюдателей. Отсюда необходимо заключить, что предположение фон Неймана лишено физического смысла. К тому же введение априорных вероятностных гипотез с целью доказать эргодическую теорему нельзя признать последовательным. То, что подчеркивалось уже П. и Т. Эренфестами [8] по поводу старой эргодической гипотезы, справедливо и для сформулированной здесь эргодической теоремы: она остается механической теоремой (конечно, неявно она включает характеристику того, что следует считать макроскопическим состоянием), служащей для того, чтобы свести так называемую вероятность макроскопических состояний к частотам во времени. Тем самым исключается понятие априорной вероятности, причем отпадает необходимость снова вводить его в другом месте.

Хопф [2] доказал для эргодических систем еще теорему о перемешивании, уточняющую соображения, выдвинутые Гиббсом в гл. 12 его книги [9]. Теорема о перемешивании гласит, что всякое распределение плотности на энергетической поверхности через очень длинный промежуток времени становится почти равномерным. Однако как ни замечательна эта теорема, она имеет мало отношения к тому факту, что через определенный промежуток времени достигается термодинамическое равновесие. Еще П. и Т. Эренфесты при критике гиббсовой «главы о размешивании» указывали на то, что времена, необходимые для

¹⁾ См. также [6].

достижения в какой-то степени равномерного распределения плотности, по порядку величины, должны соответствовать временам возврата, введенным Пуанкаре, тогда как термодинамическое равновесие в большинстве случаев устанавливается очень быстро. Здесь следует разъяснить, чем характеризуется это равновесие. Предположим, следуя Больцману, что энтропия состояния (E, α) определяется равенством

$$S(E, \alpha) = k \lg \Omega(E, \alpha).$$

Измеряемые разности энтропии по порядку величины всегда равны kf . Следовательно, если состояние (E, α) должно иметь заметно большую энтропию, чем состояние (E, β) , то должно выполняться условие

$$\lg \Omega(E, \alpha) - \lg \Omega(E, \beta) = \varepsilon f,$$

причем ε может быть малым числом, но εf всегда еще очень велико, поскольку $f \sim 10^{20}$. Поэтому отношение

$$\frac{\Omega(E, \alpha)}{\Omega(E, \beta)} = e^{\varepsilon f}$$

чудовищно велико, например $\sim e^{10^{12}}$, что соответствует $\varepsilon = 10^{-8}$. С течением времени поэтому встречаются практически только те состояния, для которых энтропия $S(E, \alpha)$ почти не зависит от α , т. е. постоянна. При этом все же будут происходить почти неизмеримые малые флуктуации энтропии. Они соответствуют статистическим отклонениям системы от состояния равновесия, например флуктуациям ее плотности. Переход в это состояние равновесия наступает, как только фазовая точка выйдет из области $G_{E,\beta}$, чрезвычайно малой по сравнению с $G_{E,\alpha}$, а это в большинстве случаев происходит через короткий промежуток времени.

Все эти соображения, какими бы поучительными они ни были, обладают большим недостатком — вследствие своего чересчур общего характера они не указывают способа доказательства утверждения (1.7) для конкретной системы.

Решающий шаг в этом направлении удалось сделать ван Хову [10], когда он поставил в качестве исходного вопрос о том, каким способом система достигает равновесия. В рамках квантовой теории этот вопрос впервые рассматривался Паули [11], который вывел в теории возмущений уравнение

$$\dot{X}_\alpha = \sum_\beta (X_\beta W_{\beta\alpha} - X_\alpha W_{\alpha\beta}). \quad (1.8)$$

Здесь $W_{\alpha\beta}$ — вероятность перехода из состояния α в состояние β . Поскольку $W_{\alpha\beta}/W_{\beta\alpha} = \Omega_\beta/\Omega_\alpha$, то отсюда следует, что X_α асимптотически становятся пропорциональными Ω_α . При этом вывод Паули сделал предположение, что фазы невозмущенной системы будут всегда некогерентными, а это соответствует гипотезе беспорядка, обычной также в теории газов.

Ван Хов поставил перед собой цель вывести прежде всего (1.8), не пользуясь статистическими предположениями. Он рассмотрел системы с f степенями свободы, описываемые функцией Гамильтона $H = H_0 + \lambda V$, причем H_0 описывает свободные частицы или волны, а λV — их взаимодействие. Если ввести параметры α , естественным образом описывающие собственные состояния H_0 , то макроскопическим величинам должны соответствовать операторы $A = A(\alpha)\delta_{\alpha\alpha'}$, причем $A(\alpha)$ медленно изменяется относительно α .

Если функция Шредингера системы имеет вид

$$\varphi(t) = e^{-iHt}\varphi_0, \quad (1.9)$$

а $C(\alpha)$ означают коэффициенты разложения φ_0 в ряд по собственным состояниям $A(\alpha)$, то математическое ожидание A в момент t выражается формулой

$$\sum_{\alpha, \alpha'} C^*(\alpha) C(\alpha') \langle \alpha | e^{iHt} A e^{-iHt} | \alpha' \rangle = A(t). \quad (1.10)$$

Теперь ван Хов использует особое свойство матричных произведений вида

$$\langle \alpha | V A_1 V \dots, A_n V | \alpha' \rangle. \quad (1.11)$$

Для рассматриваемой им системы он показывает, что диагональные элементы $\alpha = \alpha'$ в пределе $f = \infty$ становятся очень большими (они соответствуют членам собственной энергии в теории излучения) и что это дает $\delta(\alpha - \alpha')$, т. е. сингулярность (1.11) в пределе $f = \infty$. Опираясь на это свойство, ван Хов использует не только структуру системы, но и особый способ характеристики макроскопических величин. Из свойств матрицы (1.11) следует, что матрица в (1.10) имеет вид

$$\langle \alpha | e^{iHt} A e^{-iHt} | \alpha' \rangle = \delta(\alpha - \alpha') f_1(\alpha) + f_2(\alpha, \alpha'), \quad (1.12)$$

причем f_2 не содержит δ -функций, а f_1 и f_2 — функционалы

$A(\alpha)$ и функции времени:

$$\begin{aligned} f_1 &= \int d\alpha'' A(\alpha'') P(t; \alpha'', \alpha), \\ f_2 &= \int d\alpha'' A(\alpha'') J(t; \alpha'', \alpha', \alpha). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Поэтому (1.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A(t) &= \int d\alpha'' A(\alpha'') \int P(t; \alpha'', \alpha) |C(\alpha)|^2 d\alpha + \\ &+ \int d\alpha'' A(\alpha'') \int J(t; \alpha'', \alpha', \alpha) C^*(\alpha') C(\alpha) d\alpha' d\alpha. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Предполагая, что $C(\alpha)$ некогерентны, можно пренебречь вторым, интерференционным, членом по сравнению с первым. В этом случае эволюция $A(t)$ определяется только функцией $P(t; \alpha'', \alpha)$, которая выражает, очевидно, вероятность найти состояние α'' в момент времени t , если при $t=0$ система была в состоянии α . Ван Хов вывел для $P(t; \alpha'', \alpha)$ интегро-дифференциальное уравнение, из которого при малых λ следует уравнение Паули (1.8).

Предположение, что коэффициенты $C(\alpha)$ некогерентны (это гипотеза, беспорядка для $t=0$) в этом случае является достаточным, тогда как Паули предполагал, что фазы состояний должны быть всегда некогерентными. Поэтому вывод транспортного уравнения (1.8) ван Ховом безусловно представляет шаг вперед. Справедливо также, что фазы $C(\alpha)$ не влияют на математическое ожидание $\bar{A}(0)$, так что предположение об их некогерентности можно оправдать, сказав, что если наблюдатель много раз изготавливает макроскопическое состояние, характеризваемое математическими ожиданиями операторов A , то дальнейшая эволюция во времени в среднем описывается первым членом уравнения (1.14). Хотя в отдельных случаях интерференционный член может оказаться по порядку величины сравнимым с первым членом, однако это происходит только при весьма специальной зависимости $C(\alpha)$ от фаз. Это утверждение еще нуждается в математическом уточнении. Однако, по-видимому, в пределе $f=\infty$ интерференционный член должен быть «почти всегда» исчезающе малым.

В заключение отметим еще, что предположение о диагональности операторов A относительно переменных α представляет собой слишком сильную схематизацию макроскопических наблюдаемых величин. Например, для газовой модели перемен-

ные α будут числами заполнения состояний свободных частиц $n(\mathbf{k})$. В этом случае пространственная плотность $\rho(\mathbf{x})$ не будет макроскопической переменной даже при условии, что ρ усредняется по малым, но макроскопическим объемам. Конечно, если бы удалось, а это, по-моему, не безнадежно, доказать, что интерференционный член относительно мал для макроскопических наблюдаемых A и «почти для всех» значений фаз $C(\alpha)$, то со схематическим отображением макроскопических состояний можно было бы примириться.

Исследование ван Хова уже теперь проливает новый свет на эргодическую проблему, поскольку в нем переход в термодинамическое равновесие ставится в связь с особыми свойствами макроскопических систем и наблюдаемых в них величин.

§ 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ СВЯЗЬ С ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМ ОПИСАНИЕМ

В эргодической системе, энергия которой равна E , среднее по времени значение макроскопической функции состояния $g(E, \alpha)$ определяется равенством

$$g(E) = \sum_{\alpha} g(E, \alpha) \frac{\Omega_{E, \alpha}}{\Omega_E}.$$

Если мы представим себе статистический ансамбль, состоящий из очень большого числа одинаковых систем, фазовые точки которых распределены на энергетической оболочке с постоянной плотностью $1/\Omega(E)$, то статистические средние значения функций $g(E, \alpha)$ будут равны их средним по времени.

В этом случае с формальной точки зрения статистическое распределение может заменить временное распределение. Назовем его, следуя Гиббсу, «микроканоническим распределением». Если определить вслед за Больцманом энтропию $S(E, \alpha)$ состояния (E, α) равенством

$$S(E, \alpha) = k \lg \Omega_{E, \alpha}, \quad (2.1)$$

то ее среднее значение будет

$$\bar{S}(E) = k \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{E, \alpha}}{\Omega_E} \lg \Omega_{E, \alpha}. \quad (2.2)$$

В соответствии со сказанным в § 1, в сумме (2.2) по α существуют только наибольшие слагаемые, которые можно считать

одинаковыми (измеряя их в единицах f). Поэтому (2.2) можно заменить на

$$k [\lg \Omega(E) - \lg M],$$

причем M — число существенных слагаемых. Конечно, M — это число состояний с максимальной и приблизительно одинаковой энтропией, которые можно различать макроскопически. Если теперь взять в качестве M какое-нибудь физически приемлемое число, то $\lg M$ будет все-таки пренебрежимо малым по сравнению с f . Поэтому с хорошей точностью выполняется равенство

$$\bar{S}(E) \sim S(E) = k \lg \Omega(E). \quad (2.3)$$

Строго говоря, $S(E) > \bar{S}(E)$, причем это различие соответствует энтропии среднего спонтанного отклонения системы от термодинамического равновесия. Мы будем называть $S(E)$ «микрорканонической» энтропией. Это энтропия термодинамического равновесия.

Как известно, это утверждение доказывается с помощью рассмотрения систем 1 и 2, очень слабо связанных энергетически. Если энергии этих систем равны E_1 и E_2 , то их суммарный фазовый объем будет равен $\Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2)$; поэтому их суммарная энтропия равна

$$S(E_1; E_2) = S_1(E_1) + S_2(E_2). \quad (2.4)$$

Равновесию при заданной суммарной энергии $E_1 + E_2$ соответствует только такое значение E_1 , при котором (2.4) достигает максимальной величины

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2(E - E_1)}{\partial E}. \quad (2.5)$$

Если положить

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad (2.6)$$

то символ T должен означать абсолютную температуру, потому что в равновесии температуры обеих систем одинаковы. При дифференцировании (2.5) и (2.6) внешние параметры системы, как, например, ее объем, считаются постоянными. Поэтому дифференциал ∂E в (2.6) соответствует теплоте, подводимой к системе обратимо. Эти результаты оправдывают интерпретацию величины $k \lg \Omega(E)$ как термодинамической энтропии.

Если с большой системой, обладающей F степенями свободы, связана малая система с f степенями свободы, то можно пред-

ставить себе наблюдателя, измеряющего суммарную энергию E и, кроме того, микроскопическое состояние малой системы. Макроскопическое состояние тем самым описывается энергией E и утверждением, что для малой системы значения p_k , q_k находятся в интервалах dp_k , dq_k .

Если мы предположим, что с заметной частотой встречаются только состояния, для которых энергия малой системы H_f очень мала по сравнению с E , то фазовый объем состояния можно записать в смысле разложения по H_f в виде

$$\Omega(E, \alpha) = e^{-(1/kT)H_f(p, q)} dp dq \Omega_F(E). \quad (2.7)$$

При этом $\Omega_F(E)$ означает фазовый объем большой системы, а T — ее температуру:

$$\frac{\partial S_F(E)}{\partial E} = \frac{1}{T}.$$

Формула (2.7) есть распределение Максвелла — Больцмана. Распределение, подчиняющееся (2.7), называется «каноническим распределением». Большую систему можно рассматривать как термостат с температурой T , в котором содержится малая система. Фазовый объем энергетической оболочки суммарной системы равен

$$\Omega_F(E) \int e^{(1/kT)H_f} dp dq = \Omega_F(E) Z_f(T). \quad (2.8)$$

Интеграл Z_f называется интегралом состояний. Его можно записать в виде

$$Z_f(T) = \int_0^\infty \omega_f(\epsilon) e^{-\epsilon/kT} d\epsilon. \quad (2.9)$$

Тогда $\omega_f(\epsilon)\Delta\epsilon = \Omega_f(\epsilon)$ соответствует микроканоническому описанию малой системы. Переход к интегралу состояний $Z_f(T)$ есть преобразование Лапласа, переводящее экстенсивную переменную E (энергия) в интенсивную переменную T (температура). Термодинамически этому соответствует контактное преобразование (преобразование Лежандра)

$$\psi(T) = S(E) - \frac{1}{T} E, \quad \frac{\partial \psi}{\partial (1/T)} = -E, \quad (2.10)$$

где ψ — характеристическая функция Планка. Формулы (2.9) и (2.10) будут эквивалентны, если подынтегральная функция в (2.9) имеет очень острый максимум или, что равносильно,

если флуктуации энергии в каноническом ансамбле остаются очень малыми. Это справедливо всегда лишь в том случае, если термодинамическое преобразование (2.10) будет невырожденным, т. е. если система может быть описана одинаково хорошо как (интенсивной) температурой, так и (экстенсивной) энергией. Правило фаз Гиббса указывает, когда это происходит. Например, для однородной системы из одного вещества в тройной точке описание через $\psi(T)$ будет неполным, потому что здесь по формуле (2.10) конечному интервалу энергии сопоставляется одно единственное значение температуры.

В подобных случаях каноническое распределение уже не дает адекватного описания системы и не может применяться, например, для вычисления флуктуаций энергии системы. Следует также учесть, что при выводе формулы (2.8) взаимодействия системы с термостатом не учитывалось. Обычно это вполне допустимо, так как приводит к поверхностным эффектам. Однако последние играют решающую роль как раз в тех случаях когда флуктуации становятся аномальными.

Если выделить из большой системы относительно малую подсистему, в которой переменным будет также число частиц, то мы получим «большое каноническое распределение». Если $Z_N(T)$ — интеграл состояний, описывающий поведение N частиц в рассматриваемой подсистеме, то это распределение характеризуется функцией

$$P(T, \lambda) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\lambda N} Z_N(T). \quad (2.11)$$

По определению здесь принято $Z_0=1$. Преобразование Лапласа, переводящее Z_N в $P(\lambda)$, соответствует контактному преобразованию термодинамики, при котором вместо числа молей вводится химический потенциал. Из правила фаз можно снова заключить, в каких случаях оба описания равноценны. При выводе (2.11) также предполагается, что взаимодействием подсистемы с окружающей ее средой можно пренебречь. В точках конденсации, в критической точке или тогда, когда флуктуации чисел частиц, получаемые из (2.11), оказываются аномальными, следует учитывать взаимодействие с окружающей средой, представляющее собой поверхностный эффект, что возможно только в рамках канонического распределения.

Все приведенные выше соображения можно непосредственно перенести в квантовомеханическую теорию. Вместо фазового объема энергетической оболочки при этом появляется число

стационарных состояний в интервале энергии ΔE , а вместо интеграла состояний — сумма состояний

$$\sum_n e^{-E_n/kT} = Z(T),$$

где E_n — уровни энергии системы, суммирование по n проводится по всем стационарным состояниям. Если совершить отсюда предельный переход к классической механике, то мы не получим в точности написанных выше формул. Именно, если система состоит из N тождественных частиц, то вместо классического фазового объема получится фазовый объем, деленный на $N!$

Еще Гиббс заметил, что энтропия газа, определенная как $k \lg \Omega_E$, оказывается неэкстенсивной величиной, и поэтому предложил вместо «видовой фазы» Ω_E применять «родовую фазу» $(1/N!) \Omega(E)$. Конечно, в рамках классической механики убедительно обосновать такое предположение нельзя. Трудно понять, почему энтропия, которая принципиально всегда характеризует всю систему в целом, должна быть пропорциональна размерам системы.

Когда Эйнштейн [12] применил открытую Бозе статистику к теории идеальных газов, ему также показалось парадоксальным, что по этой теории энтропия газа, состоящего из многих как угодно мало отличающихся друг от друга сортов частиц, ведет себя иначе, чем энтропия газа, частицы которого вообще нельзя различить друг от друга. Ибо тем самым в теорию вводится малопонятная разрывность. Теперь мы рассматриваем это как квантовый эффект: единственными классами симметрии волновой функции, встречающимися в природе для одинаковых частиц, в зависимости от их спина, являются или симметричный или антисимметричный.

В результате квантовая теория совершенно автоматически дает «родовую фазу». Далее, если классический фазовый объем является величиной, обладающей размерностью, вследствие чего энтропия определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, то квантовотеоретический фазовый объем Ω_E — это число. Поэтому здесь имеется простая и естественная возможность для нормировки этой постоянной в энтропии. Следствием квантовой теории оказывается и третье начало (теорема Нернста), а вместе с тем и «вырождение» уравнений состояния при низких температурах.

Весьма примечательно, что общие и формальные принципы, выдвинутые Гиббсом в его книге «Основные принципы статистической механики», оказываются при этом всюду совершенно независимыми от специальной, классической механической модели. Тем более удивительным должно показаться, что Нернст [13] закончил свою статью к столетию со дня рождения Гиббса словами: «Его попытка создать механику, свободную от противоречий, потерпела неудачу из-за того, что он не учел квантовую теорию, так что эта работа устарела уже в момент своего появления».

Абсурдность этих слов лишь выставляет в более ярком свете уверенность, с которой Гиббс разрабатывал основные принципы.

§ 3. ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ, В ЧАСТНОСТИ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Если малый объем v , содержащийся внутри большого объема V , можно описать большим каноническим распределением, то средний квадрат флуктуаций числа частиц n в v выражается формулой

$$\overline{\Delta n^2} = kT \frac{\partial \bar{n}}{\partial p}, \quad (3.1)$$

где \bar{n} — плотность частиц, а p — давление. Эта формула теряет смысл в критической точке или вообще там, где квадрат флуктуаций становится аномальным, т. е. непропорциональным \bar{n} . В § 2 мы указывали на то, что в этих случаях уже нельзя пренебрегать взаимодействием частиц в объеме v с частицами, окружающими v . Вследствие этого флуктуации плотности в соседних элементах объема (даже если эти элементы имеют макроскопические размеры) становятся коррелированными.

Теория флуктуаций вблизи критической точки была впервые развита Орнштейном и Цернике [14]. Мы выведем здесь результат этих авторов другим, с нашей точки зрения более наглядным способом. При этом мы будем отчасти следовать изложению Клейна и Тисса [15].

Исходя в соответствии со сказанным выше из канонического распределения, рассмотрим газ с температурой T в объеме V . Мысленно разобьем объем V на много малых, но все же макроскопических объемов v_k , положение которых описывается координатами X_k . Предположим, что число частиц в каждом объеме v_k будет n_k , и рассмотрим состояния, в которых n_k медленно

изменяется как функция X_k . В этом случае числам n_k можно сопоставить молярную, макроскопическую плотность $\varrho(X)$:

$$\varrho(X) \sim \varrho(X_k) = \frac{n_k}{v_k L}. \quad (3.2)$$

Здесь L — число Лошмидта. В соответствии с каноническим распределением, свободная энергия F определяется через вероятность состояния $W(n_k)$ формулой

$$\frac{F}{kT} = -\lg W(n_k). \quad (3.3)$$

Таким образом, свободная энергия есть функционал плотности $\varrho(X)$. Вычислить этот функционал невозможно даже для какой-нибудь определенной модели газа. Однако по аналогии с тем, что в уравнение (3.1) можно подставить функцию $\varrho(p)$ из феноменологического уравнения состояния, здесь тоже можно воспользоваться феноменологическим выражением для $F[\varrho(X)]$, после чего (3.3) даст нам распределение вероятностей для $\varrho(X)$. Этим путем шел и Эйнштейн [16], когда обосновывал теорию статистических флуктуаций. Пусть ϱ_0 — средняя плотность. Мы положим $\varrho = \varrho_0 + \mu$ и будем считать, что отклонения плотности ϱ от своего среднего значения ϱ_0 достаточно малы. Тогда $F[\varrho]$ можно разложить в ряд по μ :

$$F(\varrho) - F(\varrho_0) = \Phi[\mu] = \frac{1}{2} \int dv_x \int dv_y f(x-y) \mu(x) \mu(y). \quad (3.4)$$

Линейные по μ члены здесь не появляются, поскольку F имеет минимум при $\mu=0$. Для однородной изотропной системы f зависит только от $|x-y|$. Можно утверждать, что $f(x)$ отлична от нуля только для значений $|x|$, сравнимых с радиусом действия молекулярных сил. Разложим теперь $\mu(x)$ в V в ряд Фурье

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \sum_k e^{ik \cdot x} \lambda(k), \\ \lambda(k) &= \frac{1}{V} \int e^{-ik \cdot x} \mu(x) dv. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку функция $\mu(x)$, действительна, то

$$\lambda(k) = \lambda^*(-k). \quad (3.5a)$$

Подставляя это в (3.4), получаем

$$\varphi = \frac{1}{2} V \sum_k g(k^2) |(\lambda(k))|^2, \quad (3.6)$$

$$g(k^2) = \int f(x) e^{-ik \cdot x} dv.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $f(x)$ убывает очень быстро, вследствие чего интегрирование (3.4) по $^{1/2}(x+y)$ дает в (3.6) множитель V .

Положим

$$\lambda(k) = \alpha(k) + i\beta(k). \quad (3.7)$$

Тогда

$$\varphi = V \sum_k' g(k^2) [\alpha^2(k) + \beta^2(k)], \quad (3.8)$$

причем \sum_k' означает суммирование только по полупространству k . В этом полупространстве все $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ независимы друг от друга. В частности, они статистически независимы, поскольку в соответствии с (3.3) φ определяет распределение вероятностей для них. Поэтому находим

$$\overline{\mu(x)\mu(y)} = \sum_k e^{ik \cdot (x-y)} [\overline{\alpha^2(k)} + \overline{\beta^2(k)}] = \frac{kT}{V} \sum_k \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{g(k^2)}. \quad (3.9)$$

Чтобы исследовать поведение (3.9) для больших значений $(x-y)$, разложим $g(k^2)$ в ряд по степеням k^2 :

$$g(k^2) = g_0 + g_1 k^2 + \dots \quad (3.10)$$

Заменяя теперь в (3.9) сумму интегралом и воспользовавшись (3.10), получаем

$$\overline{\mu(x)\mu(y)} \sim \frac{kT}{g_1} \frac{\exp\{-(g_0/g_1)^{1/2} \cdot |x-y|\}}{4\pi |x-y|}, \quad (3.11)$$

т. е. формулу Ориштейна и Цернике. Флуктуации числа молей N в объеме v выражаются формулой

$$\overline{\Delta N^2} = \int dv_x \int dv_y \overline{\mu(x)\mu(y)}. \quad (3.12)$$

Если корреляционная функция (3.11) отлична от нуля на расстояниях, малых по сравнению с линейными размерами v , то

получаем

$$\overline{\Delta N^2} = \frac{v k T}{g_0}. \quad (3.13)$$

Сравнивая это с (3.1), находим

$$g_0 = \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial q}. \quad (3.14)$$

Вблизи критической точки $\partial p / \partial q$ исчезает, а следовательно, и g_0 обращается в нуль. Тогда флуктуации становятся аномальными:

$$\overline{\Delta N^2} \sim \frac{k T}{g_1} \cdot v^{5/3}. \quad (3.15)$$

Покажем теперь, какой феноменологический смысл имеет g_1 .

Применяя разложение (3.10), напомним

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{2} g_0 \int_V \mu^2 dv + \frac{1}{2} g_1 \int_V (\text{grad } \mu)^2 dv. \quad (3.16)$$

Рассмотрим объем v с линейными размерами, большими по сравнению с $(g_1/g_0)^{1/2}$, и зададим вопрос о наиболее вероятной флуктуации $\mu(x)$, соответствующей заданному ΔN . Это значит, что надо найти минимум (3.16) при дополнительном условии

$$\int_V \mu(x) dv = \Delta N = \mu_0 v. \quad (3.17)$$

Если мы обозначим решение этой вариационной задачи $\mu_{\Delta N}(x)$, то $\varphi[\mu_{\Delta N}] = \varphi(\mu_0)$ будет иметь смысл вероятности найти флуктуацию ΔN в v .

Внутри v решение $\mu_{\Delta N}(x)$ практически совпадает с μ_0 и обращается в нуль вблизи граничной поверхности. Там $|\text{grad } \mu_{\Delta N}|$ изменяется как $^{1/2} \mu_0 (g_0/g_1)^{1/2} \exp \{ -(g_0/g_1)^{1/2} \cdot r \}$, где r означает расстояние от граничной поверхности v . Находим

$$\varphi(\mu_0) = \frac{1}{2} \mu_0^2 \left\{ g_0 v + \frac{1}{4} (g_0 g_1)^{1/2} O \right\}, \quad (3.18)$$

причем O — поверхность, окружающая объем v . Таким образом, флуктуации ΔN внутри v приводят к появлению поверхностного натяжения $1/8 (g_0 g_1)^{1/2} \mu_0^2$, которым можно пренебрегать во всех случаях, когда $v^{1/3} \gg (g_1/g_0)^{1/2}$. Следовательно, в то время как в случае нормальных флуктуаций g_1 входит только в малые поверхностные поправки, в критической точке флук-

туации определяются значением g_1 . Роккар [17], впервые рассмотревший члены $\sim g_1$ и связавший их с капиллярными силами, получил с помощью газокинетических соображений значение $a\sigma^2/6$ для g_1 , причем a — постоянная Ван дер Ваальса в уравнении

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT,$$

а σ — радиус действия молекулярных сил. По порядку величины эта оценка, вероятно, правильна. Однако ввиду непоследовательности своих рассуждений Роккар не получил в заключение формулы Орнштейна и Цернике (3.4), которая хорошо подтверждается на критических смесях (ср. [27]).

§ 4. ФЛУКТУАЦИИ ПЛОТНОСТИ В ИДЕАЛЬНОМ КВАНТОВОМ ГАЗЕ

Изложенная в § 3 теория флуктуаций плотности носит полужафеноменологический характер и существенно опирается на связь между свободной энергией и вероятностью в каноническом распределении. Для идеального квантового газа, в котором аномальные флуктуации, как известно, происходят в области вырождения, можно построить теорию, основанную только на статистической механике. Флуктуации эти оказываются разными для статистик Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака.

В своей работе о парамагнетизме щелочных металлов Паули [18] первый указал на характерное различие обоих случаев в этом отношении. Введение к этой работе, заложившей основы теории металлов, содержит также первое ясное обсуждение идеального бозе- и ферми-газа с помощью большого распределения Гиббса.

Рассмотрим сначала бозе-газ, который описывается квантованной волновой функцией ψ . Для удобства будем считать объем V периодическим. Тогда

$$\psi = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k a_k e^{ikx}, \quad (4.1)$$

причем a_k подчиняются перестановочным соотношениям

$$a_k a_l^* - a_l^* a_k = \delta_{kl}, \quad a_k^* a_k = N_k. \quad (4.2)$$

Оператор плотности $\varrho(x)$ определяется соотношением

$$\varrho(x) = \frac{1}{V} \sum_k a_k^* a_l e^{i(k-l) \cdot x}, \quad (4.3)$$

причем

$$\varrho(x)\varrho(y) = \frac{1}{V^2} \sum a_k^* a_l^* a_m^* a_n e^{i(k-l)x + i(n-m)y}. \quad (4.4)$$

Усредним теперь соотношения (4.3) и (4.4) по распределению, в котором фазы a_k независимы. Это дает

$$\langle \varrho(x) \rangle = \frac{1}{V} \sum_k N_k = \frac{N}{V}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \varrho(x)\varrho(y) \rangle &= \left(\frac{N}{V} \right)^2 + \frac{1}{V^2} \sum_{k,l} N_k N_l e^{i(k-l)(x-y)} + \\ &+ \frac{N}{V} \delta(x-y) - \frac{1}{V^2} \left(N + \sum_k N_k^2 \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

При этом мы использовали перестановочные соотношения для a_k . Далее

$$\sum_l e^{il(x-y)} = V \cdot \delta(x-y).$$

Теперь совершим предельный переход $V \rightarrow \infty$ при фиксированном N/V . При этом из сумм (4.5) и (4.6) следует выделить в явном виде член, соответствующий основному состоянию (N_0); остальную часть сумм затем можно заменить интегралом. Полагая

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{N_0}{V} &= \varrho_0, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_{k \neq 0} N_k e^{ik \cdot (x-y)} = b(r), \\ r &= |x - y|, \end{aligned} \quad (4.7)$$

получаем

$$\langle \varrho(x)\varrho(y) \rangle - \langle \varrho \rangle^2 = 2\varrho_0 b(r) + b^2(r) + \langle \varrho \rangle \delta(x-y), \quad (4.8)$$

причем ϱ_0 — плотность в основном состоянии. Функцию $b(r)$ можно вычислить, подставляя в (4.7) значения N_k , получаемые из большого канонического распределения

$$\begin{aligned} b(r, \lambda) &= \frac{1}{r} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \sin kr}{e^{k^2/k_0^2 + \lambda} - 1} dk, \\ k_0^2 &= \frac{2mkT}{\hbar^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для $\lambda \neq 0$ средняя плотность ϱ определяется как

$$b(0, \lambda) = \varrho. \quad (4.10)$$

Тогда $\varrho_0 = 0$, а значение $\lambda = 0$ соответствует точке конденсации бозе-газа, в которой следует положить

$$\varrho = \varrho_0 + b(0, 0). \quad (4.11)$$

Таким образом, $b(0, 0)$ означает плотность газовой фазы, ϱ_0 — плотность конденсированной фазы, причем плотность ϱ остается фиксированной. Применение большого распределения законно также и в области конденсации, поскольку можно показать [19], что и в этом случае относительные флуктуации N_k малы.

Асимптотическое поведение $b(r)$ при условиях $k_0 r \gg 1$ и $\lambda \ll 1$, когда $e^{k^2/k_0^2 + \lambda} - 1$ можно заменить на $k^2/k_0^2 + \lambda$, выражается формулой

$$b(r, \lambda) \sim \frac{k_0^3}{4\pi} \frac{e^{-\lambda^{1/2} \cdot k_0 r}}{k_0 r}. \quad (4.12)$$

Следовательно, в области конденсации флуктуации снова становятся аномальными. В основном они определяются слагаемым $2\varrho_0 b(r)$, соответствующим интерференции между основным состоянием, т. е. конденсатом, и газом. Флуктуации числа частиц в объеме v выражаются в этом случае соотношениями

$$\overline{\Delta n^2} = n_0 n_1^{2/3}, \quad n_0 = \varrho_0 v, \quad n_1 = b(0, 0) v.$$

Аналогичное вычисление можно провести и для ферми-газа. Для этого случая получаем

$$\langle \varrho(x) \varrho(y) \rangle - \langle \varrho \rangle^2 = \frac{N}{V} \delta(x - y) - f^2(r),$$

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \sin kr dk}{e^{k^2/k_0^2 + \lambda} + 1}. \quad (4.13)$$

Конденсация здесь не наступает и члены с ϱ_0 отсутствуют.

Рассмотрим теперь случай очень сильного вырождения. Пусть $K = |\lambda|^{1/2} \cdot k_0$ (причем $k_0 \rightarrow 0$, а K — конечная величина). Тогда имеем

$$f(r) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{r^3} (\sin Kr - Kr \cos Kr), \quad (4.14)$$

$$f(0) = \frac{1}{6\pi^2} K^3 = \varrho. \quad (4.15)$$

Для квадрата флуктуаций числа частиц n в сферическом объеме радиусом R находим

$$\overline{\Delta n^2} = \frac{(KR)^2}{2\pi^2} [\lg KR - 1,588 \dots], \quad (4.16)$$

или

$$\overline{\Delta n^2} \sim n^{2/3} \lg n. \quad (4.17)$$

Таким образом, и в этом случае флуктуации оказываются аномальными. Они гораздо слабее, чем в классическом идеальном газе, но не исчезают даже при полном вырождении. Однако они пропорциональны не объему, содержащему рассматриваемые частицы, а граничной поверхности этого объема. Большое каноническое распределение, как известно, приводит к результату $\overline{\Delta n^2} = 0$, так как оно не учитывает никаких поверхностных эффектов.

§ 5. ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Если можно вычислить $\Omega_N(E, V)$ или $Z_N(T, V)$ для механической модели, описывающей, например, N атомов в объеме V , то будут известны и уравнения состояния этой модели.

Если $\varphi(r)$ — потенциал взаимодействия двух атомов на расстоянии r , то существенную задачу представляет вычисление конфигурационного интеграла состояний

$$Q_N(T, V) = \frac{1}{N!} \int_V (d\mathbf{q})^N \exp \left[-\frac{1}{kT} \sum_{i>k} \varphi(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_k) \right]. \quad (5.1)$$

Эта задача в общем случае оказывается неразрешимой. Однако в принципе поведение системы при всех температурах и плотностях определяется интегралом (5.1); следовательно, явления конденсации и кристаллизации газовой модели также должны описываться формулой (5.1).

Термодинамически фазовые переходы проявляются как разрывы в уравнениях состояния или в производных. Однако не следует считать, что $Q_N(T, V)$ будет иметь разрывы. Особенности могут появиться только в пределе $N, V \rightarrow \infty$. При этом предельном переходе N/V остается фиксированным, и поэтому целесообразно перейти к большому каноническому распределению, потому что для больших систем N/V определяется химическим

потенциалом λ . Для Q_N положим

$$P(z, T, V) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T), \quad Q_0 = 1. \quad (5.2)$$

Уравнение состояния определяется предельными значениями

$$\frac{p}{kT} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \lg P(z, T, V), \quad (5.3)$$

$$\varrho = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \lg z} \frac{1}{V} \lg P(z, T, V), \quad (5.4)$$

где p — давление; ϱ — плотность.

Ли и Янг [20], а также ван Хов [21] доказали, что для всех положительных действительных значений z предельное значение (5.3) существует независимо от формы V и представляет монотонную непрерывную функцию z . Производная (5.3) по z может быть прерывной. Положение разрывов соответствует точкам, в которых происходит фазовый переход.

Если мы предположим, что функция $\varphi(r)$ для $r > r_0$ становится очень большой и положительной, то это будет означать, что атомы имеют собственный объем v_0 . Следовательно, N всегда меньше $N_0 = V/v_0$. Поэтому $P(z, T, V)$ будет полиномом по z степени N_0 . Следуя Янгу и Ли, на этой модели можно выяснить, каким образом и при каких математических условиях ряды (5.3) и (5.4) в пределе $V \rightarrow \infty$ могут стать сингулярными. Нули $P(z)$, которые мы обозначим ξ_α , расположены на комплексной плоскости z , причем на действительной оси нулей нет. Теперь, полином P можно разложить на линейные множители, и тогда получится

$$\frac{1}{V} \lg P(z) = \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \lg \left(1 - \frac{z}{\xi_{\alpha}} \right). \quad (5.5)$$

В предельном случае очень больших объемов введем на плоскости ζ плотность нулевых точек $d\mu(\zeta, T)$ и запишем

$$\frac{p}{kT} = \int d\mu(\zeta, T) \lg \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right), \quad \int d\mu(\zeta, T) = \frac{1}{v_0} \quad (5.6)$$

Легко видеть, что $p(z)$ соответствует потенциалу, порожденному плотностью заряда $d\mu(\zeta)$. Поэтому на действительной оси z потенциал $p(z)$ может стать сингулярным только тогда, когда эта ось пересекается в точке z с кривой, содержащей конечный

заряд уже в окрестности z_0 . Следовательно, при предельном переходе нули на этой кривой должны сгущаться около z_0 . Скачок плотности числа частиц ϱ , появляющийся при переходе через точку z_0 , пропорционален линейной плотности заряда на кривой вблизи точки z_0 .

Янг и Ли [22] подвергли эти соотношения подробному анализу на примере модели Изинга. Первоначально эта модель была введена для изучения ферромагнетизма. Однако в наших целях ее можно рассматривать также как модель «решеточного газа». В плоской квадратной решетке каждый узел пустой или может заполняться не больше чем одним атомом. Взаимодействуют с энергией $-U$ только атомы в соседних узлах. Такой «газ» конденсируется ниже критической температуры T_c , определяемой уравнением [23]

$$\exp\left(-\frac{U}{2kT_c}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Все корни полинома $P(z)$ в этом случае лежат на окружности радиусом $\exp[-2U/kT]$ с центром $z=0$. Плотность корней известна, конечно, только в двух точках пересечения окружности с действительной осью плоскости z .

Давление пара и плотности газообразной и конденсированной фаз ϱ_g и ϱ_k тем не менее известны и определяются выражениями

$$\frac{p}{kT} = \lg(1+x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \lg \frac{1}{2} \{1 + (1 - K \sin^2 \varphi)^{1/2}\} d\varphi, \quad (5.7)$$

где

$$x = e^{U/kT}, \quad K = \frac{16x(1-x)^2}{(1+x)^4},$$

$$\varrho_g + \varrho_k = 1, \quad \varrho_g = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[\frac{1+x}{(1-x)^2} (1-6x+x^2) \right]^{1/4} \right\}. \quad (5.8)$$

Эти формулы справедливы в области конденсации; вне этой области уравнения состояния не выведены. Если рассматривать модель Изинга как модель ферромагнетизма, то (5.7) соответствует свободной энергии ферромагнетизма, а (5.8) — спонтанной поляризации, причем в обоих случаях предполагается отсутствие внешнего магнитного поля. Формула (5.7) была выведена Онзагером, а формула (5.8) — Янгом. Такие полные и красивые результаты для других моделей получить нельзя;

весьма специальные алгебраические методы, приводящие к цели в рассмотренном случае, оказываются неприменимыми уже тогда, когда, например, необходимо исследовать влияние магнитного поля в модели Изинга или когда плоская решетка заменяется пространственной. В таких случаях приходится прибегать к приближенным рассмотрениям, весьма сомнительным в окрестности точек фазового перехода.

В частности, для классической модели газа уравнение состояния, полученное из большого канонического распределения, можно разложить по степеням z :

$$\frac{p}{kT} = \sum_{l=1}^{\infty} b_l z^l, \quad \varrho = \sum_{l=1}^{\infty} l b_l z^l. \quad (5.9)$$

Эти ряды сходятся, если плотность достаточно мала. Коэффициенты b_l — так называемые «групповые интегралы» (Cluster-Integrale) — зависят от конфигураций только l атомов. Для очень низких температур все b_l положительны, и члены $b_l z^l$ выражают непосредственно парциальное давление «молекул», состоящих из l атомов. Однако в общем случае «групповые интегралы» не имеют прямого физического смысла. В предельном случае, когда плотность газа очень мала даже в точке конденсации, так что собственным объемом атомов по сравнению со всем объемом можно пренебречь, удастся качественно исследовать поведение b_l для больших l и тем самым изучить сходимость рядов (5.9) [24].

Если выбрать модель со следующим потенциалом взаимодействия между атомами:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \infty, & r < r_0, \\ \varphi(r) &= -u, & r_0 < r < r_1, \\ \varphi(r) &= 0, & r > r_1, \end{aligned} \quad (5.10)$$

то для больших l

$$b_l = (v_{k_0} e^{k_0(1-\varepsilon_0)u/T})^{l-1}. \quad (5.11)$$

При этом $v_{k_0} = \alpha(r_1 - r_0)^3$, где α порядка единицы, и

$$k_0 = 6 \left(1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \frac{1}{l^{1/3}} \right), \quad \varepsilon_0 = e^{-u/T}.$$

Результат (5.11) получается после отбрасывания $v_0 \varrho$ ($v_0 \sim r_1^3$, ϱ — плотность частиц) и величин порядка $e^{-u/T}$. Сохраняются,

однако, величины порядка $v_0 \varrho e^{6u/T}$. Член $\sim l^{-1/3}$ соответствует поверхностной энергии большой молекулы из l атомов.

Ряды (5.9) в этом случае сходятся до точки z_0 включительно:

$$z = z_0 = \frac{1}{v_{k_0}} e^{-6u/T}.$$

Для $z = z_0$ давление принимает конечное значение $p_0 = Tz_0$, а плотность частиц равна z_0 . Таким образом, пар ведет себя, как и следовало ожидать, подобно идеальному газу даже в этой критической точке. Хотя математически нельзя доказать, что в точке z_0 наступает конденсация, некоторые соображения в пользу этого утверждения привести все же можно.

Уравнение состояния для «одномерной» модели газа, в которой атомы движутся не в пространстве, а по одной прямой, строго выведено ван Ховом [25]. В этом случае выполняется условие

$$z \int_0^{\infty} e^{-[\varphi(x) + p \cdot x]/T} dx = 1. \quad (5.12)$$

Если взять $\varphi(x)$ в виде (5.10), то наш приближенный метод дает

$$\frac{p}{T} = \frac{z}{1 - e^{u/T} (r_1 - r_0) z}, \quad (5.13)$$

что согласуется с (5.12), если можно пренебречь pr_1/T , но сохранить $e^{u/T} \frac{pr_1}{T}$. Здесь p в критической точке расходится: одномерный газ не конденсируется, потому что в нем отсутствует поверхностная энергия больших молекул, которая в пространственном случае приводит к тому, что эти молекулы играют роль наравне со свободными атомами.

Мы не будем рассматривать ни другие применения рядов (5.9), ни квантовомеханическое обобщение их, ни другие методы вывода уравнений состояния, например методы, основанные на вириальной теореме Клаузиуса. Вместо этого мы сошлемся на обстоятельный и очень ясно написанный обзор де Бура [26], в котором эти вопросы подробно рассмотрены.

Эта статья была написана летом 1958 г. и, как и весь сборник, предназначалась в качестве подарка к 60-летию В. Паули. После внезапной кончины Вольфганга Паули она публикуется без изменений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Boltzmann L., Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig, 1896. (См. перевод: Л. Больцман, Лекции по теории газов, М.—Л., 1953.)
2. Hopf E., Ergodentheorie, Berlin, 1937.
3. Ter Haar, Rev. Mod. Phys., **27**, 289 (1955). [См. перевод: УФН, **49**, 619 (1956).]
4. Fierz M., Helv. phys. Acta, **28**, 705 (1955).
5. von Neumann J., Zs. f. Phys., **57**, 80 (1929).
6. Pauli W., Fierz M., Zs. f. Phys., **106**, 572 (1937).
7. Farquhar J. E., Landsberg P. T., Proc. Roy. Soc., **A239**, 184 (1957).
8. Ehrenfest P. und T., Encykl. mat. Wiss., **4**, IV.
9. Gibbs W., Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik, Leipzig, 1905. (См. перевод: Дж. В. Гиббс, Основные принципы статистической механики», М.—Л., 1946.)
10. van Hove L., Physica, **21**, 517 (1955); **23**, 411 (1957).
11. Pauli W., Festschrift für A. Sommerfeld, Leipzig, 1928, S. 30.
12. Einstein A., Sitzber. preuss. Akad. Wiss. Phys. Mat. Kl., 261 (1924); 3 (1925).
13. Nernst W., Naturwiss., **27**, 393 (1939).
14. Ornstein L., Zernicke F., Proc. Acad. Sci. Amst., **17**, 793 (1914).
15. Klein M. J., Tisza L., Phys. Rev., **76**, 1861 (1949).
16. Einstein A., Ann. d. Phys., **33**, 1275 (1910).
17. Roccard Y., Journ. de phys. et rad., **4**, 165 (1933).
18. Pauli W., Zs. f. Phys., **41**, 81 (1927).
19. Fierz M., Helv. phys. Acta, **29**, 47 (1956).
20. Yang C. N., Lee T. D., Phys. Rev., **87**, 404 (1952).
21. van Hove L., Physica, **15**, 951 (1949).
22. Yang C. N., Lee T. D., Phys. Rev., **87**, 410 (1957).
23. Kramers H. A., Wannier G., Phys. Rev., **60**, 252, 263 (1941).
24. Fierz M., Helv. phys. Acta, **24**, 357 (1951).
25. van Hove L., Physica, **16**, 137 (1950).
26. de Boer J., Rep. Progr. Phys., **12**, 305 (1949).

В. БА Р Г М А Н Н

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Первые работы Паули были посвящены теории относительности; в их числе его ранний шедевр — статья по теории относительности, написанная в 1921 г. для Математической энциклопедии (Mathematical Encyclopedia). Эта изумительная работа двадцатилетнего студента сразу выдвинула ее автора в число талантливейших ученых, владеющих непревзойденной мощью синтеза и критического анализа. Второе издание энциклопедической статьи вышло в конце жизненного пути Паули (в английском переводе) [4]. К счастью, классический текст оригинального варианта остался без изменений, но к нему добавлены еще 23 замечания, написанные в 1956 г. и посвященные некоторым позднейшим достижениям теории¹⁾.

В 1921 г., когда статья появилась впервые, физические, математические и идейные основы теории относительности были уже твердо установлены. Для частной теории относительности это было достигнуто уже в 1911 г., после того как большая часть разделов классической физики (механика и гидродинамика, электродинамика, термодинамика) была изложена в релятивистской форме. Аналогично, математическая структура общей теории относительности и большинство ее важных следствий (после того как Эйнштейн придал в 1915—1916 гг. теории ее окончательный вид) получили общее признание. Введя и расширив понятие параллельного переноса, Леви-Чивита и Вейль пришли к более глубокому пониманию дифференциаль-

¹⁾ Два из этих замечаний включены в настоящий сборник. см. стр. 413. — *Прим. ред.*

ной геометрии — математического фундамента общей теории относительности. Значение требования общековариантности уравнений поля (особенно для законов сохранения) было выяснено самим Эйнштейном, гёттингенской школой (Ф. Клейн, Гильберт и Нётер) и Г. Лоренцом. Первые строгие решения уравнений поля получил Шварцшильд, а в 1919 г., кроме того, было подтверждено теоретическое предсказание об отклонении световых лучей. Период быстрого развития закончился.

Таким образом, статья Паули появилась при очень важных обстоятельствах. Она исключительно красиво, точно и полно изложила существовавшую в то время теорию. Каждая деталь была на своем месте. Критические оценки Паули выглядят и в наше время столь же пронизательными и окончательными, как и 40 лет назад.

Обратимся теперь к тем частям статьи, которые касаются проблем, решение которых предоставлено будущему. Одно упущение сегодня кажется особенно заметным: о квантовой теории едва упоминается, потому что в то время она еще не достигла такого состояния, чтобы ей можно было придать последовательно релятивистскую форму. (Во втором издании квантовая теория опущена по совершенно другим причинам. Релятивистская квантовая теория выросла настолько, что для ее достаточно полного изложения потребовалась бы еще книга в 200 страниц.)

В те ранние для теории относительности годы все еще имелись надежды, что проблема существования и стабильности элементарных частиц, справиться с которой классическая электродинамика оказалась не в состоянии, может быть решена (или хотя бы продвинута ближе к своему решению) на основе общей теории относительности. В пятой (последней) части энциклопедической статьи рассматриваются различные решения, предложенные для этой цели. Сделав обзор остроумной нелинейной электродинамики Ми (развитой в рамках частной теории относительности), Паули обсуждает затем ранние попытки решить «проблему материи», обобщение римановой геометрии Вейлем — первую «единую теорию поля» — и раннюю попытку Эйнштейна изменить общерелятивистские уравнения поля с целью объяснить существование и стабильность элементарных заряженных частиц. В 1920 г. казалось разумным предполагать, что все взаимодействия можно свести к электромагнитным и гравитационным, но ни одна из ранних попыток не привела к успеху. Геометрия Вейля (какой бы глубокой она ни была в обобщении метрики Римана путем

введения произвольной калибровки и понятия калибровочной инвариантности) не приводит ни к единственному выбору функции действия, ни к какому-либо пониманию существования элементарных частиц. Кроме того, интерпретация метрики оставалась неясной. Если ds^2 измерять при помощи «атомных часов», то неинтегрируемость пути привела бы к тому, что эти стандарты стали бы зависеть от предшествующей истории, что противоречило резкости спектральных линий, наблюдавшейся на опыте. С другой стороны, если, как предлагал Вейль, не следует априори постулировать такую прямую связь с наблюдаемыми величинами, то интерпретация теории откладывается до дальнейшего математического анализа, который раскрыл бы поведение атомных систем в соответствии с новыми уравнениями. Не удалось получить желаемого решения «проблемы материи» и Эйнштейну.

Чрезвычайно интересно обдумать общие критические замечания об этих попытках, сделанных Паули в заключительной части работы [1]. Я выделяю следующие пункты:

1) Все попытки основывались на надежде, что сложные нелинейные дифференциальные уравнения, к которым они приводили, дадут каким-то заранее неизвестным образом как раз два сферически-симметричных решения, одно из которых будет соответствовать электрону, а второе — протону. Паули выдвигает следующее возражение: «Необходимо требовать, чтобы простой и фундаментальный факт атомизма объяснялся теорией тоже просто и элементарно, а не появлялся в результате некоего аналитического трюка».

2) Трудность объяснения существования элементарных частиц с помощью стабилизирующего влияния гравитационных сил становится особенно ясной, если учесть колоссальное значение ($\sim 10^{20}$) для отношения электрического заряда к гравитационному «заряду» $e/m(k)^{1/2}$ (k — ньютоновская гравитационная постоянная).

3) Ни одна теория не может объяснить асимметрию (различие масс) положительного и отрицательного электричества. Более того, эта асимметрия, по-видимому, противоречит требованию инвариантности предложенных теорий относительно обращения времени. (В самом деле, для преодоления этой трудности выдвигались в высшей степени искусственные предположения, например введение квадратного корня в функцию действия, два значения которого соответствовали бы двум знакам электрического заряда.)

4) Последний пункт относится к наиболее фундаментальному вопросу. «В заключение отметим одно обстоятельство, вызывающее возражения логического характера. Теории непрерывного поля без всяких оговорок переносят обычное понятие напряженности электрического поля даже на поля внутри электрона. Однако напряженность электрического поля определяется как сила, действующая на пробную частицу, и поскольку пробных частиц, меньших электрона или ядра водорода, не существует, то напряженность поля внутри частицы представляется принципиально ненаблюдаемой, т. е. величиной фиктивной, лишенной всякого физического смысла».

Читая сегодня замечания Паули, физик почувствует одновременно и гордость и огорчение. В свете наших современных знаний попытки, подвергнутые Паули критике, покажутся, возможно, безнадежно наивными, хотя исследование того, что могли бы внести в понимание тернистой проблемы материи новые фундаментальные идеи общей теории относительности, было безусловно полезным. Конечно, взгляды на свойства и взаимодействия элементарных частиц изменились вне всяких сомнений, и мы знаем, наряду с прочим, что существуют и другие частицы, кроме отрицательного электрона и положительного протона. Однако, что известно нам о природе и стабильности этих частиц, кроме самого факта их существования?

И можем ли мы быть уверенными в том, что в наших современных теориях не преувеличивается аналогичным образом понятие «поля» или даже понятие пространственно-временного континуума?

С открытием позитрона и антипротона была устранена лишь трудность, связанная с асимметрией. Более того, теоретическое и экспериментальное решение этой проблемы поистине представляет одно из великих достижений физики на протяжении последних 30 лет. Весьма примечательно, что ранние теории, в высшей степени спекулятивные, в этом отношении (исключая асимметрию положительного и отрицательного зарядов) оказались ближе к истине, чем экспериментальные данные, имевшиеся в 1920 г. Правда, эта очевидная трудность совершенно не зависела от каких-либо специфических особенностей теорий и была основана только на простых соображениях инвариантности, так что нам все-таки лучше сказать, что соображения инвариантности оказались ближе к истине, чем экспериментальные данные.

Теория относительности, особенно в виде релятивистской квантовой теории, в научной деятельности Паули играла выдающуюся роль. Его достижения в этой области подробнее освещаются в других статьях данной книги, поэтому я считаю своей задачей лишь в общих чертах обрисовать развитие специфически релятивистских идей в тот период и подчеркнуть роль Паули в этом развитии.

Так как частная и общая теория относительности значительно отличаются друг от друга, то лучше всего рассматривать их по отдельности.

А. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В период с 1905 по 1910 г. главная задача состояла в том, чтобы распространить теорию относительности на различные области физики, приспособляя уже существовавшие теории к релятивистским требованиям. Теории для малых скоростей можно было считать известными, и хотя релятивистское их обобщение требовало изобретательности и глубокого анализа (как, например, при рассмотрении Планком термодинамики), тем не менее после пионерских работ Эйнштейна и Минковского в идейных или математических основах теории не происходило никаких радикальных изменений.

Однако с развитием атомной физики и особенно квантовой теории роль теории относительности стала более созидательной. Теперь задача уже не сводилась к простому «переводу» ранее установленных теорий на релятивистский язык. Во все возрастающей мере теории становились релятивистскими с самого начала, и релятивистские соображения решали вопрос о выборе их основных постулатов.

В то же время с коренным усовершенствованием экспериментальной техники становились доступными частицы все более высоких энергий (в космических лучах и в ускорителях); и если в первые годы нашего столетия требовались величайшие усилия для того, чтобы только заметить какое-нибудь отклонение от ньютоновской физики, то теперь явления в крайне релятивистской области встречаются в повседневной практике физических лабораторий всего мира. С другой стороны, даже малейшие эффекты наподобие сдвига Лэмба, могут измеряться с поразительной точностью и использоваться для проверки теоретических предсказаний.

Первой новой теорией, выросшей из теории относительности, была волновая теория вещества де Бройля. Без сомнения, ее можно было сформулировать и в нерелятивистском виде, но остается фактом, что оригинальная работа де Бройля по духу была целиком релятивистской, особенно при переходе от соотношения Планка $E = h\nu$ к соотношению де Бройля $p = h/\lambda$.

Следует признать большой удачей, что первые несколько лет (1925—1927 гг.) квантовая и волновая механика — эти две отрасли, возникшие из теории де Бройля, — развивались на нерелятивистской основе, хотя все исследователи хорошо сознавали необходимость сделать теорию в конечном счете релятивистски инвариантной. В самом деле, при этом предстояло преодолеть достаточно много трудностей и без добавочной тяжести собственно релятивистских проблем.

С появлением теории электрона Дирака теория относительности вступила в свои права. Теория Дирака, безусловно, была получена не из установленной нерелятивистской теории, а из основных квантотеоретических и релятивистских постулатов. Ключевой квантовый постулат заключался в том, что волновое уравнение описывает отдельную частицу с положительно определенной плотностью вероятности и что поэтому оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0. \quad (D)$$

Из лоренц-инвариантности затем следовало, что уравнение может содержать только первые производные по координатам. Релятивистское соотношение между энергией и импульсом единственным образом определило вид гамильтониана Дирака (по крайней мере для свободных электронов), приводя таким образом к четырем компонентам волновой функции (вместе с их удивительными трансформационными свойствами) и к спину электрона. Наконец, простейшее предположение о взаимодействии с электромагнитным полем давало правильное значение магнитного момента электрона.

Пожалуй, можно не подчеркивать здесь быстрый ошеломляющий успех уравнения Дирака для одной частицы во всех случаях, где применение его законно, например при выводе спектра водорода или формулы Клейна — Нишина для комптоновского рассеяния. Однако физиков больше всего беспокоило — и это довольно понятно — непредвиденное появление состояний с

с отрицательной энергией, что на первый взгляд казалось наиболее серьезным недостатком теории Дирака, но потом превратилось в самое большое ее достижение. Экспериментальное открытие рождения и аннигиляции пар доказало сразу: 1) эквивалентность массы и энергии в наиболее крайней форме, а именно тот факт, что масса и энергия могут *полностью* (а не только частично) превращаться друг в друга; 2) полную симметрию положительных и отрицательных зарядов, чем была устранена трудность в виде асимметрии, с которой сталкивались все ранние попытки построения единой теории поля; 3) правильность теории Дирака и, в частности, интерпретации Дираком состояний с отрицательной энергией. В то же время стало, однако, совершенно ясно, что теория Дирака не может последовательно рассматриваться как *одночастичная* теория. Другими словами, сам успех теории продемонстрировал, что следует отказаться от одного из основных предположений, приведших к форме гамильтониана в уравнении (D). С этого момента релятивистская квантовая теория уже не могла существовать независимо от квантовой теории поля, которая с самого начала рассматривает *неопределенное* число частиц.

Еще раньше, чем это было осознано, Гейзенберг и Паули положили начало систематической релятивистской квантовой теории поля. Значительная часть огромной работы, проделанной в этой области в последующие 30 лет, была построена на фундаменте, заложенном Гейзенбергом и Паули в их известных статьях 1929 г. [2], хотя за последние годы произошло коренное изменение математического аппарата и самого языка теории и появились важные новые идеи, например идеи перенормировки массы и заряда.

Известные трудности, связанные с бесконечностями, обусловленными нелинейностью уравнений поля, в особенности же точечным взаимодействием рассматриваемых полей, отчетливо вырисовывались уже в статьях Гейзенберга и Паули. Вероятно, они привлекали наибольшее внимание; однако несмотря на то, что за прошедшее время достигнут значительный прогресс в их понимании, эти трудности все же остаются неразрешенными.

Большая плодотворная работа была проделана также в другом направлении, которое за неимением лучшего слова можно назвать «критическим» или «аксиоматическим» и которое ставит себе целью *общее* исследование возможностей, предоставляемых релятивистской квантовой теорией, а не изучение *специальных*

разделов, как, например, электродинамики, теории β -распада или мезонной теории. Паули был одним из инициаторов этого направления.

Я останавлиюсь в основном на классификации уравнений поля и изучении их свойств симметрии. Поскольку выяснилось, что теория Дирака не может дать последовательного описания одночастичной системы, то интерпретацию уравнения Дирака следует пересмотреть. В частности, ψ -функция будет уже не вектором состояния, а переменной квантованного поля. Поэтому априорных оснований для канонического вида волнового уравнения не существует, и уравнение Дирака становится одной из многих возможных систем релятивистских волновых уравнений.

В ранней работе Паули и Вайскопфа [3] оказалось возможным показать, что уравнение Клейна — Гордона (для частиц со спином, равным нулю) также приводит к последовательной теории поля. Индефинитность плотности (не позволявшая раньше считать уравнение Клейна — Гордона правильным релятивистским обобщением уравнения Шредингера) теперь уже не представляла никакой трудности, так как индефинитным оказался оператор «зарядовой плотности», который описывал положительные и отрицательные заряды, способные рождаться и аннигилировать парами. (Следует подчеркнуть, что работа была написана еще тогда, когда о существовании частиц со спином, равным нулю, даже не предполагали.)

Из многих работ, посвященных классификации релятивистских уравнений, я упомяну только работы Дирака [4], Вигнера [5] и Фирца [6]. Дирак был первый, кто получил уравнения для произвольных значений спина, но у него тогда не было ни метода для решения вопроса о том, является ли классификация исчерпывающей, ни последовательно релятивистского определения спина.

Наиболее исчерпывающее решение проблемы было получено Вигнером методами теории групп. Он установил точный критерий эквивалентности релятивистских систем и нашел все неэквивалентные элементарные системы, не ограничивая заранее форму уравнений. Тот факт, что эти уравнения оказались дифференциальными, в исследованиях Вигнера явился результатом, а не предположением. Подтвердив, естественно, результаты Дирака, он получил также новый тип уравнения (с так называемым непрерывным спином), физический смысл которого, однако, остается неясным.

Фирц (близкий сотрудник Паули в момент написания своей статьи) исследовал более подробно физическую интерпретацию формального аппарата, в частности определение плотности заряда и полного заряда, плотности энергии и полной энергии, а также вопрос о том, когда плотность заряда, с одной стороны, и полная энергия, с другой, будут положительными. Для исследованных им систем он доказал, что поля с целым спином должны квантоваться в соответствии со статистикой Бозе, а поля с полуцелым спином — в соответствии со статистикой Ферми.

Через год Паули [7] опубликовал общее и очень изящное доказательство этого важного и замечательного результата. Полезно напомнить гипотезы, на которых основывается доказательство: 1) рассматриваемая система описывается линейными дифференциальными уравнениями (свободные частицы); 2) уравнения инвариантны относительно ограниченной группы Лоренца (исключая отражения и обращение времени); 3) коммутатор или антикоммутатор — в зависимости от рассматриваемого случая — должен быть c -числом; 4) полная энергия положительна; 5) наблюдаемые величины коммутируют для мировых точек, разделенных пространственно-подобным интервалом. (Что касается последних двух гипотез, то для полуцелого спина оказывается необходимой только четвертая гипотеза, для целого спина — только пятая гипотеза.) Характерно, что теория относительности входит в требование инвариантности (вторая гипотеза) и в постулат релятивистской причинности (пятая гипотеза).

Через пятнадцать лет Паули возвратился к этой проблеме и распространил доказательство на так называемую теорему *CPT* [8].

Примерно за последние пять лет работа в этом «аксиоматическом» направлении квантовой теории поля велась чрезвычайно активно; частично она выполнялась с помощью значительно усовершенствованной по сравнению с упомянутыми ранними работами математической техники. С моей точки зрения, серьезным достижением является то, что новейшие методы существенно меньше зависят от картины или приближения свободных частиц. Свободные частицы либо вообще не привлекаются, либо входят как асимптотическое условие, что, несомненно, является более реалистическим приближением. Наряду с другими проблемами недавно были доказаны при значительно более общих предположениях как теорема *CPT* [9], так и связь между спином и статистикой [10, 11].

Паули следил за этими работами с большим вниманием, так как он всегда глубоко интересовался логическими основами физических теорий, а в адресе Американскому физическому обществу, произнесенном в январе 1956 г., он с теплотой отзывался о работах Уайтмена и его учеников. Однако по временам, чаще в разговорах, чем в печати, Паули выражал серьезные сомнения. Не были ли обойдены действительно актуальные вопросы и не концентрировалось ли внимание на второстепенных проблемах? Теперь никто не может ответить на эти сомнения. Мне представляется, что все, чему учат нас эти аксиоматические исследования, сохранит свою ценность и в том случае, если возникнет удовлетворительная теория, основанная на существенно новой физической идее.

Б. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

По многим причинам история общей теории относительности (с 1920 г. по 1960 г.) была менее эффективной. Единственной областью, на которую она оказала решающее влияние, является космология. Влияние общей теории относительности на остальные отрасли физики было очень слабым, несмотря на коренные изменения наших фундаментальных понятий, произведенные ею. Плодотворное взаимодействие между теорией и опытом, характерное для развития космологии и астрофизики, в других областях для общей теории относительности отсутствовало¹⁾. Наблюдаемые эффекты, предсказываемые общей теорией относительности, крайне малы и, в частности, для элементарных частиц непосредственное гравитационное взаимодействие в сравнении с другими силами представляется пренебрежимо малым (что, впрочем, вовсе не говорит о законности простого отбрасывания в этом случае роли гравитации и общей теории относительности). Здесь нет необходимости во всех подробностях излагать развитие теории. Это сделано самим Паули в его предельно сжатых и ясных заметках, добавленных во втором издании его «Теории относительности». Я ограничусь кратким обсуждением собственных работ Паули и некоторых аспектов современного состояния теории.

¹⁾ К счастью, положение изменилось с тех пор, как были написаны эти строки. Гравитационный сдвиг спектральных линий был впервые измерен на опыте в земных условиях, и после этого блестящего успеха можно предвидеть более тесное взаимодействие между теорией и экспериментом также в рамках общей теории относительности.

Две статьи Паули появились в 1919 г. [12] за два года до опубликования его энциклопедической статьи. В первой статье он привел явные выражения для псевдотензора энергии—импульса гравитационного поля для общего случая (Эйнштейн опубликовал их в форме, верной только при условии, что определитель метрического тензора нормирован на -1). Он подчеркивал, что полученные им выражения, хотя и отличаются от формул Эйнштейна, но только на дивергенцию, равную нулю, как и должно быть.

Во второй статье рассматривалась единая теория поля Вейля. Обсуждались различные возможности выбора функции действия, в частности такие, которые допускали статические сферически-симметричные решения. С большим математическим искусством решение последней проблемы сводилось к решению единственного, хотя и чрезвычайно сложного, обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка.

Через четырнадцать лет появилась наиболее обстоятельная статья Паули по общей теории относительности «О формулировке законов природы пятью однородными координатами» [13]. В 1921 г. Калуца обнаружил, что уравнения Эйнштейна — Максвелла (объединенные уравнения гравитационного и электромагнитного полей в отсутствие зарядов) допускают интересную геометрическую интерпретацию [11]. В форме, усовершенствованной Оскаром Клейном, эту интерпретацию можно изложить следующим образом. Пусть $\gamma_{\mu\nu}$ означает метрический тензор пятимерного риманова пространства ($\mu, \nu=1, \dots, 5$). Предположим, что $\gamma_{\mu\nu}$ не зависит от пятой координаты x_5 («условие цилиндричности») и что

$$\gamma_{55} = 1.$$

Тогда 14 переменных поля теории Максвелла — Эйнштейна, а именно десять компонент g_{ik} метрического тензора (четырехмерного пространства — времени) и четыре компоненты φ_i электромагнитного потенциала можно выразить через $\gamma_{\mu\nu}$:

$$g_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_{i5}\gamma_{k5},$$

$$\varphi_i = (2\kappa)^{-1/2} \gamma_{i5},$$

где κ — гравитационная постоянная. отождествление переменных поля с геометрическими величинами пятимерного пространства приводило к поразительным результатам: 1) уравнения Эйнштейна — Максвелла получаются из принципа наи-

меньшего действия, причем лагранжиан есть просто скалярная кривизна пятимерного пространства; 2) геодезические линии пятимерного пространства соответствуют траекториям заряженных частиц, причем направление геодезических линий связано просто с удельным зарядом частицы e/m .

Это объединение тяготения и электричества, так же как и геометрическая интерпретация динамики теории Эйнштейна — Максвелла, привлекало и интриговало многих. До наших дней неясно, имеет ли эта интерпретация более глубокий смысл.

Однако с самого начала условие цилиндричности и нормировка $\gamma_{55}=1$ представлялись совершенно искусственными с точки зрения истинной пятимерной геометрии. Поэтому некоторые математики (Веблен и Гофман, Шутен и ван Данциг) предлагали ввести пять проективных координат x^1, \dots, x^5 так, чтобы, с одной стороны, сохранилась симметрия по пяти координатам, а с другой — эти координаты описывали четырехмерное многообразие в силу того, что геометрический смысл придавался бы только отношению $x^1 : x^5$.

В первой части своей статьи Паули дал превосходное изложение этой проективной геометрии и ее тензорного анализа, построенное на основе фундаментальных принципов, и затем сформулировал уравнения Эйнштейна — Максвелла в проективных координатах. Вторая часть посвящалась включению в эту геометрическую структуру спиноров и уравнения Дирака. На мой взгляд, это пока наиболее удовлетворительное изложение спиноров в рамках общей теории относительности совершенно независимо от проблем единой теории поля.

Что касается объединения гравитации и электричества, то Паули позднее высказал неудовлетворение всем достигнутым, и критика в приложении к его книге представляется весьма интересной и уместной. Кратко она заключается в следующем: недостаточно выразить два поля в единой геометрической структуре. Уравнения поля также должны сами быть следствием этой геометрической структуры, особенно же ее инвариантной группы. Применяя этот критерий к теории Эйнштейна — Максвелла, можно провести следующее рассуждение. Поскольку проективная формулировка, как можно показать, эквивалентна первоначальной теории Калуца — Клейна, достаточно заметить, что в силу условия цилиндричности и нормировки $\gamma_{55}=1$ инвариантная группа значительно уже группы пятимерной римановой геометрии, и, следовательно, кроме скалярной кривизны, можно построить очень много лагранжианов,

приводящих к уравнениям Эйнштейна — Максвелла. Таким образом, истинного объединения не достигается.

Это критическое замечание, между прочим, не относится к обобщению теории, исследованному Клейном. Он отказывается от условия цилиндричности, так что $\gamma_{\mu\nu}$ считается функцией пяти переменных. Однако при этом $\gamma_{\mu\nu}$ предполагается периодической функцией по x^5 , и ее можно разложить в ряд Фурье, коэффициенты которого, зависящие от пространственно-временных переменных x^1, \dots, x^4 , предположительно описывают различные частицы и подлежат квантованию.

За последнее время заметно вырос интерес к математическому анализу «классической» общей теории относительности (т. е. к первоначальной теории Эйнштейна, в противоположность такому-либо ее обобщениям или видоизменениям). Это весьма желательно как для самой теории относительности, так и ввиду попыток ее квантования. Прогресс общей теории относительности задерживался, конечно, бесспорными математическими трудностями, но даже и те вопросы, методы которых были известны, оставались нерассмотренными.

Упомянем несколько из них: 1) удобные критерии эквивалентности двух метрических полей; здесь чрезвычайную пользу могут принести выведенные Петровым [14] канонические формы тензора кривизны, для которых $R_{ik}=0$; с этим связана более трудная и более общая проблема характеристики метрического поля с помощью полного и независимого набора инвариантов [15]; 2) повторное исследование возможных выражений для псевдотензора энергии — импульса гравитационного поля [16].

Кроме того, остаются более глубокие и более трудные проблемы существования регулярных решений для уравнений пустого пространства, которые удовлетворяли бы подходящим асимптотическим условиям, например приближались бы на больших пространственных расстояниях к метрике Минковского в соответствующей системе координат. Ответ известен только для стационарного случая (все компоненты метрического тензора не зависят от временной переменной x^4): метрика является необходимо евклидовой [1]. Для статического поля ($g_{14}=g_{24}=g_{34}=0$) этот результат известен уже давно. Промежуточный результат был получен в очень интересной статье Эйнштейна и Паули [18]. Используя непосредственно вариационный принцип для уравнений поля, они показали, что асимптотически решение должно уменьшаться быстрее, чем $1/r$.

Решение для общего стационарного случая получено Лихнеровичем.

Квантование гравитационного поля предпринималось с различных позиций; однако работа еще не достигла такой стадии, на которой могли бы возникнуть специфические квантотеоретические проблемы и трудности.

По сравнению с его работами в других областях число оригинальных статей Паули по общей теории относительности довольно невелико, однако его речь на Бернской конференции [19], а также предисловие и приложение к его книге содержат глубокие мысли по общей теории относительности. Все, что он говорил об основах теории относительности, о поле и веществе, квантовой теории и теории относительности, будет глубоко интересовать каждого физика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pauli W., Theory of Relativity, New York, London, 1958. (См. перевод 1-го изд.: В. Паули, Теория относительности, М.—Л., 1946.)
2. Heisenberg W., Pauli W., Zs. f. Phys., 56, 1 (1929); 59, 168 (1929).
3. Pauli W., Weisskopf V., Helv. phys. Acta, 7, 709 (1934).
4. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A155, 447 (1936).
5. Wigner E. P., Ann. Math., 40, 149 (1939).
6. Fierz M., Helv. phys. Acta, 12, 1 (1939).
7. Pauli W., Phys. Rev., 58, 716 (1940).
8. Pauli W., в книге «Niels Bohr and the Development of Physics», New York, 1955. (См. перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.)
9. Jost R., Helv. phys. Acta, 30, 409 (1957).
10. Lüders G., Zumino B., Phys. Rev., 110, 1450 (1958).
11. Burgoyne N., Nuovo Cimento, 8, 607 (1958).
12. Pauli W., Phys. Zs., 20, 25, 457 (1919).
13. Pauli W., Ann. d. Phys., 18, 305 (1933).
14. Петров А. З., Ученые записки Казанского государственного университета, 114, 55 (1954).
15. Komar A., Phys. Rev., 111, 1182 (1958).
16. Goldberg J. N., Phys. Rev., 111, 315 (1958).
17. Møller C., Ann. d. Phys., 4, 347 (1958).
18. Einstein A., Pauli W., Ann. Math., 44, 131 (1943).
19. Jubilee of Relativity, Helv. phys. Acta, Suppl. IV.

Б. ВАН ДЕР ВАРДЕН

ПРИНЦИП ЗАПРЕТА И СПИН

ВВЕДЕНИЕ

Изложение физических теорий в учебнике по необходимости является хотя бы отчасти *догматическим*. Сначала формулируется гипотеза, затем излагаются ее следствия и, наконец, эти следствия сравниваются с результатами эксперимента.

Некоторые авторы придерживаются *смешанного* метода, дополняя догматическое изложение экскурсами в историю, показывая, как возникли гипотезы. Такой метод обладает большими достоинствами.

Можно, наконец, пользоваться *историческим методом* и шаг за шагом воспроизводить ход мыслей теоретиков в той мере, в какой это позволяют их работы. По моему мнению, полного понимания физической теории можно достичь, лишь следуя историческому методу. Этот метод позволяет нам судить, насколько та или иная гипотеза необходима для объяснения определенного круга явлений, можно ли ее видоизменить и каковы пределы ее применимости.

В предлагаемой статье используется в основном исторический метод. Это налагает жесткое ограничение на сферу исследования. Приходится рассматривать поочередно одну работу за другой, чтобы объяснить задачу, стоящую перед каждой из них, ситуацию, в которой она была написана, что было известно к моменту ее написания и какие попытки решения задачи были сделаны прежде. Можно менять обозначения на более современные, можно опускать доказательства, но основные идеи необходимо разъяснять в каждом случае.

Применение исторического метода к фундаментальным работам Паули облегчается его весьма ясной манерой изложения:

он четко ставил задачу, точно формулировал полученные другими физиками результаты и основную идею предлагаемого решения, приводил соображения в пользу этого решения, а также указывал на связанные с ним трудности и возникшие новые проблемы.

Об истории открытия принципа запрета Паули рассказал в очень поучительной лекции «Принцип запрета и квантовая механика», прочитанной в Стокгольме в 1945 г. после получения им Нобелевской премии¹⁾. В этой лекции он говорил о своей старой работе по аномальному эффекту Зеемана, как о работе, сыгравшей «решающую роль в открытии принципа запрета». Поэтому мы и начнем нашу работу со статьи Паули, опубликованной в 1923 г. и посвященной аномальному эффекту Зеемана.

§ 1. ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ

W. Pauli, *Gesetzmäßigkeiten des anomalen Zeeman-effektes* (В. Паули, Закономерности аномального эффекта Зеемана), *Zs. f. Phys.*, 16, 155 (поступило в редакцию в апреле 1923 г.).

В речи, произнесенной в Принстоне [1], Паули рассказывает о своем отношении к аномальному эффекту Зеемана в те дни:

«Аномальный тип расщепления был особенно интересен тем, что хотя он и подчинялся красивым и простым законам, однако понять его было очень трудно, так как самые общие предположения об электроне, исходящие как из классической, так и из квантовой теории приводили всегда к одному и тому же триплету. При более близком знакомстве задача показалась мне еще более неприступной. Коллега, встретивший меня, когда я бесцельно бродил по прекрасным улицам Копенгагена, дружески сказал: «Вы выглядите очень несчастным». На что я пылко ответил: «Как может человек выглядеть счастливым, если он думает об аномальном эффекте Зеемана?».

Уровень знаний, достигнутый к 1923 г., когда Паули написал свою статью, можно охарактеризовать следующим образом. Конечно, было известно, что уровни энергии атома определяют его спектр, согласно правилу Бора,

$$E_1 - E_2 = h\nu.$$

В спектроскопии различных типам уровней или состояний приписывались буквы S, P, D, F, \dots или квантовое число

$$L = k - 1 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

¹⁾ Печатается в настоящем сборнике, см. стр. 357. — *Прим. ред.*

Каждый терм, принадлежащий синглету или мультиплету, характеризовался максимальной мультиплетностью

$$2S + 1 = 2i = 1, 2, 3, \dots \quad \left(\text{откуда } S = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \right).$$

Паули использовал буквы k и i ; мы будем пользоваться современными обозначениями L и S . Для нас L и S — это соответственно орбитальный и спиновый моменты количества движения атома, но ход рассуждений Паули не зависел от такой интерпретации.

Каждый мультиплет состоит самое большее из $2S + 1$ терма, значения L и S для всех термов мультиплета одинаковы. Внутри мультиплета термы различаются квантовым числом J (по Зоммерфельду j), которое принимает значения

$$\begin{aligned} J &= L + S, \quad L + S - 1, \dots, L - S \text{ при } L \geq S, \\ J &= S + L, \quad S + L - 1, \dots, S - L \text{ при } L < S. \end{aligned}$$

В большинстве случаев выполняются комбинационные правила

$$L \rightarrow L + 1, \quad L \quad \text{или} \quad L - 1 \quad (\text{но не } 0 \rightarrow 0)$$

$$S \rightarrow S$$

$$J \rightarrow J + 1, \quad J \quad \text{или} \quad J - 1 \quad (\text{но не } 0 \rightarrow 0).$$

Если атомный номер Z (для p -кратно ионизированного атома число $Z - p$) четен, то S и J — целые числа, если нечетен, то S и J — полуцелые. В магнитном поле каждый терм расщепляется на $2J + 1$ уровни, различающиеся квантовым числом M , принимающим значения

$$M = J, J - 1, \dots, -J.$$

Если поле слабое, то уровни эквидистантны и смещены от положения невозмущенного терма на расстояние

$$E = M g h \quad \left(o = \frac{eH}{4\pi mc} \right),$$

где g — фактор Ланде

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Комбинационные правила для M таковы:

$$M \rightarrow M \pm 1 \quad (\sigma\text{-компонента})$$

$$M \rightarrow M \quad (\pi\text{-компонента})$$

$$\text{Запрещено } 0 \rightarrow 0 \text{ при } J \rightarrow J.$$

Паули принимает эти эмпирические правила за исходные и обращается к случаю сильного магнитного поля. Прежде всего он приводит таблицу полученных из опыта сдвигов уровней E в единицах oh и замечает, что квантовые числа M и отношения E/oh можно записать соответственно в виде

$$M = M_L + M_S,$$

$$\frac{E}{oh} = M_L + 2M_S = M + M_S,$$

где M_L (m_l у Паули) принимает целые значения от L до $-L$, а M_S (m_s у Паули) принимает значения $\pm 1/2$ для дублетов, а для триплетов значения $0, \pm 1$. Последнее немедленно обобщается на произвольный мультиплет: M_S принимает значения

$$S, S-1, \dots, -S.$$

Комбинационное правило для M_S гласит:

$$M_S \rightarrow M_S.$$

Это правило объясняет, почему эффект Зеемана в сильных полях на опыте оказывается нормальным.

Затем Паули формулирует следующее правило:

Сумма энергий для всех состояний мультиплета, отвечающих одному и тому же значению M , остается линейной функцией H при переходе от слабых полей к сильным.

Значению $M = J = L + S$ отвечает только одно состояние и, следовательно, энергия этого состояния является линейной функцией H . С другой стороны, если какое-либо значение M отвечает максимальному числу состояний, т. е. $2S+1$, то сумма энергий этих состояний в сильном поле, поделенная на $2S+1$, равна Moh , и потому по правилу Паули эта сумма должна сохранять то же значение и в слабых полях. Другими словами, среднее значение факторов g , отвечающих некоторому $L \geq S$, равно 1. Эти частные результаты уже были получены Гейзенбергом из постулата о статистическом постоянстве орбитального момента.

Паули показывает также, как из сформулированного им правила можно получить весь набор факторов Ланде. Можно добавить, что квантовая механика позволяет доказать это правило. Сумма энергий состояний с заданным M равна следу матрицы возмущения и, следовательно, является линейной функцией H . Все экспериментальные данные находятся в согласии с правилом Паули.

§ 2. ДВУЗНАЧНОСТЬ ЭЛЕКТРОНА

W. Pauli, *Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt* (В. Паули, О влиянии зависимости электронной массы от скорости на эффект Зеемана), *Zs. f. Phys.*, 31, 373 (поступило в редакцию в декабре 1924 г.).

В 1923 г. Паули посвятил свою вступительную лекцию приват-доцента в Гамбурге периодической системе элементов. В Нобелевской лекции он пишет:

«Содержание этой лекции совсем не удовлетворяло меня, так как проблема заполнения электронных оболочек тогда не продвинулась ни на шаг. Единственное, что было ясно, это то, что между этой проблемой и теорией мультиплетной структуры должна существовать теснейшая связь. Поэтому я предпринял попытку еще раз рассмотреть простейший случай — дублетную структуру спектра щелочных металлов. Согласно ортодоксальной тогда точке зрения, которой придерживался и Бор в своих уже упомянутых гёттинггенских лекциях, причиной этой дублетной структуры считали не равный нулю орбитальный момент атомного остатка».

И в конце 1924 г. Паули публикует работу, в которой мотивирует свой отказ от «ортодоксальных» воззрений. Сначала он учитывает релятивистский эффект влияния скорости электрона на K -оболочке на его магнитный и механический моменты. Он обнаруживает, что нерелятивистское значение для отношения этих моментов следует умножить на фактор γ [среднее значение $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$], равный 0,924 для Ва и 0,817 для Hg. Но ни нормальный, ни аномальный эффекты Зеемана не обнаруживают присутствия такого медленно убывающего фактора. Измеренные на опыте значения g являются рациональными дробями, зависящими только от квантовых чисел термов.

Чтобы выразить наблюдаемые значения g -факторов через орбитальный момент замкнутых оболочек, к которым принадлежат K -оболочки атомов щелочных металлов, пришлось бы удваивать отношение магнитного момента электрона к механическому, а также компенсировать подсчитанный классически релятивистский эффект влияния скорости. Электрон должен был бы менять свой магнитный момент при уходе с оболочки и при приходе на нее, что крайне маловероятно.

По этой причине Паули предполагает, следуя Зоммерфельду, что и орбитальный и магнитный моменты замкнутых оболочек равны нулю. Для атомов щелочных элементов это означает, что орбитальный момент атома и сдвиг уровней энергии в магнитном поле целиком связаны с валентным электроном. До этого

момента Паули лишь взвешивал достоинства двух противоположных гипотез, введенных другими физиками, но теперь он совершает неожиданный скачок и пишет следующие пророческие слова:

«Согласно этой точке зрения, дублетная структура спектров щелочных элементов, а также отступление от теоремы Лармора возникают вследствие характерной двужначности квантовых свойств электрона, которую нельзя описать классически».

Эту неподдающуюся классическому описанию двужначность электрона ныне мы называем спином. Сам Паули, когда он узнал о «вращающемся электроне», серьезно сомневался в этой идее, поскольку она основана на классических представлениях¹⁾. Поэтому, если мы хотим понять ход рассуждений Паули, мы не должны обращаться к представлению о «вращающемся электроне».

Так что же именно имел в виду Паули, когда говорил о «характерной двужначности свойств электрона»?

В дальнейшем я буду предполагать, что момент количества движения измерен в единицах $h/2\pi$, а магнитный момент — в магнетонах Бора. Начнем с формул Паули для сильных полей (см. § 1):

$$M = M_L + M_S, \quad (1)$$

$$\frac{E}{\alpha h} = M_L + 2M_S. \quad (2)$$

Каков смысл квантовых чисел M , M_L и M_S ? Во второй работе, в том же томе *Zeitschrift für Physik* (т. 31, стр. 765, получено редакцией в январе 1925 г.), Паули говорит, что M — полный момент в направлении поля. Эта интерпретация принадлежит Зоммерфельду [2], который первым определил квантовые числа J и M . В той же работе Паули представляет M_L в виде суммы величин m_l , а M_S в виде суммы величин m_s , относящихся к отдельным электронам:

$$M_L = \sum m_l, \quad M_S = \sum m_s.$$

Оба суммирование проводятся лишь по тем электронам, которые не входят в замкнутые оболочки, ибо замкнутые оболочки не обладают ни магнитным, ни механическим моментами количества движения (там же, стр. 385). Поэтому в атомах щелочных

¹⁾ Нобелевская лекция, см. стр. 357 этой книги. — *Прим. ред.*

металлов обе суммы сводятся лишь к одному члену и выражения (1) и (2) упрощаются:

$$M = m_l + m_s, \quad (3)$$

$$\frac{E}{\hbar} = m_l + 2m_s. \quad (4)$$

Целое число m_l можно интерпретировать как составляющую по полю момента количества движения для орбитального движения электрона. Следовательно, величина m_s представляет собой вклад самого электрона (за вычетом его орбитального момента) в полный момент количества движения M в направлении поля.

Поскольку m_l является целым числом, а m_s принимает значения $\pm 1/2$, величина M принимает только полуцелые значения, и квантовое число J , определенное самым общим образом как максимальное значение M для любого терма мультиплетта, принимает значения $L + 1/2$ и $L - 1/2$ для двух термов дублета щелочных металлов. Следовательно, двузначность J , приводящая к дублетному расщеплению, логически вытекает из двузначности m_s . Мы приходим, таким образом, к вполне убедительному и логичному объяснению первой части утверждения Паули: «... дублетная структура... возникает вследствие характерной двузначности... электрона». Обратимся теперь ко второй части утверждения, касающейся «отступления от теории Лармора», т. е. аномального эффекта Зеемана.

Исходным пунктом рассуждений Паули (там же, стр. 374) было выражение для энергии атома в магнитном поле:

$$E = -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}), \quad (5)$$

где \mathbf{M} — вектор магнитного момента. Если мы сравним эту формулу с выражением (2), мы увидим, что атом, характеризующийся квантовыми числами M_L и M_S , ведет себя в сильном магнитном поле подобно магниту с составляющей магнитного момента по полю, равной $M_L + 2M_S$. Если есть только один валентный электрон, то магнитный момент атома равен $m_l + 2m_s$ (в магнетонах Бора).

Выражения (2) и (4) выполняются только для сильных полей, но если мы рассмотрим S -состояние атома щелочного элемента, то $M_L = 0$ и $M = M_S = m_s$, и, согласно правилу Паули, выражение (4) применимо и для слабых полей. Это означает, что при равном нулю орбитальном моменте магнитный момент атома щелочного элемента равен в точности $2m_s$. Согласно фунда-

ментальным предположениям Паули, этот магнитный момент целиком принадлежит валентному электрону.

Выше я старался не пользоваться какими-либо понятиями, чуждыми рассуждениям Паули, и подтверждаю каждое положение ссылкой на его собственные слова. Однако выводы мои были сформулированы в гораздо более точных выражениях, чем довольно расплывчатое утверждение Паули о характерной двузначности электрона.

Почему Паули выражался так туманно? Почему он просто не сказал, что вследствие его предположений электрон обладает внутренним моментом $m_s = \pm 1/2$ и магнитным моментом $2m_s$? В Нобелевской лекции он формулирует оба эти утверждения, но приписывает их Уленбеку и Гаудсмиту. Почему он сам не сделал этих выводов? Я попытаюсь решить эту историческую загадку в § 4.

§ 3. ПРИНЦИП ЗАПРЕТА

W. P a u l i, *Über den Zusammenhang des Abschlusses von Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Felder* (В. П а у л и, О связи заполнения атомных оболочек в атоме со сложным строением поля), Zs. f. Phys., 31, 765 (поступило в редакцию в январе 1925 г.).

Осенью 1924 г., когда Паули писал свою первую статью для 31 тома *Zeitschrift für Physik*, появилась работа английского физика Стонера [3], в которой, помимо усовершенствования классификации по подгруппам электронов на замкнутых и незамкнутых оболочках, содержалось важное замечание, цитируемое Паули следующим образом:

«При данном значении главного квантового числа число уровней энергии единственного электрона в спектре щелочных металлов во внешнем магнитном поле равно числу электронов на замкнутой оболочке благородных газов, отвечающей тому же значению главного квантового числа».

В открытии принципа запрета это замечание сыграло решающую роль. Паули приводит его в своей Нобелевской лекции и затем продолжает:

«Тогда на основе моих прежних результатов по классификации спектральных термов в сильном магнитном поле для меня прояснилась и общая формулировка принципа запрета».

Паули сформулировал принцип запрета в своей второй работе в *Zeitschrift für Physik* (т. 31, стр. 765). Объяснив смысл

квантовых чисел n , k_1 , k_2 , m_1 отдельного электрона в атоме, Паули следующим образом излагает свой принцип:

«В атоме не может существовать двух или больше эквивалентных электронов, для которых значения всех квантовых чисел n , k_1 , k_2 , m_1 в магнитном поле одинаковы. Если в атоме находится электрон, для которого все эти числа имеют определенное значение, то это состояние „занято“».

Квантовые числа Паули связаны с современными квантовыми числами n , l , j , m_j соотношениями

$$n = n, \quad k_1 = l + 1, \quad k_2 = j + \frac{1}{2}, \quad m_1 = m_j.$$

До опубликования своей работы Паули побывал в Тюбингене и с помощью собранного там экспериментального материала проверил некоторые дополнительные заключения, касающиеся аномального эффекта Зеемана. Ему также нужно было придать своим идеям такую форму, чтобы другие физики могли понять их. Это было нелегкой задачей. «Физики считали принцип запрета малопонятным, поскольку четвертая степень свободы электрона не описывалась никакой моделью» (Нобелевская лекция).

Сегодня, когда мы знакомы с принципом Паули и «четвертой степенью свободы», носящей теперь название спина, нам не трудно понять ход мыслей Паули. Он начинает со щелочных металлов. В этом случае квантовые числа l , j и m_j для валентного электрона совпадают с L , J и M для атома, поскольку замкнутые оболочки не влияют на орбитальный и полный моменты атома.

Переход к более сложным атомам осуществляется при помощи принципа Бора, который гласит: если к ионизированному атому добавить еще один электрон, то квантовые числа уже связанных электронов останутся теми же, что и в ионизированном атоме. Паули показывает, что и в простых, и в более сложных случаях применение этого принципа позволяет получить правильный набор атомных термов. Принцип разветвления Гейзенберга и Ланде оказывается в согласии с принципом Бора.

В рассуждениях Паули особую роль играют соотношения для эффекта Зеемана в сильных полях. Принцип Бора предполагает, что существуют такие квантовые числа m_j электронов, сумма которых равна составляющей полного момента атома в направлении поля

$$M = \sum m_j.$$

Сдвиг уровня в магнитном поле пропорционален магнитному моменту

$$M_2 = M + M_S = M_L + 2M_S,$$

что можно записать, согласно принципу Бора, в виде суммы моментов отдельных электронов

$$M_2 = \sum m_2.$$

После этих предварительных замечаний Паули теперь может сформулировать свое основное предположение: *каждый электрон в атоме можно охарактеризовать главным квантовым числом n и тремя дополнительными квантовыми числами l, j, m_j . Число j всегда равно $l \pm 1/2$, как в спектрах щелочных элементов. Вместо j можно также использовать $m_2 = m_j \pm 1/2$.*

Ясно, что определение этих квантовых чисел было сопряжено с большими трудностями в те дни, когда квантовой механики еще не существовало, и для описания движения электрона приходилось пользоваться несовершенными классическими моделями. Так, для определения чисел m_2 и m_j Паули приходилось предполагать магнитное поле настолько сильным, что каждый электрон должен был обладать независимо от остальных определенным механическим моментом m_j и магнитным моментом m_2 . Паули прекрасно видел эти трудности и не считал свою точку зрения окончательной. Приходится только удивляться мужеству и настойчивости, с которыми он развивал выводы из своей теории. Дальнейшее развитие квантовой механики полностью подтвердило каждое из его предположений.

Далее Паули переходит к случаю эквивалентных электронов. Он указывает, что в этом случае некоторые комбинации квантовых чисел в природе не осуществляются. Например, если два валентных электрона находятся в s -состояниях, принадлежащих различным n , то мы обнаружим и синглетный и триплетный термы, но если n для обоих электронов одинаково, то существует только синглетный терм.

Ограничение набора термов, по словам Паули, тесно связано с явлением заполнения оболочек. Замкнутая в основном состоянии гелия K -оболочка содержит два электрона, а замкнутая в основном состоянии неона L -оболочка содержит восемь электронов и т. д. Бор в своей теории периодической системы элементов подразделял эти восемь электронов на две подгруппы по четыре в каждой, но Стонер предложил разделить восемь электронов на подгруппы из двух электронов с $l=0$

и из шести с $l=1$. Стонер также предположил, что в других замкнутых оболочках при каждом значении $l < n$ подгруппы составляют $2(2l+1)$ электрона. (Подобно Паули, Стонер использовал $k=l+1$ вместо нашего l .)

Наиболее важным из результатов Стонера является утверждение, что число $2(2l+1)$, равное числу электронов на замкнутой оболочке с данным значением l , представляет собой также число возможных состояний атома щелочного элемента в магнитном поле, характеризуемых тем же значением l при заданном главном квантовом числе валентного электрона.

Как мы уже видели, это замечание Стонера дало Паули ключ к его принципу запрета. Паули объясняет равенство числа электронов в каждой подгруппе замкнутой оболочки величине $2(2l+1)$ предположением, что каждое состояние, характериземое квантовыми числами (n, l, j, m_j) , занято лишь одним электроном. Следовательно, при заданном n и $l > 0$ существуют только два возможных значения для $j=l\pm 1/2$ и при каждом j существует только $2j+1$ возможное значение для m_j . При $l=0$, $j=1/2$ и m_j принимает два значения. Таким образом, в любом случае мы получаем $2(2l+1)$ возможных набора (n, l, j, m_j) .

Квантовые числа j и m_j для одного электрона Паули определил только в сильных полях, но он указывает, что по термодинамическим соображениям число состояний в слабых полях должно быть таким же, как и в сильных. Следовательно, все выводы из принципа запрета, касающиеся числа состояний и полного момента J этих состояний, должны иметь общее значение. Логика Паули достойна восхищения!

Пользуясь принципом запрета, Паули находит числа электронов 2, 8, 18, 32, ... на замкнутых оболочках и показывает, почему триплетный S -терм не встречается у щелочноземельных металлов с двумя эквивалентными s -электронами. Если бы у обоих электронов квантовые числа m_j были одинаковы, то набор четырех квантовых чисел

$$(n, l, j, m_j) = \left(n, 0, \frac{1}{2}, m_j \right)$$

у них бы совпадал, что, согласно принципу запрета, невозможно. Следовательно, M не может принимать значения $+1$ или -1 и J не может быть равно 1; это означает, что триплетный S -терм отсутствует.

Затем Паули рассматривает случай, когда в замкнутой оболочке недостает одного электрона. В этом случае в подгруппе,

определяемой квантовыми числами l' и j' , нехватает одного набора величин (l' , j' , m'). Полный момент оболочки равен

$$M = \sum m_j = -m'.$$

Когда m' пробегает все возможные значения от $-j'$ до $+j'$, M меняется от $+j'$ до $-j'$ и мы получаем тот же набор состояний, что и для одного электрона. Следовательно, число состояний при одном недостающем электроны в замкнутой оболочке равно числу состояний единственного валентного электрона в атоме щелочного металла при заданном значении n ; полный момент J в обоих случаях пробегает один и тот же набор значений. Все эти выводы подтверждены экспериментом.

В общем случае число состояний на замкнутой оболочке, из которой нехватает q электронов, равно числу состояний набора из q электронов, у которых n одинаково.

Паули приводит еще несколько примеров применения принципа запрета; опыт всегда подтверждал его выводы.

В конце статьи Паули выражает надежду, что лучшее понимание квантовой механики позволит вывести принцип запрета из более фундаментальных гипотез. До некоторой степени эта надежда оправдалась. Действительно, принцип запрета можно вывести из более общего принципа антисимметрии, который, как показал сам Паули, тесно связан с тем, что спин электрона является полуцелым, и с требованием релятивистской инвариантности (см. § 15).

§ 4. ВРАЩАЮЩИЙСЯ ЭЛЕКТРОН

W. Heisenberg, *Zur Quantentheorie der Multiplettstruktur und der anomalen Zeemaneffekte* (В. Гейзенберг, К квантовой теории мультиплетной структуры и аномального эффекта Зеемана), *Zs. f. Phys.*, 32 841 (поступило в редакцию в апреле 1925 г.).

G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit, *Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons* (Г. Уленбек, С. Гаудсмит, Замена гипотезы о немеханическом натяжении предположением о внутреннем состоянии отдельного электрона), *Naturwiss.*, 13, 953 (поступило в редакцию в октябре 1925 г.).

G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit, *Spinning Electrons and the Structure of Spectra* (Г. Уленбек, С. Гаудсмит, Вращающиеся электроны и строение спектров), *Nature*, 117, 264 (написано в декабре 1925 г.).

L. H. Thomas, *The Motion of the Spinning Electron* (Л. Томас, Движение вращающегося электрона), *Nature*, 117, 514 (написано в феврале 1926 г.).

L. H. Thomas, *The Kinematics of an Electron with an Axis* (Л. Томас, Кинематика электрона с осью), *Phil. Mag.*, 17, 3, 1 (опубликовано в январе 1927 г.).

R. de L. Kronig, *Spinning Electrons and the Structure of Spectra* (Р. Крониг, Вращающийся электрон и строение спектров), *Nature*, 117, 550 (опубликовано в апреле 1925 г.).

G. E. Uhlenbeck, *Oude en nieuwe vragen der natuurkunde*, Amsterdam, 1955 (Г. Уленбек, Старые и новые вопросы естествознания), речь, произнесенная в апреле 1955 г.

Помимо перечисленных опубликованных работ, с любезного разрешения адресатов и отправителей были использованы следующие письма:

От Гейзенберга Гаудсмиту от 21 ноября и 9 декабря 1925 г. и 19 февраля 1926 г.

От Гейзенберга Паули от 24 ноября и 24 декабря 1925 г.

От Паули Бору от 5 и 26 февраля и 5 и 12 марта 1925 г.

От Бора Кронигу от 26 марта 1926 г.

От Кронига Ван дер Вардену от 22 июня 1959 г.

От Гейзенберга Ван дер Вардену от 23 июня 1959 г.

От Уленбека Ван дер Вардену от 7 июля 1959 г.

От Гаудсмита Ван дер Вардену от 14 июля 1959 г.

От Бора Ван дер Вардену, июль 1959 г.

Мы обратимся теперь к вопросу, поднятому в конце § 2. Почему Паули не приписал электрону момент количества движения $m_s = \pm 1/2$ и магнитный момент $2m_s$?

Опубликованные работы Паули не дали ответа на этот вопрос. В Нобелевской лекции он утверждает, что к идее вращающегося электрона его склонил выполненный Томасом расчет дублетного расщепления. Утверждение Паули поставило меня в тупик и я решил написать ряду лиц, которые обсуждали с ним эти проблемы. Из ответов я выяснил, что о гипотезе вращающегося электрона Паули и Гейзенберг узнали от Кронига в начале 1925 г. и от Уленбека и Гаудсмита в октябре того же года. Сначала они и Нильс Бор отвергли эту гипотезу, но впоследствии согласились с ней — Бор и Гейзенберг в декабре 1925 г., а Паули — в марте 1926 г. Передо мной возник, таким образом, более широкий вопрос, по какой причине Паули, Гейзенберг и Бор отвергли гипотезу о спине в 1925 г. и почему впоследствии они изменили свое мнение?

После длительной переписки и ряда бесед я получил почти исчерпывающие ответы на все вопросы. Я узнал, что выражение для расщепления дублета, найденное Кронигом в феврале 1925 г. и переданное через Гейзенберга Уленбеку, Гаудсмиту, Эйнштейну и Бору, было исправлено Томасом и сыграло решающую роль в дискуссии. Чтобы объяснить, в чем было дело, мне придется рассказать всю историю с самого начала. Я изложу сначала факты, которые я узнал из перечисленных писем и статей, и добавлю затем некоторые замечания. Частично эта история изложена в статье Кронига «Переломные годы», помещенной в настоящем томе. Мы пытались по возможности избежать повторений, но некоторые существенные вопросы пришлось затронуть в обеих статьях.

Гипотезу об электро-не, вращающемся вокруг своей оси, впервые предложил А. Комптон в 1921 г. [4]. Однако Комптон не воспользовался своей идеей для объяснения аномального эффекта Зеемана, и его работа, по-видимому, не оказала влияния на дальнейший ход событий.

В январе 1925 г. двадцатилетний Крониг прибыл в Тюбинген, чтобы встретиться с Ланде и Баком. Ланде показал Кронигу только что полученное письмо Паули, в котором разъяснялся принцип запрета по существу таким же образом, как в разобранной в § 3 статье Паули. В письме, как и в работе, Паули предлагал характеризовать состояние электрона четырьмя квантовыми числами (n, l, j, m_j в современных обозначениях), причем j равно $l + 1/2$ или $l - 1/2$, а m_j принимает значения $j, j-1, \dots, -j$.

Крониг сразу увидел, к чему ведет эта гипотеза. Если полный момент j отличается от орбитального момента l на $\pm 1/2$, то это означает, что каждый электрон в дополнение к моменту, связанному с орбитальным движением, имеет еще собственный момент с проекцией на любое избранное направление, равной $\pm 1/2$ (в единицах $h/2\pi$). Первоначально этот момент приписывался атомному остатку, но, согласно воззрениям Паули, его нужно отнести к самому электрону. Чтобы интерпретировать динамически этот момент, Крониг предположил, что электрон вращается вокруг собственной оси.

В тот же день Крониг оценил уровни энергии электрона, несущего магнитный момент, равный в точности одному магнетону Бора. В системе координат, где электрон покоится, электрическое поле атомного ядра при помощи преобразования Лоренца порождает магнитное поле. Взаимодействие этого поля

с магнитным моментом электрона приводит к появлению в выражении для энергии члена, пропорционального скалярному произведению векторов спина и орбитального момента. Для атомов щелочных элементов учет этого взаимодействия дает величину дублетного расщепления, пропорциональную Z^4 , где Z — эффективный заряд ядра (или, точнее, пропорциональную $Z_i^2 Z^2$, где Z_i и Z — заэкранированные заряды ядра, действующие внутри и вне атомной оболочки). Это согласуется с экспериментальными данными, приведенными Ланде [5]. В старой модели дублетное расщепление объяснялось магнитным моментом атомного остатка и было пропорционально Z^3 .

Удовлетворительный результат расчетов позволил Кронигу надеяться, что в водородоподобных атомах новый эффект наложится на тонкую структуру, рассчитанную Зоммерфельдом, и уровни с $l=j-1/2$ и $l=j+1/2$ будут совпадать при любом j . Это объяснило бы наблюдаемую на опыте тонкую структуру водородных термов. Оказалось, однако, что расчет нового эффекта дает вдвое большую величину, чем требует эксперимент.

8 января Крониг встретил Паули в Тюбингене и рассказал ему о своих идеях и расчетах. Паули ответил: «Это очень остроумная выдумка», но был настроен скептически.

Затем Крониг отправился в Копенгаген и обсудил эту проблему с Гейзенбергом, Крамерсом и другими. Идея о вращающемся электроны и здесь не встретила поддержки. Подавленный отрицательной реакцией прославленных физиков, Крониг не опубликовал свою теорию; кроме того, он прекрасно знал о непреодоленных трудностях, он перечислил их в своем письме ко мне:

«Во-первых, уже упоминавшийся множитель 2. Во-вторых, трудно было понять, каким образом вращение электрона вокруг своей оси приводит к магнитному моменту, в точности равному магнетону. В-третьих, необходимость вводить скорости вращения заряда в электроны классических размеров, превышающие скорость света. Наконец, малая величина магнитных моментов атомных ядер, которые в то время предполагались составленными из протонов и электронов».

Независимо от Кронига голландские физики Уленбек и Гаудсмит [6] также пришли к мысли, что каждый терм в спектре водорода следует характеризовать тремя квантовыми числами (n, l, j) , а не традиционными двумя, аналогично тому, как каждый терм в атоме щелочного металла характеризуется тремя квантовыми числами (n, l, j) с той лишь разницей, что при данном j два водородных терма $l=j+1/2$ и $l=j-1/2$ совпадают.

Такие же соображения аналогии привели к сходному заключению и Слетера [7]. Эти соображения были довольно убедительными, и вывод, сделанный из них, как мы теперь знаем, оказался правильным. На самом деле этот вывод является прямым следствием постулата Паули, гласящего, что каждое электронное состояние характеризуется четырьмя квантовыми числами (n, l, j, m_j).

В тот период (1923—1925 гг.) физики копенгагенской школы пытались устранить трудности, связанные со структурой мультиплетов и магнитным расщеплением термов, вводя «немеханическое натяжение» как причину раздвоения термов. Эта гипотеза была предложена Бором в 1923 г. [8, 9] и разработана Гейзенбергом в апреле 1925 г. [9]. Хотя вся ситуация вызывала у Бора [10] чувства «грусти и безнадежности», он все же вплоть до конца 1925 г. придерживался своей гипотезы.

Брешь была пробита в октябре 1925 г. знаменитым письмом Уленбека и Гаудсмита в *Naturwissenschaften*, представленным Эренфестом. Авторы не знали об идеях Кронига; они, как и Крониг, исходили из четырех квантовых чисел Паули и предлагали интерпретировать s и m_s как квантовые числа, характеризующие вращательное состояние электрона. Для объяснения аномального эффекта Зеемана они предположили, что отношение магнитного момента электрона к механическому моменту вдвое больше, чем в орбитальном движении. Взаимная ориентация векторов спина и орбитального момента была причиной релятивистского дублетного расщепления.

В речи, произнесенной в Лейдене в 1955 г. по случаю занятия профессорской кафедры Лоренца, Уленбек рассказал об открытии и публикации гипотезы о вращающемся электроны:

«Гаудсмит и я пришли к этой идее, изучая статью Паули, в которой был сформулирован знаменитый принцип запрета и электрону впервые приписывались *четыре* квантовых числа. Вывод Паули был довольно формальным; он не связывал никакой конкретной картины со своим предложением. Для нас оно казалось загадкой. Мы свыклись с представлением, что каждому квантовому числу соответствует степень свободы, и, с другой стороны, с точечностью электрона, который, очевидно, имел лишь три степени свободы, и не могли найти места для четвертого квантового числа. Мы могли принять его только в том случае, если электрон является маленькой сферой, способной вращаться...

Несколько позже мы обнаружили из работы Абрагама (на которую обратил наше внимание Эренфест), что множитель 2 в магнитном моменте вращающейся сферы с поверхностным зарядом можно понять классически. Это ободрило нас, но наш энтузиазм в значительной мере остыл, когда мы обнаружили, что скорость вращения

на поверхности электрона должна во много раз превышать скорость света! Я помню, что основные соображения пришли нам в голову как-то во второй половине дня в конце сентября 1925 г. Мы были взволнованы, но не имели ни малейшего намерения что бы то ни было предавать гласности. Это казалось столь необоснованным и дерзким, что где-то, несомненно, должна была таиться ошибка, да и Бор, Гейзенберг и Паули, наши большие авторитеты, никогда не предлагали ничего подобного. Но мы, конечно, рассказали обо всем Эренфесту. Он сразу заинтересовался, главным образом, я думаю, благодаря наглядному характеру гипотезы, бывшей вполне в его духе. Он обратил наше внимание на несколько пунктов (в частности, указал, что в 1921 г. Комpton предлагал идею о вращающемся электро-не в качестве возможного объяснения естественной единицы магнетизма) и, наконец, заявил, что это либо очень важно, либо чепуха, и что мы должны написать короткое письмо для *Naturwissenschaften* и отдать ему. Он кончил словами „...und dann werden wir Herrn Lorentz fragen“ (нужно спросить герра Лоренца). Так и поступили. Лоренц встретил нас с присущим ему радушием и вниманием и очень заинтересовался нашей идеей, хотя, я думаю, в душе относился к ней несколько скептически. Он обещал нам подумать над этим. И действительно, уже через неделю он передал нам написанную замечательным почерком рукопись, содержащую длинные расчеты электромагнитных свойств вращающегося электрона. Мы не вполне поняли их, но было очевидно, что представление о вращающемся электро-не, если его принимать всерьез, связано с большими трудностями. Например, магнитная энергия электрона должна быть столь велика, что его масса по принципу эквивалентности должна превосходить массу протона, или, если принять известное значение массы, его размеры должны превосходить размеры атома! И то же другое казалось бессмыслицей. Мы с Гаудсмитом чувствовали, что, быть может, пока лучше воздержаться от каких-либо публикаций, но когда мы сказали о своем намерении Эренфесту, он ответил: „Я уже давно отправил ваше письмо в печать, вы оба достаточно молоды, чтобы позволить себе сделать глупость!“».

Гейзенберг поздравил Гаудсмита со смелой работой и спросил, как тот не побоялся выбросить лишний множитель 2 в формуле для дублетного расщепления (т. е. в той самой формуле, которую Крониг вывел и сообщил Паули, Гейзенбергу и Крамерсу). В письме Гейзенберга (от 21 ноября 1925 г.) вывода этой формулы не содержалось. Уленбек в своем письме ко мне рассказывает:

«Получив этот результат от Гейзенберга, мы попытались вывести его сами. Существенную помощь нам оказал Эйнштейн, бывший в то время в Лейдене, который посоветовал перейти в систему координат, где электрон покоится, и рассмотреть, как преобразуется кулоново поле. Выкладки после этого стали вполне очевидными».

Таким образом, Эйнштейн, Уленбек и Гаудсмит вывели заново формулу Кронига для дублетного расщепления с лишним

множителем 2 при помощи такого же преобразования Лоренца, какое использовал Крониг. Именно это объяснение дублетного расщепления склонило Бора к гипотезе вращающегося электрона. Бор пишет в письме к Кронику:

«Когда я приехал в Лейден на торжества, посвященные Лоренцу (декабрь 1925 г.), Эйнштейн спросил меня сразу, как только я его увидел, что я думаю о вращающемся электроне. На мой вопрос о причине взаимодействия направления спина с орбитальным движением, он ответил, что это взаимодействие является непосредственным следствием теории относительности. Его замечание было полным открытием для меня, и с тех пор я никогда не сомневался, что нашим затруднениям пришел конец».

В письмах к Паули (от 24 ноября) и Гаудсмиту (от 9 декабря) Гейзенберг выдвинул ряд возражений против идеи о вращающемся электроне, и главным среди них снова был множитель 2. Однако под влиянием оптимизма Бора Гейзенберг уже к 24 декабря изменил свое мнение.

А Паули остался при своем. Он встретил на гамбургском вокзале Бора, когда тот ехал из Копенгагена в Лейден, и строго-настрого предостерег его против гипотезы о спине. После возвращения Бора из Лейдена Паули встретил его в Берлине, выразил в резких словах разочарование по поводу его отступничества и высказал сожаление, что в атомной физике возникает новая «ересь».

Из писем Паули к Бору и из его Нобелевской лекции мы можем заключить, что основные возражения Паули против гипотезы о спине сводились к следующему: 1) лишний множитель 2 в формуле для дублетного расщепления, который не был устранен даже когда Паули и Гейзенберг проделали все вычисления заново, пользуясь новой квантовой механикой Гейзенберга; 2) классический характер гипотезы о вращающемся электроне. Сократов демон¹⁾ Паули, его интуиция (как мы говорим сегодня) подсказывал ему, что «двузначность электрона» является типично квантовым эффектом, который нельзя описать на языке классической механики.

Наконец, множитель 2 был устранен Томасом. Корректно пользуясь методами релятивистской механики, Томас получил правильное значение для дублетного расщепления. Свою первую статью он написал в феврале 1926 г. в институте Бора в Копенгагене.

¹⁾ Сократ говорил о некоем внутреннем голосе—«демоне», который якобы должен направлять мысли и определять деятельность человека.—*Прим. ред.*

Именно вычисления Томаса заставили Паули в марте 1926 г. согласиться с идеей о вращающемся электроне. В Нобелевской лекции он пишет:

«Хотя сначала я сильно сомневался в этой идее ввиду ее классического характера, но в конце концов все же стал ее сторонником, после того как Томас вычислил величину дублетного расщепления. С другой стороны, мои прежние сомнения, а также осторожное выражение „двузначность, не поддающаяся классическому описанию“ в дальнейшем получили известное подтверждение, так как Бор показал с помощью волновой механики, что спин электрона нельзя измерить в классически описываемых опытах...».

Гипотеза о вращающемся электроне состоит из трех утверждений: 1) электрон вращается, 2) он обладает механическим моментом с составляющей по заданному направлению $m_s = \pm 1/2$; 3) он обладает магнитным моментом, равным $2 m_s$.

Паули неохотно принял первое утверждение из-за его классического содержания. Мы знаем теперь, что он был прав. Спин нельзя описать классической кинематической моделью, поскольку такая модель никогда не может привести к двузначным представлениям группы вращения.

Логически Паули мог бы принять второе и третье утверждения, не принимая первого. Трудно, однако, говорить о моменте количества движения, не думая о вращении. Крониг, как и Уленбек с Гаудсмитом, вводил все три гипотезы как одно целое.

Основной причиной, по которой Паули сомневался во всех трех утверждениях, было появление множителя 2 в расчетах дублетного расщепления, выполненных Кронигом. Паули знал, что поведение щелочного атома в магнитном поле можно объяснить, если приписать электрону квантованный магнитный момент, равный одному магнетону. Но магнитный момент того же электрона в поле ядра, казалось, был равен только половине магнетона. После расчетов, проведенных Томасом, стало ясно, что электрон во всех случаях ведет себя как магнит с моментом, равным одному магнетону. Поэтому Паули согласился со вторым и третьим утверждениями и принял первое в качестве предварительной гипотезы, зная, что квантовой механикой уже создана совершенно новая ситуация.

Отношение Паули к наглядной картине вращающегося электрона в тот переломный год ярко раскрывается следующим замечанием, содержащимся в его статье, посвященной семидесятилетию Нильса Бора [11]:

«После короткого периода идейного разброда и разногласий, вызванных временным ограничением „наглядности“, было достигнуто

общее согласие о замене конкретных образов абстрактными математическими символами, например ψ . В частности, конкретный образ вращения в трехмерном пространстве был заменен математическими характеристиками представления группы вращений».

Мы видели, что сомнения Паули, Гейзенберга и Кронига во многих отношениях подтвердились. Лоренц также имел серьезные сомнения, которые в то время были вполне обоснованы. По-моему, нет основания упрекать Паули и Гейзенберга в том, что они не заставили Кронига опубликовать свои гипотезы.

§ 5. СТАТИСТИКА ФЕРМИ

E. Fermi, *Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases* (Э. Ферми, О квантовании идеального одноатомного газа), *Zs. f. Phys.*, **36**, 902 (поступило в редакцию в марте 1926 г.).

W. Pauli, *Über Gasentartung und Paramagnetismus* (В. Паули, О вырождении газов и парамагнетизме), *Zs. f. Phys.*, **41**, 81 (поступило в редакцию в декабре 1926 г.).

Принцип запрета Паули был использован в статистической термодинамике в двух очень важных работах Ферми и Дирака, появившихся независимо в 1926 г. Я расскажу сначала кратко о работе Ферми и о близко связанной с ней работе Паули в декабре 1926 г.

В идеальном газе отдельные молекулы движутся независимо. Каждая молекула движется в поле, удерживающем молекулы вместе, например в поле отталкивания идеально отражающих стенок. Поскольку результаты в конечном счете не зависят от конкретного выбора этого поля, Ферми предположил, что молекулы притягиваются к некоторой точке O центральными силами, пропорциональными расстоянию. Каждая молекула представляет собой теперь гармонический осциллятор. Если каждая молекула состоит из одного атома в нормальном состоянии и это нормальное состояние является простым (т. е. не расщепляется в магнитном поле), то состояние молекулы характеризуется тремя квантовыми числами s_1, s_2, s_3 , и ее энергия равна $h\nu(s_1 + s_2 + s_3) = h\nu s$, где ν — частота осциллятора, а энергия отсчитывается от наименьшего возможного значения.

Ферми предположил далее, что молекулы подчиняются принципу запрета Паули, т. е. каждое состояние может быть занято не более чем одной молекулой. Состояние газа опреде-

лено, коль скоро мы знаем, какие состояния заняты. Все состояния газа при заданном полном числе молекул и заданной полной энергии $W = E h \nu$ (E — целое число) предполагаются равновероятными. Вероятности различных значений E однозначно определены требованием, чтобы при малых плотностях распределение по скоростям переходило в распределение Максвелла. Опираясь на эти предположения, Ферми смог теперь вычислить распределение по энергиям, среднюю кинетическую энергию, давление и теплоемкость. Хотя Ферми подчиняет движение молекул законам классической механики, его результаты по существу совпадают с результатами Дирака, полученными с привлечением квантовой механики в основополагающей работе, которую мы рассмотрим в § 6.

Паули упрощает выкладки Ферми, вводя в рассмотрение «большой ансамбль», в котором число частиц N подчинено законам случая. Окончательные формулы для средней энергии и среднего числа частиц N не отличаются от полученных Ферми. Паули подсчитывает также изменение числа частиц, обладающих заданной энергией. Затем он использует предположения Ферми для газа, состоящего из электронов или молекул с моментом количества движения, не равным нулю, и изучает поведение такого газа в магнитном поле.

§ 6. АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

P. A. M. Dirac, *On the Theory of Quantum Mechanics*
(П. А. М. Д и р а к, Об основах квантовой механики),
Proc. Roy. Soc., B112, 661 (поступило в редакцию
в августе 1926 г.).

В 1925 г. появилась на свет квантовая механика. История этого великого события подробно рассказана Уиттеккером [12]. Ниже мы рассмотрим, каким образом понятие спина и принцип запрета были введены в квантовую механику.

Независимо один от другого Гейзенберг и Дирак первыми применили квантовую механику к системам, состоящим из более чем одной частицы. Хотя работа Гейзенберга появилась в 8 томе *Zeitschrift für Physik* на два или три месяца раньше, чем работа Дирака, мы обсудим сначала последнюю.

В разделе 3 Дирак замечает сначала, что матричная механика Гейзенберга позволяет рассчитать только существенно физические величины и не дает никаких сведений о тех величинах, которые нет надежды измерить экспериментально.

«Следует ожидать, что эта весьма удовлетворительная черта теории сохранится и при ее дальнейшем развитии», — говорит Дирак.

Затем он рассматривает атом с двумя электронами. Состояние атома, в котором один электрон находится на орбите m , а другой — на орбите n , обозначается символом (mn) . Два состояния (mn) и (nm) физически неразличимы. Если их нужно считать за разные состояния, то теория даст возможность рассчитывать порознь интенсивности переходов $(mn) \rightarrow (m'n')$ и $(mn) \rightarrow (n'm')$. Однако на опыте можно определить лишь сумму этих двух интенсивностей. Поэтому Дирак предпочел альтернативное решение, считая (m, n) и (n, m) за одно состояние.

В квантовой механике состояние атомной системы определяется функцией ψ , зависящей от координат q . Если $\psi_n(x, y, z)$ — собственная функция единственного электрона на орбите n , то собственная функция атома в состоянии (m, n) равна

$$\psi_m(x_1, y_1, z_1) \psi_n(x_2, y_2, z_2) = \psi_m(1) \psi_n(2)$$

(если пренебречь взаимодействием). Собственная функция $\psi_m(2) \psi_n(1)$ отвечает тому же состоянию, если мы считаем, что (m, n) и (n, m) совпадают. Если мы хотим получить в матрицах лишь по одной строчке и колонке, соответствующей и (mn) и (nm) , то мы должны найти набор собственных функций вида

$$\psi_{mn} = a_{mn} \psi_m(1) \psi_n(2) + b_{mn} \psi_m(2) \psi_n(1),$$

причем лишь одна функция этого набора должна отвечать и (mn) и (nm) . Есть два способа выбрать набор ψ_{mn} так, чтобы удовлетворить этому условию. Мы можем либо положить $a_{mn} = b_{mn}$, что делает ψ_{mn} симметричной функцией двух электронов, либо положить $a_{mn} = -b_{mn}$, что дает антисимметричную функцию ψ_{mn} .

Симметричными собственными функциями невзаимодействующих электронов r являются комбинации

$$\sum \psi_1(k_1) \psi_2(k_2) \dots \psi_r(k_r),$$

где суммирование проводится по всем перестановкам (k_1, \dots, k_r) целых чисел $1, 2, \dots, r$. Антисимметричными функциями являются суммы таких же слагаемых, но с переменными знаками. Если учесть взаимодействие электронов, то собственные функции по-прежнему будут симметричными или антисимметричными. Дирак приходит к заключению: «В любом случае полное решение задачи дается или только симметричными функциями или только антисимметричными».

Затем Дирак замечает, что в решении, осуществляемом антисимметричными функциями, не может быть стационарных состояний с двумя или более электронами на одной орбите, т. е. формулирует принцип запрета Паули. Симметричное решение допускает существование любого числа электронов на одной орбите и «таким образом, это решение не может быть правильным для электронов в атоме».

В разделе 4 Дирак применяет тот же метод для ансамбля невзаимодействующих молекул в объеме, ограниченном стенками. Собственные функции всей системы получаются перемножением плоских волн собственных функций молекул и образованием симметричных и антисимметричных комбинаций. Все состояния системы (каждое из которых представляется одной собственной функцией) предполагаются априори равновероятными. Для симметричных собственных функций это предположение ведет к статистике Бозе — Эйнштейна. В антисимметричном случае основные предположения Дирака по существу совпадают с предположениями Ферми, и расчеты средней кинетической энергии и давления стандартными методами статистики приводят к уже полученным Ферми формулам.

Вывод Дирака таков: «Решение с симметричными собственными функциями должно быть справедливо для световых квантов, поскольку статистическая механика Бозе — Эйнштейна, как известно, приводит к закону Планка для излучения черного тела. Антисимметричное решение, по-видимому, справедливо для молекул газов, поскольку оно справедливо для электронов в атоме и можно думать, что молекулы больше похожи на электроны, чем на кванты света».

§ 7. ТЕОРИЯ АТОМА ГЕЛИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА

W. Heisenberg, *Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik* (В. Гейзенберг, Задача многих тел и резонанс в квантовой механике), *Zs. f. Phys.*, 38, 411 (поступило в редакцию в июне 1926 г.).

W. Heisenberg, *Über die Spektren von Atomsystemen mit zwei Elektronen* (В. Гейзенберг, О спектрах атомных систем с двумя электронами), *Zs. f. Phys.*, 39, 499 (поступило в редакцию в июле 1926 г.).

Основные идеи этих двух работ совпадают с идеями, положенными Дираком в основу его формулировки задачи многих

тел. Гейзенберг также образует для двух одинаковых частиц симметричные и антисимметричные собственные функции

$$\psi_m(1)\psi_n(2) + \psi_m(2)\psi_n(1), \quad (1)$$

$$\psi_m(1)\psi_n(2) - \psi_m(2)\psi_n(1), \quad (2)$$

а для n одинаковых частиц антисимметричные собственные функции

$$\sum \pm \psi_1(k_1)\psi_2^*(k_2) \dots \psi_r(k_r). \quad (3)$$

Он замечает также, что использование антисимметричных собственных функций приводит к принципу запрета Паули.

Атом гелия, если отвлечься от спина, можно описывать обеими собственными функциями (1) и (2); они отвечают парагелию и ортогелию. В симметричном случае (1) оба электрона могут оказаться в одном и том же состоянии; следовательно, в парагелии осуществляется низший терм $1S$, чего не может быть в ортогелии. Если бы не было взаимодействия между электронами, энергии термов (1) и (2) были бы одинаковы, но взаимодействие раздвигает термы (обычно поднимает симметричный и опускает антисимметричный). Во второй работе Гейзенберга выполнены некоторые численные расчеты.

Затем принят во внимание спин. Спиновые векторы электронов 1 и 2 есть s_1 и s_2 , их проекции на любое направление могут быть равны только $\pm 1/2$. Таким образом, из каждого состояния системы без спина возникают четыре состояния, три из которых симметричны по спиновым координатам и одно антисимметрично. Согласно принципу запрета, комбинация собственных функций пространственных и спиновых координат должна быть антисимметрична. Существует, таким образом, две возможности — либо мы умножаем симметричные собственные функции парагелия на антисимметричную собственную функцию спиновых координат и получаем синглетную систему термов парагелия, либо мы умножаем антисимметричные собственные функции ортогелия на три симметричные собственные функции спиновых координат и получаем триплетную систему термов ортогелия. Расчеты выполнены методом, принадлежащим Кронигу [13] и Дираку [14], результаты согласуются с данными, полученными из спектров He и Li⁺.

Гейзенберг употребляет выражение «спиновые координаты», но не говорит четко, что он имеет при этом в виду. Он рассматривает сначала упрощенную модель двух электронов без орби-

тального движения в постоянном магнитном поле. В этом простом случае спиновые координаты представляют собой просто составляющую момента количества движения по полю. К случаю атома Гейзенберг переходит при помощи аналогии, заменяя вектор внешнего поля вектором орбитального момента.

Первое точное определение понятия «спиновых координат» дал Паули. Мы рассмотрим теперь теорию спина Паули.

§ 8. ВЕКТОР СПИНА \vec{s} И СПИНОВЫЕ МАТРИЦЫ s_1, s_2, s_3

W. Heisenberg, P. Jordan, *Anwendung der Quantenmechanik auf das Problem der anomalen Zeemaneffekte* (В. Гейзенберг, П. Иордан, Приложение квантовой механики к задаче об аномальном эффекте Зеемана), Zs. f. Phys., 37, 263 (поступило в редакцию в марте 1926 г.).

W. Pauli, *Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektronen* (В. Паули, О квантовомеханическом описании магнитного электрона), Zs. f. Phys., 43, 601 (поступило в редакцию в мае 1927 г.).

Гейзенберг и Иордан первыми рассчитали дублетное расщепление и аномальный эффект Зеемана в атомах с одним валентным электроном методами матричной механики. В дополнение к вектору орбитального момента \vec{k} с компонентами

$$k_x = (yp_z - zp_y) \quad \text{и т. д.}$$

авторы ввели спиновый вектор \vec{s} с компонентами s_x, s_y, s_z . Следуя Паули, мы будем употреблять полужирный шрифт для матриц и операторов. По аналогии с соотношениями коммутации для k_x, k_y, k_z :

$$k_x k_y - k_y k_x = i \left(\frac{h}{2\pi} \right) k_z \quad \text{и т. д.};$$

вводятся такие же соотношения для s_x, s_y, s_z :

$$s_x s_y - s_y s_x = i \left(\frac{h}{2\pi} \right) s_z \quad \text{и т. д.}, \quad (1)$$

а также соотношения

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 s(s+1), \quad (2)$$

где $s=1/2$ для одного электрона. Предполагается, что взаимодействие между \vec{k} и \vec{s} описываются слагаемым в энергии, про-

порциональным $\vec{k} \cdot \vec{s}$. Энергия взаимодействия с внешним полем H записывается в виде

$$\left(\frac{e}{2m_0c}\right) \vec{H} \cdot (\vec{k} + 2\vec{s}).$$

Исходя из этих предположений, Гейзенберг и Иордан методом теории возмущений рассчитывают термы. Результаты оказываются в идеальном согласии с данными эксперимента.

Паули заменяет матрицы $s_x \dots$ операторами, действующими на шредингеровы волновые функции ψ и удовлетворяющими тем же соотношениям (1) и (2). Если s_x, s_y, s_z выражать в единицах $1/2(h/2\pi)$, то эти соотношения запишутся в виде

$$s_x s_y - s_y s_x = 2i s_z \dots, \quad (3)$$

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 3. \quad (4)$$

Основной трудностью для Паули было определение координат, функцией которых являлась ψ . В дополнение к пространственным координатам q Паули берет s_z -координату, принимающую значения ± 1 независимо от направления оси z . Это означает, что функция $\psi(q, s_z)$ имеет две компоненты: $\psi_\alpha(q)$ и $\psi_\beta(q)$, соответствующие $s_z = +1$ и $s_z = -1$. Вероятность того, что координаты q лежат в интервале от x до $x+dx$, от y до $y+dy$ и от z до $z+dz$ и при этом s_z принимает значения $+1$ или -1 , равна

$$|\psi_\alpha(x, y, z)|^2 dx dy dz \quad \text{или} \quad |\psi_\beta(x, y, z)|^2 dx dy dz.$$

Простейшее решение уравнений (3) и (4) таково:

$$s_x(\psi_\alpha, \psi_\beta) = (\psi_\beta, \psi_\alpha),$$

$$s_y(\psi_\alpha, \psi_\beta) = (-i\psi_\beta, i\psi_\alpha),$$

$$s_z(\psi_\alpha, \psi_\beta) = (\psi_\alpha, -\psi_\beta).$$

Матрицами этих преобразований являются знаменитые матрицы Паули

$$s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для перехода к новой системе координат (x', y', z') Паули предлагает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha &= t_{11}\psi_\alpha + t_{12}\psi_\beta, \\ \psi'_\beta &= t_{21}\psi_\alpha + t_{22}\psi_\beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где T (составленная из t_{ij}) матрица, являющаяся унитарной матрицей, т. е. произведение T на транспонированную и комплексно-сопряженную матрицу T^\dagger равно единичной матрице 1, и

$$s_{x'} = Ts_x T^{-1}, \quad s_{y'} = Ts_y T^{-1}, \quad s_{z'} = Ts_z T^{-1}. \quad (7)$$

С другой стороны, s_x, s_y, s_z являются компонентами вектора \vec{s} и, следовательно, должны преобразовываться, подобно координатам x, y, z , при помощи ортогональной подстановки

$$s_x = a_{11}s_{x'} + a_{12}s_{y'} + a_{13}s_{z'} \dots \quad (8)$$

Паули показывает, что можно совместить (7) и (8), если в качестве T взять матрицу, составленную из величин $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*$, комплексно-сопряженных к параметрам Кэли — Клейна ортогонального преобразования (8), определенным в книге Зоммерфельда и Клейна [15]. Паули замечает также, что все решения уравнений (3) и (4) можно получить из частного решения (5) при помощи преобразований (7). Следовательно, можно без потери общности пользоваться частным решением (5).

Для энергии взаимодействия между \vec{s} и \vec{k} и для энергии электрона в магнитном поле Паули берет те же выражения, что и Гейзенберг и Иордан. Результаты, естественно, оказываются совпадающими. Переход к общему случаю N электронов выполняется непосредственно. Волновая функция $\psi(q_1, \dots, q_N, s_{z1}, \dots, s_{zN})$ эквивалентна набору 2^N функций пространственных координат

$$\psi_{i_1 i_2 \dots i_N}(q_1, \dots, q_N), \quad i_k = \alpha_k \text{ или } \beta_k.$$

Несмотря на полученные им в высшей степени хорошие результаты, Паули считал свою теорию лишь временной и приближенной, поскольку, как он заявлял, волновое уравнение не инвариантно относительно преобразований Лоренца и не дает возможности вычислить поправки высших порядков к тонкой структуре водородных термов. Он чувствовал, что для разрешения этих трудностей понадобится более совершенная модель магнитного электрона, включающая квадрупольный и более высокие члены.

По-видимому, Паули недооценивал важность и законченность своих методов и результатов. Предложенное им описание состояния N электронов при помощи ψ -функции с не-

сколькими компонентами, преобразующимися по линейному двузначному представлению группы вращения, являлось фундаментальным и окончательным. Оно позволило Вигнеру и Нейману обосновать все эмпирические правила систематики атомных термов, не прибегая к новым предположениям или каким-либо приближениям (см. § 10). Дирак использовал матрицы Паули s_i при составлении релятивистского волнового уравнения первого порядка (см. § 11). Волновое уравнение Дирака содержит матрицы и похоже на уравнение Паули, а не на старое релятивистское волновое уравнение. Переход от однокомпонентной волновой функции к двухкомпонентной ψ более радикален, чем переход от двух компонент к четырем; переход от векторной алгебры к двузначным представлениям группы вращения совершить много труднее, чем расширить группу вращений до группы Лоренца. Во всяком случае, именно Паули сделал первый решительный шаг, и в этом отношении в его работе нет ничего временного или приближенного.

§ 9. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ВЫВОД СООТНОШЕНИЙ КОММУТАЦИИ

J. von Neumann, *Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen* (И. Нейман, Об аналитических свойствах групп линейных преобразований и их представлений), Math. Zs., 30, 3 (поступило в редакцию в феврале 1927 г.).

J. von Neumann, E. Wigner, *Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons* (И. Нейман, Е. Вигнер, К объяснению некоторых свойств спектров на основании квантовой механики вращающегося электрона), Zs.f. Phys., 47, 203 (поступило в редакцию в декабре 1927 г.).

B. L. van der Waerden, *Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen* (Б. Ван дер Варден, Теоремы непрерывности для полупростых групп Ли), Math. Zs., 36, 780 (поступило в редакцию в мае 1932 г.).

Теория Паули основана на соотношениях коммутации

$$s_x s_y - s_y s_x = 2is_z \text{ и т. д. ,} \quad (1)$$

введенных по аналогии с соответствующими соотношениями для операторов орбитального момента количества движения k_x , k_y , k_z .

При помощи теории представлений групп Ди можно показать, что нет необходимости предполагать заранее соотношения (1). Их можно вывести из более фундаментального положения об инвариантности теории относительно пространственных вращений.

Основная идея этого вывода принадлежит Нейману и Вигнеру. Ниже я буду предполагать несколько меньше и докажу несколько больше, чем упомянутые авторы. Они молчаливо предполагали непрерывность представлений группы вращений, что не является необходимым. С другой стороны, они не вводили понятия момента количества движения, тогда как я собираюсь показать, что электрон обладает моментом количества движения, удовлетворяющим соотношениям (1).

Мы рассмотрим один электрон в некоторой ортогональной системе координат и, подобно Паули, предположим, что его состояние описывается парой функций (ψ_1, ψ_2) в пространстве координат x, y, z . Приводимое ниже доказательство годится также для произвольного числа частиц N и произвольного числа n функций ψ_1, \dots, ψ_n .

Если состояние электрона подвергнуть определенному пространственному вращению R (или, что сводится к тому же, не затрагивать состояние, а подвергнуть вращению R^{-1} систему координат), то новое состояние электрона будет описываться другой парой функций (ψ'_1, ψ'_2) .

Вероятность обнаружить электрон в малом объеме dV вблизи точки P равна $\int \{\psi_1^* \psi_1(P) + \psi_2^* \psi_2(P)\} dV$. Если при вращении R точка P переходит в P' , а dV — в dV' , то вероятность обнаружить электрон после преобразования в dV' равна вероятности пребывания электрона до преобразования в dV . Поскольку объем dV равен dV' , можно написать

$$\psi_1^* \psi'_1(P') + \psi_2^* \psi'_2(P') = \psi_1^* \psi_1(P) + \psi_2^* \psi_2(P). \quad (2)$$

Разумно предположить, следуя Паули, что $\psi'_1(P')$ и $\psi'_2(P')$ являются линейными функциями $\psi_1(P)$ и $\psi_2(P)$ с коэффициентами, зависящими только от вращений R :

$$\begin{aligned} \psi'_1(P') &= t_{11} \psi_1(P) + t_{12} \psi_2(P), \\ \psi'_2(P') &= t_{21} \psi_1(P) + t_{22} \psi_2(P). \end{aligned} \quad (3)$$

Используя матрицы ψ' и ψ , состоящие из одного столбца и двух строчек, можно записать уравнения (3) в матричной

форме

$$\psi'(P') = T\psi(P), \quad (4)$$

где $T = T(R)$ зависит только от вращения R . В силу соотношения (2), матрица T должна быть унитарной.

Если $q = e^{i\alpha}$ — комплексное число, по модулю равное единице, то функции ψ' и $q\psi'$ определяют одно и то же состояние, откуда следует, что матрицу T можно умножить на произвольную постоянную $q = e^{i\alpha}$. Набор всех матриц qT при q , пробегающем единичный круг в комплексной плоскости, можно назвать *проективным унитарным преобразованием* T_{pr} . Если произвести последовательно два пространственных вращения R и S , то получится новое вращение RS . Очевидно,

$$T(RS) = \sigma T(R) T(S) \quad (\sigma = e^{i\beta}). \quad (5)$$

Следовательно, проективные унитарные преобразования T_{pr} образуют *проективное унитарное представление группы G пространственных вращений*.

В указанной выше работе я доказал, что каждое представление простой группы Ли унитарными матрицами является непрерывным. Доказательство годится и для случая проективных унитарных представлений. Поскольку группа вращений простая, T_{pr} представляет собой непрерывную функцию R .

Помножив, если нужно, матрицы T на надлежащие факторы $q = e^{i\alpha}$, можно всегда предположить, что их определители равны единице. После этого остается произвол лишь в замене T на $-T$. Соотношение (5), таким образом, принимает вид

$$T(RS) = \pm T(R) T(S), \quad (6)$$

т. е. матрицы T образуют *двузначное представление группы G* .

Для $R=1$ естественно предположить $T(R)=1$. Тогда из непрерывности T_{pr} следует: если R меняется в окрестности 1 в группе G , то матрицы $T(R)$ могут умножаться на такие числа $q = \pm 1$, что в произведении qT все матричные элементы отличаются от элементов единичной матрицы меньше, чем на ε . Это условие однозначно определяет фактор q . Таким образом, матрица qT , которую снова можно обозначить через T , является однозначно определенной непрерывной функцией R в окрестности 1 в группе G . При $R=S=1$ множитель ± 1 в (6) равен $+1$, и, следовательно, из соображений непрерывности он равен $+1$ всюду в некоторой окрестности $1U$. Иными сло-

вами, мы получили непрерывное унитарное матричное представление U .

Нейман доказал, что такое непрерывное локальное представление группы Ли всегда аналитично и определяется матрицами, представляющими бесконечно малые преобразования группы. Более простое доказательство содержится в примечании 2 в только что упоминавшейся моей работе. Таким образом, искомое двузначное представление $T(R)$ полностью определяется матрицами I_x, I_y, I_z , представляющими инфинитезимальные вращения группы G .

Инфинитезимальное вращение вокруг оси x дается выражением

$$\delta(x, y, z) = (0, -z, y).$$

Аналогичные выражения имеют место для вращений вокруг осей y и z . Матрицы этих инфинитезимальных вращений удовлетворяют соотношениям коммутации

$$I_x I_y - I_y I_x = I_z \quad \text{и т. д.} \quad (7)$$

Отсюда, согласно теории Ли, следует, что матрицы, представляющие инфинитезимальные преобразования в представлении $T(R)$, должны удовлетворять тем же соотношениям.

Все инфинитезимальные представления группы трехмерных вращений, или (что то же) все решения уравнений (7) были найдены Картаном и Вейлем. Сформулируем основные теоремы.

I. Неприводимое представление полностью определяется (с точностью до преобразования SIS^{-1}) целым или полуцелым числом j . Размерность представления равна $2j+1$. Матрица iI_z — диагональная матрица с элементами на диагонали, равными $j, j-1, \dots, -j$. При $j=0$ матрицы I_x, I_y, I_z обращаются в нуль. При $j=1/2$ они равны

$$I_x = (2i)^{-1} s_x, \quad I_y = (2i)^{-1} s_y, \quad I_z = (2i)^{-1} s_z, \quad (8)$$

где s_x, s_y, s_z — матрицы Паули, определенные соотношениями (5) в § 8.

II. Приводимое представление полностью приводимо, т. е. его можно разложить на неприводимые представления.

Простое доказательство утверждений I методом, принадлежащим Борну, Гейзенбергу и Иордану [16], содержится

в моей книге [17]. Прямое алгебраическое доказательство дано Казимиром и мною [18]. Утверждение II для унитарных представлений тривиально, поскольку каждому инвариантному подпространству соответствует полностью ортогональное подпространство.

В данном случае нас интересует двумерное представление. Следовательно, мы должны взять либо тривиальное представление $T(R)=1$, либо неприводимое представление (8).

Для описания одного электрона по фундаментальному предположению Паули необходима ψ -функция с двумя компонентами ψ_1 и ψ_2 . Вращение, переводящее ось z в противоположное направление, должно преобразовывать собственную функцию $(\psi_1, 0)$, отвечающую состоянию с $s_z=+1$, в собственную функцию $(0, \psi_2)$, описывающую состояние с $s_z=-1$. Поэтому двумерное неприводимое представление является единственно возможным.

Теперь применим вращение R к паре функций (ψ_1, ψ_2) . Согласно (3), сначала нужно преобразовать аргумент P ; при этом каждая функция ψ_i перейдет в новую функцию φ_i :

$$\varphi_i(P') = \psi_i(P).$$

Затем функции (φ_1, φ_2) в точке P' нужно заменить их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами t_{ik} :

$$\psi'_i(P') = \sum t_{ik} \varphi_i(P').$$

Если мы хотим произвести инфинитезимальное вращение, например, вокруг оси x , мы должны сначала вычислить приращение пары функций (ψ_1, ψ_2) при инфинитезимальном вращении только точек P , затем применить линейное преобразование I_x к паре (ψ_1, ψ_2) , не сдвигая точки P и, наконец, сложить два найденных приращения. Первый шаг дает приращение

$$\delta\psi = -(y\partial_z - z\partial_y)\psi$$

и, следовательно, полное приращение будет равно

$$K_x\psi = -(y\partial_z - z\partial_y)\psi + I_x\psi,$$

где ∂_z — дифференцирование по z , а I_x определено равенством (8).

Итак, каково же соотношение между инфинитезимальными преобразованиями и моментом количества движения? В квантовой механике без спина момент количества движения относительно оси x равен

$$K_x = yp_z - zp_y = -i\hbar (y\partial_z - z\partial_y).$$

Следовательно, если мы умножим полный оператор инфинитезимального поворота

$$K_x = -(y\partial_z - z\partial_y) + I_x$$

на $i\hbar$, первый член даст нам правильное выражение для орбитального момента K_x . Поэтому разумно ожидать, что второй член, умноженный на $i\hbar$, дает спиновый момент количества движения.

Доказательство справедливости этого предположения можно получить из закона сохранения момента количества движения. Допустим, что электрон движется в поле, симметричном относительно поворотов вокруг оси x . В этом случае оператор энергии H коммутирует с оператором поворота R относительно оси x

$$RH = HR.$$

Дифференцируя R по углу поворота φ и полагая $\varphi=0$, найдем оператор инфинитезимального поворота K_x . Мы получаем, таким образом,

$$K_x H = H K_x.$$

Это означает, что оператор K_x подчиняется закону сохранения; его производная по времени равна нулю. В нашем случае K_x состоит из двух слагаемых:

$$K_x = -(y\partial_z - z\partial_y) \pm I_x.$$

Первый член, умноженный на $i\hbar$, представляет собой оператор орбитального момента. Отсюда следует, что именно оператор $i\hbar I_x$ нужно добавить к оператору орбитального момента, чтобы получить оператор полного момента, для которого выполняется закон сохранения в любом сферически-симметричном поле. Это доказывает наше утверждение.

Последний этап доказательства принадлежит Дираку (см. § 11).

§ 10. СИММЕТРИЯ В АТОМЕ

E. Wigner, *Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen* (Е. Вигнер, Некоторые следствия для структуры термов из теории Шредингера), *Zs. f. Phys.*, 43, 624 (поступило в редакцию в мае 1927 г.).

J. von Neumann, E. Wigner, *Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons II, III* (И. фон Нейман, Е. Вигнер, К объяснению некоторых свойств спектров на основании квантовой механики вращающегося электрона II, III), *Zs. f. Phys.*, 49, 73 (поступило в редакцию в марте 1928 г.); 51, 844 (поступило в редакцию в июне 1928 г.).

J. C. Slater, *The Theory of Complex Spectra* (Дж. Слетер, Теория сложных спектров), *Phys. Rev.*, 34, 1293 (поступило в редакцию в июне 1929 г.).

Волновое уравнение Шредингера, теория спина Паули и принцип запрета Паули образуют фундамент, на котором покоится вся теория атомных (а также молекулярных) спектров. Все эмпирические правила систематики термов могут быть, как это показано в замечательной книге Гунда [49], получены без привлечения новых физических идей.

Это обстоятельство упрощает задачу историка. Когда рождаются новые физические идеи, необходимо, насколько возможно, проследить их истоки, но там, где на пути встречаются лишь математические трудности, достаточно кратко рассказать о том, как они преодолевались.

Впервые теорию групп в квантовой механике использовал, по-видимому, Вигнер в работе 1927 г. Он получил некоторые правила систематики термов, однако спин он не включал в рассмотрение. В работах Неймана и Вигнера был приведен в действие весь аппарат характеров и представлений групп, что позволило построить полную классификацию всей системы термов, включая правила отбора, формулы для интенсивности, эффекты Штарка и Зеемана.

Физиков вовсе не обрадовала необходимость изучать столь сложную математическую теорию. «Групповая чума» достигла апогея. Книга Вейля [20] не принесла большой пользы, так как для большинства из нас была слишком трудна. Книга Вигнера была много проще, но окончательное разрешение трудностей принесла работа Слетера. Он показал, что все результаты можно получить, пользуясь лишь простейшими математическими приемами.

Гамильтониан электронов в атоме инвариантен относительно группы перестановок, а также относительно группы пространственных вращений и отражений. Следовательно, эти две группы представлены линейными преобразованиями собственных функций, отвечающих заданному значению энергии. Задача заключается в отыскании представлений групп и установлении связи между их характеристическими числами и квантовыми числами L, S, J и т. д. соответствующих термов.

Вигнер и Нейман исходили из предположения, что взаимодействие между спином и орбитальным движением отсутствует. В этом приближении собственные функции являются произведениями функций $\psi_0(q_1, \dots, q_N)$ от пространственных координат на функции $\varphi(s_{z1}, \dots, s_{zN})$ от спиновых координат s_{z1}, \dots, s_{zN} . Энергия определяется только функциями ψ_0 . Вращениями и перестановками можно действовать отдельно на пространственные координаты и отдельно на спиновые. В обоих случаях собственные функции, принадлежащие одному и тому же значению энергии, преобразуются между собой. Мы получаем, таким образом, для каждой из наших двух групп ψ_0 -представление и спиновое представление. Нейман и Вигнер исследуют каждое из этих представлений и задают вопрос: какова должна быть связь между их характерами, чтобы могла существовать антисимметричная функция всех координат?

Слетер достигает упрощения, вводя с самого начала спин и принцип запрета. Он рассматривает только антисимметричные волновые функции. Сначала вводятся волновые функции $u(n_i|x_i)$ одного электрона, движущегося в центральном симметричном поле, где n_i — совокупность четырех квантовых чисел (n, l, m_l, m_s) , а x_i — совокупность четырех координат (трех пространственных и одной спиновой) i -го электрона. Из произведений этих функций образуются антисимметричные линейные комбинации

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \sum \pm u(n_1|x_1) \dots u(n_N|x_N). \quad (1)$$

В этом приближении энергия зависит только от чисел n и l отдельных электронов и не зависит от m_l и m_s . Таким образом, каждому значению энергии в невозмущенной задаче соответствует столько собственных функций, сколько существует наборов из N пар (m_l, m_s) . Если две такие пары принадлежат одним и тем же n и l , то эти пары должны быть различны, и порядок, в котором они берутся, при подсчете не учитывается. Например, в случае двух эквивалентных p -электронов m_l

может принимать три значения, а m_s — два:

$$m_l = 1 \text{ или } 0 \text{ или } -1; \quad m_s = +\frac{1}{2} \text{ или } -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, можно образовать шесть пар (m_l, m_s) и $(6 \cdot 5)/2 = 15$ ψ -функций (1). Полагая

$$M_L = \sum m_l, \quad M_S = \sum m_s,$$

получаем следующие пары (M_L, M_S) :

$$\begin{array}{llll} (1, 1), & (0, 1), & (-1, 1), \\ (2, 0), & (1, 0)^2, & (0, 0)^3, & (-1, 0)^2, & (-2, 0), \\ (1, -1), & (0, -1), & (-1, -1), \end{array}$$

Показатели степени 2 и 3 указывают число способов, которыми можно образовать соответствующие суммы M_L и M_S .

Взаимодействие между электронами (без учета спина) вводится как возмущение. Возмущение коммутирует с M_L и M_S и, следовательно, его матрица состоит из меньших матриц 1, 2 и 3-го рангов, расположенных на главной диагонали. Каждая меньшая матрица дает уравнение 1, 2 или 3 степени для значений энергии, след этой матрицы равен сумме 1, 2 или 3 значений энергии.

Более того, известно, что при заданном L , M_L принимает $2L+1$ значение (от $+L$ до $-L$), а при заданном S , M_S принимает $2S+1$ значение (от $+S$ до $-S$), причем все эти значения отвечают одной и той же энергии (если не учитывать спин-овых эффектов). Таким образом, пять пар

$$(2, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 0), \quad (-1, 0), \quad (-2, 0)$$

на средней линии нашей таблички принадлежат $L=2$ и $S=0$, т. е. терму 1D . Аналогично, девять пар

$$\begin{array}{lll} (1, 1), & (0, 1), & (-1, 1), \\ (1, 0), & (0, 0), & (-1, 0), \\ (1, -1), & (0, -1), & (-1, -1) \end{array}$$

принадлежат $L=1$ и $S=1$, т. е. мультиплету 3P . Оставшаяся пара $(0, 0)$ может принадлежать только терму 1S . Таким образом, мы получили мультиплеты

$${}^1D, \quad {}^3P, \quad {}^1S.$$

Если принять во внимание спин-овые эффекты, то два синглетных термина 1D и 1S не изменяются, а терм 3P расщепится на

три терма. Это можно показать следующим образом. Если исходить из наших девяти состояний (M_L, M_S) , принадлежащих мультиплету 3P , и положить

$$M = M_L + M_S,$$

то мы найдем для M следующие значения:

$$(2), \quad (1)^2, \quad (0)^3, \quad (-1)^2, \quad (-2).$$

Каждый терм мультиплета соответствует некоторому значению квантового числа J , и M в каждом случае принимает $2J+1$ значение от $+J$ до $-J$. Чтобы каждое значение M получалось с указанной кратностью, следует принять для J значения 2, 1 и 0. Соответственно M принимает следующие значения:

$$\begin{array}{lllll} J=2 & 2, & 1, & 0, & -1, & -2. \\ J=1 & & 1, & 0, & -1, & \\ J=0 & & & 0, & & \end{array}$$

Таким образом, мультиплет 3P состоит из трех термов 3P_2 , 3P_1 и 3P_0 . Этот метод можно использовать во всех случаях, и всегда он позволяет получить правильный набор термов.

§ 11. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ДИРАКА

P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of the Electron* (П. Дирак, Квантовая теория электрона), Proc. Roy. Soc., A117, 610 (поступило в редакцию в январе 1928 г.); A118, 351 (поступило в редакцию в феврале 1928 г.).

Статистическая интерпретация квантовой механики позволяет нам ответить на вопрос: какова вероятность того, что некоторая динамическая переменная принимает в данный момент времени какое-либо значение в определенном интервале, если состояние системы описывается волновой функцией ψ ?

Дирак указывает, что статистическая интерпретация оказывается возможной, поскольку волновое уравнение имеет вид

$$(H - W)\psi = 0, \quad W = \frac{i\hbar\partial}{\partial t}, \quad (1)$$

т. е. линейно по W или по $\partial/\partial t$, и, следовательно, значение волновой функции в некоторый момент времени определяет волновую функцию в последующие времена. Однако релятивистское уравнение Гордона имеет второй порядок по $\partial/\partial t$. Наша задача, говорит Дирак, состоит в том, чтобы получить волно-

вое уравнение вида (1), инвариантное относительно преобразований Лоренца и эквивалентное уравнению Гордона в пределе больших квантовых чисел.

В отсутствие поля уравнение Гордона записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &(-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2 c^2) \psi = 0, \\ &\left(p_k = -\frac{i\hbar \partial}{\partial x_k}, \quad x_0 = ct \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая $p_0 = -i p_4$, Дирак заменяет (2) волновым уравнением первого порядка

$$\left(i \sum_1^4 \gamma_\mu p_\mu + mc \right) \psi = 0 \quad (3)$$

и показывает, что (2) можно получить из (3), если матрицы γ_μ постоянны и удовлетворяют условиям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Исходя из двухрядных матриц Паули s_x, s_y, s_z , Дирак сумел построить набор из четырехрядных матриц γ_μ , удовлетворяющих условиям (4). Затем он доказал инвариантность волнового уравнения (3), показав, что каждое решение уравнений (4) в четырехрядных матрицах можно получить из некоторого заданного решения при помощи преобразования

$$\gamma'_\mu = \tau \gamma_\mu \tau^{-1}. \quad (5)$$

Для построения гамильтониана электрона в электромагнитном поле со скалярным потенциалом A_0 и векторным потенциалом \mathbf{A} Дирак прибегает к обычной подстановке $p_0 + \left(\frac{e}{c}\right) A_0$ вместо p_0 и $\mathbf{p} + \left(\frac{e}{c}\right) \mathbf{A}$ вместо \mathbf{p} в гамильтониан без поля. Из найденного волнового уравнения получается уравнение второго порядка, которое отличается от уравнения Гордона наличием двух членов

$$\left(\frac{e\hbar}{c}\right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \left(\frac{ie\hbar}{c}\right) \mathbf{p}_1 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}), \quad (6)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} — векторы электрического и магнитного поля. Компоненты вектора \mathbf{s} представляют собой двухрядные матрицы Паули s_x, s_y, s_z , повторенные на главной диагонали так, чтобы образовать четырехрядные матрицы. Следовательно, электрон должен вести себя так, как если бы он обладал магнитным моментом, равным $(eh/2mc)\mathbf{s}$, т. е. той величине, которая вво-

дилась в модели вращающегося электрона. В теории Дирака магнитный момент не приписывается электрону, а выводится из теории, как и должно быть.

Дирак показывает затем, что в центральном поле сил векторная сумма орбитального момента количества движения и спина

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} + \frac{1}{2} \hbar \mathbf{s} \quad (7)$$

является интегралом движения. Для уровней энергии в кулоновом поле теория Дирака дает в первом приближении те же результаты, которые были получены Паули и Дарвином.

Во второй статье Дирак выводит правила отбора, относительные интенсивности линий мультиплетов и рассчитывает эффект Зеемана; все результаты оказываются в согласии с экспериментом и с результатами существовавших ранее теорий, основанных на гипотезе о вращающемся электро-не.

§ 12. ВРАЩАЮЩИЙСЯ ЭЛЕКТРОН В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Н. T e t r o d e, *Allgemein-relativistische Quantentheorie des Elektrons* (Г. Т е т р о д е, Квантовая теория электрона в общей теории относительности), *Zs. f. Phys.*, 50, 336 (поступило в редакцию в июне 1928 г.).

Н. W e y l, *Elektron und Gravitation* (Г. В е й л ь, Электрон и гравитация), *Zs. f. Phys.*, 56, 330 (поступило в редакцию в мае 1929 г.).

В. Ф о к, *Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons* (Геометризация теории электрона Дирака), *Zs. f. Phys.*, 57, 261 (поступило в редакцию в июле 1929 г.).

Е. S c h r ö d i n g e r, *Diracsches Elektron im Schwerfeld I* (Е. Ш р е д и н г е р, Электрон Дирака в поле тяжести), *Sitzber. preuss. Akad. Wiss.*, 105 (1932) (доложено в феврале 1932 г.).

В. B a r g m a n n, *Bemerkungen zur allgemein-relativistischen Fassung der Quantentheorie* (В. Б а р г м а н н, Замечания об общерелятивистской трактовке квантовой теории), *Sitzber. preuss. Akad. Wiss.*, 346 (1932) (доложено в июле 1932 г.).

Л. I n f e l d, B. L. v a n d e r W a e r d e n, *Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie* (Л. И н ф е л ь д, Б. В а н д е р В а р д е н, Волновое уравнение электрона в общей теории относительности), *Sitzber. preuss. Akad. Wiss.*, 380 и 474 (1933) (доложено в январе 1933 г.).

Волновое уравнение для вращающегося электрона можно ввести в общую теорию относительности тремя методами, раз-

личными с точки зрения математической, но физически эквивалентными: 1) метод Вейля и Фока использует произвольную ортогональную систему отсчета (Vierbein) в каждой точке четырехмерного пространства; 2) метод Тетраде, Шредингера и Баргманна исходит из четырех матриц γ^μ , определенных в каждой точке и удовлетворяющих обобщенным соотношениям Дирака:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}; \quad (1)$$

3) метод Инфельда и Ван дер Вардена основан на применении спинорного анализа.

Ниже мы будем в основном следовать идеям Вейля и Фока и покажем эквивалентность различных методов.

В основе первого метода лежит использование четырех нормированных ортогональных векторов, компоненты которых h_k^μ являются функциями координат x^μ . Условие ортогональности записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum g_{\mu\nu} h_0^\mu h_0^\nu &= -1, \\ \sum g_{\mu\nu} h_k^\mu h_k^\nu &= +1 \quad (k = 1, 2, 3), \\ \sum g_{\mu\nu} h_k^\mu h_l^\nu &= 0 \quad (k \neq l). \end{aligned}$$

Число компонент ψ_α волновой функции ψ может быть равно двум или четырем. В любом случае компоненты определены в заданной ортогональной системе отсчета. Мы исследуем сначала, как должны преобразоваться компоненты ψ -функции при переходе от одной ортогональной системы к другой.

Начнем с плоского мира Минковского, в котором все системы отсчета параллельны. Координаты x^μ не обязательно ортогональны и могут даже быть криволинейными. Уравнение Дирака можно записать в виде

$$(i \sum_0^3 \gamma^k p_k + mc) \psi = 0; \quad (2)$$

здесь p_k — компонента импульса по вектору h_k , а γ^k — заданные численные четырехрядные матрицы, удовлетворяющие соотно-

шениям коммутации

$$\begin{aligned}\gamma^0 \gamma^0 &= -1, \\ \gamma^i \gamma^k &= +1 \quad (k = 1, 2, 3), \\ \gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k &= 0 \quad (l \neq k).\end{aligned}\tag{3}$$

Заменим набор векторов \mathbf{h}_k другим набором ортогональных векторов \mathbf{h}'_j , связанных с \mathbf{h}_k преобразованием Лоренца:

$$h'_{j\mu} = \sum_j o_j^k h_{k\mu}.\tag{4}$$

Согласно Дираку, волновое уравнение инвариантно относительно преобразования (4), если только ψ преобразуется с помощью линейной подстановки \mathbf{T} , зависящей только от o_j^k ,

$$\psi' = \mathbf{T}\psi.\tag{5}$$

Четырехрядные матрицы \mathbf{T} осуществляют двузначное представление группы Лоренца (без отражений и обращения времени). Следовательно, в любой ортогональной системе \mathbf{h}'_j компоненты ψ'_α определены по отношению к этой системе с точностью до ± 1 .

Как показал Нейман [22], представление (5) приводимо, т. е. координаты в четырехмерном пространстве можно выбрать так, что функции (ψ_1, ψ_2) и функции (ψ_3, ψ_4) будут преобразовываться друг через друга. Если мир не плоский, то на компоненты ψ в любой точке можно по-прежнему действовать подстановками (5) и, следовательно, компоненты ψ'_α в любой ортогональной системе в любой точке определяются исходными функциями ψ_α с точностью до множителя ± 1 . Если заданы только две компоненты ψ_1, ψ_2 или ψ_3, ψ_4 , то подстановками \mathbf{T} можно действовать на эти компоненты.

Предположим теперь, что $\psi_\alpha, h_{\mu\nu}^k$ и $g_{\mu\nu}$ — дифференцируемые функции координат x^μ . Четыре заданных вектора \mathbf{h}_k в заданной точке P можно параллельно перенести по некоторому пути в любом направлении и получить, таким образом, систему отсчета в любой точке P' , лежащей в некоторой окрестности точки P . Пусть ψ'_α — координаты заданной волновой функции в этой системе отсчета в P' . Пользуясь соображениями непрерывности, можно фиксировать множитель ± 1 при ψ' . Тогда функция ψ' представляет собой дифференцируемую

функцию на пути PP' . Сравнивая ψ' и ψ в точке P , можно образовать ковариантный дифференциал $\delta\psi$. Если путь определен так, что вдоль него меняется только одна из координат x^μ , то можно определить ковариантную производную $\nabla_\mu\psi_\alpha$. Если путь направлен по вектору h_k , то можно также определить компоненту $\nabla_k\psi_\alpha$ по этому вектору и ввести ее в уравнение Дирака вместо обычной производной $\partial_k\psi_\alpha$. При этом получается инвариантное уравнение

$$(\hbar \sum \gamma^k \nabla_k + mc) \psi = 0, \quad (6)$$

которое в плоском пространстве переходит в обычное уравнение Дирака.

Если определить матрицы γ^μ соотношениями

$$\gamma^\mu = \sum \gamma^k h_k^\mu, \quad (7)$$

то

$$\sum \gamma^k \nabla_k = \sum \gamma^k h_k^\mu \nabla_\mu = \sum \gamma^\mu \nabla_\mu \quad (8)$$

и

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (9)$$

Тетраде и Шредингер пользовались произвольными матрицами γ^μ , удовлетворяющими условиям (9). Как показал Дирак, наиболее общим решением этих уравнений являются матрицы

$$\Gamma^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}, \quad (10)$$

где частное решение γ^μ определено равенством (7). Однако волновое уравнение Шредингера не зависит от выбора S , и мы можем просто пользоваться частным решением (7). Кроме того, ковариантная производная Шредингера эквивалентна производной, определенной Вейлем и Фоком, и потому волновые уравнения Шредингера и Фока оказываются совпадающими

$$(\hbar \sum \gamma^\mu \nabla_\mu + mc) \psi = 0. \quad (11)$$

В электромагнитном поле, определенном потенциалом Φ_μ , мы должны заменить $\hbar \nabla_\mu$ на

$$\hbar \nabla_\mu - \frac{ie}{c} \Phi_\mu.$$

Полученное таким образом уравнение обладает свойством *градиентной инвариантности*: если ψ заменить на $e^{i\lambda} \psi$, а Φ_μ —

на $\Phi_\mu - \nabla_\mu \lambda$ (где λ — произвольная дифференцируемая функция), то волновое уравнение будет выполняться по-прежнему.

Формализм, использованный Инфельдом и мной, несколько проще формализма Вейля и Фока, и много проще формализма Шредингера и Баргманна, однако физические выводы всюду одинаковы. Основной вывод таков: волновое уравнение Дирака, а на самом деле любое одночастичное волновое уравнение, инвариантное в смысле частной теории относительности, можно ввести также в общую теорию относительности.

§ 13. СПИНОРНЫЙ АНАЛИЗ

E. Weiss, *Ein räumliches Analogon zum Hesseschen Übertragungsprinzip* (Е. Вейсс, Пространственный аналог к принципу переноса Гесса), Диссертация, Бонн, 1924 г.

B. L. van der Waerden, *Spinoranalyse* (Б. Ван дер Варден, Спинорный анализ), Nach. Ges. Wiss., Göttingen, math.-phys., 100 (1929) (доложено в июле 1929 г.).

Такие новые величины, как ψ , с числом компонент, равным двум или четырем, причем закон преобразования отличается от векторного или тензорного, доставляли много беспокойства физикам. Эренфест назвал эти величины *спинорами*. Во время своего визита в Гёттинген летом 1929 г. он спросил меня: «Существует ли подобно тензорному анализу доступный для изучения спинорный анализ, который позволил бы отыскать все возможные виды спиноров и все возможные инвариантные соотношения между спинорами?»

Такой аппарат уже существовал в виде теории инвариантов бинарных форм, которая была распространена Штуди и его школой в Бонне на случай форм, зависящих от нескольких бинарных переменных¹⁾.

Начнем с уравнения светового конуса в четырехмерном пространстве

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (1)$$

Его можно переписать следующим образом:

$$(x + iy)(x - iy) - (ct + z)(ct - z) = 0$$

¹⁾ Лучшим учебником по этому вопросу, по-видимому, является книга Грейса и Юнга [22].

или

$$x^1x^2 - x^3x^4 = 0. \quad (2)$$

В ковариантных координатах $x_i = \sum g_{ik} x^k$ уравнение (2) имеет вид

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 0. \quad (3)$$

Если x_1, x_2, x_3, x_4 интерпретировать как однородные координаты в проективном пространстве трех измерений, то (3) представляет собой уравнение некоторой поверхности второго порядка. (На данном этапе нет необходимости требовать действительности координат; x_k — просто комплексные переменные.) Хорошо известно, что на поверхности (3) лежат два семейства прямых линий и эта поверхность допускает параметрическое представление:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda^2 \mu^1, & x_3 &= \lambda^1 \mu^1, \\ x_2 &= \lambda^1 \mu^2, & x_4 &= \lambda^2 \mu^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Если предположить, что λ^1 и λ^2 — числа, комплексно-сопряженные к μ^1 и μ^2 , то первые две координаты x_1 и x_2 будут комплексно-сопряженными, а две другие — действительными, и, следовательно, x, y, z и t будут действительными величинами.

Рассмотрим теперь линейное преобразование величин λ и независимо линейное преобразование величин μ с определителями, в обоих случаях равными единице. Если подействовать этой парой преобразований на λ и μ в правой части (4), то x_k тоже подвергнутся некоторому линейному преобразованию, которое переведет поверхность (3) в себя. Если мы хотим получить действительное преобразование x, y, z, t , то нужно позаботиться, чтобы действительные точки поверхности перешли в действительные, и, следовательно, преобразование для величин λ должно быть комплексносопряжено к преобразованию для μ . Чтобы указать на это, будем отмечать индексы у λ точкой. Тогда упомянутые преобразования запишутся в виде

$$\begin{aligned} \lambda'^\alpha &= \sum_{\beta} e^\alpha_{\dot{\beta}} \lambda^{\dot{\beta}}, & e^\alpha_{\dot{\beta}} &= (e^\alpha_{\beta})^* \\ \mu'^\alpha &= \sum_{\beta} e^\alpha_{\beta} \mu^{\beta}, & e^1_1 e^2_2 - e^1_2 e^2_1 &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Возникающее при этом действительное преобразование x, y, z, t не только переводит световой конус (1) в себя, но остав-

ляет неизменной квадратичную форму

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

и не меняет местами прошлое и будущее, т. е. оно представляет собой преобразование Лоренца. Чтобы доказать это, пересечем поверхность (4) плоскостью

$$\sum b^k x_k = 0. \quad (6)$$

След пересечения описывается уравнением

$$b^1 \lambda^2 \mu^1 + b^2 \lambda^1 \mu^2 + b^3 \lambda^1 \mu^1 + b^4 \lambda^2 \mu^2 = 0$$

или

$$\sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} b^1 &= X + iY = b_{21}, \\ b^2 &= X - iY = b_{12}, \\ b^3 &= cT + Z = b_{11}, \\ b^4 &= cT - Z = b_{22}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если плоскость (6) действительна, т. е. если координаты X, Y, Z, T вектора b^k в исходной системе координат действительны, то из (8) следует, что величины b_{11} и b_{22} действительны, а величины b_{21} и b_{12} комплексно сопряжены, т. е. билинейная форма (7) эрмитова. Отсюда следует, что действительные векторы b^k и эрмитовы билинейные формы находятся во взаимно однозначном соответствии и это соответствие инвариантно относительно преобразований (5). Детерминант билинейной формы

$$D = b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12} = -X^2 - Y^2 - Z^2 + c^2 T^2 \quad (9)$$

является инвариантом по отношению к преобразованиям (5) и, следовательно, соответствующее преобразование X, Y, Z, T оставляет квадратичную форму инвариантной. Положительные значения эрмитовых форм соответствуют векторам, направленным в будущее внутри светового конуса, и потому наши преобразования не меняют местами прошлое и будущее. Простой подсчет показывает, что их определитель равен еди-

нице и они, следовательно, являются собственными преобразованиями Лоренца.

Произведению преобразований (5) соответствует, конечно, произведение соответствующих преобразований Лоренца. Если обе матрицы (e_{β}^{α}) и $(\dot{e}_{\beta}^{\alpha})$ умножить на -1 , то это не затронет преобразования Лоренца. Матрицы (e_{β}^{α}) [а также комплексно-сопряженные матрицы $(\dot{e}_{\beta}^{\alpha})$] осуществляют двузначное представление группы Лоренца.

В моей работе «Спинорный анализ» я исходил из соотношений (8), не объясняя, откуда они берутся. Моей первоначальной исходной точкой была геометрия прямых линий на поверхности второго порядка.

Начиная отсюда и далее, мы будем обозначать через b_k и b^k ковариантные и контравариантные компоненты любого вектора в исходной системе координат (x, y, z, ct) . Индекс 0 соответствует координате ct , а индексы 1, 2, 3 — координатам x, y, z . По определению

$$b_0 = -b^0, \quad b_k = b^k \quad (k = 1, 2, 3),$$

и полагая, согласно (8), $X = b^1$, $Y = b^2$, $Z = b^3$ и $ct = b^0$, получаем

$$\begin{aligned} b^1 + ib^2 &= b_{21}, & b^0 + b^3 &= b_{11}, \\ b^1 - ib^2 &= b_{12}, & b^0 - b^3 &= b_{22}. \end{aligned} \quad (10)$$

Спинор можно определить теперь как набор коэффициентов произвольной формы от любого числа бинарных переменных, которые преобразуются как $\lambda^{\dot{\alpha}}$ или μ^{β} . Например, если форма линейна по $\lambda^{\dot{\alpha}}$ и квадратична по μ^{β} :

$$f = \sum b_{\alpha\beta\gamma} \lambda^{\dot{\alpha}} \mu^{\beta} \mu^{\gamma},$$

то мы получим спинор $b_{\alpha\beta\gamma}$, симметричный по β и γ . Коэффициенты линейной формы

$$\sum b_{\alpha} \lambda^{\dot{\alpha}} \quad \text{или} \quad \sum b_{\alpha} \mu^{\alpha}$$

образуют спин-вектор $b_{\dot{\alpha}}$ или b_{α} . Индекс α или $\dot{\alpha}$ всегда принимает значения 1 или 2 (соответственно $\dot{1}$ или $\dot{2}$).

Каждому мировому вектору $b_{\dot{\alpha}}$ или $b^{\dot{\alpha}}$ соответствует, согласно (10), спинор $b_{\alpha\dot{\beta}}$. Аналогично, тензору t_{hk} соответствует спинор $b_{\alpha\dot{\beta}, \dot{\gamma}\delta}$ и т. д.

Чтобы образовать инварианты из спиноров, введем величину

$$\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\alpha\beta}: \quad \epsilon^{12} = 1, \quad \epsilon^{21} = -1, \quad \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0.$$

Из теории инвариантов известно, что каждый инвариант составленный из нескольких спиноров, получается путем умножения символов ϵ на произведение спиноров и суммирования по каждому индексу, который встречается один раз внизу и один раз сверху. Например,

$$2D = \sum \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\beta\delta} b_{\alpha\dot{\beta}} b_{\gamma\delta} = 2(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}). \quad (11)$$

Формулы можно сократить, введя определение

$$b^{\alpha} = \sum \epsilon^{\alpha\beta} b_{\beta}. \quad (12)$$

Инвариант (11) можно тогда записать в виде

$$2D = \sum b_{\alpha\dot{\beta}} b^{\dot{\alpha}\beta}. \quad (13)$$

Из (9) и (13) получаем

$$\sum b_k b^k = \sum g_{hk} b^h b^k = -\frac{1}{2} \sum b_{\alpha\dot{\beta}} b^{\dot{\alpha}\beta}. \quad (14)$$

Уравнения Дирака можно записать следующим образом:

$$(p_0 + \sum_1^3 s_r p_r) \psi + mc\chi = 0, \quad (15)$$

$$(p_0 - \sum_1^3 s_r p_r) \chi + mc\psi = 0. \quad (16)$$

Здесь s_1, s_2, s_3 — матрицы Паули, а ψ и χ — двухкомпонентные волновые функции, преобразующиеся как спиноры $b^{\dot{\alpha}}$ и b_{β} .

Если ввести спиноры $p_{\dot{\alpha}\beta}$

$$p_1 + ip_2 = p_{21} \quad \text{и т. д.}, \quad (17)$$

то уравнения (15) и (16) переписутся соответственно в виде

$$\sum p_{\alpha\beta} \dot{\psi}^{\alpha} + mc\chi_{\beta} = 0, \quad (18)$$

$$-\sum p_{\alpha\beta} \chi^{\beta} + mc\psi_{\alpha} = 0. \quad (19)$$

В присутствии электромагнитного поля нужно заменить $p_{\alpha\beta}$ на $p_{\alpha\beta} + (e/c) A_{\alpha\beta}$.

Введение двух пар функций ψ_{α} , χ_{β} вместо четырехкомпонентной функции Дирака ψ_{α} эквивалентно такому выбору матриц γ_k , что произведение их

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \gamma_5$$

представляет собой диагональную матрицу с элементами на диагонали $+1, +1, -1, -1$. Для использования моего спинорного исчисления необходим именно такой выбор матриц γ_5 . В своей статье [23] Паули пишет:

«Мы хотим здесь отметить, что это исчисление, несмотря на свою формальную замкнутость, не всегда выгодно. Расщепление всех четырехкомпонентных величины на двухкомпонентные, связанное со специальным диагональным представлением γ^5 , иногда приводит к ненужным усложнениям формул».

Переход от координат вектора b^k к координатам спинора $b_{\alpha\beta}$ выше определялся формулой (10), пригодной только в ортогональной системе пространственных координат и при специальном выборе спинорных координат. Формулы можно обобщить на произвольную косоугольную систему координат. Положим

$$b_{\alpha\beta} = \sum b^k \sigma_{k\alpha\beta}, \quad (20)$$

где $\sigma_{k\alpha\beta}$ — произвольные комплексные коэффициенты, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(\sigma_{k\alpha\beta})^{\star} = \sigma_{k\beta\alpha}, \quad (21)$$

$$2g_{hk} = \sum \epsilon^{\alpha\dot{\gamma}} \epsilon^{\beta\delta} \sigma_{h\alpha\beta} \sigma_{k\dot{\gamma}\delta}. \quad (22)$$

Эти формулы можно перенести в общую теорию относительности. На них основан формализм Инфельда и Ван дер Вардена упоминавшийся в § 12.

§ 14. УРАВНЕНИЕ ВЕЙЛЯ И НЕСОХРАНЕНИЕ ЧЕТНОСТИ

Н. Вейль, *Elektron und Gravitation* (Г. Вейль, Электрон и гравитация), Zs. f. Phys., 56, 330 (поступило в редакцию в мае 1929 г.).

Т. Д. Ли, С. Н. Янг, *Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino* (Ли Цзун-дао, Янг Чжень-мин, Несохранение четности и теория двухкомпонентного нейтрино), Phys. Rev., 105, 1671 (поступило в редакцию в январе 1957 г.).

Р. Р. Фейнман, М. Гелл-Манн, *Theory of Fermi Interaction* (Р. Фейнман, М. Гелл-Манн, Теория взаимодействия Ферми), Phys. Rev., 109, 193 (поступило в редакцию в сентябре 1957 г.).

Спинорное исчисление позволяет нам написать все возможные инвариантные волновые уравнения. Например, если нас интересует волновое уравнение первого порядка для одного двухкомпонентного спинора $\psi^{\dot{a}}$, то в отсутствие поля единственно возможным является уравнение (18) из § 13 с опущенным массовым членом

$$\sum p_{\alpha\beta} \psi^{\dot{a}} = 0. \quad (1)$$

Его можно записать также в форме уравнения (15) из § 13:

$$\left(p_0 + \sum_1^3 s_r p_r \right) \psi = 0. \quad (2)$$

Аналогично, уравнение для двухкомпонентного спинора χ^{β} должно иметь вид

$$\left(p_0 - \sum_1^3 s_r p_r \right) \chi = 0. \quad (3)$$

При наличии поля градиентно-инвариантное волновое уравнение получается заменой p_k на $p_k + (e/c) A_k$. Эти двухкомпонентные волновые уравнения были предложены Вейлем. Они неинвариантны относительно пространственного отражения. По этой причине Паули отверг уравнение Вейля как «неприменимое к физическим объектам». В той мере, в какой этот отказ касался электронов, он был целиком оправдан, однако недавно (в 1957 г.) Ли и Янг предложили использовать двухкомпонентную теорию для описания процессов с участием нейтрино, в которых четность не сохраняется (см. также [24, 25]). Несохранение четности в β -распаде было экспериментально обнаружено Ву Цзянь-сюн и ее сотрудниками [26] и подтверждено многими другими.

В уравнениях (2) и (3) через p_0 обозначен оператор

$$p_0 = -i \left(\frac{\hbar}{c} \right) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Чтобы упростить формулы, Ли и Янг пользуются системой единиц, в которой $\hbar=1$ и $c=1$. Решение уравнения (2) можно искать в виде плоской волны

$$\psi = a \exp \left[i \left(\sum p_r x_r - Wt \right) \right],$$

где множитель a — постоянный двухкомпонентный спинор. Тогда уравнение (2) требует, чтобы

$$(W - \sum s_r p_r) a = 0.$$

Пусть p — длина вектора импульса \mathbf{p} ; тогда собственные значения $\sum s_r p_r$ будут равны $\pm p$. Следовательно, W должно быть равно $+p$ или $-p$. Если энергия положительна, то $W=+p$ и вектор спина направлен по вектору импульса \mathbf{p} . Аналогично, если плоская волна удовлетворяет уравнению (3) и энергия положительна, то спин должен быть направлен против \mathbf{p} .

Ли и Янг предположили, что нейтрино — частица с массой, равной нулю и обладающая положительной энергией, — описывается уравнением (2), однако это утверждение казалось необоснованным, поскольку нейтрино с тем же успехом могло бы описываться уравнением (3). И действительно, Фейнман и Гелл-Ман показали, что предположение об антипараллельности спина и импульса нейтрино лучше соответствует экспериментальным данным (как они выражаются, «нейтрино вращается влево»).

Фейнман и Гелл-Ман предложили использовать двухкомпонентные волновые функции не только для описания нейтрино, но для всех частиц со спином, равным $1/2$. Нетрудно записать уравнение Дирака как волновое уравнение для двухкомпонентного спинора ψ . Для этого достаточно написать его в форме (15), (16) § 13 и, исключив спинор χ , получить волновое уравнение второго порядка для ψ . Это уравнение, естественно, тождественно совпадает с волновым уравнением Дирака второго порядка.

Введя таким образом двухкомпонентные волновые функции для всех частиц со спином $1/2$, Фейнман и Гелл-Ман предлагают универсальное выражение для слабого взаимодействия четырех таких частиц, в которое входят только двухкомпонентные волновые функции ψ и не входят их производные. Для β -распада их выражение дает только V - и A -взаимодействия (V — вектор,

A — аксиальный вектор); остальные типы взаимодействия (S , T и P) исключаются. Это находится в прекрасном согласии с экспериментальными данными по β -распаду Ag^{35} и Ne^{19} [27].

В работе Фейнмана и Гелл-Мана приведены также другие экспериментальные данные, подтверждающие их теорию. Подробные сведения и последние результаты можно найти в статье Ву Цзянь-сюн, помещенной в настоящем сборнике.

§ 15. ДЫРКИ И ПОЗИТРОНЫ

P. A. M. Dirac, *A Theory of Electrons and Protons* (П. А. М. Дирак, Теория электронов и протонов), Proc. Roy. Soc., A126, 360 (поступило в редакцию в декабре 1929 г.).

C. D. Anderson, *The Positive Electron* (С. Андерсон, Положительный электрон), Phys. Rev., 43, 491 (поступило в редакцию в феврале 1933 г.).

M. Fierz, *Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin* (М. Фирц, О релятивистской теории свободных частиц с произвольным спином), Helv. phys. Acta, 12, 3 (поступило в редакцию в сентябре 1938 г.).

W. Pauli, *The Connection between Spin and Statistics* (В. Паули, Связь спина со статистикой), Phys. Rev., 58, 716 (поступило в редакцию в августе 1940 г.).

Одной из основных трудностей, связанных с волновым уравнением Дирака, было вначале существование состояний с отрицательной энергией. Переход из обычного состояния в столь необычное не запрещался никакими правилами отбора. Поэтому можно было ожидать, что все электроны должны перейти в эти отрицательные состояния, чего на опыте не наблюдается. Дирак решил этот вопрос, создав свою замечательную теорию дырок. Он предположил, что все состояния с отрицательной энергией заняты, за исключением, быть может, небольшого числа состояний с малой скоростью: «Число электронов в состояниях с отрицательной энергией должно быть бесконечно... но если они распределены в точности однородно, то мы должны ожидать, что они совершенно ненаблюдаемы. Можно надеяться обнаружить лишь малые отклонения от однородности, вносимые незанятыми состояниями с отрицательной энергией».

Дирак затем рассматривает эти вакантные состояния, или «дырки». По аналогии с незанятыми рентгеновскими уровнями, он заключает, что такая дырка обладает положительной энер-

гней и движется во внешнем электромагнитном поле подобно электрону с положительным зарядом $+e$. По этой причине Дирак отождествил дырки с протонами.

Однако Вейль [20] показал, что масса дырок необходимо должна совпадать с массой электрона. Более того, Оппенгеймеру [28] удалось доказать, что если дырки отождествлять с протонами, то находящиеся вблизи электроны должны попадать в эти дырки со средним временем жизни порядка 10^{-10} сек. Поэтому Оппенгеймер считал, что дырки отличаются от протонов и назвал их *положительными электронами*, или *позитронами*. Вскоре Андерсон обнаружил их экспериментально.

Идея Дирака о дырках в бесконечном фоне электронов с отрицательной энергией была подсказана интуицией. Чтобы сделать теорию математически строгой, необходимо было подвергнуть электронное поле вторичному квантованию. Математически корректная теория вторичного квантования электронно-позитронного поля была развита Фридрихсом [29], который следовал по пути, намеченному Фоком [30]¹⁾. Насколько мне известно, лоренцова инвариантность этой теории еще не исследовалась. По-видимому, теория инвариантна, если пренебрегать взаимодействием между электронами.

Вслед за Дираком, Фирц рассмотрел релятивистские волновые уравнения для частиц с произвольным спином. Для целых значений спина он смог определить тензор энергии—импульса, который приводил к положительной полной энергии, но при полуцелом спине всегда возникали состояния с отрицательной энергией. Таким образом, для частиц с полуцелым спином необходимо было постулировать принцип запрета, чтобы получить из теории дырок положительную полную энергию.

В знаменитой работе 1940 г. Паули пришел к тому же результату, исходя из более общих предпосылок. Он ввел в рассмотрение волновую функцию U — произвольный спинор или набор спиноров с четным числом индексов при целом спине и с нечетным числом индексов при полуцелом спине. От волнового уравнения требовалась только его инвариантность по отношению к собственным преобразованиям Лоренца (без обращения времени и без отражений). Уравнение могло быть и не первого порядка. Тензор энергии—импульса мог быть равен любой однородной квадратичной функции от U и комплексно-сопряженной величины U^* .

¹⁾ Об обобщении теории Фока на релятивистские спинорные поля см. работу [31] и цитированную там литературу.

Паули показал, что всегда существует подстановка меняющих знаки пространственных координат x_k на $-x_k$ и не затрагивающая волнового уравнения. При *полуцелом спине* эта подстановка меняет T на $-T$. Следовательно, каждому состоянию с положительной энергией соответствует состояние с отрицательной энергией, также удовлетворяющее волновому уравнению. Но из физических соображений полная энергия системы должна быть положительной и мы должны обратиться к теории дырок Дирака, а вместе с ней и к принципу запрета, говорит Паули.

С другой стороны, Фирц и Паули показали, что в случае *целого спина* невозможно совместимое с принципом запрета квантование поля частиц при помощи инвариантной D -функции Иордана и Паули [32]. За разъяснением этого утверждения мы должны отослать читателя к оригинальной работе Паули.

В конце своей работы Паули замечает, что, по его мнению, установление связи спина со статистикой является одним из самых важных приложений частного принципа относительности. Действительно, это было осуществлением его давнишней мечты вывести принцип запрета из других физических принципов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pauli W., Science, **103**, 213 (1946).
2. Sommerfeld A., Phys. Zs. **17**, 491 (1916); см. также Debye P., Phys. Zs., **17**, 507 (1916).
3. Stoner, Phil. Mag., **48**, 79 (1924).
4. Compton A., Journ. Frankl. Inst., **192**, 145 (1921).
5. Landé A., Zs. f. Phys., **24**, 88; **25**, 46 (1924); Millikan R. A., Bowen I. S., Phys. Rev., **32**, 1, 746; Goudsmit S., Naturwiss., **9**, 995.
6. Uhlenbeck, Goudsmit, Physica, **5**, 266 (1925).
7. Slater J. C., Proc. Wash. Acad. Sci. (December 1925).
8. Bohr N., Ann. d. Phys., **71**, 228 (1923).
9. Heisenberg W., Ann. d. Phys., **32**, 841 (1925).
10. Bohr N., Nature, **116**, 845 (1925).
11. Niels Bohr and the Development of Physics, 1955, p. 30. (См. перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.)
12. Whittaker E., History of the Theories of Aether and Electricity, 1953, Vol. II, Ch. VIII, IX.
13. Kronig, Zs. f. Phys., **33**, 261 (1925).

14. Dirac A. M., Proc. Roy. Soc., **111**, 281 (1926).
15. Sommerfeld A., Klein F., Theorie des Kreisels, § 2—4.
16. Born, Heisenberg, Jordan, Zs. f. Phys., **35**, 557 (1926).
17. van der Waerden B. L., Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, 1932, § 17. (См. перевод: Б. Ван дер Варден, Методы теории групп в квантовой механике, М.—Л., 1936.)
18. Casimir, van der Waerden, Math. Ann., **111**, 1(1935).
19. Hund, Linienspektren und periodisches System der Elemente, Berlin, 1927.
20. Weyl H., Gruppentheorie und Quantenmechanik, Berlin, 1928.
21. von Neumann J., Zs. f. Phys., **48**, 876 (1928).
22. Grace J. H., Young A., The Algebra of Invariants, Cambridge, 1903.
23. Pauli W., Handbuch der Physik, Bd. 24, Teil I, S. 225. (См. перевод: В. Паули, Теория относительности, М.—Л., 1947).
24. Salam A., Nuovo Cimento, **5**, 299 (1957) [см. ЖЭТФ, **35**, 405, 407 (1956)].
25. Ландау Л., Nucl. Phys., **3**, 127 (1957).
26. Wu C. S., *et al.*, Phys., Rev., **105**, 1413 (1957).
27. Hermannsfeldt *et al.*, Phys. Rev., **107**, 641 (1958).
28. Oppenheimer R., Phys. Rev., **35**, 562, 939 (1930).
29. Friedrichs K., Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, New York, 1953, Part V.
30. Fock V., Zs. f. Phys., **75**, 622 (1932). (См. В. А. Фок, Работы по теории поля, Изд-во ЛГУ, 1957, стр. 25.)
31. Wightman, Schreiber, Phys. Rev., **98**, 812 (1954).
32. Jordan P., Pauli W., Zs. f. Phys., **47**, 151 (1928).

Л. Д. ЛАНДАУ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

С глубокой грустью я посылаю эту статью, написанную в честь шестидесятилетия Вольфганга Паули, в сборник, посвященный его памяти. Воспоминания о нем будут свято храниться теми, кому выпало счастье знать его лично.

Уже нельзя будет узнать его мнения об идеях, высказываемых в настоящей статье, но меня все же ободряет надежда, что его взгляды по этим вопросам отличались бы не очень сильно.

Хорошо известно, что теоретическая физика в настоящее время почти беспомощна в проблеме сильных взаимодействий. По этой причине любые замечания здесь неизбежно носят характер предсказаний, и их авторы легко могут оказаться в положении охотничьей собаки, лающей под пустым деревом.

Долгое время считалось, что основная трудность теории заключается в существовании бесконечностей, которые можно устранить, лишь используя теорию возмущений. Привычка применять аппарат перенормировок, который позволил добиться замечательных успехов в теории возмущений, зашла настолько далеко, что само понятие перенормировки стало окружаться неким мистическим ореолом. Ситуация, однако, проясняется, если, воспользовавшись обычным для теоретической физики приемом, рассматривать точечное взаимодействие как предел некоего «размазанного» взаимодействия. Такой подход, хотя и предполагает слабость взаимодействия, существенно выходит за рамки теории возмущений и позволяет найти асимптотические выражения для основных физических величин в функции от энергии [1]. Эти выражения показывают, что эффективное взаимодействие всегда ослабляется при уменьшении энергии и физическое взаимодействие при конечных

энергиях, таким образом, всегда меньше взаимодействия при энергиях порядка энергии обрезания; последнее определяется значением голой постоянной связи, входящей в гамильтониан.

Поскольку величина перенормировки становится сколь угодно большой с ростом энергии обрезания, то даже бесконечно слабое взаимодействие требует большой величины голой постоянной связи. Поэтому возникло предположение, что основная проблема заключается в создании теории очень сильных взаимодействий.

Дальнейшие исследования показали, однако, что дело обстоит далеко не так просто. Померанчук в ряде работ [2] показал, что при увеличении энергии обрезания физическое взаимодействие стремится к нулю независимо от величины голой постоянной связи. Почти одновременно к тому же результату пришли Паули и Челлен [3] в так называемой модели Ли.

Корректность «нулификации» часто ставилась под вопрос. Модель Ли является весьма специальной и заметно отличается во многих отношениях от физических взаимодействий, поэтому строгость доказательств Померанчука подвергалась сомнению. На мой взгляд, эти сомнения неосновательны. Челлен, например, несколько раз ссылаясь на использование необычных свойств рядов, подлежащих суммированию, но ни разу ничем не подтвердил свою точку зрения. Ныне «нулификация» молчаливо признается даже теми физиками, которые вслух оспаривают ее. Это ясно, поскольку почти полностью исчезли работы по мезонной теории, и особенно очевидно из замечания Дайсона [4] о том, что корректная теория будет построена в следующем столетии, — пессимизм, который был бы непонятен, если считать, что существующая мезонная теория ведет к конечным результатам, которые мы пока не в состоянии извлечь из нее. Поэтому мне представляются несвоевременными попытки улучшить доказательства Померанчука. Ввиду краткости жизни мы не можем позволить себе роскошь тратить время на задачи, которые не ведут к новым результатам.

Обращение в нуль точечных взаимодействий в существующей теории приводит к мысли о необходимости использования «размазанных», нелокальных взаимодействий. К несчастью, нелокальный характер взаимодействия делает вполне бесполезным аппарат существующей теории. Нежелательность этого обстоятельства является, конечно, плохим доводом против нелокальности теории, однако существуют и более основательные возражения. Все результаты, полученные в квантовой

теории поля без использования конкретных предположений о виде гамильтониана, по-видимому, подтвердились на эксперименте. Речь идет в первую очередь о дисперсионных соотношениях [5]. Более того, число мезонов, образующихся в столкновениях при больших энергиях, находится в согласии с формулой Ферми [6,7], вывод которой основан на использовании представлений статистической термодинамики на расстояниях, гораздо меньших, чем любой возможный радиус взаимодействия.

Возможное существенное видоизменение существующей теории без отказа от локальности взаимодействия впервые предложил Гейзенберг [8]. Помимо общей идеи, Гейзенберг добавляет еще и ряд других предположений, которые мне представляются сомнительными. Я попытаюсь поэтому обрисовать ситуацию в той форме, которая кажется мне наиболее убедительной.

Почти 30 лет назад Пайерлс и я указали, что, согласно релятивистской квантовой теории, нельзя измерить никаких величин, характеризующих взаимодействующие частицы, и единственными измеримыми величинами являются импульс и поляризация свободно движущихся частиц. Поэтому, если мы не хотим пользоваться ненаблюдаемыми величинами, мы должны вводить в теорию в качестве фундаментальных величин только амплитуды рассеяния.

Операторы ψ , содержащие ненаблюдаемую информацию, должны исчезнуть из теории; и поскольку гамильтониан можно построить только из операторов ψ , мы с необходимостью приходим к выводу, что гамильтонов метод в квантовой механике изжил себя и должен быть похоронен, конечно, со всеми почестями, которые он заслужил.

Основой для новой теории должна служить новая диаграммная техника, которая использует только диаграммы со «свободными» концами, т. е. амплитуды рассеяния и их аналитические продолжения. Физическую основу этого аппарата образуют соотношения унитарности и принцип локальности взаимодействия, который проявляется в аналитических свойствах фундаментальных величин теории, например в различного рода дисперсионных соотношениях.

Поскольку такая новая диаграммная теория еще не построена, мы вынуждены находить аналитические свойства вершинных диаграмм, исходя из гамильтонова формализма. Однако нужно быть очень наивным, чтобы пытаться придать «строгость»

такому выводу; нельзя забывать, что мы получаем реально существующие уравнения из гамильтонианов, которые в действительности не существуют.

В результате такого подхода к теории, в частности, окончательно теряет смысл старая проблема элементарности частиц, так как ее нельзя сформулировать, не вводя взаимодействий между частицами.

Мне кажется, что за последние годы теория заметно прогрессировала в указанном направлении и недалеко то время, когда будут окончательно написаны уравнения новой теории.

Нужно, однако, иметь в виду, что в этом случае в отличие от ситуации, существовавшей ранее в теоретической физике, написание уравнений означает не конец, а начало создания теории. Уравнения теории будут представлять собой бесконечную систему интегральных уравнений, каждое из которых имеет вид бесконечного ряда, и будет очень трудно научиться работать с такими уравнениями.

Сейчас, конечно, невозможно предсказать, сколько констант в теории можно будет выбрать произвольно. Мы не можем даже исключить возможность того, что уравнения вообще не будут иметь решений, т. е. что в теории снова возникнет нулификация. Это можно будет рассматривать либо как строгое доказательство нелокальности природы, но это может означать и то, что не существует теории одних только сильных взаимодействий и в общую схему должны быть включены также слабые взаимодействия и особенно электродинамика. Тогда инфракрасная «катастрофа» бесконечно усложнит ситуацию.

Но даже в лучшем случае нам предстоит тяжелая борьба, борьба которая стала еще труднее, когда ее не освещает яркая, безошибочная мысль Вольфганга Паули.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., О квантовой теории поля в книге «Niels Bohr and the Development of Physics», London, 1955. (См. перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.) Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., *Nuovo Cimento, Suppl.*, (10) 3, 80 (1956).
2. Померанчук И. Я., ДАН СССР, 103, 1005 (1955); 104, 51 (1955); 105, 461 (1955); Абрикосов А. А., Галанин А. Д., Горьков Л. П., Ландау Л. Д., Померанчук И. Я., Тер-Мартirosян К. А., *Phys. Rev.*, 111, 321 (1958).

3. K ä l l é n G., P a u l i W., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., 30, No. 7 (1955).
4. D y s o n F. J., Sci. Amer., 199 (3), 74 (1958).
5. C h e w G. F., Ann. Rev. Nucl. Sci., 9, 29 (1959). П о м е р а н - ч у к И. Я., О к у н ь Л. Б., ЖЭТФ, 36, 300 (1959).
6. F e r m i E., Progr. Theor. Phys., Osaka, 5, 570 (1950); Phys. Rev., 81, 683 (1951).
7. Б е л е н ь к и й С. З., Л а н д а у Л. Д., Nuovo Cimento, Suppl., (10) 6, 15 (1956).
8. H e i s e n b e r g W., Rev. Mod. Phys., 29, 269 (1957).

В У Ц З Я Н Ь - С Ю Н

НЕЙТРИНО

ВВЕДЕНИЕ

В письме, написанном в тот самый вечер, когда получено было известие об экспериментальном доказательстве несохранения четности в β -распаде, профессор В. Паули выразил свои мысли и чувства по поводу неожиданного оборота событий. Его, по-видимому, особенно занимала проблема нейтрино. Заканчивая письмо в задумчивом тоне, Паули писал: «Эта частица, нейтрино, к существованию которой я до некоторой степени причастен, до сих пор преследует меня». Новые поколения, видевшие триумфальный успех гипотезы о нейтрино [1], наверное, никогда не смогут полностью оценить мужество и проницательность, которые потребовались, чтобы выдвинуть странную идею о существовании неуловимой частицы — нейтрино.

В последние годы Паули снова занялся проблемой нейтрино. Осенью 1956 г. он рассматривал связь между нейтрино и антинейтрино и сохранением лептонов. По иронии судьбы он относился с недоверием к оценке масс покоя нейтрино и указывал, что верхний предел установлен слишком высоким из-за применения релятивистского выражения, которое получалось путем суммирования по спинам испущенных частиц. Для Паули вывод этого выражения сам по себе представлял интересный этап. Ясно, что он думал в то время о более простой и логической теории нейтрино, но твердая вера в принципы симметрии сковывала его предприимчивый ум. Хорошо известно, что Паули прекрасно умел обращаться с математической игрушкой — теорией двухкомпонентной, лишенной массы частицы со спином, равным $1/2$. Он рассматривал эту теорию

еще в 1932 г. в статье для *Handbuch der Physik* [2]¹). Ему было также хорошо известно, что двухкомпонентные нейтрино тем не менее инвариантны относительно операций (*CP*) и (*T*); к этому выводу можно прийти, используя теорему *CPT* [4—6]. Отказаться от идеи о двухкомпонентном нейтрино, до того как она была экспериментально подтверждена, Паули заставил глубоко беспокоивший его вопрос: почему симметрия между левым и правым, которая так хорошо выполняется в сильных взаимодействиях, должна нарушаться в слабых? На этот фундаментальный вопрос до сих пор нет ответа.

Таким образом, влияние, которое оказал Паули на наши представления о нейтрино, далеко не исчерпывается гипотезой о существовании этой частицы. Его работа о пяти релятивистских инвариантах [7] относительно собственных преобразований Лоренца, его теорема о перегруппировках [8] и многие другие квантовомеханические работы образуют неотъемлемую часть обобщенной теории β -распада. Его критическое суждение, его высказывания о двухкомпонентном нейтрино и теореме *CPT* служили надежным указателем на пути к новой теории нейтрино.

§ 1. ДО ПОЯВЛЕНИЯ ГИПОТЕЗЫ О НЕЙТРИНО

Когда микрокалориметрические измерения [9, 10] средней энергии β -частиц, испускаемых RaE , с несомненностью доказали, что непрерывное распределение [11] является внутренним свойством электронов распада, физикам стало ясно, что они столкнулись с чем-то весьма загадочным. В частности, Паули, с большим интересом следивший за полемикой экспериментаторов, придавал большое значение калориметрическим данным.

Примерно в тот же период волновая механика окончательно завоевывала себе место в физике. Постепенно вырисовывались наши представления о спине и статистике ядер. Однако основными компонентами ядер еще считались протоны и электроны. Поэтому в соответствии с теоремой Эренфеста и Оппенгеймера [12] ядро N^{14} должно было подчиняться статистике Ферми — Дирака. К всеобщему разочарованию экспериментально было показано [13, 14], что ядро N^{14} , вопреки ожи-

¹) На возможность построения релятивистской теории двухкомпонентной частицы со спином $\frac{1}{2}$ впервые указал Вейль [3]. Эта теория была отвергнута, поскольку она не удовлетворяла закону сохранения четности (см. [2]).

даниям, подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна. Это было сильным ударом по протонно-электронной гипотезе. Изучение спинов ядер привело к тому же заключению. Поэтому электроны приходилось исключать из ядра. Но заменить протонно-электронную гипотезу было нечем — других идей о строении ядра в то время еще не существовало.

Основываясь в своих выводах только на соображениях спина и статистики, Паули указывал в открытом письме¹⁾ Гейгеру и Мейтнер, зачитанном на семинаре, состоявшемся в декабре 1930 г. в Тюбингене, что в β -распаде не только проявляется нарушение закона сохранения энергии, но не сохраняются также спин и статистика. Ядерный момент количества движения при β -распаде либо не должен меняться, либо должен меняться на целое число ($\Delta I = n\hbar$, $n=0, 1, 2, \dots$). С другой стороны, внутренний момент количества движения электрона равен $\hbar/2$. Орбитальный момент всегда является целым кратным \hbar . Таким образом, момент количества движения в β -распаде, очевидно, не сохраняется, если испускается только β -частица. Чтобы спасти положение, Паули предложил необычную идею существования неуловимой новой частицы с исчезающе малой массой.

Однако Паули был очень скромн и ненавязчив. Он допускал, что его предложение может показаться неправдоподобным и продолжает: «...не рискнув, не выиграешь; серьезность положения с непрерывным β -спектром хорошо проиллюстрировал мой уважаемый предшественник господин Дебай, который недавно заявил мне в Брюсселе: „О... об этом лучше не думать вовсе... как о новых налогах“. Необходимо поэтому серьезно обсудить любой путь к спасению. Итак, мои дорогие радиоактивные дамы и господа, проверяйте и судите». Посетить семинар в Тюбингене ему помешал бал в Цюрихе. Он был все-таки очень молод тогда.

Свою идею о новой странной частице Паули предал гласности на собрании Американского физического общества в июне 1931 г. в Пасадене. Однако гипотеза оказалась слишком смелой для большинства физиков и встретила скептиче-

¹⁾ Письмо цитировалось Паули на собрании Цюрихского общества естествоиспытателей, состоявшемся 21 января 1957 г. (непосредственно после predания гласности результатов первых опытов по несохранению четности). Письмо было переведено Робертом Шлаппом, которому автор приносит благодарность за копию перевода.

ское отношение. В октябре того же года на семинаре по ядерной физике в Риме Паули встретился с Ферми. Вопросы β -распада вновь подверглись подробному обсуждению, и Ферми сразу увлекся гипотезой о нейтрино.

Затем последовал переворот в ядерной физике, начавшийся с открытия Чедвиком нейтрона в 1932 г. [15]. Все данные прекрасно укладывались в протон-нейтронную гипотезу о строении ядра. Ободренный таким оборотом событий, Паули выступил с гипотезой о нейтрино на Сольвеевском конгрессе в Брюсселе в 1933 г. [1], отбросив все делавшиеся им ранее оговорки.

§ 2. ГИПОТЕЗА О НЕЙТРИНО

Ниже приводится выдержка из выступления Паули [1] на Сольвеевском конгрессе:

«В июне 1931 г. на конференции в Пасадене я предложил следующий выход: законы сохранения выполняются, но испускание β -частиц сопровождается вылетом весьма проникающих нейтральных частиц, которые до сих пор не были обнаружены. Сумма энергий β -частицы и нейтральной частицы (или нейтральных частиц, так как неизвестно, испускается ли одна такая частица или несколько), испущенных ядром в одном процессе, должна быть равна энергии, соответствующей верхней границе β -спектра. Мы, естественно, предполагаем, сохранение во всех элементарных процессах не только энергии, но и импульса и момента количества движения; сохраняются также характерные черты статистики.

Что касается свойств этих нейтральных частиц, то, сопоставляя атомные веса, мы можем прежде всего заключить, что их масса не может намного превышать массу электрона. Чтобы отличать их от тяжелых нейтронов, Ферми предложил для них название „нейтрино“. Возможно, что собственная масса нейтрино равна нулю, и они, следовательно, должны, подобно фотонам, двигаться со скоростью света. Тем не менее их проникающая способность должна быть существенно больше, чем у фотонов с той же энергией. Мне кажется разумным предположение, что спин нейтрино равен $1/2$, и они подчиняются статистике Ферми, хотя эксперимент не дает прямого подтверждения этой гипотезе. Мы ничего не знаем о взаимодействиях нейтрино с другими частицами, в частности фотонами: гипотеза о магнитном моменте нейтрино, которую я выдвигал (теория Дирака наводит нас на мысль о существовании нейтральной

магнитной частицы), мне не кажется сколько-нибудь обоснованной».

Аргументы Паули в пользу законов сохранения в β -распаде отличались большой убедительностью. Он говорил: «Бор предполагает [16], что законы сохранения энергии и импульса не выполняются в ядерных процессах, в которых легкие частицы играют существенную роль. Эта гипотеза представляется мне неубедительной и даже неправдоподобной. Прежде всего в этих процессах сохраняется электрический заряд, и я не вижу, почему сохранение заряда является более фундаментальным принципом, чем сохранение энергии или импульса. Более того, именно энергетические соотношения определяют некоторые характерные черты β -спектров (существование верхней границы и связь с γ -спектрами, критерий устойчивости Гейзенберга). Если законы сохранения не выполняются, то из этих соотношений следует заключить, что β -распад всегда происходит с потерей энергии, и никогда — с выигрышем. Но этот вывод влечет за собой необратимость таких процессов во времени, что кажется мне вообще неприемлемым».

Паули предлагает даже использовать чувствительный метод отдачи, чтобы исследовать эти частицы. Вот что он говорит: «...экспериментальное определение потери импульса в β -распаде представляет собой крайне важную проблему; можно предполагать, что трудности будут огромными в силу ничтожности энергии ядра отдачи».

Ферми также присутствовал на Сольвеевском конгрессе, и это ускорило создание его знаменитой теории β -распада [17]. На дискуссии присутствовал также Перрен [18]. Уже тогда он пришел к выводу, что масса покоя нейтрино должна быть малой или равной нулю. Он утверждал следующее: «Форма непрерывного β -спектра позволяет высказать разумное предположение о массе нейтрино, ... чтобы как-то объяснить положение максимума или, скорее, среднюю энергию электрона в случае, который нам известен лучше всего (RaE), следует допустить, что внутренняя масса нейтрино, как у фотона, равна нулю».

Таким образом, уже при рождении новой частицы предполагалось, что ее спин равен $\frac{1}{2}$, что она подчиняется статистике Ферми — Дирака, что она нейтральна и, наконец, что ее масса исчезающе мала — много меньше массы электрона. Охарактеризованная столь полно, эта частица, безусловно, заслуживала почетного места в семье элементарных частиц; однако

никто, по-видимому, не мог предвидеть той, блестящей и удивительной роли, которую ей суждено было сыграть в будущем.

§ 3. ТЕОРИЯ β -РАСПАДА ФЕРМИ

Используя гипотезу о нейтрино, Ферми создал теорию β -распада в формулировке, логически связанной с его первыми работами по квантовой электродинамике. Впоследствии теория была обобщена [19, 20] на все возможные типы β -взаимодействия, но основная идея осталась неизменной.

Можно рассматривать β^- -распад как реакцию

$$N \rightarrow P + e^- + \nu, \quad (1)$$

а β^+ -распад как реакцию

$$P \rightarrow N + e^+ + \nu \quad (2)$$

Спины всех четырех частиц (P , N , e^\pm , ν) известны и равны $\frac{1}{2}$, все они подчиняются статистике Ферми и могут, следовательно, описываться квантованными полями Дирака. Согласно релятивистской теории Дирака, каждой элементарной частице со спином $\frac{1}{2}$ соответствует античастица (например, электрону соответствует позитрон) с противоположными знаками заряда и магнитного момента. Естественно, что нейтрино и парная к нему частица антинейтрино также должны обладать этим свойством. Заранее не было ясно, имеется ли какое-нибудь внутреннее различие между нейтрино и антинейтрино. Современная точка зрения на этот вопрос обсуждается в § 14.

Поглощение обычной частицы эквивалентно созданию античастицы (и наоборот), так как обычная частица может поглощаться из состояния с отрицательной энергией, что соответствует рождению античастицы. С математической точки зрения удобно описать β -распад как процесс, в котором две частицы поглощаются и две рождаются:

$$P \xrightarrow{\beta^+\text{-распад}} N + e^+ + \nu \quad P + e^- \xrightarrow{\beta^+\text{-распад}} N + \nu \quad (3)$$

вместо рассматривать

$$N \xrightarrow{\beta^-\text{-распад}} P + e^- + \bar{\nu} \quad N + \nu \xrightarrow{\beta^-\text{-распад}} P + e^-. \quad (4)$$

Условимся, что ν означает обычную частицу, нейтрино, а $\bar{\nu}$ — антинейтрино. Таким образом, нейтрино, испускаемое в β^+ -распаде, представляет собой «частицу» (нейтрино), а нейтрино, сопутствующее β^- -распаду, есть «античастица» (антинейтрино).

Взаимодействие между полями $P\bar{N}$ и e^+v предполагается точечным ($P\bar{N}$ является источником, а e^+v — лептонным полем), подобно тому, как в электромагнитном случае заряд взаимодействует с γ -квантом только тогда, когда они находятся в одной точке; β -взаимодействие может быть обусловлено наличием в гамильтониане члена

$$H = g(\bar{\psi}_P\psi_N\bar{\psi}_e\psi_v + \bar{\psi}_N\psi_P\bar{\psi}_v\psi_e), \quad (5)$$

где g — постоянная связи, определяющая силу взаимодействия, аналогично электрическому заряду в случае электромагнитного поля. Операторы ψ_P , ψ_N , ψ_e , ψ_v — полевые операторы уничтожения протона, нейтрона, электрона и нейтрино или рождения антипротона, антинейтрона, позитрона и антинейтрино соответственно. Операторы $\bar{\psi}_P$, $\bar{\psi}_N$, $\bar{\psi}_e$, $\bar{\psi}_v$ создают соответствующие обычные частицы или уничтожают античастицы. При написании выражения (5) была добавлена комплексно-сопряженная величина, поскольку лагранжиан должен быть эрмитовым оператором. Первый член описывает β^- -распад, а второй — β^+ -распад.

Операторы поля ψ являются четырехкомпонентными спинорами, и, следовательно, существует 256 независимых способов составить форму четвертого порядка из компонент ψ . Однако член, описывающий взаимодействие, должен быть скаляром и не может поэтому зависеть от выбора лоренцевой системы отсчета. В этой связи Паули показал [7], что можно построить пять и только пять релятивистски ковариантных величин, а именно скаляр (S), вектор (V), тензор (T), аксиальный вектор (A) и псевдоскаляр (P).

Первоначально Ферми ввел β -взаимодействие в векторной форме по аналогии с электродинамикой. Разрешенные переходы в этом случае могут происходить только без изменения спина ($\Delta I=0$) и четности. Когда β -распад $\text{He}^6(\Delta I=1; \text{нет})$ по времени жизни ($0,82 \text{ сек}$) и по максимальной энергии ($3,52 \text{ Мэв}$) был отнесен к разрешенным, стало ясно, что одного векторного взаимодействия недостаточно. Гамов и Теллер [19, 20] обобщили β -взаимодействие Ферми, указав, что можно составить пять инвариантов, умножая каждый из пяти ковариантов для тяжелых частиц на соответствующий ковариант для легких частиц. В наиболее общем виде β -взаимодействие можно записать как линейную комбинацию всех пяти инвариантов:

$$(C_S S + C_V V + C_T T + C_A A + C_P P).$$

Таким образом, гамильтониан обобщенного взаимодействия имеет вид

$$H_\beta = g \sum_i C_i (\bar{\psi}_P O_i \psi_N) (\bar{\psi}_e O_i \psi_\nu) + \text{Эрмит. сопр.}, \quad (6)$$

где

$$\begin{array}{llll} i = S & V & T & A \quad P \\ C_i = C_S & C_V & C_T & C_A \quad C_P \\ O_i = 1 & \gamma_\mu & \frac{i}{2\sqrt{2}} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) & i\gamma_5 \gamma_\mu \quad \gamma_5 \end{array}$$

и $\gamma = i\alpha\beta$, $\gamma_4 = \beta$, $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$,

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}; \quad \beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \gamma_4; \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma \\ -i\sigma & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \gamma_5 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

Постоянная g определяет силу взаимодействия. Из величин, характеризующих β -распад, опыт позволял в те годы определить вероятность перехода (период полураспада) и форму спектра (максимальную энергию и тип перехода — разрешенный или запрещенный).

Приведем теоретическое выражение для энергии и углового распределения электронов в β -распаде:

$$\begin{aligned} P_\mp(E_\beta, \theta_\nu) dE &= \frac{m_0 C^2}{h} \frac{G^2}{2\pi^3} F(\pm Z, E_\beta) (C_S^2 + C_V^2) \times \\ &\times |M_F|^2 + (C_T^2 + C_A^2) |M_{GT}|^2 \left\{ p_\beta E_\beta \left[E_{\text{макс.}} + \frac{m_\nu}{m_0} - E_\beta \right] \times \right. \\ &\times \left[\left(E_{\text{макс.}} + \frac{m_\nu}{m_0} - E_\beta \right)^2 - \frac{m_\nu^2}{m_0^2} \right]^{1/2} \times \\ &\times \left\{ 1 \pm \frac{b}{E_\beta} \pm \lambda \frac{p_\beta C}{E_\beta} \cos \theta_{(\beta\nu)} + \frac{\alpha m_\nu/m_0}{E_\beta (E_{\text{макс.}} - E_\beta + m_\nu/m_0)} \right\} dE. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь G — безразмерная постоянная, равная $(g/m_0 c^2)(\hbar/m_0 c)^{-3}$, g измерено в $\text{эрг} \cdot \text{см}^3$; E_β — полная энергия β -частиц, включая массу покоя (в единицах $m_0 c^2$); p_β измерено в единицах $m_0 c$. Фактор $F(\pm Z, E)$ учитывает влияние кулонова поля. Слагаемое, содержащее b , — это фирцевский интерференционный член

$$\begin{aligned} b &= 2 \left[1 - \left(\frac{e^2 Z}{\hbar c} \right)^2 \right]^{1/2} [C_S C_V |M_F|^2 + C_T C_A |M_{GT}|^2] \times \\ &\times [(C_S^2 + C_V^2) |M_F|^2 + (C_T^2 + C_A^2) |M_{GT}|^2]^{-1} \quad (8) \end{aligned}$$

(см. § 4, В); $\theta_{\beta\nu}$ — угол между направлениями вылета β - и ν -частиц

$$\lambda = \frac{^{1/3}(C_T^2 - C_A^2) |M_{GT}|^2 \dots (C_S^2 - C_V^2) |M_F|^2}{(C_T^2 + C_A^2) |M_{GT}|^2 + (C_S^2 + C_V^2) |M_F|^2} \quad (9)$$

(см. § 4, Е); $\alpha = +1$, если четности волновых функций электрона и нейтрино не совпадают, и $\alpha = -1$, если они совпадают (см. § 13). Постоянные связи C_i действительны, если существует инвариантность по отношению к обращению времени (см. § 22).

§ 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО КЛАССИЧЕСКОМУ β -РАСПАДУ

Еще до прямого обнаружения захвата нейтрино, осуществленного в последние годы, успех теории β -распада Ферми и результаты измерений отдачи, несомненно, оказали существенную поддержку гипотезе о нейтрино. Эти вопросы подробно разобраны в ряде обзоров [21—24]. Здесь будет приведена только краткая сводка результатов.

А. Форма разрешенного спектра

Согласно теории Ферми, влияние электростатического поля ядра на движение электрона учитывается фактором $F(Z, E_\beta)$, известным под названием функции Ферми. В остальном форма разрешенного β -спектра определяется просто статистическим множителем $pE_\beta(E_{\text{макс.}} - E_\beta)^2$, который равен объему фазового пространства, соответствующего распределению энергии между электроном и нейтрино в предположении, что масса нейтрино равна нулю. Экспериментально установлено, что форма разрешенного β -спектра находится в хорошем согласии с теоретическими предсказаниями.

Б. Уникальные запрещенные переходы

Разрешенный β -спектр определяется лишь статистическим множителем — объемом фазового пространства. Теория не содержит никакого произвола. С другой стороны, существуют уникальные запрещенные спектры, которые коренным образом отличаются от разрешенных спектров, но также однозначно предсказываются теорией. Последовательное открытие

уникальных спектров 1, 2 и 3 запрещения в Y^{91} , Be^{10} и K^{40} , форма которых в точности соответствовала теоретическим предсказаниям, явилось блестящим подтверждением теории β -распада.

В. Фирцевский интерференционный член $\pm b/E_\beta$

Фирц [28] первый указал на существенную роль, которую играет этот член. Он должен был бы более или менее заметно искажать форму β -спектра в зависимости от b/E_β , чего на опыте, однако, никогда не наблюдалось. Верхний предел для b равен $0 \pm 0,10$ во взаимодействии Ферми и $0 \pm 0,04$ во взаимодействии Гамова — Теллера. Это указывает на то, что варианты S и V во взаимодействиях типа Ферми и варианты T и A во взаимодействиях типа Гамова — Теллера не могут играть одинаковой роли. Когда один из них доминирует, величина другого мала. Однако в теории двухкомпонентного нейтрино отсутствие интерференционного члена Фирца не приводит к столь четким выводам (см. § 11).

Г. Фактор ft

Среднее время распада τ дается выражением

$$\frac{1}{\tau} = \int_1^{E_{\text{макс.}}} p(E) dE = \frac{m_0 c^2}{h} \frac{G^2}{2\pi^3} (G_F^2 |M_F|^2 + C_{GT}^2 |M_{GT}|^2) \times$$

$$\times \int_1^{E_{\text{макс.}}} F(Z, E_\beta) \{(E_\beta^2 - 1)^{1/2} E_\beta (E_{\text{макс.}} - E_\beta)^2\} dE$$

или

$$f\tau (C_F^2 |M_F|^2 + C_{GT}^2 |M_{GT}|^2) = \frac{2\pi^3 \tau_0}{G^2},$$

где

$$\tau_0 = \frac{h}{m_0 c^2} = 1,3 \cdot 10^{-21} \text{ сек},$$

а f — безразмерная величина, обозначающая интеграл по энергетическому спектру.

Классификация β -распадов по значениям ft не только позволяет приписать спин и четность ядерным уровням, но и помо-

гает разобраться в строении ядра и ядерных силах. К наиболее ярким успехам относятся классификация сверхразрешенных и разрешенных переходов и установление связи между группой β -переходов $0^+ \rightarrow 0^+$ и изотопическими мультиплетами.

Д. Отношение $|C_{GT}|^2/|C_F|^2$

Систематическое изучение ряда простых зеркальных ядер (замкнутая оболочка \pm нуклон) показало, что постоянные взаимодействий Ферми и Гамова — Теллера близки друг к другу. Это можно увидеть, если отложить величину B как функцию X в следующем соотношении:

$$ft = \frac{B}{(1-X)|M_F|^2 + X|M_{GT}|^2}, \quad (10)$$

где X — относительная величина взаимодействия Гамова — Теллера

$$X = \frac{|C_{GT}|^2}{|C_F|^2 + |C_{GT}|^2}. \quad (11)$$

Последние измерения отношения C_{GT}^2/C_F^2 привели к результату $1,16 \pm 0,05$ [25]. Это значение существенно зависит от ядерного матричного элемента, который точно не известен. С другой стороны, ядерные матричные элементы нейтрона и O^{14} (переход $0^+ \rightarrow 0^+$) можно вычислить точно: для O^{14} $M_F^2 = 2$ и для нейтрона $M_F^2 = 1$ и $M_{GT}^2 = 3$. Отсюда

$$\frac{(ft)_{n_0}}{(ft)_{O^{14}}} = \frac{2|C_F|^2}{|C_F|^2 + 3|C_{GT}|^2}. \quad (12)$$

Результаты последних измерений ft для O^{14} [26] и нейтрона [27] таковы:

$$\begin{aligned} (ft)_{n_0} &= (1187 \pm 35) \text{ сек из } (t_{1/2})_{n_0} = 11,7 \pm 0,3 \text{ мин,} \\ (f)_{O^{14}} &= (3103 \pm 62) \text{ сек,} \end{aligned} \quad (13)$$

откуда

$$\frac{|C_{GT}|^2}{|C_F|^2} = 1,42 \pm 0,08.$$

Этот результат находится в согласии с величиной 1:55, полученной по асимметрии вылета β^- из поляризованного нейтрона (см. § 12). Зная $(ft)_{O^{14}}$, можно найти также постоянную

связи g_F для взаимодействия Ферми

$$g_F^2 = \frac{2\pi^3 (|n|^2)}{|M_F|^2} \left(\frac{\hbar}{m_0 c} \right)^6 \frac{\hbar}{(ft)_{0^{14}}} m_0 c^2,$$

где $|M_F|^2 = 2$ для β -переходов $0^+ \rightarrow 0^+$; поэтому

$$|g_F| = (1,41 \pm 0,01) \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3.$$

Е. Измерения отдачи

В отличие от заряженных частиц, нейтрино ускользает от попыток прямого наблюдения, однако, покидая ядро в процессе распада, оно сообщает ему некоторый импульс. Измерение энергетического спектра и углового распределения ядер отдачи является чувствительным методом исследования процесса вылета нейтрино.

Эксперименты по измерению отдачи можно разбить на несколько групп:

1) Эксперименты первой группы посвящены в основном измерениям отдачи ядер при K -захвате. Если в каждом акте K -захвата испускается только одно нейтрино, то импульс отдачи однозначно определяется соотношением

$$p = \frac{1}{c} (E^2 - M_\nu^2 C^4)^{1/4} \quad \text{или} \quad E_r = 140,2 \frac{(E^2 - M_\nu^2 C^4)}{2M}; \quad (14)$$

значение E_r измерено в электрон-вольтах; E — энергия, высвобождаемая в процессе K -захвата в единицах mc^2 ; $M_\nu C^2$ — энергия покоя нейтрино в единицах mc^2 ; атомная масса атома отдачи в *а.е.м.* (атомных единицах массы). Этот острый пик в распределении был четко выделен в ряде красивых и убедительных экспериментов, результаты которых приведены в табл. 1.

2) Поскольку при β -распаде испускаются одновременно две легкие частицы (β и ν), энергетический спектр ядер отдачи в этом случае более сложен, чем при K -захвате. Спектр оказывается непрерывным и его форма существенно зависит от угловых корреляций между электроном и нейтрино. Согласно уравнению (9), угловые корреляции в различных вариантах β -взаимодействия определяются величиной λ

	S	V	T	A
λ	-1	$+1$	$+1/3$	$-1/3$

В векторном и тензорном взаимодействиях электрон и нейтрино испускаются преимущественно в одном направлении; максимум распределения по энергии ядер отдачи сдвигается в сторону больших энергий. В скалярном и псевдовекторном

Таблица 1

ОТДАЧА ЯДРА ПРИ ЗАХВАТЕ ОРБИТАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОНА

Материнское ядро	Энергия распада, Мэв	$(E_T)_{\text{теор.}}$	$(E_T)_{\text{эксп.}}$	Литература
Be ⁷	$0,864 \pm 0,003$	$57,3 \pm 0,5$ эв	$56,6 \pm 1,0$ эв	[133]
Be ⁷	$0,864 \pm 0,003$	$57,3 \pm 0,5$ эв	$55,9 \pm 1,0$ эв	[134]
Ag ³⁷	$0,816 \pm 0,004$	$0,711 \pm 0,004$	$0,71 \pm 0,06$	[135]
		см./мксек	см./мксек	
	$0,816 \pm 0,004$	$9,67 \pm 0,08$	$9,6 \pm 0,2$ эв	[31]
		$9,65 \pm 0,05$	$9,63 \pm 0,06$ эв	[32]

вариантах легкие частицы вылетают в основном в противоположных направлениях и максимум распределения по энергиям сдвигается к меньшим энергиям. Различие между S и V очень велико, различие между T и A выражено гораздо слабее. До открытия несохранения четности исследование угловых корреляций ($\beta - \nu$) по энергетическим спектрам ядер отдачи или по угловым корреляциям между электроном и ядром отдачи было единственным способом получения сведений о вариантах взаимодействия. Экспериментальные данные собраны в табл. 2.

Как видно из табл. 2, до мая 1957 г. общее мнение складывалось в пользу вариантов S и T . Комбинация (S, T) не оспаривалась и не подвергалась сомнению до опубликования в мае 1957 г. данных по Ag³⁵. Ныне из измерений отдачи делается обратное заключение и предпочтение отдается комбинации (V, A) (фиг. 1). Ошибки и неоправданные предположения, которые привели к неправильному выводу о варианте T из данных по He⁶, рассмотрены в докладе Ву и Шварцшильда [29].

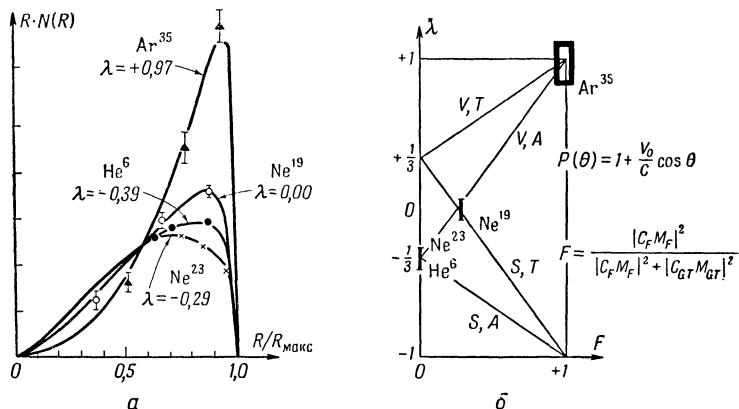
3) В измерениях отдачи было проявлено много настоячивости и остроумия. Результаты Шервина [30], полученные с твердым источником радиоактивного P³² методом времени полета, отчетливо показали, что потерянная энергия и потерянный импульс связаны соотношением $\Delta E = C \Delta p$

Таблица 2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О ВАРИАНТАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Материнское ядро	Метод	λ	Заклучение	Литература
<i>До открытия несохранения четности</i>				
He ⁶	Энергетический спектр ядер отдачи		T (не A)	[136]
n	То же	$+0,09 \pm 0,11$	} S и T или V и A	[137]
		$-0,21 \pm 0,08$		[138]
Ne ¹⁹	» »	$+0,14 \pm 0,2$		[139]
		$-0,15 \pm 0,2$		[140]
He ⁶	Угловая корреляция	$+0,34 \pm 0,12$	T (не A)	[141]
<i>После мая 1957 г.</i>				
Ar ³⁵	Энергетический спектр ядер отдачи	$+0,93 \pm 0,14$	V	[142]
Ne ¹⁹	То же		V и A или S и T	[143]
He ⁶	» »	$-0,39$	A	[144]
Li ⁸	» » и угловая корреляция		A (примесь T меньше 10%)	[145]
			В основном A	[146]

Кофуд-Хансен [31] предложил и выполнил серию экспериментов, в которых ток на пластины конденсатора измерялся как функция скрещенных электрического и магнитного полей. Подобные измерения позволяют определить одновременно средние импульсы электрона и ядра отдачи, а также найти распределение



Фиг. 1. Энергетический спектр ядер отдачи He^6 , Ar^{35} , Ne^{19} и Ne^{23} (а) и зависимость λ от $F = \frac{|C_F M_F|^2}{|C_F M_F|^2 + |C_{GT} M_{GT}|^2}$ (б).

ионов отдачи по зарядам. Последние достижения Снелла и Плизентона [32] в технике измерений отдачи позволяют достичь высокой точности при определении наиболее сложных зарядовых спектров ядер отдачи.

§ 5. НЕСОХРАНЕНИЕ ЧЕТНОСТИ В β -РАСПАДЕ

Теория β -распада является феноменологической теорией. Разрабатывая ее, мы надеемся расширить наши познания о природе нейтрино и вариантах β -взаимодействия. Недавнее открытие несохранения пространственной и зарядовой четности в β -распаде привело к большому прогрессу в теории нейтрино. Последовательное развитие изложено в последующих параграфах.

Если четность в β -распаде не сохраняется, то в гамильтониане H наряду с обычными скалярными членами появятся

псевдоскаляры. Тогда уравнение (6) принимает вид

$$H = \sum_i C_i (\bar{\psi}_p O_i \psi_N) (\bar{\psi}_e O_i \psi_\nu) + \\ + \sum_i C'_i (\bar{\psi}_p O_i \psi_N) (\bar{\psi}_e O_i \gamma_5 \psi_\nu) + \text{Эрмит. сопр.} \quad (15)$$

Постоянные связи C_i Ли и Янг [33] назвали сохраняющими четность, а постоянные C'_i — несохраняющими четность. Какой из членов C_i или C'_i сохраняет четность в действительности, зависит от относительной четности электрона и нейтрино. В классической теории β -распада обычно предполагается, что четности нейтрино и электрона одинаковы; тогда $C_i \neq 0$, $C'_i = 0$. Этот случай известен под названием «четной» связи. Если же нейтрино и электрон имеют обратные четности, то, согласно старой теории, $C_i = 0$, и $C'_i \neq 0$. Этот случай называется «нечетной» связью. Различить C_i и C'_i можно, лишь измерив спин нейтрино. Вычисляя точно так же, как выше распределения электронов по углам и энергиям для разрешенных переходов, мы увидим, что эти распределения по существу одинаковы и в случае сохранения и в случае несохранения четности. Действительно, выражение для любой скалярной величины в β -распаде с учетом несохранения четности можно получить из соответствующего выражения, найденного при условии сохранения четности, путем замены

$$|C_i|^2 \text{ на } (|C_i|^2 + |C'_i|^2)$$

и

$$C_i C_j^* \text{ на } (C_i C_j^* + C'_i C_j'^*).$$

В такого рода выражениях никогда не появляются интерференционные члены типа $C'_i C_i^*$. Именно по этой причине огромный экспериментальный материал, накопленный по β -распаду, β -форме спектров, факторам ft и угловым корреляциям $\beta\nu$ и $\beta\gamma$, не содержал никаких сведений по вопросу о сохранении четности в β -распаде. Когда теоретический анализ привел Ли и Янга к этому блестящему выводу, они предложили ряд критических экспериментов, целью которых было определение некоторых псевдоскаляров, составленных из измеренных на опыте величин. Пусть, например, измерены импульс p (полярный вектор) и спин σ (аксиальный вектор), тогда среднее значение псевдоскалярной величины CC' ($p \cdot \sigma$) может оказаться отличным от нуля.

Если в β -распаде σ есть спин ядра, а p — направление вылета электрона, то наличие не равного нулю псевдоскаляра $\langle p \cdot \sigma \rangle$ проявится в асимметрии¹⁾ углового распределения электронов, испущенных поляризованными ядрами.

§ 6. ЭКСПЕРИМЕНТ С ПОЛЯРИЗОВАННЫМ Co^{60}

Эксперимент с поляризованными ядрами [34] заключается по существу в следующем: спины β -излучающих ядер выстраиваются вдоль некоторой оси, и число электронов, испущенных по оси, сравнивается с числом электронов, испущенных в противоположную сторону. Однако ядерные магнитные моменты настолько малы ($\mu_n \approx 10^{-3}$ магнетона Бора), что для их выстраивания необходимы поля порядка 10^5 гс при $T \approx 0,01^\circ \text{ К}$. К счастью, сильные магнитные поля существуют вблизи от ядер парамагнитных атомов. Магнитные моменты таких атомов примерно в тысячу раз превышают магнитные моменты ядер. Эти парамагнитные атомы выстраиваются умеренно сильными полями (порядка сотен эрстед) и уже их огромные поля ориентируют ядерные моменты. Описанный метод ориентации ядер был предложен независимо Роузом и Гортером в 1948 г. Чтобы уменьшить тепловое движение, которое стремится нарушить упорядоченное состояние моментов, кристалл цериево-магниевого нитрата охлаждался методом адиабатического размагничивания до температуры на $0,01^\circ \text{ С}$ выше абсолютного нуля ($-273,17^\circ \text{ С}$). Для эксперимента был избран парамагнитный радиоактивный Co^{60} , распад которого обусловлен чистым взаимодействием Гамова — Теллера ($\Delta I = 5 - 4 = 1$, *нет*).

При изучении β -распада радиоактивных ядер в нашем случае приходится преодолевать две основные трудности. Во-первых, детектор электронов нужно поместить в криостат с температурой $\sim 1^\circ \text{ К}$, и, во-вторых, радиоактивные ядра должны находиться в тонком ($< 0,1 \text{ мм}$) слое на поверхности и должны быть поляризованы. Детектор представлял собой тонкий кристалл антрацена, расположенный в вакуумной камере примерно в 2 см над источником из Co^{60} . Через стеклянное окно и люцитовый светопровод длиной $1,22 \text{ мм}$ сцинтилляции передавались на фотоумножитель (6292), который находился над

¹⁾ Имеется в виду асимметрия по отношению к плоскости, перпендикулярной к направлению спина.

криостатом. Степень поляризации Co^{60} определялась по анизотропии его γ -излучения

$$E_{\gamma} = \frac{I(\pi/2) - I(0)}{I(\pi/2)}.$$

Эксперимент обнаружил большую асимметрию в вылете электронов. На фиг. 2 отложены зависимости значения анизотропии γ -излучения и асимметрии электронов от времени для двух противоположных направлений поляризующего поля. Время исчезновения β -асимметрии совпадает с временем исчезновения анизотропии γ -излучения. Коэффициент асимметрии оказался отрицательным, т. е. β -частицы испускались преимущественно в направлении, противоположном спину ядра. Это означает, что ядра Co^{60} кажутся вращающимися по часовой стрелке, если смотреть навстречу испускаемым электронам. Таким образом, левое отличается от правого и, следовательно, как показал этот эксперимент, четность не всегда сохраняется. Более того, асимметрия оказалась максимально возможной.

В угловом распределении электронов

$$I(\theta) = 1 + A \frac{\langle J_z \rangle}{J} \frac{v}{c} \cos \theta \quad (16)$$

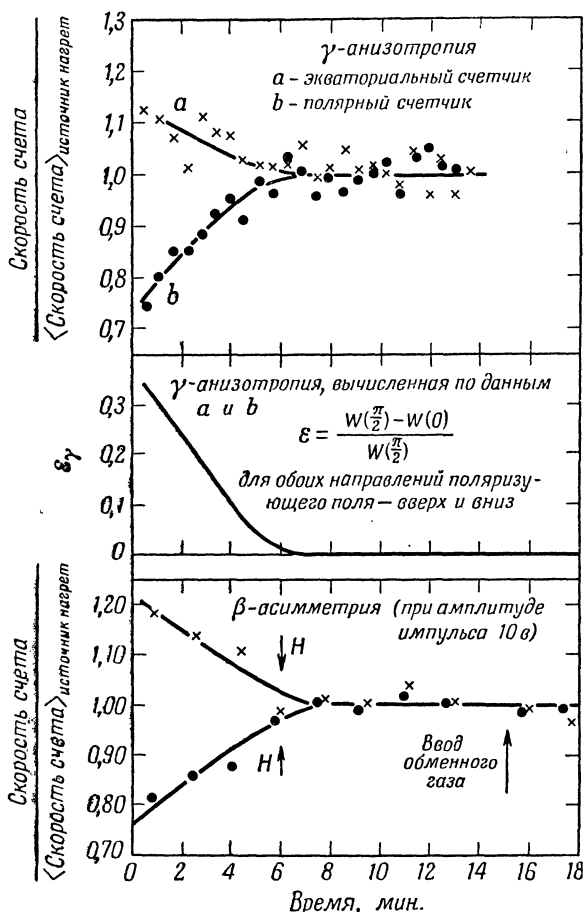
(где θ — угол между направлением вылета электрона и ядерным спином) параметр асимметрии A , согласно опытным данным, почти равен -1 . Отсюда следует, что интерференция между взаимодействиями, сохраняющими и несохраняющими четность, близка к максимальной. Таким образом, результаты первого эксперимента не сводились к открытию несохранения пространственной и зарядовой четности, а оказались даже более радикальными и значительными. Из найденного значения параметра асимметрии ($A \approx -1$) можно сделать ряд весьма важных выводов. Выпишем выражение для A в β -распаде Co^{60} , который принадлежит к чистым переходам типа Гамова — Теллера,

$$A = \left[\text{Re} (C_T^* C'_T - C_A^* C'_A) - \frac{Ze^2}{\hbar c p} \text{Im} (C_T^* C'_A + C_T'^* C_A) \right] \frac{2 |M_{GT}|^2}{\xi}, \quad (17)$$

где

$$\xi = (|C_T|^2 + |C_T'|^2 + |C_A|^2 + |C_A'|^2) |M_{GT}|^2.$$

Второй член с мнимыми величинами (мы предполагаем, что временная четность более или менее сохраняется) по всей вероятности очень мал. Более того, из классической теории β -распада



Ф и г. 2. Асимметрия β -излучения из поляризованного Co^{60} .

и из отсутствия фирцевского члена b/E_β следует, что в переходе Гамова — Теллера один из вариантов A или T доминирует. (Этот вывод не относится к двухкомпонентным нейтрино;

см. § 11.) Таким образом, из соотношения

$$A = \operatorname{Re} \frac{2(C_T^* C'_T - C_A^* C'_A)}{|C_T|^2 + |C'_T|^2 + |C_A|^2 + |C'_A|^2} \approx -1 \quad (18)$$

следует, что либо

$$C_A \approx C'_A, \text{ если доминирует } A\text{-взаимодействие,} \quad (19)$$

либо

$$C_T \approx -C'_T, \text{ если доминирует } T\text{-взаимодействие.} \quad (20)$$

Подставляя эти соотношения в гамильтониан, получаем для тензорного взаимодействия

$$H_T = C_T (\bar{\psi}_P O_T \psi_N) (\bar{\psi}_e O_T (1 - a\gamma_5) \psi_\nu) \quad (21)$$

или для аксиально-векторного взаимодействия

$$H_A = C_A (\bar{\psi}_P O_A \psi_N) (\bar{\psi}_e O_A (1 + a\gamma_5) \psi_\nu), \quad (22)$$

где a очень близко к единице. Таким образом, полный оператор нейтрино имеет вид в тензорном взаимодействии

$$(1 - a\gamma_5) \psi_\nu, \quad (23)$$

а в аксиально-векторном взаимодействии

$$(1 + a\gamma_5) \psi_\nu. \quad (24)$$

Хорошо известно, что операторы $(1 \mp \gamma_5)/2$ проецируют волновую функцию ψ_ν на состояния с заданной продольной поляризацией, причем

$$\left\{ \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \right\} \psi_\nu = \psi_\nu^R \text{ для правой поляризации} \quad (25)$$

и

$$\left\{ \frac{(1 + \gamma_5)}{2} \right\} \psi_\nu = \psi_\nu^L \text{ для левой поляризации.} \quad (26)$$

Это представляет особый интерес для частиц с массой покоя, равной нулю, поскольку в этом случае ψ_ν^R и ψ_ν^L можно выбрать

независимо¹⁾. Каждая из этих функций является собственной функцией гамильтониана, откуда следует, что такие частицы всегда полностью поляризованы в смысле правой или левой спиральности.

Из эксперимента с поляризованным Co^{60} вытекает, что коэффициент a в выражении для полного оператора нейтрино $(1 \mp a\gamma_5)\psi_\nu$ очень близок к единице. Это наводит на мысль, что нейтрино продольно поляризовано, т. е. вращается в определенном смысле относительно направления движения. Выбор выражения $(1 + \gamma_5)\psi_\nu$ в аксиально-векторном варианте означает, что спиральность нейтрино отрицательна (спин и импульс направлены в противоположные стороны); выбор $(1 - \gamma_5)\psi_\nu$ в тензорном варианте означает, что нейтрино является правовинтовым. Более того, оператор $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$, входящий в полный оператор нейтрино, можно записать в лептонном коварианте как проекционный оператор для электрона

$$\psi_e^\dagger \gamma_4 O_i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu = \psi_e^\dagger (1 + \gamma_5) \gamma_4 O_i \psi_\nu$$

(вывод дан в § 9). Таким образом, из первого эксперимента с поляризованным Co^{60} можно было сделать теоретический вывод о продольной поляризации β -частиц. Заметим в заключение, что обнаруженное в этом опыте максимальное отступление от закона сохранения четности указывало на возможность построения новой теории нейтрино.

§ 7. ТЕОРИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО НЕЙТРИНО ²⁾

Эта простая и убедительная теория была предложена независимо Ли и Янгом [35], Ландау и Саламом [36, 37]. В обыч-

¹⁾ Из уравнения Дирака (в системе единиц $\hbar \equiv c \equiv 1$) следует

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi = -m\psi, \quad \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \gamma_5 \psi = +m\gamma_5 \psi.$$

Введем функции

$$\psi^R = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \quad \text{и} \quad \psi^L = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi.$$

Тогда

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi^R + m\psi^L = 0, \quad \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi^L + m\psi^R = 0.$$

При $m=0$ функции ψ^R и ψ^L не связаны друг с другом.

²⁾ Теоретический вывод выражений для различных эффектов, связанных с несохранением четности, содержится в работах [43—48].

ной теории нейтрино у волновой функции четыре компонента — две для состояний с положительной энергией (которые называются нейтринными состояниями ν) с правой и левой поляризацией и две для состояний с отрицательной энергией (антинейтринные состояния $\bar{\nu}$) также с правой и левой поляризациями. Существование лишь двух полностью поляризованных состояний, одно из которых принадлежит нейтрино, а другое — антинейтрино, сводит число компонент к двум, отсюда и название теории. Согласно данным эксперимента, полный оператор нейтрино равен

$$(1 \mp \gamma_5) \psi_\nu, \quad (27)$$

где минус относится к тензорному варианту, а плюс — к аксиально-векторному. Используя хорошо известные соотношения

$$(1 - \gamma_5) = -(1 + \gamma_5) \gamma_5$$

и

$$(1 + \gamma_5) = + (1 + \gamma_5) \gamma_5, \quad (28)$$

нетрудно убедиться, что гамильтониан инвариантен относительно подстановки

$$\psi_\nu \rightarrow \gamma_5 \psi_\nu \quad \text{для } A\text{-взаимодействия} \quad (29)$$

и

$$\psi_\nu \rightarrow -\gamma_5 \psi_\nu \quad \text{для } T\text{-взаимодействия.} \quad (30)$$

Эта подстановка предполагает, что в уравнении Дирака для свободного нейтрино масса должна быть строго равна нулю. Действительно, произведем в уравнении Дирака

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_\nu \right) \psi_\nu = 0 \quad (31)$$

подстановку

$$\psi_\nu \rightarrow \gamma_5 \psi_\nu; \quad \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_\nu \right) \gamma_5 \psi_\nu = 0. \quad (32)$$

Умножим (31) на γ_5

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_\nu \right) \gamma_5 \psi_\nu = 0. \quad (33)$$

Знак второго члена меняется вследствие того, что γ_5 и γ_μ антикоммутируют. Следовательно, уравнение свободного нейтрино

и гамильтониана взаимодействия будут инварианты относительно подстановки $\psi_\nu \rightarrow \pm \gamma_5 \psi_\nu$ только в том случае, если масса нейтрино (m_ν) равна нулю.

Тот факт, что нейтрино может обладать определенной спиральностью лишь при массе, равной нулю, с точки зрения физической очевиден. Если бы нейтрино можно было приписать какую-либо массу, то в некоторой системе отсчета оно бы покоилось или даже меняло знак импульса. Ясно, что требование обязательной параллельности σ и p для такой частицы не имело бы смысла. Экспериментальные данные на сегодняшний день подтверждают, что масса нейтрино исчезающе мала ($< 1/2000 m_e$) (см. § 13).

В течение многих лет физиков-теоретиков занимала идея об инвариантности лишнего массы нейтрино относительно определенного градиентного преобразования $(1 \pm \gamma_5)\psi_\nu = 0$. К сожалению, это требование приводило к двухкомпонентной теории нейтрино и нарушению закона сохранения четности. В 1929 г. Вейль указал, что с математической точки зрения возможно существование двухкомпонентной релятивистской частицы со спином, равным $\frac{1}{2}$. Эта идея была отвергнута Паули [2], поскольку она приводила к нарушению закона сохранения четности¹⁾, и поэтому не могла осуществляться в действительности! Паули рассуждал следующим образом: напишем уравнение Дирака для нейтрино с массой, равной нулю ($m_\nu = 0$):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_\nu = i \alpha \nabla \psi_\nu. \quad (34)$$

Здесь α можно выразить через четырехрядные матрицы

¹⁾ Это справедливо только для некантованных полей. В первом варианте двухкомпонентной теории Вейля, предложенном еще до того, как Дирак создал свою теорию дырок, использовались некантованные поля Дирака. Замечание Паули о несохранении четности, высказанное в статье для *Handbuch der Physik* (1933 г.), относилось именно к этому варианту и поэтому было справедливым. Позже, в 1937 г. Майорана предложил свою теорию двухкомпонентного нейтрино, основанную на использовании кантованных полей, которая исходила из тождественного совпадения нейтрино и антинейтрино: $\nu \equiv \bar{\nu}$. В этом случае двухкомпонентность свободной частицы не приводит к нарушению закона сохранения четности. Причина несохранения четности кроется в самом взаимодействии и только в нем. Вопросы выбора между двумя вариантами (т. е. вариантом Вейля [2], Ландау [36], Ли и Янга [35] и Салама [37], с одной стороны, и вариантом Майорана [38], с другой) подробно рассматривались рядом авторов [39—42]. (Автор благодарит Фирца за полезные дискуссии по этим вопросам.)

Паули σ_i : $\alpha = -\gamma_5 \sigma = -\sigma \gamma_5$. Тогда

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_v = \frac{-1}{i} \sigma \nabla \gamma_5 \psi_v. \quad (35)$$

При массе, равной нулю, можно произвести подстановку

$$\psi_v = \pm \gamma_5 \psi_v$$

и прийти, таким образом, к уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_v = \mp i \sigma \nabla \psi_v \quad (36)$$

(минус соответствует подстановке $\psi_v = \gamma_5 \bar{\psi}_v$, а плюс — подстановке $\psi_v = -\gamma_5 \bar{\psi}_v$). Отсюда мы получаем после преобразования Фурье

$$H \psi_v = \mp (\sigma p) \psi_v, \quad (37)$$

где H — гамильтониан, или

$$E = \mp (\sigma \cdot p) = \mp |p| \sigma p \quad (38)$$

(E — собственное значение H). Знак определяется проекцией спина на вектор импульса. Можно ввести также спиральность,

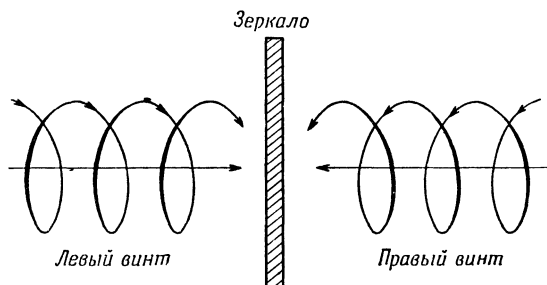
$$\text{Спиральность} = \frac{\sigma \cdot p}{|p|}, \quad (39)$$

т. е. $+1$ для правовинтовой частицы и -1 для левовинтовой. Физически уравнение (38) означает, что при заданном импульсе частица может находиться в двух состояниях, различающихся знаком энергии. Эти состояния соответствуют двум противоположным ориентациям спина — по импульсу или против него, и ведут себя подобно правому и левому винтам. Если принять, что осуществляется аксиально-векторный вариант, то, согласно эксперименту с Co^{60} , $\psi_v = \gamma_5 \bar{\psi}_v$. Тогда из соотношения $E = -(\sigma \cdot p)$ следует, что в состоянии с положительной энергией, описывающем нейтрино, спин σ и импульс p будут антипараллельны (левый винт), тогда как состояние с отрицательной энергией, относящееся к антинейтрино, является правовинтовым. Согласно «дырочной» интерпретации, антинейтрино есть дырка в фоне таких правовинтовых нейтрино в состояниях с отрицательной энергией. Дырка (антинейтрино) должна обладать противоположно направленными импульсом и спином, и потому в аксиально-векторном взаимодействии дырка является правовинтовой. В тензорном взаимодействии спиральности

нейтрино и антинейтрино будут обратны только что указанным для аксиально-векторного взаимодействия, поскольку в этом случае нужно использовать знак плюс в уравнении (38).

Таким образом, лишенное массы нейтрино описывается двухкомпонентной волновой функцией, и, как показывают результаты измерений, спиральность нейтрино отрицательна, если взаимодействие Гамова — Теллера определяется аксиально-векторным вариантом, и положительна для тензорного варианта.

В теории двухкомпонентного нейтрино не сохраняются ни пространственная, ни зарядовая четности. При отражении



Фиг. 3. Изменение смысла винтовой нарезки при зеркальном отражении.

левовинтового нейтрино в зеркале получается изображение правовинтового нейтрино (фиг. 3). Но, согласно двухкомпонентной теории, такое состояние невозможно для нейтрино.

Зарядовое сопряжение переводит левовинтовое нейтрино в левовинтовое антинейтрино. Но для антинейтрино единственным возможным состоянием является правовинтовое. Таким образом, состояние зарядово-сопряженное к нейтринному недопустимо. Это очевидное нарушение зарядовой инвариантности теории. Окончательно, двухкомпонентное нейтрино нарушает P и C по-отдельности.

До 1956 г. все физики считали, что четность сохраняется в любых взаимодействиях. Но в 1956 г. эксперты встали в тупик перед проблемой K -мезонного распада. После того, как Ли и Янг в конце 1956 г. поставили вопрос о четности, Ландау и Салам независимо рассмотрели возможные следствия существования двухкомпонентного нейтрино. Ландау в своей работе особенно подчеркивал возможность более широкой симметрии

относительно комбинированного отражения CP^1), т. е. симметрии относительно комбинированной операции зарядового сопряжения и пространственной инверсии. Операция CP превращает частицу в античастицу и изменяет знак спиральности. Таким образом, возможное состояние переходит снова в возможное и PC -инвариантность не нарушается. Применительно к β -распаду CP -инвариантность означает, что угловое распределение в β^+ -распаде анти- Co^{60} должно быть в точности противоположно угловому распределению в распаде Co^{60} .

Вплоть до лета 1957 г. Паули весьма скептически относился к теории двухкомпонентного нейтрино. Однако в конце осени 1957 г., после того как были собраны новые экспериментальные данные, говорившие в пользу этой теории, и после того как двухкомпонентная формулировка была обобщена на все слабые взаимодействия, Паули отказался от своих возражений против теории двухкомпонентного нейтрино.

§ 8. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЛЕПТОНОВ

Ядерный β -распад можно представить следующим образом:

$$p + e^- \longleftrightarrow n + \nu.$$

В этой схеме один лептон поглощается, а один создается. Иными словами, при надлежащем определении частиц и античастиц полное число лептонов в процессах распада всегда сохраняется. Это побудило Конопинского и Махмуда [49] предложить закон сохранения лептонов, чтобы объяснить, почему не наблюдаются некоторые процессы распада. Если каждой частице приписать некое лептонное число, то, согласно предложенному закону, сумма лептонных чисел во всех реакциях должна сохраняться. Лептонные числа обычно приписываются следующим образом:

$$l = +1 \text{ для (частиц) } e^-, \mu^-, \nu$$

$$l = -1 \text{ для (античастиц) } e^+, \mu^+, \bar{\nu}$$

$$l = 0 \text{ для } \pi, \gamma, K \text{ и всех тяжелых частиц.}$$

¹⁾ В работе, представленной Янгом на международный конгресс по теоретической физики, состоявшийся в Вашингтонском университете 17—21 сентября 1956 г., уже содержалось замечание, что имеет место симметрия относительно перехода из одной системы координат в другую с одновременным переходом к антимиру (т. е. с заменой π^+ на π^- , протонов на антипротоны и т. д.).

Закон сохранения лептонов позволяет предсказать для каждого лептонного распада тип испускаемых нейтрино:

$$\begin{aligned}
 n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}, & p &\rightarrow n + e^+ + \nu, \\
 \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu, & \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}, \\
 \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}, & \mu^- &\rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}, \\
 \mu^- + p &\rightarrow n + \nu, & \mu^+ + n &\rightarrow p + \bar{\nu}, \\
 K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu, & K^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}, \\
 \pi^+ &\rightarrow e^+ + \nu, & \pi^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Экспериментальное подтверждение указанных значений лептонных чисел явилось бы важным свидетельством в пользу закона сохранения лептонов. В частности, если спиральности нейтрино и антинейтрино противоположны, то предсказания процессов распада (40) становятся однозначными. Эксперимент подтверждает почти все эти предсказания.

Справедливо, конечно, что при наиболее общем подходе к теории β -распада не следует вводить ни закона сохранения лептонов, ни двухкомпонентности нейтрино. Этот вопрос обсуждался очень подробно Паули [50] и другими [51, 52] в 1957 г. Паули очень осторожно относился к столь фундаментальному закону как закон сохранения лептонов. Однако он неоднократно доказывал, что верит в него. В общем случае гамилтониан имеет вид

$$\begin{aligned}
 H = g \sum_i (\bar{\psi}_p O_i \psi_N) \{ \bar{\psi}_e O_i [(C_i + C'_i \gamma_5) \psi_\nu + \\
 + (D_i + D'_i \gamma_5) \psi_\nu^C] \} + \text{Эрмит. сопр.}, \tag{41}
 \end{aligned}$$

где функция ψ_ν^C — зарядово сопряжена к ψ_ν , а D_i, D'_i — постоянные связи для зарядово-сопряженного члена. В простом β -распаде несохранение лептонов приводит только к замене $C_i^* C'_i$ на $(C_i^* C'_i + D_i^* D'_i)$ и никакие опыты не могут различать эти возможности. Даже отрицательный результат опытов по двойному β -распаду без испускания нейтрино и опытов Дэвиса по захвату нейтрино объясняется только спиральностью нейтрино без привлечения закона сохранения лептонов (см. § 15). Сохранение числа лептонов изменило бы сечение поглощения нейтрино протонами (эксперимент Рейнса и Коуэна) не более, чем на 18%, что находится сейчас за пределами

достижимой на опыте точности. Ниже будет предполагаться, что число лептонов сохраняется и данные эксперимента подтвердят фундаментальный характер этого закона.

§ 9. ПРОДОЛЬНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ β -ЧАСТИЦ¹⁾

Поскольку четность не сохраняется, среднее значение псевдоскаляра ($\sigma \cdot p_e$), образованного из измеренных величин спина и импульса, может оказаться не равным нулю. Другими словами, электроны, вылетающие из неполяризованных ядер, могут быть продольно поляризованы. Результаты измерений продольной поляризации сколь просты, столь и удивительны. Вывод, относительно которого существует общее согласие, сводится к утверждению, что испускаемые в радиоактивном распаде β^- -частицы обладают отрицательной спиральностью (σ и p антипараллельны), а β^+ -частицы — положительной спиральностью (σ и p — параллельны). При релятивистских энергиях ($v/c \approx 1$) пучки электронов и позитронов практически полностью поляризованы. Эти результаты также согласуются с предсказаниями теории двухкомпонентного нейтрино. Действительно, в выражении

$$(\bar{\psi}_p O_i \psi_N) [\bar{\psi}_e O_i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu] + \text{Эрмит сопр.} \quad (42)$$

можно вместо $\bar{\psi}_e$ подставить $\psi_e^\dagger \gamma_4$

$$\psi_e^\dagger \gamma_4 O_i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu \quad (43)$$

(плюс для вариантов V , A и минус — для S , T , P). Выбор знаков для вариантов V и S в этом выводе является дополнительным предположением, поскольку мы не можем сослаться здесь на эксперименты с поляризованными ядрами. С другой стороны, измерения спиральности электронов позволят получить информацию о связи спиральности нейтрино с β -взаимодействием. Однако

$$\gamma_4 \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_4$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_5 O_i &= -O_i \gamma_5 \quad \text{для } O_i \text{ из вариантов } V, A \\ \gamma_5 O_i &= O_i \gamma_5 \quad \text{для } O_i \text{ из вариантов } S, T, P. \end{aligned}$$

¹⁾ См [52—55]. Вопросам поляризации электронов и γ -лучей посвящены хорошие обзоры [56, 57].

Следовательно,

$$\psi_e^\dagger \gamma_4 O_i (1 \pm \gamma_5) \psi_e = \psi_e^\dagger (1 + \gamma_5) \gamma_4 O_i \psi_e. \quad (44)$$

Заметим, что во всех пяти вариантах появляется один и тот же множитель $(1 + \gamma_5)$, коль скоро сделан соответствующий выбор в (43). Напишем выражение, эрмитово-сопряженное к (43),

$$\psi_e^\dagger O_i \gamma_4 (1 + \gamma_5) \psi_e. \quad (45)$$

При релятивистских энергиях $cp \gg m_0 c^2$, влияние массы электрона по существу незначительно. Мы уже показали, что при массе, равной нулю, $1/2(1 + \gamma_5)$ является проекционным оператором на расстояние с продольной левой поляризацией. Таким образом, во всех пяти вариантах возникают левовинтовые электроны. Если $(v/c)_e < 1$, то предположение $m_e = 0$ больше не пригодно. В этом случае правая и левая компоненты электронной волновой функции связаны друг с другом. Иными словами, $(1 + \gamma_5)\psi_e$ уже не является собственной функцией гамильтониана. Неприменим, очевидно, также и сделанный выше вывод, основанный на равенстве $m_e = 0$. Физически вполне ясно, что при скорости электрона, равной нулю, его поляризация также обращается в нуль, поскольку в этом случае нет выделенного направления импульса, с которым можно было бы связать спин.

Используя обычный метод проектирования конечных состояний электрона на собственные состояния $\sigma_e \cdot \mathbf{p}$ и вычисляя различные следы, можно получить простое выражение для поляризации β^\mp -частиц:

$$\text{Поляризация} = \langle \sigma_e \cdot \mathbf{p} \rangle = -\frac{v}{c} \frac{E}{|E|}.$$

Общее выражение для поляризации для комбинации всех вариантов таково:

$$\begin{aligned} (\text{Поляризация})_{\beta^\mp} = & \pm \frac{v}{c} 2 \operatorname{Re} [(C_S C_S'^\star - C_V C_V'^\star) M_F^2 + \\ & (C_T C_T'^\star - C_A C_A'^\star) |M_{GT}|^2] [(|C_S|^2 + |C_V|^2 + |C_S'|^2 + |C_V'|^2) |M_F|^2 + \\ & + (|C_T|^2 + |C_A|^2 + |C_A'|^2 + |C_T'|^2) |M_{GT}|^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (46)$$

Если мы положим $C_S = -C_S'$, $C_T = -C_T'$ (левовинтовое анти-нейтрино) или $C_V = C_V'$, $C_A = C_A'$ (правовинтовое антинейтрино), то

$$(\text{Поляризация})_{\beta^\mp} = \mp \frac{v}{c}. \quad (47)$$

Первыми обнаружили продольную поляризацию в β -распаде Фрауенфельдер и его сотрудники [59]. Они использовали Co^{60} в качестве источника и получили $P \approx -\frac{v}{c}$, что хорошо согласуется с данными по спиральности нейтрино, полученными из эксперимента с поляризованным Co^{60} . Последующие измерения поляризации в чисто фермиевских переходах (Cl^{34} , Ga^{66} [66]) и в переходах смешанного типа (N^{13} , Au^{198} [53—55]) подтверждают сформулированное выше заключение о спиральности нейтрино (левовинтовое нейтрино в вариантах V и A ,

$$\psi_v = \gamma_5 \psi_v$$

и правовинтовое — в вариантах S и T ,

$$\psi_v = -\gamma_5 \psi_v).$$

В настоящее время используются три основных метода [53—55] определения поляризации электронов: 1) по кулонову рассеянию на тяжелых ядрах (моттовское рассеяние) [58—63]; 2) по круговой поляризации тормозного излучения вперед или аннигиляционного излучения [63—67]; 3) по рассеянию свободных электронов (мёллеровское рассеяние) [68—73]. Работая в последние десятилетия с пучками поляризованных β -частиц, физики были настолько убеждены в существовании левоправой асимметрии, что даже не пытались обнаружить ее на опыте¹⁾. Поляризационные эксперименты трудны и требуют затраты большого количества времени. Имеется много источников систематических ошибок (рассеяние назад, деполяризация, аппаратная асимметрия, поправки на экранирование и т. д.), которые с трудом поддаются оценке. По-видимому, корректным будет утверждение, что в области больших энергий $v/c \geq 0,6$ поляризация равна примерно v/c с точностью, не превышающей 10%. В области $v/c < 0,6$ результатов очень мало и дальнейшие эксперименты представляются в высшей степени желательными.

¹⁾ Любопытно сопоставить следующие утверждения в книге Мотта и Месся [75]: «Результаты последних экспериментов по рассеянию быстрых электронов, источником которых были катодные лучи, хорошо согласуются с предсказаниями теории». И на следующей странице: «Экспериментальные данные, полученные с различными источниками β -лучей, плохо согласуются между собой; можно думать, что расхождения в значительной мере исчезнут, когда естественные источники радиоактивности будут заменены искусственными источниками с контролируемой энергией испускаемых частиц». См. также [74, 76].

§ 10. КОРРЕЛЯЦИЯ $\beta - \gamma$ (КРУГОВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ)¹⁾

Из измерений асимметрии β -излучения поляризованных ядер следует, что после β -распада ядро должно оставаться частично поляризованным в направлении вылета β -частицы. Если непосредственно после β -распада ядро испускает γ -квант, то последний должен обладать круговой поляризацией, пропорциональной косинусу угла между β -частицей и γ -квантом. Корреляция для наиболее часто встречающейся последовательности распадов

$$J \xrightarrow[\beta]{\text{Разрешенный } \beta\text{-переход}} J' \xrightarrow[\gamma]{2^L\text{-польное } \gamma\text{-излучение}} J''$$

выражается формулой

$$W(\theta) = 1 + \tau A \frac{v}{c} \cos \theta, \quad (48)$$

где τ — правая круговая поляризация, или

$$P(\theta) = A \frac{v}{c} \cos \theta,$$

где τ — левая круговая поляризация, взятая с обратным знаком, и

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{L+1} \left\{ \mu_{JJ'} \left[\pm \operatorname{Re} (C_T^* C'_T - C_A^* C'_A) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{Ze^2}{\hbar c p} \operatorname{Im} (C_T^* C'_A + C_T'^* C_A) \right] |M_{GT}|^2 + \right. \\ \left. + \delta_{JJ'} \left(\frac{J+1}{J} \right)^{1/2} \left[\operatorname{Re} (C_T^* C'_S + C_T'^* C_S - C_A^* C'_V - C_A'^* C_V) \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \frac{Ze^2}{\hbar c p} \operatorname{Im} (C_A^* C'_S + C_A'^* C_S - C_T^* C'_V - C_T'^* C_V) \right] \times \right. \\ \left. \times |M_F| |M_{GT}| \right\} \frac{2}{\xi (1 + bc^2 m/W)}; \quad (49) \end{aligned}$$

$$\mu_{JJ'} = \begin{cases} 1 & J \rightarrow J' = J - 1 \\ -\frac{1}{J} & J \rightarrow J' = J \\ -\frac{J+2}{J+1} & J \rightarrow J' = J + 1 \end{cases}$$

¹⁾ См. [53—55].

Этим методом можно получить информацию такого же характера, как и по асимметрии β -излучения поляризованных ядер; измерения здесь выполнить легче, но сам метод менее чувствителен. С другой стороны, поскольку современная техника ориентации ядер применима лишь в ограниченном числе случаев, удастся заполяризовать очень немногие β -излучатели. Поэтому метод корреляции между направлением вылета электрона и круговой поляризацией γ -кванта оказался очень полезным. Основным результатом, достигнутым этим методом, было выяснение роли интерференционного члена

$$\operatorname{Re}(C_T^* C_S' + C_T'^* C_S - C_A^* C_V' - C_A'^* C_V) |M_{GT}| |M_F| \quad (50)$$

между взаимодействиями Ферми и Гамова — Теллера. Оказалось, что интерференция существует и близка к максимальной. Отсюда следуют два важных вывода: во-первых, основной комбинацией может быть либо (V, A) , либо (S, T) , но не (V, T) или (S, A) , и, во-вторых, инвариантность относительно обращения времени выполняется или по крайней мере нарушается слабо. Круговую поляризацию γ -квантов можно анализировать при помощи цилиндрического электромагнита, намагниченного до насыщения по направлению вылета γ -квантов или в противоположном направлении.

Этот метод анализа основан на зависимости комптоновского сечения для поляризованного по кругу света от ориентации спинов [77].

Шоппер [81] первым использовал метод корреляции β — γ (круговая поляризация) на Co^{60} и получил $A \approx 1/3$. Это прекрасно согласуется с результатом опыта с поляризованным Co^{60} : либо $C_T = -C_T'$, либо $C_A = C_A'$. Когда этот метод был применен к Na^{22} , переход в котором чисто гамов-теллеровский ($3^+ \rightarrow 2^+$), то знак круговой поляризации оказался противоположным знаку в электронно-активном Co^{60} в соответствии с теоретическими предсказаниями. Бозм и другие [82—85] провели ряд красивых опытов, посвященных изучению корреляции β — γ (круговая поляризация) в смешанных переходах Гамова, Теллера и Ферми на ядрах Sc^{46} , Au^{198} и др. Интерференция между переходами типа Гамова — Теллера и типа Ферми оказалась близкой к максимальной, что свидетельствует об отсутствии комбинаций (VT) или (SA) . Однако ни в одном из этих экспериментов точность не превосходила заметно 20% измеряемой величины.

§ 11. СВЯЗЬ МЕЖДУ СПИРАЛЬНОСТЬЮ ЛЕПТОНОВ И β -ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В предыдущих параграфах мы нашли соотношения между спиральностью лептонов и вариантами β -взаимодействия. Эти соотношения проиллюстрированы на фиг. 4.

β^- -распад: $n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}$		β^+ -распад: $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu$	
Переход $G-T$ $\Delta I = 1$	Переход Ферми $I(0) \rightarrow I(0)$	Переход $G-T$ $\Delta I = 1$	Переход Ферми $I(0) \rightarrow I(0)$
$T: 1 + \frac{1}{3} \frac{v}{c} \cos(\beta^-, \bar{\nu})$	$V: 1 + \frac{v}{c} \cos(\beta^-, \bar{\nu})$	$T: 1 + \frac{1}{3} \frac{v}{c} \cos(\beta^+, \nu)$	$V: 1 + \frac{v}{c} \cos(\beta^+, \nu)$
$A: 1 - \frac{1}{3} \frac{v}{c} \cos(\beta^-, \bar{\nu})$	$S: 1 - \frac{v}{c} \cos(\beta^-, \bar{\nu})$	$A: 1 - \frac{1}{3} \frac{v}{c} \cos(\beta^+, \nu)$	$S: 1 - \frac{v}{c} \cos(\beta^+, \nu)$

Фиг. 4. Связь между спиральностью нейтрино и вариантами β -взаимодействия.

В разрешенных переходах типа Гамова — Теллера лептоны уносят момент количества движения, равный единице. В тензорном β -взаимодействии оба лептона испускаются преимущественно в одном направлении. Поскольку электрон, как показывает опыт, обладает отрицательной спиральностью (левый винт), антинейтрино должно иметь такую же спиральность. С другой стороны, в аксиально-векторном взаимодействии электрон и антинейтрино испускаются в основном в противоположных направлениях, и потому антинейтрино предписывается положительная спиральность, а нейтрино — отрицательная. Спиральность нейтрино, обнаруженная в Eu^{152*} (см. § 12), заведомо отрицательна, и это заставляет предпочесть аксиально-векторный вариант. Аналогичным образом нетрудно найти спиральности антинейтрино в скалярном и векторном вариантах.

Мы приходим, таким образом, к двум важным выводам. Во-первых, неоднократно упоминавшийся фирцевский интерференционный член, пропорциональный для интерференции между S и V выражению $(C_S C_V^* + C_S^* C_V)$ и для интерферен-

ции между A и T выражению $(C_T C_A^* + C_T' C_A'^*)$, должен автоматически обращаться в нуль, поскольку спиральность нейтрино (или антинейтрино) в вариантах S и T противоположна спиральности в вариантах V и A ; следовательно, интерференция между этими парами взаимодействий невозможна. Во-вторых, по той же причине комбинации (V, T) и (S, A) не дают вклада в интерференцию между переходами типа Гамова — Теллера и типа Ферми. Обнаружение на опыте максимально возможной интерференции между этими переходами для нейтрона, Sc^{46} и Au^{198} исключает комбинации только из V и T или только из S и A .

§ 12. УСТАНОВЛЕНИЕ ВИДА β -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЭФФЕКТОВ, СВЯЗАННЫХ С НЕСОХРАНЕНИЕМ ЧЕТНОСТИ

Из первого опыта с поляризованным Co^{60} , результаты которого указывают на возможную двухкомпонентность нейтрино, следует, что спиральность антинейтрино положительна в аксиально-векторном варианте и отрицательна в тензорном. Полученные впоследствии данные по поляризации электронов полностью согласуются с этим заключением. Поэтому определение спиральности нейтрино приобретает решающую роль в установлении вариантов β -взаимодействия.

А. Процесс электронного захвата в Eu^{152} — спиральность нейтрино*

Образовавшиеся в результате электронного захвата нейтрино и ядро движутся в противоположные стороны

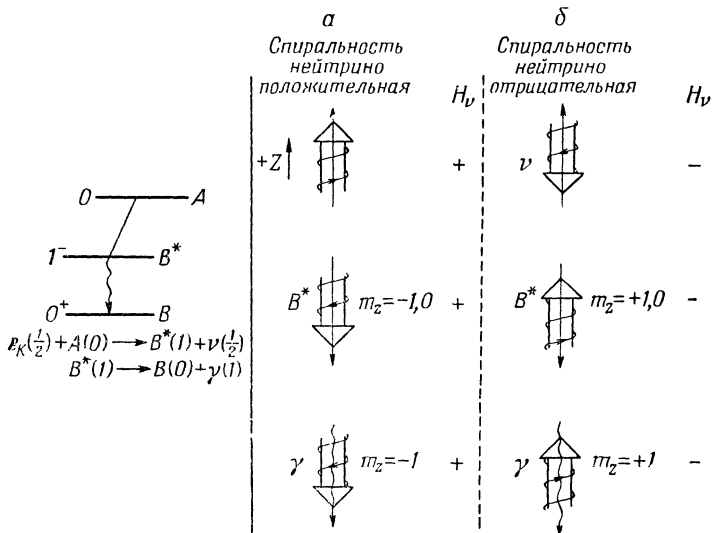
$$e^- + p \rightarrow n + \nu.$$

Если за захватом следует испускание γ -кванта, причем спин и четность меняются согласно схеме

$$A(0^-) \xrightarrow{e^-\text{-захват}} B^*(1^-) \xrightarrow{\gamma\text{-квант}} B(0^+),$$

то из законов сохранения импульса и момента количества движения следует, что спиральность вылетающего вниз γ -кванта совпадает со спиральностью летящего вверх нейтрино (фиг. 5). Таким образом, проблема измерения спиральности нейтрино сводится к измерению круговой поляризации γ -кванта. Однако

из вылетающих вниз γ -квантов нужно отобрать те γ -кванты, которые сопутствуют испущенным вверх нейтрино, и поэтому следует детектировать лишь резонансно рассеивающиеся кванты. Кроме того, энергия γ -квантов должна быть сравнима



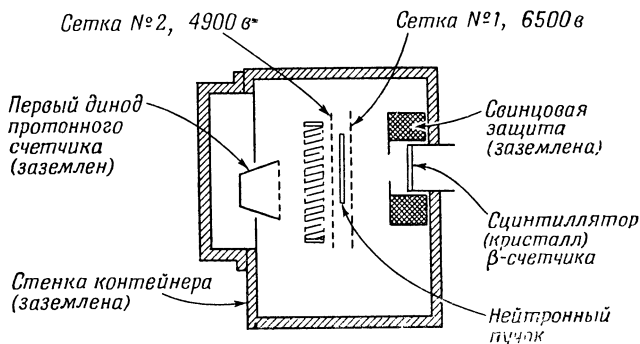
Фиг. 5. Спиральности ядра отдачи и γ -кванта, сопутствующего K -захвату.

с энергией нейтрино, и время жизни возбужденного состояния B^* должно быть очень коротким ($\sim 10^{-14}$ сек), иначе нельзя использовать твердый источник.

Ограничения, конечно, очень жесткие, но радиоизотоп Eu^{152*} , кажется, послан самым небом, чтобы сослужить эту службу. Гольдгабер, Гродзинс и Суньяр [86] сталкивались с этим изотопом в своих прежних работах и знали, что в нем осуществляется редкий переход $E1$ и что он удовлетворяет всем перечисленным требованиям. Измерив круговую поляризацию γ -квантов, испущенных ядрами Eu^{152*} вниз и резонансно рассеявшихся на Sm , они обнаружили, что спиральность γ -кванта отрицательна ($H = -0,67 \pm 0,10$)! Отсюда следует, что спиральность нейтрино в электронном захвате отрицательна и значит в β -взаимодействии при захвате электрона главную роль играет не тензорный, а аксиально-векторный вариант.

Б. β -распад поляризованных нейтронов¹⁾

Используя пучок поляризованных нейтронов (со степенью поляризации 87%), Бэрджи и его сотрудники сумели измерить угловое распределение электронов распада относительно $\underline{\text{спина}}$



Фиг. 6. Схема детектора в опыте по измерению углового распределения антинейтрино относительно спина нейтрона.

нейтрона и распределение антинейтрино по отношению к спину нейтрона. Схема использовавшегося детектора приведена на фиг. 6. Полученные результаты можно представить следующим образом:

$$W(\theta_{\sigma_n \cdot p_e}) = 1 - (0,11 \pm 0,02) \cos \theta_{\sigma_n \cdot p_e},$$

$$W(\theta_{\sigma_n \cdot p_\nu}) = 1 + (0,88 \pm 0,15) \cos \theta_{\sigma_n \cdot p_\nu},$$

где $-(0,11 \pm 0,02)$ — значение параметра асимметрии A , $+(0,88 \pm 0,15)$ — значение параметра асимметрии B . Эти результаты не только подтверждают отсутствие зеркальной симметрии при распаде нейтрона, но количественный анализ показывает, что найденные значения A и B согласуются однозначно с теоретическим предсказанием комбинации вариантов V и A .

При ретроспективном взгляде на историю β -распада мы увидим, как много в ней было удивительных, поражающих воображение событий. Сегодня, после почти шестидесяти лет непрерывных исследований, на первый план выходит несохранение четности. Слившись с классической теорией β -распада,

¹⁾ См. [87, 53—55].

несохранение четности позволяет прийти к определенным выводам о вариантах β -взаимодействия. В этом вопросе, однако, мы должны соблюдать осторожность — пока нельзя исключить малой примеси вариантов S и T . Дальнейшее выяснение этого вопроса представляется весьма желательным.

§ 13. МАССА НЕЙТРИНО

Все экспериментальные данные указывают на то, что масса покоя нейтрино должна быть очень малой. Поэтому вполне допустимо при построении графиков Кюри полагать массу покоя нейтрино равной нулю.

В действительности точная форма разрешенного β -спектра вблизи от его верхней границы зависит от массы покоя нейтрино. Если масса покоя нейтрино отлична от нуля и равна m_ν , то распределение электронов по энергиям имеет вид

$$P_0(E) dE_\beta \sim \varrho(E_\beta) \left[1 + \frac{\alpha m_\nu/m_0}{E_\beta(E_{\text{макс.}} - E_\beta + m_\nu/m_0)} \right] dE_\beta, \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} \varrho(E_\beta) = P_\beta E_\beta \left(E_{\text{макс.}} - E_\beta + \frac{m_\nu}{m_0} \right) \times \\ \times \left[\left(E_{\text{макс.}} - E_\beta + \frac{m_\nu}{m_0} \right)^2 - \frac{m_\nu^2}{m_0^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

($\alpha = -1$, если четности волновых функций электрона и нейтрино совпадают, и $\alpha = +1$, если эти четности противоположны).

Релятивистский член, содержащий α , возникает в результате суммирования по спинам испущенных частиц [88]. Параметр α может меняться в пределах от -1 до $+1$ и его значение определяется, во-первых, комбинацией вариантов β -взаимодействия и, во-вторых, относительной четностью нейтрино и e^- . Поскольку значение α раньше не было известно, верхний предел для m_ν можно было установить только как функцию от α . Например, измерения β -спектра H^3 , выполненные Гамильтоном, Олфордом и Гроссом [89] на электростатическом сферическом интегральном спектрографе с разрешением по энергии, достигавшим 0,7%, позволили установить, что при $\alpha = -1$ значение m_ν не превышает 500 эв, а при $\alpha = +1$ оно не превышает 150 эв. Согласно измерениям спектра H^3 , проведенным Лангером и Моффатом [90], верхний предел составляет соответственно 700 и 150 эв.

Мы убедимся сейчас, что несохранение четности в β -распаде дает возможность устранить эту неоднозначность. Величина α зависит от констант β -распада C_i и C'_i [51, 91] следующим образом:

$$\alpha = \frac{|M_F|^2 (-|C_V|^2 + |C'_V|^2) + |M_{GT}|^2 (-|C_A|^2 + |C'_A|^2)}{|M_F|^2 (|C_V|^2 |C'_V|^2) + |M_{GT}|^2 (|C_A|^2 |C'_A|^2)}. \quad (52)$$

Как показывают измерения эффектов, связанных с несохранением четности, $C_A = C'_A$, $C_V = C'_V$ и, по-видимому, $C_S = C'_S = C_T = C'_T = 0$, откуда мы получаем $\alpha = 0$. Верхний предел для значений m_ν , таким образом, оказывается равным 200 эв, или $1/5000 M_{эв}$, результатам измерений не противоречит также предположение, что $m_\nu = 0$.

§ 14. НЕЙТРИНО И АНТИНЕЙТРИНО

Классическую теорию нейтрино можно сформулировать аналогично теории электронов, вводя состояния с отрицательной энергией и предполагая, что почти все они заняты. Дырки или вакантные состояния с отрицательной энергией нейтрино называются антинейтрино. Однако нейтрино нельзя отличить от антинейтрино по знаку электрического заряда. Остается возможное отличие в знаке магнитного момента. Если нейтрино и антинейтрино обладают противоположными по знаку магнитными моментами, то они различимы и называются дираковскими нейтрино.

По последним данным [92] магнитный момент нейтрино не превышает 10^{-7} магнетона Бора. Если нейтральная частица не имеет магнитного момента, то, согласно классической теории нейтрино, не существует решений уравнения Дирака, соответствующих античастице. Тогда нейтрино и антинейтрино неразличимы и носят название майорановских нейтрино [36].

Различие между майорановскими и дираковскими нейтрино не сказывается на энергетических и угловых распределениях простого β -распада, поэтому все экспериментальные данные, перечисленные выше, не позволяют судить о типе нейтрино. К счастью, существует несколько экспериментов, результаты которых проливают некоторый свет на этот вопрос. Мы имеем в виду двойной β -распад и реакции захвата нейтрино.

§ 15. ДВОЙНОЙ β -РАСПАД¹⁾

Рассмотрим изобарический триплет (N, Z) , $(N \pm 1, Z \mp 1)$, $(N \pm 2, Z \mp 2)$, в котором масса промежуточного изобара превышает массу двух других. Такая ситуация может возникнуть лишь при условии, что изобар с нечетными значениями N и Z лежит между двумя изобарами с четными значениями N и Z , например между ${}_{20}\text{Ca}_{28}^{48}$ и ${}_{22}\text{Ti}_{26}^{48}$, между ${}_{60}\text{Nd}_{90}^{150}$ и ${}_{62}\text{Sm}_{88}^{150}$ и т. д. Переход одного из этих ядер в другое через промежуточный изобар энергетически запрещен. Однако ядро (N, Z) может перейти в $(N \pm 2, Z \mp 2)$ посредством двойного β -распада. Согласно дираковской теории нейтрино, в таком процессе должны быть испущены четыре частицы — два нейтрино (или антинейтрино) и два позитрона (или электрона). Энергетический спектр электронов (или позитронов) при этом окажется непрерывным. Если нейтрино являются майорановскими, то испущенное виртуально вместе с первым электроном нейтрино затем может поглотиться при последующем испускании второго электрона.

Сумма энергий двух электронов (позитронов) будет однозначно определена и равна энергии, высвобождаемой в двойном β -распаде. Это обстоятельство могло бы существенно облегчить обнаружение такого процесса. Поскольку закон сохранения энергии выполняется только для перехода из начального состояния (Z, N) в конечное состояние $(N \pm 2, Z \mp 2)$ и не имеет отношения к переходам в промежуточное состояние, виртуальное нейтрино может обладать любой энергией вплоть до энергии $\sim 35 \text{ Мэв}$, при которой длина волны нейтрино оказывается малой по сравнению с радиусом ядра. Объем фазового пространства для виртуальных нейтрино, таким образом, оказывается гораздо большим, чем для реальных, что существенно увеличивает вероятность перехода с участием майорановских нейтрино.

Теорию двойного β -распада подробно рассматривали Гепперт-Майер, Фарри, Конопинский и Примаков [93—97].

Точное выражение для времени жизни по отношению к двойному β -распаду оказывается довольно сложным. Мы приведем здесь приближенные соотношения, полученные Примако-

¹⁾ См. [93—96].

вым [97]:

$$(T_{1/2})_0 \approx 10^{15 \pm 2} \left(\frac{60}{Z} \right)^2 (1 - e^{\mp \frac{2\pi Z}{137}})^2 \left(\frac{A}{150} \right)^{2/3} \left(\frac{8}{W^{(0)}} \right)^6 \text{ лет}, \quad (53a)$$

$$(T_{1/2})_{\nu, \nu}^{\nu} \approx 9 (T_{1/2})_{\nu, \nu}^{GT} \approx 6 \cdot 10^{19 \pm 2} \left(\frac{60}{Z} \right)^2 \times \\ \times (1 - e^{\mp 2\pi Z/137})^2 \left(\frac{8}{W^{(0)}} \right)^{10} \text{ лет}; \quad (53b)$$

$(T_{1/2})_0$ относится к β -распаду без испускания нейтрино, а $(T_{1/2})_{\nu, \nu}$ — к распаду с испусканием двух нейтрино; $W^{(0)}$ — кинетическая энергия, высвобождаемая при двойном β -распаде в единицах mc^2 . Величина ± 2 в показателе степени формулы (53a) является оценкой полной погрешности при вычислении ядерных матричных элементов.

Интересно отметить, что при одинаковых значениях $W^{(0)}$ и Z и сравнимых величинах ядерных матричных элементов время жизни по отношению к распаду без испускания нейтрино оказывается в 10^5 — 10^6 раз меньше времени жизни по отношению к двухнейтринному β -распаду. Эта величина по существу равна четвертой степени отношения энергии виртуального нейтрино в распаде без испускания нейтрино к энергии реального нейтрино в двухнейтринном распаде: $\sim (35 M_{\nu\bar{\nu}}/1 M_{\nu\bar{\nu}})^4 \approx 1,5 \cdot 10^5$.

Закон сохранения лептонов вместе с двухкомпонентностью нейтрино ограничивает выбор и требует, чтобы время жизни двойного β -распада определялось процессом с испусканием двух нейтрино. Экспериментально никогда не было обнаружено электронных линий с энергией, равной сумме двух энергий распада. Измерения верхнего предела для скорости двойного β -распада также противоречат предположению о распаде без испускания нейтрино и согласуются скорее с излучением двух нейтрино. В табл. 3 перечислены данные по многим известным случаям, когда можно предполагать наличие двойного β -перехода.

В те дни, когда сохранение четности в β -распаде еще не подвергалось сомнению, отсутствие безнейтринного двойного β -распада рассматривалось как свидетельство в пользу дираковской теории нейтрино ($\nu \neq \bar{\nu}$) и в пользу закона сохранения лептонов. Однако нарушение закона сохранения четности в β -распаде обнаруживает, что взаимодействие осуществляется

Таблица 3

ОПЫТЫ ПО ДВОЙНОМУ β -РАСПАДУ

Переход	Высвобождаемая энергия, <i>Мэв</i>	<i>T</i> _{1/2} (<i>лет</i>)			Литература
		Эксперимент	Теория*		
			двухнейтринный распад	безнейтринный распад	
²⁰ Ca ⁴⁸ → ²² Ti ⁴⁸	4,3±0,1	> 2·10 ¹⁸ > 6·10 ¹⁸	4·10 ^{20±2}	3·10 ^{15±2}	[147]
⁶⁰ Nd ¹⁵⁰ → ⁶² Sm ¹⁵⁰	3,7±0,1	> 4·10 ¹⁸	2·10 ^{20±2}	2·10 ^{15±2}	[149]
⁴⁰ Zr ⁹⁶ → ⁴² Mo ⁹⁶	3,4±0,3	> 2·10 ¹⁶	1·10 ^{21±2}	6·10 ^{15±2}	[147, 150]
⁵² Te ¹³⁰ → ⁵⁴ Xe ¹³⁰	3,2±0,1	= 1,4·10 ²¹	2·10 ^{21±2}	8·10 ^{15±2}	[151—154]
⁴⁸ Cs ¹¹⁶ → ⁵⁰ Sn ¹¹⁶	2,6±0,1	> 10 ¹⁷	6·10 ^{21±2}	2·10 ^{16±2}	[155—157]
⁴² Mo ¹⁰⁰ → ⁴⁴ Ru ¹⁰⁰	2,3±0,2	> 10 ¹⁷	4·10 ^{22±2}	4·10 ^{16±2}	[153, 154, 157]
⁵⁰ Sn ¹²⁴ → ⁵² Te ¹²⁴	2,0±0,2	> 10 ¹⁷	4·10 ^{22±2}	5·10 ^{16±2}	[150, 158, 159]
⁹² U ²³⁸ → ⁹⁴ Pu ²³⁸	1,1	> 6·10 ¹⁸	3·10 ^{25±2}	2·10 ^{18±2}	[160]

Хороший обзор данных по двойному β -распаду принадлежит Примакову и Розену (Вашингтонский университет, 1958).

с участием «двухкомпонентного нейтрино». Это ограничивает выбор поляризационных состояний лептонов и открывает, к сожалению, еще одну возможность установить различие между нейтрино и антинейтрино. С одной стороны, отсутствие безнейтринного двойного β -распада можно толковать в пользу закона сохранения лептонов и дираковской теории нейтрино $\nu \neq \bar{\nu}$. С другой стороны, можно стать на противоположную точку зрения и допустить, что число лептонов не сохраняется и нейтрино являются майорановскими $\nu \equiv \bar{\nu}$; тогда существует два возможных спиновых состояния нейтрино. Но законы β -взаимодействия требуют испускания нейтрино в правовинтовом состоянии при излучении электрона и в левовинтовом — при излучении позитрона. Отсутствие безнейтринного двойного β -распада согласуется с требованиями, налагаемыми на поляризацию нейтрино, и не имеет никакого отношения к различию между нейтрино и антинейтрино. К счастью, нейтрино испускаются также в распадах $\mu \rightarrow e$, при μ -захвате и в некоторых распадах K -мезонов. Все данные, относящиеся к этим разнообразным превращениям, хорошо согласуются с представлением о двухкомпонентном нейтрино и законом сохранения лептонов. Для простоты можно отказаться от второй возможности и принять предположение о дираковском типе нейтрино, пока дальнейшие более полные исследования не докажут обратного.

§ 16. ПРОЦЕССЫ, ОБРАТНЫЕ β -РАСПАДУ

В тот год, когда Ферми опубликовал свою теорию β -распада, Бете и Пайерлс [98] указали на возможность «обратного β -распада», обусловленного взаимодействием, введенным в теории Ферми. В обратном процессе ядро захватывает нейтрино или антинейтрино и испускает одновременно электрон или позитрон

$$(N, Z)_{\pm \bar{\nu}}^{+\nu} \rightarrow (N \pm 1, Z \mp 1) + e^{\mp}.$$

Вследствие характерной слабости β -взаимодействия сечение обратной β -распаду реакции должно быть очень малым — порядка 10^{-44} см². Только после того как с помощью ядерных реакторов стало возможным получить интенсивные пучки антинейтрино, поиски столь редких событий приобрели смысл.

А. Захват антинейтрино протонами¹⁾

Процесс, обратный распаду нейтрона

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}, \quad (54a)$$

можно записать как захват антинейтрино протоном

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+, \quad (54b)$$

переставив e^- из левой части уравнения в правую и изменив направление реакции. Захват антинейтрино должен приводить к мгновенному испусканию позитрона и нейтрона. Позитрон должен уносить всю избыточную энергию нейтрино сверх порога реакции; энергия нейтрона не превышает нескольких *кэв*. Классическая теория β -распада позволяет найти сечение обратной реакции и выразить его через фактор ft для нейтрона и энергию испущенного позитрона [99]

$$\sigma_{\text{обр. } \beta\text{-процесса}} = \frac{g^2 (|C_V|^2 + 3|C_A|^2)}{2\pi\hbar^4 C^3} p_e W_e. \quad (55)$$

Подставив сюда величину

$$(ft)_n = \frac{ln^2 \cdot 2\pi^3 \hbar^7}{g^2 (|C_V|^2 + 3|C_A|^2) \cdot m^5 C^4}, \quad (56)$$

получим

$$(\sigma_{\text{обр. } \beta\text{-процесса}})_{\text{кл. теор.}} = \frac{\pi^2 \cdot ln^2 \hbar^3}{(ft)_n m^5 C^7} p_e W_e. \quad (57)$$

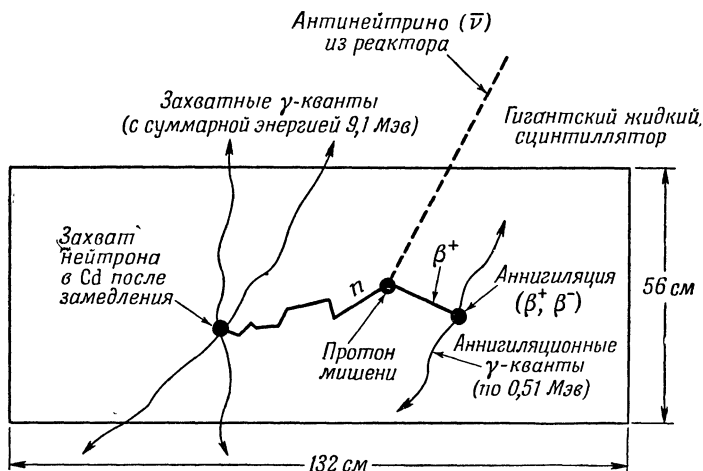
Согласно теории двухкомпонентного нейтрино (с учетом закона сохранения лептонов), вылетающие из реактора нейтрино могут находиться лишь в одном спинном состоянии, а не в двух, как обычно. Отсюда следует, согласно принципу детального равновесия, что сечение поглощения двухкомпонентного нейтрино вдвое больше обычного сечения [35]

$$(\sigma_{\text{обр. } \beta\text{-процесса}})_{\text{двухком.}} = 2 (\sigma_{\text{обр. } \beta\text{-процесса}})_{\text{кл. теор.}}$$

Схема детектирования в экспериментах Рейнса и Коуэна была построена следующим образом. Пучок антинейтрино падал на насыщенный кадмием большой жидкий сцинтиллятор, который служил одновременно протонной мишенью и поглотителем нейтронов. Мгновенный импульс, возникавший вследствие аннигиляции позитрона, извещал о поглощении нейтрино. Нейтрон отдачи замедлялся и через несколько микро-

¹⁾ См. [99].

секунд поглощался кадмием. В процессе радиационного захвата нейтрона одновременно испускались несколько γ -квантов, при обнаружении которых возникал второй импульс, запаздывавший относительно аннигиляционного. На фиг. 7 показана



Фиг. 7. Схема детектора антинейтрино.

Антинейтрино вызывает превращение протона в нейтрон и позитрон. Позитрон замедляется и аннигилирует с испусканием двух γ -квантов. Нейтрон замедляется водородом, содержащимся в сцинтилляторе, и поглощается кадмием с испусканием захватных γ -квантов.

схема эксперимента. Найденное сечение захвата антинейтрино протоном, отнесенное к одному антинейтрино деления, составляет

$$\sigma_{\text{эксп.}} = (11 \pm 4) \cdot 10^{-44} \text{ см}^2.$$

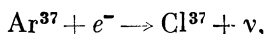
Чтобы сравнить это значение с полученным теоретически, нужно с большой точностью знать энергию позитрона или спектр антинейтрино, вылетающих из реактора; энергии позитрона и антинейтрино связаны соотношением $E_{\bar{\nu}} = 3,53 + E_{\beta^+}$ (в единицах mc^2). Спектр нейтрино был определен по β -спектрам осколков деления U^{238} [100]. Результаты вычислений сечения таковы:

$$\sigma_{\text{теор.}} = \begin{cases} 9,5 \cdot 10^{-44} \text{ см}^2 [100] \\ 12 \cdot 10^{-44} \text{ см}^2 [101] \\ 15 \cdot 10^{-44} \text{ см}^2 [102]. \end{cases}$$

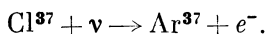
Экспериментальное и теоретическое сечения оказались в очень хорошем согласии.

Б. Захват нейтрино¹⁾

Согласно схеме



Ar^{37} захватывает электрон и переходит в Cl^{37} ; обратная реакция имеет вид



В соответствии с законом сохранения лептонов в этом процессе поглощаются именно нейтрино, а не антинейтрино. Интенсивный поток антинейтрино, исходящий из ядерного реактора, поэтому не может привести к возникновению Ar^{37} .

Дэвис облучал в течение длительного времени большой объем (около 4000 л) четыреххлористого углерода вблизи ядерного реактора. Затем выделялся Ar^{37} и очищался физическими методами. Количество его измерялось путем подсчета рентгеновских лучей, сопровождающих процесс электронного захвата, с помощью счетчика Гейгера с низким фоном. Очень малое число отсчетов, обнаруженное Дэвисом ($0,3 \pm 3,4$ отсчета в день) в последнем эксперименте с улучшенным вариантом счетчика Гейгера эквивалентно сечению захвата нейтрино $(0,1 \pm 0,6) \cdot 10^{-45} \text{ см}^2$. Это малая величина по сравнению с теоретически предсказанным сечением $\sigma \approx 2 \cdot 10^{-45} \text{ см}^2$ (на один атом и на одно нейтрино деления) при $\nu = \bar{\nu}$. Кроме того, мюонная компонента фона космических лучей в данном эксперименте была плохо известна. Наблюденная остаточная активность могла быть связана с мюонной активацией космического происхождения. Таким образом, сейчас нет никаких указаний о существовании *положительного эффекта*, происходящего от нейтрино из реактора.

§ 17. РАСПАДЫ $\pi - \mu - e$

Гипотеза Паули о существовании нейтрино, призванная спасти законы сохранения в β -распаде, играет столь же важную роль в распадах $\pi - \mu - e$, в μ -захвате и в некоторых рас-

¹⁾ См. [103].

падах K -мезонов. Недавно проведенные измерения спиральностей и угловых распределений лептонов в различных распадах убедительно свидетельствуют, что нейтрино ядерного происхождения не отличаются от нейтрино, возникающих в других процессах распада с участием лептонов.

Ниже мы кратко перечислим те явления в процессе распада $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$, которые являются прямым следствием двухкомпонентности нейтрино и закона сохранения лептонов. По аналогии с β -распадом взаимодействие, приводящее к μ -распаду, можно записать следующим образом:

$$f_i (\bar{\psi}_e O_i \psi_\mu) (\bar{\psi}_\nu O_i \psi_\nu). \quad (58)$$

Подставим во второй ковариант двухкомпонентные функции нейтрино

$$\frac{1}{4} f_i [\bar{\psi}_\nu (1 \mp \gamma_5) O_i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu]. \quad (59)$$

В вариантах S , T и P операторы O_i коммутируют с γ_5 и соответствующие члены тождественно обращаются в нуль. В вариантах V и A операторы O_i антикоммутируют с γ_5 , что дает

$$\frac{1}{2} f_i [\bar{\psi}_\nu O_i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu]. \quad (60)$$

Только V - и A -взаимодействия могут быть причиной μ -распада.

Мы сгруппировали волновые функции двух нейтрино в один ковариант из соображений математического удобства. Может возникнуть утверждение, что в один член следует собрать волновые функции нейтрино и электрона, поскольку именно так они сгруппированы в μ -распаде. Однако согласно теореме Паули о перестановке полей [8], такого рода перегруппировки могут привести лишь к изменению численных коэффициентов в линейной комбинации взаимодействий. Но именно тогда, когда взаимодействие представляет собой комбинацию V и A (бог милостив!), перегруппировки волновых функций не меняют даже и коэффициентов:

$$(\bar{\psi}_e \psi_\mu) (\bar{\psi}_\nu \psi_\nu) \text{ и } (\bar{\psi}_\nu \psi_\mu) (\bar{\psi}_e \psi_\nu).$$

Для нас представляют особый интерес измерения следующих величин, относящихся к μ -распаду: A) параметра Мишеля ρ ; B) зависимость параметра асимметрии от энергии; B) поляризации мюонов и электронов.

А. Параметр Мишеля q ¹⁾

Закон сохранения лептонов требует, чтобы два нейтрино, испускаемые в процессе μ -распада, являлись частицей и античастицей:

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \bar{\nu}. \quad (61)$$

Если такого рода требование не налагается, то допустимо также испускание двух нейтрино или двух антинейтрино:

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu + \nu \quad (62)$$

или

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \bar{\nu} + \bar{\nu}. \quad (63)$$

Согласно теории двухкомпонентного нейтрино, форма энергетического спектра электронов зависит от того, одинаковы или противоположны спиральности испускаемых нейтрино. Спектр электронов имеет вид

$$N(x) dx = 4x^2 \left[3(1-x) + \frac{2}{3} q(4x-3) \right] dx, \quad (64)$$

где x — отношение энергии электрона к его максимальной энергии. Форма спектра зависит от единственного параметра q , введенного Мишелем (q — комбинация постоянных связи всех взаимодействий, определяющих распад). Если вылет электрона сопровождается испусканием двух нейтрино или двух антинейтрино, то q должно быть равно нулю, при испускании одного нейтрино и одного антинейтрино $q = 3/4$. Экспериментальные данные варьируют в пределах от 0,68 до 0,79²⁾, т. е. лежат вблизи от 0,75, что соответствует испусканию одного нейтрино и одного антинейтрино и позволяет с уверенностью отказаться от схем распада мюона с испусканием двух нейтрино или двух антинейтрино. Это оправдывает также распределение лептонов на частицы и античастицы, произведенное в § 8. Очень важно получить как можно более точно величину q , ввиду ее большого теоретического значения.

Б. Зависимость параметра асимметрии от энергии

Распределение электронов, образовавшихся при распаде покоящегося поляризованного μ -мезона по импульсам, имеет

¹⁾ См. [104].

²⁾ 0,68 \pm 0,02 [105]; 0,68 \pm 0,09 [106]; 0,72 \pm 0,05 [107]; 0,67 \pm 0,05 [108]; 0,79 \pm 0,03 [109]; см. также [110].

вид [35—48]

$$dN = \frac{1}{2} \pi x^2 [(3-2x) \mp \xi (1-2x) \cos \theta] dx d\Omega \quad (65)$$

(минус для распада μ^- и плюс для распада μ^+); здесь p — импульс электрона; $x = p/p_{\text{макс.}}$; θ — угол между импульсом электрона и спином распадающегося мюона. Для двухкомпонентного нейтрино

$$\xi = \frac{[f_V f_A^* + f_A f_V^*]}{[f_V^2 + f_A^2]}. \quad (66)$$

Угловое распределение электронов таково:

$$\begin{aligned} I(\theta) d\theta &\propto (1 + A \cos \theta) \sin \theta d\theta \approx \\ &\approx \left[1 \mp \xi \frac{(1-2x)}{(3-2x)} \cos \theta \right] \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (67)$$

где A — параметр асимметрии, равный

$$\xi \left\{ \frac{(1-2x)}{(3-2x)} \right\}.$$

Величина A зависит от энергии электрона (x) и велика при $|\xi| \approx 1$. В μ^- -распаде параметр A равен $+\xi$ при $x=1$ (максимальная энергия), нулю при $x=1/2$ (в этой точке меняется знак асимметрии) и $-1/3 \xi$ при $x=0$ (электрон покоится). В распределении, проинтегрированном по энергии, $A = +1/3 \xi$.

Знак $\cos \theta$, однако, остается неизвестным, поскольку у нас нет прямого метода измерения средней поляризации ($\langle \sigma \rangle$) мюонов; мы знаем лишь, что она параллельна скорости мюона. Результаты первого эксперимента Гарвина, Ледермана и Вайнриха [111] по несохранению четности в распаде мюона, а также полученные независимо Фридманом и Телегди [112] данные показывают, что большая часть электронов вылетает в направлении, противоположном направлению движения мюона. Последние измерения абсолютной величины ξ привели к следующему результату: $|\xi| = 0,97 \pm 0,05$ [113, 114]. В области энергий, примыкающей к верхнему пределу, данные по асимметрии находятся в хорошем согласии с теорией. В области малых энергий измерения трудны и достигнутая точность пока невелика. Однако в целом данные по зависимости углового распределения в μ -распаде от энергии хорошо согласуются с предсказаниями теории двухкомпонентного нейтрино [110, 113, 114].

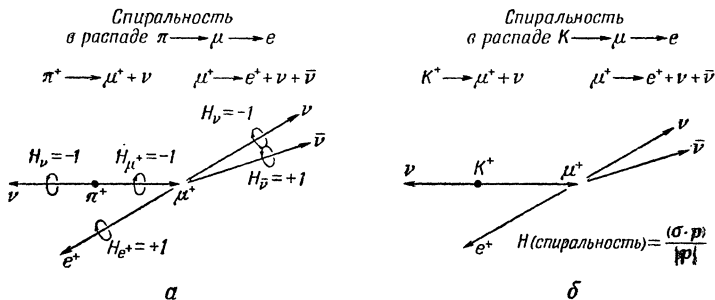
В. Поляризация мюонов и электронов

Хотя знак $\cos \theta$ в угловом распределении неизвестен (поскольку неизвестно направление спина мюона), спиральность электронов распада можно найти аналогично тому, как она была найдена в ядерных распадах:

$$H_e = \pm \xi \left(\frac{v}{c} \right) \approx \pm \xi \quad (68)$$

(плюс для μ^- -распада, минус для μ^+ -распада).

Если поляризация электрона левовинтовая, а позитрона — правовинтовая, то $\xi = -1$. Преимущественный вылет электронов назад тогда означает, что спиральность отрицательного мюона положительна, а положительного мюона отрицательна.



Ф и г. 8.

Это становится очевидным, если рассмотреть предельный случай, представленный на фиг. 8, а. Если нейтрино и антинейтрино вылетают в одну и ту же сторону, то электрон, испускаемый в обратном направлении, должен уносить момент количества движения мюона. Если спиральность μ^+ отрицательна, то образующийся позитрон должен обладать положительной спиральностью. Экспериментальные данные по поляризации позитронов и электронов, полученные путем измерений поляризации тормозного и аннигиляционного излучения [115, 116] или методом мёллеровского рассеяния [117], позволяют с определенностью заключить, что спиральность позитрона положительна, а электрона — отрицательна. Следовательно, спиральность μ^+ отрицательна. В распаде $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ мюон и электрон разлетаются в противоположных направлениях и не уносят орбитального момента. Отсюда следует, что спиральность

нейтрино отрицательна. Таким образом, данные по спиральности нейтрино, испускаемых в ядерном β -распаде и в распадах $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$, находятся в блестящем согласии.

§ 18. РАСПАДЫ $\pi \rightarrow e$

Гипотеза о существовании пиона была первоначально введена Юкавой для объяснения сильного, но короткодействующего взаимодействия между нуклонами. Поэтому, естественно ожидать, что положительный пион может виртуально превратиться в пару из протона и антинейтрона

$$\pi^+ \rightarrow p + \bar{n},$$

которая в свою очередь преобразуется согласно схеме

$$p + \bar{n} \rightarrow e^+ + \nu$$

или

$$p + \bar{n} \rightarrow \mu^+ + \nu$$

(фиг. 9). Таким образом, π^+ -мезон должен распадаться двумя путями:

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu,$$

или

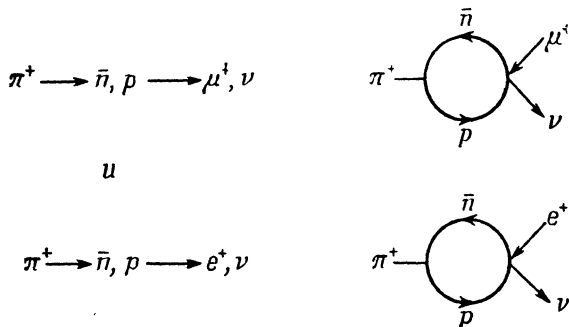
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu.$$

При вычислении вероятностей распадов $\pi \rightarrow \mu$ или $\pi \rightarrow e$ эти процессы рассматриваются как два последовательных перехода: первый переход типа Юкавы, а второй — аналогичен захвату лептона. Суммирование по промежуточным состояниям приводит к возникновению бесконечностей, которые приходится исключать обычной процедурой обрезания. Поэтому оценка вероятностей распадов носит очень приближенный характер. Неопределенность, однако, устраняется, если взять отношение вероятностей этих двух распадов, поскольку приводящие к затруднениям расходящиеся члены совершенно одинаковы в обоих процессах распада. В аксиально-векторном варианте взаимодействия отношение вероятностей распадов оказывается равным [118]

$$R_A = \frac{(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu)}{(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu)} = \frac{m_e^2 (1 - m_e^2/m_\pi^2)^2}{m_\mu^2 (1 - m_\mu^2/m_\pi^2)^2} \approx 1,3 \cdot 10^{-4} \quad (69)$$

во всех порядках по сильному взаимодействию пион — нуклон.

Распад $\pi-e$, конечно, очень редок по сравнению с распадом $\pi-\mu$. В течение долгого времени его поиски не давали никаких результатов. Эксперимент, казалось, указывал, что отношение вероятностей распадов $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu$ и $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ существенно меньше 10^{-5} . Пока в ядерном β -взаимодействии господствовали варианты S и T , отсутствие $\pi-e$ -распада не слишком беспокоило физиков. Из псевдоскалярного пионного поля



Фиг. 9. Диаграммы Фейнмана распадов $\pi^+ \rightarrow e^+$ и $\pi^+ \rightarrow \mu^+$.

можно составить только два из пяти β -взаимодействий (A и P) и один четырехвектор, соответствующий нелокальному характеру промежуточного состояния. Таким образом, только варианты A и P могут приводить к распаду псевдоскалярного пиона, остальные три варианта (S , V , T) запрещены. Если в β -распаде нет взаимодействий A и P , то распад $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu$, конечно, запрещен.

Однако, когда эксперимент подтвердил теорию универсального взаимодействия Ферми, отсутствие $\pi-e$ -распада стало предметом серьезного беспокойства. Обнаружение вскоре этого распада [119—212] явилось триумфом универсального $V-A$ -взаимодействия. С тех пор отношение вероятностей распадов $\pi-e$ и $\pi-\mu$ было измерено в ряде лабораторий с не очень большой точностью. Результаты варьировали от $1,3 \cdot 10^{-4}$ до $1,4 \cdot 10^{-4}$, что хорошо согласуется с теоретическим предсказанием $1,34 \cdot 10^{-4}$. Если бы распад $\pi-e$ был обнаружен еще в первых экспериментах и с правильным отношением вероятностей $\pi-e$ к $\pi-\mu$, то это, пожалуй, вызвало бы сомнения в справедливости выбора взаимодействий S и T в ядерном β -распаде.

В псевдоскалярном варианте отношение вероятностей этих распадов представляет собой не что иное как отношение плотностей энергии в фазовом пространстве и равно

$$R_P = \frac{\tau(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu)}{\tau(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu)} = \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 \approx 5,4. \quad (70)$$

Как показали Трейман и Уайлд [122], из экспериментальных данных по относительной частоте двух типов распада можно получить следующую оценку:

$$|C_P| \leq \frac{m_e}{M} |C_A| \approx 5 \cdot 10^{-4} |C_A|. \quad (71)$$

Псевдоскалярное взаимодействие, таким образом, пренебрежимо мало.

§ 19. РАСПАДЫ $K - \mu - e$

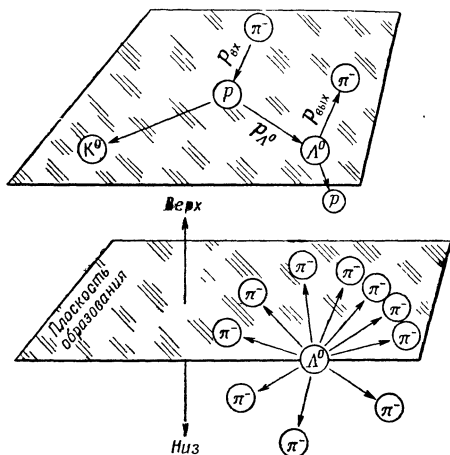
Распады $K - \mu - e$ сходны с распадами $\pi - \mu - e$ (см. фиг. 8, б). Если закон сохранения лептонов выполняется, то в обоих случаях испускаются одни и те же нейтрино. Следовательно, должны быть одинаковы и угловые распределения электронов по отношению к направлению движения мюона. Эксперимент [123] подтвердил это предсказание, что явилось еще одним свидетельством в пользу закона сохранения лептонов.

§ 20. НЕСОХРАНЕНИЕ ЧЕТНОСТИ В РАСПАДАХ СТРАННЫХ ЧАСТИЦ

Важно и интересно знать, связано ли несохранение четности в слабых взаимодействиях лишь с теми процессами, в которых участвует нейтрино. Как известно, именно кажущееся нарушение закона сохранения четности в распаде K -мезонов положило начало исследованию всего круга вопросов.

В этой связи изучался распад $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$, причем частица Λ возникала в реакции $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K$. Несохраниение четности приводило к тому, что среднее значение псевдоскаляра $p_{\text{out}} \cdot (p_{\text{in}} \times p_{\Lambda})$ оказывалось отличным от нуля [124, 125]. В результате возникала асимметрия верх — низ (фиг. 10). Отклонение от закона сохранения четности и здесь достигает максимальной величины. Свалить вину на нейтрино здесь никак нельзя, поскольку нейтрино вообще не участвует в этом

процессе. Все слабые взаимодействия с участием лептонов и без их участия примерно одинаково слабы. Во всех них нарушаются законы сохранения пространственной и зарядовой четности. Можно ли утверждать, что все слабые взаимодействия сводятся к одному универсальному взаимодействию Ферми?



Фиг. 10. Асимметрия верх — низ в распаде Λ .

Λ возникает в реакции $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$ и в свою очередь претерпевает распад $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$. Наличие асимметрии верх — низ в распределении пионов (импульс пиона p_{out}) по отношению к плоскости образования (проведенной через импульсы p_{in} и p_{Λ}^0) доказывает, что среднее значение псевдоскаляра $p_{out} \cdot (p_{in} \times p_{\Lambda}^0)$ отменно от нуля и, следовательно, в распаде Λ четность не сохраняется.

Хотя грубое сравнение экспериментальных данных с предсказаниями этой теории качественно подтверждает ее, все же отсутствие достоверных данных, касающихся процессов с участием сильно взаимодействующих частиц, делает такое сравнение слишком ненадежным.

§ 21. УНИВЕРСАЛЬНОЕ V—A-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФЕРМИ

Постоянные связи в β -распаде, μ -распаде и μ -захвате очень близки между собой. Это наводит на мысль, что во всех трех случаях одинаков и вид взаимодействия. Пока в β -взаимодействии господствовали S - и T -варианты, а данные по μ -распаду (отрицательный знак коэффициента асимметрии) указывали на

преобладающую роль взаимодействий V , A , построение универсального взаимодействия Ферми, конечно, было невозможным. Теперь, когда в β -взаимодействии на смену вариантам S и T пришли варианты V и A , ситуация коренным образом изменилась.

Интересно отметить, что в 1955 г., задолго до того, как сохранение четности в β -распаде было поставлено под сомнение, Штех и Иенсен [126] высказали странное предположение: они постулировали, имея в виду избежать появления фирцевского члена, инвариантность H_{int} относительно преобразований

$$\psi'_e = \gamma_5 \psi_e, \quad \psi'_\nu = \gamma_5 \psi_\nu. \quad (72)$$

В результате в H_{int} могли оставаться только члены $[S, T, P]$ или только (V, A) , но не те и другие вместе (общее изменение знака несущественно). Это автоматически приводило к исчезновению фирцевского члена. Хотя этот постулат выполнял свое назначение, понять его смысл никто не мог. Впоследствии эту идею развили Маршак и Сударшан [127], Фейнман и Гелл-Манн [128] и Сакураи [129]; к этому времени новые данные, связанные с несохранением четности, придали ей смысл. Как мы видели в теории двухкомпонентного нейтрино, такое преобразование производилось только над нейтрино. Одновременное преобразование пары частиц является естественным обобщением. Используя соображения винтовой инвариантности [127], или теорию двухкомпонентных спиноров [128], или инвариантность относительно изменения знака массы [129], можно прийти к однозначно определенному выражению.

$$G \{ [\bar{A} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) B] [\bar{C} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) D] + \text{Эрмит. сопр.} \}, \quad (73)$$

где G — постоянная связи, а A, B, C, D — четыре дираковских поля.

В силу соотношения $\gamma_5(1 + \gamma_5) = (1 - \gamma_5)\gamma_5 = (1 + \gamma_5)$, приведенному выражению можно придать вид

$$G \{ (\bar{A} \gamma_\mu B) (\bar{C} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) D) + \\ + (-1) (\bar{A} (-i \gamma_\mu \gamma_5) B) (\bar{C} (-i \gamma_\mu \gamma_5) (1 + \gamma_5) D) \}. \quad (74)$$

Мы получаем, таким образом, линейную комбинацию вариантов V и A . Это универсальное четырехфермионное $V - A$ -взаимодействие не только единственным образом определяет ком-

бинацию $V-A$, но позволяет также получить отрицательную спиральность нейтрино и закон сохранения лептонов и вдобавок оно инвариантно относительно «комбинированной инверсии CP ». Противоречия, существовавшие вначале между этой теорией и некоторыми экспериментальными фактами, были устранены одно за другим. В настоящее время эксперимент хорошо согласуется с предсказаниями теории.

В универсальной $V-A$ комбинации постоянные связи обоих вариантов одинаковы. В ядерном β -распаде это требование не выполняется. Как показывают измерения ft для нейтрона и O^{14} ; $|C_A|^2 = 1,42 |C_V|^2$. С другой стороны, в распаде мюона V - и A -взаимодействия можно предполагать равными, поскольку они математически тождественны¹⁾ и нет необходимости вводить различие между ними. Постоянная связи в распаде мюона оказывается в блестящем согласии с векторной постоянной ядерного β -распада. Если постоянную V -взаимодействия в ядерном β -распаде взять равной $g_V = 1,41 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$, то вычисления дают для времени жизни мюона

$$\tau_\mu = 192 g_V^{-2} \pi^3 \hbar^7 C^{-4} \mu^{-5} = (2,26 \pm 0,04) \cdot 10^{-6} \text{ сек}, \quad (7.5)$$

а измеренное время жизни составляет $(2,22 \pm 0,02) \cdot 10^{-6} \text{ сек}$. Столь точное совпадение ни в коей мере нельзя считать удачей, скорее это новая загадка. Как хорошо известно, нуклоны могут испускать и поглощать пионы. Нейтрон значительную часть своей жизни проводит в виде протона, окруженного облаком отрицательно заряженных пионов. Можно полагать, что сила β -взаимодействия для голго нуклона значительно отличается от силы β -взаимодействия для физического нуклона (смеси пиона и нуклона). Чтобы учесть влияние пионов, постоянную связи в ядерном β -распаде необходимо перенормировать. В мюонном распаде к перенормировке прибегать не следует, поскольку пионы на этот распад не влияют. Так почему же совпадение оказывается таким точным? Для объяснения этого неожиданного совпадения Фейнман и Гелл-Манн [128] воспользовались аналогией с электродинамикой.

1)

Векторный ток

Аксиально-векторный ток

$$\bar{\psi}_\mu \gamma_\mu \psi_\nu$$

 \equiv

$$\bar{\psi}_\mu \gamma_\mu \gamma_5 \psi_\nu$$

-если $\psi_\nu = \gamma_5 \psi_\nu$.

Постоянная связи электромагнитного поля одна и та же для всех взаимодействующих с ним частиц. В области малых энергий это условие выполняется, так как полный заряд остается при испускании виртуального мезона неизменным, хотя распределение заряда меняется. Не может ли оказаться, что пион несет с собой заряд β -взаимодействия, когда он виртуально испускается нуклоном, и фермиевская часть ядерного β -взаимодействия так устроена, что не подвергается перенормировке? Фейнман и Гелл-Манн предположили, что векторную часть нуклонного тока следует дополнить пионным током. В обозначениях, принятых в теории изотопического спина, векторный ток принимает вид

$$J_{\mu}^V = \bar{\psi}_p \gamma_{\mu} \tau_+ \psi_n + i [\varphi_{\pi}^* T_+ \nabla_{\mu} \varphi_{\pi} - (\nabla_{\mu} \varphi_{\pi})^* T_+ \varphi_n], \quad (76)$$

где $\tau = \frac{1}{2}$ (для нуклона) и $T=1$ (для пиона). Этот сохраняющийся ток позволяет прийти к величине, которая не затрагивается пионными эффектами.

Упомянутое различие между величинами C_A и C_V мы пытались объяснить перенормировкой аксиально-векторной части. Однако наши познания о пион-нуклонном взаимодействии столь скудны и теория сильных взаимодействий столь несовершенна, что пройдет еще немало времени до тех пор, пока эта перенормировка будет должным образом вычислена.

Предложенное выше прямое взаимодействие пионов с электронами и нейтрино приводит к возможности экспериментального изучения процессов $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}$ или $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu$. Пока мы только ожидаем их обнаружения.

§ 22. ТЕОРЕМА CPT ; ИНВАРИАНТНОСТЬ CP И T

Обширная статья Паули [4], посвященная CPT -теореме, увидела свет в 1955 г., незадолго до того, как понадобился анализ операций C , P и T в слабых взаимодействиях. Теорема CPT устанавливает общую связь операторов C (зарядовое сопряжение), P (четность) и T (обращение времени) с собственными преобразованиями Лоренца. Если локальный лагранжиан инвариантен относительно собственных преобразований Лоренца, то он инвариантен относительно произведения операций CPT (взятых в любом порядке), хотя может и не быть инвариантности относительно каждой из этих трех операций C , P и T .

Из этой теоремы следует, что если в слабых взаимодействиях P не сохраняется, то хотя бы один из законов сохранения C и T также не выполняется. Распад поляризованного Co^{60} , а также распады $\pi - \mu - e$ показали, что не сохраняются зарядовая, а также пространственная четности. Поэтому особый интерес представляет вопрос о том, сохраняет ли силу инвариантность относительно обращения времени. Если временная четность сохраняется, то сохраняется также четность относительно комбинированного преобразования CP . Сохранение комбинированной четности было предсказано Ландау [36] одновременно с введением теории двухкомпонентного нейтрино, а также Вигнером [130] в его речи, произнесенной на съезде Американского Физического общества в январе 1957 г. Если это предсказание справедливо, то при зеркальном отображении следует заменить все частицы соответствующими античастицами: симметрия между правым и левым в пространстве не нарушается. Это поистине звучит весьма утешительно.

В настоящее время проводится ряд экспериментов, ставящих целью проверку закона сохранения временной четности. До сих пор нарушений T -инвариантности не обнаружено. Основная идея проверки заключается в измерении относительных фаз постоянных связи C_i . Если имеет место T -инвариантность, то C_i действительны, и наоборот. В этом можно убедиться следующим образом.

В отличие от операций C или P операция обращения времени T представляется не унитарным оператором U_T , а произведением унитарного оператора на комплексное сопряжение

$$T = U_T \cdot \text{Комплексное сопряжение.} \quad (77)$$

Наиболее общий гамильтониан β -взаимодействия представляется в виде линейной комбинации различных взаимодействий

$$H_\beta = \sum_i C_i H_i.$$

При обращении времени каждый из операторов H_i подвергается преобразованию

$$TH_i T^{-1} = U_T H_i^* U_T^{-1} = H_i \quad (77a)$$

с точностью до фазового множителя. Если мы включим эти фазовые множители в \bar{C}_i^* , то полный гамильтониан при обращении

нии времени преобразуется следующим образом:

$$TH_{\beta}T^{-1} = \sum_i C_i^* H_i. \quad (776)$$

Если $TH_{\beta}T^{-1} = H_{\beta}$ (инвариантность относительно обращения времени), то $C_i = C_i^*$. Это означает, что постоянные связи должны быть действительными. Измерение корреляции $\beta - \nu$ при распаде поляризованного нейтрона позволяет найти величину $\sigma_n(p_e \times p_{\nu})$. Эта величина зависит от мнимой части постоянных связи. Согласно экспериментальным данным, относительная фаза постоянных C_{GT} и C_F составляет $180 \pm 8^\circ$ (указана статистическая ошибка); величина 180° соответствует сохранению временной четности.

Таким образом, пока не будет доказано обратное, можно считать, что T -инвариантность выполняется и сохраняется симметрия между правым и левым при комбинированном CP -отражении.

§ 23. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прошло около тридцати лет с тех пор, как Паули в поисках путей для спасения законов сохранения в β -распаде впервые выдвинул гипотезу о существовании неуловимой частицы. Его первоначальные идеи и представления видоизменялись и развивались в разных неожиданных направлениях, но они и до сих пор остаются справедливыми.

Сфера приложения гипотезы расширилась и теперь включает все распады с участием лептонов. Инвариантность нейтрино относительно операций CP и T навела на мысль о более глубокой симметрии, охватывающей заряд и пространство. Характерная двухкомпонентность этой частицы породила надежду, что все слабые взаимодействия можно слить в одном простом $V - A$ -взаимодействии Ферми. Столь разнообразная на первый взгляд область слабых взаимодействий объединилась в единую группу сил. Однако нам непонятен еще тот принцип, который отличает слабые взаимодействия от сильных. На пути к нашей конечной цели — общей теории элементарных частиц — нейтрино, несомненно, будет играть такую же активную роль, какую оно блестяще сыграло в прошлом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Pauli W., Noyaux Atomiques, Proc. Solvay Congress, Bruxelles 1933, p. 324.
2. Pauli W., Handbuch der Physik, Bd. 24, 1933, S. 226. (См. перевод: В. Паули, Общие принципы волновой механики, М.—Л., 1947.)
3. Weyl H., Zs. f. Phys., 56, 330 (1929).
4. Pauli W., в книге «Niels Bohr and the Development of Physics», London, 1955. (См. перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.)
5. Schwinger J., Phys. Rev., 91, 720, 723 (1953); 94, 1366 (1953). (См. перевод: Ю. Швингер, Теория квантовых полей, ИЛ, 1956.)
6. Lüders G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., 28, No. 5 (1954).
7. Pauli W., Ann. Inst. Poincaré, 6, 109 (1936).
8. Pauli W., Zs. f. Phys., 104, 553 (1937).
9. Ellis C. D., Wooster W. A., Proc. Roy. Soc., A117, 109 (1927).
10. Meitner L., Orthmann W., Zs. f. Phys., 60, 143 (1930).
11. Chadwick J., Verh. dtsch. phys. Ges., 16, 383 (1914).
12. Ehrenfest P., Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 37, 333 (1931).
13. Heitler W., Herzberg G., Naturwiss., 17, 673 (1929).
14. Rasetti F., Zs. f. Phys., 61, 598 (1930).
15. Chadwick J., Proc. Roy. Soc., A136, 692 (1932).
16. Bohr N., Faraday Lecture, Journ. Chem. Soc., 349 (1932).
17. Fermi E., Zs. f. Phys., 88, 161 (1934); Ric. Sci., 2, Part 12 (1933).
18. Perrin F., Compt. Rend., 197, 1625 (1933).
19. Gamow G., Teller E., Phys. Rev., 49, 895 (1936).
20. Konopinsky E. J., Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., 60, 308 (1941).
21. Wu C. S., Beta and Gamma Ray Spectroscopy, ed. K. Siegbahn. Amsterdam, 1955. (См. перевод в сб. «Бета- и гамма-спектроскопия», под ред. К. Зигбана, М.—Л., 1959.)
22. Wu C. S., Rev. Mod. Phys., 22, 386 (1950).
23. Ridley B. W., Progress in Nuclear Physics, ed. O. R. Frisch, vol. 5, London, 1956.
24. Allen J., The Neutrino, Princeton, 1957.
25. Kistner O., Rustad B. M., Phys. Rev., 114, 1329 (1959).
26. Gerhart J. B., Phys. Rev., 109, 897 (1958).
27. Сосновский, Спивак, Прокофьев, Кутиков, Добрынин, ЖЭТФ, 35, 1059 (1958).
28. Fierz M., Zs. f. Phys., 104, 553 (1937).

29. Wu C. S., Schwarzschild A., Columbia University Report CU-473.
30. Sherwin C. W., Phys. Rev., **73**, 1219 (1948); **75**, 1799 (1948); **82**, 52 (1951).
31. Kofoed-Hansen O., Phys. Rev., **96**, 1045 (1954).
32. Snell A. H., Pleasonton F., Phys. Rev., **97**, 246 (1955); **100**, 1396 (1955).
33. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1956). (См. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957, стр. 13.)
34. Wu, Ambler, Hayward, Hoppes, Hudson, Phys. Rev., **105**, 1413 (1957). (См. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957, стр. 69.)
35. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1671 (1957). (См. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957, стр. 46.)
36. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **32**, 405 (1957).
37. Salam A., Nuovo Cimento, **5**, 299 (1957). (См. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957, стр. 27.)
38. Majorana E., Nuovo Cimento, **14**, 171 (1937).
39. McLennan J. A., Phys. Rev., **106**, 821 (1957).
40. Serpe J., Physica, **18**, 295 (1952).
41. Radicati L. A., Touschek B., Nuovo Cimento, **5**, 1693 (1957).
42. Case K. M., Phys. Rev., **107**, 307 (1957).
43. Jackson, Treiman, Wyld, Phys. Rev., **106**, 517 (1957).
44. Morita M., Morita R. S., Phys. Rev., **107**, 139, 1316, 1729 (1957); **109**, 2048 (1958); **110**, 461 (1958); **111**, 237, 1130 (1958); **114**, 1080 (1959).
45. Feld, Bernard T., Phys. Rev., **107**, 797 (1957).
46. Alder, Stech, Winther, Phys. Rev., **107**, 728 (1957).
47. Ebel M. E., Feldman G., Nucl. Phys., **4**, 213 (1957).
48. Curtis R. B., Lewis R. R., Phys. Rev., **107**, 1381 (1957).
49. Konopinski E., Mahmoud H. M., Phys. Rev., **92**, 1045 (1953).
50. Pauli W., Nuovo Cimento, **6**, 204 (1957).
51. Enz C. O., Nuovo Cimento, **6**, 250 (1957).
52. Kahana S., Pursey D. L., Nuovo Cimento, **6**, 1469 (1957).
53. Proc. Rehovoth Conference on Nuclear Structure, Amsterdam, 1958.
54. Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, **4**, 82 (1959).
55. Gatlinburg Conference on Weak Interactions, 1958.
56. Page, Lorne A., Rev. Mod. Phys., **31**, 759 (1959).

57. Fagg L. W., Hanna S. S., Rev. Mod. Phys., **31**, 711 (1959).
58. Tolhoek H. A., Rev. Mod. Phys., **28**, 177 (1956).
59. Frauenfelder H. *et al.*, Phys. Rev., **106**, 386 (1957).
60. Алиханов А. И., Елисейев Г. И., Любимов В. А., ЖЭТФ, **34**, 785 (1958); Ershler, Cavanagh, Turner, Coleman, Gard, Ridley, Phil. Mag., **2**, 1105 (1957).
61. Waard H., Poppe O. J., Physica, **23**, 597 (1957).
62. de-Shalit, Kuperman, Lipkin, Rothen, Phys. Rev., **107**, 1459 (1957).
63. Langevin-Joliot, Marty, Segent, Compt. Rend., **244**, 3142 (1957).
64. McVoy K. M., Phys. Rev., **106**, 828 (1957); **110**, 1484 (1958).
65. Goldhaber, Grodzins, Sunyar, Phys. Rev., **106**, 826 (1957).
66. Deutsch M., Gittelman, Bauer, Grodzins, Sunyar, Phys. Rev., **107**, 1733 (1957).
67. Boehm, Novey, Barnes, Stech, Phys. Rev., **108**, 1497 (1957).
68. Møller C., Ann. d. Phys., **14**, 531 (1932).
69. Page L. A., Phys. Rev., **106**, 394 (1957).
70. Bincer A. M., Phys. Rev., **107**, 1434, 1469 (1957).
71. Ford G. W., Mullin C. J., Phys. Rev., **108**, 477 (1957).
72. Frauenfelder, Hanson, Levine, Rossi, De Pasquali, Phys. Rev., **107**, 643, 909, 910 (1957).
73. Benczer-Koller, Schwarzschild, Vise, Wu, Phys. Rev., **109**, 193 (1958).
74. Grodzins L., Proc. Nat. Acad. Sci., Wash., **45**, 399 (March 1959).
75. Mott N., Massey H., The Theory of Atomic Collisions, 2nd ed., Oxford, 1949. (См. перевод: Мотт Н., Мессии Г., Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951.)
76. Cox R. T. *et al.*, Proc. Nat. Acad. Sci., Wash., **14**, 544 (1958).
77. Gunst S. B., Page L. A., Phys. Rev., **92**, 970 (1953).
78. Heathly, Huiskamp, Diddens, Steenland, Tolhoek, Physica, **2**, 841 (1955).
79. Huiskamp W. J., Диссертация, Leiden, 1958.
80. Schopper H., Nuclear Inst., **3**, 158 (1958).
81. Schopper H., Phil. Mag., **2**, 270 (1957). (См. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957, стр. 94.)
82. Boehm F., Wapstra A. H., Phys. Rev., **109**, 456 (1958).
83. Lundby, Padro, Stroot, Nuovo Cimento, **6**, 745 (1957).
84. Steffen R. M., Alexander P., Proc. Rehovoth Conference, **1957**.

85. G ü n g s t W., Schopper H., Zs. f. Naturforsch., **139**, 505 (1958).
86. Goldhaber, Grodzins, Sunyar, Phys. Rev., **109**, 1015 (1958).
87. Burgy, Krohn, Novey, Ringo, Telegdi, Phys. Rev., **110**, 1214 (1958).
88. Pruett J. R., Phys. Rev., **73**, 219 (1948).
89. Hamilton, Alford, Gross, Phys. Rev., **92**, 1521 (1953).
90. Langer L. M., Moffat R. J. D., Phys. Rev., **88**, 689 (1952).
91. Sakurai J. J., Phys. Rev. Lett., **1**, 40 (1958).
92. Cowan, Reines, Harrison, Phys. Rev., **96**, 1294 (1954).
93. Primakoff H., Rosen S. P., Double Beta Decay, Washington University, 1958 (неопубликовано).
94. Goerpert-Mayer M., Phys. Rev., **48**, 512 (1935).
95. Furry W. H., Phys. Rev., **56**, 1184 (1939).
96. Konopinski E. J., U. S. A. E. C. Report LAMS-1949.
97. Primakoff H., Phys. Rev., **85**, 888 (1952).
98. Bethe H. A., Peierls R., Nature, **133**, 532 (1934).
99. Reines F., Cowan C. L., Jr., Phys. Rev., **113**, 273 (1959).
100. Carter, Reines, Wagner, Wyman, Phys. Rev., **113**, 280 (1959).
101. Muehlhaue C. O., Oleksa S., Phys. Rev., **105**, 1332 (1957).
102. King R. W., Perkins J. F., Phys. Rev., **112**, 963 (1958).
103. Davis R., Phys. Rev., **97**, 766 (1955); Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, **1**, 219 (1956).
104. Michel L., Nature, **163**, 959 (1949); Proc. Phys. Soc., **A63**, 514 (1950); Phys. Rev., **86**, 814 (1952); Progress in Cosmic Ray Physics, ed. Wilson, 1952 (см. перевод: Физика космических лучей, под ред. Дж. Вильсона, т. I, ИЛ, 1954); Диссертация, University of Paris, 1953.
105. Crowe K. M., Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, **2**, 234 (1957).
106. Sargent C. P. *et al.*, Phys., Rev., **99**, 885 (1955).
107. Dudziak W., Sagan R., Rochester Conference on High Energy Physics, 1957.
108. Rosenson L., Диссертация, University of Chicago, 1957.
109. Plano R. J., Le Courtois A., Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II, **4**, 82 (1959).
110. Conference on Weak Interactions, Rev. Mod. Phys. (July 1959).
111. Garwin, Lederman, Weinrich, Phys. Rev., **105**, 1415 (1957). (См. перевод в сб. «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957, стр. 76.)
112. Friedman A. M., Telegdi V. L., Phys. Rev., **105**, 1681 (1957).

113. Proceedings of the CERN Conference on High Energy Physics, Geneva, July 1958.
114. Bardon M., Berley D., Lederman L. M., Phys. Rev. Lett., 2, 56 (1959).
115. Culligan, Frank, Holt, Kluyner, Massam, Nature, 80, 751 (1957).
116. Crowe, Washington Meeting, American Physical Society, 1958.
117. Anderson H., Proceedings of CERN Conference on High Energy Physics, Geneva, July 1958.
118. Ruderman M., Finkelstein R., Phys. Rev., 76, 1458 (1949).
119. Fazzini T. *et al.*, Phys. Rev. Lett., 1, 247 (1958).
120. Impeduglia G. *et al.*, Phys. Rev. Lett., 1, 249 (1958).
121. Anderson H. L. *et al.*, Phys. Rev. Lett., 2, 53 (1959).
122. Treiman S. B., Wyld H. W., Phys. Rev. 101, 1552 (1956).
123. Coombes C. A. *et al.*, Phys. Rev., 108, 1348 (1957).
124. Crawford F. *et al.*, Phys. Rev., 108, 1102 (1957).
125. Eisler F. R. *et al.*, Phys. Rev., 108, 1353 (1957). [См. перевод: Проблемы современной физики, № 3, 159 (1958).]
126. Stech B., Jensen J. H. D., Zs. f. Phys., 141, 175, 403 (1955).
127. Sudarshan G., Marshak R., Padua-Venice Intern. Conference, 1957; Phys. Rev., 109, 1860 (1958).
128. Feynmann R., Gell-Mann M., Phys. Rev., 109, 193 (1958). [См. перевод: Проблемы современной физики, № 4, 3 (1958).]
129. Sakurai J. J., Nuovo Cimento, 7, 649 (1958).
130. Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., 29, 255 (1957).
131. Burgy, Krohn, Novey, Ringo, Telegdi, Proc. Second Internat. Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 30, P/692.
132. Telegdi V. L., Rev. Mod. Phys. (July 1959).
133. Smith P. B., Allen J. S., Phys. Rev., 81, 381 (1951).
134. Davis R., Phys. Rev., 86, 976 (1952).
135. Rodebeck G. W., Allen J. S., Phys. Rev., 86, 446 (1952).
136. Allen J. S., Jentschke W. K., Phys. Rev., 89, 902 (1953).
137. Robson J. M., Phys. Rev., 100, 933 (1955).
138. Maxson, Allen, Jentschke, Phys. Rev., 97, 109 (1955).
139. Good M. L., Lauer E. J., Phys. Rev., 105, 213 (1957).
140. Alford W. P., Hamilton A. R. Phys. Rev., 105, 673 (1957).
141. Rustad B. M., Ruby S. L., Phys. Rev., 89, 880 (1953); 97, 991 (1955).
142. Hermannsfeldt, Stahelin, Maxson, Allen, Phys. Rev., 107, 641 (1957).

143. Herrmannsfeldt, Burman, Stahelin, Allen, Braid, Phys. Rev. Lett., **1**, 61 (1958).
144. Lauritsen, Barnes, Fowler, Lauritsen, Phys. Rev. Lett., **1**, 326 (1958).
145. Barnes, Fowler, Greenstein, Lauritsen, Nordberg, Phys. Rev. Lett., **1**, 328 (1958).
146. Lauterjung, Schimmer, Maier-Leibnitz, Zs. f. Phys., **150**, 657 (1958).
147. Awschalom M., Phys. Rev., **101**, 1041 (1956).
148. Доброхотов, Пазаренко, Лукьянов, ЦЕРН Конференция по физике больших энергий, 1958.
149. Cowan, Harrison, Langer, Reines, Nuovo Cimento, **3**, 649 (1956).
150. McCarthy J. A., Phys. Rev., **90**, 853 (1953).
151. Inghram M. G., Reynold J. H., Phys. Rev., **76**, 1265 (1949); **78**, 822 (1950).
152. Hayden R. J., Inghram M. G., Nat. Bur. Stand. Circ. 522, 189 (1953).
153. Kohman T. P., AEC. Report. NYO-3626, 1954.
154. Selig H., Диссертация, Carnegie Institute of Technology, AEC. Report NYO-6626, 1954.
155. Winter R. G., Phys. Rev., **99**, 88 (1955).
156. Detoeuf J. F., Moch R., Journ. de phys. et rad., **16**, No. 12, 987 (1955).
157. Fremlin J. H., Walters M. C., Proc. Phys. Soc., **A65** 911 (1952).
158. Kalkstein M. L., Libby W. F., Phys. Rev., **85**, 368 (1952).
159. Fireman E. L., Schwarzer D., Phys. Rev., **86**, 451 (1952).
160. Levine, Ghiorso, Seaborg, Phys. Rev., **77**, 296 (1950).

ВОЛЬФГАНГ ПАУЛИ
СТАТЬИ ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ

ПРИНЦИП ЗАПРЕТА И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

(Нобелевская лекция, прочитанная 13 декабря 1946 г.
в Стокгольме)

История открытия принципа запрета, за которое мне выпала честь в 1945 году получить Нобелевскую премию, началась в мои студенческие годы в Мюнхене. Изучив еще школьником в Вене основы классической физики и новой в то время теории относительности Эйнштейна, на лекциях Зоммерфельда в Мюнхенском университете я познакомился с теорией строения атома, весьма удивительной с точки зрения классической физики. Меня не миновало потрясение, которое испытывает каждый физик с классическим образом мышления при первом знакомстве с «Основным постулатом квантовой теории» Бора. В то время развивались два подхода к решению трудных проблем, связанных с квантом действия. Первый заключался в стремлении навести абстрактный порядок среди новых понятий, отыскав ключ для перевода классической механики и электродинамики на квантовый язык, который был бы их логическим обобщением. К этой цели был направлен «принцип соответствия» Бора. В противоположность этому Зоммерфельд, натолкнувшись на трудности, связанные с применением понятий, основанных на кинематических моделях, занимался исследованием спектральных законов с помощью ряда целых чисел, следуя, как когда-то Кеплер при изучении планетной системы, внутреннему чувству гармонии. Оба подхода, с моей точки зрения не противоречащих один другому, оказали на меня влияние. Ряд целых чисел 2, 8, 18, 32, ..., указывающих на длину периодов в периодической системе элементов, усиленно дискутировался в Мюнхене одновременно с замечанием шведского физика Ридберга о том, что эти числа образуются по простой формуле

$2n^2$, причем n пробегает ряд целых чисел. Зоммерфельд, в частности, пытался связать число 8 с числом вершин куба.

Новая фаза моей научной жизни началась после того, как я впервые лично встретился с Нильсом Бором. Это было в 1922 г., когда он прочитал в Гёттингене цикл лекций, в которых рассказал о своих теоретических исследованиях периодической системы элементов. Напомню лишь кратко, что существенным результатом этих исследований явилось успешное объяснение Бором в рамках сферически-симметричной модели атома заполнения промежуточных атомных оболочек и общих свойств редкоземельных элементов. Но уже в своих ранних работах Бор подчеркивал, что решающее значение имеет вопрос о том, почему ни в одном из атомов электроны не занимают самой низшей оболочки. В своих гёттингенских лекциях он подробно рассматривал заполнение внутренней оболочки в атоме гелия и существенную связь его с двумя некомбинирующимися спектрами гелия — спектрами ортогелия и парагелия. На основе классической механики для этого явления нельзя было найти никакого убедительного объяснения. На меня произвело сильное впечатление, что Бор тогда и в последующих дискуссиях говорил *об общем* правиле, по которому происходило бы заполнение *любой* оболочки и в котором, в противоположность попытке Зоммерфельда, число 2 было бы столь же существенным, как и 8.

По приглашению Бора я приехал осенью 1922 г. в Копенгаген, где начал серьезно заниматься проблемой «аномального эффекта Зеемана», как спектроскописты называли в то время отличающееся от нормального триплета расщепление спектральных линий в магнитном поле. Аномальное расщепление, с одной стороны, подчинялось изящным и простым законам, и уже Ланде [1] удалось вывести из наблюдаемого расщепления спектральных линий более простое расщепление спектральных термов. При этом наиболее фундаментальным достижением Ланде было использование полуцелых магнитных квантовых чисел для дублетных спектров щелочных металлов. С другой стороны, с точки зрения механической модели атома аномальное расщепление было непонятным, поскольку весьма общие предположения об электроны неизменно приводили к тому же триплету, независимо от того, какая теория применялась — классическая или квантовая. Более тщательное изучение этой проблемы оставило во мне чувство, что она стала лишь еще недоступнее. Теперь мы знаем, что в то время нам встретились одновременно две различные по своей логической природе трудности. Первая

из них — это отсутствие общего ключа для перевода заданной механической модели на язык квантовой теории, в то время когда предпринимались тщетные попытки описания самих стационарных квантовых состояний с помощью классической механики. Вторая трудность заключалась в отсутствии самой классической модели, на основе которой можно было бы получить аномальное расщепление спектральных линий атома во внешнем магнитном поле. Поэтому неудивительно, что тогда я не смог найти удовлетворительного решения проблемы. Однако мне удалось обобщить анализ термов, проделанный Ланде, на случай очень сильных магнитных полей, — случай, который из-за магнитооптического перехода во многих отношениях проще (эффект Пашена — Бака). Эта ранняя работа имела решающее значение для открытия принципа запрета.

Очень скоро после возвращения в 1923 г. в Гамбургский университет в качестве приват-доцента я прочитал вступительную лекцию о периодической системе элементов. Содержание этой лекции совсем не удовлетворяло меня, так как проблема заполнения электронных оболочек тогда не продвинулась еще ни на шаг. Единственное, что было ясно, — это то, что между этой проблемой и теорией мультиплетной структуры должна существовать теснейшая связь. Поэтому я предпринял попытку еще раз рассмотреть простейший случай — дублетную структуру щелочных металлов. Согласно ортодоксальной в то время точке зрения, которой придерживался и Бор в своих уже упомянутых гёттинггенских лекциях, причиной этой дублетной структуры считали не равный нулю орбитальный момент атомного остатка.

Осенью 1924 г. я опубликовал ряд возражений против этой точки зрения, которую я окончательно отверг как неправильную, и выдвинул вместо нее предположение о новом квантово-теоретическом свойстве электрона, которое я назвал «двузначностью, не поддающейся классическому описанию» [3]. К этому времени появилась работа английского физика Стонера [4], содержащая наряду с улучшением классификации электронов в подгруппах следующее существенное замечание: при заданной величине главного квантового числа число электрических уровней отдельного электрона в спектрах щелочных металлов во внешнем магнитном поле равно числу электронов в замкнутой оболочке инертных газов, соответствующей этому главному квантовому числу. Тогда на основе моих прежних результатов по классификации спектральных термов в сильном магнитном поле для меня прояснилась общая формулировка принципа

запрета. Основную мысль можно высказать так: сложные числа электронов в замкнутых оболочках сводятся к простому числу 1, если классификация оболочки проводится с помощью значений 4 квантовых чисел при условии, что снимается всякое вырождение. Вообще невырожденный уровень является уже «заполненным», если он занят одним-единственным электроном; состояния, противоречащие этому постулату, запрещаются.

Эта общая формулировка принципа запрета была опубликована в Гамбурге весной 1925 г. [5], после того как во время посещения Тюбингена мне удалось подтвердить с помощью имевшихся там спектроскопических данных некоторые дополнительные следствия относительно аномального эффекта Зеемана в более сложных атомах. Физики, кроме специалистов по классификации спектральных термов, считали принцип запрета малопонятным, поскольку четвертая степень свободы электрона не описывалась никакой моделью. Этот пробел был заполнен гипотезой Уленбека и Гаудсмита о спине электрона [6], которая позволила понять аномальный эффект Зеемана просто на основе предположения, что спиновое квантовое число электрона есть $\frac{1}{2}$ и что отношение магнитного момента к механическому вдвое больше, чем для обычной орбиты электрона. С того времени принцип запрета оказался тесно связанным с представлением о спине. Хотя я сначала сильно сомневался в этой идее ввиду ее классического характера, но в конце концов все же стал ее сторонником после того, как Томас [8] вычислил величину дублетного расщепления. С другой стороны, мои прежние сомнения, а также осторожное выражение «двузначность, не поддающаяся классическому описанию», в дальнейшем получили известное подтверждение, так как Бор показал с помощью волновой механики, что спин электрона нельзя измерить в классически описываемых опытах (например, посредством отклонения молекулярных пучков во внешних магнитных полях), и поэтому спин следует рассматривать как существенно квантовомеханическое свойство электрона [9]¹).

Последующее развитие проходило под знаком появления новой квантовой механики. В том же 1925 г., когда я опубликовал свою работу о принципе запрета, де Бройль сформули-

¹) По поводу этой ранней истории принципа запрета см. также нашу заметку, опубликованную в 1946 г. в *Science*, которая частично совпадает с первой частью настоящей лекции.

ровал свое понятие «волн материи», а Гейзенберг — новую матричную механику, за которой в следующем году быстро появилась волновая механика Шредингера.

Вряд ли стоит теперь особенно подчеркивать все значение и фундаментальный характер этих открытий, так как эти физики сами разъясняли здесь, в Стокгольме, содержание своих открытий [10]. Да и время не позволяет мне подробно рассказать об общем теоретико-познавательном значении новой области квантовой механики, тем более, что это уже сделано в ряде статей Бора [11], в которых он применил новое фундаментальное понятие «дополнительности». Я напомним только о том, что в квантовой механике речь идет лишь о возможных, а не о действительно происходящих событиях. Это звучит там примерно следующим образом: «это невозможно» или «возможно либо то, либо это», но никогда не утверждается: «это действительно произойдет тогда-то и там-то». Действительное наблюдение оказывается событием, выходящим за пределы описания посредством физических законов, и представляет собой в общем случае дискретный выбор из различных возможностей, предоставляемых в наше распоряжение статистическими законами новой теории. Только этот отказ от старых требований об объективном, независимом от способа и рода наблюдения описании физических явлений позволил восстановить замкнутость квантовой механики, потерянную ею в сущности уже в результате открытия Планком кванта действия. Не разъясняя здесь изменение точки зрения современной физики на такие понятия, как «причинность» и «физическая реальность», по сравнению с прежней, классической физикой, я хочу обсудить место принципа запрета в рамках новой квантовой механики.

Как показал впервые Гейзенберг [12], квантовая механика приводит к качественно различным результатам для частиц тождественных (например, электронов) и нетождественных. Ввиду невозможности различить тождественные частицы друг от друга, волновые функции, описывающие совокупность заданного числа тождественных частиц в конфигурационном пространстве, распадаются на разные классы симметрии, которые не могут быть переведены друг в друга внешними воздействиями. В понятие «конфигурационное пространство» мы включаем здесь и спиновую степень свободы, которая описывается в волновой функции отдельной частицы переменной, могущей принимать только конечное число значений. Для электронов это число равно 2, так что конфигурационное пространство N

электронов имеет $3N$ пространственных измерений и N «двухзначных» переменных. Среди различных классов симметрии важнейшими (а для двух частиц даже единственными) являются: симметричный класс, в котором волновые функции не меняют своего знака при обмене пространственных и спиновых координат двух частиц, и антисимметричный класс, в котором при таком обмене волновые функции меняют знак на противоположный. На этой стадии теории вырисовываются три различные логически возможные гипотезы относительно реально существующих в природе совокупностей многих частиц:

1) совокупность представляет собой смесь всех классов симметрии;

2) существует только симметричный класс;

3) существует только антисимметричный класс.

Мы увидим, что первое предположение в природе не осуществляется. Далее, только третье предположение не противоречит принципу запрета, поскольку антисимметричная функция для двух частиц в одинаковых состояниях тождественно равна нулю. Поэтому третье предположение можно рассматривать как правильную и общую квантовомеханическую формулировку принципа запрета. Эта возможность на самом деле осуществляется для электронов. Такая ситуация представлялась мне в одном важном отношении неудовлетворительной. Уже в своей первоначальной работе я особенно подчеркивал то обстоятельство, что мне не удалось найти логического обоснования принципа запрета или вывести его из более общих предположений. У меня всегда было такое чувство, которое не исчезло и до сих пор, что в этом обстоятельстве повинен недостаток теории. Сначала я, естественно, надеялся, что новая квантовая механика, позволившая дать теоретическое обоснование столь многим применявшимся в то время полуэмпирическим правилам, приведет и к строгому выводу принципа запрета. Однако вместо этого для электронов получился даже еще один запрет: исключаются не только определенные состояния, но и целые классы состояний, а именно — все классы, отличающиеся от антисимметричного класса. На мой взгляд, это неизбежно производит впечатление, как будто здесь на светлое здание новой квантовой механики падает тень некоторой незавершенности. Мы еще вернемся к этому вопросу позднее при рассмотрении релятивистской квантовой механики, а теперь сделаем обзор дальнейших результатов применения волновой механики к системам многих тождественных частиц.

В уже упомянутой работе Гейзенбергу удалось дать простое объяснение двум неомбинирующимся спектрам гелия, о которых говорилось в начале этого доклада. На самом деле наряду с резким разделением волновых функций на классы симметрии по отношению к пространственным координатам и к спиновым переменным, вместе взятым, существует также приближенное разделение на классы симметрии относительно одних только пространственных координат. Это справедливо лишь в той мере, в какой можно пренебречь взаимодействием между спином и орбитальным движением электрона. Таким способом спектры ортогелия и парагелия удалось объяснить тем, что они принадлежат классу симметричных или антисимметричных волновых функций от одних только пространственных координат. Стало ясно, что разности энергий соответствующих уровней обоих классов не имеют ничего общего с магнитным взаимодействием, а обусловлены новым, значительно большим по порядку величины видом энергии, которая называется обменной энергией.

Более фундаментальное значение имеет связь классов симметрии с общими проблемами статистической теории теплоты. Хорошо известно, что эта теория ведет к тому, что энтропия системы (с точностью до некоторого постоянного множителя) совпадает с логарифмом числа квантовых состояний всей системы на так называемой энергетической оболочке. На первый взгляд можно ожидать, что это число должно равняться соответствующему объему многомерного фазового пространства, деленному на h^f , где h — постоянная Планка, а f — число степеней свободы всей системы. Между тем оказалось, что для системы из N тождественных частиц это отношение надо еще разделить на $N!$, чтобы получить для энтропии значение, согласующееся с обычным постулатом однородности, в соответствии с которым энтропия для заданного внутреннего состояния должна быть пропорциональна массе. Таким образом, уже в общей статистической механике появилось качественное различие между тождественными и нетождественными частицами, которое Гиббс пытался выразить в своих понятиях родовой и видовой фазы. В свете результатов волновой механики относительно классов симметрии это деление на $N!$ можно легко объяснить на основе одного из наших двух предположений (второго или третьего), согласно которым в природе встречается только один класс симметрии. Действительно, в этом случае плотность квантовых состояний всей системы в $N!$ раз меньше

плотности, соответствующей первому предположению, допускающему все классы симметрии.

Так как возможен только *один* класс симметрии, то даже в идеальном газе, в котором можно пренебречь энергией взаимодействия между молекулами, должны существовать отклонения от обычного уравнения состояния, как только средняя длина волны де Бройля станет сравнимой со средним расстоянием между молекулами, т. е. при низких температурах и больших плотностях. Статистика для антисимметричного класса была выведена Ферми и Дираком [13]; для симметричного класса это было сделано Эйнштейном [15] и Бозе [14] еще до открытия новой квантовой механики. Первая статистика оказалась применимой к электронам в металле и позволила объяснить магнитные и другие свойства металлов.

Как только был выяснен вопрос о классе симметрии для электронов, сразу возник вопрос о классах симметрии для других частиц. Примером частиц с только симметричными волновыми функциями (второе предположение), как уже давно известно, являются фотоны. Это не только непосредственно следует из вывода Планком спектрального распределения энергии излучения в термодинамическом равновесии, но и необходимо для применимости к световым волнам классической теории поля в предельном случае, когда в отдельном квантовом состоянии находится большое, но точно не определенное число фотонов. Заметим, что симметричный класс у фотонов сопровождается одновременно целым значением спина 1, тогда как антисимметричный класс у электронов сопровождается полуцелым значением спина $\frac{1}{2}$.

Осталось еще рассмотреть важный вопрос о классах симметрии для ядер. Конечно, и в этом случае класс симметрии определяется взаимозаменяемостью как пространственных координат, так и спиновых переменных двух тождественных ядер. Спиновая переменная может принимать $2I+1$ значений, причем I — спиновое квантовое число ядра, могущее быть целым или полуцелым. Сделаю по этому поводу замечание исторического характера. В 1924 г., еще до открытия спина электрона, я предложил гипотезу о ядерном спине с целью объяснить сверхтонкую структуру спектральных линий [16]. Это предположение, с одной стороны, натолкнулось на ряд противоречий, но, с другой стороны, помогло Гаудсмиту и Уленбеку при открытии электронного спина. Прошло всего несколько лет, и мою попытку объяснения сверхтонкой структуры удалось оконча-

тельно подтвердить экспериментально, а именно посредством экспериментов с участием Зеемана, в которых было установлено существование магнитооптического вырождения сверхтонкой структуры, в точности такого, какое было предсказано мной ранее. С того времени исследование сверхтонкой структуры спектральных линий стало общепринятым методом измерения ядерного спина.

Для экспериментального определения классов симметрии ядер требовались другие методы. Наиболее удобный, если не единственный, заключается в изучении полосатых спектров молекул с двумя тождественными атомами [17, 18]. Можно легко показать, что в основном состоянии электронной конфигурации такой молекулы состояния с целочисленными (или нецелочисленными) вращательными квантовыми числами должны быть симметричными (или антисимметричными) относительно взаимного обмена пространственных координат обоих ядер. Далее, среди $(2I+1)^2$ спиновых состояний пары ядер имеется $(2I+1)(I+1)$ симметричных по спину и $(2I+1)I$ антисимметричных состояний, поскольку $(2I+1)$ состояний с параллельно направленными спинами будут обязательно симметричными. Поэтому мы приходим к следующему выводу: если полная волновая функция пространственных координат и спиновых переменных ядер симметрична, то отношение веса состояний с четным вращательным квантовым числом к весу состояний с нечетным вращательным квантовым числом равно $(I+1) : I$. В противоположном случае антисимметричной полной волновой функции ядер соответствующее отношение равно $I : (I+1)$. Переходы между состояниями с четным и с нечетным вращательным квантовым числом должны быть чрезвычайно редкими, поскольку они могут быть обусловлены только спин-орбитальным взаимодействием ядер. Поэтому отношение весов вращательных состояний с различной четностью приводит к возникновению двух разных систем полос различной интенсивности с чередующимися линиями. Первое применение этого метода привело к результату, что протоны имеют спин $\frac{1}{2}$ и подчиняются принципу запрета, точно так же, как электроны. Первоначальная трудность количественного объяснения удельной теплоемкости молекулы водорода при низких температурах была устранена гипотезой Деннисона [19] о том, что при низких температурах тепловое равновесие между обеими модификациями молекулы водорода (орто- H_2 : нечетные вращательные квантовые числа, параллельные спины протонов; пара- H_2 : четные вращательные квантовые

числа, антипараллельные спины) еще не достигается. Как известно, эта гипотеза позднее была подтверждена измерениями Бонхеффера и Хартека, а также фон Эйкена, доказавшими предсказанное теорией медленное превращение одной модификации в другую.

Среди классов симметрии для других ядер особый интерес представляют классы с различной четностью массовых чисел M и зарядового числа Z ядер. Если рассмотреть сложную систему, состоящую из A_1, A_2, \dots различных частиц, каждая из которых подчиняется принципу запрета, а также из S частиц с симметричными состояниями, то следует ожидать, что состояния этой системы будут симметричными или антисимметричными в зависимости от того, какой будет сумма $A_1 + A_2 + \dots$ — четной или нечетной. Это справедливо, независимо от четности S . Прежде выдвигалось предположение, что ядра состоят из протонов и электронов, так что M должно быть числом протонов, а $(M - Z)$ — числом электронов в ядре. Тогда класс симметрии всего ядра должен был бы определяться четностью Z . Однако давно уже был известен противоречащий этому пример азота, обладающего спином 1 и симметричными состояниями [20, 21].

Затем после открытия нейтрона стали считать, что ядра состоят из протонов и нейтронов, так что массовое число M и зарядовое число Z должны образовываться из Z протонов и $M - Z$ нейтронов. Если бы нейтроны имели симметричные состояния, то класс симметрии ядер опять должен был бы определяться четностью зарядового числа Z . Если же нейтроны подчиняются принципу запрета, то класс симметрии должен определяться четностью массового числа M : при четном M должны появляться симметричные, а при нечетном M антисимметричные состояния. Именно это последнее правило, экспериментально подтверждаемое без исключений, позволило заключить, что нейтроны подчиняются принципу запрета.

Важнейший и простейший решающий эксперимент для ядра с различной четностью M и Z осуществляется на ядре тяжелого водорода — дейтроне ($M=2$ и $Z=1$), которое обладает симметричными состояниями и спином 1, как можно показать, изучая полосатый спектр молекулы из двух дейтронов [22, 23]. Значение спина 1 для дейтрона доказывает, что нейтрон должен иметь полуцелый спин. При этом оправдывается простейшее возможное предположение — спин нейтрона равен $\frac{1}{2}$, как и спин протона и электрона.

Можно надеяться, что будущие эксперименты с легкими ядрами, прежде всего с протонами, нейтронами и дейтронами, дадут нам дальнейшие сведения о действующих между составными частями ядер силах, в настоящее время еще недостаточно известных. В то же время уже теперь можно утверждать, что эти взаимодействия в корне отличаются от электромагнитных взаимодействий. Сравнение нейтрон-протонного и протон-протонного рассеяния показывает, что силы между всеми этими частицами с хорошим приближением тождественны, т. е. не зависят от их электрического заряда. Если учитывать только величину энергии взаимодействия, то можно было бы рассмотреть и стабильный дипротон, или ${}_2\text{He}^2(M=2, Z=2)$ примерно с такой же энергией связи, как у дейтрона. Однако такое состояние, в согласии с опытом, запрещается нашим принципом, поскольку оно обладало бы волновой функцией, симметричной относительно обоих протонов. Это только простейший пример применения принципа запрета к сложным ядрам, для которых понимание этого принципа необходимо, потому что сами составные части ядер подчиняются ему.

Чтобы подготовиться к обсуждению кардинальных вопросов, приведем здесь общий закон природы, касающийся связи между спином и классом симметрии. *Полуцелое значение спинового квантового числа всегда связано с антисимметричными состояниями (принцип запрета), а целочисленному спину всегда соответствуют симметричные состояния.* Этот закон выполняется не только для протонов и нейтронов, но и для фотонов и электронов. Отсюда легко видеть, что он выполняется и для сложных систем, если только они состоят из частиц, подчиняющихся этому закону. Для теоретического обоснования этого закона мы должны рассмотреть релятивистскую волновую механику, так как мы видели, что нерелятивистская волновая механика, без сомнения, не может объяснить его.

Рассмотрим сначала классические поля¹⁾, при вращении в обычном пространстве преобразующиеся по однозначному представлению группы вращений. В дальнейшем такие поля мы будем кратко называть однозначными. Если не учитывать взаимодействия между различными полями, то можно предположить, что все компоненты поля удовлетворяют волновому уравнению второго порядка, общим решением которого будет

¹⁾ По поводу последующего см. обзор автора [24], где указана более ранняя литература. См. также [25].

суперпозиция плоских волн. Частота и волновое число этих плоских волн связаны уравнением, которое в соответствии с основным постулатом де Бройля получается из соотношения между энергией и импульсом, существующего в релятивистской механике, после деления энергии и импульса на постоянную \hbar , равную постоянной Планка h , деленной на 2π . Поэтому в классических уравнения поля в общем случае появится новая постоянная μ , имеющая размерность обратной длины и связанная с массой покоя частицы уравнением $m = \hbar \mu / c$, где c — скорость света в пустоте. Из условия однозначности поля можно заключить, что число возможных плоских волн с фиксированной частотой, волновым числом и направлением распространения для $\mu \neq 0$ всегда нечетное. Не приводя более точного определения спина, можно считать эту особенность поляризации плоских волн характерной для полей, при квантовании которых появляются целочисленные значения спина.

Простейшими примерами однозначных полей являются скалярное поле и поле, образованное четырех-вектором и антисимметричным тензором, например потенциалом и напряженностью поля в теории Максвелла. В то время как скалярное поле подчиняется просто обычному волновому уравнению второго порядка, в котором появляется также член, пропорциональный μ^2 , второе поле должно подчиняться полученным Прока другим уравнениям поля, представляющим собой обобщение уравнений Максвелла, в которые они переходят в частном случае $\mu = 0$. Интересно отметить, что в этом простейшем случае однозначных полей плотность энергии образует положительно определенную квадратичную форму из напряженностей поля и их первых производных в заданной точке. В общем случае однозначных полей можно по крайней мере показать, что интеграл от энергии по всему пространству всегда положителен.

Компоненты поля могут быть либо действительными, либо комплексными. В случае комплексного поля, кроме энергии и импульса поля, можно определить подчиняющийся уравнению непрерывности четырех-вектор, который можно отождествить с четырех-вектором электрического тока. Четвертая компонента его определяет плотность электрического заряда и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Можно полагать, что мезоны, наблюдаемые в космических лучах, имеют целочисленный спин и поэтому описываются таким комплексным полем. В случае действительных полей этот четырех-вектор тождественно обращается в нуль.

Я считаю, что при формальном процессе квантования поля можно не учитывать взаимодействия поля с источниками, особенно применительно к излучению в термодинамическом равновесии, когда специфические свойства источника не играют никакой роли. При рассмотрении этой проблемы на самом деле предпринимались попытки пользоваться такими же математическими методами перехода от классической системы к соответствующей квантовомеханической системе, которые оказались столь плодотворными при переходе от классической механики точки к волновой механике. Между тем нельзя забывать, что поле можно наблюдать только с помощью пробных тел, которые сами являются источниками поля.

Результаты формального процесса квантования поля отчасти были весьма ободряющими. Проквантованные поля оказалось возможным описывать волновой функцией, зависящей от бесконечной последовательности (неотрицательных) целых чисел. Поскольку суммарная энергия и суммарный импульс поля, а в случае комплексных полей и суммарный электрический заряд, оказываются линейными комбинациями этих чисел, то эти числа можно отождествить с числами частиц, заполняющими одно определенное состояние отдельной частицы. Переходя к последовательности конфигурационных пространств с различным числом измерений, соответствующим возможным числам заполнения, можно легко показать, что это описание нашей системы посредством волновой функции от целых чисел эквивалентно совокупности частиц, волновые функции которых в их конфигурационных пространствах симметричны.

Для случая электромагнитного поля Бор и Розенфельд [26] вскоре показали, что соотношения неопределенностей, получаемые для усредненных по конечной области пространства — времени величин из формальных правил коммутации этой теории, имеют непосредственный физический смысл в той мере, в какой можно рассматривать источники классически, пренебрегая их атомистической структурой. Подчеркнем следующее свойство этих правил коммутации: все физические величины двух мировых точек, разделенных пространственно-подобным интервалом, коммутируют между собой. На самом деле это необходимо из физических соображений, так как возмущение при измерении в мировой точке P_1 может достигать только таких точек P_2 , для которых вектор $P_1 P_2$ времени подобен, т. е. $c(t_1 - t_2) > r_{12}$. Для точек P_2 с пространственно-подобным вектором $P_1 P_2$, для которых $c(t_1 - t_2) < r_{12}$, это возмущение

дойти не может, и измерения в P_1 и P_2 в этом случае не могут влиять друг на друга. Этот вывод позволил рассмотреть логическую возможность существования частиц с целочисленным спином, подчиняющихся принципу запрета. Такие частицы должны описываться последовательностью конфигурационных пространств с различным числом измерений и волновыми функциями, антисимметричными по их пространственным координатам, или также волновыми функциями от целых чисел, которые снова можно рассматривать как числа заполнения частицами одного определенного состояния, могущие принимать теперь только два значения — 0 или 1. Вигнер и Иордан [27]¹⁾ показали, что и в этом случае можно определить операторы, зависящие от обычных пространственно-временных координат и действующие на указанные волновые функции. Однако эти операторы уже не удовлетворяют правилам коммутации: в математические условия, которым удовлетворяют эти операторы, вместо разности входит сумма двух возможных произведений двух операторов, отличающихся разным порядком сомножителей. Простая перемена знака в этих соотношениях в корне меняет физический смысл этого формального аппарата. Для принципа запрета никогда не может существовать предельный случай, в котором такие операторы можно заменить классическим полем. Применяя формальный аппарат Вигнера и Иордана, мне удалось показать при весьма общих предположениях, что релятивистски инвариантная теория, описывающая системы тождественных частиц с целочисленным спином, подчиняющихся принципу запрета, должна всегда приводить к некоммутативности физических величин, связанных пространственно-подобным вектором [29]. В свою очередь это противоречит разумному физическому принципу, справедливому для частиц с симметричными состояниями. Так, благодаря синтезу требований релятивистской инвариантности и свойств квантования поля удалось сделать шаг к пониманию связи между спином и классом симметрии.

Квантование однозначных комплексных полей с отличным от нуля четырех-вектором электрического тока приводит далее к следующему результату: должны существовать частицы как с положительным, так и с отрицательным зарядом, и частицы эти могут уничтожаться и рождаться во внешнем электромагнитном поле [27, 28]. Это рождение и уничтожение пар, являю-

¹⁾ См. также [28].

щееся следствием теории, требует резкого разграничения понятий плотности заряда и плотности частиц. Последнее понятие в релятивистской волновой теории не появляется ни для электрически заряженных, ни для электрически нейтральных полей. Это представляется удовлетворительным, так как применение понятия частиц и соотношения неопределенностей (например, при анализе мысленных экспериментов, подобных микроскопу на γ -излучении) также приводит к результату, что пространственное положение частицы может быть определено лишь с ограниченной точностью [30, 31]. Это в одинаковой мере относится к частицам с целым и полуцелым спином. В состоянии со средним значением энергии E , описываемом волновым пакетом со средней частотой $\nu = E/h$, частицу можно локализовать только с неопределенностью $\Delta x > hc/E$ или $\Delta x > c/\nu$. Для фотонов пределом локализации служит длина волны; для частиц с конечной массой покоя и характерным размером $\mu^{-1} = h/mc$ в системе, в которой покоится центр волнового пакета, описывающего состояние частицы, этот предел получается из соотношения $\Delta x > h/mc$ или $\Delta x > \mu^{-1}$.

До сих пор я рассказывал только об удовлетворительных результатах применения квантовой механики к классическим полям. Мы видели, что утверждения этой теории о напряженности поля, усредненной по конечной области пространства — времени, имеют непосредственный физический смысл, тогда как для значения напряженности поля в одной заданной точке это неверно. К сожалению, в классические выражения для энергии поля входят взятые по таким областям средние значения квадратов напряженности поля, которые нельзя выразить через средние значения самих напряженностей поля. Это ведет к тому, что выведенная для квантованного поля нулевая энергия вакуума становится бесконечной — результат, непосредственно связанный с тем, что рассматриваемая система имеет бесконечное число степеней свободы. Ясно, что эта нулевая энергия не соответствует никакой физической реальности; например, она не является источником гравитационного поля. Формально можно без труда ввести дополнительные бесконечные постоянные компенсирующие члены, не зависящие от рассматриваемого состояния; по-моему, этот результат уже служит указанием на то, что становится необходим коренной пересмотр понятий, лежащих в основе современной теории квантованных полей.

Я рассказал здесь, отвлекаясь от исторического порядка, об однозначных полях, чтобы продемонстрировать некоторые

особенности релятивистской квантовой теории. Уже раньше Дирак [32] составил свои релятивистские волновые уравнения, соответствующие материальным частицам со спином $\frac{1}{2}$, причем он применял два так называемых спинора, каждый из которых обладал двумя компонентами. Он применил эти уравнения к задаче об отдельном электроны в электромагнитном поле. Несмотря на большой успех этой теории при количественном объяснении тонкой структуры энергетических уровней в атоме водорода и при вычислении эффективного сечения рассеяния фотонов электронами, из нее получилось следствие, находившееся в очевидном противоречии с опытом. Согласно этой теории, энергия электрона могла принимать как положительные, так и отрицательные значения, и во внешних электромагнитных полях могут происходить переходы из состояний с одним знаком энергии в состояния с противоположным знаком энергии. С другой стороны, в этой теории существует удовлетворяющий уравнению четырех-вектор с положительно определенной четвертой компонентой, соответствующей плотности.

Можно показать, что подобная ситуация возникает для всех полей, которые, подобно спинорам, при вращениях в обычном пространстве преобразуются по двузначным представлениям, причем при повороте на полную окружность они меняют знак. Мы будем называть такие величины кратко «двузначными». Из релятивистских волновых уравнений для таких величин всегда можно получить удовлетворяющий уравнению непрерывности билинейный вектор, четвертая компонента которого. по крайней мере после интегрирования по пространству, будет существенно положительной величиной. С другой стороны, выражение для суммарной энергии может иметь как положительный, так и отрицательный знак.

Существует ли какой-нибудь способ, чтобы отнести отрицательный знак перед энергией к плотности четырех-вектора? Тогда последнюю можно было бы трактовать как плотность заряда в противоположность плотности частиц, и энергия стала бы положительной, как и должно быть. Вы знаете, что ответ Дирака привел к тому, что могло бы на самом деле получиться при применении принципа запрета. В своем докладе, прочитанном в Стокгольме [10], Дирак сам рассказал о своем предложении по-новому интерпретировать его теорию, согласно которому в истинном вакууме все состояния с отрицательной энергией должны быть заполненными, и наблюдаемыми следует считать только отклонения от этого состояния с минимальной

энергией, а именно дырки в море этих заполненных состояний. Именно принцип запрета гарантирует устойчивость вакуума, в котором все состояния с отрицательной энергией заполнены. Кроме того, дырки обладают всеми свойствами частиц с положительной энергией и положительным зарядом, поскольку они могут рождаться и уничтожаться парами во внешних электромагнитных полях. Предсказанные таким образом позитроны, эти точные зеркальные изображения электронов, действительно были обнаружены экспериментально.

Новая интерпретация, очевидно, принципиально отказывается от точки зрения, характерной для одночастичной задачи, и с самого начала рассматривает задачу многих частиц. Давно уже нельзя утверждать, что релятивистские уравнения Дирака являются единственно возможными; однако если мы хотим иметь релятивистские уравнения поля, соответствующие частицам со спином $\frac{1}{2}$, то мы обязательно должны прийти к уравнениям Дирака. Хотя логически возможно проквантовать эти уравнения как классические уравнения поля, что дало бы симметричные состояния систем, состоящих из многих таких частиц, но это противоречило бы требованию, чтобы энергия системы была всегда положительно определенной. С другой стороны, это требование выполняется, если мы примем принцип запрета и интерпретацию Дирака для вакуума и дырок, что вместе с тем ставит на место математической фикции положительной плотности частиц физическое понятие плотности заряда, могущей иметь оба знака. Подобное заключение справедливо для всех релятивистских волновых уравнений с двузначными компонентами поля. Это был другой (исторически первый) шаг к пониманию связи между спином и классом симметрии. Упомяну лишь кратко, что новая интерпретация Дирака для пустых и занятых состояний с отрицательной энергией допускает очень элегантную формулировку с помощью упомянувшегося выше формального аппарата Иордана и Вигнера. Действительно, можно перейти от старой интерпретации к новой, просто заменив значение одного из операторов его сопряженным, если он действует на начальные состояния с отрицательной энергией. Бесконечный «нулевой заряд» занятых состояний с отрицательными энергиями тогда будет полным аналогом бесконечной нулевой энергии квантованных однозначных полей. Этот заряд также не имеет никакого физического значения и не служит источником электромагнитного поля.

Несмотря на формальную аналогию между квантованием

однозначных полей, ведущим к совокупности тождественных частиц с симметричными состояниями, и полей, соответствующих частицам, подчиняющимся принципу запрета и описываемым двузначными операторными величинами, которые зависят от пространственно-временных координат, существует безусловно принципиальное различие, а именно для последних нет предельного случая, когда математические операторы можно трактовать как классические поля. С другой стороны, следует ожидать, что возможности и пределы применимости понятий пространства и времени, выражающиеся в различных понятиях плотности заряда и плотности частиц, должны быть одинаковы для заряженных частиц с целым и полуцелым спином.

Трудности современной теории значительно возрастают, если рассматривать взаимодействие электромагнитного поля с веществом, потому что в этом случае в результате применения теории возмущений появляются хорошо известные бесконечности в задаче об энергии электрона в своем собственном поле — так называемой собственной энергии. Корень этих трудностей, по-видимому, лежит в том, что формальный аппарат квантования поля имеет непосредственный физический смысл лишь до тех пор, пока источники поля можно считать непрерывно распределенными и подчиняющимися законам классической физики, причем рассматриваются только величины поля, усредненные по конечной области пространства — времени. Однако сами электроны являются существенно неклассическими источниками поля.

В заключение своего доклада я хочу высказать убеждение, что корректная теория не должна приводить ни к бесконечным нулевым энергиям, ни к бесконечным нулевым зарядам и что она не должна пользоваться искусственными математическими приемами, чтобы устранить бесконечности и сингулярности; она не должна также изобретать «гипотетический мир», представляющий собой просто математический вымысел, пока теория не сможет сформулировать правильное объяснение действительного физического мира.

Логически мой доклад о принципе запрета и квантовой механике не является последним словом. Я думаю, что это слово можно произнести только тогда, когда будет создана теория, которая получит значение постоянной тонкой структуры и объяснит тем самым атомистическую структуру электричества — это столь существенное свойство всех атомарных источников электрических полей, реально существующих в природе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Landé A., Zs. f. Phys., 5, 231 (1921); Zs. f. Phys., 7, 398 (1921); Phys. Zs., 22, 417 (1921).
2. Pauli W., Zs. f. Phys., 16, 155 (1923).
3. Pauli W., Zs. f. Phys., 31, 373 (1925).
4. Stoner E. C., Phil. Mag., 48, 719 (1924).
5. Pauli W., Zs. f. Phys., 31, 765 (1925).
6. Goudsmit S., Uhlenbeck G., Naturwiss., 13, 953 (1925); Nature, 117, 264 (1926).
7. Thomas L. H., Nature, 117, 514 (1926); Phil. Mag., 3, 1 (1927).
8. Френкель Я., Zs. f. Phys. 37, 243 (1926).
9. Rapport du Sixième Conseil Solvay de Physique, Paris, 1932, p. 217.
10. Нобелевские доклады В. Гейзенберга, Э. Шредингера и П. А. М. Дирака, в книге «Die moderne Atomtheorie», Leipzig, 1934.
11. Bohr N., в книге «Atomic Theory and the Description of Nature, Cambridge», 1934; Nature, 131, 421, 457 (1933).
12. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 38, 411 (1926); 39, 499 (1926).
13. Fermi E., Zs. f. Phys., 36, 902 (1926); Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A112, 661 (1926).
14. Bose S. N., Zs. f. Phys., 26, 178 (1924); 27, 384 (1924).
15. Einstein A., Berl. Ber., 261 (1924); 1, 8 (1925).
16. Pauli W., Naturwiss., 12, 741 (1924).
17. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 41, 239 (1927).
18. F. Hund, Zs. f. Phys., 42, 39 (1927).
19. Dennison D. M., Proc. Roy. Soc., A115, 483 (1927).
20. Kronig L., Naturwiss., 16, 335 (1928).
21. Heitler W., Herzberg G., Naturwiss., 17, 673 (1929).
22. Lewis G. N., Ashley M. F., Phys. Rev., 43, 837 (1933).
23. Murphy G. M., Johnston H., Phys. Rev., 45, 550 (1934); 46, 95 (1934).
24. Pauli W., Rev. Mod. Phys., 13, 203 (1941).
25. Pauli W., Weisskopf V., Helv. phys. Acta, 7, 809 (1934).
26. Bohr N., Rosenfeld L., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 12, No. 8 (1933).
27. Jordan P., Wigner E., Zs. f. Phys., 47, 631 (1928).
28. Фок В., Zs. f. Phys., 75, 622 (1932).
29. Pauli W., Ann. Inst. Poincaré, 6, 137 (1936); Phys. Rev., 58, (1936).
30. Ландау Л., Peierls R., Zs. f. Phys., 69, 56 (1931).
31. Pauli W., Handbuch der Physik, Bd., 24, 1933, Tl. 1. (См. перевод: В. Паули, Принципы волновой механики, М.—Л., 1947.)
32. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A117, 610 (1928).

НАРУШЕНИЕ ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В ЗАКОНАХ АТОМНОЙ ФИЗИКИ¹⁾

§ 1. КАТЕГОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО C , P и T

Для обсуждения разных свойств симметрии законов физики целесообразно разделить физические взаимодействия на три категории: сильные взаимодействия, к которым относятся взаимодействия нуклонов с нуклонами и мезонами; промежуточные — электромагнитное взаимодействие, обеспечивающее также существование атомных оболочек; и слабые взаимодействия, действующие как во всех процессах β -радиоактивности, сопровождающихся испусканием или поглощением нейтрино, так и при распадах Λ - и K -мезонов, происходящих без участия нейтрино.

Сильные взаимодействия обладают более высокой степенью симметрии, чем электромагнитные, однако подробное рассмотрение этих категорий не входит в задачи настоящего обзора. Достаточно указать лишь, что эти две категории, как вытекает с большой точностью из экспериментального материала, *инвариантны* относительно каждой из перечисленных далее операций симметрии по отдельности. Каждая из этих операций сопоставляет некоторому возможному физическому состоянию или явлению другое явление, также не противоречащее рассматриваемым здесь законам природы.

1. Замена частицы античастицей C (зарядовое сопряжение)²⁾. Законы природы, которым подчиняются различные «элементарные частицы» и их взаимодействия, обладают общим свойством:

¹⁾ Experientia, vol. XIV/1, 1958, перепечатано в книге W. Pauli, Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie, Braunschweig, 1961.

²⁾ Буква C означает «charge» — заряд (англ.).

каждой частице соответствует античастица. В случае электрически заряженных частиц знак заряда античастицы противоположен знаку заряда частицы. Однако не каждая подобная пара частиц с противоположным зарядом обязательно составляет частицу и античастицу. Далее, нейтральной частице также может соответствовать отличающаяся от нее античастица. Например, недавно обнаруженный экспериментально антинейтрон при одинаково направленном спине обладает магнитным моментом, противоположным моменту нейтрона. Вопрос о том, можно ли с помощью закона сохранения разности между общим числом «легких частиц» (лептонов) и «легких античастиц» экспериментально различить нейтрино и антинейтрино, все еще остается открытым¹⁾. Для соответствующей разности «тяжелых частиц» (барионов — нуклонов и гиперонов) такой закон сохранения выполняется.

2. Пространственное отражение или инверсия P . Эта операция изменяет знак всех трех пространственных координат и, следовательно, каждому правому винту сопоставляет левый винт. Операция пространственного отражения позволяет отличить так называемые «аксиальные векторы» от «полярных векторов». Собственно, только последние характеризуются *длиной и направлением*, тогда как первые определяются *поверхностью с направлением обхода*. Аксиальные векторы, называемые также псевдовекторами, при отражении не меняют знака, а полярные векторы меняют знак на обратный. Скорость — это полярный вектор, момент импульса, в частности, всякий «спин» — аксиальный вектор.

Приписывание направления псевдовектору не инвариантно относительно отражения; в его определении заключено различие левого винта от правого винта. Инвариантным относительно вращения является задание нормали к поверхности и направления обхода, что и определяет аксиальный вектор. Однако выбор одного из двух возможных направлений этой нормали остается условным. Направление нормали выбирается с помощью правила Ампера или другого эквивалентного правила; например: если рассматриваемой поверхностью является горизонтальная плоскость бумаги, то при обходе против часовой стрелки направление нормали выбирается на читателя, т. е. вверх; при обходе

¹⁾ См. статью Ву в этой книге, на стр. 290. — *Прим. ред.*

по часовой стрелке — вниз. Такие выражения, как «направление спина», всегда следует понимать в указанном условном смысле.

В то время как из двух обычных (полярных) векторов можно образовать P -инвариантный скаляр (произведение длин векторов и косинуса угла между ними), произведение полярного и аксиального векторов будет только *псевдоскаляром*, хотя и инвариантным относительно поворотов системы координат при пространственном отражении, но меняющим знак на обратный. Чтобы определить такое псевдоскалярное произведение вместе со знаком, необходимо сопоставить аксиальному вектору (поверхность с направлением обхода) направление нормали, придерживаясь только что названного условия. Тогда псевдоскалярное произведение будет произведением площади поверхности, длины полярного вектора и косинуса угла между его направлением и условно выбранным (не инвариантным относительно отражения) направлением нормали к поверхности аксиального вектора.

Законы теории, инвариантной относительно пространственного отражения (P -инвариантная теория), не меняют своего вида, если этот псевдоскаляр меняет свой знак; для каждого процесса существует другой равноправный процесс, в котором псевдоскаляр имеет противоположный знак.

Слово четность (английское: *parity*, французское: *parité*) означает для целых чисел подразделение их на четные и нечетные. Распространение этого понятия на пространственное отражение оправдывается тем, что, согласно квантовой механике, в случае инвариантности относительно пространственного отражения собственные состояния для всех взаимодействий распадаются на «четные» и «нечетные» таким образом, что волновые функции четных состояний не меняются при изменении знака всех пространственных координат (инверсии), а волновые функции нечетных состояний при этом меняют свой знак на противоположный. Определенное таким образом число $+1$ для четных состояний и -1 для нечетных состояний и называется *четностью* состояния.

Для взаимодействий, не обладающих P -инвариантностью, энергетические состояния не обладают определенной четностью, поскольку волновые функции при пространственном отражении уже не преобразуются таким простым образом. В соответствии с общепринятым соглашением электрический заряд не меняет своего знака при операции P , так что электрическое поле пред-

ставляет собой полярный, а магнитное поле — аксиальный вектор.

3. Обращение времени T . Эта операция определяется так, что пространственные координаты, равно как и электрический заряд, сохраняют свой знак. Поэтому подобную операцию можно определить точнее как «обращение направления движения» всех процессов. В качестве примера можно указать, что движение заряженной материальной точки во внешнем магнитном поле T -инвариантно лишь при условии, что внешнее магнитное поле меняет свой знак вместе с операцией T .

Важным следствием T -инвариантности является отсутствие электрического дипольного момента у нуклонов (аналогом служит отсутствие вращения молекул в определенном энергетическом состоянии). Слабыми взаимодействиями при этом можно практически пренебрегать.

Экспериментальные и теоретические исследования последних лет снова оживили интерес к вопросу о степени симметрии законов природы. В работе Ли и Янга [1], отмеченной Нобелевской премией в 1957 г. по физике, было убедительно показано, что для слабых взаимодействий (третья категория) экспериментальные доказательства применимости указанных трех операций симметрии совершенно недостаточны. Затем Ли и Янг продемонстрировали эксперименты, с помощью которых можно проверить свойства симметрии для слабых взаимодействий.

Эти и другие аналогичные эксперименты с тех пор проводились много раз и привели к окончательному выводу о нарушении C - и P -инвариантности в слабых взаимодействиях. Подробнее об этом еще будет сказано в § 2. Здесь же следует отметить, что вопрос о T -инвариантности слабых взаимодействий экспериментально еще не решен. С точки зрения теории этот вопрос эквивалентен вопросу о сохранении комбинированной четности CP (или в обратном порядке PC). Из весьма общих и хорошо обоснованных предпосылок, в том числе из характерного для частной теории относительности требования лоренц-инвариантности, следует так называемая теорема CPT . Она утверждает, что из этих общих предпосылок (подробности можно найти в литературе [2—4]¹⁾) непосредственно вытекает инвариантность

¹⁾ Для нелокальных теорий Йост [5] указал эквивалентное теореме CPT условие, которое для локальных теорий выполняется тождественно. Дальнейшие приложения см. в работе [6].

теории относительно объединения (произведения) всех трех операций C , P и T (в какой угодно последовательности). Отсюда, между прочим, следует, что массы частиц и античастиц (в общем случае — уровни энергии системы частиц и системы зарядово-сопряженных частиц) должны быть строго одинаковыми.

§ 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НАРУШЕНИЯ ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ (P) И ЗАРЯДОВОЙ СИММЕТРИИ (C)

Мы изложим здесь кратко качественную сторону экспериментов, а интересующимся еще не законченными количественными опытами порекомендуем обратиться к соответствующей литературе.

Первый, хотя далеко не самый простой эксперимент заключался в ориентировании спина β -радиоактивных ядер, для чего уже существовала специальная техника, использующая магнитные поля при низких температурах. При этом исследовался вопрос о том, существует ли при испускании электронов (негатронов e_- или позитронов e_+) асимметрия относительно (инвариантной при отражении) плоскости ядерных спинов (вектор \mathbf{I} направлен по нормали к этой плоскости). Другими словами, изучалось распределение псевдоскаляра $(\mathbf{I}\mathbf{p}_e) = I p_e \cos \Theta$, причем \mathbf{p}_e — вектор импульса испущенных электронов, а $\Theta = \angle(\mathbf{I}, \mathbf{p}_e)$. В теории, инвариантной относительно отражения, распределение должно быть симметричным относительно плоскости спинов, т. е. под углом Θ вперед должно вылетать столько же электронов, сколько под углом $\pi - \Theta$ назад. В экспериментах, проведенных с ядрами Co^{60} (e_-) и Co^{58} (e_+) [7—10], была обнаружена сильная асимметрия, причем в среднем $(\mathbf{I}\mathbf{p}_e) < 0$ для e_- -распада, $(\mathbf{I}\mathbf{p}_e) > 0$ для e_+ -распада.

Более подробное рассмотрение [11] показывает, что отсюда уже следует и нарушение C -симметрии. В C -инвариантной теории этот эффект должен отсутствовать, если можно пренебречь кулоновым взаимодействием между ядром и испущенным электроном. Для ядра с зарядом 27 (ядро Co) влияние кулонова взаимодействия еще столь мало, что наблюдаемая асимметрия не может объясняться только им.

Сходным, но более простым опытом было измерение поляризации электронов, испускаемых в заданном направлении при β -распаде. При этом поляризация определяется плоскостью

{заданной в системе покоящегося электрона) с направлением обхода, отвечающим спине электрона (обычно определяемое направление вектора σ_e образует с этой плоскостью правый винт, если смотреть от частицы), т. е. измеряется псевдоскаляр $(\sigma_e p_e)$.

В этих опытах была обнаружена сильная поляризация [12—18], причем было показано, что для e_- -распада в среднем $(\sigma_e p_e) < 0$, т. е. аксиальный вектор σ_e и p_e образуют левый винт; для e_+ -распада в среднем $(\sigma_e p_e) > 0$, т. е. аксиальный вектор σ_e и p_e образуют правый винт.

К опытам такого же типа относится измерение направления круговой поляризации фотонов, испускание которых происходит непосредственно вслед за испусканием электронов (β -распад возбужденных ядер). При этом измеряется псевдоскаляр $(p_e \sigma_\gamma)$. Этот эксперимент также дал положительный результат [19—21]. Теперь мы перейдем к важному эксперименту по распаду μ -мезона [22—24], также выполненному по инициативе Ли и Янга и давшему положительный результат почти одновременно с первым опытом по распаду ядер с ориентированным спином.

Рассмотрим π -мезоны, распадающиеся на μ -мезон и нейтрино по схеме

$$\pi \rightarrow \mu + \nu,$$

после чего μ -мезон распадается далее на электрон и два нейтрино (точнее, на нейтрино ν и антинейтрино $\bar{\nu}$):

$$\mu \rightarrow e + \bar{\nu} + \nu.$$

Первая реакция служит поляризатором μ -мезона, вторая — анализатором. Наблюдаемая несимметрия испускания электронов относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения μ -мезонов, доказывает, что зеркальная симметрия нарушается в обеих реакциях. Побочным результатом сильной поляризации относительно направления движения возникающих при этом μ -мезонов оказалась возможность более точного измерения их магнитного момента. Дальнейшие опыты по определению знака псевдоскаляра $(\sigma_\mu p_\mu)$ продолжаются.

Все приведенные здесь эксперименты находятся в согласии со специальной моделью нейтрино, предложенной независимо разными авторами [25—27]. Обычно она несколько неточно называется «двухкомпонентной теорией», однако я хочу назвать

два ее варианта: « R -модель» и « L -модель». « R -модель» отличается тем, что в ней должны существовать только те нейтрино, спин и направление движения которых образуют правый винт, а также соответствующие антинейтрино, спин и импульс которых необходимо образуют тогда левый винт. Таким образом, это значит, что взаимодействие с другими частицами происходит для нейтрино только при $(\sigma_{\nu} p_{\nu}) > 0$, для антинейтрино — только при $(\sigma_{\nu} p_{\nu}) < 0$. В такой модели обязательно происходит нарушение C - и P -инвариантности, возможно, но необязательно нарушение CP и T -инвариантности; для лептонов выполняется закон сохранения разности между числами частиц и античастиц. Однако проделанных до настоящего времени экспериментов еще недостаточно, чтобы с достоверностью установить правильность этой специальной модели. Для определения констант самого общего β -распадного взаимодействия, не сохраняющего P - или C -симметрии, необходимы еще дальнейшие эксперименты по корреляции направлений вылета электрона и нейтрино, сами по себе не относящиеся к вопросу о четности. Эту корреляцию непосредственно измерить нельзя; однако отдачу возникающих тяжелых частиц (ядер, а при распаде свободного нейтрона — протонов) измерить можно. Отсюда с помощью закона сохранения импульса можно вычислить направление и величину импульса нейтрино. Хотя применение ядерных реакторов значительно облегчает такие опыты, результаты их все еще настолько противоречивы и непонятны, что необходимо проводить дальнейшие измерения.

Даже если какая-то определенная модель (R - или L -модель) нейтрино окажется правильной для всех его взаимодействий, вряд ли это может в достаточной степени объяснить нарушение P -симметрии в слабых взаимодействиях. Дело в том, что, как заметили Ли и Янг уже в своей первой работе [1], с некоторой достоверностью существуют взаимодействия с несохранением четности, в которых нейтрино совсем не участвует. Именно, для так называемой «загадки Θ - τ » предположение о P -инвариантности (сохранении четности в соответствующих реакциях) приводит к необходимости принять существование различных частиц с одинаковыми (в хорошем приближении) массами и временами жизни. Для этого нельзя придумать никакого сколько-нибудь приемлемого объяснения. Если же принять предположение о несохранении четности, то достаточно считать, что в этих различных реакциях распада участвует *одна и та же частица* (K -мезон).

§ 3. ПЕРСПЕКТИВЫ ТЕОРИИ

Глубочайшие нерешенные проблемы теории квантованных полей, проявляющиеся в виде математических расходимостей, не мешают изучению слабых взаимодействий, так как в этом случае можно ограничиться низшими приближениями теории возмущений. Не имеет значения при чисто феноменологическом отношении теории к новым явлениям и отсутствие теоретического вывода значений масс и спинов элементарных частиц. Поэтому при современном состоянии теории можно указать скорее на избыток, чем на недостаток формальных возможностей для объяснения несохранения C - и P -четности, обнаруженного на опыте.

Хотя на этот раз и оказалось методически правильным сначала поставить вопрос «как?» и отложить на будущее более глубокий вопрос «почему?», последний все же существует и в будущем может еще потребовать ответа. Я считаю неправильным искать спасения в поверхностной, с моей точки зрения оппортунистической, «утешительной философии» (название происходит от П. Эренфеста) или в простых «патентованных решениях».

Из современного состояния теории дальше можно двигаться в двух направлениях. Во-первых, вопрос: «почему слабые взаимодействия не обладают C - и P -инвариантностью?» можно заменить другим вопросом — почему эта инвариантность соблюдается при сильных и электромагнитных взаимодействиях? Можно попытаться свести эту инвариантность к другим, более специфичным свойствам указанных взаимодействий. Во-первых, можно попытаться найти и обосновать связь между нарушением симметрии в малом и свойствами Вселенной в большом [29, 30]. Однако это выходит за пределы известных в настоящее время теорий тяготения. Гравитационные силы, которые не входят в перечисленные вначале три категории взаимодействий, гораздо слабее «слабых взаимодействий». Согласно гравитационной теории Эйнштейна, которой не противоречат никакие известные явления, при гравитационных взаимодействиях соблюдается инвариантность относительно всех трех операций симметрии C , P и T . К тому же прямым влиянием поля тяготения на обсуждаемые атомарные процессы можно практически полностью пренебречь.

Чтобы вывести вопрос о связи между микро- и макромиром за пределы туманных рассуждений, пока не хватает существенно

новых идей. С другой стороны, нельзя также утверждать категорически, что такая связь невозможна.

Таким образом, обсуждавшиеся здесь новые экспериментальные результаты привели нас к проблемам, решение которых, возможно, является делом далекого будущего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1956).
2. Lüders G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., **28**, No. 5 (1954); Ann. d. Phys., **2**, 1 (1957).
3. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 914 (1951). (См. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954.)
4. Pauli W., в книге «Niels Bohr and the Development of Physics, London, 1955, S. 30. (См. перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.)
5. Jost R., Helv. phys. Acta, **30**, 409 (1957).
6. Lee T. D., Oehme R., Yang C. N., Phys. Rev., **106**, 340 (1957).
7. Wu C. S., Ambler E., Hayward R. W., Hoppes D. D., Hudson R. P., Phys. Rev., **105**, 1413 (1957).
8. Postma H., Huiskamp W. J., Miedema A. R., Steenland M. J., Tolhoek H. A., Gorter C. J., Physica, **23**, 259 (1957).
9. Ambler E., Hayward R. W., Hoppes D. D., Hudson R. P., Wu C. S., Phys. Rev., **106**, 1361 (1957).
10. Burgy M. T., Epstein R. J., Krohn V. E., Novay T. B., Raboy S., Ringo G. R., Telegdi V. L., Phys. Rev., **107**, 1731 (1957).
11. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1956).
12. Frauenfelder H., Bobone R., von Coeler E., Levine N., Lewis H. R., Peacock R. N., Rossi A., Pasquali G., Phys. Rev., **106**, 386 (1957).
13. Goldhaber M., Grodzins L., Sunyar A. W., Phys. Rev., **106**, 826 (1957).
14. Hanna S. S., Preston R. S., Phys. Rev., **106**, 1363 (1957).
15. Frauenfelder H., Hanson A. O., Levine N., Rossi A., de Pasquali G., Phys. Rev., **107**, 643 (1957).
16. Deutsch M., Gittelmann B., Bauer R. W., Grodzins L., Sunyar A. W., Phys. Rev., **107**, 1733 (1957).
17. de Shalit A., Kuperman S., Lipkin H. J., Rothen T., Phys. Rev., **107**, 1459 (1957).

18. Boehm F., Novey T. B., Barnes G. A., Stech B., Phys. Rev., **108**, 1497 (1957).
19. Schopper H., Phil. Mag., **2**, 710 (1957).
20. Appel H., Schopper H., Zs. f. Phys., **149**, 103 (1957).
21. Boehm F., Wapstra A. H., Phys. Rev., **106**, 1364 (1957); **107**, 1202, 1462 (1957).
22. Garwin R. L., Ledermann L. M., Weinrich M., Phys. Rev., **105**, 1415 (1957).
23. Friedman J. I., Telegdi V. L., Phys. Rev., **105**, 1681 (1957).
24. Berley D., Coffin T., Garwin R. L., Ledermann L. M., Weinrich M., Phys. Rev., **106**, 835 (1957).
25. Salam R., Nuovo Cimento, **5**, 229 (1957).
26. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1671 (1957).
27. Ландау Л. Д., Nucl. Phys., **3**, 127 (1957); ЖЭТФ, **32**, 405, 407 (1956).
28. Dalitz R., Phil. Mag., **44**, 1068 (1954); Fabri E., Nuovo Cimento, **11**, 479 (1954); Proceedings of the Sixth Rochester Conference, 1956.
29. Lee T. D., Proceedings of the Seventh Rochester Conference, 1957.
30. Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., **29**, 255 (1957).

К СТАРОЙ И НОВОЙ ИСТОРИИ НЕЙТРИНО¹⁾

§ 1. ПРОБЛЕМА НЕПРЕРЫВНОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА β -ИЗЛУЧЕНИЯ

Непрерывный энергетический спектр β -излучения, открытый в 1914 г. Чедвиком [1], сразу же поставил перед теоретическим мышлением трудные проблемы. Следовало ли приписать непрерывность первичным электронам, испущенным непосредственно из радиоактивного ядра, или же она вызвана вторичными процессами? Первое мнение, оказавшееся правильным, было высказано Эллисом [2], второе отстаивала Мейтнер [3]. Она ссылалась на то, что, как показывает испускание α -частиц и γ -излучений, ядра обладают дискретными энергетическими уровнями. Она обращала внимание на электроны дискретной энергии, также наблюдавшиеся у многих β -радиоактивных ядер. Эллис возразил, что это были электроны внешних оболочек, ускоренные благодаря внутренней конверсии монохроматического ядерного γ -излучения и сопоставил эти электроны наблюдаемым рентгеновским линиям. По теории же Мейтнер, хотя бы один из электронов дискретной энергии должен быть истинным первичным электроном, который также мог выбивать из внешних оболочек вторичные электроны меньших энергий²⁾. Однако обнаружить этот постулированный электрон никак

¹⁾ Исправленный и дополненный (сентябрь 1957) доклад в Цюрихском обществе естествоиспытателей 21.1.1957 г., перепечатано в книге W. Pauli, Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie, Braunschweig, 1961.

²⁾ В более поздней работе Мейтнер [4] опровергла утверждение Эллиса, экспериментально доказав, что γ -излучение испускается ядром, возникающим после испускания α - или β -частицы.

не удавалось. Кроме того, существуют β -радиоактивные ядра, например RaE , не испускающие ни γ -излучения, ни электронов дискретной энергии. В 1922 г. Эллис сформулировал свою точку зрения в полемике с Мейтнер следующим образом.

«Теория фрейлейн Мейтнер представляет собой очень интересную попытку дать простое объяснение β -распада. Однако экспериментальные факты не укладываются в рамки этой теории, и простая аналогия между α - и β -распадом, по-видимому, неправомерна. β -распад представляет собой значительно более сложный процесс, и высказанные мной общие соображения о нем, как мне кажется, в настоящее время представляются весьма естественными».

Это утверждение, конечно, ни в коей мере не приблизило ответ на вопрос о смысле непрерывного β -спектра, и дискуссия о том, является ли он первичным (по Эллису) или же первоначально дискретная энергия в последующих вторичных процессах преобразуется в континуум (по Мейтнер), продолжалась. Наконец, эта полемика все же была прекращена экспериментом: абсолютным измерением теплоты при поглощении β -электронов. Из опытов со счетчиками было известно, что на каждый распад из ядра испускается один электрон. При последующих вторичных процессах теплота на каждый распад, измеренная в калориметре, должна соответствовать верхней границе β -спектра, при первичном процессе — средней энергии спектра. Измерение было проведено Эллисом и Вустером [6] на RaE . В результате пересчитанная на вольты теплота на один распад оказалась равной

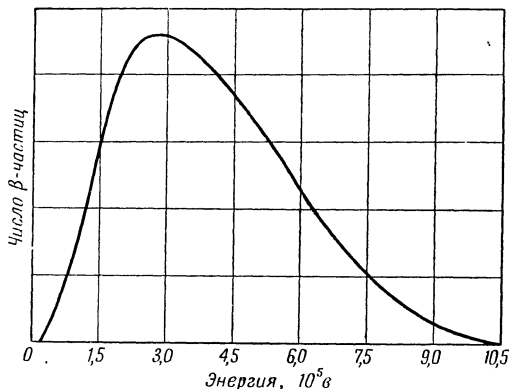
$$344\,000\text{ в} \pm 10\%,$$

что хорошо соответствовало средней энергии β -спектра. По теории Мейтнер, верхняя граница β -спектра соответствовала бы 1 млн. в, что совершенно исключалось экспериментом. Эллис подчеркивал, что его эксперимент еще оставлял открытой возможность восстановления энергетического баланса за счет непрерывного γ -излучения, которое не поглощалось в калориметре и ускользало от наблюдения.

Мейтнер еще не была убеждена этим экспериментом и решила немедленно повторить его с улучшенной аппаратурой. Ортманн, сотрудник Нернста, сконструировал для этой цели особый дифференциальный калориметр. Затем измерение теплоты β -электронов RaE было повторено с большей точностью [7]. Результат

$$337\,000\text{ в} \pm 6\%$$

полностью подтвердил измерения Эллиса и Вустера. Кроме того, Мейтнер специальными опытами со счетчиками доказала, что непрерывного γ -излучения, постулированного Эллисом, не существует.



Ф и г. 1. Непрерывный β -спектр RaE.

После этих экспериментальных результатов для объяснения непрерывного β -спектра оставались еще две теоретические возможности:

- 1) при взаимодействии, ведущем к β -радиоактивности, энергия сохраняется только статистически;
- 2) закон сохранения энергии выполняется строго при каждом первичном отдельном процессе, но при этом вместе с электроном испускается еще другое, весьма проникающее излучение, состоящее из *новых нейтральных частиц*.

Первая возможность была высказана Бором, вторая — мной. Прежде чем мы подробнее рассмотрим историю этих дальнейших вопросов, необходимо кратко обрисовать развитие наших представлений о строении ядра.

§ 2. НЕЙТРИНО И СТРОЕНИЕ ЯДРА

После первых опытов Резерфорда по искусственному превращению ядер общепринятое представление о строении ядер заключалось в том, что они составлены из протонов и электронов. С этой точки зрения строение ядер обсуждал и сам Резерфорд в своей знаменитой Бэйкеровской лекции [8]. Наряду с прочим там содержалась гипотеза о существовании ядра

с зарядом 0 и его возможных свойствах. Скоро стало известно¹⁾, что Резерфорд предложил для этой новой гипотетической частицы название *нейтрон*. Резерфорд представлял себе нейтрон как соединение протона и электрона, имеющее ядерные размеры. В соответствии с этим он поставил в своей лаборатории эксперименты по поискам нейтрона в водородных разрядах, которые, естественно, остались тщетными. От представления о том, что ядра состоят из протонов и электронов, отказывались весьма неохотно и медленно. Решающей для этого процесса была квантовая и волновая механика, сформировавшаяся в 1927 г. Согласно квантовой механике, существует два рода частиц — антисимметричные фермионы и симметричные бозоны. Сложные частицы будут фермионами или бозонами в зависимости от того, четно или нечетно число содержащихся в них фермионов. Соответствующее правило выполняется и для спина: фермионы имеют всегда полуцелый спин, а бозоны — всегда целочисленный спин. Так как вскоре было установлено, что электроны и протоны суть фермионы, то представление о том, что они одни служат строительным материалом всех ядер, привело к заключению, что четность зарядового числа должна определять и характер симметрии ядер. Однако это заключение не подтверждалось на опыте. Первым противоречащим примером была «азотная аномалия», как мы ее тогда называли, заключавшаяся в том, что, как было показано из полосатых спектров Кронигом [10], Гайтлером и Герцбергом [11], азот с зарядовым числом 7 и массовым числом 14 обладает спином 1 и подчиняется статистике Бозе. Позднее последовали другие аналогичные случаи, как Li^6 (заряд 3, масса 6) и дейтрон (заряд 1, масса 2), которые также имеют спин 1 и подчиняются статистике Бозе. Окончательный результат состоял в том, что характер симметрии ядер определяется четностью массового числа, а не зарядовым числом.

Тогда я сделал попытку применить идею о новой нейтральной частице, чтобы связать эту проблему спина и статистики ядер с проблемой непрерывного β -спектра, не отказываясь от закона сохранения энергии. В декабре 1930 г., когда тяжелый нейтрон еще не был обнаружен экспериментально, я послал письмом об этой попытке собранию физиков в Тюбингене, на котором присутствовали, в частности, Гейгер и Мейтнер²⁾.

¹⁾ См., например, [9].

²⁾ За предоставление копии этого письма я должен выразить искреннюю благодарность Л. Мейтнер, сохранившей его.

Открытое письмо группе радиоактивных, собравшихся в Тюбингене:

Физический институт
технической высшей школы
в Цюрихе

Цюрих, 4 декабря 1930 г.
Глориаштрассе

Дорогие радиоактивные дамы и господа,

как расскажет Вам во всех подробностях предъявитель этих строк (и я прошу выслушать его благосклонно), имея в виду «неправильную» статистику ядер N и Li^6 , а также непрерывный β -спектр, я принял отчаянную попытку спасти «обменную теорему»¹⁾ статистики и закон сохранения энергии. Именно имеется возможность того, что в ядрах существуют электрически нейтральные частицы, которые я буду называть нейтронами и которые обладают спином $1/2$; они подчиняются принципу запрета и отличаются от световых квантов, помимо этого, еще и тем, что движутся не со скоростью света. Масса нейтрона по порядку величины должна быть сравнимой с массой электрона и во всяком случае не более 0,01 массы протона. Непрерывный β -спектр тогда стал бы понятным, если предположить, что при β -распаде вместе с электроном испускается еще нейтрон таким образом, что сумма энергий нейтрона и электрона остается постоянной. Далее возникает вопрос: какие силы действуют на нейтрон? Наивероятнейшая модель для нейтрона, как мне кажется на основе волновой механики (подробности знает предъявитель этих строк), будет следующей: покоящийся нейтрон — это магнитный диполь с некоторым моментом μ . Эксперименты требуют, чтобы ионизирующая способность для такого нейтрона была не больше, чем для γ -кванта, и тогда μ должен быть не больше $e \cdot 10^{-13}$.

Однако пока я не решаюсь публиковать что-нибудь по поводу этой идеи, и с доверием обращаюсь только к Вам, дорогие радиоактивные дамы и господа, с вопросом, можно ли экспериментально доказать существование такого нейтрона, если он будет обладать проникающей способностью примерно такой же или в 10 раз большей, чем γ -квант.

Я признаюсь, что мой выход может показаться на первый взгляд маловероятным, потому что нейтроны, если они существуют, пожалуй, давно бы уже были обнаружены. Однако не рискуя, не выигравши: серьезность положения с непрерывным β -спектром хорошо проиллюстрировал мой уважаемый предшественник г-н Дебай, который недавно заявил мне в Брюсселе: «О... об этом лучше не думать вовсе, как о новых налогах». Поэтому необходимо серьезно обсудить всякий путь к спасению. Итак, дорогие радиоактивные дамы и господа, проверяйте и судите. К сожалению, я сам не могу появиться в Тюбингене, так как предстоящий в Цюрихе бал в ночь с 6 на 7 декабря лишит меня этой возможности. С большим приветом Вам, а также г-ну Баку, Ваш верноподданнейший слуга.

В. Паули

¹⁾ Эта теорема гласит: принцип запрета (статистика Ферми) и полупервый спин при нечетном общем числе частиц; статистика Бозе и целочисленный спин при четном общем числе частиц.

Вы видите, насколько скромными были числа, которые я тогда имел в виду. В действительности, проникающая способность частицы, называемой теперь нейтрино, составляет примерно 100 световых лет свинца вместо 10 см, множитель по отношению к γ -излучению от 10^{16} до 10^{17} вместо 10, покоящаяся масса и магнитный момент теоретически равны 0, экспериментальные верхние границы — 0,002 электронной массы и 10^{-9} магнетона Бора [12].

В ответ скоро пришло письмо Гейгера, который обсуждал мой вопрос в Тюбингене с другими физиками, особенно с Мейтнер. К сожалению, этого ответного письма у меня не сохранилось, но я вспоминаю, что его ответ был положительным и ободряющим: с экспериментальной точки зрения мои новые частицы были вполне возможными. От идеи, что излучаемые при β -распаде нейтральные частицы вместе с тем являются составными частями ядер, я скоро отказался, учитывая эмпирические значения ядерных масс.

В докладе на заседании Американского физического общества в Пасадене в июне 1931 г. я впервые публично сообщил о своей идее насчет новых весьма проникающих нейтральных частиц при β -распаде. Я уже не считал их составными частями ядер, не называл их там нейтронами и не пользовался для них никаким особым названием. Однако дело мне представлялось еще весьма сомнительным, и я решил не печатать свой доклад.

В том же 1931 г. я отправился из Америки прямо в Рим, где в октябре состоялся большой Международный конгресс по ядерной физике. Там я встретил, в частности, Ферми, который сразу проявил живой интерес к моей идее и отнесся к моей новой нейтральной частице весьма положительно, а также Бора, который выдвинул противоположную идею о том, что закон сохранения энергии при β -распаде выполняется только статистически. Эту идею он вскоре опубликовал в своей Фарадеевской лекции [13]. Чтобы дать понятие о его тогдашних идеях, я процитирую следующие строки¹⁾.

«Однако при современном состоянии атомной теории можно сказать, что у нас нет никаких аргументов, ни эмпирических, ни теоретических, в пользу соблюдения закона сохранения энергии в случае β -распада, и при попытке удовлетворить этому закону мы даже приходим к усложнениям и трудностям. Конечно, радикальный отказ от этого закона привел бы к странным последствиям, если бы такой процесс был обратим. Действительно, если в процессе столкновения

¹⁾ См. [13], стр. 383.

электрон мог бы присоединяться к ядру, теряя свою механическую индивидуальность, и затем воссоздаваться в виде β -частицы, мы должны были бы обнаружить, что энергия такой β -частицы вообще отличается от энергии первоначального электрона. Однако, как объяснение аспекта строения атома, существенных для выяснения обычных физических и химических свойств вещества, включает в себя отказ от классической идеи причинности, так еще более глубоко лежащие свойства стабильности атомов, ответственные за существование и свойства атомных ядер, могут заставить нас отказаться от самой идеи баланса энергии. Я не буду продолжать дальше подобные рассуждения и обсуждать их возможное отношение к вопросу об источнике звездной энергии, вызвавшему многочисленные дискуссии. Я наметил эти рассуждения здесь в основном с целью подчеркнуть, что в атомной теории, несмотря на недавний прогресс, мы должны быть готовыми к новым сюрпризам».

Что касается более общей возможности сюрпризов в тех взаимодействиях, которые теперь называются «слабыми», то Бор оказался прав. Однако его идея о том, что закон сохранения энергии выполняется в этих взаимодействиях только статистически, представлялась неприемлемой и мне и Ферми. В 1931 г. в Риме между нами состоялись многочисленные неофициальные дискуссии по этому вопросу. Я не видел никаких теоретических оснований считать закон сохранения энергии менее достоверным, чем, скажем, закон сохранения электрического заряда. С экспериментальной точки зрения я считал решающим вопрос о том, имеют β -спектры электронов резкую верхнюю границу или же они простираются в бесконечность, согласно распределению Пуассона. В первом случае моя идея о новой частице получила бы поддержку¹⁾. Вопрос этот тогда не был еще решен экспериментально, но Эллис, также находившийся в Риме, уже планировал снова приняться за эту экспериментальную задачу.

В следующем 1932 г. Чедвик открыл при бомбардировке легких ядер α -частицами долго отыскивавшийся нейтрон с зарядовым числом 0 и массовым числом 1. Вслед за тем Ферми на семинарах в Риме дал название «нейтрино» моей новой частице, испускаемой при β -распаде, чтобы отличить ее от тяжелого нейтрона²⁾, и это итальянское название скоро стало общепринятым. Вскоре возникла новая идея о строении ядра, согласно которой ядра состояли из протонов и нейтронов, теперь называемых в совокупности «нуклонами»; и те и другие —

¹⁾ По поводу теоретического объяснения верхней границы β -спектра см. также [14].

²⁾ Я благодарю за эти сведения Э. Амальди.

фермионы со спином $\frac{1}{2}$. Эта идея независимо была высказана различными авторами, в Италии ее защищал Майорана при поддержке Ферми.

В октябре 1933 г. на Сольвеевском конгрессе по атомным ядрам в Брюсселе, где Жолио и Чедвик сообщили о своих экспериментальных открытиях позитронного распада и нейтрона, а Гейзенберг доложил о строении ядра, произошло наконец общее прояснение. И Ферми и Бор снова присутствовали при этом. Тогда стало очевидным, что на основе нового представления о строении ядра, нейтрино, как они стали называться, должны быть фермионами, чтобы при β -распаде могла сохраняться статистика. Далее Эллис доложил о новых опытах своего ученика Гендерсона [15], которые доказали существование резкой верхней границы β -спектра и установили ее значение.

Ввиду новой ситуации моя прежняя осторожность в отношении публикации показалась мне излишней. После реферата Гейзенберга я высказал в дискуссии свои идеи о нейтрино (как называлась уже тогда моя частица), и это сообщение, опубликованное в докладах конгресса [16], воспроизводится ниже.

Трудность, связанная с существованием непрерывного спектра β -лучей, заключается, как известно, в том, что среднее время жизни ядер, испускающих эти лучи, а также ядер радиоактивных продуктов распада имеет вполне определенное значение. Отсюда с необходимостью следует, что состояние, энергия и масса ядра после испускания β -частицы также будут строго определенными. Я не настаиваю на усилиях, которые можно было бы предпринять, чтобы избежать этого вывода, но считаю, так же как и Бор, что при объяснении экспериментальных фактов обязательно столкнутся с непреодолимыми трудностями.

В рассматриваемом случае предлагаются две разные интерпретации экспериментов. Первая, которую защищает Бор, допускает, что в ядерных процессах, где основную роль играют легкие частицы, нарушаются законы сохранения энергии и импульса. На мой взгляд, эта гипотеза не только неудовлетворительна, но даже недопустима. Прежде всего в этих процессах электрический заряд сохраняется, а я не вижу оснований считать сохранение заряда более фундаментальным, чем сохранение энергии и импульса. Далее, многие характерные особенности β -спектров (существование верхней границы и взаимосвязь с γ -спектром, критерий устойчивости Гейзенберга) определяются именно энергетическими соотношениями. Если бы законы сохранения нарушались, то из этих соотношений пришлось бы сделать вывод, что β -распад всегда сопровождается потерей энергии и никогда — ее выигрышем; этот вывод предполагает необратимость процесса во времени, что, по моему, совсем неприемлемо.

В 1931 г. на конференции в Пасадене я предложил следующую интерпретацию: законы сохранения выполняются, так как испускание β -частиц сопровождается проникающей радиацией из нейтраль-

ных частиц, которая до сих пор не обнаружена. Сумма энергий β -частицы и нейтральной частицы (или нейтральных частиц, так как неизвестно, сколько испускается частиц), испущенных ядром в отдельном акте, равна энергии, соответствующей верхней границе β -спектра. Само собой разумеется, что мы допускаем во всех элементарных процессах не только сохранение энергии, но и сохранение импульса, момента количества движения и характера статистики.

Что же касается свойств нейтральных частиц, то из рассмотрения атомных весов радиоактивных элементов следует вывод о том, что масса этих частиц не может значительно превышать массу электрона. Чтобы отличить эти частицы от тяжелых нейтронов, Ферми предложил для них название «нейтрино». Возможно, что собственная масса нейтрино равна нулю, так что они должны распространяться со скоростью света, как фотоны. Однако их проникающая способность должна быть намного больше, чем фотонов той же энергии. Мне кажется допустимым, что нейтрино обладают спином $1/2$ и что они подчиняются статистике Ферми, несмотря на то, что опыты не дают нам никакого доказательства этой гипотезы. Нам ничего неизвестно о взаимодействии нейтрино с другими материальными частицами и фотонами: гипотеза о том, что они обладают магнитным моментом, которую я предложил раньше (теория Дирака ведет к предвидению возможности существования нейтральных магнитных частиц), не кажется мне теперь обоснованной.

В этой связи экспериментальное изучение баланса импульса в β -распадах представляет собой проблему чрезвычайной важности; можно предвидеть, что из-за малой величины энергии ядра отдачи трудности будут очень большими.

Подчеркнутая здесь трудность измерений отдачи была окончательно преодолена лишь совсем недавно.

Непосредственно вслед за тем Чедвик доложил о своих первых безрезультатных попытках экспериментально обнаружить поглощение нейтрино, из которых была оценена верхняя граница магнитного момента нейтрино 0,001 магнетона. Возражения Бора по сравнению с его Фарадеевской лекцией стали намного слабее. Проявив чрезвычайную осторожность в вопросе о нарушении закона сохранения энергии, он ограничился своим более общим высказыванием, что никому неизвестно, какие еще сюрпризы могут встретиться в этой области. Впрочем, справедливость закона сохранения энергии при β -распаде и существование нейтрино он признал полностью лишь в 1936 г. [17], когда уже была успешно развита теория Ферми.

§ 3. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕОРИИ β -РАСПАДА

Вскоре после этого Ферми, воодушевленный дискуссиями Сольвеевского конгресса, развил свою теорию β -распада [18]. Часть выводов Ферми о форме β -спектра и заключение о покая-

щейся массе нейтрино одновременно и независимо была получена Перреном [19], также присутствовавшим на Сольвеевском конгрессе. Существенно, что для этого не нужно было строить полную теорию взаимодействия, если ограничиваться так называемыми «разрешенными» переходами, где для нуклонов в ядре достаточно использовать нерелятивистское приближение. Если пренебречь поправками за счет кулонова взаимодействия между ядром и электроном, существенным только для ядер с большим зарядом, то форма β -спектра для этих переходов полностью определяется статистическим множителем $\varrho(E_e)$ — плотностью состояний в фазовом пространстве. Этот множитель, очень сильно зависящий от массы покоя нейтрино, определяется выражением

$$\varrho(E_e) dE_e = p_e^2 dp_e p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} = p_e E_e p_\nu E_\nu dE_e. \quad (1)$$

Здесь применяются естественные единицы $\hbar=c=1$, индексы e, ν относятся к электронам или нейтрино, а энергия E связана с импульсом p равенством $E^2=p^2+m^2$, так что $dE/dp=p/E$.

Если ΔE означает разность энергий ядра в начальном и конечном состояниях при распаде, то закон сохранения энергии требует, чтобы

$$E_\nu = \Delta E - E_e. \quad (2)$$

Поскольку минимальная энергия нейтрино равна m_ν , то для верхней границы E_0 электронной энергии спектра следует равенство

$$E_0 = \Delta E - m_\nu, \quad (3)$$

т. е.

$$E_\nu = E_0 - E_e + m_\nu \quad (4)$$

и

$$\varrho(E_e) dE_e = p_e E_e (E_0 - E_e + m_\nu) \sqrt{(E_0 - E_e)(E_0 - E_e + 2m_\nu)} dE_e. \quad (5)$$

В случае $m_\nu \neq 0$ форма спектра вблизи верхней границы, т. е. при $E_0 - E_e \ll m_\nu$, совсем другая, чем для $m_\nu = 0$, когда

$$\varrho(E_e) dE_e = p_e E_e (E_0 - E_e)^2 dE_e, \quad m_\nu = 0. \quad (6)$$

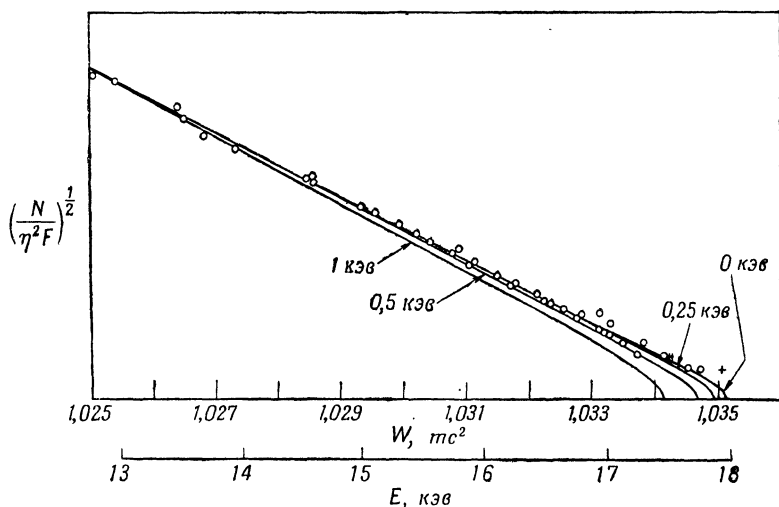
Из сравнения с эмпирической формой спектра Ферми и Перрен заключили уже в 1933 г., что $m_\nu = 0$.

Самая точная оценка верхней границы для покоящейся массы m_ν нейтрино, вытекающая из точно измеренного Ланггером и Моффатом [20] β -спектра трития, получена на основе того же принципа¹⁾. Результат следующий²⁾:

$$m_\nu < 250 \text{ эв} = 0,002 m_e.$$

Поэтому в дальнейшем мы всегда будем полагать $m_\nu = 0$.

График Кюри для разрешенных переходов показывает, что форму β -спектра [с точностью до кулоновского поправочного



Фиг. 2. График Кюри для спектра трития.

множителя $F(Z, E_e)$] определяет только статистический множитель $q(E_e)$. Чтобы установить этот результат, потребовалось длительное совершенствование экспериментальной тех-

¹⁾ В случае $m_0 \neq 0$, кроме статистического множителя q , появляется еще одна поправка, впервые замеченная в работе [21]. В эту поправку входит множитель, значение которого может лежать в общем случае между -1 и $+1$. Самое общее выражение для этого множителя через постоянные связи получено в работе [22]. Однако для принятого в настоящее время взаимодействия этот множитель равен нулю.

²⁾ См. по этому вопросу также [23—25].

ники¹⁾. На графике Кюри величина

$$\sqrt{\frac{N(E_e)}{F(Z, E_e) p_e E_e}} = K(x) \quad (7)$$

строится как функция

$$x = \frac{E_e - m_e}{\Delta E - m_e}, \quad (8)$$

причем $N(E_e)dE_e$ означает число электронов, испущенных в 1 сек во всех направлениях.

Для $m_\nu = 0$ теория дает

$$K(x) = 1 - x. \quad (9)$$

На фиг. 2 на типичном примере показан линейный характер графика Кюри.

Эмпирический результат, согласно которому для разрешенных переходов форма β -спектра определяется одним только статистическим множителем $\rho(E_e)$, позволяет получить дальнейшие следствия на основе теории β -распада Ферми (1933 г.) и ее обобщений. Ферми проявил большой интерес к развитому Гейзенбергом и мной формальному аппарату квантовой электродинамики, в котором поля представляются как суммы операторов рождения и поглощения, зависящих от координат и времени, и скоро придал ему более элегантный вид. Непосредственно после конгресса в Брюсселе он начал развивать теорию β -распада как пример применения методов вторичного квантования, связывая ее как можно теснее с квантовой электродинамикой. В соответствии с этим он принял для плотности энергии взаимодействия выражение в виде суммы произведений компонент четырех разных спинорных полей (двух нуклонных и двух лептонных) в одной точке пространства — времени. Возможно, это *локальное взаимодействие* Ферми впоследствии и подвергнется уточнению, но во всяком случае оно оказалось чрезвычайно хорошим приближением. Общее выражение для плотности энергии взаимодействия должно быть релятивистским инвариантом и, кроме того, должно строго удовлетворять закону сохранения электрического заряда. Для этого сущест-

¹⁾ Примером запрещенного перехода служит β -распад RaE , сыгравший такую важную роль в истории объяснения непрерывного спектра электронов. Форма спектра RaE определяется не только плотностью состояний ρ , вследствие чего она еще представляет интерес как объекта для исследования даже в наше время.

вуют пять возможных типов взаимодействия, описываемых скалярными произведениями двух скаляров (S), двух псевдоскаляров (P), двух векторов (V), двух аксиальных или псевдовекторов (A) или двух антисимметричных тензоров (T). По аналогии с электродинамикой, Ферми выбрал тип V . С первого взгляда кажется, что каждому из этих типов отвечает одна постоянная. Однако для этого требуются особые условия: первое — закон сохранения лептонного заряда, который будет разъяснен в следующем параграфе, — пока подтверждается на опыте; второе — инвариантность при пространственном отражении и неизменном электрическом заряде («четность»). В § 5 мы увидим, что это условие неожиданно не подтверждается. Поэтому наиболее общее выражение для «взаимодействия Ферми» должно содержать десять произвольных постоянных, соответствующих пяти типам. Однако в природе реализуется лишь один особый случай, так что в конечном счете теоретически неопределенным остается только одно отношение постоянных связи.

Для дальнейшего обсуждения мы заметим, что в нерелятивистском приближении для нуклонов псевдоскалярный тип P выпадает. Чтобы получить о нем какие-нибудь сведения, необходимо рассмотреть «запрещенные» переходы, для которых нерелятивистское приближение обращается в нуль, а мы ограничиваемся здесь «разрешенными» переходами в β -распаде и потому будем опускать случай P .

В соответствии с правилами отбора для полного момента ядер J разрешенные переходы распадаются на два класса:

$$\Delta J = 0; \text{ переходы Ферми (F),}$$

$$S, V \quad (10a)$$

(переход $0 \rightarrow 0$ разрешен);

$$\Delta J = 0, \pm 1; \text{ переходы Гамова — Теллера (GT),}$$

$$T, A \quad (10b)$$

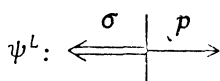
(переход $0 \rightarrow 0$ запрещен).

Существуют как чистые переходы Ферми, так и переходы Гамова — Теллера, однако в общем случае оба матричных элемента одновременно не равны нулю.

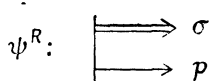
Фирц [27] первый получил важное следствие, что в общем случае в выражение для распределения энергии в β -спектре входит множитель вида $(1 \pm b \cdot m_e/E_e)$, а именно тогда, когда

переходы S , V или T , A смешиваются друг с другом. Однако линейность графика Кюри показывает, что эти «поправки Фирца» должны быть равны нулю. Отсюда следует, что в случаях S и V , а также T и A оба типа не могут присутствовать одновременно¹⁾.

Штех и Иенсен [28] связали этот результат с формальным трансформационным свойством плотности энергии взаимодействия, подтвердившимся впоследствии, после открытия несохранения четности, в более общем виде. Чтобы разъяснить это.



Левый винт



Правый винт

Фиг. 3. Относительное направление спина σ и импульса p для состояний свободной частицы Дирака с нулевой массой, характеризующимся функциями ψ^L и ψ^R .

свойство, мы должны ввести квадратную четырехрядную матрицу γ_5 . Такая матрица имеет два собственных значения $+1$ и два собственных значения -1 , так что выражения

$$\frac{1+\gamma_5}{2} \equiv a^L, \quad \frac{1-\gamma_5}{2} \equiv a^R \quad (11)$$

суть проекционные операторы. Буквы L и R соответственно означают «левое» и «правое» и оправдываются тем, что соответствующие компоненты спиноров

$$\psi^L = a^L \psi; \quad \psi^R = a^R \psi \quad (12)$$

описывают состояния, у которых спин σ и импульс p (т. е. направление движения) либо антипараллельны, либо параллельны.

Эти состояния будут вместе с тем точными стационарными состояниями свободной частицы лишь в случае, если ее масса покоя, как для нейтрино, равна нулю, а для электрона из-за наличия массового члена в уравнении Дирака возникает взаимосвязь L - и R -компонент. Тем не менее для электронов

¹⁾ Заключение справедливо в этой форме в том случае, если соблюдается инвариантность при обращении времени, что, по-видимому, имеет место в природе.

с энергией, большой по сравнению с массой покоя¹⁾, можно ввести приближенное понятие L - и R -состояний для свободных частиц.

Первоначальное «преобразование Штеха — Иенсена» состоит в том, что одновременно для электрона и для нейтрино L -компоненты умножаются на $+1$, а R -компоненты — на -1 , т. е. в соответствии с (14) и (12) оно эквивалентно

$$\psi' = \gamma_5 \psi. \quad (13)$$

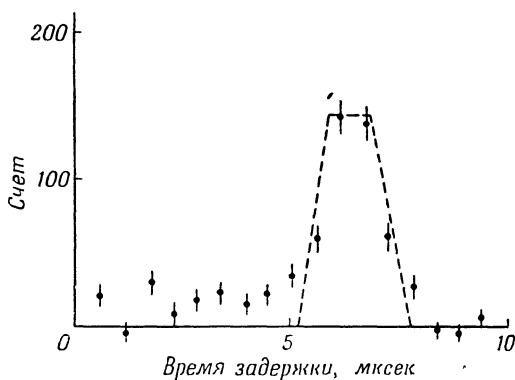
Пять типов взаимодействия при этом распадаются на два класса:

$$S, T, P \quad (14a)$$

и

$$V, A; \quad (14б)$$

первый из них при рассматриваемом преобразовании умножается на -1 , а второй — на $+1$. Штех и Иенсен постулировали,



Ф и г. 4. Время пролета атомов отдачи для Cl из реакции (15).

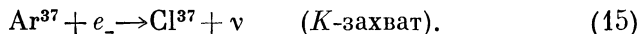
что при этом преобразовании общая плотность энергии взаимодействия умножается либо на -1 , либо на $+1$, т. е. перемешивания обоих классов не происходит. Это гарантирует как исчезновение «членов Фирца», так и совпадение с опытом.

В качестве еще одного примера теоретических заключений из линейности графика Кюри можно упомянуть, что Кусака [29]

¹⁾ Мы применяем всюду естественные единицы $\hbar=c=1$.

исключил значение спина $3/2$ для нейтрино и тем самым подтвердил принятое Ферми для нейтрино значение спина $1/2$.

Далее, независимо от более глубокой проблемы вида взаимодействия удалось экспериментально доказать, что закон сохранения импульса при испускании нейтрино выполняется. Особенно наглядным был опыт Родебака и Аллена [30], в котором применялся K -захват Ar^{37} .



Отдачей оже-электронов можно пренебречь, так что импульс нейтрино полностью измеряется отдачей атомов хлора. Экспериментально энергия отдачи последних определяется по времени пролета и согласуется с энергией, вычисленной в предположении $m_\nu = 0^1$).

§ 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОГЛОЩЕНИЯ СВОБОДНЫХ НЕЙТРИНО. СОХРАНЕНИЕ ЛЕПТОННОГО ЗАРЯДА, НЕЙТРИНО И АНТИНЕЙТРИНО

Несмотря на успехи основанной Ферми на гипотезе нейтрино теории взаимодействия, ведущего к β -распаду, многие физики еще долго считали нейтрино не вполне реальной частицей. Все еще не хватало доказательства поглощения свободных нейтрино. Это доказательство стало возможным благодаря применению в качестве источников нейтрино урановых реакторов, излучавших около 10^{20} нейтрино в секунду (по порядку величины). Для следующего рассмотрения важно отметить, что в этом случае речь идет практически только о негatronном (e_-) распаде, так как для позитронного распада (e_+) таких источников не существует. Нейтрино, сопровождающее (e_-), условились называть антинейтрино и обозначать символом $\bar{\nu}$. Тогда негatronный распад соответствует реакции



которая происходит как на свободных нейтронах, так и на связанных в ядре. Тогда теоретически возможен также процесс поглощения антинейтрина опротонном, переходящим в нейтрон и позитрон,

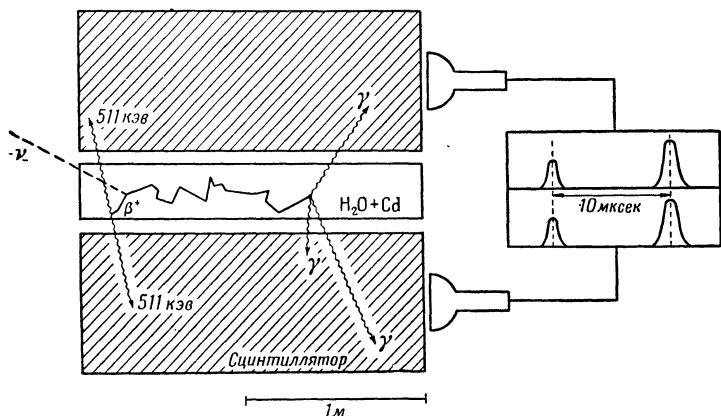


¹) Ср. также проверку закона сохранения импульса при обычном β -распаде в работе [31].

Этот процесс получается из обычного e_- -распада (16) в результате его частичного обращения таким образом, что вместо поглощения e_- происходит испускание e_+ .

Чрезвычайные технические трудности экспериментального доказательства этой реакции, обусловленные ее малым сечением, в конце концов были преодолены Рейнесом и Коуэном

Обнаружение нейтрино



Фиг. 5. Схема экспериментальной установки для обнаружения антинейтрино (по Рейнесу и Коуэну).

[32]. Им пришлось построить «гигантский усилитель», позволивший обнаружить нейтроны и позитроны, возникавшие при поглощении антинейтрино, испускаемых из уранового реактора. После некоторого времени пролета нейтроны поглощались ядрами кадмия, испускавшими затем γ -излучение, тогда как позитроны могли регистрироваться по их аннигиляционному γ -излучению. Схема совпадения с задержкой позволяла регистрировать и то и другое γ -излучение. Схема этого опыта поясняется фиг. 5. Измеренное сечение при первой публикации результатов опыта (1956 г.) составило

$$Q = 6,3 \cdot 10^{-44} \text{ см}^2 \pm 25\% \text{ на нейтрино,}$$

что даже в большом потоке нейтрино дает $2,88 \pm 0,22$ совпадения в час. Для сравнения измеренного и теоретического сечений поглощения необходимо определить на опыте энергетический спектр электронов, испускаемых при делении. К тому же теоре-

тическое значение поглощения зависит (при эмпирически определенной вероятности испускания) еще от частного вида взаимодействия, так как последнее содержит множитель, величина которого лежит между 1 и 2. Подробнее эта величина рассмотрена Эндем [34]. Опубликованное недавно Рейнесом и Коуэном [35] значение сечения поглощения, равное $Q = (6,7 \pm 1,5) \cdot 10^{-43} \text{ см}^2$ на деление, находится в согласии с полученным (при использовании измеренного спектра электронов, испускаемых продуктами деления) на основе принятой в настоящее время двухкомпонентной модели нейтрино (см. § 5) теоретическим значением

$$Q = (6,0 \pm 1) \cdot 10^{-43} \text{ см}^2 \text{ на деление.}$$

Мы уже столкнулись с гипотезой о существовании двух зеркальных видов нейтрино — антинейтрино $\bar{\nu}$ испускается вместе с e_- , а нейтрино ν испускается вместе с e_+ при реакции на связанных протонах

$$p \rightarrow n + e_+ + \nu. \quad (16a)$$

Согласно этой гипотезе, реакция (17) не должна происходить с ν вместо $\bar{\nu}$. Однако ввиду отсутствия источников нейтрино в виде реакторов с позитронным излучением это утверждение непосредственно проверить нельзя. Тем не менее можно рассмотреть реакцию, соответствующую процессу, обратному (15)

$$\text{Cl}^{37} + \bar{\nu} \rightarrow \text{Ar}^{37} + e_-, \quad (18)$$

с антинейтрино $\bar{\nu}$ вместо нейтрино ν , которая соответствует реакции

$$n + \bar{\nu} \rightarrow p + e_- \quad (18a)$$

на связанных в ядре Cl^{37} нейтронах. Согласно гипотезе о двухкомпонентной модели нейтрино, эта реакция запрещается.

Нагляднее это можно сформулировать, пользуясь понятием «лептонного заряда», который должен в сумме сохраняться во всех возможных реакциях. Следовательно, лептонный заряд, хотя и не имеет непосредственного отношения к электромагнетизму, однако может иметь оба знака, как и электрический заряд. Общий знак лептонного заряда всех лептонов совершенно произволен, но знак отношения лептонного заряда к электрическому для всех частиц определяется экспериментально.

Например, вопрос о том, имеют ли две пары частиц: мюон (μ -мезон) μ_+ и e_+ , а также μ_- и e_- одинаковый или противоположный лептонный заряд, решается экспериментально. В настоящее время приняты следующие значения лептонного заряда e , μ и ν :

$$+1 \text{ для } \mu_-, e_-, \nu; \quad -1 \text{ для } \mu_+, e_+, \bar{\nu}. \quad (19)$$

К мюону мы еще вернемся. Для тяжелых частиц (барионов), как p и n , и для бозонов, как π , лептонный заряд должен быть равен нулю. Легко видеть, что это сопоставление в предположении о справедливости закона сохранения лептонного заряда ведет к разрешению реакций (16), (16а), (17) и к запрету реакции (18) или (18а).

Исследование реакции (18) Дэвисом [37] действительно дало отрицательный результат, и для сечения этой реакции была установлена верхняя граница $0,9 \cdot 10^{-45} \text{ см}^2$. Впрочем, с точки зрения теории такая точность опыта, обусловленная фоном космических лучей, не слишком велика. Дело в том, что теоретически возможный для этого сечения максимум также составляет только $2,6 \cdot 10^{-45} \text{ см}^2$, и можно представить себе теории, в которых это максимальное значение умножается на некоторый множитель, промежуточный между 0 и 1.

Реакция (18а), соответствующая (16), привела бы к *испусканию двух электронов e без испускания нейтрино* и с одновременным превращением двух нейтронов в протоны. Эта реакция, столь очевидно притиворечащая закону сохранения лептонного заряда, часто безуспешно отыскивалась как «двойной β -распад».

Наиболее точный известный отрицательный результат — это отсутствие перехода $\text{Nd}^{150} (Z=60) \rightarrow \text{Sm}^{150} (Z=62)$ [38]. Время жизни ядра Nd получилось больше $4,4 \cdot 10^{18} \text{ лет}$. Однако теоретическая оценка для этого случая неточна, поскольку в нее входят неизвестные матричные элементы. Она приводит к максимально вероятному значению для полупериода Nd $4 \cdot 10^{15}$, которое, разумеется, без труда может быть увеличено до $1,9 \cdot 10^{18} \text{ лет}$.

Резюмируя, можно сказать, что весьма желательно количественное экспериментальное подтверждение такого фундаментального закона, как закон сохранения лептонного заряда. С другой стороны, все известные эксперименты согласуются с предположением о выполнении этого закона. В дальнейшем он будет считаться справедливым.

§ 5. НЕСОХРАНЕНИЕ ЧЕТНОСТИ. ЗАКОН СЛАБОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Два года назад критическим обсуждением зеркальной симметрии слабых взаимодействий началось новое развитие обширной области физики, в которой рассматриваемые в этой лекции свойства нейтрино являются лишь одним из вопросов. Так называемая «проблема Θ -т» при распаде K -мезонов побудила Ли и Янга [40] еще раз исследовать экспериментальные доказательства сохранения зарядовой симметрии C (точнее, под операцией C понимается замена частиц античастицами, и наоборот), а также пространственной симметрии P (четности; по определению, эта операция не изменяет знака заряда). Они нашли эти доказательства недостаточными и указали эксперименты для проверки сохранения симметрии при C и P . К большой неожиданности для многих физиков, к которым я причисляю и себя, первое же выполнение некоторых из этих экспериментов дало опубликованный в январе 1957 г. результат, что при β -распаде¹⁾, а также при рождении и распаде μ -мезонов²⁾ симметрия при операциях C и P по отдельности не сохраняется.

Интересующихся принципиальным значением проблем симметрии можно отослать к другой моей статье, в которой также подробно рассматриваются три категории взаимодействий—сильные, электромагнитные и слабые³⁾. По этому поводу я хочу здесь сделать следующие краткие замечания. Наряду с преобразованиями симметрии C и P существует еще обращение времени T (по определению, T сохраняет знак заряда). Так называемая теорема CPT утверждает, что при весьма общих предположениях из инвариантности относительно непрерывной группы Лоренца непосредственно следует инвариантность по отношению к произведению трех дискретных преобразований C , P и T (в произвольной последовательности). Кроме того, специально проведенные до настоящего времени опыты⁴⁾ согласуются с предположением о сохранении симметрии T или эквивалентной ей симметрии CP .

¹⁾ Опыты с ориентированными спинами ядер Co^{60} описаны в [41].

²⁾ Опыты на циклотроне см. в работе [42]; об опытах с фотопластинками сказано в работе [43].

³⁾ См. статью в этом томе (стр. 376). Там же приводится литература по экспериментам до конца 1957 г.—Прим. ред.

⁴⁾ О состоянии экспериментов на сентябрь 1958 г. рассказывается в докладе [44].

По поводу несохранения симметрии относительно C и P по отдельности мне хотелось бы сослаться на упомянутое ранее предостережение Бора о том, что при слабых взаимодействиях (как они теперь называются) «следует быть готовыми к сюрпризам». В то время как его идея о нарушении закона сохранения энергии при этих взаимодействиях, от которой он позднее отказался, касалась непрерывной группы трансляций пространства и времени, фактический сюрприз для слабых взаимодействий заключается в уменьшении симметрии в дискретных группах отражений. Конечно, это не было бы сюрпризом, если бы все законы природы обладали такой уменьшенной симметрией CP или T . Поэтому можно также сказать, что проблема состоит в том, чтобы понять, почему сильные и электромагнитные взаимодействия обладают более высокой симметрией — C или P по отдельности. Эта проблема еще не решена. В то время как для электромагнетизма более высокая степень симметрии, возможно, связана с особой формой взаимодействия, ситуация с сильными взаимодействиями значительно сложнее. Кроме того, здесь возникает еще вопрос о том, существует ли на самом деле эта более высокая степень симметрии для всех сильных взаимодействий или же только для пион-нуклонных и нуклон-нуклонных взаимодействий. Этот вопрос необходимо решить экспериментально. Ответ на все эти вопросы следует предоставить будущему.

Меньшая степень зеркальной симметрии при слабых взаимодействиях характерна не только для нейтрино и поэтому не может быть приписана особым свойствам этой частицы. Например, то же явление с достоверностью обнаружено для распада нейтрального гиперона Λ^0 на протон p и отрицательный пион π^- .

Для нейтрино существует особая возможность, обсуждение которой уже было подготовлено в § 3: так называемая «двухкомпонентная модель». Согласно этой модели, в природе должны встречаться только *либо две R -компоненты, либо две L -компоненты* [см. (11), (12)]¹⁾. После первой работы Ли и Янга разные авторы независимо предложили применять эту модель

¹⁾ Для частиц с нулевой массой покоя эта «двухкомпонентная теория» впервые выдвинута Вейлем [45]. Критически рассматривается она в моей энциклопедической статье [46]. Все это происходило до создания «дырочной» теории Дирака, так что зеркальная симметрия модели CP или T при переходе от частиц к античастицам оставалась незамеченной.

к нейтрино [47]. В самом деле, тогда свободные нейтрино уже обладали бы симметрией относительно CP и T , причем пространственное отражение (обращение направления движения относительно ориентации спина) было бы одновременно связано с переходом от нейтрино к антинейтрино. Двухкомпонентная модель нейтрино согласуется со всеми полученными до настоящего времени результатами экспериментов.

Некоторое время назад я относился к этой модели с известным скептицизмом [47—49], так как в ней, с моей точки зрения, слишком сильно выделялось особое положение нейтрино. Однако потом выяснилось, что для выражения энергии взаимодействия при слабых взаимодействиях можно найти интересное обобщение, продолжая рассуждения Штеха и Йенсена (см. § 3).

Опыты по поляризации электрона при β -распаде, а также по угловому распределению электронов при ориентированном распаде ядра сначала согласовывались со следующей альтернативой: существуют либо только A - и V -взаимодействия в L -модели, либо только S - и T -взаимодействия в R -модели нейтрино.

На основе же двухкомпонентной модели из двух возможностей для распада μ -мезона

$$\mu \rightarrow e + \nu + \nu \text{ (или } \mu \rightarrow e + \bar{\nu} + \bar{\nu}) \text{ и } \mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu} \quad (20)$$

можно выбрать только вторую. Только в этом случае форма энергетического спектра электронов (так называемый «параметр Мишеля» $q = 3/4$) согласуется с опытом. Измерение пространственного распределения направлений вылета электронов относительно направления движения μ -мезонов, возникающих в реакции

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu \text{ или } \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}, \quad (21)$$

приводит затем к заключению, что для случая (20), согласно двухкомпонентной модели, единственными взаимодействиями должны быть V - и A -взаимодействия одинаковой интенсивности. По поводу μ -мезонов мы упомянем еще, что, как показывает захват μ -мезонов ядрами, должно существовать также слабое взаимодействие между (p, n) и (μ, ν) .

Поиски реакции

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu \text{ или } \pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu} \quad (22)$$

долгое время были безрезультатными, и обнаружить ее удалось лишь недавно [50, 51]¹⁾. Однако пока еще преждевременно гово-

¹⁾ Более ранние отрицательные эксперименты и теоретические оценки см., например, в работах [52, 53].

речь о сравнении теории с экспериментом в количественном вопросе об относительной частоте обеих реакций (22) и (24). Порядок величины отношения эффективных сечений электронного и мезонного распадов пиона составляет от 10^{-5} до 10^{-4} .

Труднее оказалось выбрать альтернативный вариант взаимодействия (S , T или V , A) для β -распада. Этому долго препятствовали неправильно обработанные измерения отдачи для He^6 . Первым правильным доказательством в пользу варианта (V , A) послужила угловая корреляция электрон—нейтрино, определенная из опытов по измерению отдачи на Ar^{35} [54]. В согласии с ним был и результат изящного эксперимента Голдхабера, Гродзинса и Суньяра [55], который позволил непосредственно определить «направление винта» для нейтрино, наблюдая при резонансном рассеянии на дочерних ядрах круговую поляризацию γ -квантов, испускаемых при захвате электронов на внутреннее оболочку атома. Результат опыта на Eu^{152} был в пользу L -нейтрино. Вместе с уже упомянутыми результатами других экспериментов это соответствует варианту (V , A). Вскоре этот выбор был подтвержден дальнейшими экспериментами [44] (в том числе новыми измерениями отдачи на He^6), и теперь его можно считать хорошо обоснованным.

С точки зрения теории, на основе преобразования Штеха—Иенсена совместно с двухкомпонентной моделью нейтрино напрашивается постулат: *энергия каждого слабого четырех-фермионного взаимодействия должна содержать «универсально» либо только R -компоненты, либо только L -компоненты рассматриваемых фермионов¹⁾*. Эквивалентная формулировка этого требования состоит в том, чтобы при преобразовании $\psi' = \gamma_5 \psi$ для каждой участвующей частицы по отдельности плотность взаимодействия «универсально» или сохраняет, или меняет знак²⁾.

Преобразование Штеха — Иенсена применяется одновременно к паре частиц, тогда как двухкомпонентная модель нейтрино эквивалентна применимости результатов преобразования к одному нейтрино. Поэтому предлагаемый постулат о расширении преобразования Штеха — Иенсена представляет собой

1) При этом не исключается, что энергия слабого взаимодействия может неявно содержать производные этих спинорных компонент. Для частиц с нулевой массой покоя R -компоненты выражаются через первые производные L -компонент, и наоборот.

2) Этот постулат или его эквивалент был независимо предложен разными авторами [56—58].

обобщение двухкомпонентной модели нейтрино. Как легко видеть, этот постулат приводит к единственному закону взаимодействия (автоматически CP - или T -инвариантному)

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}_1 \gamma_\mu (1 \pm \gamma_5) \psi_2] [\bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 \pm \gamma_5) \psi_4] = \\ = [\bar{\psi}_1 \gamma_\mu (1 \pm \gamma_5) \psi_4] [\bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 \pm \gamma_5) \psi_2]. \end{aligned} \quad (23)$$

Тождество обоих выражений является чисто алгебраическим. Знак перед γ_5 должен быть «универсально» одинаковым. Выбор его зависит от того, что считать частицей и что — античастицей. Как обычно, здесь введено обозначение $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$, где ψ^* — оператор, эрмитово сопряженный ψ . Постоянная связи в (23) в явном виде не записана. В приведенной здесь форме постулат не требует равенства постоянных связи для взаимодействий разных частиц.

Из постулата «универсального» слабого R - или L -взаимодействия в общем случае вытекает равенство интенсивности V - и A -взаимодействий. Однако на опыте это не оправдывается в таком виде для нуклонов при β -распаде. Экспериментальные данные можно резюмировать в настоящее время¹⁾ следующим образом. Взаимодействие для β -распада имеет вид

$$\frac{1}{V^2} C [\bar{p} \gamma_\mu (1 + \lambda \gamma_5) n] [\bar{e} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu] + \text{Эрмит. сопр.} \quad (24)$$

Инвариантность относительно CP и T для этого более общего выражения для взаимодействия эквивалентна утверждению, что постоянная λ действительна, и это хорошо подтверждается на опыте [44]. Постоянные имеют следующие численные значения:

$$\lambda = 1,25 \pm 0,04, \quad C = (1,410 \pm 0,009) \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Для распада μ -мезона энергия взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} C [\bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu] + \text{Эрмит. сопр.} = \\ = \frac{1}{V^2} C [\bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \mu] + \text{Эрмит. сопр.} \end{aligned} \quad (25)$$

Как показывает опыт, постоянные C для обоих случаев — нуклонного и мюонного распада — с хорошим приближением

¹⁾ См. [44]. При этом существенно используется новое значение периода полураспада свободного нейтрона $11,7 \pm 0,3 \text{ мин}$, измеренное советскими авторами А. Н. Сосновским, П. Е. Спиваком, Ю. А. Прокофьевым, И. Е. Кутиковым и Ю. П. Добрыниным.

равны. Чтобы объяснить отличие постоянной λ от единицы, Фейнман и Гелл-Манн¹⁾ выдвинули интересную гипотезу. Они предложили заменить в (24) множитель $[\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n]$ соответствующей компонентой полного тока в пространстве изотопического спина, включая π -мезоны, так что теперь выражение для закона взаимодействия гласит

$$C \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n] - \left(\pi_0 \frac{\partial \pi^*}{\partial x_\mu} - \pi^* \frac{\partial \pi_0}{\partial x_\mu} \right) \right\} \times \\ \times [e\gamma_5(1+\gamma_5)v] + \text{Эрмит. сопр.} \quad (24a)$$

и постулат «универсального» слабого L -взаимодействия снова удовлетворяется. В этой формуле поле $\pi_0(x)$ соответствует нейтральным, а (комплексное) поле $\pi(x)$ — заряженным π -мезонам. Для объяснения λ применяется понятие «перенормировки постоянных связи». Сохранение полного изоспина при (сильном) пион-нуклонном взаимодействии приводит к тому, что изменяется только постоянная аксиальной части A -взаимодействия, а постоянная V -связи остается неизменной.

По этому поводу следует сказать, что только вычисление из других эмпирических данных по пион-нуклонному взаимодействию может превратить в истинную теорию еще не построенную формальную схему «перенормировки». В настоящее время такого вычисления еще нет. Предложенное прямое взаимодействие пионов с электроном и нейтрино допускает возможность экспериментальной проверки и остается только подождать ее.

Мы проследили значительную часть истории нейтрино и видели, как позднее подтверждались первоначальные понятия и представления. Теперь, по-видимому, мы пришли к такому положению, когда физика нейтрино сливается с общей физикой элементарных частиц. Сегодня каждая из этих частиц еще описывается своим собственным полем, а каждый вид взаимодействия — своими собственными постоянными связи. Что означает, например, такое малое численное значение постоянных взаимодействия Ферми и величины эффективного сечения по сравнению с другими атомарными эффективными сечениями? Следующий шаг — преодоление феноменологической физики отдельных полей и постоянных связи и создание единой теории — будет гораздо труднее, чем все достигнутое до сих пор.

¹⁾ [См. 56—58]. Ср. также [59] и далее [60], где обсуждаются возможные способы экспериментальной проверки новой гипотезы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chadwick J., Verh. deutsch. phys. Ges., **16**, 383 (1914).
2. Ellis C. D., Proc. Roy. Soc. **A101**, 1 (1922).
3. Meitner L., Zs. f. Phys., **9**, 101, 145 (1922); **11**, 35 (1922).
4. Meitner L., Zs. f. Phys., **34**, 807 (1925).
5. Ellis C. D., Zs. f. Phys., **10**, 303 (1922).
6. Ellis C. D., Wooster W. A., Proc. Roy. Soc., **A117**, 109 (1927).
7. Meitner L., Orthmann W., Zs. f. Phys., **60**, 143 (1930).
8. Rutherford E., Proc. Roy. Soc., **A97**, 374 (1920).
9. Classon J. L., Phil. Mag., **42**, 596 (1921).
10. Kronig R., Naturwiss., **16**, 335 (1928).
11. Heitler W., Herzberg G., Naturwiss., **17**, 673 (1929).
12. Cowan C. L., Jr., Reines F., Phys. Rev., **107**, 528 (1957).
13. Bohr N., Journ. Chem. Soc., 349 (1932).
14. Ellis C. D., Mott N. E., Proc. Roy. Soc., **A141**, 502 (1933).
15. Henderson W. J., Proc. Roy. Soc., **A147**, 572 (1934).
16. Septième Conseil de Physique Solvay 1933; «Noyaux Atomiques», Paris, 1934, p. 324 f.
17. Bohr N., Nature, **138**, 25 (1936).
18. Fermi E., Ric. Sci., **2**, No. 12 (1933); Zs. f. Phys., **88**, 161 (1934).
19. Perrin F., Compt. Rend., **197**, 1625 (1933).
20. Langer L. M., Moffat R. J. D., Phys. Rev., **88**, 689 (1952).
21. Pruett J. R., Phys. Rev., **73**, 1219 (1948).
22. Enz C. P., Nuovo Cimento, **6**, 250 (1957).
23. Friedman L., Smith L. G., Phys. Rev., **109**, 2214 (1958).
24. Sakurai J. J., Phys. Rev. Lett., **1**, 40 (1958).
25. Friedman L., Phys. Rev. Lett., **1**, 101 (1958).
26. Bühring W., Heintze J., Phys. Rev. Lett., **1**, 177 (1958); Zs. f. Phys. (в печати).
27. Fierz M., Zs. f. Phys., **104**, 553 (1937).
28. Stech B., Jensen J. H. D., Zs. f. Phys., **141**, 175, 403 (1955).
29. Kusaka S., Phys. Rev., **60**, 61 (1941).
30. Rodeback G. W., Allen J. S., Phys. Rev., **86**, 446 (1952).
31. Sherwin C. W., Phys. Rev., **82**, 52 (1951).
32. Cowan C. L., Reines F., Harrison F. B., Kruse H., Guire A. D., Science, **124**, 103 (1956).
33. Reines F., Cowan C. L., Jr., Nature, **178**, 446 (1956).
34. Enz C. P., Helv. phys. Acta, **31**, 69 (1958).
35. Reines F., Cowan C. L., Jr., Phys. Rev., **113**, 273 (1959).

36. Carter R. E., Reines F., Wagner J. J., Wyman M. E., Phys. Rev., **113**, 280 (1959).
37. Davis R., Phys. Rev., **97**, 766 (1955); Bull. Amer. Phys. Soc., Wash., 219 (1956).
38. Cowan C. L., Jr., Harrison F. B., Langer L. M., Reines E., Nuovo Cimento, **3**, 649 (1956).
39. Cowan C. L., Jr., Harrison F. B., Langer L. M., Reines E., Phys. Rev., **106**, 825(L) (1957).
40. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1956).
41. Wu C. S., Ambler E., Hayward R. W., Hoppes D. D., Hudson R. P., Phys. Rev., **105**, 1413 (1957).
42. Garwin R. L., Lederman L. M., Weinrich M., Phys. Rev., **105**, 1415 (1957).
43. Friedman J. L., Telegdi V. L., Phys. Rev., **105**, 1681 (1957).
44. Goldhaber M., Proc. of the Eight Annual International Conference on High Energy Physics, Genf., 1958, p. 233.
45. Weyl H., Zs. f. Phys., **56**, 330 (1929).
46. Pauli W., Prinzipien der Wellenmechanik, Berlin, 1933. (См. перевод: В. Паули, Принципы волновой механики, М.—Л., 1947.)
47. Salame R., Nuovo Cimento, **5**, 229 (1957).
48. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1671 (1957).
49. Ландау Л., Nucl. Phys., **3**, 127 (1957); ЖЭТФ, **32**, 405, 407 (1956).
50. Fazzini T., Fidicaro G., Merrison A. W., Paul H., Tollestrup A. V., CERN, preprint, Sept. 1958.
51. Impeduglia G., Plano P., Prodell A., Samios N., Schwartz M., Steinberger J., Phys. Rev. Lett., **1** (1958).
52. Lokanathan S., Steinberger J., Nuovo Cimento, **2**, Suppl., 151 (1955).
53. Anderson H. L., Lattes C. M. G., Nuovo Cimento, **6**, 1356 (1957).
54. Hermannsfeld W. B., Maxson D. R., Stähelin P., Allen J. S., Phys. Rev., **107**, 641 (1957) (L).
55. Goldhaber M., Grodzins L., Sunyar A. W., Phys. Rev., **109**, 1015 (1958).
56. Sudarshan E. C. G., Marshak R. E., Phys. Rev., **109**, 1860 (1958).
57. Sakurai J. J., Nuovo Cimento, **7**, 649 (1958).
58. Feynman R. P., Gell-Mann M., Phys. Rev., **109**, 193 (1958).
59. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б., ЖЭТФ, **29**, 698 (1955).
60. Gell-Mann M., Phys. Rev., **111**, 362 (1958).

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ¹⁾

С момента первого издания этой книги в теорию был сделан новый важный вклад. Фридман [1] нашел новые решения уравнений поля Эйнштейна, описывающие пространственно-однородный мир с метрикой, зависящей от времени. Эти решения существуют также в отсутствие космологического члена Эйнштейна ($-\lambda g_{ik}$ в уравнении $G_{ik} - \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik}$) во всех трех случаях — положительной, равной нулю и отрицательной постоянной кривизны трехмерного пространства.

Эти решения для реальной Вселенной впервые применил Леметр [2]. Он показал также, что стационарное решение Эйнштейна неустойчиво по отношению к зависящим от времени изменениям плотности вещества. Приложение этих решений к реальной Вселенной оказалось возможным после того, как Хаббл открыл красное смещение спектральных линий излучения туманностей, пропорциональное расстоянию до туманностей. Красное смещение можно удовлетворительно интерпретировать лишь как сдвиг Доплера, обусловленный движением туманностей в смысле расширения Вселенной как целого.

Узнав об этой новой возможности, Эйнштейн [3] *полностью отказался от космологического члена*, считая его излишним и бо-

¹⁾ Из дополнений к книге В. Паули, Теория относительности, М.—Л., 1947. К английскому изданию 1958 г. Паули добавил 26 страниц. Здесь приведен перевод двух дополнений к § 62 (Космологические проблемы) и § 67 (Единая теория поля), в которых Паули излагает свои взгляды на общие проблемы теории относительности.—Прим. ред.

лее не оправданным. Я целиком присоединяюсь к точке зрения Эйнштейна¹⁾.

Фридман выбрал следующую форму для метрики:

$$ds^2 = R^2(t) d\sigma^2 - dx_4^2, \quad x_4 = ct, \quad (1)$$

где $d\sigma$ — не зависящий от времени трехмерный элемент длины, соответствующий пространству с постоянной кривизной ε , которую можно нормировать так, чтобы она была равна $+1$, 0 или -1 ; тогда при $\varepsilon \neq 0$ единицей измерения x^1, x^2, x^3 будет радиус кривизны $R(t)$. Масштаб времени определяется выбором $g_{44} = -1$ в уравнении (1); координаты x^a ($a=1, 2, 3$) являются постоянными для вещества, движущегося вместе с расширяющимся пространством. Пространственную часть $d\sigma^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b$ ($a, b=1, 2, 3$) можно взять в виде

$$d\sigma^2 = \frac{1}{[1 + (\varepsilon/4)r^2]} \sum_a (dx^a)^2, \quad r^2 = \sum_a (x^a)^2. \quad (2)$$

Для свернутого тензора кривизны P_{ab} , относящегося к $d\sigma^2$, мы получаем $P_{ab} = -2\varepsilon\gamma_{ab}$ [согласно $R_{ik} + (n-1)ag_{ik} = 0$ и поскольку $n=3$]. Из уравнения для геодезических следует²⁾, что для материальной частицы

$$|p| \cdot R = \text{const}, \quad (3)$$

где $p = mv[1 - v^2/c^2]^{-1/2}$ — импульс частицы.

Если ввести длину волны де Бройля $\lambda = h/p$, то соотношение (3) можно записать в виде

$$\frac{R}{\lambda} = \text{const}. \quad (3a)$$

Последнее соотношение справедливо также для света (фотонов). Если масштаб времени определен линейным элементом, квадрат которого имеет вид (1) с $g_{44} = -1$, то скорость света постоянна, и частота света в этом масштабе времени удовлетворяет соотношению

$$v \cdot R = \text{const}. \quad (3б)$$

На это обстоятельство указал Лауэ [7], который не пользовался какими-либо квантовыми понятиями, а лишь от-

¹⁾ В связи с нижеследующим см. монографии [4—6].

²⁾ См. монографии [4—6]. Можно рассмотреть частный случай $x^2 = x^3 = 0$, $x^1 = r$, $d\sigma = dr[1 + (\varepsilon/4)r^2]^{-1/2}$. Для частицы с массой покоя, отличной от нуля, $v = R d\sigma/dt$.

метил, что в силу конформной инвариантности[†] уравнений Максвелла частота ν' , соответствующая линейному элементу $ds^2 = R^2(t') (d\sigma^2 - c^2 dt'^2)$, не должна зависеть от времени.

Пусть μ — плотность массы, $u = \mu c^2$ — соответствующая плотность энергии, p — давление, причем u и p зависят от времени, но одинаковы во всех точках пространства. Тогда для компонент тензора энергии—импульса T_{ik} получаем ($a, b=1, 2, 3$)

$$T_{44} = u, \quad T_{4a} = 0, \quad T_{ab} = p g_{ab} = p R^2 \gamma_{ab}. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T &= -u + 3p, \\ T_{44} - \frac{1}{2} g_{44} T &= \frac{1}{2} (u + 3p), \\ T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T &= \frac{1}{2} (u + 3p). \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисление компонент тензора R_{ik} приводит к следующим результатам (точка означает дифференцирование по $x_4 = ct$):

$$R_{44} = \frac{3\ddot{R}}{R}, \quad R_{4a} = 0, \quad R_{ab} = -\gamma_{ab} (2\varepsilon + \dot{R}^2 + R\ddot{R}). \quad (6)$$

Уравнения поля без космологического λ -члена

$$R_{ik} = -\kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right)$$

позволяют получить

$$\begin{aligned} 3 \frac{\ddot{R}}{R} &= -\frac{\kappa}{2} (u + 3p), \\ 2\varepsilon + 2\dot{R}^2 + R\ddot{R} &= \frac{\kappa}{2} R^2 (u - p), \end{aligned} \quad (7)$$

или

$$\begin{aligned} 3 \frac{\dot{R}^2 + \varepsilon}{R^2} &= \kappa u, \\ -\frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + \varepsilon}{R^2} &= \kappa p. \end{aligned} \quad (8)$$

Закон сохранения энергии—импульса (равенство нулю ковариантной дивергенции T_{ik}) при $i=4$ (остальные три уравнения

выполняются тождественно) дает соотношение

$$\dot{u} + \frac{3\dot{R}}{R}(u + p) = 0, \quad (9)$$

что также следует непосредственно из (7) или (8). Уравнение (9) можно, кроме того, записать в виде

$$d(uR^3) + pd(R^3) = 0, \quad (9a)$$

что выражает постоянство энтропии для некоторого объема вещества.

Если в объеме содержатся только частицы с массой, то

$$p = 0, \quad uR^3 = \text{const} = \frac{1}{3} A; \quad (9б)$$

если только фотоны, то

$$p = \frac{1}{3} u, \quad uR^4 = \text{const}. \quad (9в)$$

Практически представляет интерес, по-видимому, только случай $p = 0$, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Подстановка (9в) в первое из соотношений (8) приводит к

$$R(\dot{R}^2 + \varepsilon) = \kappa A$$

или

$$\dot{R}^2 = \frac{\kappa A}{R} - \varepsilon. \quad (10)$$

Последнее соотношение нетрудно проинтегрировать. Например, при кривизне, равной нулю, получаем

$$\varepsilon = 0, \quad \frac{2}{3} R^{3/2} = \sqrt{\kappa A} c (t - t_0). \quad (11)$$

Отсюда следует, что *постоянная Хаббла* равна

$$H \equiv \frac{1}{t_H} = c \frac{\dot{R}}{R}, \quad \frac{1}{t_H} = c \frac{V(\kappa A)}{R^{3/2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{t - t_0}, \quad (12)$$

или

$$t - t_0 = \frac{2}{3} t_H = \frac{2}{3} H^{-1}. \quad (13)$$

В этом решении время t_0 отвечает точке $R = 0$, $u = \infty$, где исходные предположения модели уже не верны. Теоретически невозможно пройти назад за момент t_0 , в котором состояние

вещества характеризуется огромной плотностью, и в этом смысле время $t - t_0$ можно интерпретировать как возраст Вселенной.

Остальные случаи $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$ читатель найдет в работах [3, 6, 8]. Если величину $H = 1/t_H$ по-прежнему определять равенством (12) и $R = 0$ при $t = t_0$, то для «возраста Вселенной» $t - t_0$ можно найти следующие неравенства:

$$t - t_0 < \frac{2}{3} t_H \quad \text{при} \quad \varepsilon = +1, \quad (13a)$$

$$t - t_0 > \frac{2}{3} t_H \quad \text{при} \quad \varepsilon = -1. \quad (13б)$$

В последнем случае протяженность времени $t - t_0$ ограничена при данном t_H также возможными значениями $R/\kappa A$.

Нижнюю границу для $t - t_0$ дает возраст земной коры, который составляет около $3 \cdot 10^9$ лет. Одно время казалось, что существует некоторое расхождение между возрастом Вселенной и измеренным значением постоянной Хаббла; оценка для возраста Вселенной оказывалась слишком низкой [3, 6]. Недавно астрономы получили, однако, несколько меньшее значение постоянной Хаббла H^1) [8]:

$$t_H = \frac{1}{H} = (5,6 \pm 2) \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Ныне, по-видимому, не существует сколько-нибудь серьезных расхождений между постоянной Хаббла, возрастом Вселенной и уравнениями общей теории относительности без космологического члена [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedmann A., Zs. f. Phys., **10**, 377 (1922); **21**, 326 (1924).
2. Lemaître G., Ann. Soc. Sci. Brux., **A47**, 49 (1927).
3. Einstein A., Sitzber. preuss. Akad. Wiss., 235 (1931); приложение к книге «The Meaning of Relativity», изд. 2, 1945, воспроизведенное во всех последующих изданиях. (См. перевод в книге: А. Эйнштейн, Сущность теории относительности, ИЛ, 1955, приложение 1, стр. 98.)
4. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934.

¹⁾ Современное значение — около $13 \cdot 10^9$ лет. — Прим. ред.

5. v o n L a u e M., Relativitätstheorie, Bd. 2; Allgemeine Relativitätstheorie, 3 изд., 1953, стр. 52.
6. J o r d a n P., Schwerkraft und Weltall, 2 изд., 1955.
7. v o n L a u e M., Sitzber. preuss. Akad. Wiss., 723 (1931).
8. S a n d a g e A. R., Astr. Journ., 59, 180 (1954).
9. R o b e r t s o n H. P., Proc. of the Congress «Jubilee of Theory of Relativity», Berne, 1955.

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Прежде чем перейти к подробному описанию некоторых попыток «унификации» теорий поля, необходимо сделать ряд замечаний об области применимости классической непрерывной физики в объяснении двойственности свойств вещества, характеризваемой интуитивными представлениями о «волне» и «частице» и описываемой статистическими законами, которые провозглашены квантовой (или волновой) механикой после 1927 г.¹⁾ Большинство физиков, включая автора, придерживаются взглядов, высказанных Бором и Гейзенбергом при эпистемологическом анализе ситуации, создавшейся в связи с этими идеями, и потому считают невозможным полное решение открытых вопросов в физике на пути возврата к представлениям классической теории поля.

С другой стороны, Эйнштейн после того, как он революционизировал мышление физиков, создав общие методы, которые имеют фундаментальное значение также для квантовой механики и ее интерпретации, до конца своих дней сохранял надеж-

¹⁾ Следует подчеркнуть, что в квантовой механике фундаментальное изменение претерпело не только понятие частицы классической механики, но и понятие волны классической теории поля. Действительно, как показал Шредингер, системы взаимодействующих частиц можно описывать лишь волнами в многомерном конфигурационном пространстве, а не волнами в обычном пространственно-временном многообразии. В тех случаях, когда частицы рождаются или аннигилируют (т. е. полное число частиц меняется со временем), приходится вводить в рассмотрение наборы таких конфигурационных пространств с различным числом измерений. Такому подходу эквивалентно так называемое «квантование поля», при котором амплитуды волновых полей в обычном пространственно-временном многообразии заменяются на выбранные должным образом операторы (см. [1—3]).

ду, что даже квантовые черты атомных явлений смогут быть в принципе объяснены с позиций классической физики полей. Несмотря на то что принцип дополнительности Бора обобщил представление о физической реальности в атомной физике, рассматривая все экспериментальное устройство как существенную часть описываемого теоретически явления, Эйнштейн хотел остаться верным идеалу классической небесной механики, согласно которому объективное состояние системы совершенно не должно зависеть от способа наблюдения.

Хотя Эйнштейн честно признавал, что его надежды на полное решение проблемы на этом пути еще не осуществились и возможность создания такой теории им еще не доказана, он считал, что вопрос остался открытым. Поэтому, когда он говорит о «единой теории поля», он имеет в виду именно эту далеко идущую программу построения теории, которая решает все проблемы, рассматривая элементарные частицы вещества с помощью всюду регулярных (лишенных особенностей) классических полей.

Физики, которые придерживаются интерпретации квантовой механики Бора — Гейзенберга, вкладывают в понятие унификации классических полей, подобных гравитационному и электромагнитному полям, лишь ограниченный смысл, пока не затрагиваются источники полей, например массы и электрические заряды. Для описания источников и их свойств вводятся волновые поля для вещества и их квантование¹⁾. Но даже эта программа, по-видимому, еще далека от реализации.

Читатель этой книги увидит в § 67, что уже в то время я с большим сомнением относился к возможности объяснения атомизма вещества и особенно электрического заряда с помощью только представлений о непрерывных полях. В этой связи следует напомнить, что атомизм электрического заряда нашел выражение уже в определенном численном значении постоянной тонкой структуры, теоретического объяснения которого пока не существует. В частности, я почти не сомневался в фундаментальном характере двойственности (или, как говорят после 1927 г., дополнительности) между измеряемым полем и пробным телом, которое служит как измерительный прибор. Этот вопрос был впоследствии поднят Н. Бором на восьмом Сольвеевском конгрессе в 1948 г. [4].

¹⁾ См. примечание на предыдущей странице.

Сделав эти общие вводные замечания, мы переходим к обсуждению двух попыток создать единую теорию поля, которые обобщают формально теорию относительности Эйнштейна в различных направлениях.

а) Теории с несимметричными g_{ik} и Γ_{ik}^l ¹⁾. Существует два варианта таких теорий. В более ранних работах симметричные или несимметричные символы Γ_{ik}^l фигурировали как единственные исходные величины теории. В последующих работах и несимметричные g_{ik} или g^{ik} и несимметричные Γ_{ik}^l рассматривались как независимые переменные. В первом случае метрический тензор предполагался пропорциональным симметричной части R_{ik} , свернутого тензора кривизны.

Это предположение справедливо лишь в том случае, если в уравнения поля входит космологический член. Поскольку его существование более не оправдано, остаются теории второго типа, в которых несимметричные g_{ik} и Γ_{ik}^l рассматриваются как независимые переменные. В соответствии с этим Эйнштейн впоследствии рассматривал только теорию второго типа.

Все эти теории сталкиваются с одним возражением — они находятся в противоречии с принципом, гласящим, что в теории поля должны входить лишь неприводимые величины. Этот принцип удовлетворителен с формальной точки зрения, и отступлений от него в физике никогда не встречалось. Поэтому я думаю²⁾, что должны быть приведены убедительные математические причины (например, постулат инвариантности относительно более широкой группы преобразований), объясняющие, почему не происходит разложения приводимых величин, использованных в теории (например, R_{ik} , g_{ik} и Γ_{ik}^l). В опубликованной литературе этого до сих пор сделано не было³⁾.

Однако Эйнштейну это возражение было хорошо известно и он тщательно рассмотрел его в одной из последних своих работ

¹⁾ Для сравнения см. монографию Эддингтона [5]; ряд докладов Эйнштейна в Sitzber. preuss. Akad. Wiss. (1923—1925 гг.), книгу Шредингера [6], где приведены результаты работ автора в Proc. Roy. Irish Acad. (1943—1948 гг.) и уравнение Эйнштейна — Штраусса [7]. Кроме того, см. работу Эйнштейна [8].

²⁾ Той же точки зрения придерживается Вейль [9].

³⁾ Уже в теории с симметричными Γ_{ik}^l как единственными переменными поля выбор $\sqrt{-\det |R_{ik}|}$ в качестве плотности в интеграле действия является произвольным. Расщепление R_{ik} на симметричную и антисимметричную части дает еще большее число возможностей.

(см. [10]). Прежде чем излагать точку зрения и результаты Эйнштейна и Кауфмана, мы приведем выражение для свернутого тензора кривизны R_{ik} через несимметричные символы Γ_{ik}^l :

$$R_{ik} = \Gamma_{ik, s}^s - \Gamma_{is, k}^s - \Gamma_{it}^s \Gamma_{sk}^t + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{st}^t, \quad (1)$$

где теперь порядок нижних индексов у Γ_{ik}^l имеет существенное значение¹). Авторы затем указывают, что это выражение инвариантно по отношению к λ -преобразованиям

$$\Gamma_{ik}^{l'} = \Gamma_{ik}^l + \delta_i^l \lambda_{, k}, \quad (2)$$

где $\lambda(x)$ — произвольная функция. Они вводят постулат, что все уравнения должны быть инвариантны относительно этого λ -преобразования (λ -инвариантность). Формально этот постулат делает использование симметричных символов Γ невозможным.

В качестве второго постулата Эйнштейн и Кауфман вводят транспозиционную инвариантность. Это означает, что все уравнения остаются в силе, если все величины A_{ik} заменять транспонированными $A_{ik}^T = A_{ki}$. Тензор R_{ik} , определенный через Γ_{ik}^l , не удовлетворяет этому требованию. К требуемой инвариантности, однако, можно прийти, если ввести новые величины, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{ik}^l &= \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{it}^t \delta_k^l, \\ \Gamma_{ik}^l &= U_{ik}^l - \frac{1}{3} U_{it}^t \delta_k^l. \end{aligned} \quad (3)$$

Свернутый тензор кривизны выражается через U_{ik}^l при помощи соотношения

$$R_{ik}(U) = U_{ik, s}^s - U_{it}^s U_{sk}^t + \frac{1}{3} U_{is}^s U_{tk}^t \quad (4)$$

и является теперь транспозиционно-инвариантным. Для U_{ik}^l λ -преобразование записывается в виде

$$U_{ik}^{l'} = U_{ik}^l + (\delta_j^l \lambda_{, k} - \delta_k^l \lambda_{, i}). \quad (5)$$

Закон преобразования U_{ik}^l при координатных преобразованиях приведен в работе [8]. Уравнения поля получаются путем

¹) В дальнейшем операция $(\dots)_{,k}$ всегда означает обычное дифференцирование по x^k . Общий знак R_{ik} , выбранный Эйнштейном и Кауфманом, оставлен здесь, хотя он обратен знаку R_{ik} , использованному в остальной части этой книги.

вариации интеграла действия по g^{ik} и по U_{ik}^l как по независимым переменным.

Вместо g^{ik} можно использовать также тензорную плотность с компонентами g^{ik} , которые в четырехмерном пространственно-временном континууме определены соотношениями

$$g^{ik} = \frac{g^{ik}}{\sqrt{-\det |g^{ik}|}}, \quad g^{ik} = \frac{g^{ik}}{\sqrt{-\det |g^{ik}|}}. \quad (6)$$

В соответствии с духом обычной общей теории относительности выбор скалярной плотности \mathfrak{L} в интеграле действия ограничен требованиями, чтобы \mathfrak{L} не содержало производных от g^{ik} , а содержало только первые производные от U_{ik}^l и зависело линейно от последних. Эти требования вместе с требованиями λ -инвариантности и транспозиционной инвариантности, упомянутыми выше, приводят к выражению для \mathfrak{L} линейному по R_{ik} , выраженному через U_{ik}^l . Если космологический член, не зависящий от R_{ik} , опущен, то при должном выборе поля g^{ik} мы приходим к выражению Эйнштейна для скалярной плотности в подынтегральном выражении интеграла действия

$$\mathfrak{L} = g^{ik} R_{ik}, \quad (7)$$

удовлетворяющему всем перечисленным постулатам [величины g^{ik} определены соотношениями (6)].

Вывод уравнений поля и тождественных соотношений между ними можно найти в цитированной выше литературе. В частном случае, когда антисимметричные части g_{ik} и Γ_{ik}^l обращаются в нуль, мы приходим снова к обычным уравнениям поля общей теории относительности в отсутствие вещества.

Довольно сомнительно, имеют ли уравнения поля этой теории, основанные на формальных постулатах λ -инвариантности и транспозиционной инвариантности, лишенных непосредственного физического или геометрического смысла, вообще какое бы то ни было отношение к физике.

В «единой теории поля» полностью отсутствует какой-либо ведущий физический принцип, подобный принципу эквивалентности в общей теории относительности, который был бы основан на данных опыта. Более того, в обычной общей теории относительности непосредственный физический смысл имеет элемент длины и вместе с ним квадратичная форма $g_{ik} dx^i dx^k$, а не

псевдотензор Γ_{ik}^l , который управляет параллельным смещением векторов.

Далее мы рассмотрим другие попытки создания «единой теории поля», в которых используются лишь неприводимые величины.

б) **Пятимерные и проективные теории**¹⁾. Калуза [12] нашел интересное геометрическое представление в ковариантном виде уравнений электродинамики Максвелла, которое впоследствии было улучшено и обобщено Клейном²⁾.

Рассматривается пространство с цилиндрической метрикой

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(в дальнейшем греческие индексы μ, ν, \dots пробегают значения от 1 до 5, а латинские индексы i, k, \dots — от 1 до 4). Условие цилиндричности лучше всего записать в специально выбранной системе координат³⁾, в которой $\gamma_{\mu\nu}$ не зависят от x^5 ,

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^5} = 0. \quad (9)$$

Кроме того, Калуза и Клейн предполагали, что

$$\gamma_{55} = 1. \quad (10)$$

Положительный знак γ_{55} означает, что пятое измерение метрически пространственно-подобно. Причина такого выбора будет ясна позже. Помимо координатных преобразований общей теории относительности, для координат x^h в избранных системах координат допустима группа преобразований

$$x'^5 = x^5 + f(x^1, \dots, x^4). \quad (11)$$

Если записать выражение (8) в виде

$$ds^2 = (dx^5 + \gamma_{i5} dx^i)^2 + g_{ik} dx^i dx^k, \quad (12)$$

то нетрудно убедиться, что g_{ik} инвариантны относительно преобразований (11)

$$g'_{ik} = g_{ik}, \quad (13)$$

¹⁾ Обзор этих теорий читатель найдет в книге Бергмана [11], гл. XVII и XVIII.

²⁾ В первых двух из работ Клейна [13] уже принята во внимание периодическая зависимость метрики от пятой координаты.

³⁾ Формулировка для общей системы координат содержится в цитированной книге Бергмана [11].

тогда как

$$\gamma'_{i5} = \gamma_{i5} - \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (14)$$

Сравнение (8) и (12) позволяет получить

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_{i5}\gamma_{k5}. \quad (15)$$

Если g^{ik} , как обычно, обратная матрица к g_{ik} , а $\gamma^{\mu\nu}$ — обратная матрица к $\gamma_{\mu\nu}$, то легко получить

$$\det |\gamma_{\mu\nu}| = \det |g_{ik}|, \quad \gamma^{55} = 1 + \gamma^{ik}\gamma_{i5}\gamma_{k5}, \quad \gamma^{i5} = -g^{ik}\gamma_{k5}, \quad \gamma^{ik} = g^{ik}. \quad (16)$$

Вид преобразований (14), аналогичных градиентным преобразованиям, наводит на мысль об отождествлении γ_{i5} с электромагнитным потенциалом Φ_i с точностью до некоторого множителя. Антисимметричный тензор

$$\frac{\partial \gamma_{k5}}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{i5}}{\partial x^k} = f_{ik}, \quad (17)$$

инвариантный относительно «градиентных преобразований» (14), пропорционален тогда напряженностям электромагнитного поля. К определению коэффициента пропорциональности мы вернемся позже.

Геодезические линии метрики (8) или (12) также можно интерпретировать физически при таком подходе. Из независимости $\gamma_{\mu\nu}$ от x^5 непосредственно следует, что при надлежащем выборе параметра s на геодезических постоянны два выражения

$$\frac{dx^5}{ds} + \gamma_{i5} \frac{dx^i}{ds} = \text{const} = C \quad (18)$$

и

$$g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \text{const} = -1. \quad (18a)$$

Постоянную в уравнении (18a) можно нормировать к -1 . Уравнения геодезических имеют вид

$$\frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^k}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} = C f_{ik} \frac{dx^k}{ds}. \quad (19)$$

Но это соотношение представляет собой уравнение для траектории заряженной частицы во внешних гравитационном и элект-

тромагнитном полях. Поэтому постоянная интегрирования C пропорциональна отношению e/m заряда и массы частицы.

Мы упомянем здесь кратко другой путь геометризации гравитационного и электромагнитного полей, а именно *проективную* геометризацию. Многие авторы внесли здесь свой вклад, а среди них Веблен и Гоффман, Шутен и ван Данциг и я¹). Бергман [11] показал, однако (в противоположность тому, что думал раньше сам), что эта теория не является более общей, чем теория Калуза, и что нетрудно перейти от одной из этих формулировок к другой. Введем однородные координаты X^ν при помощи соотношения

$$X^\nu = f^\nu(x^i) e^{x^5} \quad (20)$$

(с произвольными функциями f^ν); обратные соотношения имеют вид

$$x^i = g^i \left(\frac{X^1}{X^5}, \dots, \frac{X^4}{X^5} \right), \quad (20a)$$

$$x^5 = \ln \left\{ X^5 F \left(\frac{X^1}{X^5}, \dots, \frac{X^4}{X^5} \right) \right\} = \ln H^{(1)}(X^1, \dots, X^5),$$

где $H^{(1)}$ — однородная функция 1-й степени. Нетрудно убедиться, что «градиентные преобразования» (11) в комбинации с общими преобразованиями координат x^h в точности соответствуют *группе всех однородных преобразований 1-й степени координат X^ν* . Именно последние преобразования рассматриваются в проективной формулировке теории. Ввиду взаимно однозначного соответствия между двумя формами теории²) мы не будем дальше рассматривать проективную форму.

Геометрическая форма общековариантных законов электромагнитного поля, принадлежащая Калуза и изложенная выше, ни в коей мере не представляет собой «унификации» гравитационного и электромагнитного полей. Наоборот, любая общековариантная и градиентно инвариантная теория¹ может быть представлена в форме Калуза. При отсутствии электрических зарядов (токов) уравнения Максвелла в общековариант-

¹) Помимо книги Бергмана, литературу по этому вопросу можно найти в монографии Людвига [14].

²) Для метрического тензора $\Gamma_{\mu\nu}$, соответствующего X^ν , имеем, согласно [20],

$$\gamma_{55} = \Gamma_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^5} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^5} = \Gamma_{\mu\nu} X^\mu X^\nu.$$

ной форме можно получить, варьируя интеграл действия с плотностью

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} \left(R + \frac{\kappa}{2} F_{ik} F^{ik} \right), \quad (21)$$

если F_{ik} — напряженности электромагнитного поля. Однако и более сложная зависимость скалярной плотности в интеграле действия от напряженностей могла бы с тем же успехом быть согласована с цилиндрически симметричной пятимерной метрикой.

Калуза и Клейн, однако, получили еще один интересный результат. Они вычислили скаляр P , образованный из тензора кривизны, который соответствует выбору пятимерной метрики в виде (8) или (12), и нашли

$$P = R + \frac{1}{4} f_{ik} f^{ik}, \quad (22)$$

где R — тензор кривизны, определенный для четырехмерной метрики $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, а f_{ik} определены соотношениями (17). Это выражение тождественно совпадает с (21), если положить

$$f_{ik} = \sqrt{2\kappa} F_{ik}, \quad \gamma_{i5} = \sqrt{2\kappa} \varphi_i. \quad (23)$$

Следует отметить здесь, что знак второго члена в правой части уравнения (22) изменился бы, если бы мы выбрали пятую координату времениподобной ($\gamma_{55} = -1$), а не пространственно-подобной. Пятое измерение должно быть выбрано пространственно-подобным, чтобы в (22) знак правой части был тот же, что и в (21). Можно сказать также, что при выборе P в качестве инварианта в интеграле действия эмпирический знак гравитационной постоянной представлен пространственно-подобным знаком γ_{55} .

Однако не существует причин с точки зрения ограниченной группы цилиндрической метрики, чтобы в качестве подынтегрального выражения в интеграле действия выбрать именно пятимерную скалярную кривизну P . Нерешенная проблема об отыскании таких причин заставляет, по-видимому, думать о расширении группы преобразований. Это связано с возможностями обобщения формализма Калуза, которые мы сейчас рассмотрим.

Одно из обобщений формализма Калуза заключается в отказе от условия (10) $\gamma_{55} = 1$ при сохранении условия (9). С точки

зрения группы преобразований общей теории относительности γ_{55} представляет собой теперь новое скалярное поле, которое по-прежнему предполагается не зависящим от x^5 . Полагая

$$\gamma_{55} = J, \quad \gamma_{i5} = J f_i, \quad \gamma_{ik} = g_{ik} + J f_i f_k, \quad (24)$$

получаем

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = J (dx^5 + f_i dx^i)^2 + g_{ik} dx^i dx^k \quad (25)$$

с «градиентной» группой

$$x'^5 = x^5 + f(x^i), \quad f'_i = f_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (26)$$

Иордан [15], первоначально сформулировавший свою теорию в проективной форме, воспользовался давними идеями Дирака [16] и сделал интересную попытку использовать это новое поле J для построения теории, в которой гравитационная постоянная обычной теории заменяется зависящим от времени полем. С математической точки зрения эта идея была независимо исследована Тири [17] (см. также [18]). Как показал Фирц [19], введение вещества приводит в этой теории к дополнительным предположениям, без которых временная зависимость стандартных длин, полученных из атомных размеров и по гравитационному взаимодействию между частицами с массой, не равной нулю, еще не определена. Мы не будем здесь касаться вопроса об экспериментальных свидетельствах в пользу этой теории.

Другое более фундаментальное обобщение теории Калуза заключается в отказе от условия цилиндричности (9). Уже в первых своих работах 1926 г. Клейн рассмотрел *периодическую зависимость всех переменных поля от x^5* . Если выбрать в качестве периода 2π , то это *предположение I* («Все компоненты $\gamma_{\mu\nu}$ являются периодическими функциями x^5 с периодом 2π ») можно также выразить с помощью разложения Фурье

$$\gamma_{\mu\nu}(x^5, x^i) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\mu\nu}^{(n)}(x^i) e^{in x^5} \quad (27)$$

при обычном условии действительности

$$\gamma_{\mu\nu}^{(-n)} = (\gamma_{\mu\nu}^{(n)})^*. \quad (27a)$$

Геометрически x^5 можно интерпретировать как угловую переменную, так что все значения x^5 , отличающиеся на целое крат-

ное 2π , соответствуют одной и той же точке пятимерного пространства, если значения x^i одни и те же. Из одного этого предположения еще не следует существование замкнутых геодезических без разрывов в их направлении. Эйнштейн и Бергман ([20], см. также [21] и [11], стр. 227) исследовали, в частности, следствия дополнительного предположения II: через каждую точку пятимерных пространств проходит в точности одна геодезическая линия, которая возвращается в эту же точку, непрерывно меняя направление. Они показали, что в этом случае всегда существует избранная система координат, где

$$\gamma_{55} = 1, \quad \frac{\partial \gamma_{5i}}{\partial x^5} = 0. \quad (28)$$

Группа преобразований остается той же, что и в первоначальной теории Калуза, но g_{ik} могут теперь зависеть периодически от x^5 .

Авторы затем строят наиболее общий инвариант, отвечающий тем же общим требованиям по отношению к порядку дифференцирования, что и в обычной теории относительности (а именно, линейности по вторым производным поля и отсутствию высших производных). Соответствующие уравнения поля являются, вообще говоря, интегро-дифференциальными.

При всех этих предположениях не удается прийти к интерпретации или оправданию выбора P в качестве скаляра в принципе наименьшего действия, однако ситуация существенно меняется, если отбросить предположение II, сохранив предположение I. Группа преобразований тогда будет иметь вид

$$\begin{aligned} x'^5 &= x^5 + p^5(x^5, x^k), \\ x'^i &= p^i(x^5, x^k), \end{aligned} \quad (29)$$

где p^ν — произвольные периодические функции x^5 с периодом 2π . Эта общая группа также рассматривалась Клейном, но ее математические и физические следствия нуждаются в дальнейшем изучении.

Справедливо, что единственным скаляром, который можно составить из $\gamma_{\mu\nu}$ при помощи только обычного процесса дифференцирования (с ограничениями на порядок дифференцирования, налагаемыми обыкновенно в общей теории относительности), является теперь скаляр P , отвечающий пятимерной метрике. Однако все еще остается нерешенным вопрос о том, существуют ли какие-нибудь другие инварианты в большом,

которые можно было бы выразить как интегралы по должным образом выбранным замкнутым кривым и использовать в принципе наименьшего действия¹⁾).

Помимо математических трудностей, остается еще проблема физической интерпретации общих функций, периодически зависящих от x^5 , заданных соотношениями (27). Эта проблема ведет к волновой механике и поэтому также к проблеме квантования поля²⁾. Тензоры, подобные $\gamma_{\mu\nu}^{(n)}(x^i)$, соответствуют спину, равному 2, который, кстати, никогда не встречался в природе и из которого никаким сложением нельзя получить спин, равный $1/2$.

С нашей точки зрения (см. вводную часть к этому примечанию), ясно, что, помимо поля $\gamma_{\mu\nu}(x^5, x^i)$, должны существовать другие поля квантовомеханического типа, такие, например, как спинорные поля, описывающие частицы с малой массой [13].

Таким образом, вопрос о том, имеет ли формализм Калузы какое-либо будущее в физике, ведет к более общей главной нерешенной проблеме о синтезе общей теории относительности и квантовой механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jordan P., Klein O., Zs. f. Phys., 45, 751 (1927).
2. Jordan P., Wigner E., Zs. f. Phys., 47, 631 (1928).
3. Фок В., Zs. f. Phys., 75, 622, 1932. (См. перевод: В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Изд.-во ЛГУ, 1957, стр. 25.)
4. Bohr N., Report on 8th Solvay Conference of Physics, Bruxelles, 1950, p. 376—380.
5. Eddington A. S., The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge, 1924. (См. перевод: А. Эддингтон, Теория относительности, Л.—М., 1934.)
6. Schrödinger E., Space-Time-Structure, Cambridge, 1950.
7. Einstein A., Straus E. G., Ann. Math., Princeton, (2) 47, 731 (1946).
8. Einstein A., Ann. Math., Princeton, (2) 46, 538 (1945).
9. Weyl H., Naturwiss., 38, 73 (1951); Proc. of the Berne Congress, 1955.

¹⁾ Бергман любезно обратил мое внимание на следующую проблему: существует ли всегда в пятимерном многообразии с топологией цилиндра, бесконечно протяженного в пространстве x^1, \dots, x^4 , и с метрикой, удовлетворяющей предположению I, избранная система координат, в которой $\partial\gamma_{\mu 5}/\partial x^5=0$ при $\mu=1, \dots, 5$.

²⁾ См. примечание 2 на стр. 424.

10. Einstein A., Kaufmann B., Ann. Math., Princeton, **62**, 128 (1955); The Meaning of Relativity, 5 изд., Princeton, 1955, Appendix II.
11. Bergmann P. G., An Introduction to the Theory of Relativity, New York, 1942. (См. перевод: П. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.)
12. Kaluza Th., Sitzber. preuss. Akad. Wiss., 966 (1921).
13. Klein O., Nature, **118**, 516 (1926); Zs. f. Phys., **37**, 895 (1926); **46**, 188 (1928); Ark. Mat. Astr. Fys., **34**, 1 (1946); Proc. of the Berne Congress, 1955.
14. Ludwig C., Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie, Berlin, 1951.
15. Jordan P., Schwerkraft und Weltall, 2-е изд., 1955.
16. Dirac P. A. M., Nature, **139**, 323 (1937); Proc. Roy. Soc., **A165**, 199 (1938).
17. Thiry Y. R., Диссертация, Paris, 1951.
18. Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Paris, 1955.
19. Fierz M., Helv. phys. Acta, **29**, 128 (1956).
20. Einstein A., Bergmann P. G., Ann. Math., Princeton, **39**, 683 (1938).
21. Einstein A., Bargmann V., Bergmann P. G., Th. Kármán Anniversary Volume, Pasadena, 1941, p. 212.

БИБЛИОГРАФИЯ ВОЛЬФГАНГА ПАУЛИ

(Составитель Шарль Энци)

А. КНИГИ И СТАТЬИ В СБОРНИКАХ

Relativitätstheorie, Encyklopädie der Math. Wissensch., т. V, 1921, часть 2, стр. 539—775 и отдельное издание, Leipzig, 1921. (См. перевод: В. Паули, Теория относительности, М.—Л., 1947.)

Новые издания с предисловием и дополнениями (1956): Theory of Relativity, London, 1958.

Teoria della Relatività, Torino, 1958.

Статья «Störungstheorie» в кн. Physikalisches Handwörterbuch, Berlin, 1924, стр. 752—756.

Quantentheorie, Handbuch der Physik, т. 23, 1926, стр. 1—278.

Über das H -Theorem vom Anwachsen der Entropie vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik, в кн. Probleme der modernen Physik, Arnold Sommerfeld zum 60. Geburtstag, gewidmet von seinen Schülern, Leipzig, 1928, стр. 30—45.

Theorie der schwarzen Strahlung, Müller-Pouillet's Lehrbuch, 11 изд., т. II, часть 2, Berlin, 1929, стр. 1483—1553.

Allgemeine Grundlagen der Quantentheorie des Atombaues, Müller-Pouillet's Lehrbuch, 11 изд., т. II, часть 2, Berlin, 1929, стр. 1709—1842.

Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Handbuch der Physik, 2 изд., т. 24, 1933, часть 1, стр. 83—272. (См. перевод: В. Паули, Общие принципы волновой механики, М.—Л., 1947.)

Пересмотренное новое издание в Handbuch der Physik, т. V, 1958, часть 1, стр. 1—168.

Meson Theory of Nuclear Forces, New York, 1946; 2 изд., 1948. (См. перевод: В. Паули, Мезонная теория ядерных сил, ИЛ, 1947.)

Einstein's Contribution to Quantum Theory в кн. Albert Einstein, Philosopher-Scientist, т. VII. Серия «Library of Living Philosophers», 1949, стр. 149—160.

- Einsteins Beitrag zur Quantentheorie в кн. Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher, Stuttgart, 1955, стр. 74—83.
- Der Einfluss archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler, в кн. Naturerklärung und Psyche, Zürich, 1952.
- The Influence of Archetypal Ideas on the Scientific Theories of Kepler, в кн. The Interpretation of Nature and the Psyche, New York—London, 1955.
- Remarques sur le problème des paramètres cachés dans la mécanique quantique et sur la théorie de l'onde pilote, в кн. Louis de Broglie, Physicien et Penseur, Paris, 1953, стр. 33—42.
- Matter, в сб. Man's Right to Knowledge, An International Symposium Presented in Honour of the Two-Hundredth Anniversary of Columbia University, 1754—1954, серия вторая: Present Knowledge and New Directions, New York, 1954, стр. 10—18.
- Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflection of Space-time and Charge, в сб. Niels Bohr and the Development of Physics, Essays dedicated to Niels Bohr on the Occasion of his Seventieth Birthday (под ред. В. Паули), London—New York, 1955, стр. 30—51. (См. перевод: В. Паули, Принцип запрета; группа Лоренца, отражение пространства, времени и заряда, в кн. «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958, стр. 46—74.) Physik und Erkenntnistheorie, Braunschweig, 1960.

Б. ОРИГИНАЛЬНЫЕ И ДИСКУССИОННЫЕ СТАТЬИ
В ЖУРНАЛАХ И ДОКЛАДЫ НА КОНФЕРЕНЦИЯХ

- Mercurperihellbewegung und Strahlenablenkung in Weyls Gravitationstheorie, Verh. dtsch. phys. Ges., **21**, 742—750 (1919).
- Über die Energiekomponenten des Gravitationsfelds, Phys. Zs., **20**, 25—27 (1919).
- Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von Hermann Weyl. Phys. Zs., **20**, 457—467 (1919).
- Theoretische Bemerkungen über den Diamagnetismus einatomiger Gase, Zs. f. Phys., **2**, 201—205 (1920).
- Die Ausbreitung des Lichtes in bewegten Medien, Math. Ann., **82**, 113—119 (1920).
- Quantentheorie und Magneton, Phys. Zs., **21**, 615—617 (1920).
- Zur Theorie der Dielektrizitätskonstante zweiatomiger Dipolgase, Zs. f. Phys., **6**, 319—327 (1921).
- Über die Quantelung gestörter mechanischer Systeme, Zs. f. Phys., **10**, 137—158 (1922). (Совместно с М. Борном.)

- Über das Modell des Wasserstoffmolekülions, Ann. d. Phys., Lpz (4) 68, 177—240 (1922). (Диссертация, Мюнхен.)
- Über die Gesetzmässigkeiten des anomalen Zeemaneffektes, Zs. f. Phys., 16, 155—164 (1923).
- Zur Theorie der Bandenspektren, Zs. f. Phys., 13, 351—367 (1923). (Совместно с Г. Крамерсом.)
- Über das thermische Gleichgewicht zwischen Strahlung und freien Elektronen, Zs. f. Phys., 18, 272—286 (1923).
- Zur Frage der Zuordnung der Komplexstrukturterme in starken und in schwachen äusseren Feldern, Zs. f. Phys., 20, 371—387 (1924).
- Bemerkungen zu den Arbeiten «Dimension der Einsteinschen Lichtquanten» und «Zur Dynamik des Stosses zwischen einem Lichtquant und einem Elektron» von L. S. Ornstein und H. C. Burger, Zs. f. Phys., 22, 261—265 (1924).
- Zur Frage der theoretischen Deutung der Satelliten einiger Spektrallinien und ihrer Beeinflussung durch magnetische Felder, Naturwiss., 12, 741—743 (1924). (Гипотеза о ядерном спине.)
- Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt, Zs. f. Phys., 31, 373—385 (1925).
- Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren, Zs. f. Phys., 31, 765—783 (1925). (Принцип Паули.)
- Über die Intensitäten der im elektrischen Felde erscheinenden Kombinationslinien, Danske Vidensk. Selsk., Math.-Fys. Medd., 7, No. 3 (1925).
- Über die Absorption der Reststrahlen in Kristallen, Verh. dtsh. phys. Ges. (3) 6, 10—11 (1925).
- Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik, Zs. f. Phys., 36, 336—363 (1926).
- Über die Dielektrizitätskonstante von Dipolgasen nach der Quantenmechanik, Phys. Zs. 27, 509—512 (1926). (Совместно с Л. Менсингом.)
- Über Gasentartung und Paramagnetismus, Zs. f. Phys., 41, 81—102 (1927).
- Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, Zs. f. Phys., 43, 601—623 (1927).
- Über den auf die Teilchen in den Kometenschweifen ausgeübten Strahlungsdruck, Naturwiss., 15, 49—51 (1927). (Совместно с В. Бааде.)
- Cinquième Conseil de Physique Solvay, Elektrons et Photons, Bruxelles, 1927, Дискусии, стр. 46, 95—98, 134—135, 256—258, 276—277, 280—282, 286, Paris, 1928.
- Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder, Zs. f. Phys., 47, 151—173 (1928). (Совместно с П. Иорданом.)

- Zur Quantendynamik der Wellenfelder, I, Zs. f. Phys., 56, 1—61 (1929).
(Совместно с В. Гейзенбергом.)
- Zur Quantentheorie der Wellenfelder, II, Zs. f. Phys., 59, 168—190 (1930).
(Совместно с В. Гейзенбергом.)
- Les théories quantiques du magnétisme: l'électron magnétique, в кн. Sixième Conseil de Physique Solvay, Le Magnétisme, Bruxelles, 1930, стр. 175—238, Дискусии, стр. 74, 240—242, 244, 269, 272, 275—276, Paris, 1932.
- Zur Hyperfeinstruktur von Li^+ , Zs. f. Phys., 67, 743—765 (1931).
(Совместно с П. Гютингером.)
- La théorie unitaire d'Einstein et Mayer et les équations de Dirac, Journ. de phys. et rad. (7) 3, 452—463, 582—589 (1932). (Совместно с И. Коломоном.)
- Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik, Helv. phys. Acta, 5, 179—199 (1932).
- Einige die Quantenmechanik betreffenden Erkundigungsfragen, Zs. f. Phys., 80, 573—586 (1933). (Ответ на вопросы П. Эренфеста.)
- Über die Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen, Helv. phys. Acta, 6, 279—286 (1933).
- Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten, Ann. d. Phys., Lpz. (5), 18, 305—336; 337—372 (1933).
- Paul Ehrenfest, Naturwiss., 21, 841—843 (1933).
- Septième Conseil de Physique Solvay, Noyaux Atomiques, Bruxelles, 1933, Дискусии, стр. 175, 180, 213—214, 215, 324—325 (гипотеза нейтрино), 330, Paris, 1934.
- Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung, Helv. phys. Acta, 7, 709—731 (1934). (Совместно с В. Вайскопфом.)
- Beiträge zur mathematischen Theorie der Dirac'schen Matrizen, в кн. Zeeman Verhandelingen, 1935, Haag, 1935, стр. 31—43.
- Raum, Zeit und Kausalität in der modernen Physik, Scientia, 59, 65—76 (1936).
- Remarks on the Polarization Effects in the Positron Theory, Phys. Rev., 49, 462—465 (1936). (Совместно с М. Бозе.)
- Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac, Ann. Inst. Poincaré, 6, 109—136 (1936).
- Théorie quantique relativiste des particules obéissant à la statistique de Einstein-Bose, Ann. Inst. Poincaré, 6, 137—152 (1936).
- Über das H -Theorem in der Quantenmechanik, Zs. f. Phys., 106, 572—587 (1937). (Совместно с М. Фирцом.)
- Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten, Nuovo Cimento, 15, 167—188 (1938). (Совместно с М. Фирцом.)

- On Asymptotic Series for Functions in the Theory of Diffraction of Light, Phys. Rev., **54**, 924—931 (1938). (К 70-летию А. Зоммерфельда.)
- Некоторые принципиальные замечания относительно теории β -распада, Изд. АН СССР, серия физич., стр. 149—152 (1938).
- Über ein Kriterium für Ein- oder Zweiwertigkeit der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik, Helv. phys. Acta, **12**, 147—168 (1939).
- Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld, Helv. phys. Acta, **12**, 297—300 (1939). (Совместно с М. Фирцом.)
- On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field, Proc. Roy. Soc., **173**, 211—232 (1939). (Совместно с М. Фирцом.)
- On the Statistical Behaviour of Known and Unknown Elementary Particles, Physica, **7**, 177—192 (1940). (Совместно с Л. Белинфанте.)
- The Connection Between Spin and Statistics, Phys. Rev., **58**, 716—722 (1940).
- Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhmasse, Helv. phys. Acta, **13**, 204—208 (1940.)
- Relativistic Field Theories of Elementary Particles, Rev. Mod. Phys., **13**, 203—232 (1941). (См. перевод: В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.)
- The Pseudoscalar Meson Field with Strong Coupling, Phys. Rev., **62**, 85—108 (1942). (Совместно с С. Данковым.)
- On the Theory of a Mixed Pseudoscalar and a Vector Meson Field, Phys. Rev., **63**, 400—416 (1943). (Совместно с С. Кусака.)
- On the Non-Existence of Regular Stationary Solutions of Relativistic Field Equations, Ann. Math., **44**, 131—137 (1943). (Совместно с А. Эйнштейном.)
- On Dirac's New Method of Field Quantization, Rev. Mod. Phys., **15**, 175—207 (1943.)
- On Applications of the λ -limiting Process to the Theory of the Meson Field, Phys. Rev., **64**, 332—344 (1943).
- On the Application of Dirac's Method of Field-Quantization to the Problem of Emission of Low Frequency Photons, Phys. Rev., **65**, 255—256 (1944). (Совместно с И. Яухом.)
- Niels Bohr on his 60th birthday, Rev. Mod. Phys., **17**, 97—101 (1945).
- On the Strong Coupling Case for Spin-Dependent Interactions in Scalar- and Vector-pair Theories, Rev. Mod. Phys., **17**, 267—286 (1945). (Совместно с Нин-ху.)
- Remarks on the History of the Exclusion Principle, Science, **103**, 213—215 (1946).

- Diracs Feldquantisierung und Emission von Photonen kleiner Frequenzen, *Helv. phys. Acta*, **19**, 234—237 (1946).
- Exclusion Principle and Quantum Mechanics, Нобелевская лекция, 1945, Neuchâtel, 1947; Stockholm, 1948. (См. перевод в этой книге, стр. 357.)
- Difficulties of Field Theories and of Field Quantization, *Phys. Soc. Cambridge Conf. Report*, 1947, стр. 5—10.
- Der Einfluss archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler. *Psychologischer Club, Zürich, Jahresbericht*, 1947/48, стр. 37—44.
- Sommerfelds Beiträge zur Quantentheorie, *Naturwiss.*, **35**, 129—132 (1948). (К 80-летию А. Зоммерфельда.)
- Die Idee der Komplementarität, *Dialectica*, **2**, 307—311, (1938). (От редакции.)
- Сообщение в сб. *Huitième Conseil de Physique Solvay, Les particules élémentaires*, Bruxelles, 1948, стр. 287—289, дискуссии, стр. 193, 284, Bruxelles, 1950.
- The Foundation of Quantum Statistics, *Nuovo Cimento*, **6**, Suppl., стр. 166—169 (1949). (Заметка по поводу сообщения М. Борна.)
- On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434—444 (1949). (Совместно с Ф. Вилларсом.)
- On the Connection Between Spin and Statistics, *Progr. Theor. Phys.*, **5**, 526—543 (1950).
- Die philosophische Bedeutung der Idee der Komplementarität, *Experientia*, **6**, 72—81 (1950).
- Etat actuel de la théorie quantique des champs. La renormalisation, в сб. *Particules fondamentales et noyaux*, Paris 1950, *Colloques internat. Centre nat. Recherche Sci.*, **38**, 67—77 (1953).
- Arnold Sommerfeld, *Zs. angew. Math. Phys.*, **2**, 301 (1951).
- Arnold Sommerfeld, *Zs. Naturforsch.*, **6a**, 468 (1951).
- Die Geschichte des periodischen Systems der Elemente. (Автореферат доклада 28 января 1952 г. в Цюрихе). *Vierteljahrsschrift naturf. Ges.*, Zürich, **97**, 137—139 (1952).
- Theorie und Experiment, *Dialectica*, **6**, 141—142 (1952).
- On the Hamiltonian Structure of Non-Local Field Theories, *Nuovo Cimento*, **10**, 648—667 (1953).
- Der Begriff der Wahrscheinlichkeit und seine Rolle in den Naturwissenschaften, *Verh. Schweiz. naturf. Ges.*, Bern, 1952, 1953, стр. 76—79.
- Wahrscheinlichkeit und Physik, *Dialectica*, **8**, 112—124 (1954).

- Rydberg and the Periodic System of the Elements, Proc. Rydberg Centennial Conference on Atomic Spectroscopy Lund, 1954, Lund, 1955, стр. 22—26.
- Dixième Conseil de Physique Solvay, Les électrons dans les métaux, Bruxelles, 1954, дискуссия, стр. 282, Bruxelles, 1955.
- Impressionen über Albert Einstein, Neue Zürcher Zeitung, No. 1055, 22, April (1955).
- Naturwissenschaftliche und erkenntnistheoretische Aspekte der Ideen vom Unbewussten, Dialectica, 8, 283—301 (1954).
- On the Mathematical Structure of T. D. Lee's Model of a Renormalizable Field Theory, Kgl Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 30, No. 7, (1955). (Совместно с Г. Челленом.)
- Remarks on Problems Connected with the Renormalization of Quantized Fields, Nuovo Cimento, 4, Suppl, 703—710 (1956).
- Die Wissenschaft und das abendländische Denken, в сб. Europa-Erbe und Aufgabe, Международный конгресс ученых, Майнц, 1955, Wiesbaden, 1956, стр. 71—79.
- Перепечатано в журнале Schweiz. Bauzeitung, 77, Heft I, 1—4 (1959). Вступительная речь; заключительное слово председателя конференции: Relativitätstheorie und Wissenschaft, в сб. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie, Bern, 1955, Helv. phys. Acta, Suppl. IV, стр. 27; 261—267; 282—286 (1956).
- Announcement, CERN Symposium, 1956, Vol. 2, стр. 258, 1956. (Доказательство существования нейтрино.)
- Zur älteren und neueren Geschichte des Neutrinos (Автореферат доклада 21 января 1957 г. в Цюрихе), Vierteljahrsschrift naturf. Ges. Zürich, 102, 387—388 (1957). (См. перевод доклада в этой книге, стр. 386.).
- On the Conservation of the Lepton Charge, Nuovo Cimento, 6, 204—215 (1957)
- Phänomen und physikalische Realität, Dialectica, 11, 36—48 (1957).
- Albert Einstein in der Entwicklung der Physik, Neue Zürcher Zeitung, Nr. 89, 12 янв. (1958).
- Перепечатано в Universitas, 13, 593—598 (1958).
- Die Verletzung von Spiegelungs-Symmetrien in den Gesetzen der Atomphysik, Experientia, 14, 1—5 (1958). (Перевод см. в этой книге, стр. 376.)
- Zur Thermodynamik dissoziierter Gleichgewichtsgemische in äussern Kraftfeldern, в Festschrift Jakob Ackeret., Zs. angew. Math. Phys., 9b, 490—497 (1958).
- The Indefinite Metric with Complex Roots, Proc. 1958 Annual International Conference on High Energy Physics at CERN, стр. 127—128, дискуссии, стр. 122—126, 130, 133, 140, 1958.

В. РЕЦЕНЗИИ НА КНИГИ

- Buchwald E., Das Korrespondenzprinzip, Naturwiss., 12, 36—37, (1924).
- Adams E. P., The Quantum Theory, Naturwiss., 12, 412—413 (1924).
- Born M., Vorlesungen über Atommechanik, I. Teil, Naturwiss., 13, 487—488 (1925).
- Eddington A. S., Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, Naturwiss., 14, 273—274 (1926).
- Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Band 7, Naturwiss., 17, 257—259 (1929).
- Lorentz H. A., Vorlesungen über theoretische Physik, Naturwiss., 17, 279 (1929).
- Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Band 8, Naturwiss., 18, 568—570 (1930).
- Born M., Jordan P., Elementare Quantenmechanik, Naturwiss., 18, 602 (1930).
- Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, Naturwiss., 19, 188 (1931).
- Heisenberg W., Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Naturwiss., 19, 188—189 (1931).
- March A., Die Grundlagen der Quantenmechanik, Naturwiss., 19, 867 (1931).
- Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Band 10, Naturwiss., 20, 186—187 (1932).
- Gamow G., Der Bau des Atomkernes und die Radioaktivität, Naturwiss., 20, 582 (1932).
- Van Vleck J. H., The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities, Naturwiss., 21, 239 (1933).
- Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Band 11, Naturwiss., 21, 301—302 (1933).
- Debye P., Kernphysik, Naturwiss., 23, 772—773 (1935).
- Reichenbach H., Philosophic Foundations of Quantum Mechanics, Dialectica, 1, 176—178 (1947).
- Sommerfeld A., Vorlesungen über theoretische Physik, Band IV, Optik, Zs. angew. Math. Phys., 2, 215 (1951).
- ter Haar D., Elements of Statistical Mechanics, Zs. angew. Math. Phys., 7, 467 (1956).

Г. ЛЕКЦИИ

- The Theory of the Positron and Related Topics (записал Б. Гофман), IAS, Princeton, 1936.
- Statistische Mechanik (обработал М. Шаффор), ETH, Zürich, 1947.

- Optik und Elektronentheorie (обработал А. Шайдеггер, второе изд. П. Эрдем), ETH, Zürich, 1948, 1957.
- Elektrodynamik (обработал А. Теллунг), ETH, Zürich, 1949.
- Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung (обработали У. Хохштрассер и М. Шафрот), ETH, Zürich, 1951.
- Thermodynamik und kinetische Gastheorie (обработал Э. Юккер), ETH, Zürich, 1952.
- Continuous Groups in Quantum Mechanics (записал А. Эдмондс), CERN-Report, No. 31, Genève, 1956.
- Continuous Groups and Reflections in Quantum Mechanics (записал Р. Риделл, мл.), UCRL-Report No. 8213, Berkeley, 1958.
- Wellenmechanik (обработали Ф. Герлах и Г. Кнепфель), ETH, Zürich, 1959.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора русского издания	7
Предисловие	9
<i>Нильс Бор</i>	
Введение	11
<i>Р. Крониг</i>	
Переломные годы	15
<i>В. Гейзенберг</i>	
Воспоминания об эпохе развития квантовой механики . .	53
<i>Г. Вентцель</i>	
Квантовая теория полей (до 1947 г.)	60
<i>Ф. Вилларс</i>	
Регуляризация и несингулярные взаимодействия в квантовой теории поля	94
<i>Рес Иост</i>	
Принцип Паули и группа Лоренца	128
<i>Х. Казимир</i>	
Паули и теория твердого тела	162
<i>Р. Пайерлс</i>	
Квантовая теория твердого тела	165

Маркус Фирц

Статистическая механика	189
-----------------------------------	-----

В. Баргманн

Теория относительности	217
----------------------------------	-----

Б. Ван дер Варден

Принцип запрета и спин	231
----------------------------------	-----

Л. Д. Ландау

Фундаментальные проблемы	285
------------------------------------	-----

Ву Цзянь-сюн

Нейтрино	290
--------------------	-----

ВОЛЬФГАНГ ПАУЛИ

СТАТЬИ ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ

Принцип запрета и квантовая механика	357
--	-----

Нарушение зеркальной симметрии в законах атомной физики	376
---	-----

К старой и новой истории нейтрино	386
---	-----

Космологические проблемы	413
------------------------------------	-----

Единая теория поля	419
------------------------------	-----

Библиография Вольфганга Паули (составитель <i>Шарль Энц</i>) . . .	432
---	-----

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 20 ВЕКА

Редактор *Л. В. ГЕССЕН*
Художник *В. Г. Алексеев*
Художественный редактор
Е. И. Подмарькова
Технический редактор *М. П. Грибова*
Корректор *Н. Р. Пиковская*

Сдано в производство 28/III 1962 г.

Подписано к печати 27/VI 1962 г.

Бумага $60 \times 90^{1/16} = 13,9$ бум. л.

27,8 печ. л., в т/ч. 1 вкл.

Уч.-изд. л. 24,1. Изд. № 2/1025

Цена 1 р. 89 к. Зак. 214

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., 9.