

С. М. БИЛЕНЬКИЙ

Введение в диаграммную технику Фейнмана



МОСКВА · АТОМИЗДАТ · 1971

С. М. Б и л е н ь к и й. Введение в диаграммную технику Фейнмана. М., Атомиздат, 1971.

Цель книги состоит в том, чтобы по возможности наиболее экономным способом изложить: 1) основные принципы квантования полей; 2) методы построения матричных элементов процессов (диаграммы Фейнмана); 3) методы вычисления сечений процессов и вероятностей распадов.

Все приведенные примеры относятся к физике элементарных частиц. Подробно рассмотрены некоторые процессы со слабым, электромагнитным и сильным взаимодействиями.

Книга рассчитана на экспериментаторов, занимающихся физикой высоких энергий, и студентов-физиков старших курсов.

Рисунков 25, библиография из 27 названий.

Эта книга написана на основе лекций, прочитанных физикам-экспериментаторам Объединенного института ядерных исследований и студентам филиала МГУ в Дубне. Стил лекций по возможности сохранен, и с этим связаны встречающиеся в тексте повторения.

В книге излагаются диаграммная техника Фейнмана и методы вычисления измеряемых на опыте величин (сечений, поляризаций). Она предназначена в основном для физиков-экспериментаторов. Автор надеется, что книга будет также полезна студентам старших курсов, специализирующимся в области физики элементарных частиц.

Графический метод представления ряда теории возмущений (диаграммы Фейнмана), возникший в начале пятидесятих годов, оказался чрезвычайно плодотворным и прочно вошел во все области физики. Значение этого метода выходит далеко за рамки теории возмущений.

В настоящее время диаграммы Фейнмана стали широко распространенным языком, который необходимо понимать не только физикам-теоретикам, но и физикам-экспериментаторам. Диаграммы Фейнмана весьма наглядны и правила их построения просты. Однако для сознательного использования метода диаграмм Фейнмана представляется необходимым пройти путь введения квантованных полей, S -матрицы, хронологических и нормальных произведений.

Основная цель, которую ставил перед собой автор, состояла в том, чтобы по возможности наиболее экономным способом изложить все эти вопросы. При этом доказательства упрощались и соблюдался лишь необходимый для понимания минимум строгости.

На примере самых различных процессов с участием как частиц, так и античастиц, тождественных частиц и т. д. автор стремился изложить методы вычисления (по теории возмущений) матричных элементов процессов и основные правила построения диаграмм Фейнмана.

Наконец, автор стремился подробно изложить методы вычисления измеряемых на опыте величин. Техника вычисления сечений и поляризаций иллюстрируется на целом ряде процессов, каждый из которых рассмотрен с достаточной полнотой. Детали вычислений легко могут быть прослежены читателем.

Рассмотренные здесь примеры относятся к физике элементарных частиц и охватывают широкий круг процессов со слабым, электромагнитным и сильным взаимодействиями.

Наиболее подробно рассмотрены процессы с участием лептонов и адронов ($\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$, $e + p \rightarrow e + p$ и др.). Весьма детально обсуждаются электромагнитные и слабые форм-факторы нуклонов. Автор, однако, не претендует на сколько-нибудь последовательное изложение современной теории слабых и электромагнитных взаимодействий.

Целый ряд важных для физики элементарных частиц проблем в этой книге не рассматривается. Здесь не обсуждаются аналитические свойства матричных элементов (дисперсионные соотношения), высшие порядки теории возмущений и теория перенормировок и многое другое. Изложение всех этих вопросов можно найти в книгах по квантовой теории поля и физике элементарных частиц, список которых приведен в конце книги. В этих книгах можно найти также ссылки на оригинальную литературу.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить Я. А. Смородинского за полезные обсуждения рассмотренных в книге вопросов, а также Д. Факирова, Н. М. Шумейко и особенно Л. Л. Неменова, прочитавших рукопись и сделавших ряд существенных замечаний.

Прежде чем перейти к изложению вопросов теории поля, введем общепринятую в релятивистской квантовой теории систему единиц, в которой постоянная Планка \hbar и скорость света c равны единице. Рассмотрим связь этой системы с системой СГС. В системе СГС \hbar и c равны соответственно

$$\hbar = (\hbar) \frac{г \cdot см^2}{сек}, \quad c = (c) \frac{см}{сек},$$

где $(\hbar) \approx 1,05 \cdot 10^{-27}$ и $(c) \approx 3 \cdot 10^{10}$ — значения постоянной Планка и скорости света в системе СГС. Выберем единицы времени и массы так, чтобы в новой системе единиц численные значения постоянной Планка \hbar и скорости света c равнялись единице. Если в качестве единицы времени и единицы массы выбрать

$$t_0 = \frac{сек}{(c)}, \quad m_0 = \frac{(\hbar)}{(c)} г,$$

то очевидно, что в этих единицах

$$\hbar = 1 \frac{m_0 \cdot см^2}{t_0}, \quad c = 1 \frac{см}{t_0}.$$

Легко получить соотношения, связывающие значения физических величин в системе СГС и рассматриваемой системе единиц. Обозначим m — массу, E — энергию, а p — импульс. Тогда

$$m = (m) г = (m) \frac{(c)}{(\hbar)} m_0 = (m)' m_0,$$

$$E = (E) \frac{г \cdot см^2}{сек^2} = (E) \frac{1}{(\hbar)(c)} \frac{m_0 \cdot см^2}{t_0^2} = (E)' \frac{m_0 \cdot см^2}{t_0^2},$$

$$p = (p) \frac{г \cdot см}{сек} = (p) \frac{1}{(\hbar)} \frac{m_0 \cdot см}{t_0} = (p)' \frac{m_0 \cdot см}{t_0}.$$

Здесь (m) , (E) и (p) — значения m , E и p в системе СГС, а $(m)'$, $(E)'$ и $(p)'$ — значения соответствующих величин в системе $\hbar = c = 1$. Та-

ким образом, находим

$$(m)' = (m) \frac{(c)}{(\hbar)}, \quad (E)' = (E) \frac{1}{(\hbar) (c)},$$

$$(p)' = (p) \frac{1}{(\hbar)}.$$

Аналогично нетрудно получить соотношения, связывающие значения любых физических величин в системе СГС и в системе, в которой $\hbar = c = 1$.

Во все соотношения между физическими величинами в рассматриваемых единицах не входят размерные постоянные \hbar и c (например, релятивистское соотношение между энергией и импульсом принимает в этих единицах вид $E^2 = m^2 + p^2$). Это эквивалентно тому, что в системе, где $\hbar = c = 1$, $TL^{-1} = 1$ и $ML^2T^{-1} = 1$ и, следовательно, размерности всех величин выражаются через L . Очевидно, что масса имеет размерность $M = L^{-2}T = L^{-1}$, энергия — размерность L^{-1} , момент количества движения — безразмерная величина, импульс имеет размерность $MLT^{-1} = L^{-1}$ и т. д.

Отметим, что 4-векторы мы будем всегда записывать в виде $A = (A, iA_0)$. Квадрат 4-вектора (скаляр) равен $A^2 = A^2 + A_4^2 = A^2 - A_0^2$.

§ 1. Представление взаимодействия. S-матрица

Квантовая теория поля описывает такие процессы взаимодействия частиц, в которых число частиц может не сохраняться. Мы начнем с введения S-матрицы, матричные элементы которой дают амплитуды вероятности соответствующих переходов.

Основной постулат квантовой теории поля состоит в том, что уравнением движения является уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H \Psi(t). \quad (1.1)$$

Здесь $\Psi(t)$ — волновая функция, описывающая систему в момент времени t , а H — полный гамильтониан системы. Если система замкнута, гамильтониан H не зависит от времени. Далее постулируется, что физическим величинам в квантовой теории поля, как и в обычной квантовой механике, отвечают операторы, а средние значения операторов

$$\langle O \rangle = (\Psi^+ O \Psi) \quad (1.2)$$

являются наблюдаемыми величинами. В (1.2) O — оператор, отвечающий некоторой физической величине, а Ψ — волновая функция, описывающая состояние.

Пусть V — произвольный унитарный оператор:

$$V^+ V = 1. \quad (1.3)$$

Тогда очевидно, что

$$\langle O \rangle = (\Psi'^+ O' \Psi'), \quad (1.4)$$

$$\text{где}^* \quad \Psi' = V \Psi, \quad \Psi'^+ = \Psi^+ V^+, \quad O' = V O V^+. \quad (1.5)$$

* Мы пользуемся матричной формой записи операторов и функций. В компонентах уравнение (1.1) записывается следующим образом:

$$i \frac{\partial \Psi_\alpha(t)}{\partial t} = \sum_{\alpha'} H_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha'}(t).$$

Среднее значение оператора O , по определению, равно $\langle O \rangle = \sum_{\alpha', \alpha} \Psi_{\alpha'}^* O_{\alpha' \alpha} \Psi_\alpha$.

В матричном виде это выражение может быть записано в форме (1.2). Очевидно, что $\Psi_{\alpha'}^* = \sum_{\alpha} V_{\alpha\alpha'}^* \Psi_\alpha^* = \sum_{\alpha} \Psi_\alpha^* (V^+)_{\alpha' \alpha} = (\Psi^+ V^+)_{\alpha'}$.

Соотношения (1.4) и (1.5) означают, что среднее значение оператора не изменится, если вместо волновой функции Ψ для описания системы используется волновая функция $\Psi' = V\Psi$, а физической величине вместо оператора O отвечает оператор $O' = VO V^+$. Иначе говоря, средние значения операторов (величины, измеряемые на опыте) инвариантны относительно унитарных преобразований (1.5).

Унитарный оператор V можно выбрать так, чтобы новые волновые функции менялись со временем только в случае, когда есть взаимодействие. Действительно, V — произвольный унитарный оператор. Он может зависеть и от времени. Обозначим такой оператор $V(t)$, а новые функции и операторы — следующим образом:

$$\Phi(t) = V(t) \Psi(t), \quad O(t) = V(t) O V^+(t). \quad (1.6)$$

Запишем полный гамильтониан H в виде

$$H = H_0 + H_I, \quad (1.7)$$

где H_0 — свободный гамильтониан, а H_I — гамильтониан взаимодействия. Подставляя $\Psi(t) = V^+(t) \Phi(t)$ в уравнение движения (1.1), получаем

$$i \frac{\partial V^+(t)}{\partial t} \Phi(t) + i V^+(t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = (H_0 + H_I) V^+(t) \Phi(t). \quad (1.8)$$

Выберем теперь унитарный оператор $V(t)$ так, чтобы

$$i \frac{\partial V^+(t)}{\partial t} = H_0 V^+(t). \quad (1.9)$$

Умножая (1.8) на $V(t)$ и учитывая (1.9), получаем уравнение

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H_I(t) \Phi(t), \quad (1.10)$$

где

$$H_I(t) = V(t) H_I V^+(t). \quad (1.11)$$

Переход от описания системы волновыми функциями $\Psi(t)$, которые подчиняются уравнению Шредингера (1.1), к описанию функциями $\Phi(t) = V(t)\Psi(t)$, где $V(t)$ — унитарный оператор, удовлетворяющий уравнению (1.9), называется переходом от представления Шредингера к представлению Дирака (представление взаимодействия). Волновая функция системы в представлении взаимодействия, как видно из уравнения (1.10), зависит от времени только в том случае, когда есть взаимодействие. Представление взаимодействия широко используется в квантовой теории поля, и в дальнейшем мы, как правило, будем работать в этом представлении. Отметим, что общим решением уравнения (1.9) является

$$V^+(t) = e^{-iH_0(t-t_1)} V^+(t_1), \quad (1.12)$$

где $V^+(t_1) V(t_1) = 1$. Если предположить, что в момент времени t_1 оба представления совпадают, то $V(t_1) = 1$ и

$$V^+(t) = e^{-iH_0(t-t_1)}. \quad (1.13)$$

Как видно из (1.6), операторы в представлении взаимодействия зависят в общем случае от времени. Дифференцируя $O(t)$ по t и используя уравнение

$$-i \frac{\partial V(t)}{\partial t} = V(t) H_0, \quad (1.14)$$

получающееся из (1.9) эрмитовым сопряжением, находим

$$i \frac{\partial O(t)}{\partial t} = -V(t) H_0 O V^+(t) + V(t) O H_0 V^+(t) = [O(t), H_0(t)]. \quad (1.15)$$

Мы предполагали при этом, что оператор O в исходном представлении Шредингера не зависит от времени. Соотношение (1.15) определяет зависимость от времени операторов в представлении взаимодействия. Из (1.15) очевидно, что свободный гамильтониан в этом представлении не зависит от времени, т. е. $H_0(t) = H_0$.

Найдем теперь общее решение уравнения движения (1.10). Для этого рассмотрим эквивалентное ему интегральное уравнение

$$\Phi(t) = \Phi(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \Phi(t_1), \quad (1.16)$$

где $\Phi(t_0)$ — волновая функция системы в начальный момент времени t_0 . Начальная волновая функция должна быть задана. Наша задача состоит в том, чтобы найти волновую функцию системы в любой последующий момент времени t . Подставляя под знак интеграла в правой части (1.16) вместо $\Phi(t_1)$ сумму

$$\Phi(t_0) + (-i) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \Phi(t_2),$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \Phi(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \Phi(t_0) + \\ & + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \Phi(t_2). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Последовательно продолжая эту процедуру, находим

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \left[1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) + \dots + \right. \\ & \left. + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_n) + \dots \right] \Phi(t_0). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Таким образом, общее решение уравнения движения (1.10) получено в виде ряда по степеням гамильтониана взаимодействия. Мы не будем обсуждать вопросы сходимости этого ряда и возможность его суммирования. Отметим только, что в случае, когда взаимодействие характеризуется малой константой, уже первые несколько членов ряда (1.18) могут давать решение с достаточно хорошей точностью. Это имеет место в случае электромагнитного взаимодействия вследствие малости постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$.

Запишем найденное решение (1.18) в виде

$$\Phi(t) = U(t, t_0) \Phi(t_0), \quad (1.19)$$

где оператор $U(t, t_0)$ равен

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_n). \quad (1.20)$$

Итак, решение уравнения движения в момент времени t может быть получено, если на волновую функцию, заданную в начальный момент времени t_0 , подействовать оператором $U(t, t_0)$, определяемым гамильтонианом взаимодействия.

Нетрудно видеть, что $U(t, t_0)$ является унитарным оператором. Действительно, из (1.10) и (1.19) следует, что оператор $U(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H_I(t) U(t, t_0). \quad (1.21)$$

Отсюда с помощью эрмитова сопряжения имеем (H_I — эрмитов оператор)

$$-i \frac{\partial U^+(t, t_0)}{\partial t} = U^+(t, t_0) H_I(t). \quad (1.22)$$

Умножим (1.21) слева на $U^+(t, t_0)$, а (1.22) справа на $U(t, t_0)$ и вычтем из первого соотношения второе. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (U^+(t, t_0) U(t, t_0)) = 0. \quad (1.23)$$

Таким образом, оператор $U^+(t, t_0) U(t, t_0)$ не зависит от t . Очевидно, что

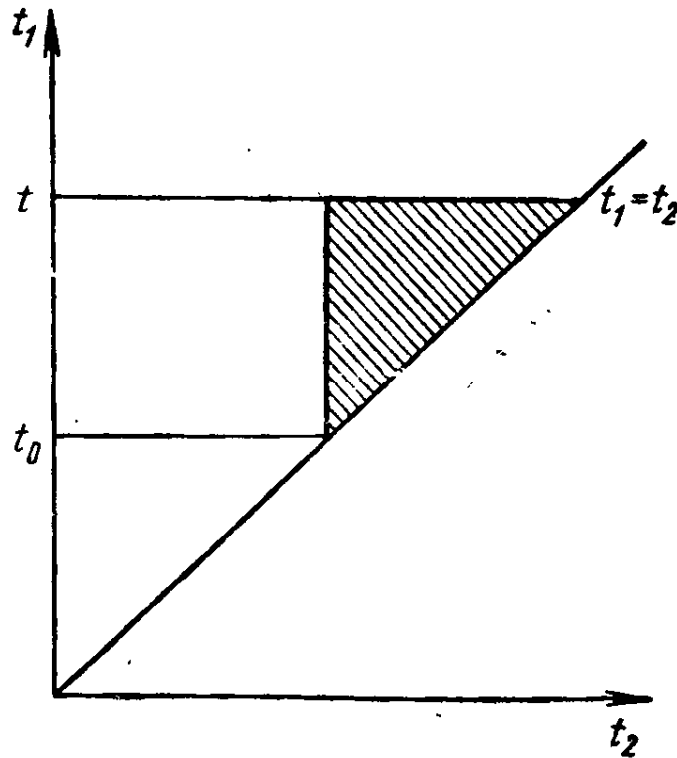
$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (1.24)$$

Из (1.23) и (1.24) заключаем, что

$$U^+(t, t_0) U(t, t_0) = 1. \quad (1.25)$$

Запишем члены ряда (1.20) в более удобном виде. Рассмотрим вначале третий член ряда. Интегрирование выражения $H_I(t_1) H_I(t_2)$ ведется по области, заштрихованной на рис. 1. Вначале интегри-

рование производится по t_2 от t_0 до t_1 , а затем по t_1 от t_0 до t . Проинтегрируем $H_I(t_1)H_I(t_2)$ по той же области, но вначале по



Р и с. 1

t_1 (от t_2 до t), а затем по t_2 (от t_0 до t). Предполагая, что значение интеграла не зависит от порядка интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) &= \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H_I(t_1) H_I(t_2) = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Последнее равенство получено путем переобозначения переменных интегрирования ($t_1 \rightleftharpoons t_2$). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \left[\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1) \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Это выражение может быть записано более компактно. Для этого введем *хронологический оператор Дайсона* P :

$$P(H_I(t_1)H_I(t_2)) = \begin{cases} H_I(t_1)H_I(t_2), & t_1 > t_2, \\ H_I(t_2)H_I(t_1), & t_2 > t_1. \end{cases} \quad (1.28)$$

Оператор P , действуя на произведение зависящих от времени операторов, расставляет их так, чтобы временной аргумент убывал

слева направо. Из (1.27) и (1.28) получаем

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 P(H_I(t_1) H_I(t_2)). \quad (1.29)$$

Докажем, что в общем случае

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) = \\ & = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где хронологический оператор Дайсона P в случае n множителей определен так, что

$$\begin{aligned} & P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)) = \\ & = H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \text{ при } t_1 > t_2 > \dots > t_n. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть соотношение (1.30) справедливо для n множителей. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t') H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) - \\ & - \frac{1}{(n+1)!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n P(H_I(t') H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Дифференцируя $I(t)$ по t , находим

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= H_I(t) \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)) \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

При получении (1.33) было использовано соотношение

$$\begin{aligned} & P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_i) H_I(t) H_I(t_{i+1}) \dots H_I(t_n)) = \\ & = H_I(t) P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)), \end{aligned} \quad (1.34)$$

справедливость которого при произвольном n очевидна ($t_1 \leq t$, $t_2 \leq t, \dots$). Если верно соотношение (1.30), то правая часть (1.33) равна нулю, т. е. I не зависит от времени. Поскольку $I(t_0) = 0$, это означает, что $I(t) = 0$ при любом t . Таким образом, из справедливости соотношения (1.30) для случая n множителей следует его справедливость для $n + 1$ множителя. Поскольку мы показали, что соотношение (1.30) верно при $n = 2$, оно доказано тем самым в общем случае. Следовательно, оператор $U(t, t_0)$ может быть записан в виде

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n P(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)). \quad (1.35)$$

Теперь сформулируем постановку основной задачи — задачи о *столкновении частиц*. Предположим, что начальная функция задана при $t_0 \rightarrow -\infty$ и нас интересует состояние, в котором окажется система при $t \rightarrow \infty$. Из (1.19) получаем

$$\Phi(\infty) = U(\infty, -\infty) \Phi(-\infty). \quad (1.36)$$

Обозначим

$$U(\infty, -\infty) = S. \quad (1.37)$$

Этот оператор носит название *S-матрицы*.

Итак, оператор S , действуя на начальную волновую функцию системы, заданную в бесконечно удаленном прошлом ($t \rightarrow -\infty$), дает функцию системы в бесконечно удаленном будущем ($t \rightarrow \infty$). Имеем

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n P(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)). \quad (1.38)$$

Из (1.25) и (1.37) следует, что S -матрица унитарна, т. е.

$$S^+ S = 1. \quad (1.39)$$

Пусть Φ_m — некоторая полная ортонормированная система функций. Разлагая $\Phi(\infty)$ по функциям Φ_m , получаем

$$\Phi(\infty) = \sum_m \Phi_m (\Phi_m^+ S \Phi(-\infty)). \quad (1.40)$$

Предположим, что в начальный момент времени система находилась в состоянии Φ_n , т. е. $\Phi(-\infty) = \Phi_n$. Тогда

$$\Phi_n(\infty) = \sum_m \Phi_m (\Phi_m^+ S \Phi_n). \quad (1.41)$$

Матричный элемент $(\Phi_m^+ S \Phi_n) = S_{m;n}$ представляет собой, таким образом, *амплитуду вероятности перехода* из состояния Φ_n в состояние Φ_m . В задачах о столкновении частиц в качестве полной системы функций Φ_m выбирается система функций, описывающих свободные частицы с определенными импульсами. При этом в общем случае частицы в начальном и конечном состояниях могут быть разными. Кроме того, в процессе столкновения могут образовываться новые частицы. Такого рода процессы описываются квантовой теорией поля. В дальнейшем мы кратко изложим математический аппарат квантовой теории поля и: 1) построим функции, описывающие свободные частицы с определенными импульсами; 2) научимся вычислять (по теории возмущений) матричные элементы перехода между такими состояниями; 3) подробно рассмотрим технику вычисления вероятностей переходов.

Классические поля

§ 2. Уравнения движения

Классическая система N точек описывается $3N$ функциями времени $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$), которые подчиняются уравнениям Ньютона:

$$m_i \ddot{q}_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (2.1)$$

Здесь m_i — масса i -й частицы, а V — потенциальная энергия.

Как известно, уравнения движения (2.1) могут быть получены из вариационного принципа. Напомним его формулировку. Для простоты ограничимся случаем одномерного движения. Определим действие

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt, \quad (2.2)$$

где функция Лагранжа $L(q, \dot{q})$ равна

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q). \quad (2.3)$$

Очевидно, что значение действия \mathcal{S} определяется функцией $q(t)$ на отрезке от t_0 до t_1 (\mathcal{S} является функционалом $q(t)$). Рассмотрим наряду с $q(t)$ функцию

$$q'(t) = q(t) + \delta q(t), \quad (2.4)$$

где $\delta q(t)$ — бесконечно малая. Будем считать, что

$$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0. \quad (2.5)$$

Приращение действия при переходе от $q(t)$ к $q'(t)$ (вариация действия) с точностью до бесконечно малых первого порядка равно

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_{t_0}^{t_1} [L(q', \dot{q}') - L(q, \dot{q})] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При получении (2.6) мы воспользовались тем, что $\delta \dot{q} = \dot{q}' - \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, произвели интегрирование по частям и учли (2.5). Потребуем обращения в нуль вариации действия (2.6). Так как $\delta q(t)$ произвольна, то из (2.6) находим

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (2.7)$$

Дифференцируя функцию Лагранжа (2.3) по q и \dot{q} , получаем из (2.7)

$$m\ddot{q} = - \frac{\partial V}{\partial q},$$

т. е. (2.7) представляет собой уравнение движения. Таким образом, функция $q(t)$, являющаяся решением уравнения движения, отвечает экстремуму действия [при условии (2.5)]. Отметим, что с помощью функции Лагранжа могут быть получены также энергия и импульс частицы:

$$H = \frac{m\dot{q}^2}{2} + V = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L, \quad p = m\dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (2.8)$$

Перейдем теперь к рассмотрению классических полей. Хорошо известный пример — электромагнитное поле, которое описывается потенциалом $A_\mu(x, t)$ (A — векторный, $A_0 = -iA_4$ — скалярный потенциалы). Это означает, что электромагнитное поле описывается бесконечным числом функций времени (значения потенциала во всех точках пространства), т. е. электромагнитное поле является системой с бесконечным числом степеней свободы. Уравнения поля (уравнения Максвелла) могут быть получены из вариационного принципа, который является общим принципом, применимым к любым физическим системам.

Наряду с электромагнитным мы будем рассматривать и другие поля. Обозначим функции, описывающие некоторое поле, $\psi_\alpha(x)$, где индекс α принимает целочисленные значения, а $x = (x, ix_0)$, $x_0 \equiv t$. Запишем лагранжиан поля в следующем виде:

$$L = \int \mathcal{L} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx. \quad (2.9)$$

Здесь $\mathcal{L} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$ — лагранжиан единицы объема (плотность лагранжиана)*. Мы предположили, что эта величина зависит лишь от функций $\psi_\alpha(x)$ и их первых производных $\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\mu}$ [ср. с (2.3)].

Определим действие

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx, \quad (2.10)$$

* В дальнейшем эту величину будем называть лагранжианом.

где $dx = dx dx_0$, а Ω — некоторый объем пространства — времени. Вариация действия равна

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\psi', \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) dx - \int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}} \right) \delta \psi_{\alpha} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}} \delta \psi_{\alpha} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $\psi'_{\alpha}(x) = \psi_{\alpha}(x) + \delta \psi_{\alpha}(x)$, где $\delta \psi_{\alpha}(x)$ — бесконечно малая *. Уравнения поля вытекают из вариационного принципа, согласно которому

$$\delta \mathcal{S} = 0 \quad (2.12)$$

при условии, что функции $\delta \psi_{\alpha}$ обращаются в нуль на границе области интегрирования. Используя теорему Гаусса — Остроградского, находим

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}} \delta \psi_{\alpha} \right) dx = \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}} \delta \psi_{\alpha} d\sigma_{\mu}, \quad (2.13)$$

где Σ — поверхность рассматриваемого объема Ω , а $d\sigma_{\mu}$ — 4-вектор, направленный по внешней нормали к поверхности Σ . Приравняв нулю вариацию действия при условии, что $\delta \psi_{\alpha} = 0$ на поверхности Σ , получаем уравнения поля

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}} = 0. \quad (2.14)$$

Отметим, что в том случае, когда имеется несколько полей, описываемых функциями $\psi_{\alpha}(x)$, $\phi_{\beta}(x)$, ..., лагранжиан зависит от функций ψ_{α} , ϕ_{β} , ... и их первых производных. Из вариационного принципа наряду с (2.14) получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\beta}} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial x_{\mu}}} \right) = 0 \text{ и т. д.} \quad (2.15)$$

* В (2.11) и во всех дальнейших соотношениях по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнения поля должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Это требование накладывает ограничения на возможный вид лагранжиана \mathcal{L} . Рассмотрим однородное преобразование Лоренца

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu. \quad (2.16)$$

Здесь x_μ и x'_μ — координаты одной и той же точки в двух системах отсчета, а коэффициенты $a_{\mu\nu}$ удовлетворяют условиям

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}, \quad (2.17)$$

вытекающим из требования

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu. \quad (2.18)$$

Умножая (2.16) на $a_{\mu\nu}$, суммируя по μ и используя (2.17), получаем

$$x_\nu = a_{\mu\nu} x'_\mu. \quad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что коэффициенты $a_{\mu\nu}$ удовлетворяют также условиям

$$a_{\mu\nu} a_{\mu'\nu} = \delta_{\mu\mu'}. \quad (2.20)$$

В матричном виде эти соотношения могут быть записаны следующим образом:

$$x' = ax, \quad (2.16a)$$

$$\tilde{a}a = 1, \quad (2.17a)$$

$$x = \tilde{a}x', \quad (2.19a)$$

$$a\tilde{a} = 1, \quad (2.20a)$$

где значок \sim означает транспонирование. Из (2.17) нетрудно видеть, что

$$\det a = \pm 1. \quad (2.21)$$

Преобразование инверсии пространственных осей

$$x' = -x, \quad x'_4 = x_4 \quad (2.22)$$

представляет собой пример преобразования с $\det a = -1$.

Будем рассматривать такие функции поля, которые преобразуются при преобразовании координат (2.16) либо как тензоры, либо как спиноры. В квантовой теории квантами таких полей являются частицы с определенным спином и внутренней четностью. Приведем примеры преобразования наиболее простых функций. Скалярная $\phi(x)$, псевдоскалярная $\phi_P(x)$ и векторная $A_\mu(x)$ функции преобразуются следующим образом:

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (2.23)$$

$$\phi'_P(x') = \det a \phi_P(x), \quad (2.24)$$

$$A'_\mu(x') = a_{\mu\nu} A_\nu(x). \quad (2.25)$$

В левых частях этих соотношений стоят функции, описывающие поле в штрихованной системе отсчета. Спинорная функция преобразуется следующим образом:

$$\psi'_{\sigma}(x') = L_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(x), \quad \bar{\psi}'_{\sigma}(x') = \bar{\psi}_{\sigma'}(x) L_{\sigma'\sigma}^{-1} \quad (2.26)$$

или в матричном виде

$$\psi'(x') = L\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) L^{-1}. \quad (2.26a)$$

Здесь индексы σ и σ' пробегают четыре значения, $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4$, а матрица L удовлетворяет соотношениям

$$L^{-1} \gamma_{\mu} L = a_{\mu\nu} \gamma_{\nu} \quad (2.27)$$

(γ_{μ} — эрмитовы 4×4 -матрицы, подчиняющиеся соотношениям антикоммутации $\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu}$).

Посмотрим теперь, каким условиям должен удовлетворять лагранжиан поля, для того чтобы была обеспечена инвариантность уравнений поля относительно преобразования Лоренца. В интеграле (2.10) от переменной x перейдем к x' и от $\psi_{\alpha}(x)$ к $\psi'_{\alpha}(x')$. Получаем

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\psi(x), \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right) dx = \int_{\Omega'} \mathcal{L}' \left(\psi'(x'), \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'} \right) dx'. \quad (2.28)$$

Потребуем, чтобы

$$\mathcal{L} \left(\psi(x), \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right) = \mathcal{L}' \left(\psi'(x'), \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'} \right) = \mathcal{L} \left(\psi'(x'), \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'} \right). \quad (2.29)$$

Это условие означает, что лагранжианы в исходной и штрихованной системах являются одной и той же функцией соответствующих полей. Если (2.29) выполняется, то из вариационного принципа наряду с уравнениями (2.14) в исходной системе получим следующие уравнения поля в штрихованной системе отсчета:

$$\frac{\partial \mathcal{L} \left(\psi', \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \right)}{\partial \psi'_{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L} \left(\psi', \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \right)}{\partial \frac{\partial \psi'_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}}} = 0. \quad (2.30)$$

Очевидно, что уравнения поля в штрихованной системе получаются из уравнений в исходной системе путем замены нештрихованных величин штрихованными, т. е. уравнения поля инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Рассмотрим в качестве примера электромагнитное поле. Уравнениями поля являются уравнения Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = j_\mu, \quad (2.31)$$

где j_μ — ток (в единицах Хевисайда), а тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ равен

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (2.32)$$

Из (2.31) с учетом дополнительного условия Лоренца

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (2.33)$$

получаем уравнение для потенциала A_μ

$$\square A_\mu = -j_\mu, \quad (2.34)$$

где $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}$.

С другой стороны, уравнениями поля являются

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}} = 0. \quad (2.35)$$

Построим лагранжиан \mathcal{L} так, чтобы уравнения (2.35) совпадали с уравнениями поля (2.31). Очевидно, что производные потенциала должны входить в лагранжиан квадратично и что ток j_μ в (2.31) происходит от дифференцирования лагранжиана по A_μ . Нетрудно убедиться, что лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\sigma} F_{\mu\sigma} + j_\mu A_\mu \quad (2.36)$$

удовлетворяет всем необходимым требованиям. Действительно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = j_\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}} = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu}) = F_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

и из (2.35) получаем уравнения Максвелла (2.31). Очевидно, что лагранжиан (2.36) удовлетворяет также требованиям инвариантности относительно преобразований Лоренца.

§ 3. Сохраняющиеся величины

Мы предположили, что лагранжиан поля является функцией $\psi_a(x)$, $\frac{\partial \psi_a(x)}{\partial x_\mu}$ и не зависит явно от x . Чтобы понять, что

означает это предположение, рассмотрим преобразование

$$\left. \begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + a_\mu, \\ \psi'_\alpha(x') &= \psi_\alpha(x), \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где a_μ — произвольный 4-вектор. Если лагранжиан не зависит явно от x , то очевидно, что он инвариантен относительно преобразований (3.1), т. е.

$$\mathcal{L}\left(\psi(x), \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right) = \mathcal{L}\left(\psi'(x'), \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'}\right). \quad (3.2)$$

Инвариантность лагранжиана относительно преобразований (3.1) (трансляций) носит название *трансляционной инвариантности*. Из трансляционной инвариантности следует, что 4-вектор

$$P_\mu = i \int T_{\mu 4} dx, \quad (3.3)$$

где

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\nu}} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

не зависит от времени [интегрирование в (3.3) производится по всему пространству]. Вектор P_μ является вектором энергии — импульса.

Чтобы убедиться в том, что P_μ сохраняется, рассмотрим преобразование (3.1) с бесконечно малым a . С точностью до членов первого порядка по a из (3.1) получаем

$$\psi'_\alpha(x) = \psi_\alpha(x-a) = \psi_\alpha(x) - a_\mu \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu}. \quad (3.5)$$

Запишем (3.1) и (3.5) в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi'_\alpha(x) &= \psi_\alpha(x) + \delta\psi_\alpha(x), \\ x'_\mu &= x_\mu + \delta x_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\psi_\alpha(x) &= -a_\mu \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu}, \\ \delta x_\mu &= a_\mu \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

бесконечно малые] величины. Из условия трансляционной инвариантности (3.2) с точностью до членов первого порядка по a находим

$$\delta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = 0. \quad (3.8)$$

Здесь

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi'(x), \frac{\partial\psi'(x)}{\partial x}\right) - \mathcal{L}\left(\psi(x), \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right). \quad (3.9)$$

Используя уравнения (2.14), получаем

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_a} \delta \psi_a \right). \quad (3.10)$$

Таким образом, из инвариантности лагранжиана относительно преобразований (3.6) находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_a} \delta \psi_a + \mathcal{L} \delta x_\nu \right) = 0. \quad (3.11)$$

С помощью (3.11) и (3.7) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\mathcal{L} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_a} \frac{\partial \psi_a}{\partial x_\mu} \right) a_\mu = 0. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (3.13)$$

где величины $T_{\mu\nu}$ определяются соотношением (3.4).

Величины $T_{\mu\nu}$ преобразуются как тензор второго ранга. Этот тензор носит название тензора энергии — импульса поля. Из (3.13) следует, что 4-вектор P_μ , определяемый соотношением (3.3), сохраняется. Чтобы это показать, проинтегрируем (3.13) по некоторому объему V . Используя теорему Гаусса — Остроградского, получаем

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_0} \int_V T_{\mu 4} d\mathbf{x} + \int_S T_{\mu i} ds_i = 0. \quad (3.14)$$

Здесь S — поверхность, заключающая объем V , а суммирование по i производится от 1 до 3*. Переходя к пределу $V \rightarrow \infty$ и налагая естественные граничные условия (отсутствие полей на бесконечности), находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int T_{\mu 4} d\mathbf{x} = 0, \quad (3.15)$$

Таким образом, вектор энергии — импульса P_μ , определенный соотношением (3.3), не зависит от времени. Четвертая компонента

* Греческие индексы μ, ν, \dots пробегают, как правило, значения 1, 2, 3, 4, а латинские i, k, \dots — значения 1, 2, 3.

вектора энергии — импульса равна

$$P_4 = i \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_4}} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_4} - \mathcal{L} \right) d\mathbf{x} = iH, \quad (3.16)$$

где H — энергия поля [ср. с выражением (2.8)]. Для плотности энергии поля \mathcal{H} находим

$$\mathcal{H} = T_{44} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_4}} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_4} - \mathcal{L}. \quad (3.17)$$

Покажем, что вследствие инвариантности лагранжиана относительно преобразований Лоренца сохраняется тензор момента количества движения поля. Будем рассматривать такие преобразования Лоренца, которые отличаются от тождественного преобразования на бесконечно малую величину. Коэффициенты преобразования $a_{\mu\rho}$ в (2.16) могут быть представлены в этом случае в виде

$$a_{\mu\rho} = \delta_{\mu\rho} + \varepsilon_{\mu\rho}, \quad (3.18)$$

где параметры $\varepsilon_{\mu\rho}$ — бесконечно малые величины. Из условий (2.20) с точностью до величин первого порядка по ε получаем

$$\varepsilon_{\mu\rho} = -\varepsilon_{\rho\mu}. \quad (3.19)$$

Преобразование Лоренца (2.16) может быть записано в виде

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad (3.20)$$

где

$$\delta x_\mu = \varepsilon_{\mu\rho} x_\rho. \quad (3.21)$$

Функции, описывающие поле, преобразуются при преобразовании Лоренца (3.20) следующим образом:

$$\psi'_\alpha(x') = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\rho} \varepsilon_{\mu\rho} \right) \psi_\beta(x), \quad (3.22)$$

где вследствие (3.19)

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\rho} = -\Sigma_{\alpha\beta}^{\rho\mu}. \quad (3.23)$$

Матрицы $\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\rho}$ представляют собой коэффициенты разложения матриц a , L и т. д. [см. (2.25) и (2.26)] по $\varepsilon_{\mu\rho}$. Ясно, что для скалярного и псевдоскалярного полей матрицу $\Sigma^{\mu\rho}$ следует положить равной нулю. Из (3.22) с точностью до величин первого порядка по ε находим

$$\psi'_\alpha(x) = \psi_\alpha(x) + \delta\psi_\alpha(x), \quad (3.24)$$

где

$$\delta\psi_\alpha(x) = -\frac{\partial \psi_\alpha(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\rho} \varepsilon_{\mu\rho} \psi_\beta(x). \quad (3.25)$$

Очевидно, что из (2.29) — условия инвариантности лагранжиана относительно преобразований Лоренца — вытекает соотношение (3.8), в котором δx и $\delta \psi$ даются соотношениями (3.21) и (3.25).

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_a}{\partial x_v}} \delta \psi_a + \mathcal{L} \delta x_v = & \left(-T_{\mu v} x_\rho + T_{\rho v} x_\mu + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_a}{\partial x_v}} \Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\rho} \psi_\beta \right) \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\rho}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульса. Тензор момента количества движения определяется следующим образом:

$$m_{\mu\rho; \nu} = x_\mu T_{\rho\nu} - x_\rho T_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_a}{\partial x_v}} \Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\rho} \psi_\beta. \quad (3.27)$$

Отметим, что этот тензор антисимметричен относительно перестановки индексов μ и ρ :

$$m_{\mu\rho; \nu} = -m_{\rho\mu; \nu}. \quad (3.28)$$

Из (3.8), (3.10) и (3.26), учитывая, что $\frac{\partial \delta x_v}{\partial x_v} = 0$, получаем

$$\frac{\partial m_{\mu\rho; \nu}}{\partial x_v} = 0. \quad (3.29)$$

Отсюда, аналогично (3.14) и (3.15), находим, что тензор

$$M_{\mu\rho} = i \int m_{\mu\rho; 4} d\mathbf{x} \quad (3.30)$$

не зависит от времени. Пространственные компоненты этого тензора представляют собой компоненты момента количества движения поля (M_{12} — проекция момента на ось 3 и т. д.). Отметим, что

$$L_{\mu\rho} = i \int (x_\mu T_{\rho 4} - x_\rho T_{\mu 4}) d\mathbf{x} \quad (3.31)$$

является орбитальным моментом количества движения, а член

$$S_{\mu\rho} = i \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_a}{\partial x_4}} \Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\rho} \psi_\beta d\mathbf{x} \quad (3.32)$$

связан с наличием дискретных индексов у функций, описывающих поле, и в квантовой теории поля отвечает вкладу спинов частиц в полный момент.

В заключение рассмотрим калибровочные преобразования и сохраняющиеся величины, связанные с инвариантностью лагранжиана относительно этих преобразований. Функции, описывающие поле, могут быть как действительными, так и комплексными. Если функции $\psi_\alpha(x)$, где $\alpha = 1, \dots, n$, — комплексные, то поле описывается $2n$ действительными функциями — действительными и мнимыми частями функций $\psi_\alpha(x)$. Очевидно, что действительные и мнимые части функции $\psi_\alpha(x)$ выражаются через $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\alpha^*(x)$. Функции $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\alpha^*(x)$ мы выберем в качестве независимых динамических переменных, т. е. будем предполагать, что лагранжиан зависит от $\psi_\alpha(x)$, $\psi_\alpha^*(x)$ и их первых производных по x_μ . В этом случае из вариационного принципа наряду с уравнениями поля (2.14) получим уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha^*} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}} = 0. \quad (3.33)$$

Очевидно, также, что для тензора энергии — импульса получим следующее выражение:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\nu}} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial x_\nu}} \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \quad (3.34)$$

Отметим, что лагранжиан поля обязан быть вещественным. При этом будут вещественными энергия, импульс и другие физические величины, характеризующие поле.

Рассмотрим преобразования

$$\left. \begin{aligned} \psi'_\alpha(x) &= \psi_\alpha(x) e^{ie\chi}, \\ \psi'^*_\alpha(x) &= \psi^*_\alpha(x) e^{-ie\chi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Здесь e — вещественное число, которое может быть различным для разных полей, а χ — произвольный вещественный параметр, одинаковый для всех полей, входящих в рассматриваемую систему. Преобразования (3.35) носят название калибровочных преобразований. Будем предполагать, что лагранжиан поля инвариантен относительно калибровочных преобразований (3.35), т. е.

$$\mathcal{L}\left(\psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) = \mathcal{L}\left(\psi', \psi'^*, \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \frac{\partial \psi'^*}{\partial x}\right). \quad (3.36)$$

Рассмотрим калибровочные преобразования (3.35), считая параметр χ бесконечно малым. С точностью до членов первого порядка по χ получаем

$$\left. \begin{aligned} \psi'_\alpha &= \psi_\alpha + \delta\psi_\alpha, \\ \psi'^*_\alpha &= \psi^*_\alpha + \delta\psi^*_\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\psi_\alpha &= ie\chi\psi_\alpha, \\ \delta\psi_\alpha^* &= -ie\chi\psi_\alpha^* \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Из инвариантности лагранжиана относительно преобразований (3.37), используя уравнения поля (2.14) и (3.33), находим

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu}} \delta\psi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \frac{\partial\psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}} \delta\psi_\alpha^* \right) = 0. \quad (3.39)$$

С помощью (3.38) и (3.39) находим, (χ не зависит от x), что 4-вектор

$$j_\mu = -ie \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu}} \psi_\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \frac{\partial\psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}} \psi_\alpha^* \right) \quad (3.40)$$

удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (3.41)$$

Вектор j_μ , удовлетворяющий вследствие калибровочной инвариантности уравнению (3.41), является 4-вектором тока. Его четвертая компонента равна

$$j_4 = i\rho, \quad (3.42)$$

где ρ — плотность заряда. Из (3.41) следует, что заряд поля

$$Q = -i \int j_4 d\mathbf{x} \quad (3.43)$$

(интегрирование производится по всему пространству) — сохраняющаяся величина. Квантами комплексного поля, как мы увидим ниже, являются частицы с зарядом e либо $-e$. Отметим, что в случае полей, описываемых действительными функциями, калибровочные преобразования (3.35) недопустимы. Это означает, что для действительных полей $e = 0$. Кванты такого поля — нейтральные частицы.

Чтобы показать, что 4-вектор j_μ , определяемый соотношением (3.40), является электрическим током, рассмотрим систему, описываемую комплексными функциями $\psi_\alpha(x)$ и электромагнитным потенциалом A_μ . Лагранжиан системы запишем в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}', \quad (3.44)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.45)$$

представляет собой лагранжиан свободного электромагнитного поля. Предположим, что \mathcal{L}' зависит от функций ψ_α , ψ_α^* , их первых производных и A_μ и не зависит от производных электромагнитного потенциала. Вместо потенциала A_μ можно использовать электромагнитный потенциал

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}, \quad (3.46)$$

где $\Lambda(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\square \Lambda = 0. \quad (3.47)$$

При этом, как хорошо известно, тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}$ не изменится и новый потенциал A'_μ будет удовлетворять дополнительному условию Лоренца (2.33). Если в \mathcal{L}' заменить A_μ на $A'_\mu - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}$, то величина $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}$, не имеющая физического смысла, должна компенсироваться соответствующим изменением фазы функций ψ_α и ψ_α^* . Последнее может быть только в случае, если потенциал A_μ входит в \mathcal{L}' в виде следующих комбинаций:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \right) \psi_\alpha \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu \right) \psi_\alpha^*. \quad (3.48)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \right) \psi_\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA'_\mu + ie \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \right) \psi_\alpha = \\ &= e^{-ie\Lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA'_\mu \right) \psi'_\alpha. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Здесь

$$\psi'_\alpha(x) = e^{ie\Lambda(x)} \psi_\alpha(x). \quad (3.50)$$

Аналогично

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu \right) \psi_\alpha^* = e^{ie\Lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA'_\mu \right) \psi_\alpha^{*'}, \quad (3.51)$$

где

$$\psi_\alpha^{*'}(x) = e^{-ie\Lambda(x)} \psi_\alpha^*(x). \quad (3.52)$$

Пусть при $A_\mu = 0$ лагранжиан системы инвариантен относительно калибровочных преобразований (3.35) с фазой χ , не зависящей от x . Если потенциал A_μ входит в лагранжиан \mathcal{L}' в виде (3.48), то из соотношений (3.49) и (3.51) очевидно, что лагранжиан рассматриваемой системы инвариантен относительно преобразований (3.46), (3.50) и (3.52) (эти преобразования называются *калибровочными преобразованиями второго рода*). Отметим, что требование инвариантности лагранжиана относительно калибровочных преобразований второго рода однозначно определяет лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля и поля ψ_α лишь в случае, если в лагранжиан \mathcal{L}' не

входят производные потенциала A_μ . Это взаимодействие носит название минимального электромагнитного взаимодействия, а e является константой, характеризующей взаимодействие.

Из общих уравнений (2.14) получаем следующие уравнения для электромагнитного поля:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}. \quad (3.53)$$

Сравнивая (3.53) и уравнения Максвелла (2.31), заключаем, что электрический ток

$$j_\mu^e = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}. \quad (3.54)$$

Если учесть, что потенциал A_μ входит в лагранжиан \mathcal{L}' в комбинации с производными полей [см. (3.48)], то нетрудно видеть, что

$$j_\mu^e = -ie \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\mu}} \psi_\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}} \psi_\alpha^* \right). \quad (3.55)$$

Таким образом, ток j_μ^e совпадает с током, определенным соотношением (3.40).

Квантование полей

§. 4. Действительное скалярное (псевдоскалярное) поле

В предыдущей главе было показано, что уравнения поля и сохраняющиеся величины легко могут быть получены, если известен лагранжиан поля. Теперь рассмотрим различные типы полей. Уравнения поля будут постулироваться. Затем построим такой лагранжиан, который удовлетворяет требованиям лоренц-инвариантности и инвариантности относительно калибровочных преобразований и дает постулированные уравнения поля. После этого из общих формул предыдущего параграфа получим выражения для сохраняющихся величин.

Начнем с наиболее простого случая — действительных скалярного и псевдоскалярного полей. Обозначим действительную функцию, преобразующуюся как скаляр или как псевдоскаляр [см. (2.23) и (2.24)], через $\phi(x)$. Будем предполагать, что функция $\phi(x)$ удовлетворяет линейному лоренц-инвариантному уравнению второго порядка. Единственным таким уравнением является уравнение Клейна — Гордона:

$$(\square - \kappa^2) \phi(x) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь κ — вещественный положительный параметр. В квантовой теории, как мы увидим ниже, κ — масса покоя кванта поля. Отметим, что уравнение для электромагнитного потенциала A_μ в случае $j_\mu = 0$ является частным случаем уравнения (4.1) ($\kappa = 0$). Соответственно кванты электромагнитного поля (фотоны) — частицы с массой покоя, равной нулю.

Лагранжиан поля должен быть таким, чтобы уравнение (4.1) совпадало с

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}} = 0. \quad (4.2)$$

Очевидно, что член $\square \phi$ в (4.1) может происходить только от $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}} \right)$, а член $\kappa^2 \phi$ — от $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$. Если учесть эти заме-

чания, а также потребовать, чтобы лагранжиан был скаляром, то

легко получить выражение для \mathcal{L} с точностью до общего множителя. Нетрудно убедиться, что лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right)^2 + \kappa^2 \phi^2 \right] \quad (4.3)$$

удовлетворяет всем требованиям. Действительно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\kappa^2 \phi, \quad (4.4)$$

и из (4.2) получаем уравнение Клейна — Гордона (4.1). Далее, легко видеть, что лагранжиан (4.3) является скаляром. В самом деле, с помощью (2.23) [или (2.24) для псевдоскалярного поля] получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\phi(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right) &= \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'_\nu} a_{\nu\rho} \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'_\sigma} a_{\sigma\rho} + \kappa^2 \phi'(x') \phi'(x') \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'_\sigma} \right)^2 + \kappa^2 (\phi'(x'))^2 \right] = \mathcal{L} \left(\phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Используя (3.4), находим следующее выражение для тензора энергии — импульса скалярного (псевдоскалярного) поля:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Из (3.3), (4.3) и (4.6) получаем, что энергия и импульс скалярного (псевдоскалярного) поля равны

$$H = -iP_4 = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_0} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 + \kappa^2 \phi^2 \right] dx, \quad (4.7)$$

$$P_k = -\int \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx. \quad (4.8)$$

Рассматриваемое нами поле полностью характеризуется действительной функцией $\phi(x)$, удовлетворяющей уравнению Клейна—Гордона. Очевидно, что поле может быть также описано фурье-компонентами функции $\phi(x)$. Для перехода к квантовой теории удобнее использовать этот способ задания поля. Разложение Фурье функции $\phi(x)$ имеет вид

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \phi(q, x_0) e^{iqx} dq. \quad (4.9)$$

Очевидно, что коэффициенты разложения зависят от времени. Подставляя (4.9) в уравнение Клейна—Гордона, находим, что коэффициенты $\phi(q, x_0)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi(q, x_0)}{\partial x_0^2} + (q^2 + \kappa^2) \phi(q, x_0) = 0. \quad (4.10)$$

Общее решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\phi(q, x_0) = \phi^{(+)}(q) e^{-iq_0 x_0} + \phi^{(-)}(q) e^{iq_0 x_0}, \quad (4.11)$$

где

$$q_0 = +\sqrt{q^2 + \kappa^2}.$$

Подставляя (4.11) в (4.9), находим

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x). \quad (4.12)$$

Здесь

$$\phi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{iqx} \phi^{(+)}(q) dq, \quad (4.12a)$$

$$\phi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-iqx} \phi^{(-)}(-q) dq, \quad (4.12b)$$

где

$$q = (q, iq_0); \quad qx = q_\mu x_\mu = qx - q_0 x_0.$$

Отметим, что выражение (4.12b) получено путем замены переменных интегрирования ($q \rightarrow -q$).

Функция $\phi^{(+)}(x)$ носит название положительно-частотной части функции $\phi(x)$ (под знак интеграла входит $e^{-iq_0 x_0}$), а функция $\phi^{(-)}(x)$ — отрицательно-частотной части $\phi(x)$ (под знак интеграла входит $e^{-i(-q_0)x_0}$).

Посмотрим теперь, что означает вещественность функции $\phi(x)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \phi^*(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (\phi^{(+)}(q))^* e^{-iqx} dq + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (\phi^{(-)}(-q))^* e^{iqx} dq. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Приравнявая (4.12) и (4.13), получаем

$$\phi^{(-)}(-q) = (\phi^{(+)}(q))^*. \quad (4.14)$$

Таким образом, действительное скалярное (псевдоскалярное) поле характеризуется комплексной функцией $\phi^{(+)}(q)$ — компонентами Фурье положительно-частотной части функции $\phi(x)$.

Выразим энергию и импульс поля через $\phi^{(+)}(q)$. Подставляя разложение (4.12) в (4.7) и интегрируя по x , получаем для энергии поля

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int [\phi^{(+)}(q) \phi^{(+)}(-q) e^{-2iq_0 x_0} (q^2 + \kappa^2 - q_0^2) + \\ &+ \phi^{(+)}(q) \phi^{(-)}(-q) (q^2 + \kappa^2 + q_0^2) + \phi^{(-)}(-q) \phi^{(+)}(q) (q^2 + \kappa^2 + q_0^2) + \\ &+ \phi^{(-)}(-q) \phi^{(-)}(q) e^{2iq_0 x_0} (q^2 + \kappa^2 - q_0^2)] dq. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Если учесть, что $q_0^2 = q^2 + \kappa^2$, то из (4.15) находим

$$H = \int [\phi^{(+)}(q) \phi^{(-)}(-q) + \phi^{(-)}(-q) \phi^{(+)}(q)] q_0^2 dq. \quad (4.16)$$

Непосредственно видно, что этот интеграл не зависит от времени (члены, содержащие $e^{\pm 2iq_0 x_0}$, обратились в нуль).

Аналогично, для импульса поля получаем

$$P_k = + \int [\phi^{(+)}(q) \phi^{(+)}(-q) e^{-2iq_0 x_0} q_0 q_k + \phi^{(+)}(q) \phi^{(-)}(-q) + + \phi^{(-)}(-q) \phi^{(+)}(q) q_0 q_k + \phi^{(-)}(-q) \phi^{(-)}(q) e^{2iq_0 x_0}] q_0 q_k dq. \quad (4.17)$$

Очевидно, что

$$\int \phi^{(\pm)}(q) \phi^{(\pm)}(-q) e^{\mp 2iq_0 x_0} q_0 q_k dq = 0. \quad (4.18)$$

Окончательно находим следующее выражение для импульса поля:

$$P_k = \int [\phi^{(+)}(q) \phi^{(-)}(-q) + \phi^{(-)}(-q) \phi^{(+)}(q)] q_0 q_k dq. \quad (4.19)$$

Отметим, что первый и второй члены в квадратных скобках (4.16), а также (4.19) в классической теории совпадают. Имея в виду, однако, переход в дальнейшем к квантовой теории, мы оставим выражения для энергии и импульса в форме (4.16) и (4.19). Далее, вместо функций $\phi^{(+)}(q)$ и $\phi^{(-)}(-q)$ введем функции $a(q)$ и $a(-q)$, определенные соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(+)}(q) &= \frac{1}{\sqrt{2q_0}} a(q), \\ \phi^{(-)}(-q) &= \frac{1}{\sqrt{2q_0}} a(-q). \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Разложение Фурье функции $\phi(x)$ запишется тогда следующим образом:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2q_0}} a(q) e^{iqx} dq + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2q_0}} a(-q) e^{-iqx} dq. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.20) в (4.16) и (4.19), находим для энергии и импульса поля следующие выражения:

$$H = \frac{1}{2} \int [a(q) a(-q) + a(-q) a(q)] q_0 dq, \quad (4.16a)$$

$$P_k = \frac{1}{2} \int [a(q) a(-q) + a(-q) a(q)] q_k dq, \quad (4.19a)$$

где, вследствие (4.14)

$$a(-q) = a^*(q). \quad (4.22)$$

Итак, классическое скалярное (псевдоскалярное) поле задается комплексной функцией $a(q)$ — функцией переменной q , которая может принимать любые значения. Энергия поля [выражение (4.16a)] может, следовательно, принимать в классическом случае любые положительные значения.

Перейдем теперь к квантовой теории поля. Примем в качестве постулата, что квантованное поле представляет собой набор свободных частиц — квантов поля, находящихся в некоторых состояниях. В качестве таких состояний будем выбирать состояния с определенными значениями импульса. В соответствии с общими постулатами квантовой теории состояния квантованного поля следует описывать волновыми функциями, удовлетворяющими уравнению Шредингера, а энергии, импульсу и другим физическим величинам следует ставить в соответствие операторы, собственные значения которых — возможные значения соответствующих величин. Оператор энергии должен быть выбран таким образом, чтобы функции, описывающие свободные частицы с определенными значениями импульса, были бы его собственными функциями. Как и в случае обычной квантовой механики, оператор энергии строится путем замены величин, входящих в классический гамильтониан, операторами. Таким образом, классические величины $a(q)$ и $a(-q)$ следует заменить операторами.

Если в выражении (4.21) заменить величины $a(q)$ и $a(-q)$ операторами, то получим* оператор поля $\phi(x)$. Ясно, что оператор $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона.

Гамильтониан должен быть эрмитовым оператором. Чтобы обеспечить эрмитовость гамильтониана, необходимо условие действительности классического поля заменить условием эрмитовости оператора $\phi(x)$, т. е. потребовать, чтобы

$$\phi^+(x) = \phi(x). \quad (4.23)$$

Тогда вместо (4.22) получаем

$$a(-q) = a^+(q). \quad (4.24)$$

Из (4.16) и (4.24) находим для оператора энергии следующее выражение:

$$H = \frac{1}{2} \int [a^+(q) a(q) + a(q) a^+(q)] q_0 dq. \quad (4.25)$$

Очевидно, что этот оператор эрмитов.

Далее, необходимо постулировать перестановочные соотношения между операторами поля. Предположим, что имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} [a(q), a(q')] &= a(q) a(q') - a(q') a(q) = 0, \\ [a(q), a^+(q')] &= a(q) a^+(q') - a^+(q') a(q) = \delta(q - q'). \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Отсюда следует также, что

$$[a^+(q), a^+(q')] = 0. \quad (4.26a)$$

Основываясь на этих перестановочных соотношениях, найдем собственные функции гамильтониана (4.25). Убедимся в том, что

* Для операторов в квантовой теории и для соответствующих величин в классической теории приняты одни и те же обозначения.

собственные функции гамильтониана (4.25) описывают свободные частицы с определенными значениями импульсов. Вычислим коммутатор $[a(q), H]$. С помощью перестановочных соотношений (4.26) находим

$$[a(q), H] = \frac{1}{2} \int \left([a(q), a^+(q')] a(q') + a(q') [a(q), a^+(q')] \right) q'_0 dq' = q_0 a(q). \quad (4.27)$$

При получении (4.27) использовалось соотношение

$$[\alpha, \beta\gamma] = \alpha\beta\gamma - \beta\gamma\alpha = (\alpha\beta - \beta\alpha)\gamma + \beta(\alpha\gamma - \gamma\alpha) = [\alpha, \beta]\gamma + \beta[\alpha, \gamma], \quad (4.28)$$

где α , β и γ — любые операторы. Из (4.27) путем эрмитова сопряжения получаем также

$$[a^+(q), H] = -q_0 a^+(q). \quad (4.29)$$

В связи с соотношениями (4.27) и (4.29) заметим следующее. Если вычислить коммутатор $[\phi, H]$, то с помощью (4.27) и (4.29), можно найти

$$[\phi(x), H] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{iqx} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} q_0 a(q) dq + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-iqx} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} (-q_0) a^+(q) dq. \quad (4.30)$$

С другой стороны, правая часть соотношения (4.30) равна $i \frac{\partial \phi}{\partial x_0}$. Таким образом,

$$i \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_0} = [\phi(x), H]. \quad (4.30a)$$

Мы рассматриваем в этом параграфе свободное скалярное (псевдоскалярное) поле. В общем случае нескольких взаимодействующих полей соотношения (4.27) и (4.29) и, следовательно, (4.30a) останутся справедливыми, если под H понимать свободный гамильтониан. Сравнивая (4.30a) и (1.15), заключаем, что $\phi(x)$ — оператор в представлении взаимодействия.

Найдем теперь решения уравнения*

$$H\Phi_E = E\Phi_E, \quad (4.31)$$

где H — гамильтониан свободного скалярного (псевдоскалярного) поля, определенный выражением (4.25). Для этого умножим (4.31) слева на $a^+(q)$:

$$a^+(q) H \Phi_E = E a^+(q) \Phi_E. \quad (4.32)$$

* Мы нигде не будем использовать конкретное представление для функций Φ_E , описывающих состояния квантованного поля, и будем называть их в дальнейшем векторами состояния.

Очевидно, что

$$a^+(q)H = [a^+(q), H] + Ha^+(q).$$

Используя (4.29), находим

$$Ha^+(q)\Phi_E = (E + q_0)a^+(q)\Phi_E. \quad (4.33)$$

Таким образом, если Φ_E — собственный вектор гамильтониана H , отвечающий собственному значению E , то вектор состояния $a^+(q)\Phi_E$ также является собственным вектором H и отвечает собственному значению $E + q_0$.

Умножая (4.31) на $a(q)$, получаем

$$a(q)H\Phi_E = ([a(q), H] + Ha(q))\Phi_E = Ea(q)\Phi_E. \quad (4.34)$$

Используя (4.27), находим

$$Ha(q)\Phi_E = (E - q_0)a(q)\Phi_E. \quad (4.35)$$

Отсюда следует, что вектор состояния $a(q)\Phi_E$ является собственным вектором гамильтониана H , отвечающим собственному значению $E - q_0$.

Далее, нетрудно видеть, что все собственные значения гамильтониана (4.25) положительны. Действительно, умножая (4.31) слева на Φ_E^+ , получаем

$$\frac{(\Phi_E^+ H \Phi_E)}{(\Phi_E^+ \Phi_E)} = E. \quad (4.36)$$

Очевидно, что знаменатель этого выражения положителен. Числитель также положителен, так как

$$(\Phi_E^+ a^+(q)a(q)\Phi_E) = ((a(q)\Phi_E)^+ a(q)\Phi_E) \geq 0. \quad (4.37)$$

Отсюда следует, что спектр собственных значений гамильтониана (4.25) ограничен снизу, т. е. существует минимальное собственное значение. Обозначим минимальное собственное значение гамильтониана H через E_0 , а вектор состояния, отвечающий значению E_0 , — через Φ_0 . Тогда очевидно, что

$$a(q)\Phi_0 = 0 \quad (4.38)$$

при всех значениях q (в противном случае вектор $a(q)\Phi_0$ отвечал бы собственному значению $E_0 - q_0$).

Из (4.25) и (4.36) находим для минимального собственного значения

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{(\Phi_0^+ \Phi_0)} \int [(\Phi_0^+ a^+(q)a(q)\Phi_0) + (\Phi_0^+ a(q)a^+(q)\Phi_0)] q_0 dq. \quad (4.39)$$

Вследствие (4.38) первый член в квадратных скобках равен нулю. Далее очевидно, что выражение (4.39) может быть записано следующим образом:

$$E_0 = \frac{1}{2 (\Phi_0^+ \Phi_0)} \int (\Phi_0^+ a(q) a^+(q') \Phi_0) \delta(q' - q) q_0 dq' dq. \quad (4.40)$$

Заменяя здесь оператор $a(q) a^+(q')$ на $[a(q), a^+(q')] + a^+(q') a(q)$ и используя (4.26) и (4.38), получаем

$$E_0 = \frac{1}{2} \int \delta(q' - q) \delta(q' - q) q_0 dq' dq. \quad (4.41)$$

Этот интеграл расходится. Мы получили, таким образом, бессмысленный результат: минимальное собственное значение гамильтониана бесконечно. В связи с этим рассмотрим вопрос о выборе гамильтониана. Мы предположили, что гамильтониан квантовой теории может быть получен из классического гамильтониана путем замены классических величин $a(q)$ и $a^*(q)$ операторами $a(q)$ и $a^+(q)$. Очевидно, что эта процедура не однозначна.

Чтобы доопределить процедуру перехода от классической теории к квантовой, введем понятие *нормального произведения* операторов. Определим следующим образом оператор нормального произведения N :

$$\left. \begin{aligned} N(a(q) a^+(q)) &= a^+(q) a(q), \\ N(a^+(q) a(q)) &= a^+(q) a(q). \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Если оператор $a(q)$ расположен справа от оператора $a^+(q)$, то такой порядок операторов называется *нормальным*. Таким образом, оператор N , действуя на произведение двух операторов поля, расставляет их в нормальном порядке. В дальнейшем оператор N будет определен в общем случае n множителей.

Вернемся к гамильтониану квантовой теории. Ясно, что обращение в бесконечность минимального собственного значения гамильтониана (4.25) связано с членом $a(q) a^+(q)$. Будем предполагать, что при получении гамильтониана квантовой теории из классического гамильтониана необходимо кроме замены функций операторами подействовать на произведение операторов поля оператором N . Мы приходим к следующему гамильтониану квантовой теории:

$$H = \int a^+(q) a(q) q_0 dq. \quad (4.43)$$

Из (4.38) и (4.43) получаем, что

$$H \Phi_0 = 0. \quad (4.44)$$

Таким образом, минимальное собственное значение гамильтониана (4.43) равно нулю.

Будем предполагать, что операторы, отвечающие всем другим физическим величинам, также получаются из соответствующих классических величин заменой функций операторами, расположенными в нормальном порядке. Из (4,19а) получаем для оператора импульса

$$P_k = \int a^+(q) a(q) q_k dq. \quad (4.45)$$

Очевидно, что

$$P_k \Phi_0 = 0. \quad (4.46)$$

Таким образом, вектор Φ_0 описывает состояние с энергией и импульсом, равными нулю. Такое состояние называется *вакуумным*.

Нетрудно видеть, что гамильтониан (4.43) удовлетворяет соотношениям (4.27) и (4.29). Следовательно, из уравнения (4.33) получаем, что вектор $a^+(q_1)\Phi_0$ является собственным вектором гамильтониана, отвечающим собственному значению q_{10} . Покажем, что этот вектор является также собственным вектором оператора импульса P . С помощью (4.26) и (4.45) находим

$$[P, a^+(q)] = \int a^+(q') [a(q'), a^+(q)] q' dq' = qa^+(q). \quad (4.47)$$

Далее получаем

$$Pa^+(q_1)\Phi_0 = ([P, a^+(q_1)] + a^+(q_1)P)\Phi_0 = q_1 a^+(q_1)\Phi_0. \quad (4.48)$$

Таким образом, вектор состояния $a^+(q_1)\Phi_0$ описывает бесспиновую частицу (квант поля) с энергией q_{10} и импульсом q_1 . Масса этой частицы равна $\sqrt{q_{10}^2 - q_1^2} = \kappa$.

Если на вектор состояния $a^+(q_1)\Phi_0$ подействовать оператором $a^+(q_2)$, то получим собственный вектор гамильтониана (4.43), отвечающий собственному значению $q_{10} + q_{20}$. Вектор $a^+(q_2)a^+(q_1)\Phi_0$ является также собственным вектором оператора импульса, отвечающим собственному значению $q_1 + q_2$. Действительно, используя (4.47) и (4.48), получаем

$$\begin{aligned} Pa^+(q_2)a^+(q_1)\Phi_0 &= ([P, a^+(q_2)] + a^+(q_2)P)a^+(q_1)\Phi_0 = \\ &= (q_1 + q_2)a^+(q_2)a^+(q_1)\Phi_0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Вектор состояния $a^+(q_2)a^+(q_1)\Phi_0$ описывает, следовательно, две невзаимодействующие частицы с 4-импульсами q_1 и q_2 и одной и той же массой κ . Если на вектор $a^+(q_2)a^+(q_1)\Phi_0$ подействовать оператором $a^+(q_3)$, то получим вектор состояния, описывающий три невзаимодействующие частицы с импульсами q_1 , q_2 и q_3 и т. д.

Таким образом, действуя на вектор вакуумного состояния Φ_0 операторами a^+ , получим систему собственных векторов гамильтониана, которая представляет собой систему векторов состояния тождественных невзаимодействующих частиц с массой κ , нулевым спином и определенными значениями 4-импульса. Операторы $a^+(q)$ и $a(q)$ называются соответственно операторами *рождения* и *уничто-*

жения частицы с 4-импульсом q . В общем случае собственный вектор гамильтониана (4.43) может быть записан в виде

$$\Phi_{n(q_n) \dots n(q_1)} = \underbrace{a^+(q_n) \dots a^+(q_n)}_{n(q_n)} \dots \underbrace{a^+(q_1) \dots a^+(q_1)}_{n(q_1)} \Phi_0. \quad (4.50)$$

Здесь $n(q_1)$ — число операторов $a^+(q_1)$; $n(q_2)$ — число операторов $a^+(q_2)$ и т. д. Вектор (4.50) описывает состояние, в котором $n(q_1)$, $n(q_2)$ и т. д. одинаковых частиц обладают соответственно 4-импульсами q_1 , q_2 и т. д. Числа $n(q_1)$, $n(q_2)$ называют *числами заполнения*. Очевидно, что вектор состояния однозначно задается числами заполнения. Вектор состояния (4.50) отвечает следующим значениям полной энергии и полного импульса:

$$\left. \begin{aligned} E_{n(q_n) \dots n(q_1)} &= \sum_{i=1}^n n(q_i) q_{i0}, \\ P_{n(q_n) \dots n(q_1)} &= \sum_{i=1}^n n(q_i) q_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Все изложенное выше справедливо как для скалярного, так и для псевдоскалярного поля. Рассмотрим теперь различие между этими полями и соответствующими частицами в квантовой теории.

Произведем инверсию системы отсчета. Пусть $\phi'(x')$ — функция, описывающая поле в новой системе отсчета. Тогда

$$\phi'(x') = \eta_P \phi(x), \quad (4.52)$$

где

$$x' = -x, \quad x'_0 = x_0, \quad (4.53)$$

а η_P — фазовый множитель. Если еще раз произвести инверсию системы отсчета, то мы возвратимся в исходную систему. При этом получим

$$\phi(x) = \eta_P \phi'(x'). \quad (4.54)$$

Из (4.52) и (4.54) заключаем, что

$$\eta_P^2 = 1, \quad (4.55)$$

т. е. $\eta_P = \pm 1$. Величина η_P называется *внутренней четностью*. Для скалярного поля $\eta_P = 1$, для псевдоскалярного $\eta_P = -1$.

Рассмотрим теперь преобразование операторов квантовой теории поля при инверсии системы отсчета. Оператор поля в штрихованной системе в точке x' равен

$$\phi'(x') = U_P \phi(x') U_P^{-1}, \quad (4.56)$$

где U_P — унитарный оператор ($U_P^\dagger U_P = 1$), действующий на операторы поля. В соответствии с (4.52) получаем преобразование операторов поля при инверсии системы отсчета

$$U_P \phi(x') U_P^{-1} = \eta_P \phi(x). \quad (4.57)$$

Подставляя в (4.57) разложение (4.21), находим

$$\begin{aligned} U_P a(q) U_P^{-1} &= \eta_P a(q'), \\ U_P a^+(q) U_P^{-1} &= \eta_P a^+(q'), \end{aligned} \quad (4.58)$$

где

$$q' = -q, \quad q'_0 = q_0. \quad (4.59)$$

Подействуем на вектор состояния $\Phi_q = a^+(q) \Phi_0$, описывающий частицу с импульсом q , оператором U_P . Получаем

$$U_P \Phi_q = U_P a^+(q) U_P^{-1} U_P \Phi_0. \quad (4.60)$$

Естественно потребовать, чтобы

$$U_P \Phi_0 = \Phi_0. \quad (4.61)$$

Тогда находим

$$U_P \Phi_q = \eta_P \Phi_{q'}. \quad (4.62)$$

Таким образом, если на вектор состояния, описывающий частицу с 4-импульсом q , подействовать оператором U_P , то при этом получим вектор состояния той же частицы с 4-импульсом q' , умноженный на внутреннюю четность η_P . Если $\eta_P = 1$, то частица называется скалярной. При $\eta_P = -1$ частица называется псевдоскалярной. Величина η_P характеризует внутренние свойства частиц и определяется из опыта. Очевидно, что

$$U_P \Phi_n(q_n) \dots n(q_1) = (\eta_P)^{n(q_1) + \dots + n(q_n)} \Phi_n(q'_n) \dots n(q'_1), \quad (4.63)$$

где $q'_i = -q_i$; $q'_{i0} = q_{i0}$.

§ 5. Комплексное скалярное (псевдоскалярное) поле

В этом параграфе будет рассмотрено комплексное скалярное (псевдоскалярное) поле. Начнем с классического случая. Предположим, что комплексная функция поля $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона:

$$(\square - \kappa^2) \phi(x) = 0. \quad (5.1)$$

Вначале построим такой лагранжиан, который давал бы постулированное уравнение поля (5.1) и удовлетворял бы требованиям релятивистской инвариантности и инвариантности относительно калибровочных преобразований. Затем, используя общие формулы § 3, найдем сохраняющиеся величины. Наконец, перейдем к квантовой теории и покажем, что квантами комплексного поля являются заряженные частицы с зарядами e и $-e$.

Очевидно, что комплексную функцию $\phi(x)$ всегда можно представить в виде

$$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x),$$

где

$$\phi_1 = \frac{\phi + \phi^*}{2} \text{ и } \phi_2 = \frac{\phi - \phi^*}{2i} \quad (5.2)$$

реальная и мнимая части функции $\phi(x)$.

Итак, рассматриваемое поле описывается двумя независимыми функциями. Будем описывать поле функциями $\phi(x)$ и $\phi^*(x)$. Из (5.1) следует, что

$$(\square - \kappa^2) \phi^*(x) = 0. \quad (5.1a)$$

С другой стороны, уравнениями комплексного поля являются [см. (2.14) и (2.15)]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu}} = 0. \quad (5.3)$$

Лагранжиан зависит от функций ϕ , ϕ^* и их первых производных. Ясно, что члены $\square \phi$ и $\square \phi^*$ в (5.1) происходят от $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}}$ и $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu}}$ в уравнениях (5.3), а $\kappa^2 \phi$ и $\kappa^2 \phi^*$ — от $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$ и $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*}$.

Учитывая требования лоренц-инвариантности, заключаем, что лагранжиан должен быть линейной комбинацией величин

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_\rho}, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho}, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_\rho}, \quad \phi \phi, \quad \phi^* \phi^*, \quad \phi^* \phi. \quad (5.4)$$

Требованиям калибровочной инвариантности удовлетворяют лишь третий и шестой члены в (5.4). Имея в виду эти замечания, нетрудно получить выражение для \mathcal{L} с точностью до общего множителя. Примем для лагранжиана комплексного скалярного (псевдоскалярного) поля следующее выражение:

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x_\rho} - \kappa^2 \phi^* \phi. \quad (5.5)$$

Этот лагранжиан удовлетворяет всем требованиям инвариантности.

Из (5.5) следует также, что функции ϕ и ϕ^* подчиняются уравнению Клейна — Гордона. Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -\kappa^2 \phi^*, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} &= -\kappa^2 \phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}} &= -\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu}} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.3), получаем уравнения (5.1).

Вычислим тензор энергии—импульса [см. (3.4)]. Имеем

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\nu}} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = \\ &= - \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из (5.7) находим для энергии и импульса поля

$$\left. \begin{aligned} H &= \int \left(\nabla \phi^* \nabla \phi + \kappa^2 \phi^* \phi + \frac{\partial \phi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \right) d\mathbf{x}, \\ P_k &= - \int \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_k} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Далее, из (3.40) получаем для 4-вектора тока

$$j_\mu = -ie \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu}} \phi^* \right) = ie \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \phi^* \right). \quad (5.9)$$

Заряд поля дается выражением

$$Q = -i \int j_4(x) d\mathbf{x}. \quad (5.10)$$

Разложим теперь функцию $\phi(x)$ в интеграл Фурье. Используя уравнение поля (5.1), получим

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \quad (5.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2q_0}} a(q) e^{iqx} dq, \\ \phi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2q_0}} a(-q) e^{-iqx} dq, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

$$q_0 = \sqrt{\kappa^2 + \mathbf{q}^2}.$$

Существенное отличие от рассмотренного ранее случая действительного поля состоит в том, что функции $a(q)$ и $a(-q)$ в данном случае являются независимыми. Следовательно, комплексное скалярное (псевдоскалярное) поле может быть описано двумя комплексными функциями переменной \mathbf{q} .

Подставляя (5.11) и (5.12) в (5.8) и (5.10), получаем следующие выражения для 4-вектора энергии — импульса и заряда поля:

$$P_\mu = \int [a^*(q) a(q) + a^*(-q) a(-q)] q_\mu dq, \quad (5.13)$$

$$Q = e \int [a^*(q) a(q) - a^*(-q) a(-q)] dq. \quad (5.14)$$

Из (5.13) следует, что энергия поля может принимать только положительные значения. Заряд поля Q может быть как положительным, так и отрицательным.

Перейдем теперь к квантовой теории. Величины $a(q)$ и $a(-q)$ в классической теории следует, как и в рассмотренном нами случае действительного (эрмитова) поля, заменить операторами. Операцию комплексного сопряжения функций следует заменить эрмитовым сопряжением операторов. Очевидно, что полученные таким способом операторы энергии, импульса и заряда будут эрмитовыми.

Оператор поля $\phi(x)$, удовлетворяющий уравнению Клейна — Гордона, является оператором в представлении взаимодействия. Операторы в представлении взаимодействия подчиняются соотношению (1.15). Таким образом, для $\phi(x)$ получаем

$$[i \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_0} = [\phi(x), H]. \quad (5.15)$$

(H_0 в соотношении (1.15) совпадает в рассматриваемом нами случае свободного поля с H). Подставляя в (5.15) разложение (5.12) ($a(q)$ и $a(-q)$ — операторы), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(q_0 a(q) - [a(q), H]) e^{iqx} + \\ & + (-q_0 a(-q) - [a(-q), H]) e^{-iqx}] \frac{dq}{V 2q_0} = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Отсюда следует, что

$$[a(q), H] = q_0 a(q), [a(-q), H] = -q_0 a(-q). \quad (5.17)$$

Операцией эрмитова сопряжения из этих соотношений получаем

$$[a^+(q), H] = -q_0 a^+(q), [a^+(-q), H] = q_0 a^+(-q). \quad (5.17a)$$

С помощью (5.17) нетрудно убедиться (см. предыдущий параграф), что операторы $a^+(q)$ и $a(-q)$ ($a(q)$ и $a^+(-q)$) при действии на собственный вектор гамильтониана H , отвечающий энергии E , дают собственный вектор оператора H с энергией $E + q_0$ ($E - q_0$). Таким образом, в случае неэрмитова поля $\phi(x)$ имеется два оператора рождения [$a^+(q)$ и $a(-q)$] и два оператора уничтожения [$a(q)$ и $a^+(-q)$]. Обозначим

$$a(-q) = b^+(q). \quad (5.18)$$

Отсюда следует, что

$$a^+(-q) = b(q).$$

Используя выражения (5.13) и (5.14) и записывая в нормальном порядке операторы поля (оператор уничтожения справа от оператора рождения), получаем следующие выражения для операторов энергии, импульса и заряда:

$$H = \int [a^+(q) a(q) + b^+(q) b(q)] q_0 dq, \quad (5.19)$$

$$P_k = \int [a^+(q) a(q) + b^+(q) b(q)] q_k dq, \quad (5.20)$$

$$Q = e \int [a^+(q) a(q) - b^+(q) b(q)] dq. \quad (5.21)$$

Очевидно, что все собственные значения гамильтониана (5.19) положительны. Если собственный вектор гамильтониана H , отвечающий минимальному собственному значению, обозначим Φ_0 , то ясно, что

$$a(q)\Phi_0 = 0, \quad b(q)\Phi_0 = 0. \quad (5.22)$$

Из (5.19) — (5.22) находим

$$H\Phi_0 = 0, \quad P\Phi_0 = 0, \quad Q\Phi_0 = 0. \quad (5.23)$$

Таким образом, вектор Φ_0 описывает состояние с энергией, импульсом и зарядом, равными нулю (вакуумное состояние).

Для операторов рассматриваемого поля постулируются перестановочные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} [a(q), a(q')] &= 0, \\ [b(q), b(q')] &= 0, \\ [a(q), a^+(q')] &= \delta(q - q'), \\ [b(q), b^+(q')] &= \delta(q - q'), \\ [a(q), b(q')] &= 0, \\ [a(q), b^+(q')] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Из этих соотношений следует, что

$$\left. \begin{aligned} [a^+(q), a^+(q')] &= 0, \\ [b^+(q), b^+(q')] &= 0, \\ [a^+(q), b^+(q')] &= 0, \\ [a^+(q), b(q')] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24a)$$

Используя (5.24) и (5.19), нетрудно убедиться в справедливости соотношений (5.17). Действительно, с помощью соотношения (4.28) получаем

$$[a(q), H] = \int [a(q), a^+(q')] a(q') q'_0 dq' = q_0 a(q),$$

$$[b(q), H] = \int [b(q), b^+(q')] b(q') q'_0 dq = q_0 b(q).$$

Аналогично находим

$$[a(q), P] = qa(q), \quad [b(q), P] = qb(q). \quad (5.25)$$

Отсюда следует (P — эрмитов оператор), что

$$[P, a^+(q)] = qa^+(q), \quad [P, b^+(q)] = qb^+(q). \quad (5.25a)$$

Перейдем теперь к построению системы собственных векторов гамильтониана (5.19). Рассмотрим вектор состояния $a^+(q)\Phi_0$. Используя (5.17) и (5.23), получим

$$Ha^+(q)\Phi_0 = ([H, a^+(q)] + a^+(q)H)\Phi_0 = q_0 a^+(q)\Phi_0, \quad (5.26)$$

$$Pa^+(q)\Phi_0 = ([P, a^+(q)] + a^+(q)P)\Phi_0 = qa^+(q)\Phi_0. \quad (5.27)$$

Вектор $a^+(q)\Phi_0$ описывает, следовательно, частицу с 4-импульсом q и массой $\sqrt{q_0^2 - \mathbf{q}^2} = \kappa$.

Аналогично находим

$$\left. \begin{aligned} Hb^+(q)\Phi_0 &= q_0 b^+(q)\Phi_0, \\ Pb^+(q)\Phi_0 &= qb^+(q)\Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Отсюда следует, что $b^+(q)\Phi$ — вектор состояния частицы с 4-импульсом q и массой $\sqrt{q_0^2 - \mathbf{q}^2} = \kappa$.

Таким образом, $a^+(q)$ и $b^+(q)$ — операторы рождения частиц с одной и той же массой κ . Посмотрим, чем различаются эти частицы. Вычислим коммутаторы $[Q, a^+(q)]$ и $[Q, b^+(q)]$. Используя перестановочные соотношения (5.24) и выражение (5.21), получаем

$$[Q, a^+(q)] = ea^+(q), \quad [Q, b^+(q)] = -eb^+(q). \quad (5.29)$$

Далее имеем

$$\left. \begin{aligned} Qa^+(q)\Phi_0 &= ([Q, a^+(q)] + a^+(q)Q)\Phi_0 = ea^+(q)\Phi_0, \\ Qb^+(q)\Phi_0 &= ([Q, b^+(q)] + b^+(q)Q)\Phi_0 = -eb^+(q)\Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Вектор состояния $a^+(q)\Phi_0$ описывает, следовательно, заряженную частицу с зарядом e , а вектор $b^+(q)\Phi_0$ — частицу с зарядом $-e$. Итак, если заряд частиц — квантов поля — отличен от нуля, то наряду с частицами с зарядом e и массой κ должны существовать частицы с той же массой κ и зарядом $-e$ (античастицы). Этот важный общий вывод квантовой теории поля подтверждается опытом.

Подействуем на вектор $a^+(q)\Phi_0$ оператором $b^+(q')$. Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} P_\mu b^+(q') a^+(q) \Phi_0 &= ([P_\mu, b^+(q')] + b^+(q') P_\mu) a^+(q) \Phi_0 = \\ &= (q'_\mu + q_\mu) b^+(q') a^+(q) \Phi_0, \\ Qb^+(q') a^+(q) \Phi_0 &= [(-e) + (e)] b^+(q') a^+(q) \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

Вектор состояния $b^+(q')a^+(q)\Phi_0$ описывает, следовательно, частицу с 4-импульсом q_μ и античастицу с 4-импульсом q'_μ .

Таким образом, если на вектор состояния вакуума Φ_0 действовать операторами рождения a^+ и b^+ , то при этом получим систему

собственных векторов гамильтониана (5.19), описывающих частицы и античастицы с определенными импульсами. В общем случае имеем

$$\Phi_{\bar{n}(q'_m) \dots \bar{n}(q'_1) n(q_n) \dots n(q_1)} = \underbrace{b^+(q'_m) \dots b^+(q'_1)}_{\bar{n}(q'_m)} \dots \underbrace{b^+(q'_1) \dots b^+(q'_1)}_{\bar{n}(q'_1)} \underbrace{a^+(q_n) \dots a^+(q_n)}_{n(q_n)} \dots \underbrace{a^+(q_1) \dots a^+(q_1)}_{n(q_1)} \Phi_0. \quad (5.32)$$

Числа заполнения частиц $n(q_1), \dots, n(q_n)$ и числа заполнения античастиц $\bar{n}(q'_1), \dots, \bar{n}(q'_m)$ полностью задают состояние системы. Очевидно, что вектор (5.32) описывает состояние со следующими значениями вектора энергии — импульса и заряда:

$$\left. \begin{aligned} P_\mu &= \sum_{i=1}^n (q_i)_\mu n(q_i) + \sum_{k=1}^m (q'_k)_\mu \bar{n}(q'_k), \\ Q &= e \sum_{i=1}^n n(q_i) + (-e) \sum_{k=1}^m \bar{n}(q'_k). \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

§ 6. Комплексное спинорное поле

Рассмотрим поле, описываемое комплексной спинорной функцией $\psi_\sigma(x)$ (индекс σ пробегает четыре значения), подчиняющейся уравнению Дирака:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + m\psi = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - m\bar{\psi} = 0. \quad (6.1a)$$

Здесь γ_μ — эрмитовы 4×4 -матрицы ($\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$); $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$, а m — положительный параметр (в квантовой теории — масса кванта поля).

Выберем в качестве независимых динамических переменных функции ψ и $\bar{\psi}$. Уравнения поля являются [см. (2.14)]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_\mu}} = 0. \quad (6.2)$$

Покажем, что лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[\left(\bar{\psi} \gamma_\rho \frac{\partial \psi}{\partial x_\rho} + m \bar{\psi} \psi \right) - \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\rho} \gamma_\rho \psi - m \bar{\psi} \psi \right) \right] \quad (6.3)$$

удовлетворяет требованиям лоренц-инвариантности и инвариантности относительно калибровочных преобразований и дает при

подстановке в (6.2) уравнения поля (6.1). Используя (2.26) и (2.27), получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}(x) \gamma_{\rho} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{\rho}} &= \bar{\psi}'(x') L \gamma_{\rho} L^{-1} a_{\nu\rho} \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'_{\nu}} = \\ &= \bar{\psi}'(x') \gamma_{\nu} \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'_{\nu}}, \\ \bar{\psi}(x) \psi(x) &= \bar{\psi}'(x') L L^{-1} \psi'(x') = \bar{\psi}'(x') \psi'(x'), \\ \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_{\rho}} \gamma_{\rho} \psi(x) &= \frac{\partial \bar{\psi}'(x')}{\partial x'_{\nu}} L \gamma_{\rho} L^{-1} a_{\nu\rho} \psi'(x') = \\ &= \frac{\partial \bar{\psi}'(x')}{\partial x'_{\nu}} \gamma_{\nu} \psi'(x'). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Из (6.3) и (6.4) следует, что

$$\mathcal{L}(\psi(x), \bar{\psi}(x), \dots) = \mathcal{L}(\psi'(x'), \bar{\psi}'(x'), \dots), \quad (6.5)$$

т. е. лагранжиан (6.3) является скаляром. Далее очевидно, что лагранжиан (6.3) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\left. \begin{aligned} \psi'(x) &= \psi(x) e^{i\epsilon\chi}, \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x) e^{-i\epsilon\chi} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

(χ не зависит от x). Наконец, из (6.3) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{\sigma}} &= -\frac{1}{2} \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right)_{\sigma} - m \psi_{\sigma}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}} &= \frac{1}{2} (\gamma_{\mu} \psi)_{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.2), получаем уравнение Дирака для функции $\psi(x)$

$$\left(\gamma_{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right)_{\sigma} + m \psi_{\sigma} = 0.$$

Далее,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{\sigma}} &= -m \bar{\psi}_{\sigma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\mu}} \gamma_{\mu} \right)_{\sigma}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}_{\sigma}}{\partial x_{\mu}}} &= -\frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_{\mu})_{\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

и из (6.2) получаем уравнение Дирака для сопряженного спинора $\bar{\psi}(x)$:

$$\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \right)_\sigma - m \bar{\psi}_\sigma = 0.$$

Из общего выражения (3.4) следует, что тензор энергии—импульса спинорного поля равен

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\nu}} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_\nu}} \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \quad (6.9)$$

Подставляя сюда (6.7) и (6.8) и учитывая, что значение лагранжиана (6.3) при ψ и $\bar{\psi}$, удовлетворяющих уравнениям (6.1) и (6.1a), равно нулю, получаем

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \psi. \quad (6.10)$$

В соответствии с (3.40) вектор тока комплексного спинорного поля дается следующим выражением:

$$j_\mu = -ie \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu}} \psi_\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_\mu}} \bar{\psi}_\sigma \right) = ie \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (6.11)$$

Отсюда находим для заряда поля

$$Q = e \int \bar{\psi} \gamma_4 \psi dx. \quad (6.12)$$

Используя (6.10), получаем, что 4-вектор энергии—импульса поля равен

$$\begin{aligned} P_\mu &= i \int T_{\mu 4} dx = -\frac{i}{2} \int \bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} dx + \frac{i}{2} \int \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_4 \psi dx = \\ &= -i \int \bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} dx + \frac{i}{2} \int \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\bar{\psi} \gamma_4 \psi) dx. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Нетрудно видеть, что второй член в правой части (6.13) равен нулю. Действительно, вследствие сохранения полного заряда

$$\frac{\partial}{\partial x_4} \int \bar{\psi} \gamma_4 \psi dx = 0. \quad (6.14)$$

Далее очевидно, что $\int \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\psi} \gamma_4 \psi) dx = 0$ (отсутствие полей на бесконечности). Таким образом, вектор энергии—импульса комплексного спинорного поля равен

$$P_\mu = -i \int \bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} dx. \quad (6.15)$$

Разложим теперь функцию $\psi(x)$ по состояниям с определенным импульсом. При фиксированном значении импульса уравнение Дирака имеет, как известно, четыре независимых решения — два решения с положительной энергией и два с отрицательной. Эти решения подробно рассмотрены в Приложении. Решения с положительной энергией запишем в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_+^r(p) e^{ipx - ip_0 x_0}, \quad (6.16)$$

где $p_0 = +\sqrt{p^2 + m^2}$, а спинор $u_+^r(p)$ удовлетворяет уравнению

$$(\alpha p + m\beta) u_+^r(p) = p_0 u_+^r(p) \quad (6.17)$$

и является собственной функцией оператора проекции спина на направление импульса, отвечающей собственному значению r ($r = \pm 1$). Имеем

$$(u_+^{r'}(p))^+ u_+^r(p) = \delta_{r'r}. \quad (6.18)$$

Два других решения уравнения Дирака

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_-^r(p) e^{ipx + ip_0 x_0}, \quad (6.19)$$

отвечают отрицательной энергии ($-p_0$). Функции $u_-^r(p)$ удовлетворяют уравнению

$$(\alpha p + m\beta) u_-^r(p) = -p_0 u_-^r(p). \quad (6.20)$$

Очевидно, что

$$(u_+^{r'}(p))^+ u_-^r(p) = 0. \quad (6.21)$$

Кроме того,

$$(u_-^{r'}(p))^+ u_-^r(p) = \delta_{r'r}. \quad (6.22)$$

Общее решение уравнения Дирака можно всегда представить в виде суперпозиции решений (6.16) и (6.19). Имеем

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int u_+^r(p) e^{ipx - ip_0 x_0} \psi_+^r(p) dp + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int u_-^r(p) e^{ipx + ip_0 x_0} \psi_-^r(p) dp. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Заменяя во втором интеграле $p \rightarrow -p$ и вводя обозначения

$$\psi_+^r(p) = c_r(p), \quad \psi_-^r(-p) = c_r(-p),$$

получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int u_+^r(p) e^{ipx} c_r(p) dp + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int u_-^r(-p) e^{-ipx} c_r(-p) dp, \end{aligned}$$

где

$$p x = p_\mu x_\mu = \mathbf{p} \mathbf{x} - p_0 x_0; \quad p_0 = + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (6.24)$$

Таким образом, комплексное спинорное поле характеризуется четырьмя комплексными функциями переменной \mathbf{p} [$c_r(\mathbf{p})$ и $c_r(-\mathbf{p})$].

Рассмотрим случай $m \neq 0$. Введем вместо $u_+^r(\mathbf{p})$ и $u_-^r(-\mathbf{p})$ спиноры

$$u^r(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^{1/2} u_+^r(\mathbf{p}), \quad u^r(-\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^{1/2} u_-^r(-\mathbf{p}). \quad (6.25)$$

Используя соотношение (см. Приложение)

$$\bar{u}_\pm^{r'}(\mathbf{p}) u_\pm^r(\mathbf{p}) = \pm \frac{m}{p_0} (u_\pm^{r'}(\mathbf{p}))^\dagger u_\pm^r(\mathbf{p}), \quad (6.26)$$

получаем

$$\bar{u}^{r'}(\mathbf{p}) u^r(\mathbf{p}) = \delta_{r' r}, \quad \bar{u}^{r'}(-\mathbf{p}) u^r(-\mathbf{p}) = -\delta_{r' r}. \quad (6.27)$$

Далее имеем

$$\bar{u}^{r'}(-\mathbf{p}) u^r(\mathbf{p}) = 0. \quad (6.27a)$$

Будем использовать в случае $m \neq 0$ спиноры $u^r(\mathbf{p})$ и $u^r(-\mathbf{p})$, нормированные условиями (6.27) (инвариантная нормировка). Из (6.24) и (6.25) получим следующее разложение для $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \quad (6.28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u^r(\mathbf{p}) e^{i p x} c_r(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \\ \psi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u^r(-\mathbf{p}) e^{-i p x} c_r(-\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \end{aligned} \right\} \quad (6.28a)$$

Подставляя это разложение в выражение (6.15) для 4-вектора энергии—импульса и интегрируя по \mathbf{x} , получаем

$$\begin{aligned} P_\mu &= \int [c_r^*(\mathbf{p}) c_{r'}(\mathbf{p}') \bar{u}^r(\mathbf{p}) \gamma_4 u^{r'}(\mathbf{p}') \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - \\ &- c_r^*(\mathbf{p}) c_{r'}(-\mathbf{p}') \bar{u}^r(\mathbf{p}) \gamma_4 u^{r'}(-\mathbf{p}') e^{2i p_0 x_0} \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) + \\ &+ c_r^*(-\mathbf{p}) c_{r'}(\mathbf{p}') \bar{u}^r(-\mathbf{p}) \gamma_4 u^{r'}(\mathbf{p}') e^{-2i p_0 x_0} \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) - \\ &- c_r^*(-\mathbf{p}) c_{r'}(-\mathbf{p}') \bar{u}^r(-\mathbf{p}) \gamma_4 u^{r'}(-\mathbf{p}') \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})] p_\mu \left(\frac{m^2}{p_0 p'_0}\right)^{1/2} d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \end{aligned}$$

Интегрируя далее по p' и учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^r(p) \gamma_4 u^{r'}(p) &= \left(\frac{p_0}{m} \right) (u_+^r(p))^+ u_+^{r'}(p) = \frac{p_0}{m} \delta_{rr'}, \\ \bar{u}^r(-p) \gamma_4 u^{r'}(-p) &= \left(\frac{p_0}{m} \right) (u_-^r(-p))^+ u_-^{r'}(-p) = \frac{p_0}{m} \delta_{rr'}, \\ \bar{u}^r(p) \gamma_4 u^{r'}(-p') \big|_{p'=-p} &= \left(\frac{p_0}{m} \right) (u_+^r(p))^+ u_-^{r'}(p) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

находим для энергии и импульса поля

$$H = \int [c_r^*(p) c_r(p) - c_r^*(-p) c_r(-p)] p_0 dp, \quad (6.30)$$

$$P_k = \int [c_r^*(p) c_r(p) - c_r^*(-p) c_r(-p)] p_k dp. \quad (6.31)$$

Аналогично получаем, что заряд комплексного спинорного поля равен

$$Q = e \int [c_r^*(p) c_r(p) + c_r^*(-p) c_r(-p)] dp. \quad (6.32)$$

Второй член под знаком интеграла (6.30) отрицателен (вклад состояний с отрицательной энергией). Таким образом, энергия классического спинорного поля не является положительно определенной величиной. С другой стороны, из (6.32) следует, что заряд классического комплексного спинорного поля может принимать значения только одного знака.

Перейдем теперь к рассмотрению квантованного спинорного поля. Заменим в выражениях (6.28), (6.30), (6.31) и (6.32) функции $c_r(p)$ и $c_r(-p)$ операторами, а операцию комплексного сопряжения классических величин — операцией эрмитова сопряжения операторов. Очевидно, что операторы энергии, импульса и заряда будут после такой замены эрмитовыми операторами.

Оператор поля $\psi(x)$ удовлетворяет свободному уравнению Дирака и является оператором в представлении взаимодействия. Имеет место, следовательно, соотношение

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_0} = [\psi(x), H]. \quad (6.33)$$

Подставим в (6.33) разложение (6.28):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left\{ e^{ipx} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u^r(p) (p_0 c_r(p) - [c_r(p), H]) + \right. \\ & \left. + e^{-ipx} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u^r(-p) (-p_0 c_r(-p) - [c_r(-p), H]) \right\} dp = 0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} [c_r(p), H] &= p_0 c_r(p), \\ [c_r(-p), H] &= -p_0 c_r(-p). \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

С помощью эрмитова сопряжения из (6.35) получаем также

$$\left. \begin{aligned} [c_r^+(p), H] &= -p_0 c_r^+(p); \\ [c_r^+(-p), H] &= p_0 c_r^+(-p). \end{aligned} \right\} \quad (6.35a)$$

Обозначим Φ_E собственный вектор гамильтониана, отвечающий собственному значению E . Имеем

$$H\Phi_E = E\Phi_E. \quad (6.36)$$

Умножая (6.36) на $c_r(-p)$, получаем

$$c_r(-p)H\Phi_E = ([c_r(-p), H] + Hc_r(-p))\Phi_E = Ec_r(-p)\Phi_E.$$

Отсюда, используя (6.35), находим

$$Hc_r(-p)\Phi_E = (E + p_0)c_r(-p)\Phi_E.$$

Таким образом, оператор $c_r(-p)$ является оператором рождения кванта с энергией p_0 . Из (6.35) ясно также, что $c_r^+(p)$ — оператор рождения, а $c_r(p)$ и $c_r^+(-p)$ — операторы уничтожения. Обозначим

$$c_r(-p) = d_r^+(p).$$

Для оператора $\psi(x)$ получаем

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \quad (6.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u^r(p) e^{ipx} c_r(p) dp; \\ \psi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u^r(-p) e^{-ipx} d_r^+(p) dp. \end{aligned} \right\} \quad (6.37a)$$

Отсюда следует, что

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x), \quad (6.38)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \bar{u}^r(-p) e^{ipx} d_r(p) dp, \\ \bar{\psi}^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \bar{u}^r(p) e^{-ipx} c_r^+(p) dp. \end{aligned} \right\} \quad (6.38a)$$

Пусть Φ — собственный вектор гамильтониана, описывающий некоторое состояние квантованного спинорного поля. Из соотношений (6.35) следует, что вектор $c_r^+(p)\Phi$ описывает состояние, в котором имеется дополнительная частица с 4-импульсом p . Далее, если вектор

$$c_r^+(p)c_r^+(p)\Phi \quad (6.39)$$

не равен нулю, то он является собственным вектором гамильтониана и описывает состояние, в котором имеется две частицы в одном и том же квантовом состоянии. Для частиц со спином $1/2$ это, однако, невозможно. В силу принципа Паули в данном квантовом состоянии может находиться не более одной частицы со спином $1/2$.

Перестановочные соотношения для операторов спинорного поля должны быть постулированы, следовательно, так, чтобы такие состояния, как (6.39), были запрещены. Будем предполагать, что операторы спинорного неэрмитова поля подчиняются следующим перестановочным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} [c_r(p), c_{r'}(p')]_+ &= 0, \\ [c_r(p), c_{r'}^\dagger(p')]_+ &= \delta_{rr'} \delta(p-p'), \\ [d_r(p), d_{r'}(p')]_+ &= 0, \\ [d_r(p), d_{r'}^\dagger(p')]_+ &= \delta_{rr'} \delta(p-p'), \\ [c_r(p), d_{r'}(p')]_+ &= 0, \\ [c_r(p), d_{r'}^\dagger(p')]_+ &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Здесь $[A, B]_+ = AB + BA$ — антикоммутатор. Из (6.40) следует, что

$$\left. \begin{aligned} [c_r^\dagger(p), c_{r'}^\dagger(p')]_+ &= 0, [d_r^\dagger(p), d_{r'}^\dagger(p')]_+ = 0, \\ [c_r^\dagger(p), d_{r'}^\dagger(p')]_+ &= 0, [c_r^\dagger(p), d_{r'}(p')]_+ = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.40a)$$

Покажем при этом, что собственные функции гамильтониана удовлетворяют принципу Паули. Обратимся сначала к вопросу о том, каким должен быть гамильтониан квантованного спинорного поля. Если в классическом выражении для энергии (6.30) заменить величины $c_r(p)$, $c_r^*(p)$, ... соответствующими операторами и по аналогии с предыдущими параграфами записать операторы поля в нормальном порядке (оставить знак минус перед вторым членом), то, очевидно, что полученный таким способом гамильтониан может обладать отрицательными (сколь угодно большими по модулю) собственными значениями. Кроме того, если с помощью перестановочных соотношений (6.40) вычислить коммутатор $[d(p), H]$, то мы не получим соотношений (6.35). Определим гамильтониан квантованного спинорного поля следующим образом:

$$H = \int (c_r^\dagger(p) c_r(p) + d_r^\dagger(p) d_r(p)) p_0 dp. \quad (6.41)$$

Очевидно, что собственные значения этого гамильтониана положительны. Вычислим коммутатор $[d_r(p), H]$. С помощью (6.40) получаем

$$\left. \begin{aligned} [d_r(p), c_{r'}^\dagger(p') c_{r'}(p')] &= [d_r(p), c_{r'}^\dagger(p')]_+ c_{r'}(p') = 0, \\ [d_r(p), d_{r'}^\dagger(p') d_{r'}(p')] &= [d_r(p), d_{r'}^\dagger(p')]_+ d_{r'}(p') = \delta(p-p') d_r(p'). \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

Из (6.41) и (6.42) находим, что $[d_r(p), H] = p_0 d_r(p)$. Аналогичным образом нетрудно проверить, что гамильтониан (6.41) удовлетворяет и остальным соотношениям (6.35).

Чтобы сформулировать рецепт, который позволил бы получить гамильтониан (6.41) из классического выражения для энергии поля (6.30), положим, что

$$\left. \begin{aligned} N(d_r(p) d_r^+(p')) &= -d_r^+(p') d_r(p), \\ N(c_r^+(p') c_r(p)) &= c_r^+(p') c_r(p). \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Оператор N определен следующим образом. При действии на произведение двух операторов скалярного (псевдоскалярного) поля оператор N расставляет их в нормальном порядке (оператор уничтожения справа от оператора рождения); при действии на произведение двух операторов спинорного поля оператор N расставляет их в нормальном порядке, и, если при этом производится перестановка операторов поля, произведение операторов, записанных в нормальном порядке, умножается на (-1) . Определение оператора N в общем случае n множителей будет дано впоследствии.

Предположим, что для получения оператора энергии, а также операторов всех других физических величин необходимо заменить функции в соответствующих классических выражениях операторами поля и подействовать на произведение операторов поля оператором N . Из классического выражения (6.30) получим при этом оператор (6.41), а из (6.31) и (6.32) находим следующие выражения для операторов импульса и заряда:

$$P_k = \int (c_r^+(p) c_r(p) + d_r^+(p) d_r(p)) p_k dp, \quad (6.44)$$

$$Q = e \int (c_r^+(p) c_r(p) - d_r^+(p) d_r(p)) dp. \quad (6.45)$$

Пусть Φ_0 — вектор состояния, отвечающий минимальной энергии. Тогда

$$c_r(p) \Phi_0 = 0, \quad (6.46)$$

$$d_r(p) \Phi_0 = 0.$$

Из (6.41), (6.44), (6.45) и (6.46) получаем, что

$$H\Phi_0 = 0, \quad P\Phi_0 = 0, \quad Q\Phi_0 = 0.$$

Таким образом, Φ_0 — вектор состояния вакуума. Ясно, что векторы $c_r^+(p) \Phi_0$ и $d_r^+(p) \Phi_0$ описывают состояния с энергией p_0 . Покажем, что эти векторы состояния являются также собственными векторами оператора импульса (6.44) и оператора заряда (6.45). С помощью перестановочных соотношений (6.40) получаем

$$\left. \begin{aligned} [P, c_r^+(p)] &= p c_r^+(p), \quad [Q, c_r^+(p)] = e c_r^+(p), \\ [P, d_r^+(p)] &= p d_r^+(p), \quad [Q, d_r^+(p)] = -e d_r^+(p). \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Далее, используя стандартный прием (замена произведения операторов коммутатором плюс произведение операторов, записанных в обратном порядке), легко находим

$$\left. \begin{aligned} P c_r^+ (p) \Phi_0 &= p c_r^+ (p) \Phi_0, \\ P d_r^+ (p) \Phi_0 &= p d_r^+ (p) \Phi_0, \\ Q c_r^+ (p) \Phi_0 &= e c_r^+ (p) \Phi_0, \\ Q d_r^+ (p) \Phi_0 &= -e d_r^+ (p) \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

Таким образом, вектор состояния $c_r^+ (p) \Phi_0$ описывает частицу с 4-импульсом p , массой $m = \sqrt{p_0^2 - \mathbf{p}^2}$ и зарядом e , а вектор состояния $d_r^+ (p) \Phi_0$ — античастицу (та же масса, противоположный заряд) с 4-импульсом p .

Покажем, что эти векторы являются также собственными векторами оператора проекции спина на направление \mathbf{p} . Получим сначала выражение для спина поля в классической теории. В качестве независимых динамических переменных мы выбрали $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. При преобразованиях Лоренца

$$x'_\mu = a_{\mu\rho} x_\rho$$

эти спиноры преобразуются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \psi' (x') &= L \psi (x), \\ \bar{\psi}' (x') &= \bar{\psi} (x) L^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

где матрица L удовлетворяет условию

$$L^{-1} \gamma_\mu L = a_{\mu\rho} \gamma_\rho. \quad (6.50)$$

В случае, когда коэффициенты $a_{\mu\rho}$ равны

$$a_{\mu\rho} = \delta_{\mu\rho} + \varepsilon_{\mu\rho}, \quad (6.51)$$

где $\varepsilon_{\mu\rho} = -\varepsilon_{\rho\mu}$ — бесконечно малая величина [см. (3.18) и далее], с точностью до линейных по ε членов имеем

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\rho} \varepsilon_{\mu\rho}, \\ L^{-1} &= 1 - \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\rho} \varepsilon_{\mu\rho}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Подставляя (6.51) и (6.52) в (6.50), находим, что матрица $\Sigma^{\mu\rho}$ должна подчиняться соотношению

$$[\gamma_\nu, \Sigma^{\mu\rho}] = \delta_{\nu\mu} \gamma_\rho - \delta_{\nu\rho} \gamma_\mu. \quad (6.53)$$

Используя перестановочные соотношения для матриц γ_μ , нетрудно убедиться, что (6.53) удовлетворяется при

$$\Sigma^{\mu\rho} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma_\mu) = i \frac{1}{2} \sigma_{\mu\rho}. \quad (6.54)$$

Здесь

$$\sigma_{\mu\rho} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma_\mu). \quad (6.55)$$

Из (6.49) и (6.52) находим, что

$$\left. \begin{aligned} \psi'(x') &= \left(1 + \frac{1}{2} \Sigma^{\mu\rho} \varepsilon_{\mu\rho} \right) \psi(x), \\ \bar{\psi}'(x') &= \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{\Sigma}^{\mu\rho} \varepsilon_{\mu\rho} \right) \bar{\psi}(x). \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

Повторяя рассуждения третьего параграфа и учитывая (6.56), получаем в случае комплексного спинорного поля следующее выражение для тензора $S_{\mu\rho}$:

$$S_{\mu\rho} = i \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4}} \Sigma^{\mu\rho}_{\sigma'\sigma} \psi_\sigma dx - i \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}_{\sigma'}}{\partial x_4}} \tilde{\Sigma}^{\mu\rho}_{\sigma'\sigma} \bar{\psi}_\sigma dx. \quad (6.57)$$

Из (6.7), (6.8) и (6.57) находим, что

$$S_{\mu\rho} = \frac{1}{4} \int \bar{\psi} [\gamma_4 \sigma_{\mu\rho} + \sigma_{\mu\rho} \gamma_4] \psi dx. \quad (6.58)$$

Отсюда следует, что

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \int \psi^\dagger \sigma_{ik} \psi dx, \quad S_{i4} = S_{4i} = 0 \quad (6.59)$$

(i, k принимают значения 1, 2, 3).

Определим следующим образом вектор спина поля:

$$S_i = \frac{1}{2} e_{ikl} S_{kl}. \quad (6.60)$$

Используя (6.59) и (6.55), получаем

$$S_i = \frac{1}{2} \int \psi^\dagger \Sigma_i \psi dx, \quad (6.61)$$

где матрицы Σ_i равны

$$\Sigma_i = \frac{1}{2} e_{ikl} \sigma_{kl} = \frac{1}{2i} e_{ikl} \gamma_k \gamma_l = \frac{1}{2i} e_{ikl} \alpha_k \alpha_l. \quad (6.62)$$

Очевидно, что Σ_i — эрмитовы матрицы. Из перестановочных соотношений для матриц γ_i нетрудно видеть, что матрицы $\frac{1}{2} \Sigma_i$

удовлетворяют перестановочным соотношениям оператора момента количества движения

$$[\Sigma_i, \Sigma_k] = 2ie_{ikl} \Sigma_l. \quad (6.63)$$

Отметим, что в представлении Дирака—Паули 4×4 -матрицы Σ_i равны

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad (6.64)$$

где σ_i — 2×2 -матрицы Паули.

Заменяя в выражении (6.61) $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$ операторами и действуя на произведение операторов поля оператором N , получаем оператор спина квантованного спинорного поля. Вычислим коммутаторы

$$[c_r(p), S_n], [d_r(p), S_n]. \quad (6.65)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ — единичный вектор в направлении импульса \mathbf{p} . Подставляя в выражение для оператора спина разложения (6.37) и (6.38), вычисляя коммутаторы операторов поля и выполняя соответствующие интегрирования, получаем

$$[c_r(p), S_n] = \frac{1}{2} \left((u_+^r(\mathbf{p}))^+ \Sigma n u_+^{r'}(\mathbf{p}) \right) c_{r'}(p) + \\ + \frac{1}{2} e^{2ip_0 x_0} \left((u_+^r(\mathbf{p}))^+ \Sigma n u_-^{r'}(\mathbf{p}) \right) d_{r'}^+(p') \Big|_{\mathbf{p}' = -\mathbf{p}}. \quad (6.66)$$

Спиноры $u_+^r(\mathbf{p})$ и $u_-^r(\mathbf{p})$ являются собственными функциями оператора $(\Sigma \mathbf{n})$:

$$\Sigma n u_+^r(\mathbf{p}) = r u_+^r(\mathbf{p}), \quad (6.67)$$

$$\Sigma n u_-^r(\mathbf{p}) = r u_-^r(\mathbf{p}).$$

Из (6.66) и (6.67), учитывая условия нормировки (6.18) и ортогональности (6.21), получаем

$$[c_r(p), S_n] = \frac{1}{2} r c_r(p). \quad (6.68)$$

Аналогичным образом находим, что

$$[d_r(p), S_n] = -\frac{1}{2} e^{2ip_0 x_0} \left((u_+^{r'}(-\mathbf{p}))^+ \Sigma n u_-^r(-\mathbf{p}) \right) c_{r'}^+(p') \Big|_{\mathbf{p}' = -\mathbf{p}} - \\ - \frac{1}{2} \left((u_-^{r'}(-\mathbf{p}))^+ \Sigma n u_-^r(-\mathbf{p}) \right) d_{r'}(p). \quad (6.69)$$

Отсюда с помощью (6.67), (6.21) и (6.22) получаем

$$[d_r(p), S_n] = \frac{1}{2} r d_r(p). \quad (6.70)$$

Из (6.68) и (6.70) находим

$$\left. \begin{aligned} [\text{Sn}, c_r^+(p)] &= \frac{1}{2} r c_r^+(p), \\ [\text{Sn}, d_r^+(p)] &= \frac{1}{2} r d_r^+(p). \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

Действуя оператором Sn на векторы состояния $c_r^+(p)\Phi_0$ и $d_r^+(p)\Phi_0$, используя обычный метод и учитывая, что $\text{Sn}\Phi_0=0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \text{Sn} c_r^+(p)\Phi_0 &= ([\text{Sn}, c_r^+(p)] + c_r^+(p)\text{Sn})\Phi_0 = \frac{1}{2} r c_r^+(p)\Phi_0, \\ \text{Sn} d_r^+(p)\Phi_0 &= \frac{1}{2} r d_r^+(p)\Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.72)$$

Таким образом, вектор состояния $c_r^+(p)\Phi_0$ описывает частицу с зарядом e , 4-импульсом p и проекцией спина на направление импульса, равной $r/2$, а вектор $d_r^+(p)\Phi_0$ — античастицу с зарядом $-e$, 4-импульсом p и проекцией спина на направление импульса $r/2$.

Продолжим теперь рассмотрение собственных векторов гамильтониана. Очевидно, что вектор состояния $c_{r_2}^+(p_2)c_{r_1}^+(p_1)\Phi_0$ является собственным вектором гамильтониана (6.41), а также собственным вектором операторов импульса и заряда. Этот вектор описывает две частицы с 4-импульсами p_1 и p_2 . Вектор состояния $d_{r'}^+(p')c_r^+(p)\Phi_0$ описывает частицу с 4-импульсом p и античастицу с 4-импульсом p' . Таким образом, если на вектор вакуумного состояния Φ_0 действовать операторами рождения c^+ и d^+ , то мы будем получать собственные векторы гамильтониана (6.41), описывающие свободные частицы и античастицы в состояниях с определенными импульсами.

Рассмотрим, например, вектор состояния

$$d_{r'}^+(p')c_{r_1}^+(p_1)c_{r_2}^+(p_2)c_{r_3}^+(p_3)\Phi_0, \quad (6.73)$$

описывающий три частицы и одну античастицу. Используя перестановочные соотношения (6.40), получаем

$$d_{r'}^+(p')c_{r_1}^+(p_1)c_{r_2}^+(p_2)c_{r_3}^+(p_3)\Phi_0 = -d_{r'}^+(p')c_{r_3}^+(p_3)c_{r_2}^+(p_2)c_{r_1}^+(p_1)\Phi_0.$$

Если положить $p_1 = p_3$ и $r_1 = r_3$, то вектор (6.73) обращается в нуль. Ясно, что и в общем случае вектор состояния обращается в нуль, если по крайней мере два оператора рождения частицы (либо два оператора рождения античастицы) обладают одинаковыми p и r . Следовательно, перестановочные соотношения для операторов спинорного поля постулированы в соответствии с принципом Паули (в состоянии с данным импульсом и проекцией спина не может находиться более одной частицы).

§ 7. Электромагнитное поле

Свободное электромагнитное поле описывается потенциалом $A_\mu(x)$, удовлетворяющим уравнению

$$\square A_\mu = 0 \quad (7.1)$$

и условию Лоренца

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7.2)$$

Уравнение (7.1) при условии, что потенциал удовлетворяет (7.2), эквивалентно свободному уравнению Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (7.3)$$

где $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ — тензор напряженности поля. Если потенциал A_μ заменить

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}, \quad (7.4)$$

где Λ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\square \Lambda = 0, \quad (7.5)$$

то

$$\square A'_\mu = 0, \quad \frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7.6)$$

Таким образом, потенциал электромагнитного поля определяется уравнениями (7.1) и (7.2) неоднозначно. Потенциалы A_μ и A'_μ дают, однако, один и тот же тензор напряженности поля (градиентная инвариантность).

В § 2 было показано, что лагранжиан свободного электромагнитного поля может быть выбран следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (7.7)$$

Нетрудно видеть, что

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(A_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) - \frac{1}{2} A_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right). \quad (7.8)$$

Последний член в этом выражении равен нулю в силу условия Лоренца. Член $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(A_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)$ не дает вклада в вариацию действия.

Следовательно, лагранжианы (7.7) и

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (7.9)$$

приводят к одним и тем же уравнениям поля. Примем для лагранжиана свободного электромагнитного поля выражение (7.9). Используя общие формулы § 3, из (7.9) находим, что тензор энергии—импульса электромагнитного поля равен

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu}} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} \delta_{\mu\nu}. \quad (7.10)$$

Для вектора энергии—импульса получаем

$$P_\mu = i \int T_{\mu 4} dx = i \int \left[-\frac{\partial A_\rho}{\partial x_4} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} \delta_{4\mu} \right] dx. \quad (7.11)$$

Разложим потенциал $A_\mu(x)$ по плоским волнам. Учитывая уравнение поля (7.1), получаем

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{ikx - ik_0 x_0} A_\mu^{(+)}(k) dk + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{ikx + ik_0 x_0} A_\mu^{(-)}(k) dk, \quad (7.12)$$

где $k_0 = |\mathbf{k}|$. Первый член представляет собой положительно-частотную часть потенциала, а второй—отрицательно-частотную часть. Делая во втором интеграле замену $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, перепишем разложение (7.12) следующим образом:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left[A_\mu^{(+)}(k) e^{ikx} + A_\mu^{(-)}(-k) e^{-ikx} \right] dk. \quad (7.12a)$$

Определим 4-векторы

$$e^\lambda(k) = (e_\lambda(k), 0), \quad e^4(k) = (0, i), \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (7.13)$$

Здесь $e_3(k) = k/k_0 = \mathbf{x}$ —единичный вектор, направленный по \mathbf{k} , а $e_1(k)$ и $e_2(k)$ —единичные векторы, ортогональные друг другу и вектору \mathbf{k} . Имеем

$$e_\lambda(k) e_{\lambda'}(k) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3. \quad (7.14)$$

Очевидно, что 4-векторы $e^\lambda(k)$ удовлетворяют условиям

$$(e^\lambda(k) e^{\lambda'}(k)) = \delta_{\lambda\lambda'} \eta_\lambda, \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4) \quad (7.15)$$

$$(e^\lambda(k) k) = 0, \quad (\lambda = 1, 2), \quad (e^3(k) k) = k_0, \quad (e^4(k) k) = -k_0. \quad (7.16)$$

Множитель η_λ определен следующим образом:

$$\eta_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 1, 2, 3, \\ -1, & \lambda = 4. \end{cases} \quad (7.17)$$

Отметим, что в (7.15) по повторяющимся индексам λ суммирование производить не следует.

Коэффициенты $A_\mu^{(+)}(k)$ и $A_\mu^{(-)}(-k)$ в выражении (7.12) могут быть разложены по полной системе векторов $e^\lambda(k)$

$$\left. \begin{aligned} A_\mu^{(+)}(k) &= \sum_{\lambda=1}^4 a_\lambda(k) e_\mu^\lambda(k), \\ A_\mu^{(-)}(-k) &= \sum_{\lambda=1}^4 a_\lambda(-k) e_\mu^\lambda(k). \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Из (7.13) и (7.18) следует, что

$$\left. \begin{aligned} a_\lambda(k) &= (e^\lambda(k) A^{(+)}(k)) = (e_\lambda(k) A^{(+)}(k)), \quad \lambda = 1, 2, \\ a_3(k) &= (\kappa A^{(+)}(k)), \\ a_4(k) &= -i A_4^{(+)}(k) = A_0^{(+)}(k). \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Таким образом, $a_3(k)$ — проекция вектора $A^{(+)}(k)$ на направление вектора k (продольная компонента вектора $A^{(+)}(k)$); $a_1(k)$ и $a_2(k)$ — проекции вектора $A^{(+)}(k)$ на векторы, перпендикулярные k (поперечные компоненты $A^{(+)}(k)$), а $a_4(k)$ — фурье-компонента скалярного потенциала $A_0^{(+)}(x)$. Аналогичным образом находим, что $a_1(-k)$, $a_2(-k)$ и $a_3(-k)$ — поперечные и продольная компоненты вектора $A^{(-)}(-k)$, а $a_4(-k) = A_0^{(-)}(-k)$.

Подставляя разложения (7.18) в (7.12а), получаем

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(k) [a_\lambda(k) e^{ikx} + a_\lambda(-k) e^{-ikx}] dk. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Пространственная часть 4-вектора A_μ действительна, а временная — мнимая. Таким образом,

$$A_\mu^* = A_\mu \eta_\mu \quad (7.21)$$

(по μ суммирование не производится). Подставляя в (7.21) разложение (7.20) и учитывая, что

$$(e_\mu^\lambda(k))^* = e_\mu^\lambda(k) \eta_\mu,$$

получаем

$$a_\lambda(-k) = a_\lambda^*(k). \quad (7.22)$$

Окончательно находим следующее разложение для потенциала:

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{\lambda}(k) [a_{\lambda}(k) e^{ikx} + a_{\lambda}^{*}(k) e^{-ikx}] dk. \quad (7.23)$$

Посмотрим теперь, какие соотношения между $a_{\lambda}(k)$ вытекают из условия Лоренца. Имеем

$$\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0 = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 (e^{\lambda}(k) k) [a_{\lambda}(k) e^{ikx} - a_{\lambda}^{*}(k) e^{-ikx}] dk. \quad (7.24)$$

Из (7.24) следует, что

$$\sum_{\lambda=1}^4 (e^{\lambda}(k) k) a_{\lambda}(k) = 0, \quad (7.25)$$

откуда с учетом (7.16) получаем]

$$a_3(k) = a_4(k). \quad (7.26)$$

Таким образом, электромагнитное поле может быть описано комплексными функциями $a_{\lambda}(k)$ — функциями переменной k (фурье-компонентами потенциала), удовлетворяющими вследствие (7.2) соотношению (7.26). Подставим в выражение для энергии поля разложение (7.23). Выполняя соответствующие интегрирования и используя (7.15), получаем

$$\begin{aligned} H &= \int \sum_{\lambda, \lambda'=1}^4 a_{\lambda}^{*}(k) a_{\lambda'}(k) (e^{\lambda}(k) e^{\lambda'}(k)) k_0 dk = \\ &= \int \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^{*}(k) a_{\lambda}(k) \eta_{\lambda} k_0 dk. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Члены $a_3^{*}(k)a_3(k)$ и $a_4^{*}(k)a_4(k)$ (вклады продольных и скалярных компонент), входящие в (7.27) с разными знаками, вследствие (7.26) сокращаются, и получаем окончательно следующее выражение для энергии свободного электромагнитного поля:

$$H = \int \sum_{\lambda=1,2} a_{\lambda}^{*}(k) a_{\lambda}(k) k_0 dk. \quad (7.28)$$

Очевидно, что H может принимать только положительные значения. Отметим, что энергия поля становится положительно определенной величиной лишь после того, как на потенциал наложено дополнительное условие Лоренца.

Для импульса свободного электромагнитного поля получаем следующее выражение:

$$P_i = \int \sum_{\lambda=1,2} a_{\lambda}^{*}(k) a_{\lambda}(k) k_i dk. \quad (7.29)$$

Таким образом, в энергию и импульс поля вносят вклад только поперечные компоненты потенциала. На этом мы закончим рассмотрение классического электромагнитного поля и перейдем к квантовой теории.

Будем считать $a_\lambda(k)$ и $a_\lambda(-k)$ операторами. Тогда $A_\mu(x)$ — также оператор. Оператор $A_\mu(x)$ равен

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(k) [a_\lambda(k) e^{ikx} + a_\lambda(-k) e^{-ikx}] dk. \quad (7.30)$$

Из (7.30) очевидно, что оператор $A_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\square A_\mu(x) = 0. \quad (7.31)$$

В классическом случае потенциал удовлетворяет условиям (7.21). В соответствии с этим потребуем, чтобы оператор $A(x)$ был эрмитовым [$A^+(x) = A(x)$], а оператор $A_4(x)$ — антиэрмитовым [$A_4^+(x) = -A_4(x)$]. Эти условия на оператор $A_\mu(x)$ могут быть записаны следующим образом:

$$A_\mu^+(x) = A_\mu(x) \eta_\mu \quad (7.32)$$

(по μ суммирование не производится). Подставляя в (7.32) разложение (7.30), находим, что

$$a_\lambda(-k) = a_\lambda^+(k). \quad (7.33)$$

Таким образом,

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x), \quad (7.34)$$

$$\left. \begin{aligned} A_\mu^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 a_\lambda(k) e_\mu^\lambda(k) e^{ikx} dk, \\ A_\mu^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 a_\lambda^+(k) e_\mu^\lambda(k) e^{-ikx} dk. \end{aligned} \right\} \quad (7.34a)$$

Далее, $A_\mu(x)$ является оператором в представлении взаимодействия и удовлетворяет, следовательно, уравнению

$$i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_0} = [A_\mu(x), H], \quad (7.35)$$

где H — гамильтониан свободного электромагнитного поля. Подставляя разложения (7.34) в (7.35), получаем

$$k_0 a_\lambda(k) = [a_\lambda(k), H], \quad (7.36)$$

$$-k_0 a_\lambda^+(k) = [a_\lambda^+(k), H]. \quad (7.37)$$

Используя выражения (7.11) и (7.34), находим для операторов энергии и импульса квантованного электромагнитного поля

$$H = \int \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^{\dagger}(k) a_{\lambda}(k) \eta_{\lambda} k_0 dk, \quad (7.38)$$

$$P_i = \int \sum_{\lambda=1}^4 a_{\lambda}^{\dagger}(k) a_{\lambda}(k) \eta_{\lambda} k_i dk. \quad (7.39)$$

Обсудим теперь перестановочные соотношения для операторов поля. Будем предполагать, что операторы $a_{\lambda}(k)$ и $a_{\lambda}(k')$ коммутируют, т. е.

$$[a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}(k')] = 0. \quad (7.40a)$$

Из (7.40a) получаем

$$[a_{\lambda}^{\dagger}(k), a_{\lambda'}^{\dagger}(k')] = 0. \quad (7.40b)$$

Используя (7.38), (7.40), из (7.36) находим

$$k_0 a_{\lambda}(k) = \int \sum_{\lambda'=1}^4 [a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}^{\dagger}(k')] a_{\lambda'}(k') \eta_{\lambda'} k_0' dk'. \quad (7.41)$$

Отсюда следует, что

$$[a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}^{\dagger}(k')] = \delta(k - k') \delta_{\lambda\lambda'} \eta_{\lambda}. \quad (7.40b)$$

Итак, для операторов электромагнитного поля будем постулировать перестановочные соотношения (7.40). Отметим существенное отличие перестановочных соотношений для $a_{\lambda}(k)$ и $a_{\lambda'}^{\dagger}(k')$ при λ и λ' , принимающих значения 1, 2 и 3, и перестановочных соотношений для $a_4(k)$ и $a_4^{\dagger}(k')$ [знак минус в правой части (7.40b) при $\lambda = \lambda' = 4$]. Это отличие связано с тем, что член $a_4^{\dagger}(k)a_4(k)$ входит в гамильтониан со знаком минус.

Используя перестановочные соотношения (7.40), получаем

$$[a_{\lambda}(k), P_i] = k_i a_{\lambda}(k). \quad (7.41a)$$

Отсюда находим также

$$[a_{\lambda}^{\dagger}(k), P_i] = -k_i a_{\lambda}^{\dagger}(k). \quad (7.41b)$$

Перейдем теперь к формулировке условия Лоренца в квантовой теории. Для классических величин из условия Лоренца вытекает соотношение (7.26). При квантовании все операторы $a_{\lambda}(k)$ считались независимыми. Чтобы обеспечить выполнение условия Лоренца для матричных элементов, потребуем

$$\frac{\partial A_{\mu}^{(+)}}{\partial x_{\mu}} \Phi = 0, \quad (7.42a)$$

где Φ — любой вектор, описывающий состояние квантованного электромагнитного поля.

Отсюда следует, что

$$\Phi_1^+ \left(\frac{\partial A_\mu^{(+)}}{\partial x_\mu} \right)^+ = \Phi_1^+ \frac{\partial A_\mu^{(-)}}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7.426)$$

Складывая (7.42а) и (7.42б), получаем

$$\left(\Phi_1^+ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \Phi \right) = 0. \quad (7.43)$$

Таким образом, если условие (7.42а) выполняется для любых векторов состояния электромагнитного поля, то матричные элементы оператора $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$ обращаются в нуль. Из (7.43) и (7.31) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (\Phi_1^+ F_{\mu\nu}(x) \Phi) = 0. \quad (7.44)$$

Подставляя в (7.42) разложение (7.35), заключаем, что векторы Φ , описывающие состояния квантованного электромагнитного поля, обязаны удовлетворять условиям

$$\sum_{\lambda=1}^4 (e^\lambda k) a_\lambda(k) \Phi = k_0 (a_3(k) - a_4(k)) \Phi = 0 \quad (7.45а)$$

(\mathbf{k} — произвольный вектор). Отсюда следует, что

$$\Phi^+ (a_3^+(k) - a_4^+(k)) = 0. \quad (7.45б)$$

Построим теперь систему векторов, описывающих возможные состояния квантованного электромагнитного поля. Из постулированных перестановочных соотношений (7.40) следует, что не существует такого вектора состояния Φ , для которого $a_4(k)\Phi = 0$. Действительно, рассмотрим перестановочное соотношение

$$[a_4(k), a_4^+(k')] = -\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Умножим его слева на $\Phi^+ h^*(\mathbf{k})$, а справа на $h(\mathbf{k}')\Phi$ и проинтегрируем по \mathbf{k} и \mathbf{k}' ($h(\mathbf{k})$ — произвольная функция \mathbf{k} , Φ — некоторый вектор состояния). Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\int h(\mathbf{k}) a_4^+(k) d\mathbf{k} \Phi \right)^+ \left(\int h(\mathbf{k}) a_4^+(k) d\mathbf{k} \Phi \right) - \\ & - \left(\int h^*(\mathbf{k}) a_4(k) d\mathbf{k} \Phi \right)^+ \left(\int h^*(\mathbf{k}) a_4(k) d\mathbf{k} \Phi \right) = -(\Phi^+ \Phi) \int |h(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Если существует такой вектор состояния Φ , что $a_4(k)\Phi = 0$, то для такого состояния второй член в левой части (7.46) исчезает, и мы приходим к противоречию [слева в (7.46) — положительная величина, а справа — отрицательная]. Таким образом, в принятой нами схеме квантования для любого вектора Φ

$$a_4(k) \Phi \neq 0. \quad (7.47)$$

Из условия Лоренца (7.45) следует также, что для всех допустимых векторов состояния

$$a_3(k) \Phi \neq 0. \quad (7.48)$$

Найдем среднее значение операторов энергии и импульса в состоянии, описываемом некоторым вектором Φ . Используя выражения (7.38) и (7.39) и выделяя члены с $\lambda = 3$ и $\lambda = 4$, имеем

$$\begin{aligned} \langle P_\mu \rangle = (\Phi^+ P_\mu \Phi) = & \left(\Phi^+ \int \sum_{\lambda=1,2} a_\lambda^+(k) a_\lambda(k) k_\mu dk \Phi \right) + \\ & + \left(\Phi^+ \int [a_3^+(k) a_3(k) - a_4^+(k) a_4(k)] k_\mu dk \Phi \right). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Используя условия Лоренца (7.45), получаем

$$(\Phi^+ a_4^+(k) a_4(k) \Phi) = (\Phi^+ a_3^+(k) a_3(k) \Phi).$$

Второй член в правой части (7.49) равен, следовательно, нулю; в результате имеем для среднего значения оператора энергии — импульса

$$\langle P_\mu \rangle = \left(\Phi^+ \int \sum_{\lambda=1,2} a_\lambda^+(k) a_\lambda(k) k_\mu dk \Phi \right). \quad (7.50)$$

Таким образом, только фотоны с поперечной поляризацией [$e^1(k)$ и $e^2(k)$] вносят вклад в энергию и импульс электромагнитного поля. Очевидно, что состояние, в котором отсутствуют фотоны с поперечной поляризацией, отвечает минимальной энергии. Пусть Φ_0 — вектор состояния, удовлетворяющий условиям

$$a_\lambda(k) \Phi_0 = 0, \quad \lambda = 1, 2. \quad (7.51)$$

Из (7.50) заключаем, что энергия и импульс поля в состоянии Φ_0 равны нулю (Φ_0 — вакуумное состояние). Условие (7.51) означает, что в состоянии, описываемом Φ_0 , отсутствуют фотоны с поперечной поляризацией.

Действуя на вектор Φ_0 операторами рождения $a_\lambda^+(k)$, можно построить систему векторов состояния, описывающих свободные фотоны с определенными 4-импульсами.

Наша цель состоит в вычислении матричных элементов перехода между состояниями свободных частиц — матричных элементов S -матрицы, которая [см. (1.38)] определяется гамильтонианом взаимодействия. В гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля с другими полями могут входить операторы $A_\mu(x)$ и $F_{\mu\nu}(x)$. При нахождении соответствующих матричных элементов S -матрицы будут, следовательно, вычисляться матричные элементы произведения операторов поля $A(x)$ и их производных. В следующей главе будет показано, что вычисление матричных элементов S -матрицы может быть сведено к вычислению матричных элементов нормальных произведений операторов поля (все операторы уничтожения справа от операторов рождения). При вычислении матричных элементов $(\Phi_1^+ S \Phi)$

условимся операторами уничтожения действовать направо, на функцию Φ , а операторами рождения — налево, на функцию Φ_1^+ .

Рассмотрим вначале результат действия оператора $A_\mu^{(+)}(x)$ на некоторый вектор состояния Φ . Представим оператор $\sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(k) a_\lambda(k)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(k) a_\lambda(k) = & \sum_{\lambda=1,2} e_\mu^\lambda(k) a_\lambda(k) + e_\mu^4(k) (a_4(k) - a_3(k)) + \\ & + (e_\mu^3(k) + e_\mu^4(k)) a_3(k). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Из (7.13) нетрудно видеть, что

$$e_\mu^3(k) + e_\mu^4(k) = k_\mu / k_0. \quad (7.53)$$

С помощью (7.52) и (7.53) находим, что оператор $A_\mu^{(+)}(x)$ равен

$$A_\mu^{(+)}(x) = A_\mu^{\text{tr} (+)}(x) + \frac{\partial \Lambda^{(+)}(x)}{\partial x_\mu} + L_\mu(x). \quad (7.54)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A_\mu^{\text{tr} (+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{V 2k_0} \sum_{\lambda=1,2} e_\mu^\lambda(k) a_\lambda(k) e^{ikx} d\mathbf{k}, \\ \Lambda^{(+)}(x) &= -i \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{V 2k_0} \frac{1}{k_0} a_3(k) e^{ikx} d\mathbf{k}, \\ L_\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{V 2k_0} e_\mu^4(k) (a_4(k) - a_3(k)) e^{ikx} d\mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

Из (7.45) следует, что

$$L_\mu(x) \Phi = 0. \quad (7.56)$$

Вследствие градиентной инвариантности член $\frac{\partial \Lambda^{(+)}(x)}{\partial x_\mu}$ может быть опущен [из (7.55) ясно, что $\square \Lambda^{(+)}(x) = 0$].

Рассмотрим теперь результат действия оператора $A_\mu^{(-)}(x)$ на вектор состояния Φ_1^+ . Аналогично (7.54) получаем

$$A_\mu^{(-)}(x) = A_\mu^{\text{tr} (-)}(x) + \frac{\partial \Lambda^{(-)}(x)}{\partial x_\mu} - L_\mu^+(x), \quad (7.57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1,2} e_{\mu}^{\lambda}(k) a_{\lambda}^{+}(k) e^{-ikx} dk, \\ \Lambda^{(-)}(x) &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \frac{1}{k_0} a_3^{+}(k) e^{-ikx} dk. \end{aligned} \right\} \quad (7.58)$$

Используя (7.45б), находим

$$\Phi_1^{+} L_{\mu}^{+}(x) = 0. \quad (7.59)$$

Вследствие градиентной инвариантности производная $\frac{\partial \Lambda^{(-)}}{\partial x_{\mu}}$ может быть опущена.

Из изложенного ясно, что при вычислении матричных элементов перехода между физическими состояниями, удовлетворяющими условиям Лоренца (7.45), следует учесть только A_{μ}^{tr} , т. е. ту часть оператора электромагнитного поля, которая отвечает рождению и уничтожению квантов с поперечной поляризацией.

Перейдем теперь к построению системы векторов, описывающих состояния квантованного поля. На вектор Φ_0 будем действовать операторами $a_{\lambda}^{+}(k)$. Из условия Лоренца (7.45) следует, что операторы $a_3^{+}(k)$ и $a_4^{+}(k)$ могут входить при этом только в комбинации $a_3^{+}(k) - a_4^{+}(k)$. Действительно, подействуем на вектор состояния

$$\Phi_1 = (\alpha a_3^{+}(k) + \beta a_4^{+}(k)) \Phi, \quad (7.60)$$

где Φ — вектор, удовлетворяющий (7.45), оператором $a_3(k') - a_4(k')$. Получаем

$$\begin{aligned} (a_3(k') - a_4(k')) \Phi_1 &= \{ [(a_3(k') - a_4(k')) (\alpha a_3^{+}(k) + \beta a_4^{+}(k))] + \\ &+ (\alpha a_3^{+}(k) + \beta a_4^{+}(k)) (a_3(k') - a_4(k')) \} \Phi. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Второй член в фигурных скобках при действии на Φ дает нуль. Из перестановочных соотношений (7.40) нетрудно видеть, что первый член равен нулю, и, следовательно, выполняется условие (7.45), если $\beta = -\alpha$.

Рассмотрим теперь матричный элемент $(\Phi_2^{+} S \Phi_1)$, где

$$\Phi_1 = (a_3^{+}(k) - a_4^{+}(k)) \Phi$$

[Φ и Φ_2 — любые векторы состояния, удовлетворяющие (7.45)].

Как мы видели, вследствие градиентной инвариантности и условия Лоренца в S -матрицу могут входить операторы $a_{\lambda}(k)$ и $a_{\lambda}^{+}(k)$ только с $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$. Таким образом, используя (7.45б), получаем

$$(\Phi_2^{+} S \Phi_1) = (\Phi_2^{+} (a_3^{+}(k) - a_4^{+}(k)) S \Phi) = 0. \quad (7.62)$$

Аналогично нетрудно показать, что

$$(\Phi_2^+ S\Phi) = 0, \quad (7.63)$$

где

$$\Phi_2 = (a_3^+(k) - a_4^+(k)) \Phi_1$$

[Φ_1 и Φ — любые векторы состояния, удовлетворяющие условиям (7.45)]. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} (\Phi_2^+ S\Phi) &= (\Phi_1^+ (a_3(k) - a_4(k)) S\Phi) = \\ &= (\Phi_1^+ S(a_3(k) - a_4(k)) \Phi) = 0. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Таким образом, вследствие градиентной инвариантности и условий Лоренца матричный элемент S -матрицы обращается в нуль, если либо начальный, либо конечный вектор состояния содержит операторы $(a_3^+(k) - a_4^+(k))$.

Векторы, описывающие состояния квантованного электромагнитного поля и дающие отличные от нуля матричные элементы перехода, имеют, следовательно, вид

$$\begin{aligned} \Phi_{n(k_m, \lambda_m) \dots n(k_1, \lambda_1)} &= \\ &= a_{\lambda_m}^+(k_m) \dots a_{\lambda_m}^+(k_m) \dots a_{\lambda_1}^+(k_1) \dots a_{\lambda_1}^+(k_1) \Phi_0. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Здесь индексы $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ могут принимать значения 1 и 2. Вектор (7.65) описывает состояние с $(n(k_m, \lambda_m))$ квантами с 4-импульсом k_m и поляризацией $e^{\lambda_m}(k_m)$, $n(k_{m-1}, \lambda_{m-1})$ квантами с 4-импульсом k_{m-1} и поляризацией $e^{\lambda_{m-1}}(k_{m-1})$ и т. д.

Разложение хронологических произведений по нормальным

§ 8. Гамильтонианы взаимодействия. Нормальные и хронологические произведения операторов поля

Наша следующая задача — вычисление матричных элементов перехода между состояниями, описывающими свободные частицы с определенными импульсами. Прежде чем приступить к ее решению, докажем теорему, которая позволит представить *хронологические произведения* операторов поля, входящие в S -матрицу, в чрезвычайно удобной для вычисления матричных элементов форме (теорема Вика).

S -матрица определяется гамильтонианом взаимодействия [см. (1.38)]. Рассмотрим простейшие гамильтонианы взаимодействия. Начнем с рассмотрения взаимодействия электромагнитного поля $A(x)$ и комплексного спинорного поля $\psi(x)$. Электромагнитный потенциал $A(x)$ должен входить в лагранжиан системы таким образом, чтобы выполнялась градиентная инвариантность. Градиентная инвариантность будет обеспечена, если электромагнитный потенциал вводится путем следующей замены в лагранжиане свободного спинорного поля [см. (3.48)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} &\rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \right) \psi, \\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} &\rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu \right) \bar{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Из (6.3) получаем для лагранжиана рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \left\{ \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \psi \right) + m \bar{\psi} \psi \right] - \right. \\ & \left. - \left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} + ieA_\mu \bar{\psi} \right) \gamma_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \right] \right\} + \mathcal{L}_{0e}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где \mathcal{L}_{0e} — лагранжиан свободного электромагнитного поля [выражение (7.7)]. Запишем лагранжиан (8.2) в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I. \quad (8.3)$$

Здесь \mathcal{L}_0 — сумма лагранжианов свободных спинорного и электромагнитного полей, а \mathcal{L}_I — лагранжиан взаимодействия. Из (8.2)

и (8.3) получаем

$$\mathcal{L}_I(x) = ie \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu(x). \quad (8.4)$$

С помощью общего выражения для тока (3.40), используя (8.2), находим 4-вектор тока:

$$j_\mu(x) = ie \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \quad (8.5)$$

Таким образом, лагранжиан взаимодействия спинорного и электромагнитного полей имеет вид

$$\mathcal{L}_I(x) = j_\mu(x) A_\mu(x). \quad (8.6)$$

Мы получили хорошо известное из классической физики выражение.

Найдем теперь гамильтониан рассматриваемой системы. Из общего выражения (3.4) получаем, что плотность энергии равна

$$\mathcal{H} = T_{44} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4}} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_4}} \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\mu}{\partial x_4}} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} - \mathcal{L}. \quad (8.7)$$

Лагранжиан взаимодействия (8.4) не содержит производных полей и не дает вклада в первые три члена выражения (8.7). Получаем

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mathcal{L}_I. \quad (8.8)$$

Здесь \mathcal{H}_0 — сумма плотностей гамильтонианов свободных полей:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4}} \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_4}} \frac{\partial \bar{\psi}_\sigma}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \frac{\partial A_\mu}{\partial x_4}} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} - \mathcal{L}_0.$$

Из (8.8) следует, что гамильтониан взаимодействия комплексного спинорного и электромагнитного полей

$$\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) = -ie \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu(x). \quad (8.9)$$

Заменяя в этом выражении функции $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $A_\mu(x)$ операторами [формулы (6.38) и (7.35)] и действуя на произведение операторов поля оператором N , получаем гамильтониан взаимодействия в квантовой теории поля (гамильтониан взаимодействия γ -квантов и электронов-позитронов). Отметим, что в выбранных нами единицах $e^2/4\pi \simeq 1/137$.

В качестве следующего примера рассмотрим взаимодействие комплексного спинорного поля $\psi(x)$ и действительного псевдоскалярного поля $\phi(x)$ (например, взаимодействие нейтральных π -мезонов и нуклонов). Построим лагранжиан взаимодействия по аналогии с лагранжианом (8.4). Будем предполагать, что в лагранжиан взаимодействия не входят производные полей. Далее, лагранжиан взаимодей-

ствия должен быть скаляром. Это означает, что псевдоскаляр $\phi(x)$ должен умножаться на псевдоскаляр, построенный из $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$. Получаем

$$\mathcal{L}_I(x) = -ig \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \phi(x). \quad (8.10)$$

Очевидно, что этот лагранжиан удовлетворяет также требованиям инвариантности относительно калибровочных преобразований. Требуя, чтобы $\mathcal{L}_I^* = \mathcal{L}_I$, получаем, что константа g вещественна. Константа g характеризует взаимодействие между полями (аналог электрического заряда). Для случая взаимодействия нуклонов и π -мезонов $g^2/4\pi \sim 15$. Нетрудно видеть, что гамильтониан взаимодействия мезонного и нуклонного полей равен

$$\mathcal{H}_I(x) = ig \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \phi(x). \quad (8.11)$$

В качестве последнего примера рассмотрим гамильтониан, ответственный за β -распад нейтрона:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}.$$

Предположим, что в лагранжиан взаимодействия не входят производные полей. Если строить лагранжиан слабого взаимодействия, ответственного за β -распад нейтрона, по аналогии с лагранжианом взаимодействия спинорного и электромагнитного полей, то 4-вектор $(\bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n)$ (в квантовой теории ψ_p и ψ_n — операторы протонного и нейтронного полей) следовало бы умножить на 4-вектор, построенный из операторов электронного и нейтринного полей $(\bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_\nu)$. Такой лагранжиан был бы инвариантен относительно пространственной инверсии. Из опытов следует, что слабые взаимодействия не сохраняют четность. Согласно с данными опыта эффективный лагранжиан, описывающий β -распад нейтрона, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = \frac{G}{\sqrt{2}} [& (\bar{\psi}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\nu) (\bar{\psi}_p \gamma_\alpha (1 + \lambda \gamma_5) \psi_n) + \\ & + (\bar{\psi}_\nu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_e) (\bar{\psi}_n \gamma_\alpha (1 + \lambda \gamma_5) \psi_p)]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Добавление второго члена делает лагранжиан эрмитовым. Лагранжиан (8.12) представляет собой сумму скаляра и псевдоскаляра и, следовательно, не инвариантен относительно пространственной инверсии. Отметим, что константы G и λ равны

$$G \approx 10^{-5} \frac{1}{M_p^2}, \quad \lambda \simeq 1,2 \quad (8.13)$$

(M_p — масса протона).

Обратимся теперь к выражению для S -матрицы [см. (1.38)]. Гамильтониан взаимодействия, входящий в это выражение, может быть записан в виде

$$H_I(x_0) = \int \mathcal{H}_I(x) dx, \quad (8.14)$$

где $\mathcal{H}_I(x)$ — плотность гамильтониана взаимодействия ($x_0 \equiv t$). Подставляя (8.14) в (1.38), получаем для S -матрицы

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n P(\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)), \quad (8.15)$$

где $dx = dx dx_0$.

Гамильтониан взаимодействия должен быть задан. Наша задача состоит в вычислении матричных элементов перехода (матричных элементов S -матрицы) между состояниями, описывающими свободные частицы с определенными импульсами. Оператор S представляет собой сумму интегралов от хронологических произведений операторов поля. Покажем, что хронологическое произведение операторов поля может быть представлено в виде суммы нормальных произведений (все операторы уничтожения справа от операторов рождения). Разложение хронологических произведений операторов поля по нормальным произведениям позволит значительно упростить вычисление матричных элементов S -матрицы.

Начнем с рассмотрения произведений двух операторов поля. В качестве примера будем рассматривать операторы неэрмитова спинорного поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ и оператор скалярного (псевдоскалярного) эрмитова поля $\phi(x)$. В предыдущих параграфах мы видели, что операторы $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $\phi(x)$ могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x), \\ \phi(x) &= \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x). \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u^r(p) c_r(p) e^{ipx} dp, \\ \bar{\psi}^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \bar{u}^r(-p) d_r(p) e^{ipx} dp, \\ \phi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2q_0}} a(q) e^{iqx} dq \end{aligned} \right\} \quad (8.16a)$$

положительно-частотные части операторов $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $\phi(x)$ (операторы уничтожения), а

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u^r(-p) d_r^{\dagger}(p) e^{-ipx} dp, \\ \bar{\psi}^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \bar{u}^r(p) c_r^{\dagger}(p) e^{-ipx} dp, \\ \phi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2q_0}} a^{\dagger}(q) e^{-iqx} dq \end{aligned} \right\} \quad (8.16b)$$

отрицательно частотные части соответствующих операторов (операторы рождения). Определим оператор нормального произведения N . При действии на произведение операторов скалярного поля оператор N расставляет их так, чтобы все операторы уничтожения стояли справа от операторов рождения (нормальный порядок). Для случая двух операторов имеем

$$\left. \begin{aligned} N(\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y)) &= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y), \\ N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)) &= \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y), \\ N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y)) &= \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y), \\ N(\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)) &= \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x). \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Рассмотрим произведение $\phi(x)\phi(y)$. Используя (8.16) и (8.17), получаем

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(y) &= (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)) = \\ &= N(\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y)) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) + \\ &+ N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y)) + N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Далее имеем

$$\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) = N(\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)) + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]. \quad (8.19)$$

Из (8.18) и (8.19) находим

$$\phi(x)\phi(y) = N(\phi(x)\phi(y)) + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]. \quad (8.20)$$

Итак, произведение операторов скалярного (псевдоскалярного) поля равняется нормальному произведению этих операторов плюс коммутатор положительно-частотной части первого множителя и отрицательно-частотной части второго множителя (входит коммутатор тех операторов, которые в исходном произведении не расположены в нормальном порядке).

При действии на операторы спинорного поля оператор N расставляет их в нормальном порядке (все операторы уничтожения справа от операторов рождения). Если при этом производится перестановка операторов поля, то произведение операторов, расположенных в нормальном порядке, умножается на $(-1)^q$, где q — число перестановок операторов спинорного поля, которые делаются при переходе от исходного произведения операторов к нормальному произведению. Для случая двух спинорных операторов

$$\left. \begin{aligned} N(\psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(y)) &= \psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(y), \\ N(\psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(y)) &= \psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(y), \\ N(\psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(y)) &= \psi_{\alpha}^{(-)}(x)\bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(y), \\ N(\psi_{\alpha}^{(+)}(x)\bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(y)) &= -\bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(y)\psi_{\alpha}^{(+)}(x), \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

где α и β — спинорные индексы.

Заметим, что знаковый множитель в определении оператора N обусловлен перестановочными соотношениями для операторов спинорного поля. Рассмотрим, например, первое из равенств (8.21). Действуя оператором N на произведение $\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)$, переставим операторы $\psi_\alpha^{(+)}(x)$ и $\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)$. В соответствии с определением оператора N имеем

$$N(\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)) = -\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)\psi_\alpha^{(+)}(x). \quad (8.22)$$

Из соотношений (6.40) и (8.16) следует, что

$$\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)\psi_\alpha^{(+)}(x) = -\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y),$$

и (8.22) совпадает с (8.21). Для операторов скалярного поля имеем

$$N(\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y)) = \phi^{(+)}(y)\phi^{(+)}(x),$$

что совпадает с (8.17), так как операторы $\phi^{(+)}(x)$ и $\phi^{(+)}(y)$ коммутируют.

Рассмотрим теперь произведение $\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)$:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) &= (\psi_\alpha^{(+)}(x) + \psi_\alpha^{(-)}(x))(\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y) + \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)) = \\ &= N(\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)) + \psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) + N(\psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)) + \\ &\quad + N(\psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Далее

$$\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) = N(\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)) + [\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]_+. \quad (8.24)$$

Подставляя (8.24) в (8.23), находим

$$\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) = N(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) + [\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]_+. \quad (8.25)$$

Из изложенного ясно, что в общем случае

$$U(x)V(y) = N(U(x)V(y)) + [U^{(+)}(x)V^{(-)}(y)]_\pm. \quad (8.26)$$

В этом выражении минус (коммутатор) относится к случаю, когда $U(x)$ и $V(y)$ — операторы скалярного (псевдоскалярного) поля, а плюс (антикоммутатор) — к случаю, когда $U(x)$ и $V(y)$ — операторы спинорного поля. Так как

$$[\psi_\alpha^{(+)}(x), \psi_\beta^{(-)}(y)]_+ = 0,$$

$$[\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]_+ = 0,$$

то

$$\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) = N(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)),$$

$$\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) = N(\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)).$$

Рассмотрим коммутатор, входящий в правую часть соотношения (8.20). Используя перестановочные соотношения (4.26) и разложения (8.16), получаем

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{V_{4q_0 q'_0}} e^{iqx - iq'y} [a(q), a^+(q')] dq dq' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2q_0} e^{iq(x-y)} dq. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Коммутатор в выражении (8.20) является, следовательно, функцией $(x - y)$, а не оператором поля.

Далее с помощью (6.40) и (8.16) находим

$$[\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{m}{p_0} e^{ip(x-y)} u_\alpha^r(p) \bar{u}_\beta^r(p) dp. \quad (8.28)$$

Таким образом, оператор нормального произведения N определен так, что произведение операторов как для спинорного, так и для скалярного поля равняется нормальному произведению операторов плюс известная функция (либо нуль).

Определим следующим образом хронологический оператор Вика:

$$\begin{aligned} T(\phi(x)\phi(y)) &= \begin{cases} \phi(x)\phi(y) & x_0 > y_0, \\ \phi(y)\phi(x) & y_0 > x_0; \end{cases} \\ T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) &= \begin{cases} \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) & x_0 > y_0, \\ -\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) & y_0 > x_0; \end{cases} \\ T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)) &= \begin{cases} \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) & x_0 > y_0, \\ -\psi_\beta(y)\psi_\alpha(x) & y_0 > x_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Оператор T при действии на произведение операторов скалярного поля расставляет их в хронологическом порядке (временной аргумент первого множителя больше временного аргумента второго) и совпадает, следовательно, с хронологическим оператором Дайсона P [см. (1.28)]. Действуя на произведение операторов спинорного поля, оператор T расставляет их в хронологическом порядке. Если при этом производится перестановка множителей, то хронологическое произведение операторов умножается на -1 . В общем случае n множителей действие оператора T сводится к тому, что операторы поля расставляются в хронологическом порядке (временные аргументы сомножителей уменьшаются слева направо) и полученное произведение операторов, расположенных в хронологическом порядке, умножается на $(-1)^q$, где q — число перестановок спинорных операторов, которые делаются при переходе от исходного произведения к хронологическому. Именно T -произведения, как мы увидим ниже, могут быть представлены в виде суммы нормальных произведений.

Покажем, что в выражении (8.15) для S -матрицы P -произведения могут быть заменены T -произведениями. Рассмотрим в качестве примера взаимодействие электромагнитного и спинорного полей. Имеем

$$T(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)) = \begin{cases} \mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2), & x_{10} > x_{20}, \\ \mathcal{H}_I(x_2)\mathcal{H}_I(x_1), & x_{20} > x_{10}, \end{cases} = \\ = P(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)), \quad (8.30)$$

где $\mathcal{H}_I(x) = -ieN(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x))A_\mu(x)$.

При перестановке $\mathcal{H}_I(x_1)$ и $\mathcal{H}_I(x_2)$ (случай $x_{20} > x_{10}$) производится четное число перестановок спинорных операторов. Это связано с тем, что в гамильтониан взаимодействия входят два спинорных оператора. Очевидно, что и в общем случае n операторов \mathcal{H}_I T -произведение и P -произведение совпадают. Во всех рассмотренных примерах взаимодействия полей спинорные операторы входят в гамильтониан взаимодействия четное число раз. Из соображений лоренц-инвариантности ясно, что это имеет место для любого взаимодействия. Таким образом, S -матрица может быть записана в следующем виде:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n T(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\dots\mathcal{H}_I(x_n)). \quad (8.31)$$

Рассмотрим T -произведение двух операторов скалярного поля. Из (8.29) и (8.20) получаем

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \begin{cases} N(\phi(x)\phi(y)) + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)], & x_0 > y_0; \\ N(\phi(y)\phi(x)) + [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)], & y_0 > x_0. \end{cases} \quad (8.32)$$

Очевидно, что операторы скалярного поля под знаком оператора N можно представлять. Имеем

$$N(\phi(x)\phi(y)) = N(\phi(y)\phi(x)). \quad (8.33)$$

Из (8.33) и (8.32) получаем

$$T(\phi(x)\phi(y)) = N(\phi(x)\phi(y)) + \overline{\phi(x)\phi(y)}. \quad (8.34)$$

Здесь

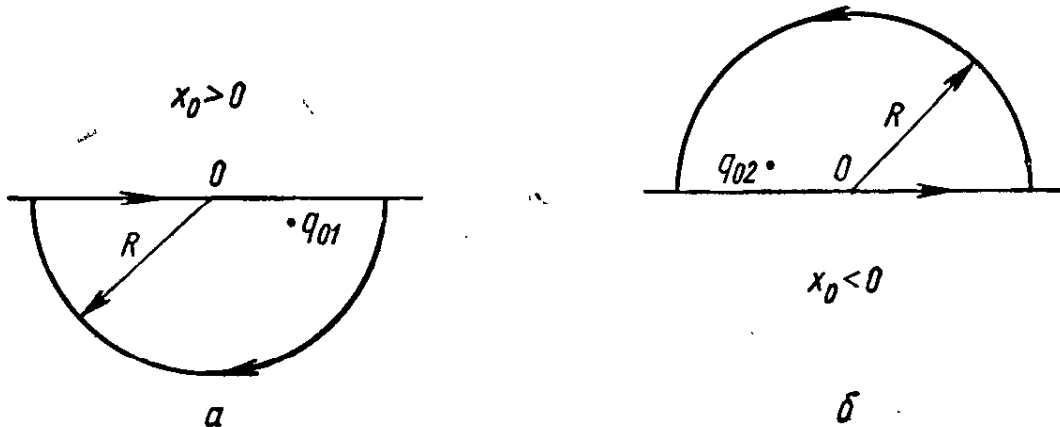
$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \begin{cases} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)], & x_0 > y_0; \\ [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)], & y_0 > x_0. \end{cases} \quad (8.35)$$

Величина $\overline{\phi(x)\phi(y)}$ называется хронологическим спариванием операторов $\phi(x)$ и $\phi(y)$. Из (8.35) и (8.27) получаем

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2q_0} e^{iq(x-y)} dq, & x_0 > y_0; \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2q_0} e^{iq(y-x)} dq, & y_0 > x_0. \end{cases} \quad (8.36)$$

Таким образом, хронологическое спаривание операторов скалярного (псевдоскалярного) поля $\overline{\phi(x)\phi(y)}$ — функция переменной $x-y$. Обозначим

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \frac{1}{2} \Delta_F(x-y; \kappa). \quad (8.37)$$



Р и с. 2

Учитывая, что $q_0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + \kappa^2}$, запишем $\frac{1}{2} \Delta_F(x; \kappa)$ в виде

$$\frac{1}{2} \Delta_F(x; \kappa) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{q}^2 + \kappa^2}} e^{iqx - i\sqrt{\mathbf{q}^2 + \kappa^2}x_0} dq, & x_0 > 0; \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{q}^2 + \kappa^2}} e^{-iqx + i\sqrt{\mathbf{q}^2 + \kappa^2}x_0} dq, & x_0 < 0. \end{cases} \quad (8.38)$$

Рассмотрим четырехкратный интеграл

$$I(x; \kappa) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{e^{iqx} dq}{q^2 + \kappa^2 - i\varepsilon}, \quad (8.39)$$

где $q = (\mathbf{q}, iq_0)$, $dq = d\mathbf{q} dq_0$ (q_0 — переменная интегрирования; интегрирование по q_0 ведется от $-\infty$ до ∞). Покажем, что $\frac{1}{2} \Delta_F(x; \kappa) = I(x; \kappa)$. Произведем в (8.39) интегрирование по переменной q_0 . Знаменатель подынтегрального выражения обращается в нуль в точках

$$(q_0)_1 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + \kappa^2} - i\varepsilon', \quad (q_0)_2 = -\sqrt{\mathbf{q}^2 + \kappa^2} + i\varepsilon', \quad (8.40)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon/2\sqrt{q^2 + \kappa^2}$ (ε — положительная, сколь угодно малая величина; мы произвели разложение по ε и удержали линейные по ε члены). При $x_0 > 0$ интегрирование в (8.39) по q_0 от $-\infty$ до ∞ можно заменить интегрированием по контуру, изображенному на рис. 2, а при $R \rightarrow \infty$. Подынтегральное выражение в (8.39) имеет в нижней полуплоскости полюс в точке $(q_0)_1$. Следовательно, интеграл (8.39) при $x_0 > 0$ равен вычету подынтегрального выражения в точке $(q_0)_1$, умноженному на $-2\pi i$ (контур интегрирования обходится по часовой стрелке). Полагая далее $\varepsilon = 0$, получаем

$$I(x; \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2\sqrt{q^2 + \kappa^2}} e^{iqx - i\sqrt{q^2 + \kappa^2} x_0} dq, \quad x_0 > 0. \quad (8.41a)$$

При $x_0 < 0$ интеграл (8.39) равен интегралу по контуру, изображенному на рис. 2, б при $R \rightarrow \infty$. Вычисляя вычет в точке $(q_0)_2$, получаем

$$I(x; \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2\sqrt{q^2 + \kappa^2}} e^{iqx + i\sqrt{q^2 + \kappa^2} x_0} dq, \quad x_0 < 0. \quad (8.41б)$$

Легко видеть, что это выражение совпадает с соответствующим выражением в (8.38). Таким образом, хронологическое спаривание операторов эрмитова скалярного (псевдоскалярного) поля равно

$$\overline{\phi(x)} \phi(y) = \frac{1}{2} \Delta_F(x-y; \kappa) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{iq(x-y)} dq}{q^2 + \kappa^2 - i\varepsilon}. \quad (8.42)$$

Рассмотрим теперь T -произведения двух операторов спинорного поля. Из (8.29) и (8.25) получаем

$$\begin{aligned} T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) &= \\ &= \begin{cases} N(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) + [\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]_+, & x_0 > y_0; \\ -N(\bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x)) - [\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y), \psi_\alpha^{(-)}(x)]_+, & y_0 > x_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.43)$$

Нетрудно видеть, что $N(\bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x)) = -N(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y))$. (8.44)

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} N(\psi_\alpha^{(+)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)) &= \psi_\alpha^{(+)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(+)}(y) = -N(\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y) \psi_\alpha^{(+)}(x)), \\ N(\psi_\alpha^{(+)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)) &= -\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) \psi_\alpha^{(+)}(x) = -N(\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) \psi_\alpha^{(+)}(x)), \\ N(\psi_\alpha^{(-)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)) &= \psi_\alpha^{(-)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(+)}(y) = -N(\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y) \psi_\alpha^{(-)}(x)), \\ N(\psi_\alpha^{(-)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)) &= \psi_\alpha^{(-)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) = -N(\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y) \psi_\alpha^{(-)}(x)). \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

Из этих соотношений следует (8.44). Подставляя (8.44) в (8.43), получаем

$$T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) = N(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) + \overline{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)}, \quad (8.46)$$

где

$$\overline{\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)} = \begin{cases} [\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]_+, & x_0 > y_0; \\ -[\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y) \psi_\alpha^{(-)}(x)]_+, & y_0 > x_0. \end{cases} \quad (8.47)$$

Из (8.28) очевидно, что $\overline{\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)}$ — хронологическое спаривание операторов $\psi_\alpha(x)$ и $\bar{\psi}_\beta(y)$ — является α, β элементом матрицы, зависящей от $x - y$. Заметим, что в силу соотношения (8.44) именно хронологическое произведение Вика равно при всех значениях переменных x и y нормальному произведению плюс функция [знак минус в (8.44) компенсируется соответствующим знаком минус в определении T -произведения].

В общем случае двух операторов $U(x)$ и $V(y)$ получаем

$$T(U(x)V(y)) = N(U(x)V(y)) + \overline{U(x)V(y)}, \quad (8.48)$$

где

$$\overline{U(x)V(y)} = \begin{cases} [U^{(+)}(x), V^{(-)}(y)]_\mp, & x_0 > y_0; \\ \pm [V^{(+)}(y), U^{(-)}(x)]_\mp, & y_0 > x_0. \end{cases} \quad (8.49)$$

В этом выражении верхние знаки относятся к случаю, когда $U(x)$ и $V(y)$ — операторы скалярного (псевдоскалярного) поля, а нижние знаки относятся к случаю спинорных полей.

Из перестановочных соотношений (6.40) и разложений (8.16) очевидно, что

$$\overline{\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)} = 0, \quad \overline{\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)} = 0. \quad (8.50)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} T(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)) &= N(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)), \\ T(\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) &= N(\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)). \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

Рассмотрим хронологическое спаривание $\overline{\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)}$, определенное соотношением (8.47). Имеем [см. (8.28)]

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ip(x-y)} u_\alpha^r(p) \bar{u}_\beta^r(p) \frac{m}{p_0} d\mathbf{p} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ip(x-y)} \frac{1}{2p_0 i} (\gamma_\mu p_\mu + im)_{\alpha\beta} d\mathbf{p} = \\ &= -i \left(-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + im \right)_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ip(x-y)} \frac{d\mathbf{p}}{2p_0}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Мы воспользовались соотношением (см. Приложение)

$$u_\alpha^r(p) \bar{u}_\beta^r(p) = \left(\frac{\gamma_\mu p_\mu + im}{2im} \right)_{\alpha\beta}.$$

Для антикоммутатора, определяющего $\overline{\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)}$ при $y_0 > x_0$, из (6.40) и (8.16) получаем

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y), \psi_\alpha^{(-)}(x)]_+ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int e^{-ip(x-y)} \bar{u}_\beta^r(-p) u_\alpha^r(-p) \frac{m}{p_0} d\mathbf{p} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ip(y-x)} \frac{1}{2ip_0} (-\gamma_\mu p_\mu + im)_{\alpha\beta} d\mathbf{p} = \\ &= -i \left(-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + im \right)_{\alpha\beta} \int e^{ip(y-x)} \frac{1}{2p_0} d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (8.53)$$

При получении этого выражения было использовано соотношение

$$-u_\alpha^r(-p) \bar{u}_\beta^r(-p) = \left(\frac{-\gamma_\mu p_\mu + im}{2im} \right)_{\alpha\beta}$$

(см. Приложение). С помощью (8.47), (8.52) и (8.53) для хронологического спаривания операторов $\psi_\alpha(x)$ и $\bar{\psi}_\beta(y)$ получаем следующее выражение:

$$\overline{\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)} = -i \left(-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + im \right)_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \Delta_F(x-y; m), \quad (8.54)$$

где

$$\frac{1}{2} \Delta_F(x-y; m) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{p}(x-y) - i\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}(x_0 - y_0)}}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} d\mathbf{p}, & x_0 > y_0, \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\mathbf{p}(x-y) + i\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}(x_0 - y_0)}}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} d\mathbf{p}, & y_0 > x_0. \end{cases}$$

Эта функция совпадает с (8.38), если в (8.38) сделать замену $\kappa \rightarrow m$, и равна, следовательно, четырехкратному интегралу $I(x-y; m)$. Получаем

$$\begin{aligned} \overline{\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)} &= -i \left(-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + im \right)_{\alpha\beta} I(x-y; m) = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{e^{ip(x-y)} (\gamma p + im)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} dp. \end{aligned} \quad (8.55)$$

В дальнейшем в выражениях для хронологических спариваний мы будем опускать $-i\varepsilon$ [всегда будет подразумеваться, что квадрат массы следует заменить на квадрат массы плюс $(-i\varepsilon)$]. Выражение (8.55) может быть записано более компактно. Используя перестановочные соотношения для матриц γ_μ , имеем

$$\frac{(\gamma p - im)(\gamma p + im)}{p^2 + m^2} = 1, \quad (8.56)$$

откуда

$$\frac{\gamma p + im}{p^2 + m^2} = \frac{1}{\gamma p - im}. \quad (8.57)$$

Хронологическое спаривание $\overline{\psi(x)}\psi(y)$ может быть записано в следующем виде:

$$\overline{\psi(x)}\psi(y) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ip(x-y)}}{\gamma p - im} dp. \quad (8.58)$$

§ 9. Теорема Вика

Мы рассмотрели произведения операторов полей, квантами которых являются частицы со спинами 0 и 1/2. Основываясь на общих постулатах теории поля, Паули показал, что операторы полей, отвечающих частицам с любым целым спином, обязаны удовлетворять перестановочным соотношениям типа (4.26) (квантование с помощью коммутаторов), а операторы полей, квантами которых являются частицы с полуцелым спином, удовлетворяют перестановочным соотношениям типа (6.40) (квантование с помощью антикоммутаторов). Частицы с целым спином удовлетворяют статистике Бозе—Эйнштейна и называются бозонами, а частицы с полуцелым спином удовлетворяют статистике Ферми—Дирака и называются фермионами. Операторы соответствующих полей будем называть соответственно бозонными и фермионными операторами.

Определим оператор нормального произведения N в общем случае полей с произвольным спином. Оператор N при действии на произведение операторов рождения и уничтожения располагает их в нормальном порядке (*все операторы уничтожения справа от операторов рождения*). Если при этом производится перестановка фермионных операторов, то произведение операторов, расположенных в нормальном порядке, умножается на $\delta = (-1)^q$, где q — число соответствующих перестановок фермионных операторов. Из определения оператора N следует, что

$$N(UVW \dots XYZ) = \delta N(UXW \dots ZVY). \quad (9.1)$$

Здесь $\delta = (-1)^q$,

где q — число перестановок фермионных операторов, которые необходимо произвести, чтобы от $UVW \dots XYZ$ перейти к $UXW \dots ZVY$. Отметим, что справедливо правило: под знаком N операторы поля можно переставлять так, как в случае, если бы все бозонные операторы коммутировали, а все фермионные антикоммутировали.

Определим теперь в общем случае полей, отвечающих частицам с произвольным спином, хронологический оператор Вика T . При действии на произведение операторов поля оператор T располагает их в хронологическом порядке (временной аргумент убывает слева направо). Если при этом производится перестановка фермионных операторов, то произведение операторов, расположенных в хронологическом порядке, умножается на $\delta = (-1)^q$, где q — число соответствующих перестановок фермионных операторов. Очевидно, что

(8.48) и (8.49) имеют место для операторов любых полей [верхний знак в (8.49) относится к случаю бозонных полей, а нижний — к случаю фермионных]. Далее из определения оператора T следует, что

$$T(UVW \dots XYZ) = \delta T(UXW \dots ZVY). \quad (9.2)$$

Здесь $\delta_1 = (-1)^q$, где q — число перестановок фермионных операторов, которые необходимо проделать, чтобы от $UVW \dots XYZ$ перейти к $UXW \dots ZVY$ (правило перестановки операторов под знаком T то же, что и под знаком N).

Теперь перейдем к обобщению (8.48) на случай T -произведения произвольного числа операторов поля. Определим следующим образом нормальное произведение операторов поля с хронологическими спариваниями операторов под знаком N :

$$N(\overline{UVW \dots R \dots XYZ}) = \delta \overline{UR} \overline{VX} \dots N(W \dots YZ). \quad (9.3)$$

Здесь $\delta = (-1)^q$, где q — число перестановок фермионных операторов, которые необходимо произвести при переходе от $UVW \dots R \dots XYZ$ к $URVX \dots W \dots YZ$. Например,

$$N(\overline{UVWR}) = -\overline{UR} N(VR),$$

если U, V, W, R — фермионные операторы.

Докажем вначале следующую лемму. Если временной аргумент оператора Z меньше временных аргументов операторов $U, V, W, \dots X, Y$, то

$$N(UVW \dots XY)Z = N(UVW \dots XYZ) + N(UVW \dots X\overline{Y}Z) + \\ + N(UVW \dots \overline{XY}Z) + \dots + N(\overline{UVW \dots XY}Z). \quad (9.4)$$

Достаточно доказать соотношение (9.4) в случае, когда U, V, \dots, Z — операторы рождения и уничтожения.

Пусть Z — оператор уничтожения. Очевидно, что хронологическое спаривание двух операторов уничтожения равно нулю. Покажем, что при $x_0 > y_0$

$$\overline{R^{(-)}(x) Z^{(+)}(y)} = 0. \quad (9.5)$$

Действительно,

$$\overline{R^{(-)}(x) Z^{(+)}(y)} = T(R^{(-)}(x) Z^{(+)}(y)) - \\ - N(R^{(-)}(x) Z^{(+)}(y)) = R^{(-)}(x) Z^{(+)}(y) - R^{(-)}(x) Z^{(+)}(y) = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае все спаривания в правой части соотношений (9.4) равны нулю и (9.4) сводится к равенству

$$N(UVW \dots XY)Z = N(UVW \dots XYZ),$$

которое очевидно (Z — оператор уничтожения).

Будем считать теперь, что Z — оператор рождения. Достаточно при этом доказать лемму для случая, когда все операторы под знаком N в левой части (9.4) являются операторами уничтожения. Действительно, если соотношение (9.4) доказано для этого случая, то, умножая его слева на оператор рождения D , временной аргумент которого больше временного аргумента Z , получаем

$$DN(UVW \dots XY)Z = N(DUVW \dots XY)Z = N(DUVW \dots XY\bar{Z}) + \\ + \dots + N(\overline{DUVW \dots XYZ}) + N(\overline{DUVW \dots XYZ}). \quad (9.6)$$

Мы внесли оператор D под знак N , что всегда можно сделать, так как D — оператор рождения. Поскольку спаривание двух операторов рождения равно нулю, равняется нулю последний добавленный член. Если (9.6) умножить слева на оператор рождения, временной аргумент которого больше временного аргумента Z , то получим соотношение (9.4) для случая, когда под знак N в левой его части входят два оператора рождения и т. д. Переставляя операторы под знаком N в обеих частях найденных таким путем соотношений, получим (9.4) в общем случае.

Итак, приступим к доказательству (9.4) в единственном нетривиальном случае, когда Z — оператор рождения, а U, V, W, \dots, X, Y , — операторы уничтожения. Имеем

$$N(UVW \dots XY)Z = UVW \dots XYZ. \quad (9.7)$$

Рассмотрим произведение YZ . Так как временной аргумент оператора Y больше временного аргумента оператора Z , то $YZ = T(YZ)$. Используя (8.48), получаем

$$YZ = T(YZ) = N(YZ) + \bar{Y}Z = \delta_{YZ}ZY + \bar{Y}Z, \quad (9.8)$$

где множитель δ_{YZ} равен $+1$ (-1), если Y и Z — бозонные (фермионные) операторы. Подставляя (9.8) в (9.7) и учитывая, что

$$UVW \dots X\bar{Y}Z = N(UVW \dots X\bar{Y}Z),$$

получаем

$$N(UVW \dots XY)Z = \delta_{YZ}UVW \dots XZY + N(UVW \dots X\bar{Y}Z). \quad (9.9)$$

Далее, заменяя произведение XZ T -произведением, имеем

$$XZ = T(XZ) = N(XZ) + \bar{X}Z = \delta_{XZ}ZX + \bar{X}Z. \quad (9.10)$$

Очевидно, что

$$\delta_{YZ}UVW \dots \bar{X}ZY = N(UVW \dots \overline{XYZ}). \quad (9.11)$$

Из (9.9) — (9.11) получаем

$$N(UVW \dots XY)Z = \delta_{XZ}\delta_{YZ}UVW \dots ZXY + \\ + N(UVW \dots X\bar{Y}Z) + N(UVW \dots \overline{XYZ}). \quad (9.12)$$

При каждом применении этой процедуры оператор Z продвигается влево и возникает дополнительный член, представляющий собой нормальное произведение, внутри которого имеется хронологическое спаривание оператора Z с тем оператором, через который Z переставляется. В результате получаем

$$N(UVW \dots XY)Z = \delta_{UZ} \delta_{VZ} \dots \delta_{XZ} \delta_{YZ} ZUVW \dots XY + \\ + N(\overline{UVW \dots XYZ}) + \dots + N(\overline{UVW \dots X\bar{Y}Z}). \quad (9.13)$$

Из определения оператора N следует, что

$$\delta_{UZ} \delta_{VZ} \dots \delta_{XZ} \delta_{YZ} ZUVW \dots XY = N(UVW \dots XYZ). \quad (9.14)$$

Таким образом, доказательство соотношения (9.4) завершено. Соотношение (9.4) можно обобщить. Если умножить (9.4) на хронологическое спаривание \overline{SQ} , то очевидно, что полученное соотношение может быть записано в виде

$$N(\overline{UVSW \dots XQY})Z = N(\overline{UVSW \dots XQYZ}) + \\ + N(\overline{UVSW \dots XQ\bar{Y}Z}) + \dots + N(\overline{UVSW \dots XQYZ}). \quad (9.15)$$

Можно умножить (9.4) на несколько хронологических спариваний. Таким образом, соотношение (9.4) имеет место и в случае, если под знаком операторов N в левой и правой частях равенства имеется любое число спаренных операторов.

Приступим теперь к доказательству основной теоремы — *теоремы Вика*. Покажем, что

$$T(UVWR \dots XYZ) = N(UVWR \dots XYZ) + \\ + N(\overline{UVWR} \dots XYZ) + N(\overline{UV\bar{W}R} \dots XYZ) + \dots + \\ + N(\overline{UV\bar{W}\bar{R}} \dots XYZ) + \dots + N(\overline{UV\bar{W}\bar{R}} \dots \bar{X}YZ) + \dots \quad (9.16)$$

В правой части этого соотношения — сумма нормальных произведений со всеми возможными хронологическими спариваниями (во второй строке (9.16) — сумма всех возможных нормальных произведений с одним хронологическим спариванием, в третьей — с двумя и т. д.) Докажем (9.16) по индукции. Пусть теорема верна для произведения n операторов $UVWR \dots XYZ$. Умножив (9.16) справа на оператор Ω , временной аргумент которого меньше временных аргументов $U, V, W, \dots X, Y, Z$, получим

$$T(UVWR \dots XYZ)\Omega = N(UVWR \dots XYZ)\Omega + \\ + N(\overline{UVWR} \dots XYZ)\Omega + N(\overline{UV\bar{W}R} \dots XYZ)\Omega + \dots + \\ + N(\overline{UV\bar{W}\bar{R}} \dots XYZ)\Omega + \dots \quad (9.17)$$

Применяя к каждому слагаемому в правой части этого равенства доказанную ранее лемму и учитывая, что

$$T(UVWR \dots XYZ)\Omega = T(UVWR \dots XYZ\Omega),$$

убеждаемся в справедливости (9.16) для произведения операторов $UVWR \dots XYZ\Omega$ в случае, если временной аргумент Ω меньше временных аргументов всех остальных операторов. Если в обеих частях полученного соотношения переставить операторы (правила перестановки операторов поля под знаками T и N операторов одни и те же), то получим (9.16) в общем случае $n + 1$ множителя. Итак, если теорема верна для n множителей, то она верна для $n + 1$ множителя. При $n = 2$ соотношение (9.16) совпадает с (8.48). Таким образом, соотношение (9.16) доказано для общего случая.

Обратимся к выражению для S -матрицы [см. (8.31)]. В это выражение входит гамильтониан взаимодействия, который, по предположению, является нормальным произведением операторов поля, взятых в одной и той же точке x .

Таким образом, S -матрица представляет собой сумму интегралов от

$$T(N(UVW) \dots N(XYZ)), \quad (9.18)$$

где операторы поля под знаком каждого N обладают одним и тем же временным аргументом. Такие T -произведения носят название смешанных.

Чтобы применить разложение (9.16) к смешанным T -произведениям, поступим следующим образом. К временным аргументам всех операторов рождения, входящих в смешанное T -произведение, добавим положительную сколь угодно малую величину ε . После этого операторы N в (9.18) могут быть опущены. Действительно, рассмотрим в качестве примера $N(U^{(+)}(x_0)V^{(+)}(x_0)W^{(-)}(x_0))$ (переменная x , от которой зависят эти операторы, нас здесь не интересует). Получим

$$N(U^{(+)}(x_0)V^{(+)}(x_0)W^{(-)}(x_0)) = \delta W^{(-)}(x_0)U^{(+)}(x_0)V^{(+)}(x_0), \quad (9.19)$$

где $\delta = \pm 1$ в зависимости от четности числа перестановок фермионных операторов. С другой стороны:

$$T(U^{(+)}(x_0)V^{(+)}(x_0)W^{(-)}(x_0 + \varepsilon)) = \delta W^{(-)}(x_0 + \varepsilon)U^{(+)}(x_0)V^{(+)}(x_0) \quad (9.20)$$

[операторы в правой части (9.20) расположены в том же порядке, что и в (9.19); множитель δ один и тот же].

Таким образом, если во всех операторах рождения в смешанном T -произведении добавить к временному аргументу ε , то смешанное T -произведение может быть заменено обычным T -произведением и представлено в соответствии с (9.16) в виде суммы нормальных произведений со всеми возможными спариваниями. Затем ε следует положить равным нулю.

Очевидно, что хронологические спаривания операторов, которые в смешанное T -произведение входят под знак одного и того же оператора N , равны нулю. Действительно, если временной аргумент оператора рождения больше временного аргумента оператора уничтожения, то хронологическое спаривание этих операторов равно нулю [см. (9.5)]. Хронологические спаривания операторов рождения и хронологические спаривания операторов уничтожения также равны нулю. Итак, для смешанного T -произведения справедливо разложение (9.16), в котором следует опустить спаривания операторов, входящих под знак одного и того же оператора N и обладающих одним и тем же пространственно-временным аргументом.

В следующих параграфах мы убедимся в том, насколько теорема Вика упрощает вычисление элементов S -матрицы. Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных процессов, обсудим различные члены разложения (9.16). Мы убедимся в том, что многие из них эквивалентны. В качестве примера рассмотрим взаимодействие электромагнитного поля $A(x)$ и электрон-позитронного поля $\psi(x)$. Гамильтониан взаимодействия дается выражением

$$\mathcal{H}_I(x) = -ieN(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x))A_\mu(x).$$

Рассмотрим первый член ряда (8.31). Используя теорему Вика для смешанных T -произведений, получаем

$$T(N(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x))A_\mu(x)) = N(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x))A_\mu(x). \quad (9.21)$$

Рассмотрим теперь второй член разложения (8.31). Так как операторы ψ и A коммутируют (разные поля), то

$$\begin{aligned} & T(N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1))A_\mu(x_1)N(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2))A_\nu(x_2)) = \\ & = T(N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1))N(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)))T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Используя теорему Вика для смешанных T -произведений и учитывая, что $\overline{\psi(x_1)\psi(x_2)} = 0$ и $\overline{\psi(x_1)\psi(x_2)} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} & T(N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1))N(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2))) = \\ & = N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)) + \\ & + N(\overline{\psi(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)}) + \\ & + N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\overline{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)}) + \\ & + N(\overline{\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\psi(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)}). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Второй член в правой части разложения (9.23) дает следующий вклад в S -матрицу:

$$\int N \left(\overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)} \right) T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) dx_1 dx_2. \quad (9.24)$$

Переставляя под знаком N операторы

$$\overline{\psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)} \text{ и } \overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1)}$$

и переобозначая переменные интегрирования ($x_1 \leftrightarrow x_2$), находим

$$\begin{aligned} & \int N \left(\overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)} \right) T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) dx_1 dx_2 = \\ & = \int N \left(\overline{\psi(x_1) \gamma_\nu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\mu \psi(x_2)} \right) T(A_\mu(x_2) A_\nu(x_1)) dx_2 dx_1 = \\ & = \int N \left(\overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)} \right) T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (9.25)$$

При получении последнего равенства мы воспользовались тем, что

$$T(A_\mu(x_2) A_\nu(x_1)) = T(A_\nu(x_1) A_\mu(x_2)),$$

и переобозначили индексы μ и ν , по которым производится суммирование ($\mu \leftrightarrow \nu$).

Из (9.25) очевидно, что второй и третий члены в разложении (9.23) дают одинаковые вклады в S -матрицу. Таким образом, эти члены эквивалентны. Следует учесть лишь один из них и опустить $2!$ в знаменателе соответствующего члена в разложении (8.31).

Рассмотрим T -произведение

$$T(N(\overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1)}) N(\overline{\psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)}) N(\overline{\psi(x_3) \gamma_\rho \psi(x_3)})), \quad (9.26)$$

входящее в следующий член ряда (8.31). Нетрудно видеть, что в разложении (9.26) по нормальным произведениям имеется $3!$ нормальных произведения с одним хронологическим спариванием. Путем соответствующей перестановки операторов поля и переобозначения переменных интегрирования и суммирования легко убедиться в эквивалентности этих членов. Далее нетрудно видеть, что в разложении T -произведения (9.26) имеется $3!$ эквивалентных нормальных произведения с двумя хронологическими спариваниями, в которых неспаренные операторы обладают разными аргументами, например,

$$N(\overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) \psi(x_3) \gamma_\rho \psi(x_3)}) \text{ и т. д.,}$$

и три эквивалентных нормальных произведения с двумя спариваниями, в которых неспаренные операторы обладают одним и тем же аргументом, например,

$$N \left(\overbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)}^{\quad} \bar{\psi}(x_3) \gamma_\rho \psi(x_3) \right)$$

и т. д. Наконец, в разложении содержится два эквивалентных нормальных произведения с тремя хронологическими спариваниями.

В общем случае из некоторого нормального произведения путем перестановки пар операторов $\bar{\psi}\psi$ под знаком N и соответствующего переобозначения переменных могут быть получены все нормальные произведения, эквивалентные данному. Число таких эквивалентных нормальных произведений, которые дают одинаковый вклад в S -матрицу, равно $n!/g$, где n — число пар $\bar{\psi}\psi$ под знаком оператора N , а g — число перестановок, не меняющих вид нормального произведения (после соответствующего переобозначения переменных).

Правила построения диаграмм Фейнмана

§ 10. Рассеяние электронов внешним электромагнитным полем. Диаграммы Фейнмана

Используем теперь развитый аппарат для рассмотрения процессов столкновения частиц. Начнем с задачи о рассеянии электронов некантованным внешним электромагнитным полем (например, рассеяние электронов кулоновским полем ядра).

Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{H}_I(x) = -ieN (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)) A_\mu(x), \quad (10.1)$$

где $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ — операторы электрон-позитронного поля, а потенциал $A_\mu(x)$ — заданная функция (не оператор поля).

Пусть в начальный момент времени ($t \rightarrow -\infty$) электрон обладает 4-импульсом p , а проекция спина электрона на направление импульса равна r . Найдем амплитуду вероятности обнаружения в конечный момент времени ($t \rightarrow \infty$) электрона с 4-импульсом p' и проекцией спина на направление импульса r' .

Начальный и конечный векторы состояния равны соответственно

$$\Phi_{pr} = c_r^+(p) \Phi_0, \quad \Phi_{p'r'} = c_{r'}^+(p') \Phi_0. \quad (10.2)$$

Мы должны вычислить матричный элемент перехода между состояниями Φ_{pr} и $\Phi_{p'r'}$, т. е.

$$(\Phi_{p'r'}^+, S \Phi_{pr}) = (\Phi_0^+ c_{r'}(p') S c_r^+(p) \Phi_0). \quad (10.3)$$

Запишем S -матрицу следующим образом:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad (10.4)$$

где

$$S^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T (\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)).$$

Оператор $S^{(n)}$ пропорционален e^n . Так как константа e мала ($e^2/4\pi \simeq 1/137$), то применима теория возмущений, и достаточно учесть вклад в матричный элемент перехода членов низшего порядка по e .

Вычислим матричные элементы нескольких первых операторов в разложении (10.4) и сформулируем правила (*правила Фейнмана*), которые позволят без труда получить матричный элемент любого оператора $S^{(n)}$.

При вычислении матричных элементов хронологические произведения будут представлены по теореме Вика в виде суммы нормальных произведений со всеми возможными хронологическими спариваниями.

Оператор N расставляет операторы поля так, что операторы уничтожения располагаются справа от операторов рождения. Условимся при вычислении матричных элементов перехода операторами $\psi^{(+)}$ и $\bar{\psi}^{(+)}$ действовать на начальный вектор состояния, а операторами $\psi^{(-)}$ и $\bar{\psi}^{(-)}$ — на конечный вектор состояния.

Рассмотрим член первого порядка:

$$T(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)) = N(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)) = \bar{\psi}^{(+)}(x) \gamma_\mu \psi^{+}(x) + \\ + N(\bar{\psi}^{(+)}(x) \gamma_\mu \psi^{(-)}(x)) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(-)}(x). \quad (10.5)$$

Далее,

$$N(\bar{\psi}^{(+)}(x) \gamma_\mu \psi^{(-)}(x)) = N(\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta^{(-)}(x)) = \\ = -\psi_\beta^{(-)}(x) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) = -\psi^{(-)}(x) \tilde{\gamma}_\mu \bar{\psi}^{(+)}(x). \quad (10.6)$$

Подействуем оператором $\psi_\beta^{(+)}(x)$ на начальный вектор состояния Φ_{pr} :

$$\psi_\beta^{(+)}(x) c_r^{+}(p) \Phi_0 = ([\psi_\beta^{(+)}(x), c_r^{+}(p)]_{+} - c_r^{+}(p) \psi_\beta^{(+)}(x)) \Phi_0. \quad (10.7)$$

Используя перестановочные соотношения (6.40) и разложение (8.16), находим

$$[\psi_\beta^{(+)}(x), c_r^{+}(p)]_{+} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u_\beta^r(p') [c_{r'}(p'), c_r^{+}(p)]_{+} e^{ip'x} dp' = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u_\beta^r(p) e^{ipx}. \quad (10.8)$$

Очевидно, что $\psi_\beta^{(+)}(x) \Phi_0 = 0$. Окончательно получаем

$$\psi_\beta^{(+)}(x) c_r^{+}(p) \Phi_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} u_\beta^r(p) e^{ipx} \Phi_0. \quad (10.9)$$

Таким образом, действуя оператором $\psi^{(+)}(x)$ на вектор состояния, описывающий электрон с 4-импульсом p и проекцией спина r , получаем вектор Φ_0 , который умножается на функцию, являющуюся соответствующим решением свободного уравнения Дирака (опера-

тор $\psi^{(+)}(x)$ уничтожает электрон). Отметим, что в общем случае, если Φ — вектор, описывающий любое состояние, в котором нет электронов, то

$$\begin{aligned}\psi_{\beta}^{(+)}(x) c_r^{+}(p) \Phi &= ([\psi_{\beta}^{(+)}(x), c_r^{+}(p)]_{+} - c_r^{+}(p) \psi_{\beta}^{(+)}(x)) \Phi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u_{\beta}^r(p) e^{ipx} \Phi.\end{aligned}\quad (10.10)$$

При получении этого соотношения мы использовали соотношение (10.8) и условие

$$\psi_{\beta}^{(+)}(x) \Phi = 0. \quad (10.11)$$

Чтобы вычислить матричный элемент оператора $\bar{\psi}^{(+)}(x) \gamma_{\mu} \psi^{(+)}(x)$, подействуем оператором $\bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x) \psi_{\beta}^{(+)}(x)$ на начальный вектор состояния. Так как $\bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x) \Phi_0 = 0$, то из (10.9) находим

$$\bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x) \psi_{\beta}^{(+)}(x) c_r^{+}(p) \Phi_0 = 0$$

(оператор $\psi^{(+)}(x)$ уничтожает электрон; второй оператор уничтожения при действии на вектор вакуума дает нуль).

В этом можно убедиться и иначе. Используя перестановочные соотношения (6.40), получаем

$$\bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x) \psi_{\beta}^{(+)}(x) c_r^{+}(p) \Phi_0 = \psi_{\beta}^{(+)}(x) c_r^{+}(p) \bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x) \Phi_0 = 0.$$

Очевидно, что в общем случае, если в начальном состоянии только частицы и нет античастиц, то оператор $\bar{\psi}^{(+)}$ при действии на вектор начального состояния дает нуль. Итак, оператор $\bar{\psi}^{(+)}(x) \gamma_{\mu} \psi^{(+)}(x)$ не дает вклада в вычисляемый нами матричный элемент. Ясно также, что равен нулю вклад в этот матричный элемент оператора — $\psi^{(-)}(x) \gamma_{\mu} \bar{\psi}^{(+)}(x)$.

Рассмотрим два оставшихся оператора в правой части разложения (10.5). Подействуем оператором $\bar{\psi}_{\alpha}^{(-)}(x)$ налево на вектор $\Phi_{p'r'}^{+}$. Имеем

$$\Phi_0^{+} c_{r'}(p') \bar{\psi}_{\alpha}^{(-)}(x) = \Phi_0^{+} ([c_{r'}(p'), \bar{\psi}_{\alpha}^{(-)}(x)]_{+} - \bar{\psi}_{\alpha}^{(-)}(x) c_{r'}(p')). \quad (10.12)$$

С помощью перестановочных соотношений (6.40) находим

$$\begin{aligned}[c_{r'}(p') \bar{\psi}_{\alpha}^{(-)}(x)]_{+} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}_{\alpha}^r(p) e^{-ipx} [c_{r'}(p'), c_r^{+}(p)]_{+} dp = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} e^{-ip'x} \bar{u}_{\alpha}^{r'}(p').\end{aligned}\quad (10.13)$$

Из условия (6.46) путем эрмитова сопряжения получаем

$$\Phi_0^{+} c_r^{+}(p) = 0, \quad \Phi_0^{+} d_r^{+}(p) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\Phi_0^+ \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) = 0, \quad \Phi_0^+ \psi_\beta^{(-)}(x) = 0. \quad (10.14)$$

Из (10.12)—(10.14) получаем

$$\Phi_0^+ c_{r'}(p') \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) = \Phi_0^+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}_\alpha^{r'}(p') e^{-ip'x}. \quad (10.15)$$

Действуя оператором $\bar{\psi}^{(-)}(x)$ налево на конечный вектор $\Phi_0^+ c_{r'}(p')$, получаем вектор Φ_0^+ , который умножается на функцию, являющуюся решением свободного уравнения Дирака для сопряженного спинора. В общем случае, если вектор Φ_1 удовлетворяет условию

$$\Phi_1^+ \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) = 0$$

(Φ_1 —вектор, описывающий состояние, в котором нет электронов),

$$\begin{aligned} \Phi_1^+ c_{r'}(p') \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) &= \Phi_1^+ ([c_{r'}(p'), \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)]_+ - \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) c_{r'}(p')) = \\ &= \Phi_1^+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}_\alpha^{r'}(p') e^{-ip'x}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Таким образом, при действии налево оператор $\bar{\psi}^{(-)}(x)$ уничтожает электрон. Это можно показать и другим способом. Из (8.16) нетрудно видеть, что

$$\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) = (\psi_\beta^{(+)}(x))^+ (\gamma_4)_{\beta\alpha}.$$

Отсюда находим

$$\Phi_{p'r'}^+ \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) = (\psi_\beta^{(+)}(x) \Phi_{p'r'})^+ (\gamma_4)_{\beta\alpha}. \quad (10.17)$$

Из (10.17) и (10.9) получаем (10.15).

Рассмотрим теперь результат действия оператора $\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(-)}(x)$ налево на конечный вектор. С помощью (10.15) и (10.14) получаем

$$\Phi_0^+ c_{r'}(p') \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(-)}(x) = 0$$

(оператор $\bar{\psi}^{(-)}$ при действии налево на $\Phi_0^+ c_{r'}(p')$ уничтожает электрон, а второй оператор $\psi^{(-)}(x)$ при действии налево на Φ_0^+ дает нуль). Это легко показать и другим способом. Переставляя операторы, находим

$$\Phi_0^+ c_{r'}(p') \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) \psi_\beta^{(-)}(x) = \Phi_0^+ \psi_\beta^{(-)}(x) c_{r'}(p') \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) = 0. \quad (10.18)$$

Получаем нуль, так как в состоянии $\Phi_{p'r'}$ нет позитронов. Очевидно, что и в общем случае оператор $\psi^{(-)}$ при действии налево будет давать нуль, если в конечном состоянии нет позитронов.

Итак, оператор $\bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(-)}(x)$ также не дает вклада в рассматриваемый матричный элемент.

Отличный от нуля вклад дает оператор $\bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x)$. Используя (10.9) и (10.15), получаем

$$\begin{aligned} & (\Phi_{p'r'}^+ S^{(1)} \Phi_{pr}) = \\ & = (-i) \int (\Phi_0^+ c_{r'}(p') \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (-ie) A_\mu(x) \psi_\beta^{(+)}(x) c_r(p) \Phi_0) dx = \\ & = (-i) \Phi_0^+ \left[\int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}_\alpha^{r'}(p') e^{-ip'x} (-ie) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} A_\mu(x) \times \right. \\ & \quad \left. \times u_\beta^r(p) e^{ipx} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} dx \right] \Phi_0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Очевидно, что интеграл, который входит в это выражение, не является оператором поля. Считая, что вектор Φ_0 нормирован, $(\Phi_0^+ \Phi_0 = 1)$ получаем

$$\begin{aligned} & (\Phi_{p'r'}^+ S^{(1)} \Phi_{pr}) = \\ & = (-i) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p') (-ie) \gamma_\mu u^r(p) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times \\ & \quad \times \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} A_\mu(p' - p). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Здесь

$$A_\mu(p' - p) = \int e^{-i(p' - p)x} A_\mu(x) dx. \quad (10.21)$$

Вычислим теперь матричный элемент оператора $S^{(2)}$. В предыдущем параграфе смешанное T -произведение, входящее в $S^{(2)}$, было разложено по нормальным произведениям [см. (9.23)]. Рассмотрим вначале оператор

$$N(\bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)).$$

Очевидно, что он не дает вклада в интересующий нас матричный элемент. Действительно, представим операторы ψ и $\bar{\psi}$ в виде суммы положительно-частотной и отрицательно-частотной частей. Получим сумму произведений, в каждое из которых входят четыре оператора поля. Ясно, что в каждое произведение входит не меньше двух положительно-частотных либо отрицательно-частотных операторов. Два положительно-частотных оператора при действии на начальный вектор, описывающий один электрон, дают нуль. Два отрицательно-частотных оператора при действии налево на конечный вектор состояния, описывающий один электрон, также дают нуль.

Рассмотрим нормальные произведения с одним хронологическим спариванием. В разложении (9.23) имеется два таких члена, дающих, как мы показали, одинаковый вклад в $S^{(2)}$. Поэтому достаточно рассмотреть один из них, например,

$$N(\bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)}). \quad (10.22)$$

Если $\psi(x_2)$ и $\bar{\psi}(x_1)$ разложить на положительно-частотную и отрицательно-частотную компоненты, то получим четыре члена. Из изложенного выше ясно, что при вычислении рассматриваемого матричного элемента следует учесть только один из них, а именно

$$\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \overline{\psi_\beta(x_1) \psi_\rho(x_2) (\gamma_\nu)_{\rho\sigma} \psi_\sigma^{(+)}(x_2)}. \quad (10.23)$$

Используя (10.9), (10.15) и (8.58), получаем

$$\begin{aligned} & (\Phi_{p'r'}^+ S^{(2)} \Phi_{pr}) = \\ & = (-i)^2 \Phi_0^+ \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0'} \right)^{1/2} e^{-ip'x_1} \bar{u}_\alpha^{r'}(p') (-ie) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \times \\ & \times \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \left[\int dp_1 \left(\frac{1}{\gamma p_1 - im} \right)_{\beta\rho} e^{ip_1(x_1-x_2)} \right] (-ie) (\gamma_\nu)_{\rho\sigma} e^{ipx_2} u_\sigma^r(p) \times \\ & \times \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) dx_1 dx_2 \Phi_0 = \\ & = (-i)^2 \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p') (-ie) \gamma_\mu \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma p_1 - im} \times \\ & \times (-ie) \gamma_\nu u^r(p) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} A_\mu(p' - p_1) A_\nu(p_1 - p) dp_1. \quad (10.24) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь матричный элемент оператора $S^{(3)}$. Отличный от нуля вклад в матричный элемент процесса рассеяния электронов внешним полем даст оператор

$$\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu \overline{\psi(x_2) \psi(x_3) \gamma_\rho \psi^{(+)}(x_3)}}. \quad (10.25)$$

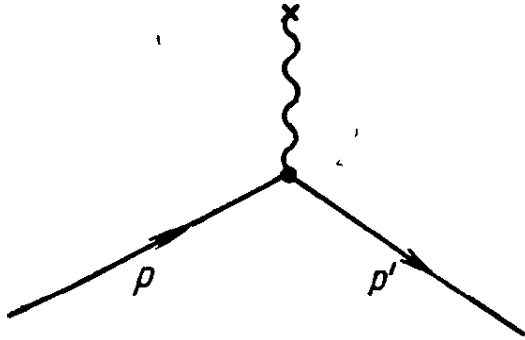
В разложении хронологического произведения, входящего в $S^{(3)}$, по нормальным имеется $3!$ членов, эквивалентных (10.25). Используя (10.8), (10.15) и (8.58), получаем

$$\begin{aligned} & (\Phi_0^+ c_{r'}(p') S^{(3)} c_r^+(p) \Phi_0) = \\ & = (-i)^3 \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p') (-ie) \gamma_\mu \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \frac{1}{\gamma p_1 - im} (-ie) \gamma_\nu \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma p_2 - im} (-ie) \gamma_\rho u^r(p) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times \\ & \times \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} A_\mu(p' - p_1) A_\nu(p_1 - p_2) A_\rho(p_2 - p) dp_1, dp_2. \quad (10.26) \end{aligned}$$

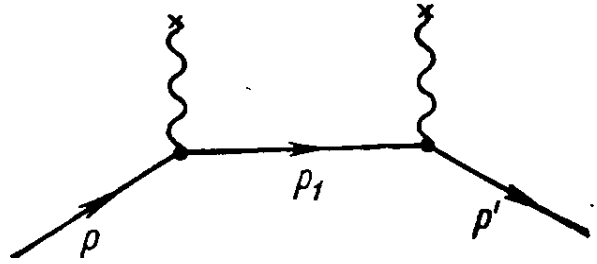
Теперь легко может быть записан вклад любого оператора $S^{(n)}$ в матричный элемент рассматриваемого процесса. Члены любого порядка в разложении матричного элемента по e строятся из одних и тех же величин, расположенных в определенном порядке и вхо-

дящих всюду с одними и теми же множителями: начального спинора $u^r(p)$, матриц γ , фурье-компонент электромагнитного потенциала, операторов $1/(\gamma p - im)$ и конечного спинора $\bar{u}^{r'}(p')$. Это определяется тем, что в рассматриваемый матричный элемент дают вклад только такие операторы, которые строятся из оператора $\psi^{(+)}$, уничтожающего начальный электрон, матриц γ , потенциала A , хронологических спариваний и оператора $\psi^{(-)}$, уничтожающего конечный электрон.

Если величинам, входящим в матричный элемент, поставить в соответствие линии и вершины диаграммы, то диаграммы, отвечающие членам любого порядка в разложении матричного элемента по



Р и с. 3



Р и с. 4

e , будут строиться из одних и тех же элементов. Матричному элементу первого порядка [см. (10.20)] поставим в соответствие диаграмму, изображенную на рис. 3.

Пусть прямой линии, выходящей из диаграммы, которой приписан импульс p' , отвечает в матричном элементе спинор

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p'),$$

входящей линии с импульсом p отвечает спинор $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u^r(p)$,

вершине — матрица $(-ie)\gamma_\mu$, а волнистой линии с крестиком на конце — фурье-компонента электромагнитного потенциала $A_\mu(p' - p)$ (аргумент — разность выходящего и входящего 4-импульсов).

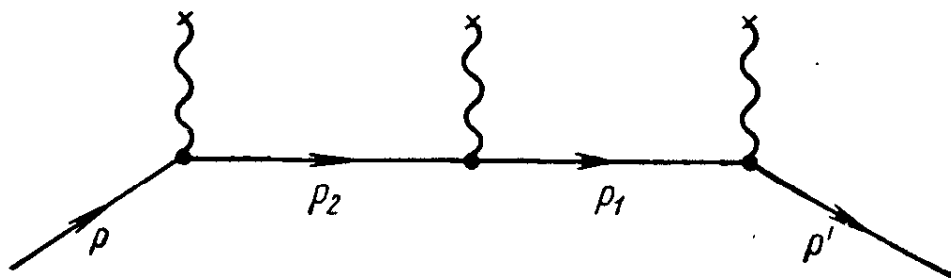
Для получения матричного элемента (10.20) необходимо, двигаясь в направлении, противоположном стрелкам на прямых линиях, выписать величины, отвечающие прямым линиям и вершине на диаграмме рис. 3, а затем умножить полученное выражение на фурье-компоненту потенциала, отвечающую волнистой линии. Найденное выражение следует умножить также на $-i$.

Матричному элементу (10.24) (член следующего порядка) поставим в соответствие диаграмму рис. 4. По сравнению с диаграммой, изображенной на рис. 3, на этой диаграмме имеется один но-

вый элемент — внутренняя линия. Припишем этой линии импульс p_1 и условимся, что ей отвечает оператор

$$-\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma p_1 - im}.$$

Примем для внешних линий и вершин диаграммы рис. 4 те же правила соответствия, что и для диаграммы рис. 3. Очевидно, что для получения матричного элемента (10.24) необходимо, двигаясь против стрелок на сплошных линиях, последовательно выписать те величины, которые отвечают линиям и вершинам, умножить полученное выражение на фурье-компоненты потенциала, отвечающие волнистым линиям, а затем проинтегрировать полученное выражение по импульсу p_1 . Найденное таким способом выражение следует умножить на $(-i)^2$.



Р и с. 5

Если принять сформулированные выше правила, то нетрудно видеть, что матричному элементу третьего порядка (10.26) соответствует диаграмма рис. 5.

Диаграмма, отвечающая члену n -го порядка, очевидно, состоит из n вершин и n волнистых линий (число гамильтонианов взаимодействия), $n - 1$ внутренней линии (число хронологических спариваний) и двух сплошных внешних линий (неспаренные операторы).

Таким образом, диаграммы позволяют представить графически члены ряда теории возмущений. Они носят название *диаграмм Фейнмана*. С помощью диаграмм Фейнмана легко учесть (по теории возмущений) все определяемые гамильтонианом взаимодействия возможности перехода системы из начального состояния в конечное.

На рис. 3 электрон взаимодействует с внешним полем и из состояния с импульсом p переходит в состояние с импульсом p' . На рис. 4 электрон взаимодействует с внешним полем и переходит из состояния с импульсом p в промежуточное (виртуальное) состояние с импульсом p_1 ($p_1^2 \neq m^2$, p_1 — переменная интегрирования), распространяется в этом состоянии, затем еще раз взаимодействует с внешним полем и переходит в конечное состояние с импульсом p . Оператор $\frac{(-1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma p_1 - im}$, отвечающий внутренней линии диаграммы (распространению электрона в виртуальном состоянии), называется *электронным пропагатором*. На рис. 5 электрон переходит из начального состояния в промежуточное с импульсом p_2 , затем в про-

межуточное с импульсом p_1 , наконец, из промежуточного с импульсом p_1 в конечное состояние.

Диаграммы более высоких порядков отличаются от этих диаграмм дополнительными переходами в промежуточные состояния, вызываемыми взаимодействием с внешним полем. Электрон, взаимодействуя с внешним полем, может переходить либо из реального состояния в реальное, либо из реального в виртуальное (из виртуального в реальное), либо из виртуального в виртуальное. Эти возможности и реализуются диаграммами Фейнмана.

В следующих параграфах мы рассмотрим взаимодействие квантованного электромагнитного и электрон-позитронного полей и научимся строить диаграммы Фейнмана для различных процессов с участием электронов, позитронов и γ -квантов.

В заключение вернемся к рассмотрению оператора $S^{(3)}$. В разложении входящего в $S^{(3)}$ смешанного T -произведения по нормальным, кроме учтенного нормального произведения с двумя хронологическими спариваниями, имеется также следующий член:

$$N \left(\overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \gamma_\rho \psi(x_3)} \right). \quad (10.27)$$

Этот оператор представляет собой произведение оператора $N(\bar{\psi}(x_3) \gamma_\rho \psi(x_3))$ на функцию $\overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)}$, не имеющую общих переменных с оператором. Матричный элемент оператора (10.27) пропорционален, следовательно, матричному элементу оператора $S^{(1)}$.

Нормальные произведения, распадающиеся на произведение двух множителей, не имеющих общих переменных (оператор поля и произведение хронологических спариваний), при вычислении матричного элемента перехода учитывать не следует. Действительно, сгруппируем члены S -матрицы, пропорциональные $N(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)$. С учетом эквивалентности членов, отличающихся перестановкой переменных, получаем

$$\begin{aligned} & (-i) \int (-ie) N(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)) A_\mu(x) dx \left[1 + \frac{(-i)^2 (-ie)^2}{2!} \times \right. \\ & \times \int N(\overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) dx_1 dx_2} + \dots \left. \right]. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Нетрудно видеть, что ряд в квадратных скобках представляет собой матричный элемент

$$(\Phi_0^+ S \Phi_0). \quad (10.29)$$

Очевидно, что вклад в матричный элемент (10.29) дают только те члены S -матрицы, в которых спарены все операторы поля. Имеем

$$(\Phi_0^+ S^{(0)} \Phi_0) = 1, \quad (\Phi_0^+ S^{(1)} \Phi_0) = 0,$$

$$(\Phi_0^+ S^{(2)} \Phi_0) = \frac{(-i)^2}{2!} \int (-ie)^2 \overline{\psi(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1)} \overline{\psi(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2)} \times \\ \times A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) dx_1 dx_2 \text{ и т. д.}$$

Аналогично можно убедиться, что матричный элемент любого члена S -матрицы, который не распадается на произведение множителей (оператор поля и хронологические спаривания), не имеющих общих переменных, умножается на $(\Phi_0^+ S \Phi_0)$.

Матричный элемент рассмотренного процесса рассеяния электрона внешним полем может быть, следовательно, записан в следующем виде:

$$(\Phi_{p'r'}^+ S \Phi_{pr}) = (\Phi_0^+ S \Phi_0) R_{p'r';pr}, \quad (10.30)$$

где матричному элементу $R_{p'r';pr}$ отвечают диаграммы рис. 3—5 и т. д.

Векторы состояния (10.2) описывают электрон и вакуум. Нас интересует амплитуда вероятности перехода электрона из состояния с импульсом p в состояние с импульсом p' при условии, что вакуум останется вакуумом (условная вероятность). Чтобы получить эту величину, полную амплитуду перехода $(\Phi_{p'r'}^+ S \Phi_{pr})$ нужно разделить на амплитуду вероятности того, что вакуум останется вакуумом, т. е. на $(\Phi_0^+ S \Phi_0)$. Таким образом, матричный элемент рассеяния электрона дается отношением

$$\frac{(\Phi_{p'r'}^+ S \Phi_{pr})}{(\Phi_0^+ S \Phi_0)}. \quad (10.31)$$

Отметим, что это замечание относится не только к процессу рассеяния электрона внешним полем, но и ко всем физическим процессам.

§ 11. Процессы с участием электронов, позитронов и γ -квантов.

Рассеяние γ -кванта электроном

В этом параграфе будет рассмотрено взаимодействие квантованного электромагнитного и электрон-позитронного полей и сформулированы правила построения диаграмм Фейнмана для процессов с участием электронов, позитронов и γ -квантов.

Начнем с рассмотрения процесса рассеяния γ -кванта электроном (эффект Комптона):

$$\gamma + e \rightarrow \gamma + e. \quad (11.1)$$

Пусть k и p (k' и p') — соответственно 4-импульсы начальных (конечных) фотона и электрона; r и r' — проекции спина начального и конечного электронов, а λ и λ' — индексы векторов поляризации

начального и конечного фотонов (начальный и конечный фотоны могут обладать только поперечной поляризацией, т. е. λ и λ' принимают значения 1 и 2). Начальный и конечный векторы состояния равны:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{pr, k\lambda} &= c_r^+(p) a_\lambda^+(k) \Phi_0, \\ \Phi_{p'r', k'\lambda'} &= c_{r'}^+(p') a_{\lambda'}^+(k') \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Рассмотрим матричный элемент процесса

$$(\Phi_{p'r', k'\lambda'}^+ S \Phi_{pr, k\lambda}). \quad (11.3)$$

Оператор S дается выражением (10.4), а гамильтониан взаимодействия равен

$$\mathcal{H}_I(x) = -ieN (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)) A_\mu(x), \quad (11.4)$$

где $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $A_\mu(x)$ — операторы поля.

На начальный и конечный векторы состояния будем действовать вначале операторами электрон-позитронного поля, а затем операторами электромагнитного поля. Покажем, что оператор $S^{(1)}$ не дает вклада в матричный элемент процесса (11.1). Очевидно, что из четырех членов, возникающих при разложении $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ на положительно-частотные и отрицательно-частотные части, только оператор $\bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x)$ дает отличный от нуля вклад в матричный элемент. Из (10.10) и (10.16) получаем

$$\begin{aligned} \psi_\beta^{(+)}(x) c_r^+(p) a_\lambda^+(k) \Phi_0 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u_\beta^r(p) e^{ipx} a_\lambda^+(k) \Phi_0, \\ \Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') c_{r'}(p') \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x) &= \Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}_\alpha^{r'}(p') e^{-ip'x}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Чтобы найти матричный элемент $S^{(1)}$, необходимо, следовательно, вычислить*

$$(\Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') A_\mu^{\text{tr}}(x) a_\lambda^+(k) \Phi_0). \quad (11.6)$$

Оператор $A_\mu^{\text{tr}}(x)$ равен

$$A_\mu^{\text{tr}}(x) = A_\mu^{\text{tr}(+)}(x) + A_\mu^{\text{tr}(-)}(x), \quad (11.7)$$

* Как показано в § 7, вследствие условия Лоренца и градиентной инвариантности при вычислении матричных элементов необходимо учитывать только поперечную часть неспаренных операторов электромагнитного поля.

где

$$A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1,2} e_{\mu}^{\lambda}(k) a_{\lambda}(k) e^{ikx} dk,$$

$$A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1,2} e_{\mu}^{\lambda}(k) a_{\lambda}^+(k) e^{-ikx} dk. \quad (11.8)$$

Подействуем оператором $A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x)$ направо на вектор $a_{\lambda}^+(k) \Phi_0$:

$$A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) a_{\lambda}^+(k) \Phi_0 = ([A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x), a_{\lambda}^+(k)] + a_{\lambda}^+(k) A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x)) \Phi_0. \quad (11.9)$$

Используя перестановочные соотношения (7.40), из (11.8) получаем

$$\begin{aligned} [A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x), a_{\lambda}^+(k)] &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda'=1,2} e_{\mu}^{\lambda'}(k') e^{ik'x} [a_{\lambda'}(k'), a_{\lambda}^+(k)] dk' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda}(k) e^{ikx}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Так как

$$A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (11.11)$$

то из (11.9) и (11.10) находим

$$A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) a_{\lambda}^+(k) \Phi_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda}(k) e^{ikx} \Phi_0. \quad (11.12)$$

Отметим, что если Φ — любой вектор, удовлетворяющий условию

$$A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) \Phi = 0, \quad (11.13)$$

(Φ описывает состояние, в котором нет фотонов с поперечной поляризацией), то аналогичным образом

$$A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) a_{\lambda}^+(k) \Phi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda}(k) e^{ikx} \Phi. \quad (11.14)$$

Оператором $A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x)$ подействуем налево на вектор $\Phi_0^+ a_{\lambda'}(k')$. Находим

$$\begin{aligned} \Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) &= \Phi_0^+ ([a_{\lambda'}(k'), A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x)] + \\ &+ A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) a_{\lambda'}(k')) = \Phi_0^+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda'}(k') e^{-ik'x}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

При получении этого соотношения были использованы перестановочные соотношения (7.40), разложение (11.8) и условие

$$\Phi_0^+ A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) = 0, \quad (11.16)$$

которое следует из

$$\Phi_0^+ a_{\lambda}^+(k) = (a_{\lambda}(k) \Phi_0)^+ = 0, \quad \lambda = 1, 2.$$

Отметим, что соотношение (11.15) можно получить иначе. Из (11.8) очевидно, что

$$A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) = (A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x))^+. \quad (11.17)$$

Находим

$$\Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) = (A_{\mu}^{\text{tr}(+)}(x) a_{\lambda'}^+(k') \Phi_0)^+. \quad (11.18)$$

Используя (11.12), получаем отсюда (11.15).

Если вектор Φ_1 описывает любое состояние, в котором нет поперечных фотонов ($\Phi_1^+ A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) = 0$), то, очевидно, что

$$\Phi_1^+ a_{\lambda'}(k') A_{\mu}^{\text{tr}(-)}(x) = \Phi_1^+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0'}} e_{\mu}^{\lambda'}(k') e^{-ik'x}. \quad (11.19)$$

Рассмотрим теперь матричный элемент (11.6). Используя (11.7), (11.12) и (11.15), получаем

$$\begin{aligned} & (\Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') A_{\mu}^{\text{tr}}(x) a_{\lambda}^+(k) \Phi_0) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda}(k) e^{ikx} (\Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') \Phi_0) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2k_0'}} e_{\mu}^{\lambda'}(k') e^{-ik'x} (\Phi_0^+ a_{\lambda}^+(k) \Phi_0) \right]. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Очевидно, что

$$(\Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') \Phi_0) = 0, \quad (\Phi_0^+ a_{\lambda}^+(k) \Phi_0) = 0. \quad (11.21)$$

Таким образом, $(\Phi_{p'r', k'\lambda'} S^{(1)} \Phi_{pr, k\lambda}) = 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению матричного элемента оператора $S^{(2)}$. Ясно, что в разложении T -произведения операторов электрон-позитронного поля по нормальным произведениям отличный от нуля вклад дает член

$$\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_{\mu} \overline{\psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_{\nu} \psi^{(+)}(x_2)} \quad (11.22)$$

(оператор $\psi^{(+)}(x_2)$ уничтожает начальный электрон, а $\bar{\psi}^{(-)}(x_1)$ уничтожает конечный электрон). Напомним, что таких членов в выражении для S -матрицы 2!. Используя (11.5), получаем:

$$\begin{aligned} & (\Phi_{p'r', k'\lambda'} S^{(2)} \Phi_{pr, k\lambda}) = (-i)^2 \int dx_1 dx_2 dp_1 \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \times \right. \\ & \times \bar{u}^{r'}(p') e^{-ip'x_1} (-ie) \gamma_{\mu} \frac{(-1)}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x_1-x_2)} \frac{1}{\hat{p}_1 - im} (-ie) \times \end{aligned}$$

$$\times \gamma_v u^r(p) e^{ipx_2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) a_\lambda^+(k) \Phi_0 \right) \Big], \quad (11.23)$$

где $\hat{p}_1 = p_1 \gamma = p_{1\mu} \gamma_\mu$. Этим обозначением мы будем широко пользоваться в дальнейшем.

В соответствии с теоремой Вика имеем

$$T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) = N(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) + \overline{A_\mu(x_1)} A_\nu(x_2). \quad (11.24)$$

Далее получаем*

$$N(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) = A_\mu^{(+)}(x_1) A_\nu^{(+)}(x_2) + A_\mu^{(-)}(x_1) A_\nu^{(+)}(x_2) + \\ + A_\nu^{(-)}(x_2) A_\mu^{(+)}(x_1) + A_\mu^{(-)}(x_1) A_\nu^{(-)}(x_2). \quad (11.25)$$

Очевидно, что оператор $A_\mu^{(+)}(x_1) A_\nu^{(+)}(x_2)$ не дает вклада в матричный элемент (11.23) (оператор $A_\nu^{(+)}(x_2)$ уничтожает начальный фотон, затем оператор $A_\mu^{(+)}(x_1)$, действуя на вектор Φ_0 , дает нуль). Вклад оператора $A_\mu^{(-)}(x_1) A_\nu^{(-)}(x_2)$ также равен нулю. Отличный от нуля вклад в матричный элемент (11.23) дают только второй и третий члены разложения (11.25). С помощью (11.14) и (11.19) находим

$$\left(\Phi_0^+ a_{\lambda'}(k') N(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) a_\lambda^+(k) \Phi_0 \right) = \\ = (\Phi_0^+ \Phi_0) \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k'_0}} e_{\nu}^{\lambda'}(k') e^{-ik'x_2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda}(k) e^{ikx_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k'_0}} e_{\mu}^{\lambda'}(k') e^{-ik'x_1} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\nu}^{\lambda}(k) e^{ikx_2} \right]. \quad (11.26)$$

Подставим (11.26) в (11.23). Интегрируя по переменным x_1 и x_2 используя условие нормировки $(\Phi_0^+ \Phi_0) = 1$, получаем**

$$\left(\Phi_{p'r', k'\lambda'} S^{(2)} \Phi_{pr, k\lambda} \right) = \\ = (-i)^2 \left\{ \int \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p') (-ie) \gamma_\mu (2\pi)^4 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \delta(p' + k' - p_1) \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_1 - im} (-ie) \gamma_\nu (2\pi)^4 \delta(p_1 - p - k) u^r(p) \times \right. \right.$$

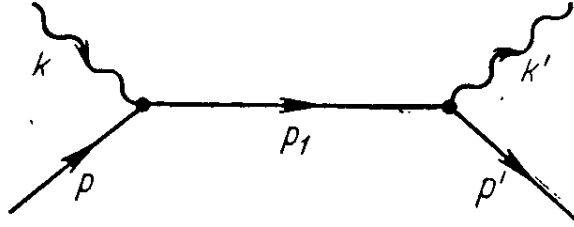
* При вычислении матричных элементов S -матрицы следует учитывать только поперечную часть оператора A , т. е. A^{tr} (см. § 7). В дальнейшем индекс tr у неспаренных операторов электромагнитного поля будет опускаться.

** Чтобы установить правила соответствия матричных элементов и диаграмм, мы выписываем все функции и операторы вместе с теми множителями, с которыми они возникают.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0'}} e_{\mu}^{\lambda'}(k') \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\nu}^{\lambda}(k) \Big] dp_1 + \\
& + \int \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p') (-ie) \gamma_{\mu} (2\pi)^4 \delta(p' - k - p_1) \times \right. \\
& \times \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_1 - im} (-ie) \gamma_{\nu} (2\pi)^4 \delta(p_1 + k' - p) u^r(p) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times \\
& \times \left. \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda}(k) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0'}} e_{\nu}^{\lambda'}(k') \right] dp_1 \Big\}. \quad (11.27)
\end{aligned}$$

Поставим в соответствие первому члену в (11.27) диаграмму Фейнмана рис. 6. Условимся, что прямым выходящей и входящей линиям отвечают конечный и начальный спиноры

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p') \quad \text{и} \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u(p).$$



Р и с. 6

Внутренней линии, помеченной импульсом p_1 , отвечает матрица

$$\frac{(-1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p} - im}.$$

Первой вершине отвечает $(-ie) \gamma_{\nu} (2\pi)^4 \delta(p_1 - p - k)$ волнистой линии, входящей в эту вершину — вектор поляризации начального фотона $e_{\nu}^{\lambda}(k)$, умноженный на $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}}$. Аргументом δ -функции является разность между выходящим из вершины 4-импульсом и суммой входящих 4-импульсов. Таким образом, δ -функция обеспечивает сохранение полного 4-импульса в вершине.

Пусть второй вершине на диаграмме отвечает матрица

$$(-ie) \gamma_{\mu} (2\pi)^4 \delta(p' + k' - p_1),$$

а волнистой линии, выходящей из этой вершины, — множитель

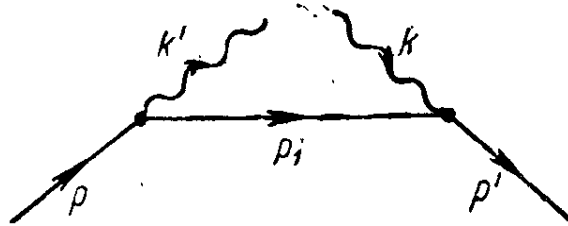
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0'}} e_{\mu}^{\lambda'}(k')$$

(аргументом δ -функции является разность между полным выходящим и полным входящим 4-импульсами).

Если принять эти правила, то как видно из рис. 6 и выражения (11.27), для получения матричного элемента нужно, двигаясь вдоль сплошной линии против стрелки (начиная с конца), выписать все

элементы, которые отвечают прямым линиям и вершинам. Затем полученное выражение следует умножить на величины, отвечающие волнистым линиям, произвести суммирование по индексам μ и ν и интегрирование по импульсу внутренней линии p_1 .

Диаграмма рис. 6 описывает следующую последовательность актов взаимодействия. Начальный электрон поглощает начальный фотон и переходит в промежуточное (виртуальное) состояние с импульсом p_1 . Затем электрон движется в промежуточном состоянии. Наконец, виртуальный электрон с импульсом p_1 испускает конечный фотон и переходит в конечное состояние. По всем импульсам виртуального электрона следует произвести интегрирование.



Р и с. 7

Вершины диаграммы определяются гамильтонианом взаимодействия. В каждую вершину входит и из каждой вершины выходит сплошная линия (ψ и $\bar{\psi}$ в гамильтониане); кроме того, в вершину входит или из вершины выходит волнистая линия (оператор A). Сохранение полного 4-импульса в каждой вершине обеспечивает сохранение полного 4-импульса в процессе рассеяния. Отметим, что число вершин совпадает с порядком теории возмущений по e .

Очевидно, что кроме той возможности перехода из начального состояния в конечное, которая описывается диаграммой рис. 6, имеется еще и другая возможность, а именно: начальный электрон может вначале испустить конечный фотон, перейти в промежуточное состояние, а затем поглотить начальный фотон и перейти в конечное состояние. Этой возможности отвечает диаграмма рис. 7.

В соответствии со сформулированными правилами первой вершине следует поставить в соответствие

$$(-ie)\gamma_\nu (2\pi)^4 \delta(p_1 + k' - p),$$

второй

$$(-ie)\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta(p' - k - p_1)$$

(аргументом как первой, так и второй δ -функции является разность суммарных выходящих и входящих 4-импульсов). Волнистой линии, выходящей из первой вершины, следует поставить в соответствие

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k'_0}} e^{\lambda'}_\nu(k'),$$

а волнистой линии, входящей во вторую вершину, —

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda}(k).$$

Двигаясь против стрелок на сплошной линии и выписывая члены, отвечающие элементам диаграммы, получаем второе слагаемое матричного элемента (11.27).

Таким образом, во втором порядке теории возмущений процесс рассеяния γ -кванта электроном описывается двумя диаграммами.

Очевидно, что по импульсу промежуточного электрона можно проинтегрировать. В результате получаем следующее выражение для матричного элемента комптон-эффекта во втором порядке теории возмущений:

$$\begin{aligned} (\Phi_{p', r', k', \lambda'}^{+} S^{(2)} \Phi_{pr, k\lambda}) = & (-i)^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{m^2}{4p_0 p'_0 k_0 k'_0} \right)^{1/2} \times \\ & \times \frac{(-1)}{(2\pi)^4} (-ie)^2 (2\pi)^8 \delta(p' + k' - p - k) \times \\ & \times \left[\bar{u}^{r'}(p') e_{\mu}^{\lambda'}(k') \gamma_{\mu} \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - im} e_{\nu}^{\lambda}(k) \gamma_{\nu} u^r(p) + \right. \\ & \left. + \bar{u}^{r'}(p') e_{\mu}^{\lambda}(k) \gamma_{\mu} \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}' - im} e_{\nu}^{\lambda'}(k') \gamma_{\nu} u^r(p) \right]. \end{aligned} \quad (11.27a)$$

Рассмотрим теперь оператор $S^{(3)}$ — следующий член в разложении S -матрицы. Этот оператор содержит T -произведение

$$T(A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_2) A_{\rho}(x_3)).$$

Если это T -произведение разложить по нормальным произведениям, то получим член $N(A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_2) A_{\rho}(x_3))$ и сумму всех возможных нормальных произведений с одним хронологическим спариванием. Очевидно, что нормальные произведения с одним хронологическим спариванием не дадут вклада в матричный элемент процесса (рассмотренный ранее случай одного оператора A). Рассмотрим нормальные произведения трех операторов электромагнитного поля. Если все три оператора — операторы рождения, то, действуя на лево на конечный вектор состояния, получим нуль. Если один оператор является оператором уничтожения, то два других — операторы рождения, и получим также нуль. Если два или три оператора — операторы уничтожения, то получим нуль при действии на начальный вектор состояния. Таким образом,

$$(\Phi_{p', r', k', \lambda'}^{+} S^{(3)} \Phi_{pr, k\lambda}) = 0. \quad (11.28)$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что операторы $S^{(2m+1)}$ (m — любое целое число) не дают вклада в матричный элемент процесса (11.1).

Рассмотрим оператор $S^{(4)}$. Отличный от нуля вклад в матричный элемент процесса дает, в частности, следующее произведение операторов электрон-позитронного поля:

$$\overline{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi}(x_1) \overline{\psi}(x_2) \gamma_\nu \overline{\psi}(x_2) \overline{\psi}(x_3) \gamma_\rho \overline{\psi}(x_3) \overline{\psi}(x_4) \gamma_\sigma \psi^{(+)}(x_4). \quad (11.29)$$

В разложении исходного T -произведения имеется $4!$ членов, эквивалентных (11.29).

Перейдем теперь к рассмотрению нормальных произведений операторов электромагнитного поля. Очевидно, что отличный от нуля вклад в матричный элемент процесса (11.1) могут дать следующие нормальные произведения с одним хронологическим спариванием:

$$\left. \begin{aligned} & N(\overline{A}_\mu(x_1) \overline{A}_\nu(x_2) \overline{A}_\rho(x_3) \overline{A}_\sigma(x_4)), \\ & N(\overline{A}_\mu(x_1) \overline{A}_\nu(x_2) \overline{A}_\rho(x_3) A_\sigma(x_4)) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (11.30)$$

Далее, отличный от нуля вклад в матричный элемент могут дать только произведения отрицательно-частотных и положительно-частотных компонент операторов, т. е.

$$\left. \begin{aligned} & \overline{A}_\mu(x_1) \overline{A}_\sigma(x_4) [A_\nu^{(-)}(x_2) A_\rho^{(+)}(x_3) + A_\rho^{(-)}(x_3) A_\nu^{(+)}(x_2)], \\ & \overline{A}_\mu(x_1) \overline{A}_\rho(x_3) [A_\nu^{(-)}(x_2) A_\sigma^{(+)}(x_4) + A_\sigma^{(-)}(x_4) A_\nu^{(+)}(x_2)] \end{aligned} \right\} \quad (11.31)$$

и т. д.

Для вычисления матричного элемента оператора $S^{(4)}$ необходимо знать хронологическое спаривание операторов электромагнитного поля. Используя перестановочные соотношения (7.40) и разложения (7.35), из общего выражения (8.49) получаем

$$\begin{aligned} & \overline{A}_\mu(x_1) \overline{A}_\sigma(x_4) = \\ & = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(k) e_\sigma^\lambda(k) \eta_\lambda \frac{1}{2k_0} e^{ik(x_1-x_4)} dk, & x_{10} > x_{40}; \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \sum_{\lambda=1}^4 e_\sigma^\lambda(k) e_\mu^\lambda(k) \eta_\lambda \frac{1}{2k_0} e^{-ik(x_1-x_4)} dk, & x_{40} > x_{10}. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.32)$$

Векторы $e^\lambda(k)$ образуют полную систему. Из (7.15) очевидно, что

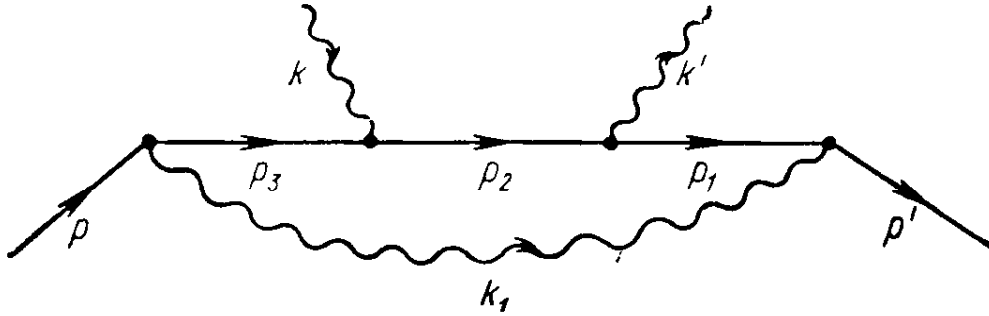
$$\sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(k) e_\sigma^\lambda(k) \eta_\lambda = \delta_{\mu\sigma}. \quad (11.33)$$

Сравнивая (11.32) и (8.41), заключаем, что

$$\begin{aligned} & \overline{A}_\mu(x_1) \overline{A}_\sigma(x_4) = \delta_{\mu\sigma} I(x_1 - x_4; 0) = \\ & = \frac{-i}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\sigma} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{e^{ik(x_1-x_4)}}{k^2 - i\varepsilon} dk. \end{aligned} \quad (11.34)$$

Вычислим теперь вклад в матричный элемент комpton-эффекта оператора:

$$\begin{aligned}
 & (-i)^4 \int \bar{\psi}^{(-)}(x_1) (-ie) \gamma_\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) (-ie) \gamma_\nu \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \times \\
 & \times (-ie) \gamma_\rho \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) (-ie) \gamma_\sigma \psi^{(+)}(x_4) A_\mu(x_1) A_\sigma(x_4) \times \\
 & \times A_\nu^{(-)}(x_2) A_\rho^{(+)}(x_3) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \quad (11.35)
 \end{aligned}$$



Р и с. 8

Используя (11.5), (11.12), (11.15), (11.34) и (8.58) и выполняя интегрирование по переменным x_1, x_2, \dots , получаем

$$\begin{aligned}
 & (\Phi_{p', r', k' \lambda'}^{+} S^{(4)} \Phi_{p r, k \lambda}) = \\
 & = (-i)^4 \int \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p') (-ie) \gamma_\mu (2\pi)^4 \delta(p' - p_1 - k_1) \times \right. \\
 & \times \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_1 - im} (-ie) \gamma_\nu (2\pi)^4 \delta(p_1 + k' - p_2) \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \times \\
 & \times \frac{1}{\hat{p}_2 - im} (-ie) \gamma_\rho (2\pi)^4 \delta(p_2 - k - p_3) \times \\
 & \times \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}_3 - im} (-ie) \gamma_\sigma (2\pi)^4 \delta(p_3 - p + k_1) u^r(p) \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \times \\
 & \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(-i)}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\sigma} \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_\nu^{\lambda'}(k') \times \\
 & \left. \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_\rho^\lambda(k) dp_1 dp_2 dp_3 dk_1 \right] + \dots \quad (11.36)
 \end{aligned}$$

Вычисленному члену матричного элемента оператора $S^{(4)}$ отвечает диаграмма рис. 8. По сравнению с рассмотренными ранее диаграммами на этой диаграмме имеется новый элемент — внутренняя волнистая линия. Очевидно, что этот новый элемент диаграммы связан

с хронологическим спариванием операторов электромагнитного поля. Поставим в соответствие внутренней волнистой линии диаграммы

$$\frac{(-i)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2} \delta_{\mu\sigma},$$

где k_1 — 4-импульс внутренней волнистой линии; μ и σ — индексы матриц, расположенных в вершинах, соединенных этой линией. Для всех остальных элементов примем те же правила соответствия, что и для диаграмм рис. 6 и 7. Если, двигаясь против стрелки вдоль сплошной линии рис. 8, выписывать величины, которые отвечают ли-

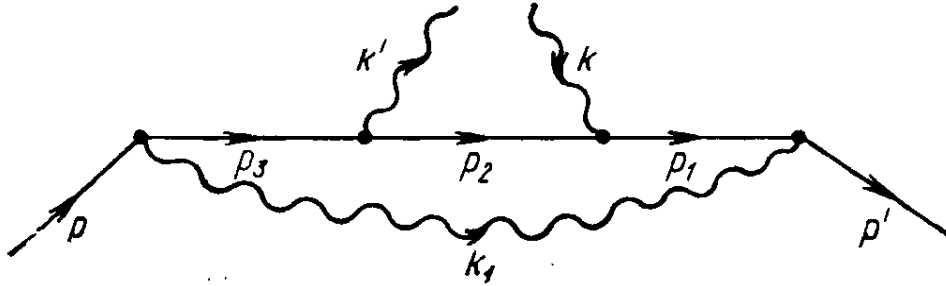


Рис. 9

ниям и вершинам, а затем умножить полученное выражение на величины, отвечающие волнистым линиям, и проинтегрировать полученное выражение по импульсам всех внутренних линий, то при этом получается вычисленный член матричного элемента.

Диаграмма рис. 8 описывает следующую последовательность актов поглощения и испускания. Начальный электрон испускает виртуальный фотон с импульсом k_1 и переходит в промежуточное состояние с импульсом p_3 . Затем виртуальный электрон поглощает начальный фотон и переходит в промежуточное состояние с импульсом p_2 . Далее виртуальный электрон с импульсом p_2 испускает конечный фотон и переходит в промежуточное состояние с импульсом p_1 . Наконец, виртуальный электрон с импульсом p_1 поглощает виртуальный фотон и переходит в конечное состояние. Величина

$$\frac{(-i)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2} \delta_{\mu\sigma}$$

описывает распространение виртуального фотона и называется *фотонным пропагатором*.

Очевидно, что второй член в квадратных скобках (11.31) приводит к слагаемому в матричном элементе, которому соответствует диаграмма рис. 9 (вначале испускается виртуальный фотон, далее испускается конечный фотон, затем поглощается начальный фотон и, наконец, поглощается виртуальный фотон).

Из изложенного ясно, что оператор (11.29) отвечает изображенному на рис. 10 остову диаграмм. Различные члены в разложении T -произведения операторов электромагнитного поля

соответствуют различным возможным способам присоединения начального, конечного и виртуального фотонов к вершинам на рис. 10. Отметим, что формальное интегрирование выражений, отвечающих этим диаграммам, приводит к бесконечностям. Чтобы вычислить истинный вклад членов четвертого порядка, необходимо произвести перенормировку массы и заряда электрона. После перенормировки вклад этих членов окажется конечным. Здесь мы не будем обсуждать



Р и с. 10

вопросы, связанные с перенормировками. Мы рассмотрели матричный элемент оператора $S^{(4)}$ лишь для того, чтобы показать, как строятся диаграммы более высокого, чем первый неисчезающий, порядка.

Рассеяние электрона на электроном

В качестве следующего примера рассмотрим процесс рассеяния электрона свободным электроном

$$e + e \rightarrow e + e. \quad (11.37)$$

Пусть p_1, p_2 , и p'_1, p'_2 обозначают 4-импульсы начальных и конечных электронов соответственно. Векторы, описывающие начальное и конечное состояния, равны

$$\begin{aligned} \Phi_{p_1, p_2} &= c^+(p_1) c^+(p_2) \Phi_0, \\ \Phi_{p'_1, p'_2} &= c^+(p'_1) c^+(p'_2) \Phi_0. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Здесь опущены спинорные индексы r_1, r_2, \dots . В дальнейшем там, где спинорные индексы не будут выписываться явно, они будут подразумеваться.

Наша задача состоит в вычислении матричного элемента

$$\left(\Phi_{p'_1, p'_2}^+ S \Phi_{p_1, p_2} \right) \quad (11.39)$$

в низшем порядке теории возмущений. Очевидно, что оператор $S^{(1)}$ не дает вклада в матричный элемент процесса (11.37).

Рассмотрим оператор $S^{(2)}$. В разложении T -произведения по нормальным произведениям следует учесть лишь член

$$N (\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x_1) \bar{\psi}^{(-)}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2)) \overline{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)}. \quad (11.40)$$

Действительно, матричный элемент может быть отличен от нуля только в том случае, если в произведении фермионных операторов имеется два положительно-частотных оператора (если число положительно-частотных операторов больше двух, то получается нуль при действии на начальный вектор; если меньше двух, то получается нуль при действии налево на конечный вектор состояния). Произведения двух положительно-частотных операторов входят в комбинациях $\psi^{(+)}\psi^{(+)}$, $\bar{\psi}^{(+)}\psi^{(+)}$, $\bar{\psi}^{(+)}\bar{\psi}^{(+)}$. Так как в начальном состоянии нет позитронов, то очевидно, что только произведение, содержащее первый из выписанных членов, дает отличный от нуля вклад. Учитывая также, что в начальном и конечном состояниях нет фотонов, заключаем, что отличный от нуля вклад в матричный элемент дает оператор (11.40).

Поддействуем на начальный вектор состояния оператором $\psi_{\beta_1}^{(+)}(x_1)\psi_{\beta_2}^{(+)}(x_2)$. Используя (10.8) и (10.10), имеем

$$\psi_{\beta_1}^{(+)}(x_1)\psi_{\beta_2}^{(+)}(x_2)c^{+}(p_1)c^{+}(p_2)\Phi_0 = \psi_{\beta_1}^{(+)}(x_1)\left([\psi_{\beta_2}^{(+)}(x_2), c^{+}(p_1)]_{+} - c^{+}(p_1)\psi_{\beta_2}^{(+)}(x_2)\right)c^{+}(p_2)\Phi_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{p_{10}p_{20}}\right)^{1/2} \times$$

$$\times [u_{\beta_2}(p_1)e^{ip_1x_2}u_{\beta_1}(p_2)e^{ip_2x_1} - u_{\beta_2}(p_2)e^{ip_2x_2}u_{\beta_1}(p_1)e^{ip_1x_1}]\Phi_0. \quad (11.41)$$

Таким образом, если на вектор, описывающий два электрона с импульсами p_1 и p_2 , подействовать операторам $\psi^{(+)}(x_1)\psi^{(+)}(x_2)$, то получим вектор Φ_0 , который умножается на антисимметризованное произведение (следствие тождественности электронов) соответствующих решений свободного уравнения Дирака.

Поддействуем теперь оператором $\bar{\psi}_{\alpha_1}^{(-)}(x_1)\bar{\psi}_{\alpha_2}^{(-)}(x_2)$ налево на конечный вектор состояния. Используя (10.13) и (10.15), находим

$$\begin{aligned} & \Phi_0^{+} c(p'_2) c(p'_1) \bar{\psi}_{\alpha_1}^{(-)}(x_1) \bar{\psi}_{\alpha_2}^{(-)}(x_2) = \\ & = \Phi_0^{+} c(p'_2) ([c(p'_1), \bar{\psi}_{\alpha_1}^{(-)}(x_1)]_{+} - \bar{\psi}_{\alpha_1}^{(-)}(x_1) c(p'_1)) \bar{\psi}_{\alpha_2}^{(-)}(x_2) = \\ & = \Phi_0^{+} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{p'_{10}p'_{20}}\right)^{1/2} [\bar{u}_{\alpha_2}(p'_2) e^{-ip'_2x_2} \bar{u}_{\alpha_1}(p'_1) e^{-ip'_1x_1} - \\ & \quad - \bar{u}_{\alpha_1}(p'_1) e^{-ip'_1x_2} \bar{u}_{\alpha_2}(p'_2) e^{-ip'_2x_1}]. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Очевидно, что оператор (11.40) равен

$$- \bar{\psi}_{\alpha_1}^{(-)}(x_1) \bar{\psi}_{\alpha_2}^{(-)}(x_2) \psi_{\beta_1}^{(+)}(x_1) \psi_{\beta_2}^{(+)}(x_2) (\gamma_{\mu})_{\alpha_1\beta_1} (\gamma_{\nu})_{\alpha_2\beta_2} \overline{A_{\mu}(x_1)} A_{\nu}(x_2). \quad (11.43)$$

Вычислим матричный элемент этого оператора. Используя (11.41), (11.42) и (11.34) и выполняя интегрирование по переменным x_1 и x_2 , получаем*

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{p'_1, p'_2}^+ S^{(2)} \Phi_{p_1, p_2}) = & \frac{(-i)^2}{2!} 2 \frac{(-i)}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{m^4}{p_{10} p_{20} p'_{10} p'_{20}} \right)^{1/2} \times \\
 & \times (-ie)^2 (2\pi)^8 \int \left[\left(\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu \delta(p'_1 - p_1 - k) u(p_1) \right) \times \right. \\
 & \times \left(\bar{u}(p'_2) \gamma_\nu \delta(p'_2 - p_2 + k) u(p_2) \right) - \\
 & - \left(\bar{u}(p'_2) \gamma_\mu \delta(p'_2 - p_1 - k) u(p_1) \right) \times \\
 & \left. \times \left(\bar{u}(p'_1) \gamma_\nu \delta(p'_1 - p_2 + k) u(p_2) \right) \right] \frac{1}{k^2} dk. \quad (11.44)
 \end{aligned}$$

Построим диаграммы Фейнмана, соответствующие матричному элементу (11.44). Поставим в соответствие первому члену в (11.44) диаграмму рис. 11. Будем считать, что правила соответствия линий и вершин этой диаграммы и частей матричного элемента те же, что и принятые нами ранее. Чтобы по диаграмме рис. 11 получить первый член матричного элемента (11.44), нужно, двигаясь против стрелок вдоль одной из сплошных линий, выписать все выражения, отвечающие встречающимся линиям и вершинам, затем полученный результат умножить на выражение, которое возникает в результате движения против стрелок вдоль второй сплошной линии, и, наконец, умножить все выражение на фотонный пропагатор и проинтегрировать по импульсу виртуального фотона. Диаграмма описывает следующие акты взаимодействия. Начальный электрон с импульсом p_2 испускает виртуальный фотон с импульсом k и переходит в конечное состояние с импульсом p'_2 . Другой начальный электрон, импульс которого равен p_1 , поглощает этот виртуальный фотон и переходит в конечное состояние с импульсом** p'_1 .

Второй член в матричном элементе (11.44) возникает вследствие тождественности электронов. Ему, очевидно, отвечает диаграмма рис. 12. Таким образом, из-за принципа Паули кроме первой возможности, описываемой диаграммой рис. 11, необходимо учесть также возможность перехода электронов из состояния с импульсами p_2 и p_1 в состояния с импульсами p'_1 и p'_2 соответственно (см. диаграмму рис. 12) и взять разность матричных элементов, отвечающих диаграммам рис. 11 и 12.

* При перемножении (11.42) и (11.41) возникают четыре члена. Нетрудно убедиться в том, что они попарно равны. С этим связан множитель 2 в выражении (11.44).

** Если направление стрелки на внутренней фотонной линии на диаграмме рис. 11 изменить на противоположное, то это будет соответствовать замене $k \rightarrow -k$ в первом члене интеграла (11.44). Таким образом, матричный элемент не изменится, если направление стрелки на внутренней фотонной линии изменить на обратное.

Из соотношений антикоммутации операторов рождения электронов следует, что матричный элемент (11.39) обязан быть антисимметричным относительно перестановки p_1 и p_2 или p'_1 и p'_2 (имеется в виду перестановка $p_1 r_1$ и $p_2 r_2$ или $p'_1 r'_1$ и $p'_2 r'_2$). Разность матричных элементов, дающихся диаграммами рис. 11 и 12, обладает, как легко видеть, требуемым свойством антисимметрии.

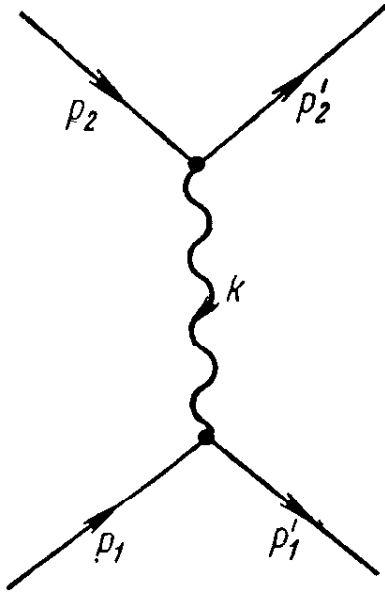


Рис. 11

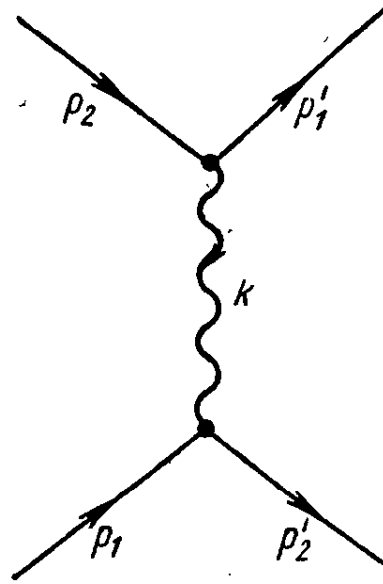


Рис. 12

В выражении (11.44) можно выполнить интегрирование по k и суммирование по ν . Окончательно получаем, что во втором порядке по e матричный элемент процесса рассеяния электрона электроном равен

$$\begin{aligned}
 & (\Phi_{p'_1, p'_2}^+ S^{(2)} \Phi_{p_1, p_2}) = \\
 & = (-i)^2 \frac{(-i)}{(2\pi)^4} \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{m^4}{p_{10} p_{20} p'_{10} p'_{20}} \right)^{1/2} (-ie)^2 (2\pi)^8 \times \\
 & \quad \times \left[\frac{(\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu u(p_1)) (\bar{u}(p'_2) \gamma_\mu u(p_2))}{(p'_1 - p_1)^2} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(\bar{u}(p'_2) \gamma_\mu u(p_1)) (\bar{u}(p'_1) \gamma_\mu u(p_2))}{(p'_2 - p_1)^2} \right] \delta(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2). \quad (11.45)
 \end{aligned}$$

Ясно, что $\delta(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)$ обеспечивает сохранение полной энергии и полного импульса.

Процессы с участием позитронов

В этом разделе будут рассматриваться такие процессы, в которых наряду с электронами и γ -квантами участвуют также позитроны.

Рассмотрим оператор

$$N (\bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi(x_1) \psi(x_2)} \gamma_\nu \psi(x_2)) N (A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) \quad (11.46)$$

и выясним, в матричные элементы каких процессов дает вклад этот оператор. Разложим спинорные операторы на положительно- и отрицательно-частотные части:

$$\begin{aligned} N (\bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi(x_1) \psi(x_2)} \gamma_\nu \psi(x_2)) &= \\ &= \bar{\psi}^{(+)}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi(x_1) \psi(x_2)} \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2) + \\ &+ \bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi(x_1) \psi(x_2)} \gamma_\nu \psi^{(-)}(x_2) + \\ &+ \bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi(x_1) \psi(x_2)} \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2) - \\ &- \psi^{(-)}(x_2) \overline{(\gamma_\mu \psi(x_1) \psi(x_2) \gamma_\nu)} \bar{\psi}^{(+)}(x_1). \end{aligned} \quad (11.47)$$

Как мы видели, третий член в правой части (11.47) дает вклад в эффект Комптона. Рассмотрим оператор

$$\bar{\psi}^{(+)}(x_1) \gamma_\mu \overline{\psi(x_1) \psi(x_2)} \gamma_\nu \psi^{(+)}(x_2) N (A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)). \quad (11.48)$$

Чтобы матричный элемент этого оператора был отличен от нуля, в начальном состоянии должны быть электрон и позитрон. Два оператора электромагнитного поля могут уничтожить два начальных или два конечных фотона или один начальный и один конечный фотон. Этим возможностям отвечают различные процессы. Учитывая, однако, закон сохранения 4-импульса, заключаем, что два γ -кванта должны быть в конечном состоянии, т. е. оператор (11.48) дает вклад в матричный элемент процесса превращения электрон-позитронной пары в два γ -кванта:

$$\bar{e} + e \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (11.49)$$

Очевидно, что все остальные операторы, входящие в $S^{(2)}$, не дают вклада в матричный элемент этого процесса. Обозначим 4-импульсы начальных электрона и позитрона соответственно p и p' , а 4-импульсы конечных фотонов k и k' . Начальный и конечный векторы состояния соответственно равны

$$\Phi_{p, p'} = c^+(p) d^+(p') \Phi_0, \quad \Phi_{k, k'} = a^+(k) a^+(k') \Phi_0. \quad (11.50)$$

Поддействуем оператором $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\beta^{(+)}(x_2)$ на начальный вектор $\Phi_{p, p'}$. Используя (10.10), а также разложения (8.16), пере-

становочные соотношения (6.40) и условия (6.46), получаем

$$\begin{aligned}
& \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \Psi_\beta^{(+)}(x_2) c^+(p) d^+(p') \Phi_0 = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u_\beta(p) e^{ipx_2} \left([\bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x_1), d^+(p')]_+ - \right. \\
& \quad \left. - d^+(p') \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \right) \Phi_0 = \\
& = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{p_0 p'_0} \right)^{1/2} u_\beta(p) e^{ipx_2} \bar{u}_\alpha(-p') e^{ip'x_1} \Phi_0. \quad (11.51)
\end{aligned}$$

В разложении оператора $N(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2))$ отличный от нуля вклад в матричный элемент процесса (11.49) дает член $A_\mu^{(-)}(x_1) A_\nu^{(-)}(x_2)$. Подействуем этим оператором налево на конечный вектор $\Phi_{k, k'}^+$. Используя (11.15), находим (см. примечание на стр. 101).

$$\begin{aligned}
& \Phi_0^+ a(k) a(k') A_\mu^{(-)}(x_1) A_\nu^{(-)}(x_2) = \\
& = \Phi_0^+ a(k) ([a(k'), A_\mu^{(-)}(x_1)] + A_\mu^{(-)}(x_1) a(k')) A_\nu^{(-)}(x_2) = \\
& = \Phi_0^+ \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4k_0 k'_0}} [e_\mu(k') e^{-ik'x_1} e_\nu(k) e^{-ikx_2} + \\
& \quad + e_\mu(k) e^{-ikx_1} e_\nu(k') e^{-ik'x_2}]. \quad (11.52)
\end{aligned}$$

Два члена возникают вследствие тождественности фотонов.

С помощью (11.51) и (11.52) получаем следующее выражение для матричного элемента процесса (11.49) во втором порядке теории возмущений по e :

$$\begin{aligned}
& (\Phi_{k, k'}^+ S^{(2)} \Phi_{p, p'}) = (-i)^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{m^2}{p_0 p'_0} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4k_0 k'_0}} \times \\
& \times \frac{(-1)}{(2\pi)^4} (2\pi)^8 (-ie)^2 \int \left[\bar{u}(-p') \gamma_\mu \delta(-p' + k' - p_1) \times \right. \\
& \times \frac{1}{\hat{p}_1 - im} \gamma_\nu \delta(p_1 - p - (-k)) u(p) e_\mu(k') e_\nu(k) + \\
& \quad + \bar{u}(-p') \gamma_\mu \delta(-p' - p_1 - (-k)) \times \\
& \quad \times \left. \frac{1}{\hat{p}_1 - im} \gamma_\nu \delta(p_1 + k' - p) u(p) e_\mu(k) e_\nu(k') \right] dp_1. \quad (11.53)
\end{aligned}$$

Этот матричный элемент имеет ту же структуру, что и матричный элемент эффекта Комптона [выражение (11.27)]. Поставим в соответствие первому члену в (11.53) диаграмму рис. 13 (ср. с диаграммой рис. 6). Если для вершин, внутренней линии, входящей сплошной линии с импульсом p и выходящей волнистой линии с им-

пульсом k' принять те же правила соответствия, что и ранее, а выходящей линии с импульсом $-p'$ поставить в соответствие спинор

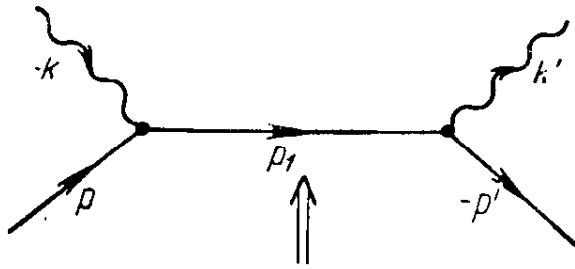
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \bar{u}(-p'),$$

и входящей волнистой линии с импульсом $-k$ —вектор

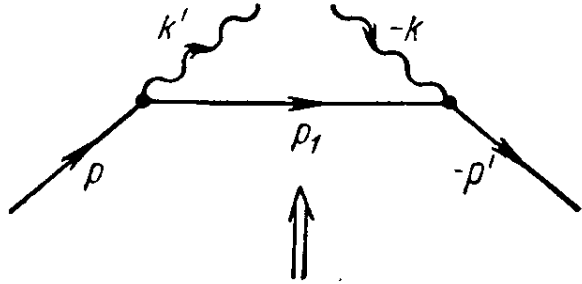
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_\nu(k),$$

то очевидно, что первый член матричного элемента (11.53) может быть получен из диаграммы рис. 13 обычным способом. Второму члену матричного элемента (11.53) отвечает диаграмма рис. 14.

Сравнивая диаграммы рис. 6 и 7 с диаграммами рис. 13 и 14, приходим к следующему заключению. Если выходящей электронной линии на рис. 6 и 7 приписать импульс $-p'$ ($-p'_0 < 0$), а входящей фотонной линии $-k$ ($-k_0 < 0$), то соответствующие диаграммы описывают процесс превращения электрона с импульсом p и по-



Р и с. 13



Р и с. 14

зитрона с импульсом p' в два γ -кванта с импульсами k и k' . Таким образом, испускание электрона с нефизическим 4-импульсом $-p'$ ($-p'_0 < 0$) описывает поглощение позитрона с физическим 4-импульсом p' , а поглощение γ -кванта с нефизическим 4-импульсом $-k$ ($-k_0 < 0$) описывает испускание γ -кванта с импульсом k . Направление, в котором развивается процесс, указано на рис. 13 и 14 двойными стрелками (электрон с импульсом p испускает фотон и переходит в промежуточное состояние с импульсом p_1 ; позитрон с импульсом p' аннигилирует с виртуальным электроном и образует второй конечный фотон).

Проинтегрируем в (11.53) по p_1 . Окончательно матричный элемент процесса аннигиляции электрон-позитронной пары в два γ -кванта равен

$$\begin{aligned} & (\Phi_{k, k'}^+ S^{(2)} \Phi_{p, p'}) = \\ & = \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{m^2}{4p_0 p'_0 k_0 k'_0} \right)^{1/2} \left[\bar{u}(-p') \hat{e}(k') \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - im} \hat{e}(k) u(p) + \right. \\ & \left. + \bar{u}(-p') \hat{e}(k) \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}' - im} \hat{e}(k') u(p) \right] \delta(k + k' - p - p'), \quad (11.54) \end{aligned}$$

где $\hat{e}(k) = e_\mu(k) \gamma_\mu$.

Перейдем к рассмотрению следующего члена в разложении (11.47):

$$\bar{\psi}^{(-)}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi^{(-)}(x_2) N((A_\mu(x_1) A_\nu(x_2))). \quad (11.55)$$

Матричный элемент этого оператора отличен от нуля, если в конечном состоянии имеются электрон и позитрон. Из закона сохранения полного 4-импульса следует далее, что два γ -кванта должны быть в начальном состоянии. Таким образом, оператор (11.55) дает вклад в матричный элемент процесса:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e + \bar{e}. \quad (11.56)$$

Обозначим p и p' 4-импульсы конечных позитрона и электрона, а k и k' — 4-импульсы начальных γ -квантов. Начальный и конечный векторы состояний равны

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{k, k'} &= a^+(k) a^+(k') \Phi_0, \\ \Phi_{p, p'} &= c^+(p') d^+(p) \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.57)$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0^+ d(p) c(p') \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1) \psi_\beta^{(-)}(x_2) &= \\ &= \Phi_0^+ \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{p_0 p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}_\alpha(p') e^{-ip' x_1} u_\beta(-p) e^{-ip x_2}, \\ A_\mu^{(+)}(x_1) A_\nu^{(+)}(x_2) a^+(k) a^+(k') \Phi_0 &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4k_0 k'_0}} [e_\nu(k) e^{ikx_2} e_\mu(k') e^{ik' x_1} + \\ &+ e_\nu(k') e^{ik' x_2} e_\mu(k) e^{ikx_1}] \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.58)$$

С помощью (11.58) находим для матричного элемента процесса (11.56) во втором порядке теории возмущений следующее выражение:

$$\begin{aligned} (\Phi_{p, p'}^+, S^{(2)} \Phi_{k, k'}) &= (-i)^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{m^2}{4p_0 p'_0 k_0 k'_0} \right)^{1/2} \frac{(-1)}{(2\pi)^4} (-ie)^2 (2\pi)^8 \times \\ &\times \int [\bar{u}(p') \gamma_\mu \delta(p' + (-k') - p_1) \frac{1}{\hat{p}_1 - im} \gamma_\nu \delta(p_1 - k - (-p)) u(-p) \times \\ &\times e_\mu(k') e_\nu(k) + \bar{u}(p') \gamma_\mu \delta(p' - p_1 - k) \frac{1}{\hat{p}_1 - im} \times \\ &\times \gamma_\nu \delta(p_1 + (-k') - (-p)) u(-p) e_\mu(k) e_\nu(k')] dp_1. \end{aligned} \quad (11.59)$$

Если спинору $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u(-p)$ поставить в соответствие входящую сплошную линию с 4-импульсом $-p$, вектору $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k'_0}} e(k')$ —

выходящую волнистую линию с импульсом $-k'$, а для всех остальных величин в матричном элементе (11.59) принять прежние

правила соответствия, то очевидно, что этому матричному элементу отвечают диаграммы Фейнмана, представленные на рис. 15.

Сравнивая диаграммы рис. 15 и диаграммы рис. 6 и 7, приходим к следующему заключению. Если на диаграммах рис. 6 и 7, 4-импульс входящего электрона положить равным $-p$ ($-p_0 < 0$), а импульс выходящей фотонной линии равным $-k'$ ($-k'_0 < 0$), то эти диаграммы описывают процесс превращения двух γ -квантов с импульсами k и k' в электрон с импульсом p' и позитрон с импульсом p . Таким образом, входящая электронная линия с нефизическим

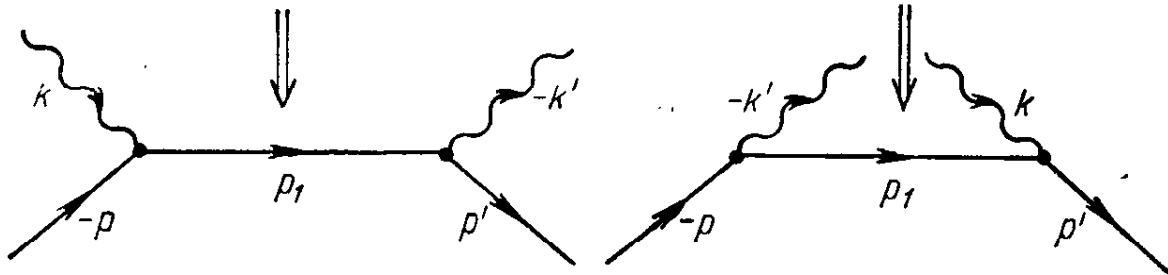


Рис. 15

4-импульсом $-p$ ($-p_0 < 0$) соответствует испусканию позитрона с физическим 4-импульсом p , а выходящая фотонная линия с нефизическим 4-импульсом $-k'$ ($-k'_0 < 0$) — поглощению фотона с 4-импульсом k' . Направление, в котором развивается физический процесс, на рис. 15 указано двойными стрелками (фотон образует позитрон с импульсом p и виртуальный электрон с импульсом p_1 ; виртуальный электрон поглощает второй фотон и переходит в конечное состояние с импульсом p').

Выполняя в (11.59) интегрирование по p_1 , получаем окончательно для матричного элемента процесса (11.56)

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{p,p'}^{+} S^{(2)} \Phi_{k,k'}) &= \frac{-e^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{m^2}{4p_0 p'_0 k_0 k'_0} \right)^{1/2} \delta(p' + p - k - k') \times \\
 &\times \left[\bar{u}(p') \hat{e}(k') \frac{1}{-\hat{p} + \hat{k} - im} e(\hat{k}) u(-p) + \right. \\
 &\left. + \bar{u}(p') \hat{e}(k) \frac{1}{-\hat{p} + \hat{k}' - im} \hat{e}(k') \bar{u}(-p) \right]. \quad (11.60)
 \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим оператор

$$-\psi^{(-)}(x_2) \overbrace{\gamma_\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu}^{\text{curly bracket}} \bar{\psi}^{(+)}(x_1) N(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)). \quad (11.61)$$

Для того чтобы матричный элемент этого оператора был отличен от нуля, необходимо, чтобы в начальном и конечном состояниях были позитрон и фотон. Таким образом, оператор (11.61) дает вклад в матричный элемент процесса рассеяния γ -кванта на позитроне:

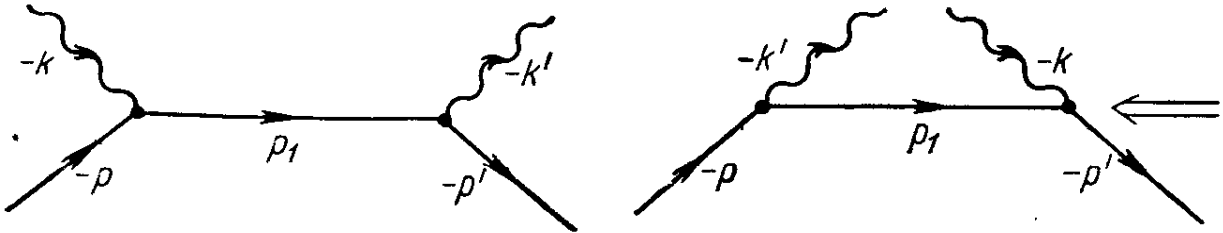
$$\gamma + \bar{e} \rightarrow \gamma + \bar{e}. \quad (11.62)$$

Обозначим 4-импульсы начального и конечного фотонов (позитронов) соответственно k' и k (p' и p). Начальный и конечный векторы состояния равны

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{p',k'} &= d^+(p') a^+(k') \Phi_0, \\ \Phi_{p,k} &= d^{(+)}(p) a^+(k) \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.63)$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_\alpha^{(+)}(x_1) d^+(p') a^+(k') \Phi_0 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} \bar{u}_\alpha(-p') e^{ip'x_1} a^+(k') \Phi_0, \\ \Phi_0^+ a(k) d(p) \Psi_\beta^{(-)}(x_2) &= \Phi_0^+ a(k) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{p_0} \right)^{1/2} u_\beta(-p) e^{-ipx_2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.64)$$



Р и с. 16

Используя (11.15), (11.12) и (11.64), получаем для матричного элемента процесса рассеяния γ -кванта на позитроне во втором порядке теории возмущений

$$\begin{aligned} (\Phi_{p,k}^+ S^{(2)} \Phi_{p',k'}) &= (-1)(-i)^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{m^2}{4 p_0 p'_0 k_0 k'_0} \right)^{1/2} \times \\ &\times \frac{(-1)}{(2\pi)^4} (2\pi)^8 (-ie)^2 \int [\bar{u}(-p') \gamma_\mu \delta((-p') + (-k') - p_1) \frac{1}{\hat{p}_1 - im} \gamma_\nu \times \\ &\times \delta(p_1 - (-p) - (-k)) u(-p) e_\mu(k') e_\nu(k) + \\ &+ \bar{u}(-p') \gamma_\mu \delta((-p') - p_1 - (-k)) \frac{1}{\hat{p}_1 - im} \times \\ &\times \gamma_\nu \delta(p_1 + (-k') - (-p)) u(-p) e_\mu(k) e_\nu(k')] dp_1. \end{aligned} \quad (11.65)$$

Очевидно, что матричному элементу (11.65) отвечают диаграммы Фейнмана, представленные на рис. 16. Сравнивая диаграммы рис. 6, 7 и 16, приходим к следующему заключению. Если на диаграммах рис. 6 и 7 считать импульсы входящей и выходящей электронных линий равными соответственно $-p$ ($-p_0 < 0$) и $-p'$ ($-p'_0 < 0$), а импульсы входящей и выходящей фотонных линий равными соответственно $-k$ и $-k'$ ($-k_0 < 0$, $-k'_0 < 0$), то диаграммы будут соответствовать процессу рассеяния γ -кванта на позитроне (импульсы начального и конечного позитронов равны p' и p , а импульсы начального и конечного фотонов равны k' и k).

Интегрируя в (11.65) по импульсу p_1 , получаем окончательно для матричного элемента процесса рассеяния γ -кванта на позитроне

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{p,k}^+ S^{(2)} \Phi_{p',k'}) = & \frac{1}{(2\pi)^2} e^2 \left(\frac{m^2}{4 p_0 p'_0 k_0 k'_0} \right)^{1/2} \delta(p+k-p'-k') \times \\
 & \times [\bar{u}(-p') \hat{e}(k') \frac{1}{-\hat{p}-\hat{k}-im} \hat{e}(k) u(-p) + \\
 & + \bar{u}(-p') \hat{e}(k) + \frac{1}{-\hat{p}+\hat{k}'-im} \hat{e}(k') u(-p)].
 \end{aligned} \quad (11.66)$$

Итак, если считать, что импульсы внешних линий на диаграммах Фейнмана могут принимать как физические, так и нефизические значения (с отрицательной нулевой компонентой), то одни и те же диаграммы рис. 6 и 7 описывают следующие четыре процесса:

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma + e &\rightarrow \gamma + e, \\
 e + \bar{e} &\rightarrow \gamma + \gamma, \\
 \gamma + \gamma &\rightarrow e + \bar{e}, \\
 \gamma + \bar{e} &\rightarrow \gamma + e.
 \end{aligned} \right\} \quad (11.67)$$

Общее правило, которое может быть сформулировано на основе проведенного здесь рассмотрения, состоит в следующем: выходящая (входящая) линия частицы с нефизическим 4-импульсом $-p$ ($-p_0 < 0$) отвечает поглощению (испусканию) античастицы с 4-импульсом p (фотон — истинно нейтральная частица; выходящая фотонная линия с 4-импульсом $-k$ ($-k_0 < 0$) описывает поглощение фотона с импульсом k). Это правило справедливо для диаграмм любого порядка и для любых взаимодействий.

§ 12. Токи. Форм-факторы

В этом параграфе будут рассмотрены процессы с участием лептонов (электроны, μ -мезоны, нейтрино) и адронов (нуклоны, π -мезоны и др.). Лептоны участвуют только в электромагнитном и слабом взаимодействиях; адроны участвуют в слабом, электромагнитном и сильном взаимодействиях. Слабое и электромагнитное взаимодействия могут быть рассмотрены по теории возмущений. К сильным взаимодействиям теория возмущений не применима (константа связи велика). Мы будем учитывать сильные взаимодействия адронов феноменологически путем введения форм-факторов.

Начнем с процесса рассеяния электронов нуклонами:

$$e + N \rightarrow e + N. \quad (12.1)$$

Полный гамильтониан взаимодействия запишем в следующем виде:

$$\mathcal{H}_I(x) = \mathcal{H}_I^e(x) + \mathcal{H}_I^{ea}(x) + \mathcal{H}_I^a(x). \quad (12.2)$$

Здесь

$$\mathcal{H}_I^e(x) = -ieN(\bar{\psi}_e(x) \gamma_\mu \psi_e(x)) A_\mu(x)$$

гамильтониан взаимодействия электромагнитного и электрон-позитронного полей; $\mathcal{H}_I^{ea}(x)$ — гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля и полей всех сильновзаимодействующих частиц, а $\mathcal{H}_I^a(x)$ — гамильтониан всех сильных взаимодействий.

Гамильтониан $\mathcal{H}_I^{ea}(x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I^{ea}(x) = & e j_\mu^p(x) A_\mu(x) - eN(j_\mu^\pi(x) A_\mu(x)) - \\ & - e^2 N(\phi^+(x) \phi(x) A_\mu(x) A_\mu(x)) + \dots, \end{aligned} \quad (12.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} j_\mu^p(x) &= iN(\bar{\psi}_p(x) \gamma_\mu \psi_p(x)); \\ j_\mu^\pi(x) &= -i \left[\phi^+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \phi \right) - \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial x_\mu} + ieA_\mu \phi^+ \right) \phi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Первый член в (12.3) является гамильтонианом взаимодействия электромагнитного и протонного полей ($-ej_\mu^p$ — протонный ток, e — заряд электрона); второй и третий члены — гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля и поля заряженных π -мезонов (ej_μ^π — ток заряженных π -мезонов). Гамильтониан взаимодействия электромагнитного и мезонного полей получен путем замены в лагранжиане свободного поля (5.5) производных $\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$ и $\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu}$ соответственно выражениями

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \phi \right) \text{ и } \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu} + ieA_\mu \phi^* \right).$$

Конкретный вид гамильтонианов \mathcal{H}_I^{ea} и \mathcal{H}_I^a нам не потребуется.

S -матрица равна

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n T(\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)). \quad (12.5)$$

Гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_I(x)$ дается выражением (12.2). Очевидно, что S -матрица может быть записана также следующим образом:

$$S = T \left(e^{-i \int \mathcal{H}_I(x) dx} \right). \quad (12.6)$$

Нас интересует матричный элемент процесса рассеяния электрона на нуклоне в низшем порядке теории возмущений по электромагнитному взаимодействию. В этом приближении вклад в матрич-

ный элемент процесса дадут только такие члены S -матрицы, в которые гамильтониан $\mathcal{H}_I^e(x)$ входит линейно (оператор $\psi_e^{(+)}(x)$ уничтожит начальный электрон, а $\bar{\psi}_e^{(-)}(x)$ при действии налево уничтожит конечный электрон). В начальном и конечном состояниях нет фотонов. Ясно, что вклад в матричный элемент в низшем порядке по e дадут только такие члены, в которых оператор $A_\nu(x)$, входящий в $\mathcal{H}_I^e(x)$, спарен с оператором $A_\mu(y)$, входящим в гамильтониан $\mathcal{H}_I^{ea}(y)$. Это означает, что в рассматриваемом приближении вклад в матричный элемент процесса дают такие члены S -матрицы, в которые оператор $\mathcal{H}_I^{ea}(y)$ входит линейно. Подставляя (12.2) в выражение (12.6) и ограничиваясь линейными по \mathcal{H}_I^e и \mathcal{H}_I^{ea} членами, получаем:

$$\begin{aligned} S &= T \left(e^{-i \int \mathcal{H}_I^e(x) dx} e^{-i \int \mathcal{H}_I^{ea}(y) dy} e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(z) dz} \right) = \\ &= T \left(\left[1 + (-i) \int \mathcal{H}_I^e(x) dx + \dots \right] \left[1 + (-i) \int \mathcal{H}_I^{ea}(y) dy + \dots \right] \times \right. \\ &\times \left. e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(z) dz} \right) = 1 + (-i)^2 T \left(\int \mathcal{H}_I^e(x) \mathcal{H}_I^{ea}(y) dx dy e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(z) dz} \right) + \dots \end{aligned} \quad (12.7)$$

Мы выписали только тот член, который дает вклад в порядке e^2 в матричный элемент процесса (12.1).

Запишем гамильтониан $\mathcal{H}_I^{ea}(x)$ в следующем виде:

$$\mathcal{H}_I^{ea}(x) = -e j_\mu^a(x) A_\mu(x) + (\mathcal{H}_I^{ea}(x))'. \quad (12.8)$$

Здесь $(\mathcal{H}_I^{ea}(x))'$ — та часть гамильтониана $\mathcal{H}_I^{ea}(x)$, в которую квадратично входит $eA(x)$ [см. (12.3)], а $e j_\mu^a(x)$ — суммарный ток сильновзаимодействующих частиц при $A = 0$. Только первый член выражения (12.8) дает вклад в матричный элемент рассматриваемого процесса во втором порядке по e .

Обозначим S^{e^2} ту часть S -матрицы, которая дает вклад в матричный элемент процесса (12.1) в низшем порядке по электромагнитному взаимодействию. Имеем

$$\begin{aligned} S^{e^2} &= -ie^2 \int dx dy N (\bar{\psi}_e(x) \gamma_\nu \psi_e(x)) T (A_\nu(x) A_\mu(y)) \times \\ &\times T (j_\mu^a(y) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(z) dz}). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Вычислим теперь матричный элемент процесса. Пусть q и q' (p и p') — соответственно 4-импульсы начального и конечного электронов (нуклонов). Начальный и конечный векторы состояния запишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{q,p} &= c^+(q) \Phi_p, \\ \Phi_{q',p'} &= c^+(q') \Phi_{p'}, \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

где Φ_p и $\Phi_{p'}$ — векторы состояния начального и конечного нуклонов. Из (12.9) и (12.10), получаем

$$(\Phi_{q'p'}^+ S^{e^2} \Phi_{qp}) = -ie^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{q_0 q'_0} \right)^{1/2} \frac{(-i)}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \bar{u}(q') \gamma_\mu u(q) \times \\ \times \int \delta(q' - q - k) \frac{1}{k^2} e^{-iky} \left(\Phi_p^+ T(j_\mu^a(y) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx}) \Phi_p \right) dk dy \quad (12.11)$$

(m — масса электрона).

Теория возмущений к сильным взаимодействиям не применима. Поэтому мы ограничимся тем, что установим на основе принципов инвариантности лишь общую структуру матричного элемента:

$$\left(\Phi_p^+ T(j_\mu^a(y) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx}) \Phi_p \right). \quad (12.12)$$

Прежде чем перейти к этому, покажем, что адронный матричный элемент (12.12) может быть записан в более компактном виде, если от представления взаимодействия перейти к представлению Гейзенберга. Рассмотрим оператор

$$T(j_\mu^a(y) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx}). \quad (12.13)$$

Имеем

$$T(j_\mu^a(y) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx}) = T\left(j_\mu^a(y) e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} H_I^a(x_0) dx_0}\right) = \\ = T\left(j_\mu^a(y) e^{-i \int_{-\infty}^{y_0} H_I^a(x_0) dx_0} e^{-i \int_{y_0}^{\infty} H_I^a(x_0) dx_0}\right) = \\ = T\left(e^{-i \int_{y_0}^{\infty} H_I^a(x_0) dx_0}\right) j_\mu^a(y) T\left(e^{-i \int_{-\infty}^{y_0} H_I^a(x_0) dx_0}\right). \quad (12.14)$$

Здесь

$$H_I^a(x_0) = \int \mathcal{H}_I^a(x) dx. \quad (12.15)$$

Вспоминая определение оператора $U(t, t_1)$ [см. (1.20) и (1.35)], получаем

$$T\left(e^{-i \int_{y_0}^{\infty} H_I^a(x_0) dx_0}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{y_0}^{\infty} dx_{10} \dots \int_{y_0}^{\infty} dx_{n0} \times \\ \times T(H_I^a(x_{10}) \dots H_I^a(x_{n0})) = U_a(\infty, y_0), \quad (12.16)$$

$$T\left(e^{-i \int_{-\infty}^{y_0} H_I^a(x_0) dx_0}\right) = U_a(y_0, -\infty). \quad (12.17)$$

Подчеркнем, что операторы $U_a(\infty, y_0)$ и $U_a(y_0, -\infty)$ определяются гамильтонианом сильных взаимодействий \mathcal{H}_I^a . Например, оператор $U_a(y_0, -\infty)$, действуя на вектор состояния, заданный при $t \rightarrow -\infty$, переводит его за счет сильных взаимодействий в вектор состояния в момент времени y_0 .

Из (12.14), (12.16) и (12.17) находим

$$T(j_\mu^a(y) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx}) = U_a(\infty, y_0) j_\mu^a(y) U_a(y_0, -\infty). \quad (12.18)$$

Рассмотрим систему, в которой имеют место только сильные взаимодействия. Вектор состояния $\Phi(t)$ такой системы в используемом нами представлении взаимодействия удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = H_I^a(t) \Phi(t), \quad (12.19)$$

а любой относящийся к системе оператор $O(t)$ подчиняется уравнению

$$i \frac{\partial O(t)}{\partial t} = [O(t), H_0^a] \quad (12.20)$$

(H_0^a — свободный гамильтониан).

Совершим унитарное преобразование от $\Phi(t)$ и $O(t)$ к

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\Gamma(t) &= U_a^+(t, t_0) \Phi(t), \\ O_\Gamma(t) &= U_a^+(t, t_0) O(t) U_a(t, t_0). \end{aligned} \right\} \quad (12.21)$$

Здесь t_0 — произвольный фиксированный момент времени, а $U_a(t, t_0)$ — унитарный оператор, определенный выражением (1.35). Очевидно, что при $t = t_0$

$$\Phi_\Gamma(t_0) = \Phi(t_0), \quad O_\Gamma(t_0) = O(t_0). \quad (12.22)$$

Операторы $U_a(t, t_0)$ и $U_a^+(t, t_0)$ удовлетворяют уравнениям [см. (1.21) и (1.22)]:

$$i \frac{\partial U_a(t, t_0)}{\partial t} = H_I^a(t) U_a(t, t_0), \quad (12.23a)$$

$$-i \frac{\partial U_a^+(t, t_0)}{\partial t} = U_a^+(t, t_0) H_I^a(t). \quad (12.23b)$$

Как было показано в первом параграфе, наблюдаемые величины инвариантны относительно унитарных преобразований (12.21). Получим уравнение движения для вектора состояния $\Phi_\Gamma(t)$. Из (12.19), (12.21) и (12.23) находим, что

$$\frac{\partial \Phi_\Gamma(t)}{\partial t} = 0. \quad (12.24)$$

Таким образом, вектор Φ_Γ , описывающий то же состояние, что и вектор в представлении взаимодействия $\Phi(t)$, и связанный с $\Phi(t)$

соотношением (12.21), не зависит от времени. Представление, в котором векторы состояния не зависят от времени, называется *представлением Гейзенберга*. Вся зависимость от времени в этом представлении переносится на операторы.

С помощью (12.21) и (12.23) находим

$$i \frac{\partial O_{\Gamma}(t)}{\partial t} = U_a^+(t, t_0) ([O(t), H_I^a(t)] + [O(t), H_0^a]) U_a(t, t_0) = [O_{\Gamma}(t), H_{\Gamma}^a(t)]. \quad (12.25)$$

Здесь

$$H_{\Gamma}^a(t) = U_a^+(t, t_0) (H_I^a(t) + H_0^a) U_a(t, t_0)$$

оператор полной энергии в гейзенберговском представлении. Для $H_{\Gamma}^a(t)$, из (12.25) получаем

$$\frac{\partial H_{\Gamma}^a(t)}{\partial t} = 0. \quad (12.26)$$

Оператор полной энергии в гейзенберговском представлении не зависит, следовательно, от времени.

Совершим переход в матричном элементе (12.12) от представления взаимодействия к представлению Гейзенберга. Положим $t_0 \rightarrow -\infty$ [это означает, что при $t \rightarrow -\infty$ оба представления совпадают, см. (12.22)]. В матричном элементе (12.12) Φ_p — вектор состояния в представлении взаимодействия при $t \rightarrow -\infty$, а $\Phi_{p'}$ — вектор состояния при $t \rightarrow \infty$. Из (12.22) следует, что вектор Φ_p совпадает с соответствующим вектором в представлении Гейзенберга. Обозначим его $\Phi_{p; in}$. Вектор в представлении Гейзенберга, отвечающий $\Phi_{p'}$, равен

$$\Phi_{p'; out} = U_a^+(\infty, -\infty) \Phi_{p'} = S_a^+ \Phi_{p'}. \quad (12.27)$$

Используя унитарность оператора $U_a(t, t_0)$ [см. (1.25)], из (12.18) получаем

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_{p'}^+ T \left(j_{\mu}^a(y) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx} \right) \Phi_p \right) = \\ & = (\Phi_{p'}^+ U_a(\infty, y_0) U_a(y_0, -\infty) U_a^+(y_0, -\infty) j_{\mu}^a(y) U_a(y_0, -\infty) \Phi_p) = \\ & = (\Phi_{p'; out}^+ J_{\mu}^a(y) \Phi_{p; in}). \end{aligned} \quad (12.28)$$

Здесь

$$J_{\mu}^a(y) = U_a^+(y_0, -\infty) j_{\mu}^a(y) U_a(y_0, -\infty) \quad (12.29)$$

является оператором тока в представлении Гейзенберга. Отметим, что при получении (12.28) мы использовали следующее очевидное соотношение:

$$U_a(\infty, y_0) U_a(y_0, -\infty) = S_a.$$

Таким образом, матричный элемент (12.12) представляет собой матричный элемент тока в гейзенберговском представлении. Вектор $\Phi_{p'}$ описывает нуклон с 4-импульсом p' . При действии на такой вектор матрицей S_a мы, очевидно, получим вектор $\Phi_{p'}$ (нуклон за счет сильных взаимодействий не может превратиться ни в какие другие частицы). Таким образом, вектор $\Phi_{p';out}$ совпадает с вектором $\Phi_{p'}$ в представлении взаимодействия с точностью до фазового множителя. В дальнейшем индексы in и out будут, как правило, опускаться.

Любой оператор в представлении Гейзенберга удовлетворяет соотношению

$$i \frac{\partial F(y)}{\partial y_a} = [P_a^a, F(y)], \quad (12.30)$$

где P_a^a — оператор полного 4-импульса [мы доказали это соотношение при $\alpha = 4$; см. (12.25)]. Из (12.30) находим*

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial y_a} (\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(y) \Phi_p) &= (\Phi_{p'}^+ [P_a^a, J_\mu^a(y)] \Phi_p) = \\ &= (p' - p)_a (\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(y) \Phi_p). \end{aligned} \quad (12.31)$$

Отсюда имеем

$$(\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(y) \Phi_p) = e^{-i(p'-p)y} (\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(0) \Phi_p). \quad (12.32)$$

Подставляя (12.32) в (12.11), получаем следующее выражение для матричного элемента процесса рассеяния электронов на нуклонах:

$$\begin{aligned} (\Phi_{q',p'}^+ S^{e^2} \Phi_{qp}) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{m^2}{q_0 q'_0} \right)^{1/2} (2\pi)^4 \bar{u}(q') \gamma_\mu u(q) \times \\ &\times \frac{1}{(q' - q)^2} (\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(0) \Phi_p) \delta(q' + p' - q - p). \end{aligned} \quad (12.33)$$

Если сильные взаимодействия нуклона не учитываются, то, очевидно, что матричный элемент $(\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(0) \Phi_p)$ для случая рассеяния электрона на протоне равен**

$$-\frac{i}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{p_0 p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)$$

(M — масса нуклона). В этом случае процесс рассеяния описывается диаграммой рис. 17 (двойные линии относятся к нуклону).

* Состояния Φ_p и $\Phi_{p'}$ собственные состояния оператора энергии — импульса свободного нуклонного поля. При получении (12.31) используется адиабатическая гипотеза, согласно которой взаимодействие при $t \rightarrow \pm \infty$ отсутствует.

** Напомним, что электрический ток равен eJ_μ^a , где e — заряд электрона.

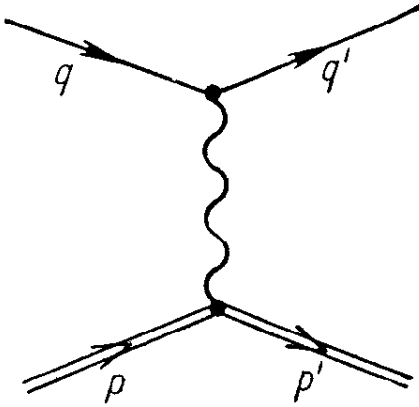
В общем случае нуклонный матричный элемент может быть записан следующим образом:

$$(\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(0) \Phi_p) = - \frac{i}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{p_0 p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p). \quad (12.34)$$

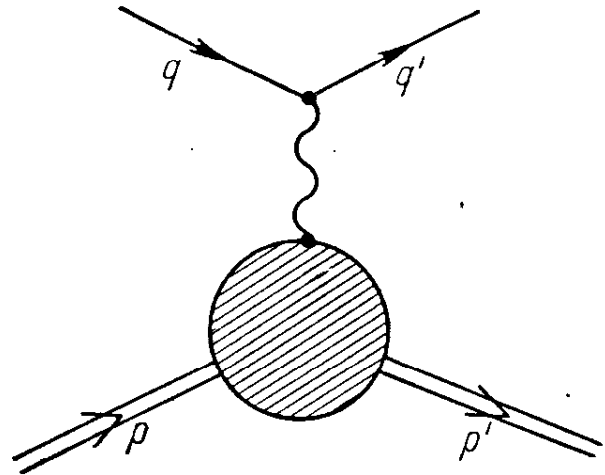
Здесь $\Gamma_\mu(p', p)$ — матрица, действующая на спинорные переменные. Подставляя (12.34) в (12.33), получаем для матричного элемента процесса

$$\begin{aligned} (\Phi_{q'}^+ S^{e^2} \Phi_{q,p}) &= i \frac{e^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{m^2 M^2}{q_0 q'_0 p_0 p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}(q') \gamma_\mu u(q) \times \\ &\times \frac{1}{(q' - q)^2} \bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p) \delta(p' + q' - p - q). \end{aligned} \quad (12.35)$$

Матричному элементу (12.35) поставим в соответствие диаграмму, представленную на рис. 18. Заштрихованная часть диаграммы обус-



Р и с. 17



Р и с. 18

ловлена сильными взаимодействиями. Этому элементу диаграммы отвечает матрица $\Gamma_\mu(p', p)$.

Выясним, какую общую структуру имеет матрица $\Gamma_\mu(p', p)$. При преобразованиях Лоренца матричный элемент

$$\bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p)$$

должен преобразовываться так же, как $\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)$, т. е. как вектор. Разложим 4×4 -матрицу $\Gamma_\mu(p', p)$ по полной системе 16 матриц Дирака. Получаем

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p) &= \\ &= \bar{u}(p') [A_\mu + B_{\mu\nu} \gamma_\nu + C_{\mu\nu\rho} \sigma_{\nu\rho} + D_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 + E_\mu \gamma_5] u(p), \end{aligned} \quad (12.36)$$

где

$$\sigma_{\nu\rho} = \frac{1}{2i} (\gamma_\nu \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma_\nu).$$

Коэффициенты разложения $A_\mu, B_{\mu\nu} \dots$ зависят от p и p' .

Первый член разложения A_μ должен быть вектором. Получаем следующее общее выражение для A_μ :

$$A_\mu = a_1 p_\mu + a_2 p'_\mu. \quad (12.37)$$

Здесь a_1 и a_2 — функции скаляров, которые могут быть построены из векторов p и p' . Так как $p^2 = -M^2$ и $(p')^2 = -M^2$, то единственным скаляром, который может быть построен из p и p' , является pp' .

Определим следующим образом 4-вектор передачи импульса κ :

$$\kappa = p' - p. \quad (12.38)$$

Очевидно, что $pp' = -\kappa^2/2 - M^2$. Таким образом, a_1 и a_2 являются функциями квадрата передачи импульса κ^2 .

Перейдем к построению следующих членов в разложении (12.36). Так как матричный элемент $\bar{u}(p') \gamma_\nu u(p)$ преобразуется как вектор, то величины $B_{\mu\nu}$ должны преобразовываться как тензор второго ранга. Получаем следующее общее выражение для тензора $B_{\mu\nu}$

$$B_{\mu\nu} = b_1 p_\mu p_\nu + b_2 p'_\mu p'_\nu + b_3 p'_\mu p_\nu + b_4 p_\mu p'_\nu + b \delta_{\mu\nu}, \quad (12.39)$$

где b, b_1, \dots — функции κ^2 . Спиноры $u(p)$ и $u(p')$ удовлетворяют уравнению Дирака (см. Приложение)

$$(\hat{p} - iM) u(p) = 0, \quad (12.40a)$$

$$\bar{u}(p') (\hat{p}' - iM) = 0. \quad (12.40b)$$

Нетрудно показать с помощью (12.40) что первые 4 члена (12.39) после подстановки в (12.36) сводятся к (12.37). Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') p_\mu \hat{p} u(p) &= \bar{u}(p') iM p_\mu u(p), \\ \bar{u}(p') p'_\mu \hat{p}' u(p) &= \bar{u}(p') iM p'_\mu u(p) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

В результате заключаем, что следует учесть только член

$$b \delta_{\mu\nu}. \quad (12.41)$$

Величины $C_{\mu\nu\rho}$ должны преобразовываться как тензор третьего ранга. Этот тензор должен быть антисимметричен относительно перестановки индексов ν и ρ ($\sigma_{\nu\rho} = -\sigma_{\rho\nu}$). Общее выражение для $C_{\mu\nu\rho}$ имеет вид

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho} &= c_1 p_\mu (p_\nu p'_\rho - p_\rho p'_\nu) + c_2 p'_\mu (p_\nu p'_\rho - p_\rho p'_\nu) + \\ &+ c_3 (\delta_{\mu\nu} p_\rho - \delta_{\mu\rho} p_\nu) + c_4 (\delta_{\mu\nu} p'_\rho - \delta_{\mu\rho} p'_\nu). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что все члены этого тензора после подстановки в (12.36) сводятся к (12.37) и (12.41). Действительно, используя уравнения (12.40), находим

$$\bar{u}(p') p_\mu \sigma_{\nu\rho} (p_\nu p'_\rho - p_\rho p'_\nu) u(p) = \bar{u}(p') i \kappa^2 p_\mu u(p),$$

$$\bar{u}(p') \sigma_{\nu\rho} (\delta_{\mu\nu} p_\rho - \delta_{\mu\rho} p_\nu) u(p) = 2 \bar{u}(p') [M \gamma_\mu + i p_\mu] u(p) \text{ и т. д.}$$

Величины $D_{\mu\nu}$ должны преобразовываться как псевдотензор второго ранга. Получаем общее выражение

$$D_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma d$$

($\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — антисимметричный относительно перестановки любых индексов тензор; $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\rho\nu\mu\sigma} = \dots$; $\varepsilon_{1234} = 1$). Этот член после подстановки в (12.36) также сводится к (12.37) и (12.41). Чтобы это показать, воспользуемся соотношением

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\nu \gamma_5 = \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho + \gamma_\mu \delta_{\rho\sigma} - \gamma_\rho \delta_{\mu\sigma} + \gamma_\sigma \delta_{\mu\rho}, \quad (12.42)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться. Используя (12.40) и (12.42), получаем

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\nu \gamma_5 u(p) p_\rho p'_\sigma = & -\bar{u}(p') [(M^2 - pp') \gamma_\mu + \\ & + iM(p'_\mu + p_\mu)] u(p). \end{aligned} \quad (12.43)$$

Таким образом, член $D_{\mu\nu}$ также не следует учитывать. Последний член E_μ должен быть псевдовектором. Так как из векторов p_μ и p'_μ построить псевдовектор невозможно, то $E_\mu = 0$.

Итак, если потребовать, чтобы матричный элемент

$$\bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p)$$

преобразовывался как вектор, то мы приходим к выводу, что матрица $\Gamma_\mu(p', p)$ может быть представлена в виде суммы

$$a\gamma_\mu + b p_\mu + c p'_\mu.$$

Запишем эту матрицу в другом виде. Выразим p и p' через векторы P и κ , которые определяются следующим образом:

$$P = p + p', \quad \kappa = p' - p. \quad (12.44)$$

Учитывая соотношения

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(p') \sigma_{\mu\nu} \kappa_\nu u(p) &= \frac{1}{i} \bar{u}(p') [\gamma_\mu (\hat{p}' - \hat{p}) - \kappa_\mu] u(p) = \\ &= -\bar{u}(p') [2M\gamma_\mu + iP_\mu] u(p), \\ \bar{u}(p') \sigma_{\mu\nu} P_\nu u(p) &= (-i) \bar{u}(p') u(p) \kappa_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (12.45)$$

запишем матрицу $\Gamma_\mu(p', p)$ в виде

$$\Gamma_\mu(p', p) = F_1(\kappa^2) \gamma_\mu - \frac{F_2(\kappa^2)}{2M} \sigma_{\mu\nu} \kappa_\nu - \frac{F_3(\kappa^2)}{2M} \sigma_{\mu\nu} P_\nu. \quad (12.46)$$

Посмотрим теперь, какие ограничения на матрицу $\Gamma_\mu(p', p)$ накладывает закон сохранения тока

$$\frac{\partial J_\mu^a(y)}{\partial y_\mu} = 0.$$

С помощью (12.32) получаем

$$\frac{\partial}{\partial y_\mu} (\Phi_{p'}^+ J_\mu(y) \Phi_p) = (-i) e^{-i(p'-p)y} (p' - p)_\mu (\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(0) \Phi_p) = 0.$$

Таким образом, из закона сохранения тока следует, что

$$(p' - p)_\mu \bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p) = 0. \quad (12.47)$$

Учитывая (12.40) и (12.45), находим

$$(p' - p)_\mu \bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p) = \frac{i}{2M} F_3 \kappa^2 \bar{u}(p') u(p).$$

Отсюда следует, что $F_3 = 0$. Матрица $\Gamma_\mu(p', p)$, следовательно, равна

$$\Gamma_\mu(p', p) = F_1(\kappa^2) \gamma_\mu - \frac{F_2(\kappa^2)}{2M} \sigma_{\mu\nu} \kappa_\nu. \quad (12.48)$$

Итак, мы показали, что матричный элемент $(\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(0) \Phi_p)$ (заштрихованная часть диаграммы рис. 18) характеризуется двумя функциями квадрата передачи 4-импульса. Эти функции называются *электромагнитными форм-факторами* нуклона (F_1 — дираковским, а F_2 — паулиевским).

Покажем, что форм-факторы F_1 и F_2 вещественны. Для этого используем условие унитарности S -матрицы [см. (1.39)]:

$$S^+ S = 1.$$

Запишем S -матрицу в виде

$$S = 1 + R. \quad (12.49)$$

Из условия унитарности следует, что

$$R + R^+ = -R^+ R. \quad (12.50)$$

Для матричного элемента процесса рассеяния электронов на нуклонах получаем

$$\begin{aligned} & (\Phi_{q', p'}^+ R \Phi_{q, p}) + (\Phi_{q', p'}^+ R^+ \Phi_{q, p}) = \\ & = - \sum_n (\Phi_{q', p'}^+ R^+ \Phi_n) (\Phi_n^+ R \Phi_{q, p}). \end{aligned} \quad (12.51)$$

В правую часть этого соотношения входит сумма по всем состояниям, в которые может переходить система электрон—нуклон. Очевидно, что в любом состоянии Φ_n должен быть по крайней мере один

электрон и один барион. Это означает, что правая часть (12.51) порядка e^4 . Таким образом, в рассматриваемом нами e^2 -приближении из соотношения унитарности получаем

$$(\Phi_{q', p'}^+ R \Phi_{q, p}) = -(\Phi_{q, p}^+ R \Phi_{q', p'})^*. \quad (12.52)$$

Подставляя в (12.52) выражение (12.35), находим

$$\begin{aligned} & (\bar{u}(q') \gamma_\mu u(q)) (\bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p)) = \\ & = (\bar{u}(q) \gamma_\mu u(q'))^* (\bar{u}(p) \Gamma_\mu(p, p') u(p'))^*. \end{aligned} \quad (12.53)$$

Нетрудно видеть, что

$$(\bar{u}(q) \gamma_\mu u(q'))^* = (u^+(q') \gamma_\mu^+ \gamma_4 u(q)) = (\bar{u}(q') \bar{\gamma}_\mu u(q)), \quad (12.54)$$

где

$$\bar{\gamma}_\mu = \gamma_4 \gamma_\mu^+ \gamma_4.$$

Учитывая, что $\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$, с помощью перестановочных соотношений для матриц γ_μ получаем

$$\bar{\gamma}_\mu = \gamma_\mu \delta_\mu, \quad (12.55)$$

где

$$\delta_\mu = \begin{cases} -1, & \mu = 1, 2, 3; \\ 1, & \mu = 4, \end{cases} \quad (12.56)$$

[в (12.55) суммирование по μ не производится].

Из (12.53)—(12.55) находим

$$(\bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p)) = \delta_\mu (\bar{u}(p) \Gamma_\mu(p, p') u(p'))^*. \quad (12.57)$$

Подставляя в (12.57) выражение (12.48) и учитывая, что

$$\begin{aligned} & (\bar{u}(p) \sigma_{\mu\nu} \kappa_\nu u(p'))^* \delta_\mu = (\bar{u}(p') \gamma_4 \sigma_{\mu\nu} \gamma_4 \kappa_\nu^* u(p)) \delta_\mu = \\ & = -(\bar{u}(p') \sigma_{\mu\nu} \kappa_\nu u(p)), \end{aligned}$$

получаем

$$F_1^*(\kappa^2) = F_1(\kappa^2), \quad F_2^*(\kappa^2) = F_2(\kappa^2). \quad (12.58)$$

Таким образом, заштрихованная часть диаграммы рис. 18 характеризуется двумя вещественными функциями квадрата передачи 4-импульса.

Вместо форм-факторов F_1 и F_2 часто вводятся магнитный и зарядовый форм-факторы G_M и G_E , которые связаны с F_1 и F_2 соотношениями

$$G_M = F_1 + F_2, \quad G_E = F_1 - \frac{\kappa^2}{4M^2} F_2. \quad (12.59)$$

Выясним физический смысл этих форм-факторов. С помощью (12.45) матричный элемент тока может быть записан следующим образом:

$$(\Phi_{p'}^+, J_\mu^a(0) \Phi_p) = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{p_0 p'_0} \right)^{1/2} \times \\ \times \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu (F_1 + F_2) + i P_\mu \frac{1}{2M} F_2 \right] u(p). \quad (12.60)$$

Рассмотрим это выражение в системе, в которой $\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$ (система Брейта). Учитывая, что в этой системе $p_0 = p'_0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} (\Phi_{p'}^+, J^a(0) \Phi_p) &= -i \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M}{p_0} \right) (\bar{u}(p') \gamma u(p)) (F_1 + F_2), \\ (\Phi_{p'}^+, J_4^a(0) \Phi_p) &= -i \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M}{p_0} \right) \bar{u}(p') \left[\gamma_4 (F_1 + F_2) - \frac{p_0}{M} F_2 \right] u(p). \end{aligned} \right\} \quad (12.61)$$

Из уравнений (12.40) нетрудно видеть, что

$$\bar{u}(p') (\hat{p}' + \hat{p}) u(p) = 2iM \bar{u}(p') u(p), \quad (12.62)$$

откуда в системе Брейта

$$p_0 \bar{u}(p') \gamma_4 u(p) = M \bar{u}(p') u(p). \quad (12.63)$$

Используя это соотношение и учитывая, что в системе Брейта $\kappa^2 = 4\mathbf{p}^2$, получаем:

$$(\Phi_{p'}^+, J_4^a(0) \Phi_p) = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M}{p_0} \right) (\bar{u}(p') \gamma_4 u(p)) \left(F_1 - \frac{\kappa^2}{4M^2} F_2 \right). \quad (12.64)$$

Спиноры $u(p)$ и $u(p')$ в представлении Дирака—Паули имеют вид (см. Приложение)

$$\left. \begin{aligned} u(p) &= \left(\frac{p_0 + M}{2M} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{p_0 + M} \varphi \end{pmatrix}, \\ u(p') &= \left(\frac{p_0 + M}{2M} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi' \\ \frac{-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{p_0 + M} \varphi' \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (12.65)$$

(система $\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$). С помощью этих выражений нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(p') \gamma_4 u(p) &= \varphi'^+ \varphi, \\ \bar{u}(p') \boldsymbol{\gamma} u(p) &= \varphi'^+ \frac{\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\kappa}}{2M} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (12.66)$$

Из (12.61), (12.64) и (12.66) для матричных элементов операторов $J^a(0)$ и $J_4^a(0)$ в системе Брейта получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} (\Phi_p^+ J^a(0) \Phi_p) &= -i \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M}{p_0} \right) \left(\Phi' + \frac{\sigma \times \mathbf{x}}{2M} \Phi \right) G_M(\kappa^2), \\ (\Phi_p^+ J_4^a(0) \Phi_p) &= -i \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M}{p_0} \right) (\Phi' + \Phi) G_E(\kappa^2). \end{aligned} \right\} \quad (12.67)$$

Форм-фактор $G_M(\kappa^2)$ характеризует, таким образом, распределение магнитного момента нуклона, а $G_E(\kappa^2)$ — распределение заряда. При $\kappa^2 = 0$ форм-факторы протона равны*

$$\left. \begin{aligned} G_M(0) &= F_1(0) + F_2(0) = \mu_p, \\ G_E(0) &= F_1(0) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (12.68)$$

где μ_p — полный магнитный момент протона в ядерных магнетонах. Отсюда следует, что $F_2(0) = \mu_p - 1$, т. е. $F_2(0)$ равняется аномальному магнитному моменту протона (в ядерных магнетонах). Для нейтрона

$$\left. \begin{aligned} G_M(0) &= F_1(0) + F_2(0) = \mu_n, \\ G_E(0) &= F_1(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.69)$$

* Действительно, в системе Брейта

$$\begin{aligned} -ie (\Phi_p^+ \int J_4^a(x) dx \Phi_p) &= -ie (2\pi)^3 \delta(\mathbf{x}) (\Phi_p^+ J_4^a(0) \Phi_p) = \\ &= -e \left(\frac{M}{p_0} \right) G_E(\kappa^2) \delta(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

(e — заряд электрона; мы положили $\Phi' = \Phi$). С другой стороны,

$$-ie (\Phi_p^+ \int J_4^a(x) dx \Phi_p) = e_N (\Phi_p^+ \Phi_p) = e_N \delta(\mathbf{x}),$$

где e_N — заряд нуклона. Интегрируя по \mathbf{x} , получаем $G_E(0) = e_N / (-e)$. Рассмотрим матричный элемент оператора магнитного момента

$$\mathfrak{M} = e \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \mathbf{J}^a(x) dx.$$

Получаем

$$(\Phi_p^+ \mathfrak{M}_i \Phi_p) = \frac{1}{2} ie \epsilon_{ikl} (2\pi)^3 \langle p' | J_l^a(0) | p \rangle \frac{\partial \delta(\mathbf{x})}{\partial x_k}.$$

Интегрируя по \mathbf{x} с помощью (12.67), находим

$$\int (\Phi_p^+ \mathfrak{M}_i \Phi_p) d\mathbf{x} = \frac{(-e)}{2M} G_M(0) \Phi' + \sigma_i \Phi.$$

Отсюда следует, что $G_M(0)$ — магнитный момент нуклона в ядерных магнетонах.

Здесь μ_n — магнитный момент нейтрона в ядерных магнетонах.

На этом мы закончим рассмотрение процесса рассеяния электронов на нуклонах. Сечение этого процесса будет вычислено в § 14.

Рассмотрим теперь рассеяние электрона на частице со спином нуль (например, $\pi - e$ -рассеяние). Обозначим q и q' 4-импульсы начального и конечного электронов соответственно, а p и p' — начальный и конечный 4-импульсы частицы со спином нуль. Очевидно, что во втором порядке теории возмущений по e матричный элемент процесса дается выражением (12.33), в котором Φ_p и $\Phi_{p'}$ являются начальным и конечным векторами состояния частицы со спином нуль. Если не учитывать сильных взаимодействий, то матричный элемент тока равен

$$\begin{aligned} (-i) \left(\Phi_{p'}^+ N \left(\phi^+(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi^+(x)}{\partial x_\mu} \phi(x) \right) \Phi_p \right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4p_0 p'_0}} e^{-i(p'-p)x} (p_\mu + p'_\mu). \end{aligned} \quad (12.70)$$

В общем случае матричный элемент тока может быть записан в виде

$$(\Phi_{p'}^+ J_\mu^a(0) \Phi_p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4p_0 p'_0}} \Lambda_\mu(p', p), \quad (12.71)$$

где величина $\Lambda_\mu(p', p)$ зависит от импульсов p и p' и преобразуется как 4-вектор. Очевидно, что $\Lambda_\mu(p', p)$ имеет следующий общий вид:

$$\Lambda_\mu(p', p) = F(\kappa^2) P_\mu + F'(\kappa^2) \kappa_\mu, \quad (12.72)$$

где

$P = p + p'$; $\kappa = p' - p$. Из закона сохранения тока получаем, что

$$\kappa_\mu \Lambda_\mu(p', p) = 0. \quad (12.73)$$

Подставляя в (12.73) выражение (12.72), находим

$$\kappa^2 F'(\kappa^2) = 0.$$

Отсюда $F'(\kappa^2) = 0$ и

$$\Lambda_\mu(p', p) = P_\mu F(\kappa^2). \quad (12.74)$$

Наконец, из унитарности S -матрицы во втором порядке теории возмущений по e получаем

$$\Lambda_\mu(p', p) = -\delta_\mu \Lambda_\mu^*(p, p'). \quad (12.75)$$

Из (12.74) и (12.75) имеем

$$F^*(\kappa^2) = F(\kappa^2). \quad (12.76)$$

Окончательно

$$(\Phi_p^+, J_\mu^a(0) \Phi_p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4p_0 p'_0}} (p + p')_\mu F(\kappa^2). \quad (12.77)$$

Итак, матричный элемент тока в случае частицы со спином нуль характеризуется одним вещественным форм-фактором. Отметим, что матричный элемент процесса рассеяния электрона на частице со спином нуль во втором порядке теории возмущений по электромагнитному взаимодействию может быть представлен диаграммой рис 18. Заштрихованной части диаграммы, обусловленной сильными взаимодействиями, следует при этом поставить в соответствие

$$eF(\kappa^2) (p_\mu + p'_\mu) (2\pi)^4 \delta(p' - p + k),$$

а внешним линиям с импульсами p и p' соответственно

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \text{ и } \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2p'_0}}.$$

Перейдем к рассмотрению следующих процессов со слабым взаимодействием:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p, \quad (12.78a) \quad \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n. \quad (12.78b)$$

К слабым взаимодействиям применима теория возмущений. Сильные взаимодействия будем учитывать феноменологически путем введения форм-факторов.

В настоящее время считается установленным, что гамильтониан, описывающий слабое взаимодействие нуклонов, μ -мезонов и нейтрино, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I^w(x) = & \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_\mu(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\nu(x)) (v_\alpha(x) + a_\alpha(x)) + \\ & + \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_\nu(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\mu(x)) (v_\alpha^+(x) + a_\alpha^+(x)) \delta_\alpha. \end{aligned} \quad (12.79)$$

Здесь G — константа слабого взаимодействия ($G \simeq 10^{-5}/M^2$, M — масса нуклона); ψ_μ и ψ_ν — операторы μ -мезонного и нейтринного полей;

$$\begin{aligned} v_\alpha(x) = & \bar{\psi}_p(x) \gamma_\alpha \psi_n(x) - i\sqrt{2} \left(\phi(x) \frac{\partial \phi_0(x)}{\partial x_\alpha} - \phi_0(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\alpha} \right) + \dots, \\ a_\alpha(x) = & \bar{\psi}_p(x) \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_n(x) + \dots \end{aligned} \quad (12.80)$$

представляют собой векторный и аксиальный токи. В (12.80) ϕ — оператор заряженного π -мезонного поля, а ϕ_0 — оператор поля нейтральных π -мезонов. Векторный ток $v_\alpha(x)$ записан в соответствии с гипотезой сохраняющегося векторного тока.

При рассмотрении процессов (12.78) будут учитываться слабые и сильные взаимодействия. Соответственно гамильтониан взаимодействия равен

$$\mathcal{H}_I(x) = \mathcal{H}_I^w(x) + \mathcal{H}_I^a(x). \quad (12.81)$$

Начнем с рассмотрения процесса (12.78a). Обозначим q и q' 4-импульсы нейтрино и μ -мезона, а p и p' — 4-импульсы нейтрона и протона. Начальный и конечный векторы состояния запишем в виде

$$\Phi_{q,p} = c_v^+(q) \Phi_p, \quad \Phi_{q',p'} = c_\mu^+(q') \Phi_{p'}, \quad (12.82)$$

где Φ_p и $\Phi_{p'}$ — векторы, описывающие начальный нейтрон и конечный протон. Выделим ту часть S -матрицы, которая дает отличный от нуля вклад в матричный элемент процесса (12.78a) в первом порядке по константе слабого взаимодействия G . Обозначим ее S^G . Рассуждая так же, как и при рассмотрении рассеяния электрона нуклоном, получаем

$$S^G(-i) \frac{G}{V^2} \int (\bar{\psi}_\mu(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_\nu(x)) [T(v_\alpha(x) + a_\alpha(x)) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(y) dy}] dx. \quad (12.83)$$

Масса нейтрино считается равной нулю. Спинор $u(q)$, описывающий нейтрино с 4-импульсом q , будем нормировать условием $u^+(q)u(q) = 1$ (см. Приложение). При такой нормировке оператор $\psi_\nu(x)$ равен

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (u^r(q) c_r(q) e^{iqx} + u^r(-q) d_r^+(q) e^{-iqx}) dq. \quad (12.84)$$

С помощью (12.83) и (12.84) получаем следующее выражение для матричного элемента процесса (12.78a):

$$(\Phi_{q',p'}^+, S^G \Phi_{q,p}) = (-i) \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{q_0} \right)^{1/2} \frac{G}{V^2} \bar{u}(q') \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(q) \times \\ \times \int e^{-i(q'-q)x} (\Phi_{p'}^+, T((v_\alpha(x) + a_\alpha(x)) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(y) dy}) \Phi_p) dx, \quad (12.85)$$

где m — масса μ -мезона. Переходя от представления взаимодействия к представлению Гейзенберга, получаем

$$\left. \begin{aligned} (\Phi_{p'}^+, T(v_\alpha(x) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(y) dy}) \Phi_p) &= (\Phi_{p';out}^+ V_\alpha(x) \Phi_{p;in}), \\ (\Phi_{p'}^+, T(a_\alpha(x) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(y) dy}) \Phi_p) &= (\Phi_{p';out}^+ A_\alpha(x) \Phi_{p;in}). \end{aligned} \right\} \quad (12.86)$$

Здесь $V_\alpha(x)$ и $A_\alpha(x)$ — операторы векторного и аксиального токов в представлении Гейзенберга [см. (12.29)], а $\Phi_{p;in}$ и $\Phi_{p';out}$ — векторы состояния начального и конечного нуклонов в этом пред-

ставлении. Аналогично (12.32) имеем

$$\begin{aligned} & (\Phi_{p'; \text{out}}^+ (V_\alpha(x) + A_\alpha(x)) \Phi_{p; \text{in}}) = \\ & = e^{-i(p'-p)x} (\Phi_{p'; \text{out}}^+ (V_\alpha(0) + A_\alpha(0)) \Phi_{p; \text{in}}). \end{aligned} \quad (12.87)$$

Подставляя (12.87) в (12.85), получаем для матричного элемента процесса (индексы in и out в дальнейшем будем опускать)

$$\begin{aligned} (\Phi_{q', p'}^+ S^G \Phi_{q, p}) &= (-i) \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{q_0} \right)^{1/2} \frac{G}{V^2} (2\pi)^4 \delta(p' + q' - p - q) \times \\ & \times (\bar{u}(q') \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(q)) (\Phi_{p'}^+ (V_\alpha(0) + A_\alpha(0)) \Phi_p). \end{aligned} \quad (12.88)$$

Если сильные взаимодействия не учитываются, то из (12.79) и (12.80) получаем, что матричные элементы

$$(\Phi_{p'}^+ V_\alpha(0) \Phi_p) \text{ и } (\Phi_{p'}^+ A_\alpha(0) \Phi_p)$$

равны соответственно

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{p_0 p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p') \gamma_\alpha u(p) \text{ и } \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{p_0 p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p') \gamma_\alpha \gamma_5 u(p).$$

В общем случае матричные элементы векторного и аксиального токов могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} (\Phi_{p'}^+ V_\alpha(0) \Phi_p) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{p_0 p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p') V_\alpha(p', p) u(p), \\ (\Phi_{p'}^+ A_\alpha(0) \Phi_p) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{p_0 p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p') A_\alpha(p', p) u(p), \end{aligned} \right\} \quad (12.89)$$

где матричные элементы

$$\bar{u}(p') V_\alpha(p', p) u(p) \text{ и } \bar{u}(p') A_\alpha(p', p) u(p)$$

преобразуются соответственно как вектор и псевдовектор.

Рассуждая так же, как в случае рассеяния электрона на нуклоне, заключаем, что матрицы $V_\alpha(p', p)$ и $A_\alpha(p', p)$ имеют следующий общий вид:

$$\left. \begin{aligned} V_\alpha(p', p) &= \gamma_\alpha G_V(\kappa^2) + i P_\alpha \frac{F_V(\kappa^2)}{2M} + i \kappa_\alpha \frac{H_V(\kappa^2)}{2M}, \\ A_\alpha(p', p) &= \gamma_\alpha \gamma_5 G_A(\kappa^2) + i \kappa_\alpha \gamma_5 \frac{F_A(\kappa^2)}{2M} + i P_\alpha \gamma_5 \frac{H_A(\kappa^2)}{2M}. \end{aligned} \right\} \quad (12.90)$$

Здесь $G_V, F_V, G_A, F_A, \dots$ — функции квадрата передачи 4-импульса κ^2 ($\kappa = p' - p$; $P = p' + p$).

Из унитарности S -матрицы и инвариантности относительно обращения времени следует, что эти функции вещественны.

Действительно, из условия унитарности S -матрицы получаем [см. (12.50)]

$$(\Phi_{q', p'}^+ R \Phi_{q, p}) + (\Phi_{q, p}^+ R \Phi_{q', p'})^* = - \sum_n (\Phi_{q', p'}^+ R^+ \Phi_n) (\Phi_n^+ R \Phi_{q, p}). \quad (12.91)$$

В правую часть этого соотношения дают вклад только состояния, в которые могут переходить μ^- , p и ν_μ , n . Нетрудно видеть, что наибольший вклад дает вектор, описывающий μ^- -мезон и протон. В этом случае матричный элемент $(\Phi_{q', p'}^+ R + \Phi_n)$ порядка α (рассеяние μ^- -мезона на протоне), а $(\Phi_n^+ R \Phi_{q, p})$ порядка G [процесс (12.78a)]. Опуская величины порядка $G\alpha$ по сравнению с величинами порядка G , из (12.91) получаем

$$(\Phi_{q', p'}^+ R \Phi_{q, p}) = - (\Phi_{q, p}^+ R \Phi_{q', p'})^*. \quad (12.92)$$

Это соотношение связывает матричные элементы прямого и обратного процессов.

Предположим, что имеет место инвариантность относительно обращения времени (T -инвариантность). Из T -инвариантности, как известно, следует, что

$$(\Phi_{q, p}^+ R \Phi_{q', p'}) = (\Phi_{q_T, p_T}^+ R \Phi_{q_T, p_T}). \quad (12.93)$$

Здесь Φ_{q_T, p_T} — вектор состояния, описывающий нейтрон с импульсом $p_T = (-\mathbf{p}, ip_0)$ и нейтрино с импульсом $q_T = (-\mathbf{q}, iq_0)$. Проекция спина нейтрона (нейтрино) в состояниях $\Phi_{q, p}$ и Φ_{q_T, p_T} противоположны (при обращении времени меняются направления импульсов и спинов).

Чтобы охарактеризовать спиновые состояния частиц, описываемых векторами Φ_{q_T, p_T} и $\Phi_{q', p'}$, рассмотрим уравнения для спиноров $u(p)$ и $\bar{u}(p)$. Имеем

$$(\gamma p - iM) u(p) = 0, \quad (12.94a)$$

$$\bar{u}(p) (\gamma p - iM) = 0. \quad (12.94b)$$

Из второго уравнения, используя эрмитовость матриц γ_μ , находим

$$(\gamma^* p - iM) \bar{u}(p) = 0. \quad (12.95)$$

Умножим это уравнение на унитарную матрицу V_I , удовлетворяющую условиям

$$V_T \gamma_\mu^* V_T^{-1} = \gamma_\mu \delta_\mu \quad (12.96)$$

($\delta_\mu = -1$ при $\mu = 1, 2, 3$ и $\delta_4 = 1$; в правой части этого соотношения суммирование по μ не производится). Получаем

$$(\gamma p_T - iM) V_T \bar{u}(p) = 0, \quad (12.97)$$

где

$$p_T = (-\mathbf{p}, ip_0).$$

Положим

$$u_T(p_T) = V_T \bar{u}(p). \quad (12.98)$$

Из (12.97) и (12.98) следует, что спинор $u_T(p_T)$ удовлетворяет уравнению Дирака:

$$(\gamma p_T - iM) u_T(p_T) = 0.$$

С помощью (12.96) легко убедиться в том, что

$$\bar{u}_T(p_T) = u(p) V_T^{-1}. \quad (12.99)$$

Вычислим среднее значение оператора спина

$$\Sigma_i = \frac{1}{2} (-i) \varepsilon_{ikl} \alpha_k \alpha_l = \frac{1}{2} (-i) \varepsilon_{ikl} \gamma_k \gamma_l$$

в состоянии $u_T(p_T)$. С помощью (12.96) находим

$$V_T \Sigma_i^* V_T^{-1} = -\Sigma_i. \quad (12.100)$$

Используя (12.98) — (12.100), получаем

$$\frac{(u_T^+(p_T) \Sigma_i u_T(p_T))}{(u_T^+(p_T) u_T(p_T))} = - \frac{(u^+(p) \Sigma_i u(p))}{(u^+(p) u(p))}, \quad (12.101)$$

т. е. средние значения оператора спина Σ_i в состояниях $u(p)$ и $u_T(p_T)$ равны по величине и противоположны по знаку. Очевидно, что все это относится и к спинору $u_T(q_T) = V_T \bar{u}(q)$.

Мы приходим к заключению, что спиновые состояния нуклона и нейтрино, описываемых вектором Φ_{p_T, q_T} , характеризуются спинорами $u_T(p_T)$ и $u_T(q_T)$. Аналогично протон и μ -мезон в состоянии $\Phi_{q_T', p_T'}$ обладают импульсами $p_T' = (-\mathbf{p}', ip_0')$ и $q_T' = (-\mathbf{q}', iq_0')$ и описываются спинорами

$$u_T(p_T') = V_T \bar{u}(p') \text{ и } u_T(q_T') = V_T \bar{u}(q').$$

Из (12.92) и (12.93) находим

$$(\Phi_{q_T', p_T'}^+ R \Phi_{q_T, p_T}) = - \left(\Phi_{q_T', p_T'}^+ R \Phi_{q_T, p_T} \right)^*. \quad (12.102)$$

Подставляя (12.88) в (12.102), получаем

$$\begin{aligned} & (\bar{u}(q') \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(q)) (\bar{u}(p') [V_\alpha(p', p) + A_\alpha(p', p)] u(p)) = \\ & = (\bar{u}_T(q_T') \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_T(q_T)) (\bar{u}_T(p_T') [V_\alpha(p_T', p_T) + A_\alpha(p_T', p_T)] u_T(p_T))^*. \end{aligned} \quad (12.103)$$

С помощью (12.96), (12.98) и (12.99) находим

$$\begin{aligned} & (\bar{u}_T(q_T') \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u_T(q_T))^* = (u(q') \gamma_\alpha^* (1 - \gamma_5^*) \bar{u}(q))^* \delta_\alpha = \\ & = (\bar{u}(q') \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(q)). \end{aligned} \quad (12.104)$$

При получении (12.104) мы использовали соотношение

$$V_T^{-1} \gamma_5 V_T = -\gamma_5^*,$$

в справедливости которого легко убедиться из (12.96). Далее из (12.90), (12.96), (12.98) и (12.99) находим

$$\begin{aligned} & (\bar{u}_T(p_T') V_\alpha(p_T', p_T) u_T(p_T))^* = \bar{u}(p') \left[\gamma_\alpha G_V^* + i P_\alpha \frac{F_V^*}{2M} + i \kappa_\alpha \frac{H_V^*}{2M} \right] u(p), \\ & (\bar{u}_T(p_T') A_\alpha(p_T', p_T) u_T(p_T))^* = \bar{u}(p') \left[\gamma_\alpha \gamma_5 G_A^* + i \kappa_\alpha \gamma_5 \frac{F_A^*}{2M} + i P_\alpha \gamma_5 \frac{H_A^*}{2M} \right] u(p). \end{aligned} \quad (12.105)$$

С помощью (12.103), (12.104) и (12.105) получаем:

$$\left. \begin{aligned} G_V^* &= G_V, F_V^* = F_V, H_V^* = H_V, \\ G_A^* &= G_A, F_A^* = F_A, H_A^* = H_A. \end{aligned} \right\} \quad (12.106)$$

Таким образом, если имеет место T -инвариантность, то все форм-факторы в выражениях (12.90) вещественны. Далее, используя изотопическую инвариантность сильных взаимодействий, покажем, что форм-факторы H_V и H_A обращаются в нуль. Обозначим сумму векторного и аксиального токов $J_\alpha(x)$:

$$J_\alpha(x) = V_\alpha(x) + A_\alpha(x).$$

Будем называть этот оператор оператором тока.

Рассмотрим оператор

$$j_\alpha^0(x) = (\bar{\psi}_p(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_n(x)). \quad (12.107)$$

В соответствии с гипотезой изотопической инвариантности протон и нейтрон являются двумя состояниями одной частицы — нуклона. Оператор нуклонного поля обозначим $\psi_\xi(x)$. Положим, что $\psi_1(x) = \psi_p(x)$ и $\psi_{-1}(x) = \psi_n(x)$. Оператор (12.107) может быть записан:

$$\begin{aligned} j_\alpha^0 &= (\bar{\psi}_p \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_n) = (\bar{\psi}_\xi \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) (\tau_+)_{\xi\xi'} \psi_{\xi'}) = \\ &= (\bar{\psi} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \tau_+ \psi). \end{aligned} \quad (12.108)$$

Здесь

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\tau_1 + i\tau_2), \quad (12.109)$$

где τ_1 и τ_2 — матрицы Паули.

Оператор нуклонного поля $\psi_{\xi}^{(+)}(x)$ может быть записан в виде

$$\psi_{\xi}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{M}{p_0} \right)^{1/2} u^r(p) \chi_{\xi}^{\lambda} c_{r,\lambda}(p) e^{ipx} dp. \quad (12.110)$$

Здесь индекс λ принимает значения p и n ; $c_{r,p}(p)$ и $c_{r,n}(p)$ — соответственно операторы уничтожения протона и нейтрона, а

$$\chi^p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12.111)$$

Рассмотрим преобразование

$$\psi'(x) = U \psi(x) U^{-1} = e^{\frac{i}{2} \tau_2 \pi} \psi(x) = i\tau_2 \psi(x) \quad (12.112)$$

(поворот на угол π вокруг второй оси в изотопическом пространстве; U — унитарный оператор, действующий на операторы поля). Из 12.110) и (12.112) находим (спиновый индекс опущен)

$$U c_{\lambda}(p) U^{-1} = \sum_{\lambda'} ((\chi^{\lambda})^+ i\tau_2 \chi^{\lambda'}) c_{\lambda'}(p). \quad (12.113)$$

Далее, с помощью (12.111) получаем

$$U c_p(p) U^{-1} = c_n(p), \quad U c_n(p) U^{-1} = -c_p(p). \quad (12.114)$$

Отсюда путем эрмитова сопряжения находим

$$U c_p^+(p) U^{-1} = c_n^+(p); \quad U c_n^+(p) U^{-1} = -c_p^+(p). \quad (12.115)$$

Учитывая, что $U\Phi_0 = \Phi_0$, из (12.115) получаем

$$U c_p^+(p) \Phi_0 = c_n^+(p) \Phi_0, \quad U c_n^+(p) \Phi_0 = -c_p^+(p) \Phi_0. \quad (12.116)$$

Таким образом, если на вектор, описывающий протон с импульсом p , подействовать оператором U , то получим вектор, описывающий нейтрон с тем же импульсом. Если на вектор, описывающий нейтрон, подействовать оператором U , то получим (со знаком минус) вектор, описывающий протон. Из (12.108) и (12.112) находим

$$\begin{aligned} U j_{\alpha}^0(x) U^{-1} &= \bar{\psi}(x) \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) \tau_2 \frac{1}{2} (\tau_1 + i\tau_2) \tau_2 \psi(x) = \\ &= -\bar{\psi}(x) \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) \frac{1}{2} (\tau_1 - i\tau_2) \psi(x) = -(j_{\alpha}^0(x))^+ \delta_{\alpha}. \end{aligned} \quad (12.117)$$

В правой части по α суммирование не производится.

Предположим, что полный ток $j_a(x) = v_a(x) + a_a(x)$, входящий в гамильтониан слабых взаимодействий (12.79), удовлетворяет соотношению*

$$U j_a(x) U^{-1} = -j_a^+(x) \delta_a \quad (12.118)$$

[в случае оператора $\Phi(x)$, отвечающего частицам с изотопическим спином I , $U \Phi(x) U^{-1} = e^{i\pi I_z \Phi(x)}$].

Для интересующего нас матричного элемента получаем

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_{p'(p)}^+ T \left(j_a(0) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx} \right) \Phi_{p(n)} \right) = \\ & = \left(\Phi_{p'(p)}^+ U^{-1} U T \left(j_a(0) e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx} \right) U^{-1} U \Phi_{p(n)} \right) = \\ & = \left(\Phi_{p'(n)}^+ T \left(j_a^+(0) \delta_a e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx} \right) \Phi_{p(p)} \right). \end{aligned} \quad (12.119)$$

Здесь $\Phi_{p'(p)}$ — вектор состояния, описывающий протон с импульсом p' , $\Phi_{p(n)}$ — вектор состояния нейтрона с импульсом p и т. д. При получении (12.119) мы использовали соотношение

$$U \mathcal{H}_I^a U^{-1} = \mathcal{H}_I^a, \quad (12.120)$$

вытекающее из изотопической инвариантности гамильтониана сильных взаимодействий. Переходя к представлению Гейзенберга, получаем из (12.119)

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_{p'(p)}^+ J_a(0) \Phi_{p(n)} \right) = \left(\Phi_{p'(n)}^+ J_a^+(0) \Phi_{p(p)} \right) \delta_a = \\ & = \left(\Phi_{p(p)}^+ J_a(0) \Phi_{p'(n)} \right)^* \delta_a. \end{aligned} \quad (12.121)$$

Подставляя в это соотношение выражения (12.89), находим

$$\begin{aligned} & (\bar{u}(p') (V_a(p', p) + A_a(p', p)) u(p)) = \\ & = (\bar{u}(p) (V_a(p, p') + A_a(p, p')) u(p'))^* \delta_a = \\ & = (\bar{u}(p') (\bar{V}_a(p, p') + \bar{A}_a(p, p')) u(p)) \delta_a. \end{aligned} \quad (12.122)$$

Далее, используя (12.90) и (12.106), получаем из (12.122), что

$$H_V = 0 \text{ и } H_A = 0. \quad (12.123)$$

* В общем случае ток j_a может быть записан в виде

$$j_a = j_a^I + j_a^{II},$$

где

$$j_a^I = \frac{1}{2} (j_a - U j_a^+ \delta_a U^{-1}), \quad j_a^{II} = \frac{1}{2} (j_a + U j_a^+ \delta_a U^{-1}).$$

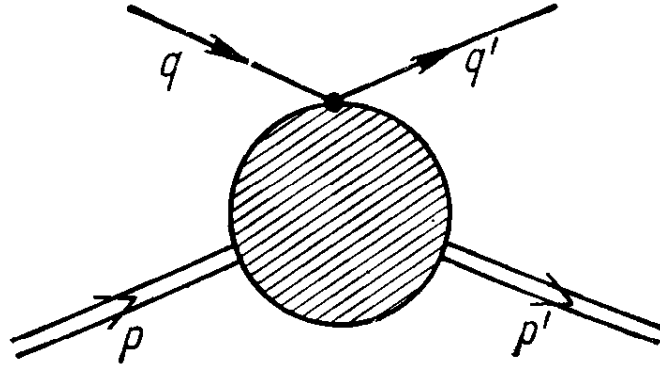
Очевидно, что

$$U j_a^I U^{-1} = -\delta_a (j_a^I)^+, \quad U j_a^{II} U^{-1} = \delta_a (j_a^{II})^+.$$

Предположение (12.118) означает, что ток j_a^{II} — так называемый ток второго рода — не входит в гамильтониан слабых взаимодействий.

Таким образом, если верны сделанные нами предположения (T -инвариантность, отсутствие токов второго рода), то матричный элемент $(\Phi_p^+ J_\alpha(0) \Phi_p)$ характеризуется четырьмя вещественными форм-факторами.

Нетрудно видеть, что обращение в нуль форм-фактора H_V является также следствием гипотезы сохранения векторного тока.



Р и с. 19

Действительно, из условия сохранения векторного тока

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (12.124)$$

для матричного элемента получаем

$$(p' - p)_\alpha (\Phi_p^+ V_\alpha(0) \Phi_p) = 0. \quad (12.125)$$

Отсюда, используя (12.89) и (12.90), находим

$$H_V = 0.$$

Матричному элементу рассмотренного процесса (12.78а) может быть поставлена в соответствие диаграмма, представленная на рис. 19. Внешним линиям этой диаграммы отвечают спиноры с соответствующими нормировочными множителями, лептонной вершине — матрица $\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} \gamma_\alpha(1 + \gamma_5)$, а заштрихованной части диаграммы, учитывающей сильные взаимодействия, отвечает матрица

$$\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} \left[\gamma_\alpha (G_V + \gamma_5 G_A) + iP_\alpha \frac{F_V}{2M} + i\kappa_\alpha \gamma_5 \frac{F_A}{2M} \right].$$

В заключение получим матричный элемент процесса (12.78б). Очевидно, что вклад в матричный элемент этого процесса дает второй член гамильтониана (12.79). Обозначим q и q' 4-импульсы антинейтрино и μ^+ -мезона, а p и p' — 4-импульсы протона и нейтрона. В

первом порядке по G матричный элемент процесса равен

$$(\Phi_{q', p'}^{+} S^G \Phi_{q, p}) = i \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{q_0'} \right)^{1/2} (\bar{u}(-q) \gamma_a (1 + \gamma_5) u(-q)) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(p' + q' - p - q) (\Phi_{p', (n)}^{+} T(j_a^{+}(0) \delta_a e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx}) \Phi_{p(p)}). \quad (12.126)$$

Используя соотношение (12.119), находим, что

$$\left(\Phi_{p', (n)}^{+} T(j_a^{+}(0) \delta_a e^{-i \int \mathcal{H}_I^a(x) dx}) \Phi_{p(p)} \right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M^2}{p_0 p_0'} \right)^{1/2} (\bar{u}(p') \left[\gamma_a G_V + i P_a \frac{F_V}{2M} + \gamma_a \gamma_5 G_A + i \kappa_a \gamma_5 \frac{F_A}{2M} \right] u(p)). \quad (12.127)$$

Таким образом, матричные элементы процессов (12.78a) и (12.78б) характеризуются одними и теми же форм-факторами.

Вычисление сечений процессов и вероятностей распадов

§ 13. Сечения. Следы

В этом параграфе мы дадим определение эффективного сечения. Рассмотрим некоторый процесс превращения двух частиц в две частицы. Обозначим 4-импульсы начальных (конечных) частиц p_1 и p_2 (p'_1 и p'_2). Матричный элемент перехода из начального состояния Φ_i в конечное состояние Φ_f запишем в виде

$$(\Phi_f^+ S \Phi_i) = (\Phi_f^+ \Phi_i) + (\Phi_f^+ (S-1) \Phi_i). \quad (13.1)$$

Второй член в правой части (13.1) обусловлен взаимодействием; он обращается в нуль, если взаимодействие отсутствует, и всегда может быть записан следующим образом:

$$(\Phi_f^+ (S-1) \Phi_i) = \delta(P_f - P_i) R_{fi}. \quad (13.2)$$

Здесь $P_f = p'_1 + p'_2$ — суммарный 4-импульс конечных частиц, а $P_i = p_1 + p_2$ — суммарный 4-импульс начальных частиц.

Нас интересует вероятность перехода из начального состояния в конечное за счет взаимодействия. Эта вероятность дается квадратом модуля второго члена в выражении (13.1). Пусть dW_{fi} обозначает вероятность того, что конечные частицы обладают импульсами в интервалах от p'_1 до $p'_1 + dp'_1$ и от p'_2 до $p'_2 + dp'_2$. Тогда

$$dW_{fi} = |R_{fi}|^2 \delta(P_f - P_i) \times \\ \times \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-T/2}^{T/2} dx_0 \int_V d\mathbf{x} e^{i(P_f - P_i)x} \right) dp'_1 dp'_2. \quad (13.3)$$

Вторая δ -функция записана в виде

$$\delta(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \int_{-T/2}^{T/2} dx_0 \int_V d\mathbf{x} e^{i(P_f - P_i)x}.$$

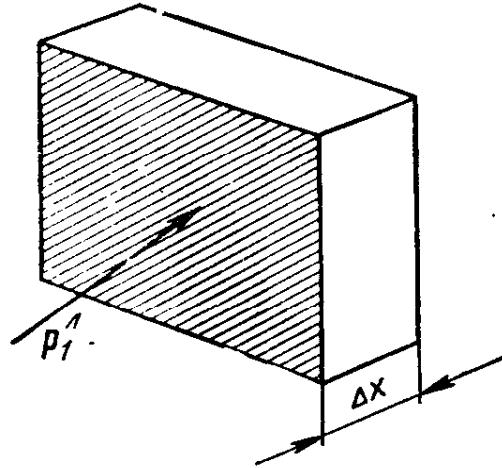
Так как интеграл в выражении (13.3) умножается на $\delta(P_f - P_i)$ то $e^{i(P_f - P_i)x}$ под знаком интеграла можно заменить на 1. Тогда

$$dW_{fi} = |R_{fi}|^2 \delta(P_f - P_i) dp'_1 dp'_2 \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} VT. \quad (13.4)$$

Таким образом, $dW_{fi} \rightarrow \infty$. Это связано с тем, что dW_{fi} представляет собой вероятность перехода за время от $-\infty$ до ∞ (определение S -матрицы) и во всем пространстве (начальные и конечные функции — плоские волны). Если V и T достаточно велики, то вероятность перехода за время T в объеме V равна

$$(dW_{fi})_{T,V} = |R_{fi}|^2 \delta(P_f - P_i) d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 \frac{1}{(2\pi)^4} VT. \quad (13.5)$$

Отсюда отнесенная к единице времени и единице объема вероятность перехода при условии, что переходы происходят в достаточно боль-



Р и с. 20

шом объеме и в течение достаточно большого времени, равна

$$dw_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^4} |R_{fi}|^2 \delta(P_f - P_i) d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2. \quad (13.6)$$

Эта величина конечна и не зависит от V и T .

Определим теперь дифференциальное сечение процесса. В системе отсчета, где частицы с импульсом p_2 (частицы мишени) покоятся (лабораторная система — л. с.), рассмотрим элемент объема (рис. 20). Пусть площадь заштрихованной площадки, ортогональной импульсу падающей частицы в л. с., \mathbf{p}_1^* , равна единице.

Вероятность обнаружения частиц мишени в этом элементе объема равна $\rho_2^* \Delta x \cdot 1$, где ρ_2^* — плотность вероятности. Умножим эту величину на вероятность того, что падающая частица за единицу времени пройдет заштрихованную единичную площадку. Получим

$$v_1^* \rho_1^* \rho_2^* \Delta x, \quad (13.7)$$

где v_1^* — скорость падающих частиц в л. с., а ρ_1^* — соответствующая плотность вероятности. Величину (13.7), отнесенную к единичному объему, назовем *поток* и обозначим j . Имеем

$$j = \rho_1^* \rho_2^* v_1^*. \quad (13.8)$$

Запишем эту величину в произвольной системе отсчета. Нетрудно видеть, что скорость падающей частицы в л. с. может быть записана следующим образом:

$$v_1^\pi = \frac{|\mathbf{p}_1^\pi|}{p_{10}^\pi} = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{-(p_1 p_2)}. \quad (13.9)$$

Здесь p_1 и p_2 — 4-импульсы падающей частицы и частицы-мишени в произвольной системе отсчета, а m_1 и m_2 — массы частиц. Обозначим $j_{1\mu}$ и $j_{2\mu}$ 4-векторы потока ($j_k = \rho_k \mathbf{v}_k$, $(j_k)_4 = i\rho_k$, где ρ_k и \mathbf{v}_k — соответственно плотность и скорость, $k=1,2$). Имеем

$$\rho_1^\pi \rho_2^\pi = -(j_1 j_2). \quad (13.10)$$

С помощью (13.8) — (13.10) получаем

$$j = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{(p_1 p_2)} (j_1 j_2). \quad (13.11)$$

Очевидно, что эта величина — инвариант. Нетрудно видеть, что

$$(j_1 j_2) = \rho_1 \rho_2 \left(\frac{p_1 p_2}{p_{10} p_{20}} - 1 \right) = \frac{\rho_1 \rho_2 (p_1 p_2)}{p_{10} p_{20}}. \quad (13.12)$$

Окончательно находим

$$j = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{p_{10} p_{20}} \rho_1 \rho_2. \quad (13.13)$$

Дифференциальное сечение определяется как отношение вероятности перехода в единице объема за единицу времени $d\omega_{fi}$ к потоку j

$$d\sigma_{fi} = \frac{d\omega_{fi}}{j}. \quad (13.14)$$

Поскольку четырехмерный объем — инвариант, вероятность $d\omega_{fi}$ также инвариант. Таким образом, сечение $d\sigma_{fi}$, определенное соотношением (13.14), является скаляром.

Матричный элемент R_{fi} [см. (13.2)] запишем в следующем виде

$$R_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{p_{10} p_{20} p_{10}' p_{20}'}} (2\pi)^4 M_{fi}. \quad (13.15)$$

Мы выделили множители $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{p_0}}$, связанные с каждой внешней линией, а также множитель $(2\pi)^4$. Матричный элемент M_{fi} является скаляром (см. найденные в предыдущих параграфах выражения для матричных элементов). При принятой нормировке плотности ρ_1 и ρ_2 , входящие в (13.13), равны

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{(2\pi)^3}. \quad (13.16)$$

С помощью (13.13) — (13.16) получаем для дифференциального сечения процесса

$$d\sigma_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |M_{fi}|^2 \delta(P_f - P_i) \frac{d\mathbf{p}'_1}{p'_{10}} \frac{d\mathbf{p}'_2}{p'_{20}}. \quad (13.17)$$

Все величины, входящие в правую часть (13.17), являются скалярами*. Отметим, что

$$\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = p_{10} p_{20} \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2}, \quad (13.18)$$

где $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1/p_{10}$ и $\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_2/p_{20}$ — скорости частиц.

До сих пор мы предполагали, что начальные и конечные частицы находятся в определенных спиновых состояниях. На опыте при измерении сечений регистрируются конечные частицы с определенными импульсами и всеми возможными значениями проекций спина. Кроме того, начальные частицы могут быть произвольно поляризованы, и, следовательно, их спиновое состояние должно описываться матрицей плотности.

В качестве примера рассмотрим процесс, в котором участвуют две частицы со спином 1/2 и две бесспиновые частицы. Будем предполагать, что частицы с 4-импульсами p_1 и p'_1 обладают спином 1/2, а спины частиц с импульсами p_2 и p'_2 равны нулю. Матричный элемент M_{fi} может быть записан в виде

$$M_{fi} = \bar{u}^{r'}(p'_1) \mathfrak{M}(p'_1, p'_2; p_1, p_2) u^r(p_1), \quad (13.19)$$

где спиноры $\bar{u}^{r'}(p'_1)$ и $u^r(p_1)$ отвечают выходящей и входящей внешним линиям, а $\mathfrak{M}(p'_1, p'_2; p_1, p_2)$ — матрица, действующая на спиновые переменные. Найдем M_{fi}^* .

* Нетрудно видеть, что $d\mathbf{p}/p_0$ — скаляр. Действительно, рассмотрим преобразование Лоренца

$$p'_x = \frac{p_x - \beta p_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad p'_0 = \frac{p_0 - \beta p_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Учитывая, что $p_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, получаем

$$dp'_x = \frac{dp_x \left(1 - \beta \frac{p_x}{p_0}\right)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{dp_x p'_0}{p_0},$$

$$dp'_y = dp_y, \quad dp'_z = dp_z,$$

т. е.

$$\frac{d\mathbf{p}'}{p'_0} = \frac{d\mathbf{p}}{p_0}.$$

Имеем

$$M_{fi}^* = (\bar{u}'(p_1') \mathfrak{M} u'(p_1))^* = ((u'(p_1))^+ \mathfrak{M}^+ \gamma_4 u'(p_1')) = \\ = (\bar{u}'(p_1) \overline{\mathfrak{M}} u'(p_1')), \quad (13.20)$$

где

$$\overline{\mathfrak{M}} = \gamma_4 \mathfrak{M}^+ \gamma_4. \quad (13.21)$$

Если спиновое состояние начальных частиц описывается матрицей плотности *

$$\rho_{\sigma\sigma'}(p_1) = \sum_r u'_\sigma(p_1) \bar{u}'_{\sigma'}(p_1) \alpha_r \quad (13.22)$$

(величины α_r задают спиновое состояние в базисе $u'(p_1)$), то сечение рассматриваемого процесса равно

$$d\sigma_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{V(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \left[\sum_{r, r'} (\bar{u}'(p_1') \mathfrak{M} u'(p_1)) \times \right. \\ \left. \times (\bar{u}'(p_1) \overline{\mathfrak{M}} u'(p_1')) \alpha_r \right] \delta(P_f - P_i) \frac{dp_1'}{p_{10}} \frac{dp_2'}{p_{20}}. \quad (13.23)$$

Учитывая соотношение

$$\sum_r u'_\sigma(p_1) \bar{u}'_{\sigma'}(p_1) = \Lambda_{\sigma\sigma'}(p_1) = \left(\frac{\hat{p}_1 + im_1}{2im_1} \right)_{\sigma\sigma'} \quad (13.24)$$

(см. Приложение), получаем, что величина в квадратных скобках в выражении (13.23) равна

$$\sum_{\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''} |\mathfrak{M}_{\sigma\sigma'} \left(\sum_r u'_\sigma(p_1) \bar{u}'_{\sigma'}(p_1) \alpha_r \right) \overline{\mathfrak{M}}_{\sigma''\sigma'''} \left(\sum_{r'} u'_{\sigma''}(p_1') \bar{u}'_{\sigma'''}(p_1') \right)| = \\ = \sum_{\sigma} \left(\mathfrak{M} \rho(p_1) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p_1') \right)_{\sigma\sigma} = \text{Sp} \left[\mathfrak{M} \rho(p_1) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p_1') \right]. \quad (13.25)$$

Окончательно для сечения процесса в случае поляризованных начальных частиц находим следующее выражение:

$$d\sigma_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{V(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \text{Sp} \left[\mathfrak{M} \rho(p_1) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p_1') \right] \times \\ \times \delta(P_f - P_i) \frac{dp_1'}{p_{10}} \frac{dp_2'}{p_{20}}. \quad (13.26)$$

Для вычисления сечений необходимо, следовательно, уметь вычислять следы произведений матриц γ . Способы вычисления следов произведений матриц γ основываются на соотношениях

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu &= 2\delta_{\mu\nu}, \\ \gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu &= 0, \quad \gamma_5^2 = 1, \end{aligned} \right\} \quad (13.27)$$

* Спиновая матрица плотности для частиц со спином 1/2 рассматривается в Приложении.

а также на соотношении

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA), \quad (13.28)$$

в справедливости которого для любых матриц A и B нетрудно убедиться. Действительно,

$$\text{Sp}(AB) = \sum_{\sigma, \sigma'} A_{\sigma\sigma'} B_{\sigma'\sigma} = \sum_{\sigma, \sigma'} B_{\sigma'\sigma} A_{\sigma\sigma'} = \text{Sp}(BA).$$

С помощью (13.27) и (13.28) докажем следующие утверждения:

1. След произведения нечетного числа матриц γ равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\underbrace{\gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\rho}_{\text{нечетное число}}) &= \text{Sp}(\gamma_5 \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\rho) = \\ &= -\text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\rho \gamma_5) = -\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\rho) = 0. \end{aligned} \quad (13.29)$$

Первое равенство в (13.29) получено заменой 1 на γ_5^2 , второе — путем перестановки матрицы γ_5 с матрицами γ_μ , γ_ν и т. д. Третье равенство получено с помощью соотношения (13.28).

$$2. \quad \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu}. \quad (13.30)$$

Действительно, используя (13.27) и (13.28), находим

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{Sp}[2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu] = 8\delta_{\mu\nu} - \text{Sp}\gamma_\mu \gamma_\nu.$$

Пусть a и b — произвольные 4-векторы. Умножив (13.30) на a_μ и b_ν и просуммировав по μ и ν , получаем

$$\text{Sp}(\hat{a}\hat{b}) = 4(ab). \quad (13.31)$$

$$3. \quad \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4(\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}). \quad (13.32)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= \text{Sp}[(2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_\rho \gamma_\sigma] = \\ &= 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \text{Sp}[\gamma_\nu (2\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho \gamma_\mu) \gamma_\sigma] = \\ &= 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - 8\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \text{Sp}[\gamma_\nu \gamma_\rho (2\delta_{\mu\sigma} - \gamma_\sigma \gamma_\mu)] = \\ &= 8\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - 8\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + 8\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma). \end{aligned}$$

Переносим последний член налево, получаем (13.32). Способ вычисления состоял в следующем. С помощью перестановочных соотношений (13.27) матрица γ_μ «протаскивалась» через все остальные матрицы, затем использовалось соотношение (13.28), чтобы вернуть матрицу γ_μ в исходное положение. Очевидно, что таким способом можно вычислить след произведения шести, восьми и т. д. матриц γ .

Пусть a, b, c и d — любые 4-векторы. Умножая (13.32) на a_μ, b_ν, c_ρ и d_σ и суммируя по μ, ν, ρ и σ , получаем

$$\text{Sp} (\hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d}) = 4[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)]. \quad (13.33)$$

$$4. \quad \text{Sp} \gamma_5 = 0. \quad (13.34)$$

Действительно,

$$5. \quad \begin{aligned} \text{Sp} \gamma_5 &= \text{Sp} (\gamma_1 \gamma_1 \gamma_5) = -\text{Sp} (\gamma_1 \gamma_5 \gamma_1) = -\text{Sp} \gamma_5 = 0. \\ \text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) &= 0. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Запишем $\text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu)$ в виде

$$\begin{aligned} \text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) &= \frac{1}{2} \text{Sp} [\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)] + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Sp} [\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu)]. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Второй член вследствие (13.27) равен $\delta_{\mu\nu} \text{Sp} \gamma_5 = 0$. Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\rho \gamma_\sigma. \quad (13.37)$$

С помощью (13.37) и (13.30) получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp} (\gamma_\rho \gamma_\sigma) = -2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta_{\rho\sigma} = 0. \\ 6. \quad \text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= 4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (13.38)$$

Действительно, нетрудно видеть, что след в левой части этого равенства антисимметричен относительно перестановки любых двух индексов:

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] &= \text{Sp} [\gamma_5 \gamma_\mu (2\delta_{\nu\rho} - \gamma_\rho \gamma_\nu) \gamma_\sigma] = \\ &= -\text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Далее

$$\text{Sp} (\gamma_5 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4) = \text{Sp} \gamma_5^2 = 4.$$

§ 14. Рассеяние электрона на нуклоне

Из опытов по рассеянию электронов нуклонами определяются электромагнитные форм-факторы нуклонов. В этом параграфе будет вычислено сечение этого процесса. Обозначим q и q' (p и p') 4-импульсы начального и конечного электронов (нуклонов). Диаграмма процесса во втором порядке теории возмущений по e изображена на рис. 18. Все сильные взаимодействия нуклона (заштрихованная часть диаграммы) учитываются феноменологически, путем введения форм-факторов.

Матричный элемент процесса рассеяния электрона нуклоном дается следующим выражением (см. § 12):

$$(\Phi_{q', p'}^+ S^{e^2} \Phi_{q, p}) = \frac{1}{(2\pi)^6} i \left(\frac{m^2 M^2}{p_0 p'_0 q_0 q'_0} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^4} \times \\ \times (2\pi)^8 e^2 (\bar{u}(q') \gamma_\mu u(q)) (\bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p)) \frac{1}{\kappa^2} \delta(p' + q' - p - q). \quad (14.1)$$

В этом выражении m и M — соответственно массы электрона и нуклона; $\kappa = p' - p$, а

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu F_1(\kappa^2) - \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} \kappa_\nu F_2(\kappa^2), \quad (14.2)$$

где F_1 и F_2 — дираковский и паулиевский форм-факторы нуклона.

С помощью уравнения Дирака для спиноров $u(p)$ и $\bar{u}(p')$ нетрудно видеть, что

$$\bar{u}(p') \sigma_{\mu\nu} \kappa_\nu u(p) = -\bar{u}(p') [i(p' + p)_\mu + 2M\gamma_\mu] u(p). \quad (14.3)$$

Используя это соотношение, получаем

$$\bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p) = \\ = \bar{u}(p') \left[\gamma_\mu (F_1 + F_2) + \frac{i}{2M} F_2 (p' + p)_\mu \right] u(p). \quad (14.4)$$

Как было показано в предыдущем параграфе, вычисление сечения сводится к вычислению следов. Прежде чем вычислять следы, естественно с помощью уравнения Дирака, которому удовлетворяют спиноры начальных и конечных частиц, уменьшить, насколько это возможно, число матриц γ в матричном элементе. Воспользуемся соотношением (14.4). Из (14.1), (13.15) и (14.4) получаем следующее выражение для $M_{q'p'; qp}$:

$$M_{q'p'; qp} = ie^2 m M (\bar{u}(q') \gamma_\mu u(q)) (\bar{u}(p') R_\mu u(p)) \frac{1}{\kappa^2}. \quad (14.5)$$

Здесь

$$R_\mu(p', p) = \gamma_\mu G_M + i \frac{F_2}{M} P_\mu, \quad (14.6)$$

где

$$P = p + p',$$

а

$$G_M = F_1 + F_2 \text{ — магнитный форм-фактор.} \quad (14.7)$$

Рассмотрим рассеяние неполяризованных частиц. В этом случае начальные матрицы плотности электронов и нуклонов равны

$$\rho(q) = \frac{1}{2} \Lambda(q), \quad \rho(p) = \frac{1}{2} \Lambda(p), \quad (14.8)$$

где $\Lambda(q) = \frac{\hat{q} + im}{2im}$, $\Lambda(p) = \frac{\hat{p} + iM}{2iM}$ — проецирующие операторы (см. Приложение).

Из (14.7), (13.19) и (13.26) получаем следующее выражение для дифференциального сечения процесса:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{V(pq)^2 - M^2 m^2} e^4 m^2 M^2 \frac{1}{4} \frac{1}{(\kappa^2)^2} \text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(q) \bar{\gamma}_\nu \Lambda(q')] \times \\ \times \text{Sp} [R_\mu \Lambda(p) \bar{R}_\nu \Lambda(p')] \delta(p' + q' - p - q) \frac{dp'_0}{p'_0} \frac{dq'_0}{q'_0}. \quad (14.9)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_\nu &= \gamma_4 \gamma_\nu \gamma_4 = \delta_\nu \gamma_\nu; \\ \bar{R}_\nu &= \gamma_4 R_\nu^+ \gamma_4 = \left(\gamma_\nu G_M + iP_\nu \frac{F_2}{2M} \right) \delta_\nu \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

(напомним, что $\delta_\nu = -1$ при $\nu = 1, 2, 3$ и $\delta_4 = 1$; суммирование по ν в правой части (14.10) не производится).

С помощью (14.10) имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(q) \bar{\gamma}_\nu \Lambda(q')] \text{Sp} [R_\mu \Lambda(p) \bar{R}_\nu \Lambda(p')] &= \\ = \text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(q) \gamma_\nu \Lambda(q')] \text{Sp} [R_\mu \Lambda(p) R_\nu \Lambda(p')]. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Перейдем теперь к вычислению следов. Используя (13.29), (13.30) и (13.22), легко находим

$$\begin{aligned} \text{Sp} [R_\mu \Lambda(p) R_\nu \Lambda(p')] &= -\frac{1}{M^2} \left\{ G_M^2 [p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - \right. \\ &\left. - \delta_{\mu\nu} (pp' + M^2)] + P_\mu P_\nu \left[-2MG_M \left(\frac{F_2}{2M} \right) - \left(\frac{F_2}{2M} \right)^2 (pp' - M^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Запишем выражение (14.12) в другом виде. Выразим p' и p через P и κ . Получаем

$$p' = \frac{1}{2} (P + \kappa), \quad p = \frac{1}{2} (P - \kappa). \quad (14.13)$$

Отсюда находим

$$p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu = \frac{1}{2} (P_\mu P_\nu - \kappa_\mu \kappa_\nu). \quad (14.14)$$

Далее очевидно, что

$$pp' + M^2 = -\frac{1}{2} \kappa^2, \quad pp' - M^2 = -\frac{1}{2} (\kappa^2 + 4M^2). \quad (14.15)$$

Выразим F_2 через магнитный и зарядовый форм-факторы. Имеем

$$G_M = F_1 + F_2, \quad G_E = F_1 - \frac{\kappa^2}{4M^2} F_2,$$

откуда

$$\frac{1}{2M} F_2 = \frac{2(G_M - G_E) M}{\kappa^2 + 4M^2}. \quad (14.16)$$

Используя (14.14) — (14.16), получаем

$$\begin{aligned} & \text{Sp} [R_\mu \Lambda(p) R_\nu \Lambda(p')] = \\ & = -\frac{1}{2M^2} \left\{ G_M^2 [\delta_{\mu\nu} \kappa^2 - \kappa_\mu \kappa_\nu] + \frac{P_\mu P_\nu}{\kappa^2 + 4M^2} [G_M^2 \kappa^2 + 4M^2 G_E^2] \right\}. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Таким образом, если ввести магнитный и зарядовый форм-факторы, то в выражение для сечения не войдет интерференционный член $G_M G_E$. Последнее легко понять с помощью соотношений (12.67) (в выражение для сечения рассеяния неполяризованных частиц не может входить произведение величин, одна из которых умножается в матричном элементе на единичную матрицу, а другая на σ_i). Далее, в выражении (14.17) магнитный форм-фактор умножается на величины, квадратично зависящие от κ , что также легко понять с помощью (12.67).

Электронный след может быть получен из (14.12). Для этого в выражении (14.12) следует положить $F_2 = 0$, $G_M = 1$ и произвести замену $p \rightarrow q$, $p' \rightarrow q'$, $M \rightarrow m$. Получаем

$$\text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(q) \gamma_\nu \Lambda(q')] = -\frac{1}{m^2} \left[q_\mu q'_\nu + q_\nu q'_\mu + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \kappa^2 \right]. \quad (14.18)$$

При получении (14.18) использовалось также соотношение

$$qq' + m^2 = -\frac{1}{2} \kappa^2, \quad (14.19)$$

которое следует из равенства

$$q - q' = p' - p = \kappa. \quad (14.20)$$

Следующий шаг — умножение (14.18) на (14.17) и суммирование по μ и ν . Прежде чем производить эти свертки покажем, что

$$\text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(q) \gamma_\nu \Lambda(q') \kappa_\mu] = 0. \quad (14.21)$$

Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \hat{q} \Lambda(q) &= \frac{1}{2im} (q^2 + im\hat{q}) = im\Lambda(q), \\ \Lambda(q') \hat{q}' &= im\Lambda(q'), \end{aligned} \right\} \quad (14.22)$$

откуда

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(q) \gamma_\nu \Lambda(q') \kappa_\mu] &= \text{Sp} [\Lambda(q') \hat{\kappa} \Lambda(q) \gamma_\nu] = \\ &= \text{Sp} [\Lambda(q') (\hat{q} - \hat{q}') \Lambda(q) \gamma_\nu] = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим

$$\text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(q) \gamma_\nu \Lambda(q') \kappa_\nu] = 0. \quad (14.23)$$

Из этих соотношений следует, что член $\kappa_\mu \kappa_\nu$ в (14.17) не дает вклада в сечение. Кроме того, если представить 4-вектор P в виде

$P = 2p + \kappa$, то из (14.21) и (14.23) заключаем, что при свертывании тензоров (14.17) и (14.18) $P_\mu P_\nu$ можно заменить на $4p_\mu p_\nu$. В результате получаем

$$A = \text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(q) \gamma_\nu \Lambda(q')] \text{Sp} [R_\mu \Lambda(p) R_\nu \Lambda(p')] = \\ = \frac{1}{2M^2 m^2} \left[G_M^2 \kappa^2 (\kappa^2 - 2m^2) + \right. \\ \left. + \frac{4(G_M^2 \kappa^2 + 4M^2 G_E^2)}{\kappa^2 + 4M^2} \left(2(pq)(pq') - \frac{1}{2} M^2 \kappa^2 \right) \right]. \quad (14.24)$$

Вычислим сечение рассеяния электронов нуклонами в системе отсчета, в которой начальный нуклон покоится (л. с.). Выполним сначала интегрирование по \mathbf{p}' (учтем закон сохранения импульса). Получаем

$$d\sigma = \frac{e^4}{4(2\pi)^2} \frac{M^2 m^2}{V(pq)^2 - M^2 m^2} A \frac{1}{(\kappa^2)^2} \delta(p'_0 + q'_0 - p_0 - q_0) \times \\ \times \frac{q'_0 |\mathbf{q}'| dq'_0 d\Omega'}{p'_0 q'_0}. \quad (14.25)$$

Здесь $\mathbf{p}' = \mathbf{q} - \mathbf{q}'$, а величина A дается выражением (14.24). Элемент объема $d\mathbf{q}'$ записан в сферических координатах

$$d\mathbf{q}' = |\mathbf{q}'|^2 d|\mathbf{q}'| d\Omega' = |\mathbf{q}'| q'_0 dq'_0 d\Omega'. \quad (14.26)$$

Проинтегрируем по q'_0 (учтем закон сохранения энергии). При этом необходимо иметь в виду, что под знак δ -функции q'_0 входит также через $p'_0 = \sqrt{M^2 + (\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2}$. Воспользуемся соотношением

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}, \quad (14.27)$$

где x_0 — корень функции $f(x)$. Вычислим производную аргумента δ -функции по q'_0

$$\frac{d}{dq'_0} (V \overline{M^2 + (\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2} + q'_0) = 1 + \frac{1}{p'_0} \left(q'_0 - \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{q}'|} q'_0 \cos \theta \right), \quad (14.28)$$

где θ — угол между импульсами падающего и рассеянного электронов (между \mathbf{q} и \mathbf{q}').

Будем рассматривать рассеяние электронов больших энергий на нуклонах. Предположим, что $q_0 \gg m$. Опуская члены порядка

m^2/q_0^2 и $m^2/q_0'^2$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2 &= 4q_0 q_0' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \sqrt{(pq)^2 - M^2 m^2} &= Mq_0, \\ 2(pq)(pq') - \frac{1}{2} M^2 \kappa^2 &= 2M^2 q_0 q_0' \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ \frac{d}{dq_0'} (p_0' + q_0') &= \frac{M}{p_0'} \left(1 + \frac{2q_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14.29)$$

(производная вычислена при таком значении q_0' , которое следует из закона сохранения энергии). Используя (14.29), из (14.24) и (14.25) получаем окончательно для дифференциального сечения рассеяния электронов большой энергии нуклонами в л. с. (формула Розенблюта):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[\frac{G_E^2 + \frac{\kappa^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{\kappa^2}{4M^2}} + \frac{\kappa^2}{2M^2} G_M^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (14.30)$$

где

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4q_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{2q_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}. \quad (14.31)$$

Сравнивая (14.30) с данными по рассеянию электронов на нуклонах, можно определить магнитный и зарядовый форм-факторы нуклона при различных значениях κ^2 .

Отметим, что при $q_0 \gg m$

$$\kappa^2 = \frac{4q_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \frac{q_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Это выражение легко получить из законов сохранения энергии и импульса.

В заключение покажем, что $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0$ [формула (14.31)] представляет собой сечение рассеяния электронов с $q_0 \gg m$ на бесспиновой точечной частице.

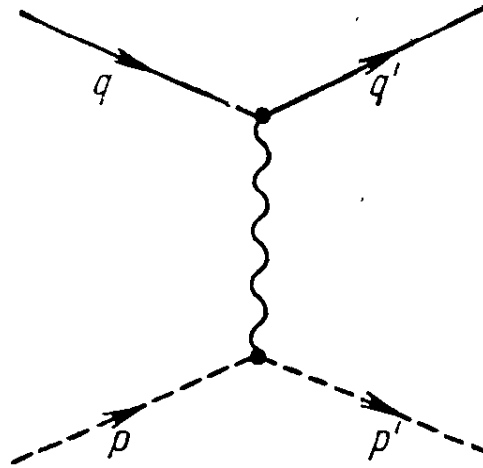
Диаграмма этого процесса представлена на рис. 21. Матричный элемент, отвечающий диаграмме рис. 21, может быть получен из (14.1) заменой

$$\left(\frac{M^2}{p_0 p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p') \Gamma_\mu(p', p) u(p)$$

на $\frac{(-i)}{\sqrt{4\rho_0\rho'_0}}P_\mu$ [см. выражение (12.77)]; для точечной частицы форм-фактор равен единице. Это означает, что свертку A в (14.25) следует считать равной

$$\frac{2}{M^2 m^2} \left[2(pq)(pq') - \frac{1}{2} M^2 \kappa^2 \right].$$

В л. с. при $q_0 \gg m$ получаем для сечения выражение (14.31).



Р и с. 21

§ 15. Процесс $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$

Вычислим дифференциальные сечения следующих процессов:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p, \quad (15.1a)$$

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n. \quad (15.1б)$$

Эти процессы представляют большой интерес для физики слабых взаимодействий и в настоящее время изучаются на опыте. Начнем с рассмотрения процесса (15.1a). Обозначим q и q' 4-импульсы начального нейтрино и конечного μ -мезона, а p и p' — 4-импульсы нейтрона и протона. Диаграмма процесса представлена на рис. 19.

Эффективный гамильтониан слабых взаимодействий обсуждался в § 12. Матричный элемент процесса (15.1a) равен [см. (12.88) — (12.90), (12.123)]

$$(\Phi_{q', p'}^+ S \Phi_{q, p}) = (-i) \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{mM^2}{\rho_0 \rho'_0 q'_0} \right)^{1/2} (2\pi)^4 \frac{G}{\sqrt{2}} \delta(p' + q' - p - q) \times \\ \times (\bar{u}(q') \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(q)) (\bar{u}(p') [V_\alpha(p', p) + A_\alpha(p', p)] u(p)). \quad (15.2)$$

Здесь M и m — соответственно массы нуклона и μ -мезона; $G = 10^{-5} M^{-2}$ — константа слабого взаимодействия, а

$$\left. \begin{aligned} V_{\alpha}(p', p) &= \gamma_{\alpha} G_V(\kappa^2) + iP_{\alpha} \frac{F_V(\kappa^2)}{2M}, \\ A_{\alpha}(p', p) &= \gamma_{\alpha} \gamma_5 G_A(\kappa^2) + i\kappa_{\alpha} \gamma_5 \frac{F_A(\kappa^2)}{2M}, \\ P &= p + p', \quad \kappa = p' - p. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Сильные взаимодействия нуклонов (заштрихованная часть диаграммы рис. 19) учитываются форм-факторами G_V , F_V , G_A и F_A . Если справедлива T -инвариантность, то все форм-факторы вещественны (см. § 12). Форм-факторы G_V и F_V (G_A и F_A) характеризуют матричный элемент векторной части (аксиальной части) слабого тока. Отметим, что спинор $u(q)$, описывающий нейтрино, нормирован условием $u^+(q)u(q) = 1$ (см. Приложение).

Из (15.2) получаем, что матричный элемент $M_{q'p';qp}$, определенный соотношением (13.15), равен*

$$\begin{aligned} M_{q', p'; q, p} &= (-i) \sqrt{M^2 m q_0} \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}(q') \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) u(q)) \times \\ &\times (\bar{u}(p') (V_{\alpha} + A_{\alpha}) u(p)). \end{aligned} \quad (15.4)$$

В соответствии с современной теорией слабых взаимодействий нейтрино — частица с определенной (отрицательной) спиральностью. Матрица плотности нейтрино равна (см. Приложение)

$$\rho(q) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \frac{\hat{q}}{2iq_0}.$$

Начальные нейтроны будем считать неполяризованными, т. е. положим, что

$$\rho(p) = \frac{1}{2} \Lambda(p) = \frac{\hat{p} + iM}{4iM}.$$

* Заметим, что вклад второго члена выражения для $A_{\alpha}(p', p)$ в матричный элемент процесса равен

$$\begin{aligned} &(\bar{u}(q') \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) u(q)) (\bar{u}(p') i\gamma_5 \kappa_{\alpha} u(p)) \frac{F_A}{2M} = \\ &= (\bar{u}(q') (\hat{q} - \hat{q}') (1 + \gamma_5) u(q)) (\bar{u}(p') \gamma_5 u(p)) i \frac{F_A}{2M} = \\ &= (\bar{u}(q') (1 + \gamma_5) u(q)) (\bar{u}(p') \gamma_5 u(p)) \frac{mF_A}{2M}. \end{aligned}$$

При получении этого выражения мы использовали закон сохранения 4-импульса ($\kappa = p' - p = q - q'$) и уравнение Дирака для спиноров $u(q')$ и $u(q)$. Таким образом, форм-фактор $mF_A/2M$ характеризует индуцированное псевдоскалярное взаимодействие (индуцированный псевдоскаляр).

С помощью (13.26) находим следующее выражение для дифференциального сечения процесса:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|pq|} M^2 m q_0 \frac{G^2}{2} \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \frac{\hat{q}}{2iq_0} \overline{\gamma_\beta (1 + \gamma_5)} \Lambda(q') \right] \times \\ \times \text{Sp} [(V_\alpha + A_\alpha) \Lambda(p) (\bar{V}_\beta + \bar{A}_\beta) \Lambda(p')] \delta(p' + q' - p - q) \frac{dq'}{q'_0} \frac{dp'}{p'_0}. \quad (15.5)$$

Отметим, что при получении этого выражения мы использовали соотношение

$$\frac{1}{2} (1 + \gamma_5)^2 = (1 + \gamma_5).$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{\gamma_\beta (1 + \gamma_5)} &= \gamma_4 (\gamma_\beta (1 + \gamma_5))^+ \gamma_4 = \gamma_\beta (1 + \gamma_5) \delta_\beta, \\ \bar{V}_\beta &= \gamma_4 V_\beta^+ \gamma_4 = \left(\gamma_\beta G_V + i P_\beta \frac{1}{2M} F_V \right) \delta_\beta, \\ \bar{A}_\beta &= \gamma_4 A_\beta^+ \gamma_4 = \left(\gamma_\beta \gamma_5 G_A - i \gamma_5 \kappa_\beta \frac{1}{2M} F_A \right) \delta_\beta \\ (\delta_\beta &= -1 \text{ при } \beta = 1, 2, 3 \text{ и } \delta_4 = 1). \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

Перейдем к вычислению следов. Используя формулы (13.29)—(13.38), без труда находим

$$\begin{aligned} \text{Sp} \left[\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \frac{\hat{q}}{2iq_0} \gamma_\beta (1 + \gamma_5) \Lambda(q') \right] &= \\ &= -\frac{1}{4q_0 m} 2 \text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \hat{q} \gamma_\beta (\hat{q}' + im)] = \\ &= -\frac{2}{q_0 m} [q_\alpha q'_\beta - \delta_{\alpha\beta} (qq') + q'_\alpha q_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho q'_\sigma]. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Последний член в этом выражении возникает от интерференции вектора и псевдовектора. Сравнивая (15.3) и (14.6), приходим к заключению, что $\text{Sp} [V_\alpha \Lambda(p) V_\beta \Lambda(p')]$ совпадает с вычисленным в предыдущем параграфе $\text{Sp} [R_\alpha \Lambda(p) R_\beta \Lambda(p')]$ [выражение (14.17)], если в последнем произвести замену $G_M \rightarrow G_V$ и $F_2 \rightarrow F_V$.

Как и в случае рассеяния электронов на нуклонах, вместо форм-фактора F_V введем форм-фактор

$$H_V = G_V - \left(1 + \frac{\kappa^2}{4M^2} \right) F_V. \quad (15.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{Sp} [V_\alpha \Lambda(p) V_\beta \Lambda(p')] &= -\frac{1}{2M^2} \left\{ G_V^2 (\delta_{\alpha\beta} \kappa^2 - \kappa_\alpha \kappa_\beta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_\alpha P_\beta}{\kappa^2 + 4M^2} (G_V^2 \kappa^2 + 4M^2 H_V^2) \right\}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Рассмотрим след $\text{Sp} [A_\alpha \Lambda(p) \bar{A}_\beta \Lambda(p') \delta_\beta]$ (суммирование по β в этом выражении не производится).

Используя перестановочные соотношения для матриц γ , получаем

$$\text{Sp} [A_\alpha \Lambda(p) \bar{A}_\beta \Lambda(p') \delta_\beta] = -\text{Sp} \left[\left(\gamma_\alpha G_A + i\kappa_\alpha \frac{F_A}{2M} \right) \Lambda(-p) \times \right. \\ \left. \times \left(\gamma_\beta G_A + i\kappa_\beta \frac{F_A}{2M} \right) \Lambda(p') \right], \quad (15.10)$$

где

$$\Lambda(-p) = \frac{-\hat{p} + iM}{2iM}.$$

Сравнивая этот след со следом (15.9), заключаем, что след (15.10) также нет необходимости вычислять. Этот след может быть получен из (15.9) заменой $p \rightarrow -p$, $G_V \rightarrow G_A$, $F_V \rightarrow F_A$ (очевидно, что замену $p \rightarrow -p$ в аргументах форм-факторов производить не следует). Получаем

$$\text{Sp} [A_\alpha \Lambda(p) \bar{A}_\beta \Lambda(p') \delta_\beta] = \frac{-1}{2M^2} \left\{ G_A^2 (-\delta_{\alpha\beta} P^2 + P_\alpha P_\beta) - \right. \\ \left. - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{P^2 + 4M^2} (G_A^2 P^2 + 4M^2 H_A^2) \right\}. \quad (15.11)$$

Здесь

$$H_A = G_A - \left(1 + \frac{P^2}{4M^2} \right) F_A. \quad (15.12)$$

Таким образом, если вместо форм-факторов G_A и F_A ввести форм-факторы G_A и H_A , то в выражение для сечения не входит интерференционный член $G_A H_A$.

Вычисление остальных следов не представляет труда:

$$\left. \begin{aligned} \text{Sp} [V_\alpha \Lambda(p) \bar{A}_\beta \Lambda(p') \delta_\beta] &= -\frac{1}{4M^2} \text{Sp} [\gamma_\alpha \hat{p} \gamma_\beta \gamma_5 \hat{p}' G_V G_A] = \\ &= -\frac{1}{M^2} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma G_V G_A, \\ \text{Sp} [A_\alpha \Lambda(p) \bar{V}_\beta \Lambda(p') \delta_\beta] &= -\frac{1}{M^2} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma G_V G_A. \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

Теперь мы должны умножить (15.7) на сумму выражений (15.9), (15.11) и (15.13) и произвести суммирование по α и β . Обозначим выражение в квадратных скобках в правой части (15.7) следующим образом:

$$A_{\alpha\beta} = q_\alpha q'_\beta + q'_\alpha q_\beta - \delta_{\alpha\beta} (qq') + \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho q'_\sigma. \quad (15.14)$$

Вычислим вначале свертки $A_{\alpha\beta}$ с тензорами, входящими в (15.9), (15.11) и (15.13).

Находим

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta &= 2(Pq)(Pq') - P^2(qq'), \\ A_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} &= -2(qq'), \\ A_{\alpha\beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta &= -m^2(qq'), \\ A_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma &= 2[(pq)(p'q') - (pq')(p'q)]. \end{aligned} \right\} \quad (15.15)$$

При получении последней свертки мы использовали соотношение

$$\varepsilon_{\alpha\beta\rho'\sigma'} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = 2(\delta_{\rho'\rho} \delta_{\sigma'\sigma} - \delta_{\rho'\sigma} \delta_{\sigma'\rho}). \quad (15.16)$$

Отметим также, что

$$(Pq') = (P(q + q' - q)) = (Pq) + (P(p - p')) = (Pq). \quad (15.17)$$

Из 4-импульсов p, q, p' и q' , связанных законом сохранения энергии—импульса, можно построить два независимых скаляра. Выберем в качестве независимых переменных

$$\left. \begin{aligned} s &= -(p + q)^2 = -(p' + q')^2, \\ t &= -(p - p')^2 = -(q' - q)^2 = -\kappa^2. \end{aligned} \right\} \quad (15.18)$$

Очевидно, что в с. ц. и. скаляр s равен квадрату полной энергии. Выразим скалярные произведения, входящие в правую часть (15.15), через s и t . Получаем

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta &= 2 \left[(s - M^2)^2 + (t - m^2) \left(s - \frac{1}{4} m^2 \right) \right], \\ A_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} &= -(t - m^2), \\ A_{\alpha\beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta &= -\frac{1}{2} m^2 (t - m^2), \\ A_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma &= -\frac{1}{2} t [2(s - M^2) + (t - m^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

С помощью этих соотношений из (15.9), (15.11) и (15.13) нетрудно найти произведение следов, входящее в выражение (15.5).

Дифференциальное сечение процесса запишем в виде

$$d\sigma = B \delta(p' + q' - p - q) \frac{dp'}{p'_0} \frac{dq'}{q'_0}, \quad (15.20)$$

где B — функция скаляров s и t , которая легко может быть найдена из (15.5), (15.7), (15.9), (15.11), (15.13) и (15.19).

Чтобы получить окончательное выражение для дифференциального сечения, мы должны проинтегрировать (15.20) по четырем переменным (учет законов сохранения энергии — импульса). Выполним интегрирование в с. ц. и. Сначала проинтегрируем по p' . Получим

$$d\sigma = B \delta(p'_0 + q'_0 - p_0 - q_0) \frac{|q'| dq'_0 d\Omega'}{p'_0}. \quad (15.21)$$

Аргумент δ -функции равен

$$F(q'_0) = q'_0 + \sqrt{M^2 + q'^2_0 - m^2} - p_0 - q_0. \quad (15.22)$$

Чтобы проинтегрировать по q'_0 , воспользуемся формулой (14.27). Производная в точке, где $F(q'_0)$ обращается в нуль, равна

$$\frac{dF(q'_0)}{dq'_0} = \frac{p_0 + q_0}{p'_0}. \quad (15.23)$$

В результате получаем

$$d\sigma = B \frac{|\mathbf{q}'| d\Omega'}{(p_0 + q_0)}. \quad (15.24)$$

Скаляры s и t выражаются через величины в с. ц. и. следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} s &= (p_0 + q_0)^2, \\ t &= m^2 - 2q_0 q'_0 + 2q_0 |\mathbf{q}'| \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (15.25)$$

(θ —угол между \mathbf{q} и \mathbf{q}'). Элемент телесного угла равен

$$d\Omega' = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

где φ —азимут вектора \mathbf{q}' . Из (15.25) находим, что

$$dt = -2q_0 |\mathbf{q}'| \sin \theta d\theta. \quad (15.26)$$

Интегрируя по φ (B —функция s и t , т. е. B не зависит от φ), получаем следующее выражение для сечения:

$$d\sigma = \pi B \frac{dt}{(p_0 + q_0) q_0}. \quad (15.27)$$

Сечение $d\sigma$ является скаляром. Мы должны, следовательно, построить такой скаляр, который в с. ц. и. равняется $(p_0 + q_0)q_0$. Очевидно, что

$$(p_0 + q_0) q_0 = -(p + q) q = -(pq).$$

Итак, находим

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi B \frac{1}{-(pq)}. \quad (15.28)$$

Подставляя сюда выражение для B и учитывая, что $-(pq) = \frac{1}{2}(s - M^2)$, получаем окончательно

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{G^2}{2\pi} \frac{1}{(s - M^2)^2} \left\{ [(s - M^2)^2 + (t - m^2)s] \left[\frac{H_V^2 - \frac{t}{4M^2} G_V^2}{1 - \frac{t}{4M^2}} + G_A^2 \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} m^2 (t - m^2) \left[\frac{G_V^2 - H_V^2}{1 - \frac{t}{4M^2}} - \frac{G_A^2 - H_A^2}{\frac{t}{4M^2}} \right] - t [2(s - M^2) + \\
& + (t - m^2)] G_V G_A + \frac{1}{2} (t - m^2) [G_V^2 t + G_A^2 (t - 4M^2)] \Bigg\}. \quad (15.29)
\end{aligned}$$

Если [принять гипотезу сохраняющегося векторного тока, то

$$G_V = G_M^p - G_M^n, \quad H_V = G_E^p - G_E^n, \quad (15.30)$$

где G_M^p и G_M^n (G_E^p и G_E^n) — магнитные (зарядовые) форм-факторы протона и нейтрона. Эти величины могут быть найдены из опытов по рассеянию электронов на нуклонах. Изучение процессов (15.1) позволит, следовательно, определить аксиальные форм-факторы нуклона.

Рассмотрим теперь процесс

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+.$$

Обозначим q и q' 4-импульсы антинейтрино и μ^+ -мезона, а p и p' — 4-импульсы протона и нейтрона. Матричный элемент процесса равен [см. (12.126) и (12.127)]

$$\begin{aligned}
(\Phi_{q', p'}^+ S \Phi_{q, p}) &= i \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{M^2 m}{p_0 p'_0 q'_0} \right)^{1/2} \frac{G}{V^2} (2\pi)^4 \times \\
&\times (\bar{u}(-q) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(-q')) (\bar{u}(p') [V_\alpha(p', p) + A_\alpha(p', p)] u(p)) \times \\
&\times \delta(p' + q' - p - q), \quad (15.31)
\end{aligned}$$

где матрицы $V_\alpha(p', p)$ и $A_\alpha(p', p)$ даются выражениями (15.3) с теми же форм-факторами, что для процесса (15.1a).

Очевидно, что сечение рассматриваемого процесса может быть получено из выражения (15.5), если лептонный след заменить на

$$\begin{aligned}
&\text{Sp} \left[\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \Lambda(-q') (\gamma_\beta (1 + \gamma_5)) \left(\frac{-\hat{q}}{2iq_0} \right) \right] = \\
&= \frac{-2}{mq_0} \delta_{\alpha\beta} [q'_\alpha q_\beta - \delta_{\alpha\beta} q' q + q_\alpha q'_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} q_\rho q'_\sigma]. \quad (15.32)
\end{aligned}$$

Выражение (15.32) отличается от (15.7) только знаком последнего члена. В сечение этот член дает вклад лишь при умножении на псевдотензор, возникающий от интерференции вектора и псевдовектора [выражения (15.13)]. Таким образом, сечение процесса

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$$

дается выражением (15.29), в котором следует изменить знак члена пропорционального $G_V G_A$.

§ 16. Рассеяние π -мезона на нуклоне

Здесь будет рассмотрен процесс рассеяния π -мезонов нуклонами:

$$\pi + p \rightarrow \pi + p. \quad (16.1)$$

Этот процесс обусловлен сильными взаимодействиями, к которым не применима теория возмущений.

Обсудим вначале гамильтониан взаимодействия нуклонного и π -мезонного полей. Обозначим $\phi_0(x)$ оператор поля нейтральных π -мезонов ($\phi_0^+(x) = \phi_0(x)$), $\phi(x)$ — оператор поля заряженных π -мезонов; $\psi_p(x)$ и $\psi_n(x)$ — операторы протон-антипротонного и нейтрон-антинейтронного полей. Простейший гамильтониан взаимодействия мезонного и нуклонного полей, построенный по аналогии с гамильтонианом электромагнитного взаимодействия, имеет вид

$$\mathcal{H}_I(x) = ig_p N (\bar{\psi}_p(x) \gamma_5 \psi_p(x)) \phi_0(x) + ig_n N (\bar{\psi}_n(x) \gamma_5 \psi_n(x)) \phi_0(x) + \\ + ig_1 N (\bar{\psi}_n(x) \gamma_5 \psi_p(x)) \phi(x) + ig_1 N (\bar{\psi}_p(x) \gamma_5 \psi_n(x)) \phi^+(x), \quad (16.2)$$

где g_p , g_n и g_1 — константы взаимодействия. Нетрудно проверить, что $\mathcal{H}_I(x)$ является эрмитовым оператором.

Гамильтониан (16.2) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\psi'_n = \psi_n, \quad \psi'_p = e^{-ie\chi} \psi_p, \quad \phi' = e^{ie\chi} \phi, \quad \phi'_0 = \phi_0. \quad (16.3)$$

Это означает, что гамильтониан (16.2) построен так, что сохраняется заряд, причем $\phi^{(+)}$ — оператор уничтожения частицы с зарядом e , $\psi_p^{(+)}$ — оператор уничтожения частицы с зарядом $-e$ (e — заряд электрона).

Из опыта известно, что гамильтониан сильных взаимодействий инвариантен относительно изотопических преобразований. Выясним, какой вид принимает гамильтониан (16.2) в случае изотопической инвариантности. В этом случае протон и нейтрон представляют собой два состояния одной частицы — нуклона, изотопический спин которого равен $1/2$. Пусть ψ_ξ , где ξ принимает два значения (± 1), обозначает оператор нуклонного поля. Условимся, что $\psi_1 = \psi_p$ и $\psi_{-1} = \psi_n$. Очевидно, что

$$\bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_p = \bar{\psi}_\xi \gamma_5 (\tau_-)_\xi \psi_\xi = \bar{\psi} \gamma_5 \tau_- \psi, \quad (16.4)$$

где $(\tau_-)_{-1,1} = 1$, а все остальные элементы матрицы τ_- равны нулю, т. е.

$$\tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\tau_1 - i\tau_2). \quad (16.5)$$

Аналогичным образом имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n &= \bar{\psi} \gamma_5 \tau_+ \psi, \\ \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_p &= \bar{\psi} \gamma_5 \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi, \\ \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n &= \bar{\psi} \gamma_5 \frac{1}{2} (1 - \tau_3) \psi, \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

где

$$\tau_+ = \frac{1}{2} (\tau_1 + i\tau_2). \quad (16.7)$$

В соотношениях (16.5) — (16.7) τ_1 , τ_2 и τ_3 — матрицы Паули.

С помощью (16.4) и (16.6) гамильтониан взаимодействия (16.2) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \frac{g_p + g_n}{2} N (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \phi_3 + \frac{g_p - g_n}{2} N (\bar{\psi} \gamma_5 \tau_3 \psi) \phi_3 + \\ &+ \frac{g_1}{\sqrt{2}} N (\bar{\psi} \gamma_5 \tau_1 \psi) \phi_1 + \frac{g_1}{\sqrt{2}} N (\bar{\psi} \gamma_5 \tau_2 \psi) \phi_2. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Здесь

$$\phi_1 = \frac{\phi^+ + \phi}{\sqrt{2}}, \quad \phi_2 = \frac{i(\phi^+ - \phi)}{\sqrt{2}}, \quad \phi_3 = \phi_0. \quad (16.9)$$

Отметим, что операторы ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3 эрмитовы. Из (16.9) получаем

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}; \quad \phi^+ = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (16.10)$$

В рамках гипотезы об изотопической инвариантности π^+ -, π^- - и π^0 -мезоны являются тремя состояниями одной частицы, изотопический спин которой равен единице. При изотопических преобразованиях $\bar{\psi} \gamma_5 \tau_i \psi$ и ϕ_i преобразуются как векторы, а $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ — как скаляр. Чтобы гамильтониан взаимодействия (16.8) был инвариантен относительно изотопических преобразований, константы связи должны удовлетворять соотношению

$$g_p = -g_n = \frac{g_1}{\sqrt{2}} = g. \quad (16.11)$$

Действительно, в этом случае первый член в (16.8) (произведение скаляра на третью компоненту вектора) исчезает, а три следующих члена равны

$$\mathcal{H}_I = igN (\bar{\psi} \gamma_5 \tau_i \psi) \phi_i. \quad (16.12)$$

Хотя теория возмущений в данном случае и не применима, тем не менее полезно выяснить, как выглядят диаграммы низшего порядка теории возмущений по g . Начнем с рассмотрения процесса

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p. \quad (16.13)$$

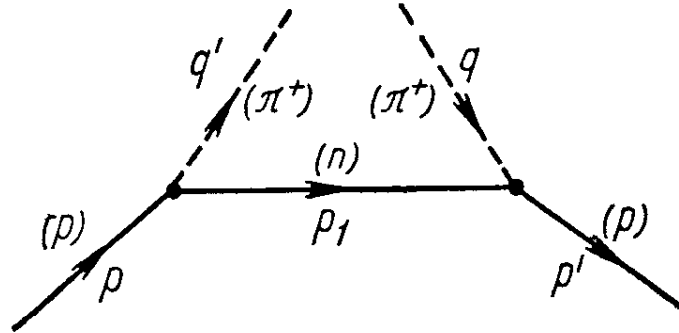
Обозначим q и q' 4-импульсы начального и конечного π^+ -мезонов, а p и p' — 4-импульсы начального и конечного протонов. Очевидно, что вклад в матричный элемент процесса дает следующий оператор:

$$\bar{\psi}_p^{(-)}(x_1) \gamma_5 \psi_n(x_1) \overline{\psi}_n(x_2) \gamma_5 \psi_p^{(+)}(x_2) N(\phi^{+(+)}(x_1) \phi^{(-)}(x_2)). \quad (16.14)$$

Вычисляя матричный элемент, получаем

$$(\Phi_{q', p'}^{+} S^{(2)} \Phi_{q, p}) = (-i)^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{M^2}{4q_0 q'_0 p_0 p'_0} \right)^{1/2} \frac{(-1)}{(2\pi)^4} \times \\ \times (2\pi)^8 (ig_1)^2 \left(\bar{u}(p') \gamma_5 \frac{1}{\hat{p} - \hat{q}' - iM} \gamma_5 u(p) \right) \delta(p' + q' - p - q). \quad (16.15)$$

Этот матричный элемент описывается диаграммой рис. 22. Внешней мезонной линии с импульсом q поставим в соответствие $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2q_0}}$, а вершине $(ig_1)\gamma_5 (2\pi)^4 \delta(P' - P)$, где P' и P — суммарные 4-импульсы



Р и с. 22

выходящих и входящих частиц. Для внешних и внутренней сплошных линий примем те же правила соответствия, что и для электрона. Диаграмма рис. 22 описывает следующую последовательность актов поглощения и испускания: начальный протон испускает конечный π^+ -мезон и превращается в виртуальный нейтрон; затем виртуальный нейтрон поглощает начальный π^+ -мезон и переходит в протон конечного состояния. Диаграмма, изображенная на рис. 22, эквивалентна одной из диаграмм комптон-эффекта (см. рис. 7). Очевидно, что вторая диаграмма (поглощение начального π^+ -мезона и т. д.) запрещена законом сохранения заряда (в рассматриваемой системе нет частиц с зарядом $2e$). Рассеяние π^- -мезонов протонами во втором порядке по g описывается диаграммой рис. 23.

Таким образом, правила построения диаграмм, описывающих процессы взаимодействия мезонов с нуклонами, те же, что и в квантовой электродинамике. Закон сохранения заряда в случае заряженных частиц приводит, однако, к уменьшению общего числа диаграмм в данном порядке теории возмущений.

Теперь мы построим общее выражение для матричного элемента процесса рассеяния π -мезона на нуклоне на основе принципов ин-

вариантности. Затем вычислим сечение рассеяния π -мезонов поляризованными нуклонами.

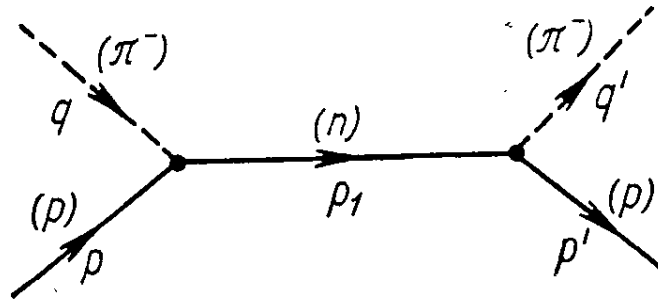
Матричный элемент процесса (16.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} & (\Phi_{q', p'}^+ (S - 1) \Phi_{q, p}) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{V_{p_0 p'_0 q_0 q'_0}} M_{q', p'; q, p} \delta(p' + q' - p - q). \end{aligned} \quad (16.16)$$

Здесь p и q (p' , q') — 4-импульсы начальных (конечных) нуклона и мезона. Матричный элемент $M_{q', p'; q, p}$ имеет следующий вид:

$$M_{q', p'; q, p} = \bar{u}(p') \mathfrak{M}(q', p'; q, p) u(p) \quad (16.17)$$

и является скаляром (взаимодействие сохраняет четность). Сечение процесса дается выражением (13.26).



Р и с. 23

Построим общее выражение для матрицы $\mathfrak{M}(q', p'; q, p)$. Матрица \mathfrak{M} является 4×4 -матрицей и всегда может быть разложена по шестнадцати матрицам Дирака:

$$\mathfrak{M}(q', p'; q, p) = A + B_\mu \gamma_\mu + C_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + D_\mu \gamma_\mu \gamma_5 + E \gamma_5, \quad (16.18)$$

где коэффициенты разложения зависят от 4-векторов p , p' ... Так как векторы p , q , p' и q' связаны законом сохранения энергии — импульса

$$p + q = p' + q', \quad (16.19)$$

только три из них независимы. Выберем в качестве независимых векторы

$$\left. \begin{aligned} P &= p + p', \\ \kappa &= p' - p = q - q', \\ Q &= q + q'. \end{aligned} \right\} \quad (16.20)$$

Первый член в разложении (16.18) является скаляром. Из четырех векторов p , p' , q и q' , удовлетворяющих закону сохранения (16.19) и соотношениям $p^2 = p'^2 = -M^2$, $q^2 = q'^2 = -m_\pi^2$ (M — масса нуклона, m_π — масса π -мезона), можно образовать два неза-

висимых скаляра. Выберем в качестве независимых переменных скаляры

$$\left. \begin{aligned} s &= -(p+q)^2, \\ t &= -(p-p')^2 = -\kappa^2. \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

Итак, A является функцией s и t . Величина $\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)$ преобразуется как вектор. Так как $\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)B_\mu$ — скаляр, коэффициент B_μ должен быть вектором. Имеем следующее общее выражение для B_μ :

$$B_\mu = B_1 P_\mu + B_2 \kappa_\mu + B Q_\mu, \quad (16.22)$$

где B_1 , B_2 и B — функции скаляров s и t . Учитывая уравнения Дирака

$$\left. \begin{aligned} (\hat{p} - iM) u(p) &= 0, \\ \bar{u}(p') (\hat{p}' - iM) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

нетрудно показать, что второй член в (16.22) не дает вклада в матричный элемент (16.17), а первый член в (16.22) сводится к члену A . Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(p') (\hat{p}' + \hat{p}) u(p) &= 2iM \bar{u}(p') u(p), \\ \bar{u}(p') (\hat{p}' - \hat{p}) u(p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

Таким образом, в (16.22) следует учесть только последний член BQ_μ .

Очевидно, что $C_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор второго ранга. Тензор $C_{\mu\nu}$ имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= C_1 (P_\mu Q_\nu - P_\nu Q_\mu) + \\ &+ C_2 (P_\mu \kappa_\nu - P_\nu \kappa_\mu) + C_3 (Q_\mu \kappa_\nu - Q_\nu \kappa_\mu), \end{aligned} \quad (16.25)$$

где C_1 , C_2 и C_3 — функции скаляров s и t . Используя уравнения (16.23), легко показать, что в матричном элементе все члены (16.25) сводятся к A и BQ_μ . Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \sigma_{\mu\nu} (Q_\mu \kappa_\nu - Q_\nu \kappa_\mu) u(p) &= \\ = \frac{1}{i} 2\bar{u}(p') \hat{Q} \hat{\kappa} u(p) &= 4 \frac{1}{i} \bar{u}(p') [(p' Q) - iM\hat{Q}] u(p) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Ясно, что коэффициент D_μ должен преобразовываться как псевдовектор. Получаем следующее общее выражение для D_μ :

$$D_\mu = D \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu p'_\rho Q_\sigma. \quad (16.26)$$

Используя соотношение (12.42), нетрудно показать, что и этот член в матричном элементе также сводится к A и BQ_μ . Наконец, последний коэффициент в разложении (16.18) должен быть псевдоскаляром. Из трех 4-векторов не может быть построен псевдоскаляр. Следовательно, $E = 0$.

Окончательно мы приходим к выводу, что матрица $\mathfrak{M}(q', p'; q, p)$ имеет следующий общий вид:

$$\mathfrak{M}(q', p'; q, p) = a + b\hat{Q}, \quad (16.27)$$

где a и b — функции скаляров s и t . Эти функции определяются динамикой процесса.

С помощью (13.26) получаем для сечения рассеяния π -мезонов нуклонами

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{V(pq)^2 - M^2 m_\pi^2} \times \\ \times \text{Sp} [\mathfrak{M} \rho(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')] \delta(p' + q' - p - q) \frac{dp'}{p_0} \frac{dq'}{q_0}. \quad (16.28)$$

Будем считать, что начальные нуклоны поляризованы. Спinoвая матрица плотности начального состояния равна (см. Приложение)

$$\rho(p) = \Lambda(p) \frac{1}{2} (1 + i\gamma_5 \hat{\xi}), \quad (16.29)$$

где ξ_μ — 4-вектор поляризации, а $\Lambda(p) = \frac{(\hat{p} + iM)}{2iM}$ — проецирующий оператор. Вектор ξ_μ удовлетворяет условию

$$\xi p = 0. \quad (16.30)$$

Вычислим след, входящий в (16.28). Учитывая, что

$$\bar{Q} = \gamma_4 \hat{Q}^+ \gamma_4 = -\hat{Q},$$

получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\mathfrak{M} \rho(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')] = \\ = \frac{-1}{8M^2} \text{Sp} [(a + b\hat{Q})(\hat{p} + iM)(1 + i\gamma_5 \hat{\xi})(a^* - b^*\hat{Q})(\hat{p}' + iM)] = \\ = -\frac{1}{2M^2} [|a|^2(pp' - M^2) + 2\text{Im} ab^* M(PQ) - \\ - |b|^2(2(Qp)(Qp') - Q^2(pp' + M^2)) + \\ + 2i \text{Re} ab^* \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \xi_\mu p_\nu p'_\rho Q_\sigma]. \end{aligned} \quad (16.31)$$

Выразим входящие в это выражение скалярные произведения через переменные s , t и переменную

$$u = -(p - q')^2. \quad (16.32)$$

Переменные s , t и u связаны соотношением

$$s + t + u = 2M^2 + 2m_\pi^2, \quad (16.33)$$

которое легко может быть получено из закона сохранения энергии — импульса.

Имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\mathfrak{M} \rho \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')] = \frac{1}{4M^2} [|a|^2(4M^2 - t) + 4M \text{Im} ab^*(s - u) + \\ + |b|^2((s - u)^2 - t(t - 4m_\pi^2)) + 4\text{Re} ab^* N_\mu \xi_\mu]. \end{aligned} \quad (16.34)$$

Здесь

$$N_\mu = -ie_{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu p'_\rho Q_\sigma. \quad (16.35a)$$

Очевидно, что псевдовектор N_μ может быть записан также следующим образом:

$$N_\mu = -2ie_{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu p'_\rho (p + q)_\sigma. \quad (16.35b)$$

Вычислим сечение процесса рассеяния π -мезона нуклоном в с. ц. и. Проинтегрируем (16.28) сначала по p' , а затем по q'_0 . Из (14.27) находим

$$\delta(p'_0 + q'_0 - p_0 - q_0) = \frac{\delta(q'_0 - q_0)}{p_0}. \quad (16.36)$$

Далее, с помощью (13.18) получаем, что в с. ц. и.

$$\sqrt{(pq)^2 - M^2 m_\pi^2} = |\mathbf{q}|(p_0 + q_0).$$

Для дифференциального сечения процесса имеем следующее выражение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p_0 + q_0)^2} \text{Sp} [\mathfrak{M} \rho(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')], \quad (16.37)$$

где след дается выражением (16.34). Переменные s и t выражаются следующим образом через величины в с. ц. и.:

$$\left. \begin{aligned} s &= (p_0 + q_0)^2, \\ t &= -(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2 = -2|\mathbf{q}|^2(1 - \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (16.38)$$

Из (16.35b) очевидно, что в с. ц. и.

$$N_4 = 0, \quad N_k = 2(p_0 + q_0)(\mathbf{q} \times \mathbf{q}')_k. \quad (16.39)$$

Нетрудно видеть, что сечение рассеяния π -мезонов нуклонами в с. ц. и. может быть записано следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 (1 + \xi A^0). \quad (16.40)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \frac{1}{sM^2} [|a|^2 (4M^2 - t) + 4M \text{Im} ab^* (s - u) + \\ &+ |b|^2 ((s - u)^2 - t(t - 4m_\pi^2))] \end{aligned} \quad (16.41)$$

представляет собой сечение рассеяния мезонов неполяризованными нуклонами, а

$$A^0 = \frac{2(\mathbf{q} \times \mathbf{q}') \text{Re} ab^*}{(2\pi)^2 (p_0 + q_0) M^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0}. \quad (16.42)$$

Псевдовектор A^0 совпадает с поляризацией конечного нуклона, возникающей при рассеянии π -мезонов на неполяризованных нуклонах. Действительно, 4-вектор поляризации конечных нуклонов в случае, когда начальные нуклоны неполяризованы, равен

$$\xi_\mu^0 = \frac{\frac{1}{2} \text{Sp} [i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda(p') \mathfrak{M} \Lambda(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')]}{\frac{1}{2} \text{Sp} [\mathfrak{M} \Lambda(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')]} . \quad (16.43)$$

Используя перестановочные соотношения для матриц γ_μ , получаем

$$i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda(p') = \frac{p'_\mu}{M} \gamma_5 + \Lambda(p') i\gamma_5 \gamma_\mu . \quad (16.44)$$

Очевидно, что член $\frac{p'_\mu}{M} \gamma_5$ не дает вклада в (16.43). $(\text{Sp} [\gamma_5 \mathfrak{M} \Lambda(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')])$ — псевдоскаляр; так как из трех независимых векторов псевдоскаляр построить невозможно, этот след равен нулю). Учитывая, что $\Lambda(p') \Lambda(p') = \Lambda(p')$, получаем

$$\xi_\mu^0 = \frac{\frac{1}{2} \text{Sp} [i\gamma_5 \gamma_\mu \mathfrak{M} \Lambda(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')]}{\frac{1}{2} \text{Sp} [\mathfrak{M} \Lambda(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')]} . \quad (16.45)$$

Вычисляя след, входящий в числитель этого выражения, находим

$$\xi_\mu^0 = \frac{\frac{1}{M^2} \text{Re } ab^* N_\mu}{\frac{1}{2} \text{Sp} [\mathfrak{M} \Lambda(p) \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p')]} . \quad (16.46)$$

След в знаменателе дается выражением (16.34) при $\xi_\mu = 0$. В с. ц. и. $\xi_4^0 = 0$ и

$$\xi^0 = A^0 . \quad (16.47)$$

Вектор A^0 называется вектором асимметрии. Мы убедились в том, что имеет место равенство векторов поляризации и асимметрии в случае упругого рассеяния частиц со спином нуль на частицах со спином $1/2$. Отметим, что это равенство является следствием общих принципов инвариантности и справедливо для упругого рассеяния частиц с произвольными спинами.

Наконец, последнее замечание в связи с выражением (16.40). Вектор поляризации частицы в системе, где ее импульс равен p , связан с вектором поляризации в системе покоя ξ_Π соотношением (см. Приложение)

$$\xi = \xi_\Pi + \frac{(\xi_\Pi p) p}{(p_0 + M) M} . \quad (16.48)$$

Так как вектор ξ^0 направлен по нормали к плоскости рассеяния, то из (16.48) очевидно, что

$$\xi \xi^0 = \xi_{\pi} \xi^0. \quad (16.49)$$

Из (16.48) также следует, что $\xi^0 = \xi_{\pi}^0$.
Таким образом,

$$\xi \xi^0 = \xi_{\pi} \xi_{\pi}^0. \quad (16.50)$$

§ 17. Распад $\Lambda \rightarrow p + l^- + \bar{\nu}$

В этом параграфе мы рассмотрим распад

$$\Lambda \rightarrow p + l^- + \bar{\nu}, \quad (17.1)$$

где l — заряженный лептон (электрон или μ -мезон).

Гамильтониан имеет вид (12.79). В первом порядке по константе слабого взаимодействия матричный элемент распада равен

$$\begin{aligned} (\Phi_{q, q', p'}^+ S \Phi_p) = & -i \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m_l}{q_0} \right)^{1/2} (\bar{u}(q) \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) u(-q')) \times \\ & \times (\Phi_{p'}^+ J_{\alpha}(0) \Phi_p) (2\pi)^4 \delta(p' + q' + q - p). \end{aligned} \quad (17.2)$$

Здесь q и q' — 4-импульсы лептона и антинейтрино; p и p' — 4-импульсы начального и конечного фермионов; m_l — масса лептона, а $J_{\alpha} = V_{\alpha} + A_{\alpha}$ — сумма векторного и аксиального токов в представлении Гейзенберга (с учетом сильных взаимодействий).

Матричный элемент $(\Phi_{p'}^+ J_{\alpha}(0) \Phi_p)$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & (\Phi_{p'}^+ J_{\alpha}^{\pi}(0) \Phi_p) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{M_{\Lambda} M_p}{p_0 p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}(p') [V_{\alpha}(p', p) + A_{\alpha}(p', p)] u(p), \end{aligned} \quad (17.3)$$

где M_{Λ} и M_p — соответственно массы Λ -гиперона и протона.

Из соображений лоренц-инвариантности следует, что матрицы $V_{\alpha}(p', p)$ и $A_{\alpha}(p', p)$ характеризуются тремя форм-факторами и имеют вид (12.90). Используя соотношение

$$\begin{aligned} i \bar{u}(p') u(p) P_{\alpha} = & -\bar{u}(p') \sigma_{\alpha\beta} \kappa_{\beta} u(p) - \\ & -(M_{\Lambda} + M_p) \bar{u}(p') \gamma_{\alpha} u(p), \end{aligned} \quad (17.4)$$

$$(P = p + p', \quad \kappa = p' - p)$$

запишем матричный элемент $\bar{u}(p') V_{\alpha}(p', p) u(p)$ следующим образом:

$$\bar{u}(p') V_{\alpha}(p', p) u(p) =$$

$$= \bar{u}(p') \left[\gamma_\alpha \left(G_V - \frac{M_\Lambda + M_p}{2M_\Lambda} F_V \right) - \frac{F_V}{2M_\Lambda} \sigma_{\alpha\beta} \kappa_\beta + i\kappa_\alpha \frac{H_V}{2M_\Lambda} \right] u(p). \quad (17.5)$$

Второй и третий члены этого выражения пропорциональны передаче 4-импульса. Если все форм-факторы одного порядка, то вклад этих членов меньше или порядка $(M_\Lambda - M_p)/M_\Lambda$ от вклада первого члена. Таким образом, естественно ожидать, что основной вклад в матричный элемент распада дает первый член в правой части (17.5). Учитывая соотношение

$$\bar{u}(p') \gamma_5 u(p) = \frac{1}{(M_\Lambda + M_p)} \bar{u}(p') \hat{\kappa} \gamma_5 u(p), \quad (17.6)$$

заключаем также, что вклады второго и третьего членов выражения для $A_\alpha(p', p)$ [см. (12.90)] малы по сравнению с вкладом первого члена.

Мы учтем только члены, дающие основной вклад в матричный элемент процесса. Пренебрегая в этом приближении зависимостью форм-факторов от κ^2 , получаем следующее выражение для матричного элемента распада $\Lambda \rightarrow p + l^- + \bar{\nu}$:

$$(\Phi_{q, q', p'}^+ S \Phi_p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{p_0 p'_0 q_0 q'_0}} M_{q, q', p'; p} \delta(p' + q' + q - p), \quad (17.7)$$

где

$$M_{q, q', p'; p} = -i \frac{G}{\sqrt{2}} V \overline{m_l M_\Lambda M_p q'_0} (\bar{u}(q) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(-q')) \times \\ \times (\bar{u}(p') \gamma_\alpha (g_V + g_A \gamma_5) u(p)) \quad (17.8)$$

(g_V и g_A — константы).

Вероятность распада за единицу времени равна

$$d\Gamma = \frac{dw}{\rho} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{\rho_0} \sum |M_{q, q', p'; p}|^2 \delta(p' + q' + q - p) \times \\ \times \frac{dp'}{p'_0} \frac{dq}{q_0} \frac{dq'}{q'_0}. \quad (17.9)$$

Здесь dw — вероятность распада, отнесенная к единице объема и единице времени; $\rho = 1/(2\pi)^3$ — начальная плотность, а Σ означает суммирование по спиновым состояниям конечных частиц и усреднение по спиновым состояниям начальной частицы. Из (17.8) и (17.9) получаем для вероятности распада

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{\rho_0} \frac{G^2}{2^5} \text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \hat{q}' \hat{\gamma}_\beta (1 + \gamma_5) (\hat{q} + im_l)] \times$$

$$\times \text{Sp} [\gamma_\alpha (g_V + g_A \gamma_5) (\hat{p} + iM_\Lambda) \frac{(1 + i\gamma_5 \hat{\xi})}{2} \gamma_\beta (g_V^* + g_A^* \gamma_5) \times \\ \times (\hat{p}' + iM_p)] \delta(p' + q' + q - p) \frac{dp'}{p_0} \frac{dq'}{q_0} \frac{dq}{q_0}. \quad (17.10)$$

Здесь ξ_μ — 4-вектор поляризации начальных частиц.

Рассмотрим распад неполяризованных Λ -гиперонов. Вычисление следов не представляет труда. Получаем

$$\text{Sp} [\gamma_\alpha (g_V + g_A \gamma_5) (\hat{p} + iM_\Lambda) \gamma_\beta (g_V^* + g_A^* \gamma_5) (\hat{p}' + iM_p)] = \\ = 4 [(|g_V|^2 + |g_A|^2) (p_\alpha p'_\beta - \delta_{\alpha\beta} p p' + p'_\alpha p_\beta) - \\ - (|g_V|^2 - |g_A|^2) \delta_{\alpha\beta} M_\Lambda M_p + 2\text{Re } g_V g_A^* \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma]. \quad (17.11)$$

Второй след может быть получен из (17.11), если положить $g_V = g_A = 1$ и сделать замену $M_\Lambda \rightarrow 0$, $M_p \rightarrow m_l$, $p \rightarrow q'$, $p' \rightarrow q$. Находим

$$\text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \hat{q}' \gamma_\beta (1 + \gamma_5) (\hat{q} + im_l)] = \\ = 8 [q'_\alpha q_\beta - \delta_{\alpha\beta} q' q + q_\alpha q'_\beta + \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} q'_\rho q_\sigma]. \quad (17.12)$$

Перемножая эти выражения и суммируя по α и β , получаем

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{p_0} G^2 [(|g_V|^2 + |g_A|^2) ((pq')(p'q) + (pq)(p'q')) + \\ + (|g_V|^2 - |g_A|^2) M_\Lambda M_p (qq') + 2\text{Re } g_V g_A^* ((pq')(p'q) - \\ - (pq)(p'q'))] \delta(p' + q' + q - p) \frac{dp'}{p_0} \frac{dq'}{q_0} \frac{dq}{q_0}. \quad (17.13)$$

Вычислим спектр нуклонов распада. Для этого проинтегрируем (17.13) по q' и q . Введем 4-вектор

$$k = p - p' = q + q' \quad (17.14)$$

и в квадратных скобках выражения (17.13) сделаем замену $q \rightarrow k - q'$. Получим

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{p_0} G^2 [(|g_V|^2 + |g_A|^2) ((pq')(p'k) + (pk)(p'q') - \\ - 2(pq')(p'q')) + (|g_V|^2 - |g_A|^2) M_\Lambda M_p (kq') + \\ + 2\text{Re } g_V g_A^* ((pq')(p'k) - (pk)(p'q'))] \delta(q + q' - k) \frac{dp'}{p_0} \frac{dq'}{q_0} \frac{dq}{q_0}. \quad (17.15)$$

Из (17.14) следует, что $q^2 = (k - q')^2 = -m_l^2$.

Отсюда получаем

$$kq' = \frac{1}{2} (k^2 + m_l^2). \quad (17.16)$$

Учитывая это соотношение для вероятности распада, проинтегрированной по импульсам лептона и нейтрино, находим

$$d\Gamma(p') = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{p_0} G^2 [(|g_V|^2 + |g_A|^2) ((p_\alpha I_\alpha)(p' k) + (pk)(p'_\alpha I_\alpha) - \\ - 2p_\alpha p'_\beta I_{\alpha\beta}) + (|g_V|^2 - |g_A|^2) M_\Lambda M_p \frac{1}{2} (k^2 + m_l^2) I + \\ + 2\text{Re } g_V g_A^* ((p_\alpha I_\alpha)(p' k) - (pk)(p'_\alpha I_\alpha))] \frac{d\mathbf{p}'}{p'_0}. \quad (17.17)$$

Здесь

$$I = \int \frac{d\mathbf{q}}{q_0} \frac{d\mathbf{q}'}{q'_0} \delta(q + q' - k), \quad (17.18)$$

$$I_\alpha = \int q'_\alpha \frac{d\mathbf{q}}{q_0} \frac{d\mathbf{q}'}{q'_0} (q + q' - k), \quad (17.19)$$

$$I_{\alpha\beta} = \int q'_\alpha q'_\beta \frac{d\mathbf{q}}{q_0} \frac{d\mathbf{q}'}{q'_0} \delta(q + q' - k). \quad (17.20)$$

Рассмотрим вначале интеграл (17.18). Очевидно, что он является скаляром. Вычислим этот интеграл в системе, где $\mathbf{k} = 0$ (с. ц. и. лептона и нейтрино). Интегрируя по импульсу лептона, получаем

$$I = \int \frac{1}{q_0} q'_0 dq'_0 d\Omega' \delta(q_0 + q'_0 - k_0), \quad (17.21)$$

где

$$q_0 = \sqrt{m_l^2 + q'^2}. \quad (17.22)$$

Далее, используя (14.27) и учитывая, что

$$\frac{d(q_0 + q'_0)}{dq'_0} = \frac{k_0}{q_0}, \quad (17.23)$$

находим

$$I = 4\pi \frac{q'_0}{k_0}. \quad (17.24)$$

Умножим числитель и знаменатель этого выражения на k_0 . Очевидно, что $k_0 q'_0$ и k_0^2 — значения инвариантов $-kq'$ и $-k^2$ в рассматриваемой системе отсчета. Используя (17.16), получаем окончательно

$$I = 2\pi \frac{k^2 + m_l^2}{k^2}. \quad (17.25)$$

Рассмотрим теперь интеграл I_α . Из соображений инвариантности ясно, что

$$I_\alpha = A k_\alpha, \quad (17.26)$$

где A — скаляр. Умножая это соотношение на k_α и используя (17.16), получаем

$$Ak^2 = \int (q' k) \frac{dq}{q_0} \frac{dq'}{q'_0} \delta(q + q' - k) = \frac{k^2 + m_l^2}{2} I. \quad (17.27)$$

Таким образом,

$$I_\alpha = \frac{k^2 + m_l^2}{2k^2} I k_\alpha. \quad (17.28)$$

Наконец, рассмотрим интеграл $I_{\alpha\beta}$, определенный выражением (17.20). Очевидно, что $I_{\alpha\beta}$ является тензором второго ранга и имеет следующий общий вид:

$$I_{\alpha\beta} = B\delta_{\alpha\beta} + Ck_\alpha k_\beta, \quad (17.29)$$

где B и C — скаляры. Умножая (17.29) на $\delta_{\alpha\beta}$, суммируя по α и β и учитывая, что $q'^2 = 0$, получаем

$$0 = 4B + Ck^2. \quad (17.30)$$

Умножим (17.29) на $k_\alpha k_\beta$. С помощью (17.16) находим

$$\frac{1}{4} (k^2 + m_l^2)^2 I = Bk^2 + C(k^2)^2. \quad (17.31)$$

Из (17.30) и (17.31) получаем

$$B = -\frac{1}{12} \frac{(k^2 + m_l^2)^2}{k^2} I; \quad C = \frac{1}{3} \frac{(k^2 + m_l^2)^2}{(k^2)^2} I. \quad (17.32)$$

Подставляя эти выражения в (17.29), находим

$$I_{\alpha\beta} = \left(-\frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \frac{1}{3} \frac{(k^2 + m_l^2)^2}{k^2} I. \quad (17.33)$$

Из (17.26) ясно, что

$$(p_\alpha I_\alpha)(p' k) - (pk)(p'_\alpha I_\alpha) = 0. \quad (17.34)$$

С помощью (17.25), (17.28) и (17.33) получаем следующее выражение для вероятности распада, проинтегрированной по импульсам лептона и нейтрино:

$$\begin{aligned} d\Gamma(p') = & \frac{1}{(2\pi)^4} G^2 \frac{1}{p_0} \left(\frac{k^2 + m_l^2}{k^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} (|g_V|^2 + \right. \\ & + |g_A|^2) \left[\frac{1}{2} (pp') (k^2 + m_l^2) + (pk)(p'k) \frac{k^2 - 2m_l^2}{k^2} \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} (|g_V|^2 - |g_A|^2) M_\Lambda M_p k^2 \right\} \frac{d\mathbf{p}'}{p'_0}. \end{aligned} \quad (17.35)$$

Найдем область изменения k^2 . Очевидно, что

$$k^2 = -\left(\sqrt{m_l^2 + q_0'^2} + q_0'\right)^2, \quad (17.36)$$

где q_0' — энергия нейтрино в с. ц. и. лептона и нейтрино.

Так как $q_0' \geq 0$, то из (17.36) находим

$$k^2 \leq -m_l^2. \quad (17.37)$$

Чтобы получить нижнее значение переменной k^2 , запишем k^2 в системе покоя начальной частицы:

$$k^2 = -M_\Lambda^2 - M_p^2 - 2pp' = -M_\Lambda^2 - M_p^2 + 2M_\Lambda E, \quad (17.38)$$

где E — полная энергия протона в системе покоя Λ -гиперона. Отсюда получаем ($E \geq M_p$)

$$k^2 \geq -(M_\Lambda - M_p)^2. \quad (17.39)$$

Таким образом,

$$-(M_\Lambda - M_p)^2 \leq k^2 \leq -m_l^2. \quad (17.40)$$

Найдем спектр протонов отдачи в системе покоя Λ -гиперона. Из (17.37) и (17.38) получаем, что максимальная энергия протонов в этой системе равна

$$E_0 = \frac{M_\Lambda^2 + M_p^2 - m_l^2}{2M_\Lambda}. \quad (17.41)$$

Из (17.38) и (17.41) находим

$$k^2 + m_l^2 = -2M_\Lambda (E_0 - E). \quad (17.42)$$

Приведем выражение для той части спектра протонов, где $-k^2 \gg m_l^2$. Из (17.35), опуская члены порядка m_l^2/k^2 и используя (17.42), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dE} = & \frac{2}{(2\pi)^3} G^2 M_\Lambda (E^2 - M_p^2)^{1/2} \{(|g_V|^2 + |g_A|^2) \times \\ & \times \left[E(E_0 - E) + \frac{1}{3} (E^2 - M_p^2) \right] - (|g_V|^2 - |g_A|^2) M_p (E_0 - E) \}. \end{aligned} \quad (17.43)$$

§ 18. Распад $K^- \rightarrow \pi^0 + l^- + \bar{\nu}$

Следующий пример также относится к физике слабых взаимодействий. Рассмотрим распад заряженного K^- -мезона на π^0 -мезон, заряженный лептон (электрон, либо μ^- -мезон) и антинейтрино:

$$K^- \rightarrow \pi^0 + l^- + \bar{\nu}. \quad (18.1)$$

Исследование этого процесса на опыте позволяет получить информацию о структуре той части гамильтониана лептон-адронных слабых взаимодействий, которая не сохраняет странность. Получим выражения для спектра π^0 -мезонов и лептонов, а также для поляризации лептонов.

Гамильтониан лептон-адронных взаимодействий современной $V-A$ -теории дается следующим выражением [см. (12.79)]:

$$\mathcal{H}_I(x) = -\frac{G}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\psi}_\mu(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_\mu}(x)) + \right. \\ \left. + (\bar{\psi}_e(x) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}(x)) \right] j_\alpha(x) + \text{э. с.} \quad (18.2)$$

Здесь $\psi_\mu(x)$ ($\psi_e(x)$) — оператор мюонного (электронного) поля; $\psi_{\nu_\mu}(x)$ ($\psi_{\nu_e}(x)$) — оператор поля мюонного (электронного) нейтрино, а $j_\alpha(x) = v_\alpha(x) + a_\alpha(x)$ — адронный ток. Обозначим 4-импульс начального K^- -мезона q , а 4-импульсы π^0 -мезона, заряженного лептона и антинейтрино — соответственно q' , p и p' . Конечный вектор состояния может быть записан в виде

$$\Phi_{p, p', q'} = c_l^+ (p) d_\nu^+ (p') \Phi_{q'}, \quad (18.3)$$

где $\Phi_{q'}$ — вектор состояния π^0 -мезона. Вектор состояния начального K^- -мезона обозначим Φ_q . В первом порядке теории возмущений по константе слабых взаимодействий G для матричного элемента процесса имеем

$$(\Phi_{p, p', q'}^+ S \Phi_q) = i \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{m_l}{p_0} \right)^{1/2} \bar{u}(p) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(-p') \times \\ \times (\Phi_{q'}^+ J_\alpha(0) \Phi_q) (2\pi)^4 \delta(p' + q' + p - q). \quad (18.4)$$

Здесь m_l — масса заряженного лептона, а $J_\alpha = V_\alpha + A_\alpha$ — сумма адронных векторного и аксиального токов в представлении Гейзенберга.

Выясним общую структуру адронного матричного элемента $(\Phi_{q'}^+ J_\alpha(0) \Phi_q)$. Запишем этот матричный элемент в виде

$$(\Phi_{q'}^+ J_\alpha(0) \Phi_q) = (\Phi_{q'}^+ V_\alpha(0) \Phi_q) + (\Phi_{q'}^+ A_\alpha(0) \Phi_q) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{i}{\sqrt{4q_0 q'_0}} (\Lambda_\alpha^V(q', q) + \Lambda_\alpha^A(q', q)). \quad (18.5)$$

Величины $\Lambda_\alpha^V(q', q)$ и $\Lambda_\alpha^A(q', q)$ преобразуются как вектор и псевдовектор соответственно. Так как из двух 4-векторов псевдовектор не может быть построен, то

$$\Lambda_\alpha^A(q', q) = 0. \quad (18.6)$$

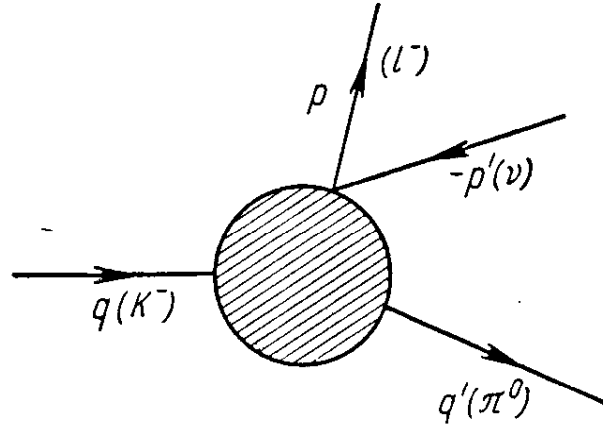
Таким образом, только векторный ток V_α дает вклад в матричный элемент процесса (18.1). Очевидно, что 4-вектор $\Lambda_\alpha^V(q', q)$ имеет следующий общий вид:

$$\Lambda_\alpha^V(q', q) = f_+(q + q')_\alpha + f_-(q - q')_\alpha, \quad (18.7)$$

где f_+ и f_- — функции квадрата передачи 4-импульса $\kappa^2 = (q - q')^2$.
Итак,

$$\begin{aligned} & (\Phi_{q'}^+ J_\alpha(0) \Phi_q) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{i}{\sqrt{4q_0 q'_0}} [f_+(\kappa^2)(q + q')_\alpha + f_-(\kappa^2)(q - q')_\alpha]. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Диаграмма процесса (18.1) с учетом всех сильных взаимодействий адронов изображена на рис. 24.



Р и с. 24

Перейдем теперь к вычислению вероятности распада. Из (18.4) и (18.8) получаем

$$\begin{aligned} d\Gamma = \frac{dw}{\rho} = \frac{G^2}{2} 2\pi \left(\frac{m_l}{p_0} \right) \text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \Lambda_\nu(-p') \overline{\gamma_\beta (1 + \gamma_5)} \Lambda(p)] \times \\ \times (\Phi_{q'}^+ J_\alpha(0) \Phi_q) (\Phi_{q'}^+ J_\beta(0) \Phi_q)^* \delta(p' + p + q' - q) d\mathbf{p} d\mathbf{p}' d\mathbf{q}'. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Здесь

$$\Lambda(p) = \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \frac{\hat{p} + im_l}{2im_l}, \quad \Lambda_\nu(-p') = \sum_r u^r(-p') \bar{u}^r(-p'). \quad (18.10)$$

Используя полученное в Приложении выражение для матрицы плотности антинейтрино, находим

$$\Lambda_\nu(-p') = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \frac{\hat{p}'}{2ip'_0} + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \frac{\hat{p}'}{2ip'_0} = \frac{\hat{p}'}{2ip'_0}. \quad (18.11)$$

Получим вначале спектр π^0 -мезонов. Для этого выполним интегрирование по импульсам электрона и антинейтрино. Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \overline{\gamma_\beta (1 + \gamma_5)} = \gamma_\beta (1 + \gamma_5) \delta_\beta \\ & (\delta_\beta = -1 \text{ при } \beta = 1, 2, 3 \text{ и } \delta_4 = 1), \text{ получаем} \\ & d\Gamma(q') = -\frac{\pi}{2} G^2 \text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma] K_{\rho\sigma} \times \\ & \times (\Phi_{q'}^+ J_\alpha(0) \Phi_q) (\Phi_{q'}^+ J_\beta(0) \Phi_q)^* \delta_\beta d\mathbf{q}', \end{aligned} \quad (18.12)$$

где

$$K_{\rho\sigma} = \int p'_\rho p_\sigma \delta(p' + p - \kappa) \frac{d p'}{p'_0} \frac{d p}{p_0}, \quad (18.13)$$

$$\kappa = q - q'. \quad (18.14)$$

Интеграл (18.13) легко может быть вычислен с помощью методов, изложенных в § 17. Очевидно, что $K_{\rho\sigma}$ — тензор второго ранга, зависящий от 4-вектора κ . Тензор $K_{\rho\sigma}$ имеет общий вид

$$K_{\rho\sigma} = a\delta_{\rho\sigma} + b\kappa_\rho \kappa_\sigma, \quad (18.15)$$

где a и b — функции κ^2 . Умножая (18.15) на $\delta_{\rho\sigma}$ и суммируя по ρ и σ , находим

$$\int (p' p) \delta(p' + p - \kappa) \frac{d p'}{p'_0} \frac{d p}{p_0} = 4a + b\kappa^2. \quad (18.16)$$

Используя закон сохранения 4-импульса, имеем

$$pp' = \frac{\kappa^2 + m_l^2}{2}. \quad (18.17)$$

Из (18.16) и (18.17) получаем

$$4a + b\kappa^2 = \frac{\kappa^2 + m_l^2}{2} I, \quad (18.18)$$

где

$$I = \int \delta(p' + p - \kappa) \frac{d p'}{p'_0} \frac{d p}{p_0}. \quad (18.19)$$

Этот интеграл был вычислен в § 17 [см. (17.25)]:

$$I = 2\pi \frac{\kappa^2 + m_l^2}{\kappa^3}. \quad (18.20)$$

Чтобы получить второе уравнение для a и b , умножим (18.15) на $\kappa_\rho \kappa_\sigma$ и просуммируем по ρ и σ . Используя закон сохранения 4-импульса, находим, что

$$\kappa p' = \frac{\kappa^2 + m_l^2}{2}, \quad \kappa p = \frac{\kappa^2 - m_l^2}{2}. \quad (18.21)$$

Таким образом, получаем

$$a\kappa^2 + b(\kappa^2)^2 = \frac{\kappa^2 - m_l^2}{2} \frac{\kappa^2 + m_l^2}{2} I. \quad (18.22)$$

Из уравнений (18.18) и (18.22) находим, что

$$a = \frac{\kappa^2 + m_l^2}{6\kappa^2} K, \quad b = \frac{\kappa^2 - 2m_l^2}{3(\kappa^2)^2} K. \quad (18.23)$$

Здесь

$$K = \frac{\kappa^2 + m_l^2}{2} I = \pi \frac{(\kappa^2 + m_l^2)^2}{\kappa^2}. \quad (18.24)$$

Вычислим теперь след, входящий в выражение для вероятности распада. Используя (18.15), имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma] K_{\rho\sigma} = & a \text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\rho] + \\ & + b \text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \hat{\kappa} \gamma_\beta \hat{\kappa}]. \end{aligned} \quad (18.25)$$

Далее, с помощью перестановочных соотношений для матриц γ получаем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\rho &= \gamma_\rho (2\delta_{\beta\rho} - \gamma_\rho \gamma_\beta) = 2\gamma_\beta - 4\gamma_\beta = -2\gamma_\beta, \\ \hat{\kappa} \gamma_\beta \hat{\kappa} &= \hat{\kappa} (2\kappa_\beta - \hat{\kappa} \gamma_\beta) = 2\kappa_\beta \hat{\kappa} - \kappa^2 \gamma_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (18.26)$$

Используя эти соотношения, находим

$$\text{Sp} [\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\sigma] K_{\rho\sigma} = 4 [-(2a + b\kappa^2) \delta_{\alpha\beta} + 2b\kappa_\alpha \kappa_\beta]. \quad (18.27)$$

Запишем матричный элемент (18.8) в следующем виде:

$$(\Phi_{q'}^+ J_\alpha(0) \Phi_q) = i \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4q_0 q_0'}} f_+ [2q_\alpha + (\eta - 1) \kappa_\alpha], \quad (18.28)$$

где

$$\eta = \frac{f_-}{f_+}. \quad (18.29)$$

Учитывая, что

$$q_\beta^* \delta_\beta = -q_\beta \quad (18.30)$$

(суммирование по β здесь не производится), из (18.12) и (18.27) получаем

$$\begin{aligned} d\Gamma(q') = & \frac{G^2}{(2\pi)^5} \frac{1}{4q_0 q_0'} |f_+|^2 \{ 4(2a + b\kappa^2) m_K^2 + \\ & + 8b(q\kappa)^2 + (-2a + b\kappa^2) [4q\kappa \text{Re}(\eta - 1) + \kappa^2 |\eta - 1|^2] \} d\mathbf{q}'. \end{aligned} \quad (18.31)$$

Окончательное выражение для спектра π^0 -мезонов запишем в системе покоя начальных K -мезонов. Интегрируя по углам выле-

та π^0 -мезонов, из (18.31), (18.23) и (18.24) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dE_\pi} = & \frac{G^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{m_K} |\bar{f} +|^2 (E_\pi^2 - m_\pi^2)^{1/2} \left(\frac{\kappa^2 + m_l^2}{\kappa^2} \right)^2 \times \\ & \times \left\{ m_K^2 \kappa^2 - \frac{1}{3} m_K^2 (\kappa^2 + m_l^2) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2m_l^2}{\kappa^2} \right) (q\kappa)^2 - \right. \\ & \left. - m_l^2 \left[q\kappa \operatorname{Re}(\eta - 1) + \kappa^2 \frac{1}{4} |\eta - 1|^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18.32)$$

где E_π — полная энергия π -мезонов в системе покоя K -мезонов. Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \kappa q &= \frac{1}{2} (-m_K^2 + m_\pi^2 + \kappa^2) = -m_K (m_K - E_\pi), \\ \kappa^2 &= -m_K^2 - m_\pi^2 + 2m_K E_\pi \end{aligned} \right\} \quad (18.33)$$

(m_π и m_K — массы π и K -мезонов).

Найдем пределы, в которых изменяются величины κ^2 и E_π . Так как $E_\pi \geq m_\pi$, то

$$\kappa^2 \geq -(m_K - m_\pi)^2. \quad (18.34)$$

Чтобы найти верхний предел переменной κ^2 , заметим, что

$$\kappa^2 = (p' + p)^2 = -\left(p'_0 + \sqrt{m_l^2 + (p'_0)^2}\right)^2,$$

где p'_0 — энергия нейтрино в с. ц. и. лептона и нейтрино. Так как $p'_0 \geq 0$, отсюда получаем

$$\kappa^2 \leq -m_l^2. \quad (18.35)$$

Из (18.33) и (18.35) находим

$$E_\pi \leq \frac{m_K^2 + m_\pi^2 - m_l^2}{2m_K}. \quad (18.36)$$

Заметим, что

$$\kappa^2 + m_l^2 = -2m_K (E_\pi^0 - E_\pi), \quad (18.37)$$

где

$$E_\pi^0 = \frac{m_K^2 + m_\pi^2 - m_l^2}{2m_K} \quad (18.38)$$

есть максимальная энергия π -мезонов, образующихся в распаде $K \rightarrow \pi + l + \nu$. Множитель $(E_\pi^2 - m_\pi^2)^{1/2} (\kappa^2 + m_l^2)^2$, входящий в выражение (18.32), обращается, следовательно, в нуль на границах π -мезонного спектра.

В заключение сделаем следующее замечание. Если в соответствии с законом сохранения 4-импульса κ заменить вектором $p + p'$ и воспользоваться уравнением Дирака для спиноров $\bar{u}(p)$ и $u(-p')$, то легко видеть, что

$$\bar{f} \bar{u}(p) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) u(-p') \kappa_\alpha = i m_l \bar{f} \bar{u}(p) (1 + \gamma_5) u(-p').$$

Таким образом, форм-фактор f_- входит в матричный элемент рассматриваемого нами процесса в виде $m_l f_-$. В выражении для спектра π -мезонов форм-фактор f_- , как видно из (18.32), умножается на квадрат массы лептона. Приведем выражение для той части спектра π^0 -мезонов от распада $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$, для которой $|k^2| \gg m_l^2$. Опуская члены порядка $(m_l/m_K)^2$ и m_l^2/k^2 , из (18.32) находим

$$\left(\frac{d\Gamma}{dE_\pi} \right)_{K \rightarrow \pi e \nu} = \frac{G^2}{12\pi^3} |f_+|^2 m_K (E_\pi^2 - m_\pi^2)^{3/2}. \quad (18.39)$$

Изучение на опыте спектров π^0 -мезонов от распадов $K \rightarrow \pi + \mu + \nu_\mu$ и $K \rightarrow \pi + e + \nu_e$ позволяет исследовать зависимость форм-факторов f_+ и f_- от квадрата передачи импульса k^2 . Обычно эти форм-факторы представляют в виде

$$f_\pm(k^2) = f_\pm(0) \left(1 + \lambda_\pm \frac{k^2}{m_\pi^2} \right), \quad (18.40)$$

где λ_\pm — безразмерные параметры, характеризующие зависимость форм-факторов от k^2 . Из данных различных опытов следует, что $\lambda_+ \leq 0,04$.

Получим теперь выражения для спектра и поляризации лептонов, образующихся в распадах (18.1). При этом будем пренебрегать зависимостью форм-факторов f_+ и f_- от квадрата передачи 4-импульса. Используя уравнение Дирака для спиноров $\bar{u}(p)$ и $u(-p')$, запишем матричный элемент процесса в следующем виде:

$$(\Phi_{p, p', q'}^+ S \Phi_q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{m_l}{4p_0 q_0 q'_0} \right)^{1/2} \bar{u}(p) \mathfrak{M} u(-p') \delta(p' + q' - k). \quad (18.41)$$

Здесь

$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} f_+ (2\hat{k} + im_l(\eta + 1)) (1 + \gamma_5), \quad (18.42)$$

$$k = q - p. \quad (18.43)$$

Среднее значение оператора спина заряженного лептона при условии, что π^0 -мезон и нейтрино не регистрируются, равно

$$\xi_\mu = \frac{N_\mu}{R}, \quad (18.44)$$

где

$$N_\mu = \int \frac{m_l}{q'_0} \sum_{s, s', r} (\bar{u}^{s'}(p) i\gamma_5 \gamma_\mu u^s(p)) (\bar{u}^s(p) \mathfrak{M} u^r(-p')) \times \\ \times (\bar{u}^r(-p') \overline{\mathfrak{M}} u^{s'}(p)) \delta(p' + q' - k) d\mathbf{p}' d\mathbf{q}', \quad (18.45)$$

$$R = \int \frac{m_l}{q'_0} \sum_{s, r} (\bar{u}^s(p) \mathfrak{M} u^r(-p')) (\bar{u}^r(-p') \overline{\mathfrak{M}} u^s(p)) \times \\ \times \delta(p' + q' - k) d\mathbf{p}' d\mathbf{q}'. \quad (18.46)$$

Спектр лептонов дается выражением, пропорциональным R . Получим этот спектр. Используя (18.10) находим, что вероятность испускания лептона с импульсом в интервале от p до $p + dp$ равна

$$d\Gamma(p) = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{4q_0 p_0} R dp = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{4q_0} \times \\ \times \left[\int \frac{m_l}{q'_0} \text{Sp} [\mathfrak{M} \Lambda_\nu(-p') \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p)] \delta(p' + q' - k) d\mathbf{p}' d\mathbf{q}' \right] \frac{dp}{p_0}. \quad (18.47)$$

Проинтегрируем по импульсам антинейтрино и π^0 -мезона. Учитывая, что матрица \mathfrak{M} не зависит от переменных интегрирования, имеем

$$R = \frac{m_l}{2i} \text{Sp} [\mathfrak{M} I_\alpha \gamma_\alpha \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p)]. \quad (18.48)$$

Здесь

$$I_\alpha = \int p'_\alpha \delta(p' + q' - k) \frac{d\mathbf{p}'}{p'_0} \frac{d\mathbf{q}'}{q'_0}. \quad (18.49)$$

Этот интеграл был вычислен нами в предыдущем параграфе [см. (17.28)]. Имеем

$$I_\alpha = I_0 k_\alpha, \quad (18.50)$$

где

$$I_0 = \pi \left(\frac{k^2 + m_\pi^2}{k^2} \right)^2. \quad (18.51)$$

Далее легко видеть, что

$$\overline{\mathfrak{M}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} f_+^* (1 - \gamma_5) [2\hat{k} + im_l(\eta^* + 1)]. \quad (18.52)$$

С помощью (18.42), (18.50) и (18.52) находим

$$R = \frac{1}{4} G^2 |f_+|^2 I_0 \times \\ \times \text{Sp} \{ (2\hat{k} + im_l(\eta + 1))(1 + \gamma_5) [2k^2 + im_l \hat{k}(\eta^* + 1)] (\hat{p} + im_l) \}. \quad (18.53)$$

Вычисление этого следа не представляет никакого труда. Получаем

$$R = G^2 |f_+|^2 I_0 [4k^2(kp) - 4k^2 m_l^2 \text{Re}(\eta + 1) - m_l^2 |\eta + 1|^2 kp]. \quad (18.54)$$

Из (18.47), (18.48), (18.51) и (18.54) находим следующее выражение для энергетического спектра лептонов в системе покоя K -мезонов:

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_K} G^2 |f_+|^2 (E^2 - m_l^2)^{1/2} \frac{(k^2 + m_\pi^2)^2}{(-k^2)} \times \\ \times \left[m_K E + m_l^2 \text{Re} \eta - \frac{m_l^2 |\eta + 1|^2 (m_K E - m_l^2)}{4k^2} \right]. \quad (18.55)$$

Здесь E — полная энергия лептона в системе покоя K -мезона, а

$$k^2 = -m_K^2 - m_l^2 + 2m_K E. \quad (18.56)$$

Найдем пределы, в которых изменяется переменная k^2 . Используя законы сохранения 4-импульса в с. ц. и. нейтрино и π -мезона, получаем

$$k^2 = (q' + p')^2 = -\left(p'_0 + \sqrt{m_\pi^2 + (p'_0)^2}\right). \quad (18.57)$$

Отсюда следует, что

$$k^2 \leq -m_\pi^2. \quad (18.58)$$

С другой стороны, так как $E_l \geq m_l$, из (18.56) находим

$$k^2 \geq -(m_K - m_l)^2. \quad (18.59)$$

С помощью (18.56) и (18.58) получаем, что максимальная энергия лептона в системе покоя K -мезона равна

$$E_0 = \frac{m_K^2 + m_l^2 - m_\pi^2}{2m_K}. \quad (18.60)$$

Отметим, что

$$k^2 + m_\pi^2 = -2m_K (E_0 - E). \quad (18.61)$$

В случае распада $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ в квадратных скобках выражения (18.55) можно пренебречь членами, пропорциональными m_e^2 . Спектр электронов от распада $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ не зависит, следовательно, от параметра η и дается выражением

$$\left(\frac{d\Gamma}{dE}\right)_{K \rightarrow \pi e \bar{\nu}} = \frac{1}{4\pi^3} G^2 |f_+|^2 m_K^4 E (E^2 - m_e^2)^{1/2} \frac{(E_0 - E)^2}{\left[(E_0 - E) + \frac{m_\pi^2}{2m_K}\right]}. \quad (18.62)$$

Вычислим теперь вектор поляризации μ -мезонов (электронов). Используя (18.10) и (18.50), легко находим, что числитель выражения (18.44) равен

$$N_\mu = \int \frac{m_l}{q'_0} \text{Sp} [i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda(p) \not{p}' \Lambda_\nu(-p') \not{p} \Lambda(p)] \times \\ \times \delta(p' + q' - k) d p' d q' = \frac{1}{2i} m_l I_0 \text{Sp} [i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda(p) \not{\hat{k}} \not{p} \Lambda(p)]. \quad (18.63)$$

Очевидно, что

$$N_\mu p_\mu = 0. \quad (18.64)$$

Вычисление следа, входящего в (18.63), упростится, если воспользоваться соотношением

$$\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda(p) = \Lambda(p) \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{p_\mu}{im_l} \gamma_5. \quad (18.65)$$

которое легко может быть получено из перестановочных соотношений для матриц γ . Учитывая, что

$$\Lambda(p) \Lambda(p) = \Lambda(p),$$

находим

$$N_\mu = \frac{1}{2i} m_l I_0 \left\{ \text{Sp} [i\gamma_5 \gamma_\mu \mathfrak{M} \hat{k} \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p)] + \right. \\ \left. + \frac{p_\mu}{m_l} \text{Sp} [\gamma_5 \mathfrak{M} \hat{k} \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p)] \right\}. \quad (18.66)$$

Первый след равен

$$\frac{1}{2i} m_l \text{Sp} [i\gamma_5 \gamma_\mu \mathfrak{M} \hat{k} \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p)] = \\ = -|f_+|^2 G^2 m_l [(4k^2 + m_l^2 |\eta + 1|^2) k_\mu - 4ik^2 \text{Im} \eta p_\mu]. \quad (18.67)$$

В вычислении второго следа нет никакой необходимости. Используя (18.64), получаем

$$\text{Sp} [\gamma_5 \mathfrak{M} \hat{k} \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p)] = \frac{1}{m_l} p_\mu \text{Sp} [i\gamma_5 \gamma_\mu \mathfrak{M} \hat{k} \overline{\mathfrak{M}} \Lambda(p)]. \quad (18.68)$$

С помощью (18.66) и (18.68) находим

$$N_\mu = -|f_+|^2 G^2 I_0 (4k^2 + m_l^2 |\eta + 1|^2) m_l \left(k_\mu + p_\mu \frac{kp}{m_l^2} \right). \quad (18.69)$$

Для 4-вектора поляризации лептона ξ_μ из (18.68) и (18.54) получаем следующее выражение:

$$\xi_\mu = - \frac{(4k^2 + m_l^2 |\eta + 1|^2) m_l \left(k_\mu + p_\mu \frac{kp}{m_l^2} \right)}{[(4k^2 - m_l^2 |\eta + 1|^2) kp - 4k^2 m_l^2 \text{Re}(\eta + 1)]}. \quad (18.70)$$

Вычислим вектор поляризации в системе покоя лептона. Направляя ось x по импульсу лептона p , имеем

$$\xi_x^0 = \frac{\xi_x - \beta \xi_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \xi_y^0 = \xi_y, \quad \xi_z^0 = \xi_z. \quad (18.71)$$

Здесь ξ^0 — вектор поляризации в системе покоя лептона, а $\beta = |p|/p_0$. Из условия $\xi p = 0$ очевидно, что $\xi_0^0 = 0$. Из этого условия следует также, что

$$\xi_0 = \beta \xi_x. \quad (18.72)$$

С помощью (18.71) и (18.72) получаем, что вектор поляризации в системе покоя лептона выражается через вектор поляризации частицы в системе, где импульс лептона равен p , следующим образом:

$$\xi^0 = \xi - \frac{1}{p_0(p_0 + m_l)} (\xi p) p. \quad (18.73)$$

Далее нетрудно видеть, что

$$k_\mu + p_\mu \frac{kp}{m_l^2} = q_\mu + p_\mu \frac{qp}{m_l^2}. \quad (18.74)$$

В системе покоя начального K -мезона пространственная часть этого вектора равна

$$-\frac{1}{m_l^2} m_K E p.$$

Учитывая эти последние замечания из (18.70) и (18.73), без труда находим, что вектор поляризации лептонов в системе покоя, полученной преобразованием Лоренца вдоль импульса из системы покоя начальных K -мезонов, равен

$$\xi^0 = -\frac{\left(1 + \frac{m_l^2 |\eta + 1|^2}{4k^2}\right) m_K p}{\left[m_K E + m_l^2 \operatorname{Re} \eta - \frac{m_l^2 |\eta + 1|^2}{4k^2} (m_K E - m_l^2)\right]}. \quad (18.75)$$

Здесь p и E — импульс и энергия лептона в системе покоя K -мезона, а k^2 дается выражением (18.56).

В случае распадов $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ членами, пропорциональными m_e^2 , можно пренебречь, и тогда для поляризации электронов получаем

$$\xi^0 = -\frac{p}{E}. \quad (18.76)$$

Таким образом, поляризация электронов в распаде $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ не зависит от параметра η и равна $-v$. Измерение поляризации и спектра μ -мезонов дает возможность получить информацию о величине параметра η .

В заключение сделаем следующее замечание. До сих пор считалось, что форм-факторы f_+ и f_- комплексны. Нетрудно показать, что в случае, если имеет место инвариантность относительно обращения времени, форм-факторы f_+ и f_- вещественны. Действительно, из условия унитарности S -матрицы (в низшем порядке по константе слабого взаимодействия G) и из T -инвариантности, аналогично (12.105), получаем

$$\left(\Phi_{q_T}^{+}, J_\alpha(0) \Phi_{q_T}\right)^* = \left(\Phi_{q'}^{+}, J_\alpha(0) \Phi_{q'}\right). \quad (18.77)$$

Здесь $q_T = (-\mathbf{q}, iq_0)$; $q_T' = (-\mathbf{q}', iq_0')$.

Используя (18.5), (18.7) и (18.77), получаем, что

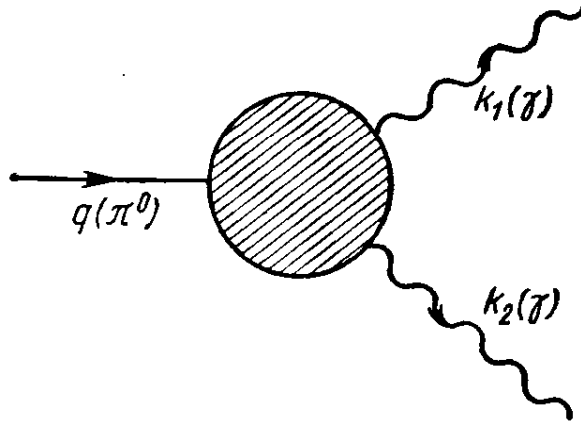
$$f_+^* = f_+, \quad f_-^* = f_-. \quad (18.78)$$

§ 19. Распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

В заключение рассмотрим распад нейтрального π -мезона на два γ -кванта:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (19.1)$$

Обозначим начальный и конечный векторы состояния $\Phi_{k_1\lambda_1, k_2\lambda_2}$ и Φ_q (k_1 и k_2 — импульсы, а λ_1 и λ_2 — индексы векторов в поля-



Р и с. 25

ризации конечных фотонов; q — импульс начального π^0 -мезона). Очевидно, что

$$\Phi_{k_1\lambda_1, k_2\lambda_2} = a_{\lambda_1}^+(k_1) a_{\lambda_2}^+(k_2) \Phi_0. \quad (19.2)$$

За распад (19.1) ответственны как электромагнитные, так и сильные взаимодействия. Сильные взаимодействия не могут быть рассмотрены по теории возмущений. Мы построим общее выражение для матричного элемента процесса и затем вычислим вероятность распада.

Диаграмма процесса распада (19.1) с учетом всех взаимодействий, ответственных за распад, представлена на рис. 25. Матричный элемент, отвечающий этой диаграмме, может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} (\Phi_{k_1\lambda_1, k_2\lambda_2}^+ S \Phi_q) &= e^2 \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{1}{\sqrt{8k_{10}k_{20}q_0}} e_{\mu}^{\lambda_1}(k_1) \times \\ &\times e_{\nu}^{\lambda_2}(k_2) \mathfrak{M}_{\mu\nu}(k_1, k_2; q) (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - q), \end{aligned} \quad (19.3)$$

где $e^{\lambda_1}(k_1)$ и $e^{\lambda_2}(k_2)$ — 4-векторы поляризации конечных фотонов. В выражении (19.3) выделены стандартные множители, отвечающие внешним фотонным и мезонной линиям; величина $\mathfrak{M}_{\mu\nu}(k_1, k_2; q)$ отвечает заштрихованной части диаграммы рис. 25 и обусловлена сильными взаимодействиями. В (19.3) выделен также множитель e^2 .

Построим общее выражение для $\mathfrak{M}_{\mu\nu}(k_1, k_2; q)$. Для этого выясним, каким условиям обязана удовлетворять эта величина. Прежде всего вследствие коммутации операторов $a_{\lambda_1}(k_1)$ и $a_{\lambda_2}(k_2)$ имеем

$$(\Phi_{k_1\lambda_1, k_2\lambda_2}^+ S \Phi_q) = (\Phi_{k_2\lambda_2, k_1\lambda_1}^+ S \Phi_q). \quad (19.4)$$

Из (19.3) и (19.4) заключаем, что тождественность фотонов приводит к соотношению

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu}(k_1, k_2; q) = \mathfrak{M}_{\nu\mu}(k_2, k_1; q). \quad (19.5)$$

Далее, из требований лоренц-инвариантности и инвариантности относительно инверсии следует, что величина $\mathfrak{M}_{\mu\nu}(k_1, k_2; q)$ должна преобразовываться как псевдотензор второго ранга (π^0 — псевдоскалярная частица).

Построим из векторов импульса задачи величину, удовлетворяющую этим условиям. Очевидно, что вследствие законов сохранения энергии — импульса

$$q = k_1 + k_2 \quad (19.6)$$

только два 4-вектора импульса независимы. Выберем в качестве независимых векторы k_1 и k_2 . Из двух 4-векторов может быть построен только один псевдотензор второго ранга. Таким образом, в самом общем случае

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu}(k_1, k_2; q) = a \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}, \quad (19.7)$$

где величина a зависит от скаляров, которые могут быть построены из k_1 и k_2 . Так как

$$k_1^2 = k_2^2 = 0, \quad k_1 k_2 = \frac{1}{2} q^2 = -\frac{1}{2} m_\pi^2 \quad (19.8)$$

(m_π — масса π -мезона), a — константа. Очевидно, что (19.7) удовлетворяет соотношению (19.5).

Перейдем теперь к рассмотрению условий, накладываемых на матричный элемент процесса, законом сохранения тока. Обсудим вначале общий случай. Рассмотрим некоторый процесс, в котором образуется γ -квант. Обозначим Φ_i вектор состояния начальных частиц. Конечный вектор состояния запишем следующим образом:

$$a_\lambda^+(k) \Phi_f, \quad (19.9)$$

где k и λ — 4-импульс и индекс вектора поляризации фотона ($\lambda = 1, 2$); Φ_f — вектор состояния остальных конечных частиц. Матричный элемент процесса имеет вид

$$R_{k\lambda, f; i} = (\Phi_f^+ a_\lambda(k) (S-1) \Phi_i). \quad (19.10)$$

Очевидно, что

$$a_\lambda(k) (S-1) = [a_\lambda(k), S] + (S-1) a_\lambda(k). \quad (19.11)$$

Допустим, что в начальном состоянии нет фотонов с импульсом k . Второй член в (19.11) не дает вклада в матричный элемент процесса. Рассмотрим первый член. Используя выражение (8.31) для S -мат-

рицы, имеем

$$[a_\lambda(k), S] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int [a_\lambda(k), T(\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n))] dx_1 \dots dx_n. \quad (19.12)$$

С помощью (4.28) нетрудно показать, что для любых операторов $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$ имеет место соотношение

$$[\alpha, \beta\gamma \dots \delta] = [\alpha, \beta] \gamma \dots \delta + \beta [\alpha, \gamma] \dots \delta + \dots + \beta\gamma \dots [\alpha, \delta]. \quad (19.13)$$

Используя это соотношение, переставляя операторы под знаком T -произведения и переобозначая переменные интегрирования, получаем

$$[a_\lambda(k), S] = -i \int T([a_\lambda(k), \mathcal{H}_I(x)] S) dx. \quad (19.14)$$

Очевидно, что только гамильтониан электромагнитного взаимодействия дает отличный от нуля вклад в коммутатор $[a_\lambda(k), \mathcal{H}_I(x)]$.

Рассмотрим в качестве примера взаимодействие электромагнитного поля с протонным и π -мезонным полями. Гамильтониан взаимодействия дается выражением (12.3). Получаем

$$[a_\lambda(k), \mathcal{H}_I(x)] = -[(-e) j_\mu^\rho(x) + e j_\mu^\pi(x)] [a_\lambda(k), A_\mu(x)]. \quad (19.15)$$

Токи $j_\mu^\rho(x)$ и $j_\mu^\pi(x)$ даются выражениями (12.4); e — заряд электрона. В общем случае

$$[a_\lambda(k), \mathcal{H}_I(x)] = -e j_\mu(x) [a_\lambda(k), A_\mu(x)], \quad (19.16)$$

где $j_\mu(x)$ — ток всех заряженных частиц. С помощью (7.35) и (7.40) без труда находим

$$[a_\lambda(k), A_\mu(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_\mu^\lambda(k) e^{-ikx}, \quad (19.17)$$

Из (19.11), (19.14), (19.16) и (19.17) получаем, что матричный элемент процесса равен

$$R_{k\lambda, f; i} = ie \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_\mu^\lambda(k) \int e^{-ikx} (\Phi_f^\dagger T(j_\mu(x) S) \Phi_i) dx. \quad (19.18)$$

Переходя к представлению Гейзенберга (см. § 12), имеем

$$(\Phi_f^\dagger T(j_\mu(x) S) \Phi_i) = (\Phi_{f; \text{out}}^\dagger J_\mu(x) \Phi_{i; \text{in}}), \quad (19.19)$$

где $J_\mu(x)$ — ток в представлении Гейзенберга.

Далее, аналогично (12.32), находим

$$(\Phi_{f; \text{out}}^\dagger J_\mu(x) \Phi_{i; \text{in}}) = e^{-i(P_f - P_i)x} (\Phi_{f; \text{out}}^\dagger J_\mu(0) \Phi_{i; \text{in}}), \quad (19.20)$$

где P_f и P_i — полные 4-импульсы частиц, описываемых соответственно векторами Φ_f и Φ_i . Подставляя (19.19) и (19.20) в выра-

жение (19.18) и интегрируя по x , получаем для матричного элемента процесса

$$R_{k\lambda, f; i} = ie \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e_{\mu}^{\lambda}(k) (\Phi_{f; \text{out}}^{+} J_{\mu}(0) \Phi_{i; \text{in}}) (2\pi)^4 \delta(P_f + k - P_i). \quad (19.21)$$

С помощью (19.20) нетрудно видеть, что из закона сохранения тока

$$\frac{\partial J_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad (19.22)$$

следует

$$(P_f - P_i)_{\mu} (\Phi_{f; \text{out}}^{+} J_{\mu}(0) \Phi_{i; \text{in}}) = 0. \quad (19.23)$$

Запишем матричный элемент процесса в виде

$$R_{k\lambda, f; i} = e_{\mu}^{\lambda}(k) M_{\mu}(k, f; i) \delta(P_f + k - P_i). \quad (19.24)$$

Из (19.21), (19.23) и (19.24) заключаем, что величина $M_{\mu}(k, f; i)$ обязана удовлетворять следующему условию:

$$k_{\mu} M_{\mu}(k, f; i) = 0. \quad (19.25)$$

В рассматриваемом случае распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ должны, следовательно, выполняться соотношения

$$\left. \begin{aligned} k_{1\mu} \mathfrak{M}_{\mu\nu}(k_1, k_2; q) &= 0, \\ k_{2\mu} \mathfrak{M}_{\mu\nu}(k_1, k_2; q) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.26)$$

Легко видеть, что построенное из требований лоренц-инвариантности и инвариантности относительно инверсии выражение (19.7) автоматически удовлетворяет (19.26).

Найдем теперь вероятность распада нейтрального π -мезона на два γ -кванта. Для вычисления полной вероятности распада необходимо просуммировать по индексам λ_1 и λ_2 . Из (19.3) в системе покоя π^0 -мезона находим следующее выражение для вероятности распада:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{8m_{\pi}} e^4 \sum_{\lambda_1, \lambda_2=1,2} (e_{\mu}^{\lambda_1}(k_1) e_{\nu}^{\lambda_2}(k_2) \mathfrak{M}_{\mu\nu}) \times \\ &\times (e_{\rho}^{\lambda_1}(k_1) e_{\sigma}^{\lambda_2}(k_2) \mathfrak{M}_{\rho\sigma})^* \delta(k_1 + k_2 - q) \frac{dk_1}{k_{10}} \cdot \frac{dk_2}{k_{20}}. \end{aligned} \quad (19.27)$$

Произведем суммирование по состояниям поляризации фотонов. Реальные фотоны, испускаемые в процессе (19.1), могут обладать только поперечной поляризацией. Вследствие этого в выражении (19.27) производится суммирование только по λ_1 и λ_2 , равным 1 и 2. Покажем, что вытекающее из закона сохранения тока условие

(19.25) позволяет распространить суммирование по λ на все значения λ .

Обсудим вначале общий случай. Рассмотрим некоторый процесс с образованием γ -кванта. Матричный элемент процесса имеет вид (19.24). Чтобы получить просуммированную по состояниям поляризации фотона вероятность процесса, необходимо вычислить сумму

$$\sum_{\lambda=1,2} (e^\lambda(k) M) (e^\lambda(k) M)^*. \quad (19.28)$$

Векторы $e^1(k)$ и $e^2(k)$, описывающие состояния поперечной поляризации фотона, определяются следующим образом [см. (7.13)]:

$$e^\lambda(k) = (e^\lambda(k), 0) \quad (\lambda = 1, 2), \quad (19.29)$$

где

$$e^\lambda(k) k = 0.$$

Векторы продольной и скалярной поляризаций равны

$$e^3(k) = \left(\frac{k}{k_0}, 0 \right), \quad e^4(k) = (0, i). \quad (19.30)$$

Очевидно, что

$$e_\mu^3(k) + e_\mu^4(k) = \frac{k_\mu}{k_0}. \quad (19.31)$$

Из (19.31) и (19.25) получаем

$$(e^3(k) M) = -(e^4(k) M). \quad (19.32)$$

Отсюда следует, что

$$(e^3(k) M) (e^3(k) M)^* = (e^4(k) M) (e^4(k) M)^*. \quad (19.33)$$

Таким образом, условие (19.25) приводит к равенству вероятностей испускания продольных и скалярных фотонов. С помощью (19.33) получаем

$$\sum_{\lambda=1,2} (e^\lambda(k) M) (e^\lambda(k) M)^* = \sum_{\lambda=1}^4 (e^\lambda(k) M) (e^\lambda(k) M)^* \eta_\lambda. \quad (19.34)$$

(Множитель η_λ равен $+1$ при $\lambda=1, 2, 3$, и -1 при $\lambda=4$.) Теперь можно воспользоваться условием полноты системы векторов $e^\lambda(k)$:

$$\sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^\lambda(k) e_\nu^\lambda(k) \eta_\lambda = \delta_{\mu\nu}. \quad (19.35)$$

Замечая, что

$$(e_\nu^\lambda(k))^* = e_\nu^\lambda(k) \eta_\nu,$$

из (19.34) и (19.35) без труда находим

$$\sum_{\lambda=1,2} (e^\lambda(k) M) (e^\lambda(k) M)^* = \sum_{\mu} M_{\mu} M_{\mu}^* \eta_{\mu}. \quad (19.36)$$

Этот окончательный результат может быть представлен в другом виде. Входящую в (19.36) сумму по λ запишем следующим образом:

$$\sum_{\mu, \nu} M_{\mu} M_{\nu}^* \eta_{\nu} \sum_{\lambda=1,2} e_{\mu}^{\lambda}(k) e_{\nu}^{\lambda}(k). \quad (19.37)$$

Очевидно, что соотношение (19.36) может быть получено, если положить

$$\sum_{\lambda=1,2} e_{\mu}^{\lambda}(k) e_{\nu}^{\lambda}(k) = \delta_{\mu\nu} \quad (19.38)$$

(это условное равенство; его надлежит понимать следующим образом: если сумму $\sum_{\lambda=1,2} e_{\mu}^{\lambda}(k) e_{\nu}^{\lambda}(k)$ свернуть с тензором $M_{\mu} M_{\nu}^* \eta_{\nu}$,

то вследствие (19.25) указанную сумму можно заменить на $\delta_{\mu\nu}$).

В связи с изложенным сделаем следующее замечание. Векторы (19.29) и (19.30) определены в фиксированной системе отсчета. Нетрудно ввести ковариантно определенные 4-векторы, описывающие состояния поляризации фотона. Обозначим n времениподобный единичный 4-вектор:

$$n^2 = -1. \quad (19.39)$$

Положим

$$e^4 = n. \quad (19.40)$$

Векторы, описывающие поперечную поляризацию, определим следующим образом:

$$e^{\lambda}(k) n = 0, \quad (19.41)$$

$$e^{\lambda}(k) k = 0 \quad (\lambda = 1, 2). \quad (19.42)$$

(Условие (19.41) означает, что $e^{\lambda}(k)$, где $\lambda = 1, 2$ — пространственно-подобные векторы; $e_4^{\lambda}(k) = 0$ в системе, где $n = (0, i)$; из условия (19.42) следует, что в этой системе $e^{\lambda}(k) k = 0$.) Вектор продольной поляризации $e^3(k)$ должен быть ортогонален всем остальным построенным векторам. Положим

$$e_{\mu}^3(k) = ck_{\mu} + dn_{\mu}. \quad (19.43)$$

Из (19.41) и (19.42) следует, что этот вектор ортогонален векторам $e^1(k)$ и $e^2(k)$. Далее, требуя ортогональности $e^3(k)$ и n , получаем

$$d = c(kn). \quad (19.44)$$

Наконец, из условия $e^3 e^3 = 1$ находим

$$c^2 = \frac{1}{(kn)^2}. \quad (19.45)$$

Положим, что

$$e^3(k) = -\left(n + \frac{k}{kn}\right). \quad (19.46)$$

Очевидно, что построенные 4-векторы в системе отсчета, где $n = (0, i)$, совпадают с векторами (19.29) и (19.30). Из (19.40) и (19.46) находим, что

$$e^3(k) + e^4(k) = \frac{-k}{kn}. \quad (19.47)$$

Очевидно, что с помощью (19.25) и (19.47) получаем равенства (19.32) и (19.33) и далее, используя полноту построенной системы векторов, приходим к (19.36).

Вернемся теперь к вычислению вероятности распада нейтрального π -мезона на два γ -кванта. Из (19.27) с помощью (19.36) находим

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{8m_\pi} e^4 \sum_{\mu, \nu} \mathfrak{M}_{\mu\nu} \mathfrak{M}_{\mu\nu}^* \eta_\mu \eta_\nu \delta(k_1 + k_2 - q) \times \\ \times \frac{dk_1}{k_{10}} \cdot \frac{dk_2}{k_{20}}, \quad (19.48)$$

где $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ дается выражением (19.7). Нетрудно видеть, что

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_{1\rho}^* k_{2\sigma}^* \eta_\mu \eta_\nu = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}. \quad (19.49)$$

Используя далее соотношение

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho'\sigma'} = 2(\delta_{\rho\rho'} \delta_{\sigma\sigma'} - \delta_{\rho\sigma'} \delta_{\sigma\rho'}),$$

а также (19.8), находим

$$\sum_{\mu, \nu} \mathfrak{M}_{\mu\nu} \mathfrak{M}_{\mu\nu}^* \eta_\mu \eta_\nu = \frac{1}{2} m_\pi^4 |a|^2. \quad (19.50)$$

Получим полную вероятность распада. В силу тождественности фотонов величины $d\Gamma(k_1, k_2)$ и $d\Gamma(k_2, k_1) = d\Gamma(k_1, k_2)$ представляют собой вероятность одного и того же события. Это означает, что для получения полной вероятности распада нужно результат

интегрирования по всем k_1 и k_2 разделить на 2. Полагая в (17.25) $m_l = 0$, имеем

$$\int \delta(k_1 + k_2 - q) \frac{dk_1}{k_{10}} \cdot \frac{dk_2}{k_{20}} = 2\pi. \quad (19.51)$$

Окончательно из (19.48), (19.50) и (19.51) находим следующее выражение для полной вероятности распада нейтрального π -мезона на два γ -кванта:

$$\Gamma = \frac{1}{4} \pi \alpha^2 m_\pi^3 |a|^2, \quad (19.52)$$

где

$$\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137.$$

**Решение свободного уравнения Дирака.
Ковариантная матрица плотности
для частиц со спином 1/2**

Спиновое состояние частиц описывается в общем случае матрицей плотности. В Приложении мы подробно рассмотрим ковариантную матрицу плотности для частиц со спином 1/2. Будет рассмотрен также случай двухкомпонентного нейтрино.

Начнем с решения свободного уравнения Дирака

$$\alpha_k \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + m \beta \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial x_0}. \quad (1)$$

Здесь α_k ($k = 1, 2, 3$) и β — эрмитовы 4×4 -матрицы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i &= 2\delta_{ik}, \\ \alpha_k \beta + \beta \alpha_k &= 0, \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а $\psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор. Нас интересуют решения уравнения (1), описывающие состояния с определенным импульсом. Такие решения имеют вид

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u(p) e^{ipx - iEx_0}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), находим, что спинор $u(p)$ удовлетворяет уравнению

$$(\alpha p + m\beta) u(p) = Eu(p). \quad (4)$$

Из перестановочных соотношений (2) следует, что это уравнение имеет решения при

$$E = \pm p_0, \quad (5)$$

где

$$p_0 = +\sqrt{m^2 + p^2}. \quad (6)$$

Найдем эти решения. Будем использовать такое представление матриц α_k и β , в котором матрица β диагональна (представление Дирака — Паули). В этом представлении матрицы α_k и β равны

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь σ_k — матрицы Паули, I — единичная 2×2 -матрица. Запишем спинор u в следующем виде:

$$u = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где φ и χ — двухкомпонентные спиноры; N — нормировочная константа. Из (4), (7) и (8) получаем систему уравнений для φ и χ :

$$\sigma \mathbf{p} \chi = (E - m) \varphi, \quad (9a)$$

$$\sigma \mathbf{p} \varphi = (E + m) \chi. \quad (9b)$$

Найдем вначале решение, отвечающее положительной энергии ($E = p_0$). Из (9b) получаем

$$\chi = \frac{\sigma \mathbf{p}}{p_0 + m} \varphi. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9a), находим

$$\frac{(\sigma \mathbf{p})^2 \varphi}{p_0 + m} = (p_0 - m) \varphi.$$

Это соотношение удовлетворяется при любом φ ($(\sigma \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 = p_0^2 - m^2$).

Таким образом, решение уравнения (4), отвечающее положительной энергии ($E = p_0$), имеет вид

$$u_+(\mathbf{p}) = N_+(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{p_0 + m} \varphi \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Будем нормировать спинор $u_+(\mathbf{p})$ следующим условием:

$$(u_+(\mathbf{p}))^+ u_+(\mathbf{p}) = 1. \quad (12)$$

Из (11) получаем, что

$$N_+^2(\mathbf{p}) (\varphi^+ \varphi) \frac{2p_0}{(p_0 + m)} = 1.$$

Положим

$$(\varphi^+ \varphi) = 1. \quad (13)$$

Итак, нормированное решение уравнения Дирака, отвечающее положительной энергии, в представлении Дирака — Паули имеет вид

$$u_+(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{p_0 + m} \varphi \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где φ — спинор, удовлетворяющий условию нормировки (13).

Найдем теперь решения, отвечающие отрицательной энергии ($E = -p_0$). Из (9а) получаем

$$\varphi = \frac{-\sigma \mathbf{p}}{p_0 + m} \chi. \quad (15)$$

Если подставить (15) в (9б), то нетрудно убедиться в том, что никаких ограничений на спинор χ при этом не возникает. Требуя, чтобы описывающий состояние с отрицательной энергией спинор $u_-(\mathbf{p})$ удовлетворял условию нормировки,

$$u_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p}) u_{\pm}(\mathbf{p}) = 1, \quad (16)$$

и полагая, что

$$\chi^{\dagger} \chi = 1, \quad (17)$$

получаем

$$u_{-}(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{-\sigma \mathbf{p}}{p_0 + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Очевидно, что спиноры $u_{+}(\mathbf{p})$ и $u_{-}(\mathbf{p})$ ортогональны, т. е.

$$u_{+}^{\dagger}(\mathbf{p}) u_{-}(\mathbf{p}) = 0. \quad (19)$$

Рассмотрим эрмитов оператор Σ_i , который в представлении Дирака—Паули равен

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Оператор $\frac{1}{2} \Sigma_i$ удовлетворяет коммутационным соотношениям момента количества движения

$$\left[\frac{1}{2} \Sigma_i, \frac{1}{2} \Sigma_k \right] = i \varepsilon_{ikl} \frac{1}{2} \Sigma_l \quad (21)$$

и является оператором спина.

Вычислим коммутатор оператора Σ_i с оператором

$$H(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + m\beta. \quad (22)$$

Из (7) и (20) очевидно, что оператор Σ_i может быть записан следующим образом:

$$\Sigma_i = \frac{-i}{2} \varepsilon_{ikl} \alpha_k \alpha_l. \quad (23)$$

Используя перестановочные соотношения (2), получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k \alpha_l \beta - \beta \alpha_k \alpha_l &= \alpha_k (\alpha_l \beta + \beta \alpha_l) = 0, \\ \alpha_k \alpha_l \alpha_m - \alpha_m \alpha_k \alpha_l &= 2\alpha_k \delta_{lm} - 2\alpha_l \delta_{km}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Таким образом,

$$[\Sigma_i, H(\mathbf{p})] = -2i (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})_i. \quad (25)$$

Отсюда следует, что оператор проекции спина на импульс коммутирует с оператором $H(\mathbf{p})$ (остальные компоненты оператора спина не сохраняются).

Обозначим \mathbf{n} единичный вектор в направлении импульса ($\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$). Оператор

$$\Sigma \mathbf{n} \quad (26)$$

носит название *оператора спиральности*. Потребуем, чтобы спиноры $u_+(\mathbf{p})$ и $u_-(\mathbf{p})$, являющиеся решениями уравнения Дирака (4), были также собственными функциями оператора спиральности. Имеем

$$\Sigma \mathbf{n} u_+^r(\mathbf{p}) = r u_+^r(\mathbf{p}), \quad \Sigma \mathbf{n} u_-^r(\mathbf{p}) = r u_-^r(\mathbf{p}). \quad (27)$$

Очевидно, что $r = \pm 1$. Спиноры $u_+^r(\mathbf{p})$ и $u_-^r(\mathbf{p})$ описывают спиновое состояние дираковской частицы с энергией p_0 и $-p_0$ и спиральностью r . Из (12), (16), (19) и (27) имеем

$$\left. \begin{aligned} (u_+^r(\mathbf{p}))^+ u_+^{r'}(\mathbf{p}) &= \delta_{rr'}, \\ (u_-^r(\mathbf{p}))^+ u_-^{r'}(\mathbf{p}) &= \delta_{rr'}, \\ (u_+^r(\mathbf{p}))^+ u_-^{r'}(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Функции

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_+^r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} - i p_0 x_0},$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_-^r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} + i p_0 x_0} \quad (r = \pm 1)$$

образуют полную систему решений уравнения Дирака с определенным импульсом \mathbf{p} . Запишем спиноры $u_{\pm}^r(\mathbf{p})$ в виде

$$\left. \begin{aligned} u_+^r(\mathbf{p}) &= \left(\frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi^r \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{p_0 + m} \varphi^r \end{pmatrix}, \\ u_-^r(\mathbf{p}) &= \left(\frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} -\sigma \mathbf{p} \\ \chi^r \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Из (27) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma \mathbf{n} \varphi^r &= r \varphi^r, \\ \sigma \mathbf{n} \chi^r &= r \chi^r. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Таким образом, уравнения (27) означают определенный выбор двухкомпонентного спинора φ для состояний с положительной энергией и спинора χ для состояний с отрицательной энергией. Из (29)

и (30) имеем

$$u_+^r(p) = \left(\frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi^r \\ \frac{|\mathbf{p}| r}{p_0 + m} \varphi^r \end{pmatrix},$$

$$u_-^r(p) = \left(\frac{p_0 + m}{2p_0} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} -|\mathbf{p}| r \chi^r \\ \chi^r \end{pmatrix}.$$

Отсюда для $m=0$ (нейтрино) находим

$$u_+^r(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi^r \\ r \varphi^r \end{pmatrix}, \quad u_-^r(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -r \chi^r \\ \chi^r \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Нетрудно видеть, что спиноры (31) являются собственными состояниями матрицы γ_5 . Действительно, в представлении Дирака—Паули матрица γ_5 имеет вид

$$\gamma_5 = i\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Из (31) и (32) получаем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_5 u_+^{(-1)}(p) &= u_+^{(-1)}(p), \\ \gamma_5 u_-^{(1)}(p) &= u_-^{(1)}(p), \\ \gamma_5 u_+^{(1)}(p) &= -u_+^{(1)}(p), \\ \gamma_5 u_-^{(-1)}(p) &= -u_-^{(-1)}(p). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Таким образом, в случае нейтрино состояния $u_+^{(-1)}(p)$ и $u_-^{(1)}(p)$, ($u_+^{(1)}(p)$ и $u_-^{(-1)}(p)$) — собственные состояния матрицы γ_5 , отвечающие собственному значению $+1$ (-1).

Спиноры $u_+(p)$ и $u_-(p)$ нормированы условиями (12) и (16). Величина

$$u^+(p) u(p) = \bar{u}(p) \gamma_4 u(p)$$

является четвертой компонентой вектора $\bar{u}(p) \gamma_\mu u(p)$, и, следовательно, эта нормировка не является инвариантной. Введем инвариантно нормированные спиноры. Будем рассматривать частицы с отличной от нуля массой. Из уравнения (4) операцией эрмитова сопряжения получаем

$$u^+(p) (\alpha p + m \beta) = u^+(p) E. \quad (34)$$

Умножим (4) слева на $u^+(p) \beta$, а (34) — справа на $\beta u(p)$. Складывая полученные уравнения и используя перестановочные соотношения (2), находим

$$\bar{u}(p) u(p) = \frac{m}{E} u^+(p) u(p). \quad (35)$$

Так как $u^+(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) \geq 0$, то из соотношения (35) очевидно, что

$$\bar{u}_+(\mathbf{p})u_+(\mathbf{p}) \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{u}_-(\mathbf{p})u_-(\mathbf{p}) \leq 0.$$

Отметим также, что для частиц с массой, равной нулю, $\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = 0$.

Рассмотрим сначала состояния с положительной энергией. Введем спинор $u(\mathbf{p})$, связанный с $u_+(\mathbf{p})$ соотношением

$$u(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0}{m} \right)^{1/2} u_+(\mathbf{p}). \quad (36)$$

Из (35) и (28) получаем

$$\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = \frac{p_0}{m} \bar{u}_+(\mathbf{p})u_+(\mathbf{p}) = 1. \quad (37)$$

Таким образом, спинор

$$u(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{p_0 + m} \varphi \end{pmatrix} \quad (38)$$

нормирован инвариантным условием (37).

Теперь рассмотрим состояния с отрицательной энергией. Определим следующим образом спинор $u(-\mathbf{p})$:

$$u(-\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0}{m} \right)^{1/2} u_-(\mathbf{p}). \quad (39)$$

Из (35) и (28) получаем

$$\bar{u}(-\mathbf{p})u(-\mathbf{p}) = \frac{p_0}{m} \bar{u}_-(\mathbf{p})u_-(\mathbf{p}) = -1. \quad (40)$$

Спинор

$$u(-\mathbf{p}) = \left(\frac{p_0 + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{p_0 + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (41)$$

описывающий спиновое состояние частицы с энергией $-p_0$ и импульсом $-\mathbf{p}$, также нормирован инвариантно.

Спиноры $u(\mathbf{p})$ и $u(-\mathbf{p})$ удовлетворяют уравнениям

$$(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + m\beta) u(\mathbf{p}) = p_0 u(\mathbf{p}), \quad (42a)$$

$$(-\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + m\beta) u(-\mathbf{p}) = -p_0 u(-\mathbf{p}). \quad (42b)$$

Умножим эти уравнения слева на матрицу $-i\beta$. Получим

$$(\hat{p} - im) u(\mathbf{p}) = 0, \quad (43a)$$

$$(\hat{p} + im) u(-\mathbf{p}) = 0, \quad (43b)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_k &= -i\beta\alpha_k = i\alpha_k\beta, \quad k = 1, 2, 3, \\ \gamma_4 &= \beta, \\ \hat{p} &= p_\mu \gamma_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Из перестановочных соотношений (2) очевидно, что матрицы γ_μ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (45)$$

Ясно также, что $\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$. Операцией эрмитова сопряжения из (43) находим

$$u^+(p) (p_\mu^* \gamma_\mu + im) = 0.$$

Умножая это уравнение справа на γ_4 и учитывая, что

$$\gamma_4 p_\mu^* \gamma_\mu \gamma_4 = -\gamma_\mu p_\mu,$$

получаем

$$\bar{u}(p) (\hat{p} - im) = 0. \quad (46a)$$

Аналогично находим

$$\bar{u}(-p) (\hat{p} + im) = 0. \quad (46b)$$

Умножая уравнение (46b) справа на $u(p)$, а уравнение (43a) — слева на $\bar{u}(-p)$ и складывая полученные соотношения, находим

$$\bar{u}(-p) u(p) = 0, \quad (47)$$

т. е.

$$\bar{u}_-(-p) u_+(p) = 0.$$

Отметим, что

$$\bar{u}_-(p) u_+(p) \neq 0.$$

Если спиноры $u_+^r(p)$ и $u_-^r(-p)$ — собственные функции оператора спиральности (26), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma n u_+^r(p) &= r u_+^r(p), \\ \Sigma (-n) u_-^r(-p) &= r u_-^r(-p) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

($n = p/|p|$), то очевидно, что спиноры

$$u^r(p) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^{1/2} u_+^r(p) \quad \text{и} \quad u^r(-p) = \left(\frac{p_0}{m}\right)^{1/2} u_-^r(-p)$$

также описывают состояния с определенной спиральностью. Такие спиноры удовлетворяют следующим условиям нормировки и ортогональности:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^{r'}(p) u^r(p) &= \delta_{rr'}, \\ \bar{u}^{r'}(-p) u^r(-p) &= -\delta_{r'r}, \\ \bar{u}^{r'}(-p) u^r(p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Из (38) в системе покоя ($m \neq 0$) для состояния с положительной энергией получаем

$$u(im) = \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Произведем преобразование Лоренца из системы покоя в систему, где импульс частицы равен p . Направим первую ось по импульсу p . Имеем

$$\left. \begin{aligned} u(p) &= L(p) u(im), \\ \bar{u}(p) &= \bar{u}(im) L^{-1}(p). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Матрица $L(p)$ удовлетворяет соотношениям

$$L^{-1}(p) \gamma_\mu L(p) = a_{\mu\nu} \gamma_\nu, \quad (52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{p_0}{m}, \quad a_{14} = -i \frac{|\mathbf{p}|}{m}, \\ a_{41} &= i \frac{|\mathbf{p}|}{m}, \quad a_{44} = \frac{p_0}{m}, \quad a_{22} = 1, \quad a_{33} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Остальные компоненты $a_{\mu\nu}$ равны нулю. Отметим, что

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}, \quad a_{\mu\nu} a_{\mu'\nu} = \delta_{\mu\mu'}.$$

Найдем матрицу $L(p)$. Для этого введем величину α , определенную следующим образом:

$$\text{th } \alpha = \frac{|\mathbf{p}|}{p_0}. \quad (54)$$

Очевидно, что

$$\frac{p_0}{m} = \text{ch } \alpha, \quad \frac{|\mathbf{p}|}{m} = \text{sh } \alpha.$$

Используя (52) — (54), получаем

$$L^{-1}(p) \gamma_\mu L(p) = \left(\text{ch } \frac{\alpha}{2} + i\gamma_1 \gamma_4 \text{sh } \frac{\alpha}{2} \right) \gamma_\mu \left(\text{ch } \frac{\alpha}{2} - i\gamma_1 \gamma_4 \text{sh } \frac{\alpha}{2} \right). \quad (55)$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} L(p) &= \text{ch } \frac{\alpha}{2} - i\gamma_1 \gamma_4 \text{sh } \frac{\alpha}{2}, \\ L^{-1}(p) &= \text{ch } \frac{\alpha}{2} + i\gamma_1 \gamma_4 \text{sh } \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Нетрудно видеть, что

$$\text{ch } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}}, \quad \text{sh } \frac{\alpha}{2} = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}. \quad (57)$$

Из (56) и (57) находим, что матрицы $L(p)$ и $L^{-1}(p)$ равны

$$\left. \begin{aligned} L(p) &= \sqrt{\frac{p_0+m}{2m}} \left(1 - i\gamma_1 \gamma_4 \frac{|p|}{p_0+m} \right), \\ L^{-1}(p) &= \sqrt{\frac{p_0+m}{2m}} \left(1 + i\gamma_1 \gamma_4 \frac{|p|}{p_0+m} \right). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Так как первая ось направлена по p , то

$$\gamma_1 |p| = \gamma p.$$

Окончательно матрицу $L(p)$ запишем следующим образом:

$$L(p) = \left(\frac{p_0+m}{2m} \right)^{1/2} \left(1 - i \frac{\gamma p}{p_0+m} \gamma_4 \right). \quad (59)$$

Из (50), (51) и (59) в представлении Дирака — Паули получаем

$$u(p) = L(p) u(im) = \left(\frac{p_0+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\sigma p}{p_0+m} \varphi \end{pmatrix}, \quad (60)$$

что совпадает с (38). Из этого рассмотрения очевиден физический смысл спинора φ . Спинор φ описывает спиновое состояние частицы в системе покоя, оси которой совпадают с осями системы, где импульс частицы равен p .

Состояние с определенной спиральностью задается уравнением (30). Спинор $\varphi^{(r)}$, удовлетворяющий этому уравнению, описывает в системе покоя состояние с равной r проекцией спина на направление импульса (в системе покоя — направление, противоположное скорости системы, в которой импульс частицы равен p). Ясно, что спиновое состояние частицы может быть задано, если потребовать, чтобы спинор φ был собственной функцией оператора проекции спина на любое фиксированное направление в системе покоя.

Пусть спинор φ^s удовлетворяет уравнению

$$\sigma n^0 \varphi^s = s \varphi^s, \quad (61)$$

где n^0 — единичный вектор в системе покоя. Очевидно, что $s = \pm 1$. Из (61) эрмитовым сопряжением получаем

$$\varphi^{s+} \sigma n^0 = \varphi^{s+} s. \quad (62)$$

Умножая (61) слева на $\varphi^{s+} \sigma$, а (62) справа на $\sigma_i \varphi^s$, складывая полученные равенства и используя перестановочные соотношения для матриц σ_i , получаем

$$\varphi^{s+} \sigma \varphi^s = s n^0. \quad (63)$$

Таким образом $s n^0$ — среднее значение оператора σ в состоянии φ^s . Уравнение (61) можно записать следующим образом:

$$\Sigma n^0 u^s(im) = s u^s(im). \quad (64)$$

Нетрудно видеть, что

$$\Sigma = i\gamma_5 \gamma \gamma_4. \quad (65)$$

Из (64) и (65), учитывая, что $\gamma_4 u^s(im) = u^s(im)$, получаем

$$i\gamma_5 \gamma n^0 u^s(im) = su^s(im). \quad (66)$$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$i\gamma_5 \gamma n^0 u^s(im) = su^s(im), \quad (67)$$

где

$$n^0 = (n^0, 0). \quad (68)$$

Умножим (67) на матрицу $L(p)$. Используя (51), получаем

$$L(p) i\gamma_5 \gamma_\nu L^{-1}(p) n_\nu^0 u^s(p) = su^s(p). \quad (69)$$

С помощью (52) и (53) находим (для рассматриваемого нами преобразования $\det a = 1$)

$$L(p) \gamma_5 \gamma_\nu L^{-1}(p) = a_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\mu. \quad (70)$$

Из (69) и (70) получаем

$$i\gamma_5 \gamma n u^s(p) = su^s(p), \quad (71)$$

где

$$n_\mu = a_{\mu\nu} n_\nu^0. \quad (72)$$

Величины n_μ , равные в системе покоя n_μ^0 , образуют 4-вектор. Очевидно, что n_μ — пространственноподобный 4-вектор (в системе покоя его четвертая компонента равна нулю). Так как $(n^0)^2 = 1$, то ясно, что $n^2 = 1$. Далее

$$np = n_4^0 im = 0. \quad (73)$$

Итак, спинор $u^s(p)$, являющийся собственной функцией оператора \hat{p} , отвечающей собственному значению im , является также собственной функцией оператора $i\gamma_5 \hat{n}$, отвечающей собственному значению s ($s = \pm 1$). Нетрудно проверить, что операторы \hat{p} и $\gamma_5 \hat{n}$ коммутируют. Действительно,

$$\hat{p} \gamma_5 \hat{n} - \gamma_5 \hat{n} \hat{p} = -\gamma_5 (\hat{p} \hat{n} + \hat{n} \hat{p}) = -2\gamma_5 pn = 0.$$

Из (71) путем эрмитова сопряжения и умножения справа на γ_4 получаем

$$\bar{u}^s(p) i\gamma_5 \hat{n} = s \bar{u}^s(p). \quad (74)$$

Умножим (74) справа на $i\gamma_5 \gamma_\mu u^s(p)$, а (71) слева на $\bar{u}^s(p) i\gamma_5 \gamma_\mu$. Складывая полученные соотношения, получаем

$$\bar{u}^s(p) (\hat{n} \gamma_\mu + \gamma_\mu \hat{n}) u^s(p) = 2s \bar{u}^s(p) i\gamma_5 \gamma_\mu u^s(p).$$

Отсюда, используя перестановочные соотношения для матриц γ и условия нормировки (37), находим

$$\bar{u}^s(p) i\gamma_5 \gamma_\mu u^s(p) = sn_\mu. \quad (75)$$

Таким образом, среднее значение оператора $i\gamma_5 \gamma_\mu$ в состоянии, описываемом спинором $u^s(p)$, равно sn_μ .

До сих пор мы предполагали, что спиновое состояние описывается волновой функцией. В общем случае, однако, спиновое состояние частиц описывается матрицей плотности. Ковариантная матрица плотности для релятивистской частицы со спином 1/2 дается следующим выражением:

$$\rho_{\sigma\sigma'}(p) = \sum_s u_\sigma^s(p) \bar{u}_{\sigma'}^s(p) \alpha_s. \quad (76)$$

Здесь $u^s(p)$ — нормированные собственные функции оператора $i\gamma_5 \hat{n}$ ($np = 0$, $n^2 = 1$); α_s — вещественные положительные величины (α_s представляет собой вес, с которым функция $u^s(p)$ входит в смешанное состояние, описываемое матрицей плотности (76)). Среднее значение оператора O равно

$$\langle O \rangle = \frac{\sum_{s, \sigma', \sigma} \bar{u}_{\sigma'}^s(p) O_{\sigma'\sigma} u_\sigma^s(p) \alpha_s}{\sum_s \alpha_s} = \frac{\text{Sp}[Op(p)]}{\text{Sp}[\rho(p)]}. \quad (77)$$

Выясним, каким условиям удовлетворяет матрица плотности $\rho(p)$. Если состояние описывается волновой функцией (чистое состояние), матрица плотности равна

$$\rho_{\sigma\sigma'}^0(p) = u_\sigma(p) \bar{u}_{\sigma'}(p). \quad (78)$$

Такая матрица плотности удовлетворяет условию

$$\text{Sp}[\rho^0(p)]^2 = \sum_{\sigma, \sigma'} u_\sigma(p) \bar{u}_{\sigma'}(p) u_{\sigma'}(p) \bar{u}_\sigma(p) = \{\text{Sp}[\rho^0(p)]\}^2. \quad (79)$$

В общем случае из (76) получаем

$$\text{Sp}[\rho(p)]^2 = \sum_{s, s', \sigma, \sigma'} u_\sigma^s(p) \bar{u}_{\sigma'}^s(p) u_{\sigma'}^{s'}(p) \bar{u}_\sigma^{s'}(p) \alpha_s \alpha_{s'} = \sum_s \alpha_s^2. \quad (80)$$

Так как $\alpha_s \geq 0$, то очевидно, что

$$\sum_s \alpha_s^2 \leq \left(\sum_s \alpha_s \right)^2. \quad (81)$$

Учитывая, что $\text{Sp} \rho = \sum_s \alpha_s$, из (80) и (81) заключаем, что в общем случае матрица плотности $\rho(p)$ удовлетворяет условию

$$\text{Sp}[\rho(p)]^2 \leq \{\text{Sp}[\rho(p)]\}^2. \quad (82)$$

Можно показать, что в случае, когда $\text{Sp} \rho^2 = (\text{Sp} \rho)^2$, матрица плотности имеет вид (78), т. е. спиновое состояние описывается одной волновой функцией.

Далее, из вещественности коэффициентов α_s следует, что

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(p) &= \rho(p), \\ \bar{\rho}(p) &= \gamma_4 \rho^+(p) \gamma_4. \end{aligned} \quad (83)$$

где

Введем операторы

$$\Lambda(p) = \frac{\hat{p} + im}{2im}, \quad (84)$$

$$\Lambda(-p) = \frac{-\hat{p} + im}{2im}. \quad (85)$$

Используя уравнения (43) и (46), получаем

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(p) u(p) &= u(p), \\ \bar{u}(p) \Lambda(p) &= \bar{u}(p), \\ \Lambda(p) u(-p) &= 0, \\ \bar{u}(-p) \Lambda(p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(-p) u(-p) &= u(-p), \\ \bar{u}(-p) \Lambda(-p) &= \bar{u}(-p), \\ \Lambda(-p) u(p) &= 0, \\ \bar{u}(p) \Lambda(-p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Из (86) и (87) следует, что $\Lambda(p)$ и $\Lambda(-p)$ — проецирующие операторы. Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(p) + \Lambda(-p) &= 1, \\ \Lambda(p) \Lambda(-p) &= \Lambda(-p) \Lambda(p) = 0, \\ \Lambda(p) \Lambda(p) &= \Lambda(p), \\ \Lambda(-p) \Lambda(-p) &= \Lambda(-p). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Матрица плотности (76) описывает спиновое состояние частицы с положительной энергией p_0 и импульсом p . Из (76) и (87) очевидно, что матрица $\rho(p)$ удовлетворяет условиям

$$\Lambda(-p) \rho(p) = 0, \quad \rho(p) \Lambda(-p) = 0. \quad (89)$$

С помощью первого из соотношений (88) эти условия могут быть записаны также в виде

$$\Lambda(p) \rho(p) = \rho(p), \quad \rho(p) \Lambda(p) = \rho(p). \quad (90)$$

Отметим, наконец, что условие нормировки матрицы плотности имеет вид

$$\text{Sp} [\rho(p)] = 1. \quad (91)$$

Построим теперь общее выражение для нормированной матрицы плотности релятивистской частицы со спином 1/2. Матрица $\rho(p)$ всегда может быть разложена по шестнадцати матрицам Дирака.

Получаем

$$\rho(p) = a + b_\nu \gamma_\nu + c_{\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma} + id_\nu \gamma_5 \gamma_\nu + e\gamma_5$$

$$\left(\sigma_{\rho\sigma} = \frac{1}{2i} (\gamma_\rho \gamma_\sigma - \gamma_\sigma \gamma_\rho) \right). \quad (92)$$

Из условия нормировки (91) находим

$$\text{Sp } \rho = 1 = 4a, \quad a = \frac{1}{4}. \quad (93)$$

Умножая (92) на γ_μ и вычисляя следы от обеих частей полученного равенства, получаем

$$4b_\mu = \text{Sp} [\gamma_\mu \rho]. \quad (94)$$

Далее с помощью (90) находим

$$b_\mu = \frac{1}{4} \text{Sp} [\gamma_\mu \rho \Lambda(p)] = \frac{1}{4} \text{Sp} [\gamma_\mu \Lambda(p) \rho \Lambda(p)]. \quad (95)$$

Используя перестановочные соотношения для матриц γ_μ , легко видеть, что

$$\gamma_\mu \Lambda(p) = \Lambda(-p) \gamma_\mu + \frac{p_\mu}{im}. \quad (96)$$

Подставляя это соотношение в (95) и учитывая (88) и (91), находим

$$b_\mu = \frac{p_\mu}{4im}. \quad (97)$$

Умножим (92) на γ_5 . Вычисляя след, получаем

$$4e = \text{Sp} [\rho \gamma_5] = \text{Sp} [\Lambda(p) \rho \Lambda(p) \gamma_5] = \text{Sp} [\Lambda(p) \rho \gamma_5 \Lambda(-p)] = 0. \quad (98)$$

Определим величину

$$\xi_\mu = \text{Sp} (i\gamma_5 \gamma_\mu \rho). \quad (99)$$

Нетрудно видеть, что ξ_μ преобразуется как псевдовектор. Далее, учитывая, что

$$\hat{p} \Lambda(p) = im \Lambda(p),$$

получаем

$$\xi p = \text{Sp} [i\gamma_5 \hat{p} \Lambda(p) \rho] = -m \text{Sp} (\gamma_5 \rho) = 0. \quad (100)$$

Из (92) находим, что

$$d_\mu = \frac{1}{4} \xi_\mu. \quad (101)$$

Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\sigma_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5. \quad (102)$$

С помощью (102) запишем третий член разложения (92) в виде

$$c_{\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma} = c'_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5. \quad (103)$$

Очевидно, что

$$c'_{\mu\nu} = -c'_{\nu\mu}. \quad (104)$$

Чтобы найти $c'_{\mu\nu}$, умножим (92) на $\sigma_{\mu\nu} \gamma_5$. Вычисляя след от обеих частей полученного равенства и учитывая, что

$$\text{Sp}(\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \sigma_{\mu'\nu'} \gamma_5) = 4(\delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} - \delta_{\mu\nu'} \delta_{\nu\mu'}), \quad (105)$$

получаем

$$c'_{\mu\nu} = \frac{1}{8} \text{Sp}(\rho \sigma_{\mu\nu} \gamma_5). \quad (106)$$

Далее

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\rho \sigma_{\mu\nu} \gamma_5) &= \frac{1}{i} \text{Sp}[\rho(\gamma_\mu \gamma_\nu - \delta_{\mu\nu}) \gamma_5] = \\ &= \frac{1}{i} \text{Sp}[\Lambda(p) \rho \Lambda(p) \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5]. \end{aligned} \quad (107)$$

Нетрудно видеть, что

$$\Lambda(p) \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 = \frac{p_\mu}{im} \gamma_\nu \gamma_5 - \frac{p_\nu}{im} \gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \Lambda(-p). \quad (108)$$

Подставляя это соотношение в (107) и учитывая (88) и (99), получаем

$$c'_{\mu\nu} = \frac{1}{8im} (p_\mu \xi_\nu - p_\nu \xi_\mu). \quad (109)$$

Окончательно, подставляя (93), (97), (101), (103) и (109) в разложение (92), находим для матрицы плотности

$$\rho(p) = \frac{1}{4} + \frac{\hat{p}}{4im} + \frac{1}{4} i \gamma_5 \hat{\xi} + \frac{1}{4im} \hat{p} i \gamma_5 \hat{\xi} = \frac{\hat{p} + im}{2im} \frac{1}{2} (1 + i \gamma_5 \hat{\xi}). \quad (110)$$

Отметим, что это выражение может быть записано также следующим образом:

$$\rho(p) = \frac{1}{2} (1 + i \gamma_5 \hat{\xi}) \cdot \frac{\hat{p} + im}{2im}$$

(операторы \hat{p} и $\gamma_5 \hat{\xi}$ коммутируют).

Вектор ξ_μ , удовлетворяющий условию $\xi p = 0$, характеризует спиновое состояние релятивистских частиц со спином 1/2. Он назы-

вается 4-вектором поляризации. Из (83) следует, что пространственные компоненты вектора поляризации вещественны, а четвертая компонента мнима. Запишем 4-вектор ξ_μ в виде

$$\xi_\mu = P n_\mu, \quad (111)$$

где n_μ — единичный пространственноподобный вектор. Очевидно, что

$$P^2 = \xi^2. \quad (112)$$

Инвариант $\sqrt{P^2}$ называется поляризацией. Из (82) и (110) получаем

$$\text{Sp} \rho^2 = \frac{1}{2} (1 + \xi^2) \leq 1,$$

откуда

$$P^2 \leq 1. \quad (113)$$

С помощью (75), (76) и (99) находим, что 4-вектор поляризации равен

$$\xi_\mu = \sum_s \bar{u}^s(p) i \gamma_5 \gamma_\mu u^s(p) \alpha_s = n_\mu \sum_s \alpha_s.$$

Сравнивая это выражение с (111), заключаем, что

$$P = \sum_s s \alpha_s.$$

Из этого соотношения и условия нормировки (91) находим

$$\alpha_1 = \frac{1+P}{2}, \quad \alpha_{-1} = \frac{1-P}{2}.$$

Если $P=1$, то $\alpha_{-1}=0$, $\alpha_1=1$ и состояние описывается спинором $u^1(p)$. При $P=-1$ состояние описывается спинором $u^{-1}(p)$. В случае неполяризованного состояния ($P=0$) $\alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{1}{2}$.

Матрица плотности такого состояния равна

$$\rho_0(p) = \frac{1}{2} \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \frac{1}{2} \Lambda(p). \quad (114)$$

Из условия $\xi p = 0$ следует, что

$$\xi_4 = \frac{i \xi p}{p_0}. \quad (115)$$

Таким образом, матрица плотности релятивистской частицы со спином $1/2$ характеризуется вектором ξ .

В системе покоя $\xi_4^0 = 0$ и $(\xi^0)^2 = P^2$. Вектор поляризации в системе, в которой импульс частицы равен \mathbf{p} , связан с вектором поляризации в системе покоя преобразованием Лоренца

$$\xi_1 = \frac{\xi_1^0 p_0}{m}, \quad \xi_2 = \xi_2^0, \quad \xi_3 = \xi_3^0 \quad (116a)$$

(первая ось направлена по импульсу). Это преобразование может быть записано также в виде

$$\xi = \xi^0 + (\xi^0 \mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}}{m(p_0 + m)}. \quad (1166)$$

Обсудим теперь случай античастиц со спином 1/2. Рассмотрим в качестве примера процесс с частицей и античастицей в начальном состоянии. Обозначим p' и p 4-импульсы частицы и античастицы. В соответствии с общим правилом, подробно обсуждавшимся в §11, матричный элемент процесса может быть записан в виде

$$M_{fi} = \bar{u}^s(-p) \mathfrak{M} u^{s'}(p'). \quad (117)$$

Квадрат матричного элемента, усредненный по спиновым состояниям начальных частиц, равен

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'} |M_{fi}|^2 &= \sum_{s,s'} |\bar{u}^s(-p) \mathfrak{M} u^{s'}(p')|^2 \alpha_s \beta_s = \\ &= \text{Sp} [\mathfrak{M} \rho(p') \bar{\mathfrak{M}} \rho(-p)]. \end{aligned} \quad (118)$$

Здесь

$$\rho_{\sigma\sigma'}(-p) = \sum_s u_{\sigma}^s(-p) \bar{u}_{\sigma'}^s(-p) \beta_s, \quad (119)$$

а $\rho(p')$ — матрица плотности частицы с импульсом p' . Матрица $\rho(-p)$ характеризует спиновое состояние начальной античастицы с импульсом p (β_s — вероятность того, что начальная античастица находится в состоянии, описываемом спинором $u^s(-p)$). Условие нормировки имеет вид

$$\sum_s \beta_s = 1. \quad (120)$$

Учитывая, что $\bar{u}^s(-p) u^s(-p) = -1$, получаем из (119) и (120) условие нормировки для матрицы $\rho(-p)$

$$\text{Sp} \rho(-p) = -1. \quad (121)$$

С помощью (119) аналогично (90) получаем, что матрица $\rho(-p)$ подчиняется следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(-p) \rho(-p) &= \rho(-p), \\ \rho(-p) \Lambda(-p) &= \rho(-p). \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Чтобы найти общее выражение для матрицы $\rho(-p)$, разложим ее по 16 базисным матрицам. Получаем

$$\rho(-p) = A + B_{\mu} \gamma_{\mu} + C_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 + D_{\mu} i \gamma_5 \gamma_{\mu} + E \gamma_5. \quad (123)$$

Из (121) находим

$$A = -\frac{1}{4}. \quad (124)$$

Далее аналогично (97) и (98) получаем

$$\left. \begin{aligned} B_{\mu} &= \frac{1}{4} \text{Sp} [\rho(-p) \gamma_{\mu}] = -\frac{p_{\mu}}{4im} \text{Sp} [\rho(-p)] = \frac{p_{\mu}}{4im}, \\ E &= \frac{1}{4} \text{Sp} [\rho(-p) \gamma_5] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Вектор поляризации античастиц (среднее значение оператора $i\gamma_5 \gamma_{\mu}$) дается следующим выражением:

$$\xi_{\mu} = \frac{\text{Sp} [i\gamma_5 \gamma_{\mu} \rho(-p)]}{\text{Sp} [\rho(-p)]} = -4D_{\mu}. \quad (126)$$

Аналогично (109) получаем

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{8im} (p_{\mu} \xi_{\nu} - \xi_{\mu} p_{\nu}). \quad (127)$$

Окончательно из (123)–(127) находим

$$\rho(-p) = -\Lambda(-p) \frac{1 + i\gamma_5 \hat{\xi}}{2}. \quad (128)$$

Для неполяризованных античастиц

$$\rho_0(-p) = \frac{1}{2} \sum_s u^s(-p) \bar{u}^s(-p) = -\frac{1}{2} \Lambda(-p). \quad (129)$$

В заключение получим выражение для матрицы плотности нейтрино. Обозначим спиноры, описывающие нейтрино с определенной спиральностью, следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_+^r(p) &= u^r(p), \\ u_-^r(-p) &= u^r(-p). \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Будем нормировать спиноры $u^r(p)$ и $u^r(-p)$ условиями (для $m=0$ $\bar{u}(p)u(p)=0$)

$$\left. \begin{aligned} (u^{r'}(p))^+ u^r(p) &= \delta_{rr'}, \\ (u^{r'}(-p))^+ u^r(-p) &= \delta_{r'r}. \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

Отметим, что при такой нормировке оператор нейтринного поля равен

$$\begin{aligned} \psi_{\nu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int u^r(p) c_r(p) e^{ipx} dp + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int u^r(-p) d_r^+(p) e^{-ipx} dp. \end{aligned} \quad (132)$$

В соответствии с современной $V-A$ -теорией слабых взаимодействий спиноры, описывающие нейтрино, входят в матричные элементы процессов в виде $(1 + \gamma_5) u^r(p)$ (поглощение нейтрино) либо

$((1 + \gamma_5) u^\sigma(p))^+$ (испускание нейтрино). Так как $\gamma_5 u^{(-1)}(p) = -u^{(-1)}(p)$ [см. (33)], это означает, что нейтрино может находиться только в состоянии со спиральностью, равной -1 . Аналогичным образом легко видеть, что спиральность антинейтрино равна $+1$.

Матрица плотности нейтрино дается, следовательно, выражением

$$\rho_{\sigma\sigma'}(p) = u_{\sigma}^{(-1)}(p) \bar{u}_{\sigma'}^{(-1)}(p). \quad (133)$$

Разложим эту матрицу по полной системе. Получаем

$$\rho(p) = a + b_{\mu} \gamma_{\mu} + c_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + i d_{\mu} \gamma_5 \gamma_{\mu} + e \gamma_5. \quad (134)$$

Коэффициент a равен

$$a = \frac{1}{4} \text{Sp } \rho = \frac{1}{4} \bar{u}^{(-1)}(p) u^{(-1)}(p) = 0. \quad (135)$$

Для b_{μ} находим

$$b_{\mu} = \frac{1}{4} \text{Sp } \rho(p) \gamma_{\mu} = \frac{1}{4} \bar{u}^{(-1)}(p) \gamma_{\mu} u^{(-1)}(p). \quad (136)$$

Этот матричный элемент нетрудно вычислить. Спиноры $u(p)$ и $u^+(p)$ удовлетворяют уравнениям

$$\alpha p u(p) = p_0 u(p), \quad u^+(p) \alpha p = u^+(p) p_0. \quad (137)$$

Умножая первое уравнение слева на $u^+(p) \alpha_i$, а второе справа — на $\alpha_i u(p)$ и складывая полученные соотношения, находим

$$u^+(p) u(p) p_i = i p_0 \bar{u}(p) \gamma_i u(p). \quad (138)$$

Отсюда получаем

$$i \bar{u}(p) \gamma_{\mu} u(p) = \frac{p_{\mu}}{p_0} u^+(p) u(p). \quad (139)$$

При выбранной нами нормировке [см. (131)] коэффициент b_{μ} , следовательно, равен

$$b_{\mu} = \frac{1}{4i p_0} p_{\mu}. \quad (140)$$

Далее для d_{μ} получаем

$$d_{\mu} = \frac{1}{4} \text{Sp } [\rho(p) i \gamma_5 \gamma_{\mu}] = \frac{1}{4} \bar{u}^{(-1)}(p) i \gamma_5 \gamma_{\mu} u^{(-1)}(p). \quad (141)$$

Учитывая, что $\gamma_5 u^{(-1)}(p) = u^{(-1)}(p)$, с помощью (139) находим

$$d_{\mu} = -\frac{1}{4 p_0} p_{\mu}. \quad (142)$$

Легко видеть, что коэффициенты $c_{\mu\nu}$ и e равны нулю. Действительно,

$$e = \frac{1}{4} \text{Sp } (\rho \gamma_5) = \frac{1}{4} \bar{u}^{(-1)}(p) \gamma_5 u^{(-1)}(p) = \frac{1}{4} \bar{u}^{(-1)}(p) u^{(-1)}(p) = 0,$$

$$\begin{aligned}
c_{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Sp} (\rho \sigma_{\mu\nu}) = \frac{1}{8} \bar{u}^{(-1)}(p) \sigma_{\mu\nu} u^{(-1)}(p) = \\
&= -\frac{1}{8} \bar{u}^{(-1)}(p) \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 u^{(-1)}(p) = -\frac{1}{8} \bar{u}^{(-1)}(p) \sigma_{\mu\nu} u^{(-1)}(p) = 0.
\end{aligned} \tag{143}$$

Окончательно для матрицы плотности нейтрино получаем

$$\rho(p) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \frac{\hat{p}}{2ip_0}. \tag{144}$$

Матрица плотности антинейтрино определяется следующим образом:

$$\rho_{\sigma\sigma'}(-p) = u_{\sigma}^{(1)}(-p) \bar{u}_{\sigma'}^{(1)}(-p), \tag{145}$$

где

$$\sum (-\mathbf{n}) u^{(1)}(-p) = u^{(1)}(-p). \tag{146}$$

С помощью (29) легко показать, что

$$\gamma_5 u^{(1)}(-p) = u^{(1)}(-p). \tag{147}$$

Используя это соотношение, из (145) находим

$$\rho(-p) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \frac{\hat{p}}{2ip_0}. \tag{148}$$

Квантовая теория поля

1. А х и е з е р А. И., Б е р е с т е ц к и й В. Б. Квантовая электродинамика М., «Наука», 1969.
2. Б е р е с т е ц к и й В. Б., Л и ф ш и ц Е. М., П и т а е в с к и й Л. П. Релятивистская квантовая теория. Часть I. М., «Наука», 1968.
3. Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
4. Б о г о л ю б о в Н. Н., М е д в е д е в Б. В., П о л и в а н о в М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
5. Г а й т л е р В. Квантовая теория излучения. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
6. П а у л и В. Релятивистская теория элементарных частиц. Перев. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1947.
7. С о к о л о в А. А. Введение в квантовую электродинамику. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1958.
8. Т и р р и н г В. Принципы квантовой электродинамики. Перев. с нем. М., «Высшая школа», 1964.
9. Ф е й н м а н Р. Квантовая электродинамика. Перев. с англ. М., «Мир», 1964.
10. Ш в е б е р С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
11. У м э д з а в а Х. Квантовая теория поля. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
12. Х е н л и Э. М., Т и р р и н г В. Элементарная квантовая теория поля. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

Физика элементарных частиц

1. Г а з и о р о в и ч С. Физика элементарных частиц. Перев. с англ. М., «Наука», 1969.
2. Д р е л л С. Д., З а х а р и а з е н Ф. Электромагнитная структура нуклонов. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Л и Ц., В у Ц. Слабые взаимодействия. Перев. с англ. М., «Мир», 1968.
4. М э т ь ю с П. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Н и ш и д ж и м а К. Фундаментальные частицы. Перев. с англ. М., «Мир», 1965.
6. О к у н ь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. М., Физматгиз, 1963.
7. Ш и р к о в Д. В., С е р е б р я к о в В. В., М е щ е р я к о в В. А. Дисперсионная теория сильных взаимодействий при низких энергиях. М., «Наука», 1967.

8. Ч е л л е н Г. Физика элементарных частиц. Перев. с англ. М., «Наука», 1966.
9. Б а р т о н Г. Дисперсионные методы в теории поля. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1968.
10. И д е н Р. Соударения элементарных частиц при высоких энергиях. Перев. с англ. М., «Наука», 1970.
11. B j o r k e n J. D., D r e l l S. D. Relativistic Quantum Fields. N. Y., Mc-Graw-Hill, 1965.
12. M a r s h a k R. E., R i a z u d d i n, R y a n C. P. Theory of Weak Interactions in Particle Physics. J. Wiley, N. Y., 1969.
13. S a k u r a i J. J. Invariance Principles and Elementary Particles. Princeton, Univ. Press, 1964.
14. А д л е р С., Д а ш е н Р. Алгебра токов. Перев. с англ. М., «Мир», 1970.
15. Б е р н ш т е й н Дж. Элементарные частицы и их токи. Перев. с англ. М., «Мир», 1970.

1

1