

СЛАБЫЙ ХАОС И КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЕ СТРУКТУРЫ

Посвящена теории зарождения хаоса в гамильтоновских системах. Изложены основные вопросы теории стохастического слоя и стохастической паутины. Приведены многочисленные примеры из разных областей физики. Рассмотрены приложения методов теории слабого хаоса к проблеме структур сплошной среды (включая проблему орнаментов) и к проблеме ускорения частиц электромагнитными волнами.

Для физиков, математиков и лиц, интересующихся современной теорией хаоса.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ	7
Глава 1. Гамильтоновская динамика	7
1.1. Гамильтоновские системы	7
1.2. Фазовый портрет	10
1.3. Переменные действие-угол	12
1.4. Нелинейный маятник	14
1.5. Многомерное движение	16
1.6. Отображение Пуанкаре	20
Глава 2. Устойчивость и хаос	21
2.1. Нелинейный резонанс	22
2.2. Внутренний нелинейный резонанс	25
2.3. КАМ-теория	26
2.4. Локальная неустойчивость	28
2.5. Перемешивание	30
ЧАСТЬ II. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК И ХАОС	33
Глава 3. Стохастический слой	33
3.1. Стохастический слой нелинейного маятника. Сепаратрисное отображение	33
3.2. Стохастический слой нелинейного маятника. Ширина слоя	36
3.3. Слабое взаимодействие резонансов	39
3.4. Стандартное отображение	41
3.5. Стохастический слой нелинейного резонанса	44
3.6. Нетривиальные эффекты дискретизации	46
3.7. Хаотическое вращение спутников	47
Глава 4. Переход стохастический слой - стохастическое море	49
4.1. Граница глобального хаоса	52
4.2. Вариационный принцип Персиваля	54
4.3. Кантор-торы	57
4.4. Гамильтоновская перемежаемость	62
4.5. Ускорение релятивистских частиц	70
Глава 5. Стохастическая паутина	75
5.1. КАМ-торы и диффузия Арнольда	76

5.2. Слабый хаос и стохастическая паутина	79
5.3. Инвариантные торы внутри паутины (П-торы) и ширина паутины	83
5.4. Переход КАМ-торы - П-торы	88
Глава 6. Равномерная паутина	97
6.1. Отображение с подкручиванием	97
6.2. Периодическая паутина	100
6.3. Аперриодическая паутина и симметрия покрытия плоскости	111
6.4. Скелет паутины и толщина паутины	119
6.5. Структуры при диффузии частиц	127
6.6. Распад паутины для релятивистских частиц	131
ЧАСТЬ III. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ	135
Глава 7. Двумерные структуры с квазисимметрией	135
7.1. Какими могут быть структуры	136
7.2. Динамическая генерация структур	140
7.3. Квазисимметрия. Фурье-спектр и локальный изоморфизм	147
7.4. Особенности в зависимости фазового объема от энергии (особенности Ван Хофа)	158
7.5. Динамическая организация в фазовом пространстве	163
Глава 8. Двумерные гидродинамические структуры с симметрией и квазисимметрией	165
8.1. Двумерные стационарные вихревые течения идеальной жидкости	167
8.2. Устойчивость стационарных плоских течений с симметричной структурой	171
Глава 9. Хаос линий тока	182
9.1. Линии тока в пространстве	182
9.2. Линии тока АВС-течения	185
9.3. Трехмерные течения с симметрией и квазисимметрией	188
9.4. Стохастические слои и стохастические паутины в гидродинамике	195
9.5. Винтовые стационарные течения	199
9.6. Стохастичность линий тока при стационарной конвекции Рэлея-Бенара	200
ЧАСТЬ IV. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ	204
Глава 10. Структуры в искусстве и в природе	204
10.1. Двумерные покрытия в искусстве	204
10.2. Филотаксис	215
КОММЕНТАРИИ	222
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	229

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как возникает хаос в гамильтоновских системах? — это один из фундаментальных вопросов современной теории динамических систем. Хотя вопрос может показаться несколько специальным, однако ответ на него затрагивает многочисленные приложения практически во всех областях физики, включая квантовую теорию.

Хаос возникает вследствие специфической локальной неустойчивости относительно сколь угодно малых возмущений орбит системы. Он проявляется в определенных областях фазового пространства, а также в определенных областях значений параметров системы. Однако наиболее примечательным свойством хаоса является его неустранимость в типичных физических ситуациях. Имеется в виду следующее. При достаточно общих условиях всегда существуют области в фазовом пространстве и в пространстве значений параметров, в которых динамика системы стохастична. Эти области могут быть сколь угодно малы, однако они не устранимы при любых конечных значениях параметров и фиксированной конструкции динамической системы (т.е. виде ее гамильтониана). Ярким примером такой ситуации является диффузия Арнольда — универсальный неограниченный транспорт частиц по каналам стохастической паутины в системах с числом степеней свободы, большим двух.

Переход от систем, не содержащих вообще хаотической динамики, к системам с хаосом сопровождается появлением малых областей — зародышей хаоса. В гамильтоновских системах такими зародышами являются стохастические слои и стохастические паутины. Они реализуют слабый хаос в системах и одновременно производят некоторое разбиение фазового пространства. Вследствие этого топологические свойства фазового пространства оказываются тесно переплетенными с условиями и формой областей — зародышей хаоса.

Исследование стохастических слоев было начато двумя из авторов (Р.З. Сагдеевым и Г.М. Заславским) в 1966 г. в связи с проблемой разрушения магнитных поверхностей в тороидальных магнитных ловушках. Практически сразу выяснилось, что результат о существовании неустраиваемых стохастических слоев является универсальным. В дальнейшем стало ясно, что система стохастических слоев может объединяться в некоторую связную сеть, образуя стохастическую паутину. Пронизывая все фазовое пространство, стохастическая паутину играет определяющую роль в пробле-

ме глобальной устойчивости. Поэтому нет ничего удивительного в том, что круг приложений этих вопросов оказался очень широким. Одним из не совсем обычных приложений явились задачи, связанные с существованием жидких (гидродинамических) паутин, и задачи, связанные с симметрией допустимых регулярных и почти регулярных структур конденсированных сред.

Все эти вопросы могут представлять интерес для самых широких кругов исследователей. Авторами предпринята попытка последовательно изложения теории образования стохастических слоев и паутин (теория слабого хаоса) и ее многочисленных приложений. В книге подробно описываются сравнительно несложные технические детали. Тем самым читатель получает возможность овладеть необходимыми методами вычислений и применить их в других задачах. Значительное количество иллюстраций, выполненных с помощью компьютеров, облегчает понимание материала.

Строение книги следующее. Она имеет четыре части. Часть I (гл. 1 и 2) содержит некоторые необходимые сведения по гамильтоновской динамике и теории хаоса (более подробная информация может быть получена из книги Г.М. Заславского и Р.З. Сагдеева "Введение в нелинейную физику". — М.: Наука, 1988).

Часть II называется "Динамический порядок и хаос". В ней рассматриваются теории стохастических слоев и паутин и их приложения.

Часть III — "Пространственные структуры". Различные структурные свойства паутин оказались связанными со структурами конденсированных сред и, в частности, их симметричными свойствами. В этой части описаны динамические генераторы структур, гидродинамические структуры и жидкие паутины.

Наконец, часть IV — "Некоторые приложения" — посвящена структурам из области искусства и в живой природе (филотаксис).

Вообще говоря, не предполагается, что читатель должен быть специально подготовлен. Поэтому книга вполне доступна даже студентам старших курсов и аспирантам-физикам, математикам и инженерам. Вместе с тем авторы надеются, что и те, кто посвятил себя исследованию явления хаоса или просто проявляет интерес к этой области познания, найдут в книге достаточно много интересного, не совсем обычного материала для теории хаоса: связь этой теории с теорией квазикристаллов, с теорией покрытий плоскости, с хаотическими вращениями спутника, с ошибками вычислительных схем и т.п.

Авторы благодарят своих коллег М.Ю. Захарова, А.И. Нейштадта, М.Я. Натензона, Б.А. Петровичева, вместе с которыми была получена часть результатов, вошедших в книгу.

Уравнения движения в классической физике существенно различаются в зависимости от того, какой они описывают объект: частицу, электромагнитное поле или жидкость. Однако уже давно естественное стремление добиться унификации в описании различных явлений привело к появлению универсальных формализмов. Среди них лагранжевский и гамильтоновский формализм продвинуты в наибольшей степени. Причины этого, конечно, глубоко связаны с природой описываемых явлений. Поэтому в различные периоды развития физики тот или иной метод исследования приобретает определенный коэффициент популярности. В период развития релятивистски-инвариантных теорий за лагранжевским формализмом сохранялось весьма заметное преимущество, которое особенно сильно было заметно в теории поля и в теории сплошных сред. Отчасти это было связано с тем, что понадобилось обобщение понятий гамильтоновского формализма, скобок Пуассона и т.д. для того, чтобы возможности обоих методов анализа (гамильтоновского и лагранжевского) могли сравняться.

Новые идеи и новые возможности, которые появились в последнее время в связи с открытием явления динамической стохастичности (или просто — хаоса), выделили методы гамильтоновской динамики. Теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема и об интегрируемости систем с полным набором интегралов движения определили и постановку многих задач динамики, и методов их исследования. Особенно значительной оказалась роль гамильтоновского метода в теории устойчивости, развивавшегося в этом направлении Пуанкаре. Многочисленные дальнейшие исследования показали, что гамильтоновские системы (т.е. такие системы, которые могут быть описаны гамильтоновскими уравнениями движения) имеют принципиальные физические отличия от других, негамильтоновских, систем. Этим и определяется содержание главы, в которой будут приведены некоторые необходимые сведения для гамильтоновских систем (ком. 1.1).

§ 1.1. Гамильтоновские системы

Если система гамильтоновская, то ее состояние описывается N обобщенными импульсами $p \equiv (p_1, \dots, p_N)$ и тем же числом обобщенных координат $q \equiv (q_1, \dots, q_N)$. Число N определяет число степеней свободы

системы. Эволюция p и q со временем определяется уравнениями движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (1.1)$$

которые имеют смысл лишь вместе с гамильтонианом

$$H = H(p, q; t); \quad (1.2)$$

точка означает дифференцирование по времени t . Функция Гамильтона, или гамильтониан, задана в $2N$ -мерном фазовом пространстве (p, q) и может явно зависеть также от времени. Пары переменных (p_i, q_i) называются канонически сопряженными парами, а уравнения (1.1) — каноническими уравнениями.

Время t может быть включено в число координатных переменных систем. Для этого фазовое пространство системы расширяется путем введения еще одной пары канонических переменных

$$p_0 = -H, \quad q_0 = t. \quad (1.3)$$

Теперь гамильтониан

$$\mathcal{H} = H(p, q, q_0) + p_0 \quad (1.4)$$

определяет уравнения движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (i = 0, 1, \dots, N). \quad (1.5)$$

Для $i = 1, \dots, N$ система (1.5) приводит к тем же уравнениям (1.1). При $i = 0$ имеем согласно (1.3) и (1.4)

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial H(p, q, q_0)}{\partial q_0} = -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial t}, \quad \dot{q}_0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_0} = 1. \quad (1.6)$$

Первое уравнение в (1.6) выражает хорошо известное равенство

$$\frac{dH(p, q, t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.7)$$

которое легко проверяется с помощью уравнений движения (1.1). Второе уравнение в (1.6) отражает определение времени как координаты.

Таким образом, вместо N -мерной системы с гамильтонианом, зависящим от времени, можно рассматривать $(N + 1)$ -мерную систему с гамильтонианом \mathcal{H} , не зависящим от времени. Однако из определений (1.3) и (1.4) видно, что $\mathcal{H} \equiv 0$. Новый импульс $p_0 = -H$ не содержит никакой дополнительной информации. Все свойства динамической системы могут быть описаны в $(2N + 1)$ -мерном фазовом пространстве $(p_1, \dots, p_N; q_1, \dots, q_N; q_0 = t)$. Поэтому иногда говорят, что система с гамильтонианом $H(p, q, t)$ имеет $N + \frac{1}{2}$ степени свободы.

В фазовом пространстве (p, q) можно ввести элемент фазового объема

$$d\Gamma = dp_1 \dots dp_N dq_1 \dots dq_N \equiv dp dq$$

и фазовый объем

$$\Gamma = \int_S d\Gamma,$$

ограниченный некоторой гиперповерхностью S . Вообще говоря, фазовый объем динамической системы является функцией времени. Однако для гамильтоновских систем фазовый объем сохраняется:

$$\Gamma_{t_1} = \Gamma_{t_2}, \quad (1.8)$$

для произвольных моментов времени t_1 и t_2 (теорема Лиувилля). Это означает, в частности, что фазовая жидкость является несжимаемой. Свойство сохранения фазового объема имеет важные следствия. Одно из них состоит в том, что среди множества всех возможных траекторий не существует таких, которые имеют асимптотически устойчивые положения равновесия (точки или множества точек, к которым асимптотически притягивается траектория). Иначе говоря, теорема Лиувилля исключает существование аттракторов. Аналогичное утверждение можно сделать и об отсутствии репеллеров — отталкивающих точек или множества точек.

Фазовый объем может сохраняться не только для гамильтоновских систем. Развитие современного нелинейного анализа привело к обобщению понятия гамильтоновских систем (см. [4]). Пусть z_i — некоторая координата в фазовом пространстве размерности $2N$, причем переменные z_i еще не разделены на обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Сначала вводится понятие обобщенных скобок Пуассона. Если $A(z)$ и $B(z)$ — две произвольные функции, то их скобки Пуассона определяются формулой

$$[A, B] = \sum_{i, k=1}^{2N} g_{ik} \frac{\partial A}{\partial z_i} \frac{\partial B}{\partial z_k}, \quad (1.9)$$

где тензор $g_{ik} = g_{ik}(z)$, вообще говоря, зависит от переменных. Одновременно предполагается выполнение следующих условий:

а) условия билинейности

$$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C], \quad (1.10)$$

где a и b — константы;

б) условия кососимметричности

$$[A, B] = -[B, A] \quad (1.11)$$

(это условие, в частности, не может быть выполнено, если размерность фазового пространства нечетная);

в) тождества Лейбница

$$[AB, C] = B[A, C] + A[B, C]; \quad (1.12)$$

г) тождества Якоби

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0. \quad (1.13)$$

С помощью скобок Пуассона (1.9) можно записать определение тензора g_{ik} в виде

$$g_{ik} = [z_i, z_k], \quad (1.14)$$

а само определение скобок (1.9) представить как

$$[A, B] = \sum_{i, k=1}^{2N} \frac{\partial A}{\partial z_i} \frac{\partial B}{\partial z_k} [z_i, z_k]. \quad (1.15)$$

Пусть $H = H(z)$ — произвольная функция, называемая гамильтонианом. Обобщенной гамильтоновской системой называется система, описываемая следующими уравнениями движения:

$$\dot{z}_i = [z_i, H] \quad (i=1, \dots, 2N). \quad (1.16)$$

Изменение во времени любой функции $A(z)$ определяется с помощью уравнений (1.14)–(1.16):

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial A}{\partial z_i} \dot{z}_i = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial A}{\partial z_i} [z_i, H] = [A, H]. \quad (1.17)$$

Если, в частности, g_{ik} есть единичная кососимметричная матрица

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то уравнения (1.16) эквивалентны (1.1) при $N = 1$ и $z_1 = q, z_2 = p$. Для произвольного N уравнения (1.1) следуют из (1.16), если положить

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ -\hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

где $\hat{1}$ — единичная матрица порядка N , и

$$(z_1, \dots, z_N) = (q_1, \dots, q_N), \quad (z_{N+1}, \dots, z_{2N}) = (p_1, \dots, p_N).$$

Приведенная обобщенная форма гамильтоновской динамики далее окажется полезной при анализе уравнений движения векторных полей.

В частном случае (1.18), когда имеют место гамильтоновские уравнения (1.1), скобки Пуассона (1.9) могут быть представлены в виде

$$[A, B] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right), \quad (1.19)$$

а дифференцирование по времени (1.16) выражается как

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right). \quad (1.20)$$

Уравнения движения в форме (1.1) или (1.16) (или эквивалентные им определения скобок Пуассона) составляют основу канонического, или гамильтоновского, формализма.

§ 1.2. Фазовый портрет

Семейства траекторий системы в фазовом пространстве образуют ее фазовый портрет. Наиболее простой вид фазового портрета получается при $N = 1$. Фазовым пространством является плоскость (p, q) . Например, одномерное движение может быть определено гамильтонианом

$$H = p^2/2m + V(q), \quad (1.21)$$

где $V(q)$ — потенциальная энергия (потенциал) частицы. Согласно (1.7), если гамильтониан не зависит явно от времени, то $H = 0$ и, следовательно,

H есть интеграл движения (инвариант):

$$H = \text{const} = E, \quad (1.22)$$

где E — некоторое фиксированное значение инварианта. В случае (1.21) величина E имеет смысл полной энергии системы. В примере (1.21) движение происходит по поверхности постоянной энергии и

$$p = \pm \sqrt{2m(E - V(q))} = m\dot{q}. \quad (1.23)$$

Уравнение (1.23) определяет однопараметрическое семейство траекторий. Они и образуют фазовый портрет системы (рис. 1.1).

Если траектория системы локализована в конечной области фазового пространства, то соответствующее движение называется финитным. В противном случае оно называется инфинитным.

Особые точки в фазовом пространстве определяются как неподвижные точки уравнений движения (1.1), т.е. из уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0. \quad (1.24)$$

В случае (1.21) это точки, где $p = 0$ и потенциал $V(q)$ имеет экстремум: $V'(q) = 0$.

Рис. 1.1. Потенциал $V(q)$ (а) и соответствующий фазовый портрет (б) одномерного движения. Траектории C_1 и C_2 — сепаратрисы

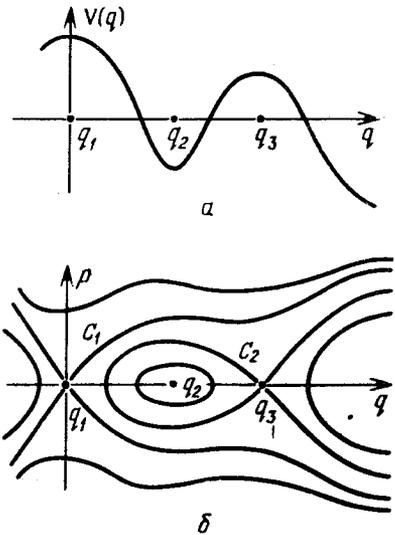
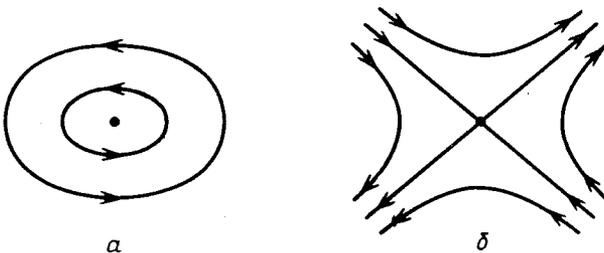


Рис. 1.2. Траектории в окрестности эллиптической (а) и гиперболической (б) точек



Из рис. 1.1 видно, что такими точками могут быть либо точки эллиптического типа q_2 , либо точки гиперболического типа q_1 и q_3 (седла). В окрестности эллиптической точки движение устойчиво, а траектории имеют вид эллипсов (рис. 1.2а). В окрестности седла движение неустойчиво, а траектории имеют вид гипербол (рис. 1.2б). Траектория, проходящая через седло, называется сепаратрисой (траектории C_1 и C_2 на рис. 1.1). У седла всегда есть входящие и выходящие усы сепаратрис (1.2б).

Отсутствие предельных точек и предельных множеств (типа, например, предельного цикла) сильно обедняет фазовый портрет гамильтоновских систем. Тем не менее это не делает их более простыми системами. Существование диссипативных факторов и связанных с ними асимптотически предельных траекторий в некотором смысле огрубляет систему. Это может сделать ее менее чувствительной к различного рода слабым возмущениям (ком. 1.2). Ограничимся здесь лишь этим замечанием, так как фактически основное содержание книги связано с такими свойствами гамильтоновских систем, которые отсутствуют в диссипативном случае (ком. 1.3).

§ 1.3. Переменные действие – угол

Переменные действие – угол удобно ввести сначала для движения с одной степенью свободы (1.21). Если движение финитное и, следовательно, периодическое, то действие I определяется выражением

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (1.25)$$

в котором интеграл берется по замкнутой траектории системы. Если движение нефинитное, но периодическое, то вместо интегрирования по замкнутому контуру в (1.25) следует брать интеграл по периоду. Укороченным действием называется величина

$$S(q, I) = \int^q p(q, H) dq. \quad (1.26)$$

В ней, а также в (1.25) выражение для $p = p(q, H)$ задается формулой (1.23). Кроме того, в (1.26) следует сделать замену $H = H(I)$ с помощью формулы (1.25). Величина $S(q, I)$ является в данном случае также производящей функцией. С ее помощью определяется новая координатная переменная – угол:

$$\theta = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I}. \quad (1.27)$$

Переменные (I, θ) являются канонически сопряженной парой, т.е. для них справедливы гамильтоновские уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \frac{dH(I)}{dI} \equiv \omega(I). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Поскольку действие I выражается как функция интеграла движения H , то оно также является интегралом. Это и отражено в первом уравнении (1.28). Второе уравнение определяет частоту периодического движения $\omega(I)$. Она зависит, вообще говоря, от действия или от энергии системы $E = H$. Безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{I}{\omega} \frac{d\omega}{dI} \quad (1.29)$$

определяет степень этой зависимости. Если $\alpha \neq 0$, то колебания называются нелинейными. Их частота является функцией энергии.

Уравнения движения (1.28) можно сразу проинтегрировать:

$$I = \text{const}, \quad \theta = \omega(I)t + \theta_0. \quad (1.30)$$

Этим и определяется удобство переменных действие — угол (хотя это далеко не единственное их достоинство, как будет видно далее).

Для линейного осциллятора

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2 \quad (1.31)$$

(положено масса $m = 1$). С помощью определений (1.25)–(1.27) легко получить

$$q = (2I/\omega)^{1/2} \cos \theta, \quad p = (2I\omega)^{1/2} \sin \theta, \quad \theta = \omega_0 t. \quad (1.32)$$

Из (1.30) и (1.32) следует

$$H = \omega_0 I, \quad (1.33)$$

т.е. $\omega = \text{const} = \omega_0$ и $\alpha = 0$. Это и определяет линейность осциллятора (1.31).

С помощью определений для переменных I, θ можно выразить старые переменные p, q через новые переменные:

$$p = p(I, \theta), \quad q = q(I, \theta). \quad (1.34)$$

Переменная θ является циклической, т.е. сдвиг по θ на $2\pi n$ (n — целое число) не изменяет выражений (1.34). Поэтому они допускают разложение в ряд Фурье:

$$q = q(I, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(I) e^{in\theta},$$

$$p = p(I, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(I) e^{in\theta}, \quad (1.35)$$

где коэффициенты a_n, b_n равны

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} q(I, \theta),$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} p(I, \theta). \quad (1.36)$$

Фурье-гармоники (1.36) определяют спектральные свойства системы. Вещественность переменных (p, q) приводит к соотношениям для коэф-

коэффициентов разложения:

$$a_{-n} = a_n^*, \quad b_{-n} = b_n^*. \quad (1.37)$$

Из общих соображений можно установить важное асимптотическое свойство спектра системы, совершающей периодическое движение [6]:

$$a_n \sim \exp(-n/N_0), \quad b_n \sim \exp(-n/N_0), \quad (1.38)$$

где N_0 — некоторая константа. Она определяет эффективное число гармоник в спектре колебаний системы. При $n > N_0$ амплитуды фурье-гармоник экспоненциально малы. В частности, в линейном осцилляторе колебания (1.32) содержат только одну гармонику.

§ 1.4. Нелинейный маятник

Нелинейный маятник является одной из наиболее часто встречающихся физических моделей. Это связано с тем, что многие задачи, связанные с колебаниями, приводятся после иногда довольно сложных и длинных преобразований к уравнению нелинейного маятника. Его гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x, \quad (1.39)$$

где масса принята равной единице (т.е. $p = \dot{x}$), а ω_0 — частота малых колебаний. Уравнение движения маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0, \quad (1.40)$$

а фазовый портрет приведен на рис. 1.3. Особые точки: $(\dot{x} = 0, x = 2\pi n)$ — эллиптические точки, $(\dot{x} = 0, x = 2\pi(n+1))$ — седла; $n = 0, \pm 1, \dots$. Траекториям с $H < \omega_0^2$ соответствует колебание маятника (финитное движение), а траекториям с $H > \omega_0^2$ — вращение маятника (инфинитное движение). Траектории с $H = \omega_0^2$ — сепаратрисы. Решение на сепаратрисе находится из уравнения (1.39), в котором

$$\text{следует положить} \quad H = H_s = \omega_0^2. \quad (1.41)$$

Это дает уравнение

$$\dot{x} = \pm 2\omega_0 \cos(x/2). \quad (1.42)$$

Его решение имеет вид

$$x = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \omega_0 t} - \pi \quad (1.43)$$

при начальном условии $t = 0, x = 0$. Двум знакам соответствуют две сепаратрисы — входящая в седло и выходящая из него. Используя (1.42), можно получить из (1.43)

$$v = \dot{x} = \pm 2\omega_0 / \operatorname{ch}(\omega_0 t). \quad (1.44)$$

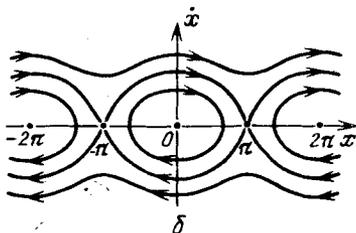
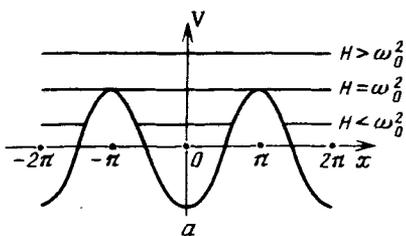


Рис. 1.3. Периодический потенциал маятника (а) и его фазовая плоскость (б)

Форма этого решения носит название солитона.

Приведем теперь решение уравнения (1.39) (ком 1.4). Введем параметр

$$\kappa^2 = (\omega_0^2 + H)/2\omega_0^2 = (H + H_s)/2H_s, \quad (1.45)$$

определяющий безразмерную энергию с измененной точкой отсчета. С помощью формулы (1.25) находится действие

$$I = I(H) = \frac{8}{\pi} \omega_0 \begin{cases} E(\pi/2; \kappa) - (1 - \kappa^2)F(\pi/2; \kappa), & \kappa < 1, \\ \kappa E(\pi/2; 1/\kappa), & \kappa \geq 1, \end{cases} \quad (1.46)$$

где $F(\pi/2; \kappa)$ и $E(\pi/2; \kappa)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода. Из определения (1.28) для частоты колебаний и из (1.46) следует

$$\begin{aligned} \omega(H) &= \frac{dH(I)}{dI} = \left[\frac{dI(H)}{dH} \right]^{-1} = \\ &= \frac{\pi}{2} \omega_0 \begin{cases} 1/F(\pi/2; \kappa), & \kappa < 1, \\ \kappa/F(\pi/2; 1/\kappa), & \kappa > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Решение уравнения движения (1.40) для скорости x имеет вид

$$\dot{x} = 2\kappa\omega_0 \begin{cases} \operatorname{cn}(t; \kappa), & \kappa \leq 1, \\ \operatorname{dn}(t; \kappa), & \kappa \geq 1, \end{cases} \quad (1.48)$$

где cn и dn — эллиптические функции Якоби. При $\kappa = 1$ выражения (1.48) переходят в (1.44). Разложение (1.48) в ряд Фурье дает [8]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 8\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1/2}}{1+a^{2n-1}} \cos \{(2n-1)\omega t\}, & \kappa \leq 1, \\ \dot{x} &= 8\omega \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cos(n\omega t) + \frac{1}{4} \right\}, & \kappa \geq 1, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \exp(-\pi F'/F), \quad \omega = \omega(H), \quad F = F(\pi/2; \bar{\kappa}), \\ F' &= F(\pi/2; \sqrt{1-\bar{\kappa}^2}); \\ \bar{\kappa} &= \begin{cases} \kappa, & \kappa < 1, \\ 1/\kappa, & \kappa > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Используя асимптотику эллиптических интегралов, имеем

$$F\left(\frac{\pi}{2}; \kappa\right) \sim \begin{cases} \pi/2, & \kappa \ll 1, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{32H_s}{H_s - H}, & 1 - \kappa^2 \ll 1. \end{cases} \quad (1.51)$$

С их помощью находим из (1.50) для параметра a разложения решения в ряд Фурье

$$a \sim \begin{cases} \kappa^2/32, & \kappa \ll 1, \\ \exp(-\pi/N_0), & 1 - \kappa^2 \ll 1, \end{cases} \quad (1.52)$$

где введен новый параметр

$$N_0 = \frac{\omega_0}{\omega(H)} = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}; \kappa\right), \quad (1.53)$$

определяющий отношение частоты малых колебаний маятника к его частоте при энергии H . Его асимптотики согласно (1.51) равны

$$N_0 \sim \begin{cases} 1, & \kappa \ll 1 \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{32H_s}{H_s - H}, & 1 - \kappa^2 \ll 1. \end{cases} \quad (1.54)$$

Из (1.52) следует, что число N_0 определяет эффективное число гармоник в фурье-разложении (1.49). При $n > N_0$ амплитуды разложения экспоненциально обрезаются. Наоборот, при $n < N_0$ все коэффициенты разложения одного порядка.

Приведенной информации достаточно для получения полного представления о характере колебаний маятника. Случай $\kappa \ll 1$ соответствует малым колебаниям маятника, так как в этом случае H близко к значению $-H_s$, т.е. колебания происходят вблизи дна потенциальной ямы (см. рис. 1.3). Согласно (1.52) и (1.54) в этом случае $\omega(H) \approx \omega_0$, $N_0 \sim 1$ и амплитуды a_n малы. Поэтому в разложении (1.49) достаточно ограничиться лишь первым членом. Он соответствует линейным колебаниям

$$v = \dot{x} \approx (\delta H)^{1/2} \cos \omega_0 t,$$

где $\delta H = H_s + H = \omega_0^2 - |H|$.

Рассмотрим случай $\kappa^2 \rightarrow 1$, т.е. $H = H_s$. Вблизи сепаратрисы частота $\omega(H)$ стремится к нулю, а период колебаний логарифмически расходится. Скорость маятника \dot{x} как функция времени приближается к периодической последовательности солитоноподобных импульсов (рис. 1.4).

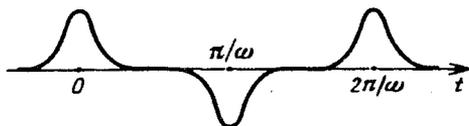


Рис. 1.4. Зависимость скорости маятника от времени вблизи сепаратрисы

Расстояние между двумя горбами в одной и той же фазе мало отличается от периода колебаний $2\pi/\omega(H)$, а ширина каждого горба близка к $2\pi/\omega_0$. Поэтому число N_0 определяет также отношение расстояния между солитоноподобными импульсами к их ширине для колебаний вблизи сепаратрисы.

Описанные свойства колебаний справедливы не только при приближении к сепаратрисе снизу ($H \rightarrow \omega_0^2 - 0$), но и при $H \rightarrow \omega_0^2 + 0$, т.е. со стороны инфинитных траекторий.

§ 1.5. Многомерное движение

В этом параграфе рассмотрим многомерные интегрируемые системы. Интегралом движения F системы

$$H = H(p, q) = H(p_1, q_1; \dots; p_N, q_N)$$

называется величина $F(p, q)$, коммутирующая с гамильтонианом:

$$[H, F] \equiv 0,$$

где операция коммутатора, или скобок Пуассона, определена согласно (1.19):

$$[A, B] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right). \quad (1.55)$$

Будем далее всюду считать (за исключением специально оговариваемых случаев), что уровням постоянных значений гамильтониана

$$H(p, q) = \text{const} = E$$

соответствуют различные значения энергии системы E .

Если интеграл движения F позволяет понизить порядок уравнений движения, то он называется первым интегралом. В общем случае для интегрирования системы дифференциальных уравнений порядка $2N$ необходимо столько же первых интегралов. Однако в случае гамильтоновских уравнений движения достаточно знать лишь N первых интегралов. Этот факт отражается теоремой Лиувилля – Арнольда (ком. 1.5).

Пусть дана гамильтоновская система $H(p, q)$ с N степенями свободы, совершающая финитное движение и имеющая N первых интегралов

$$F_i = F_i(p, q) \quad (i = 1, \dots, N),$$

которые линейно независимы и попарно коммутируют:

$$[F_i, F_j] \equiv 0 \quad (i, j = 1, \dots, N).$$

Тогда:

- 1) траектории системы лежат на N -мерном торе;
- 2) движение является условно-периодическим и имеет N частот

$$\omega_i = \omega_i(F_1, \dots, F_N) \quad (i = 1, \dots, N);$$

- 3) угловые переменные θ_i , характеризующие координаты на торе, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(F_1, \dots, F_N) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (1.56)$$

которые могут быть сразу проинтегрированы:

$$\theta_i = \omega_i t + \text{const}. \quad (1.57)$$

Пример траектории приведен на рис. 1.5. В случае двух степеней свободы для интегрирования системы достаточно иметь лишь один дополнительный первый интеграл, не зависящий от H .

В процессе движения траектория остается все время на торе. Поэтому тор является инвариантной характеристикой системы. Семейству различных значений интегралов (F_1, \dots, F_N) соответствует семейство инвариантных торов. Их взаимное расположение в пространстве определяется размерностью фазового пространства. При $N = 2$ торы, соответствующие различным значениям интегралов F_1, F_2 , вложены друг в друга и не пересекаются (рис. 1.6). В этом случае говорят, что торы делят пространство. При $N > 2$ торы не делят пространство и пересекаются. Этот факт устанавливается следующим образом.

В $2N$ -мерном фазовом пространстве поверхность постоянной энергии $H = E$ имеет размерность $2N - 1$. Границы, которые должны ее делить на различные области, имеют размерность $2N - 2$. Если торы делят пространство, то их размерность N должна удовлетворять условию

$$N \geq 2N - 2.$$

Отсюда $N \leq 2$ и случай двух степеней свободы оказывается выделенным.

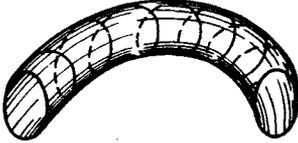


Рис. 1.5. Траектория на двумерном торе



Рис. 1.6. При $N = 2$ инвариантные торы делят фазовое пространство

В дальнейшем будет видно, каким образом эта топологическая особенность фазового пространства влияет на динамическую устойчивость системы.

Движение на двумерном торе имеет две частоты ω_1 и ω_2 . В общем случае они несоизмеримы, и траектория всюду плотно покрывает поверхность тора и не замкнута. Случай, когда отношение частот рационально:

$$\omega_1/\omega_2 = m_1/m_2 \quad (1.58)$$

(m_1, m_2 — целые числа), является резонансным. Траектория замыкается через конечное число оборотов на торе.

В общем случае условие резонанса имеет вид

$$\sum_{i=1}^N m_i \omega_i = 0, \quad (1.59)$$

где m_i — целые числа, не равные все одновременно нулю.

Поскольку частоты ω_i являются функциями интегралов движения F_i , условие резонанса (1.59) означает существование некоторого соотношения между величинами F_i . Поэтому при резонансах происходит определенное вырождение системы. Интегралы F_i и углы θ_i не являются, вообще говоря, канонической парой переменных. В случае, когда система является интегрируемой, канонические переменные вводятся следующим образом. Поскольку движение происходит на N -мерном торе, то на нем можно выбрать ровно N базисных контуров C_j , которые не могут быть ни стянуты в точку, ни переведены непрерывным способом друг в друга. Базисные контуры для $N = 2$ приведены на рис. 1.7. С помощью контуров C_j вводятся N независимых переменных — действий:

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_j} \sum_{i=1}^N p_i dq_i \quad (j = 1, \dots, N). \quad (1.60)$$

Они являются интегралами движения — так называемые первые интегральные инварианты Пуанкаре [2].

В силу линейной независимости интегралов F_i их можно выразить через действия I :

$$F_i = F_i(I_1, \dots, I_N) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Аналогично выражается гамильтониан H через действия:

$$H = H(I_1, \dots, I_N),$$

т.е. переменные θ_i являются циклическими. Канонические уравнения имеют вид

$$\dot{I}_i = -\partial H / \partial \theta_i, \quad \dot{\theta}_i = \partial H / \partial I_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.61)$$

Отсюда

$$I_i = \text{const}, \quad \theta_i = \omega_i t + \text{const}, \quad (1.62)$$

где

$$\omega_i = \omega_i(I_1, \dots, I_N) = \partial H / \partial I_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.63)$$

Имеется некоторый произвол в выборе базисных контуров C_j . Поэтому определение действия (1.60) не является однозначным. Однако инвариантные торы

$$(I) \equiv (I_1, \dots, I_N) = \text{const}$$

определены однозначно, если система является невырожденной, т.е.

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i(I)}{\partial I_j} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H(I)}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (1.64)$$

Согласно равенствам (1.63) условие (1.64) означает функциональную независимость N частот ω_j .

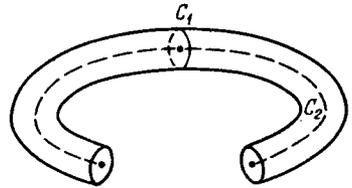


Рис. 1.7. Базисные контуры C_1 и C_2 на двумерном торе

Формулы (1.62) позволяют решить вопрос о спектральных свойствах траектории системы. Для этого достаточно знать связь переменных (p, q) с переменными действие – угол (I, θ) :

$$p = p(I, \theta), \quad q = q(I, \theta).$$

Учитывая цикличность по переменной θ , имеем

$$q = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m(I) e^{im\bar{\theta}}, \quad (1.65)$$

$$p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m(I) e^{im\bar{\theta}},$$

где коэффициенты разложения удовлетворяют условию вещественности

величин q, p :

$$q_m^* = q_{-m}, \quad p_m^* = p_{-m},$$

и векторы m и $\vec{\theta}$ равны

$$m = (m_1, \dots, m_N), \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N),$$

числа m_j — целые, положительные и отрицательные. Суммирование в (1.65) ведется по всем числам m_j . С помощью (1.62) разложение (1.65) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_m(I) e^{im\vec{\omega}t}, \\ p &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{p}_m(I) e^{im\vec{\omega}t}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ и постоянные начальные фазы включены в определение амплитуд \tilde{q}_m и \tilde{p}_m . Разложение (1.66) описывает N -частотное движение, если отсутствует вырождение, т.е. справедливо условие (1.64). Такое движение называется условно-периодическим.

§ 1.6. Отображение Пуанкаре

Во многих случаях динамическую эволюцию системы удобно определять не с помощью непрерывных функций $p(t)$, $q(t)$, а некоторым дискретным образом. Пусть задана последовательность моментов времени (t_0, t_1, \dots) . В каждый из моментов t_i определена пара чисел (p_i, q_i) :

$$p_i = p(t_i), \quad q_i = q(t_i),$$

лежащих на траектории системы. Соотношение

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) = \hat{T}_n(p_n, q_n) \quad (1.67)$$

определяет оператор сдвига во времени \hat{T}_n . Оно задает отображение фазового пространства в себя и заменяет уравнения движения в дифференциальной форме.

Пусть, например, гамильтониан системы $H(p, q; t)$ зависит от времени периодически:

$$H(p, q; t + T) = H(p, q; t),$$

где T — период. Тогда достаточно рассмотреть решения уравнений движения на интервале $(t_0, t_0 + T)$ и найти вид оператора \hat{T} путем сшивки решений на двух соседних интервалах

$$(t_0, t_0 + T), \quad (t_0 + T, t_0 + 2T).$$

Определение решения сводится к последовательному итерационному процессу

$$(p_n, q_n) = \hat{T}^n(p_0, q_0), \quad (1.68)$$

где (p_0, q_0) — начальное условие. Траектория системы получается с помощью (1.67) или (1.68) и представляет собой дискретную последовательность точек $(p_0, q_0); (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n), \dots$

В случае $H = H(p, q, t)$, где p и q — единственные переменные ($N = 3/2$), отображение (1.67) переводит плоскость в плоскость. Такой же прием можно использовать при $N \geq 2$, где изображение траектории в фазовом пространстве с размерностью, большей или равной четырём, практически невозможно. Для этого следует рассмотреть, например, плоскость (p, q) в фазовом пространстве и фиксировать точки, в которых траектория протыкает плоскость в заданном направлении (рис. 1.8). Если

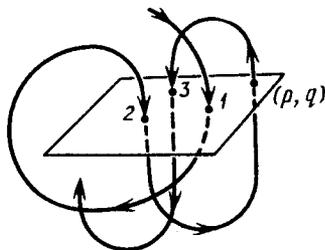


Рис. 1.8. Последовательные точки отображения Пуанкаре

(p_n, q_n) — точка на плоскости при n -м протыкании плоскости, то соотношение (1.67) задает отображение Пуанкаре. Последовательность моментов времени протыкания (t_0, t_1, \dots) не является эквидистантной.

Отображение Пуанкаре действует в пространстве меньшей размерности, чем размерность фазового пространства. Это упрощение достигается за счет тех трудностей, которые следует преодолеть, чтобы определить вид оператора \hat{T}_n . Если система имеет инвариантный тор, то очевидно, что его пересечение с плоскостью даст инвариантную кривую. Действительно, траектория, которая всюду плотно покрывает поверхность тора, протыкает плоскость в точках, которые всюду плотно покрывают кривую пересечения тора с плоскостью.

Использование отображений Пуанкаре обладает по крайней мере двумя достоинствами. Во многих случаях, как это будет видно, оно позволяет облегчить исследование задачи. Оно также позволяет наглядно изобразить динамическую картину при ее численном исследовании. Более точно эти утверждения будут представлены далее.

Глава 2

УСТОЙЧИВОСТЬ И ХАОС

Очень редко встречаются такие ситуации, в которых можно сразу установить факт интегрируемости системы. Значительно чаще можно удовлетвориться такой постановкой задачи, в которой имеется малое возмущение интегрируемой системы. Существует большое число различных методов и искусных приемов анализа влияния возмущения. Все они тем или иным образом связаны с решением задачи об устойчивости системы. И здесь следует принять во внимание в высшей степени условный характер как постановки задачи об устойчивости, так и самого понятия устойчивости. Тот или иной

вопрос, который предъявляется к свойствам системы, диктует одновременно не только метод, с помощью которого можно найти на него ответ, но и свое определение устойчивости. Малые возмущения системы могут приводить, например, к малым изменениям параметров системы в течение ограниченного или неограниченного времени. В последнем случае топология фазового портрета может не изменяться, но может и измениться существенно.

Сейчас исследование устойчивости динамических систем приобрело и новые методы, и новые понятия. Это связано с открытием нового явления — динамического хаоса, или просто хаоса. Оно заключается в том, что траектории системы могут представлять собой реализацию случайных временных процессов, хотя никаких случайных источников в уравнениях нет. Свойство хаоса автоматически означает неинтегрируемость системы. Оно присуще только нелинейным системам.

В этой главе будет кратко приведена лишь самая необходимая информация по устойчивости и хаосу в динамических системах, которая пригодится для дальнейшего изложения (ком. 2.1).

§ 2.1. Нелинейный резонанс

Нелинейный резонанс является важным свойством динамических систем, характеризующим их реакцию на внешнее возмущение и позволяющее оценить роль нелинейности.

Невозмущенное движение системы с одной степенью свободы будем описывать гамильтонианом $H_0(I)$, а возмущенное — гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta; t), \quad (2.1)$$

где ϵ — безразмерный малый параметр ($\epsilon \ll 1$). Возмущение V является периодическим по времени с периодом

$$T = 2\pi/\nu.$$

Поэтому V может быть разложено в двойной ряд Фурье по θ и по t :

$$V(I, \theta; t) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{k,l}(I) e^{i(k\theta - l\nu t)} + \text{к.с.}, \quad (2.2)$$

$$V_{kl}^* = V_{-k, -l},$$

где к.с. означает члены, комплексно сопряженные предыдущим.

Канонические уравнения движения принимают следующий вид, если использовать выражения (2.1) и (2.2):

$$\dot{I} = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} i\epsilon \sum_{k,l} k V_{kl}(I) e^{i(k\theta - l\nu t)} + \text{к.с.}, \quad (2.3)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dH_0}{dI} + \epsilon \frac{\partial V(I, \theta; t)}{\partial I} =$$

$$= \omega(I) + \frac{1}{2} \epsilon \sum_{k,l} \frac{\partial V_{kl}(I)}{\partial I} e^{i(k\theta - l\nu t)} + \text{к.с.}$$

Здесь частота колебаний

$$\omega(I) = dH_0(I)/dI$$

введена для невозмущенного движения.

Условие существования резонанса в системе означает выполнение равенства

$$k\omega(I) - l\nu = 0. \quad (2.4)$$

Это означает, что следует указать пару целых чисел (k_0, l_0) , для которых найдется значение I_0 , обращающее (2.4) в тождество:

$$k_0\omega(I_0) = l_0\nu. \quad (2.5)$$

Как правило, таких значений $(k_0, l_0; I_0)$ оказывается много. В значительной мере это вызвано нелинейностью системы, т.е. зависимостью $\omega(I)$.

Путь анализа уравнений (2.3) заключается в исследовании некоторых простейших ситуаций. Одна из них состоит в рассмотрении изолированного резонанса (2.5) в пренебрежении всеми остальными возможными резонансами. Формально это означает, что в уравнениях движения (2.3) следует оставить только члены с $k = k_0, l = l_0$, которые могут оказаться резонансными при $I = I_0$:

$$\dot{I} = \epsilon k_0 V_0 \sin(k_0\theta - l_0\nu t + \varphi), \quad (2.6)$$

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \epsilon \frac{\partial V_0}{\partial I} \cos(k_0\theta - l_0\nu t + \varphi),$$

где обозначено

$$V_{k_0, l_0} = |V_{k_0, l_0}| e^{i\varphi} = V_0 e^{i\varphi}. \quad (2.7)$$

Кроме того, считается, что величина

$$\Delta I = I - I_0 \quad (2.8)$$

мала, т.е. уравнения (2.6) рассматриваются в окрестности резонансного значения действия I_0 .

Перечислим дополнительные приближения дальнейшего анализа:

- 1) в правых частях уравнений (2.6) можно положить $V_0 = V_0(I_0)$;
- 2) для частоты $\omega(I)$ можно принять разложение

$$\omega(I) = \omega_0 + \omega' \Delta I,$$

где

$$\omega_0 = \omega(I_0), \quad \omega' = d\omega(I_0)/dI,$$

а ΔI определено в (2.8);

3) поправкой к частоте порядка ϵ во втором уравнении в (2.6) можно пренебречь.

В результате происходит еще одна редукция системы (2.6) к более простой:

$$\frac{d}{dt} \Delta I = \epsilon k_0 V_0 \sin \psi, \quad \frac{d}{dt} \psi = k_0 \omega' \Delta I, \quad (2.9)$$

где введена фаза

$$\psi = k_0 \theta - l_0 \nu t + \varphi. \quad (2.10)$$

Система уравнений (2.9) может быть представлена в гамильтоновской форме

$$\frac{d}{dt}(\Delta I) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial(\Delta I)}, \quad (2.11)$$

где

$$\bar{H} = \frac{1}{2} k_0 \omega' (\Delta I)^2 + \epsilon k_0 V_0 \cos \psi. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) представляет собой эффективный гамильтониан, описывающий динамику системы в окрестности резонанса. Переменные $(\Delta I, \psi)$ являются канонически сопряженной парой.

Сравнение выражения (2.12) с (1.39) показывает, что гамильтониан \bar{H} описывает колебания нелинейного маятника (с точностью до сдвига по фазе на π при $\omega' > 0$). Из (2.9) получаем

$$\ddot{\tilde{\psi}} + \Omega_0^2 \sin \tilde{\psi} = 0, \quad (2.13)$$

где $\tilde{\psi} = \psi + \pi$ и

$$\Omega_0 = (\epsilon k_0^2 V_0 |\omega'|)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Величина Ω_0 называется частотой фазовых колебаний. Все формулы, полученные в § 1.4 для нелинейного маятника, автоматически могут быть перенесены для гамильтониана (2.12), если заменить в формулах для маятника $t \rightarrow k_0 \omega' t$.

На исходной фазовой плоскости (p, q) точному резонансу соответствует фазовая кривая с действием I_0 (рис. 2.1). Переход от полярного угла θ к фазе ψ в формуле (2.10) соответствует переходу в систему координат, вращающуюся с частотой $l_0 \nu$. Во вращающейся системе фазовые портреты нелинейного резонанса для двух случаев представлены на рис. 2.1 и 2.2. Из них, в частности, видно, что при резонансе порядка l_0 на фазовой плоскости образуются l_0 сепаратрисных ячеек, l_0 гиперболических и l_0 эллиптических особых точек. Таким образом, нелинейный резонанс изменяет топологию фазового портрета.

Установим некоторые условия "захвата" системы в нелинейный резонанс. Введем безразмерный параметр α , характеризующий степень нелинейности колебаний:

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0} \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \equiv \frac{I_0}{\omega_0} |\omega'|. \quad (2.15)$$

Тогда названные выше три приближения справедливы при условиях

$$\epsilon \ll \alpha \ll 1/\epsilon. \quad (2.16)$$

Первое неравенство означает, что нелинейность должна быть достаточно большой и не может быть устремлена к нулю (ком. 2.2).

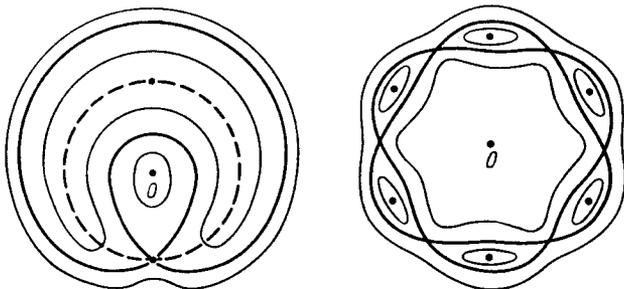


Рис. 2.1. Нелинейный резонанс с $k_0 = 1, l_0 = 1$ на фазовой плоскости (p, q) . Штриховая линия – невозмущенная траектория с $I = I_0$. Тонкие линии – фазовые колебания. Толстая линия – сепаратриса фазовых колебаний

Рис. 2.2. Усложненный вариант нелинейного резонанса с $k_0 = 6, l_0 = 1$ (обозначения те же, что и на рис. 2.1)

Из гамильтониана (2.12) и (2.15) следует оценка для амплитуды фазовых колебаний по действию

$$\frac{\max \Delta I}{I_0} \sim \left(\epsilon \frac{V_0}{|\omega'|} \right)^{1/2} \frac{1}{I_0} \sim \left(\frac{\epsilon}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad (2.17)$$

так как $V_0 \sim H_0 \sim \omega_0 I_0$. Аналогично получаем с помощью определения (2.14) для ширины резонанса по частоте:

$$\frac{\max \Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} = (\epsilon \alpha)^{1/2}. \quad (2.18)$$

Выражение (2.17) раскрывает смысл первого неравенства в (2.16), а выражение (2.18) – смысл второго неравенства: относительные изменения действия и частоты при нелинейном резонансе должны быть малы.

Решение вопроса о том, как влияют нерезонансные члены в исходном разложении (2.3), будет дано в части II.

§ 2.2. Внутренний нелинейный резонанс

Рассмотрение резонансных изменений в нелинейной системе под действием внешнего периодического возмущения является достаточно общим. Оно сравнительно просто обобщается на случай резонансов между двумя и более степенями свободы. Ограничимся случаем $N = 2$. Гамильтониан системы с двумя степенями свободы запишем в виде

$$H = \sum_{i=1,2} H_{i0}(I_i) + \epsilon V(I_1, I_2; \theta_1, \theta_2). \quad (2.19)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{I}_i = -\partial H / \partial \theta_i, \quad \dot{\theta}_i = \partial H / \partial I_i \quad (i = 1, 2). \quad (2.20)$$

Разложение возмущения V в двойной ряд Фурье запишем в виде

$$V(I_1, I_2; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2} V_{n_1, n_2}(I_1, I_2) \exp[i(n_1 \theta_1 - n_2 \theta_2)] + \text{к.с.} \quad (2.21)$$

Существование резонанса означает, что для некоторой фиксированной пары чисел (n_1, n_2) и для определенных значений действий (I_{10}, I_{20}) выполняется условие резонанса

$$n_1 \omega_1(I_{10}) = n_2 \omega_2(I_{20}). \quad (2.22)$$

Если оставить в (2.21) только резонансные члены, то в полной аналогии с предыдущим параграфом получим эффективный гамильтониан нелинейного внутреннего резонанса:

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \omega'_i (\Delta I_i)^2 + \epsilon V_0 \cos \psi, \quad (2.23)$$

где

$$\omega_i = dH_{i0}/dI_i, \quad \omega'_i = d\omega_i(I_{i0})/dI_i, \quad \Delta I_i = I_i - I_{i0} \quad (i = 1, 2), \quad (2.24)$$

а фаза ψ определена соотношениями

$$\psi = n_1 \theta_1 - n_2 \theta_2 + \varphi, \quad (2.25)$$

$$V_{n_1, n_2}(I_{10}, I_{20}) = |V_{n_1, n_2}(I_{10}, I_{20})| e^{i\varphi} \equiv V_0 e^{i\varphi}.$$

Уравнения движения сразу следуют из (2.23):

$$\dot{I}_1 = \frac{d(\Delta I_1)}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta_1} = \epsilon n_1 V_0 \sin \psi, \quad \dot{\theta}_1 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial (\Delta I_1)} = \omega'_1 \Delta I_1; \quad (2.26)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{d(\Delta I_2)}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta_2} = -\epsilon n_2 V_0 \sin \psi, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial (\Delta I_2)} = \omega'_2 \Delta I_2.$$

Последние два уравнения с учетом (2.25) дают

$$\dot{\psi} = n_1 \omega'_1 \Delta I_1 - n_2 \omega'_2 \Delta I_2. \quad (2.27)$$

Первые два уравнения в (2.26) приводят к интегралу движения:

$$n_1 \Delta I_1 + n_2 \Delta I_2 = \text{const} \equiv C. \quad (2.28)$$

С его помощью и с учетом уравнения (2.27) система (2.26) интегрируется. Проще, однако, поступить другим способом.

Дифференцируем (2.27) по времени и используем первые два уравнения (2.26). Это дает

$$\ddot{\psi} + \Omega_0^2 \sin \tilde{\psi} = 0, \quad (2.29)$$

где

$$\Omega_0^2 = \epsilon V_0 |n_1^2 \omega'_1 + n_2^2 \omega'_2| \quad (2.30)$$

и $\tilde{\psi} = \psi + \pi$, как и ранее. Уравнение (2.29) эквивалентно уравнению маятника, а выражение (2.30) определяет частоту фазовых колебаний в окрестности внутреннего резонанса.

§ 2.3. КАМ-теория

Рассмотренный нелинейный резонанс показывает, что даже очень малые возмущения могут приводить к сильным изменениям в системе. И хотя эти изменения могут быть относительно малы по величине, они могут создавать сильные качественные изменения в свойствах системы. Нелинейность при

этом играет значительную роль. Благодаря зависимости частоты от амплитуды колебаний резонанс не может приводить к неограниченному росту энергии (или действия) системы, так как происходит расстройка резонанса. Однако эти результаты не могут гарантировать ограниченную динамику системы в течение неограниченного времени. Впервые решение вопроса о вечной устойчивости системы было дано теорией Колмогорова—Арнольда—Мозера (КАМ) при некоторых определенных ограничениях на свойства системы (ком. 2.3).

Рассмотрим гамильтониан системы в виде

$$H = H_0(I_1, \dots, I_N) + \epsilon V(I_1, \dots, I_N; \theta_1, \dots, \theta_N), \quad (2.31)$$

где $\epsilon \ll 1$ и V — потенциал возмущения. Форма (2.31) является, в определенном смысле, универсальной для анализа роли возмущений. Невозмущенная часть гамильтониана H_0 зависит от N действий, являющихся независимыми первыми интегралами движения. Поэтому при $\epsilon = 0$ существуют инвариантные N -мерные торы, на которых лежат все траектории системы. Частоты невозмущенного движения определяются выражениями

$$\omega_i = \partial H_0 / \partial I_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.32)$$

Если теперь ввести возмущение, т.е. считать $\epsilon \neq 0$, то вопрос об устойчивости системы может быть поставлен следующим образом: что произойдет с инвариантными торами и сохранятся ли они? Приведем ответ на этот вопрос в той форме, которая содержится в теореме Колмогорова—Арнольда.

Т е о р е м а. Если невозмущенная гамильтоновская система невырождена, то при достаточно малом консервативном возмущении большинство нерезонансных инвариантных торов не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущенной системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически, с числом частот, равным числу степеней свободы. Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением.

Невырожденность системы означает функциональную независимость ее частот (2.32):

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (2.33)$$

К нерезонансным торам относятся все те торы, которые лежат в некоторой малой области вне окрестности резонанса, т.е.

$$\left| \sum_j \omega_j m_j \right| > \text{const} \cdot |m|^{-(N+1)} \quad (m_j = 0, \pm 1, \dots),$$

где величина const мала. Заметим, что определения невырожденности и нерезонансности делаются с помощью частот нулевого приближения (2.32).

Условие достаточной малости означает существование некоторого граничного значения ϵ_0 , такого, что теорема справедлива при $\epsilon < \epsilon_0$.

Аналогичный результат о существовании инвариантных торов был доказан Мозером при условии существования достаточно большого числа производных у возмущения V , которое в дальнейшем удалось понизить.

Действие возмущения согласно теории КАМ происходит следующим образом. Оно разрушает торы, лежащие в малой окрестности резонансных торов. Размер этой окрестности можно оценить. Например, в случае резонанса первого порядка между двумя степенями свободы, рассмотренного в § 2.2, ширина области разрушения по действию меньше $\epsilon^{1/2}$. Дальнейшие свойства областей разрушенных торов зависят также от топологии невозмущенных инвариантных торов в фазовом пространстве. Это приводит к отличию случая $N = 2$ от случая $N > 2$. При $N = 2$ торы делят фазовое пространство (см. § 1.5), поэтому разрушенные торы лежат между инвариантными торами. Это приводит к тому, что изменение действия на траектории имеет характерную величину порядка ширины области разрушения и поэтому не может быть большим. Траектория оказывается зажатой между инвариантными торами. Ее отклонение от невозмущенной траектории стремится к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$. Таким образом доказывается вечная и глобальная устойчивость при $N = 2$ и $\epsilon < \epsilon_0$.

Если $N > 2$, то резонансные торы уже не делят фазовое пространство, поэтому области разрушения могут, соединяясь, пронизывать все фазовое пространство подобно паутине. Это приводит к тому, что существует конечная мера траекторий, которые могут сколь угодно далеко уйти от своих невозмущенных значений. Это явление носит название диффузии Арнольда [7] (оно будет рассмотрено в части II). Таким образом, при $N > 2$ основная часть торов также не разрушается. Однако существует конечная малая мера таких начальных условий, которые приводят к медленному уходу системы сколь угодно далеко от своей невозмущенной траектории.

Приведенные результаты КАМ-теории легко переносятся на случай уже встречавшейся нестационарной системы:

$$H = H_0(I_1, \dots, I_N) + \epsilon V(I_1, \dots, I_N; \theta_1, \dots, \theta_N; t), \quad (2.34)$$

где V – периодическая функция времени:

$$V(I, \theta; t + T) = V(I, \theta; t).$$

Для этого поступим аналогично (1.3) и введем новые переменные (J, φ) :

$$J = \text{const}, \quad \varphi = \nu t + \text{const}, \quad \nu = 2\pi/T. \quad (2.35)$$

Теперь вместо (2.34) следует рассматривать систему с $(N + 1)$ степенями свободы:

$$H = H_0(I_1, \dots, I_N) + \nu J + \epsilon V(I_1, \dots, I_N; \theta_1, \dots, \theta_N; \varphi). \quad (2.36)$$

Гамильтониан H является функцией $N + 1$ действия (I_1, \dots, I_N, J) и столько же углов $(\theta_1, \dots, \theta_N, \varphi)$. Инвариантные торы имеют размерность $N + 1$. Теория КАМ гарантирует их устойчивость при достаточно малом ϵ и расширенном условии (2.33).

§ 2.4. Локальная неустойчивость

Наиболее сильным видом неустойчивости, которая возможна даже при финитном движении системы, является локальная неустойчивость. Именно благодаря этой неустойчивости возникает динамическая стохастичность или хаос.

Обозначим через $D(t)$ расстояние между двумя точками в фазовом пространстве, принадлежащими разным траекториям в момент времени t (рис. 2.3). Тогда локальная неустойчивость проявляется в том, что существует такое направление, вдоль которого расстояние между траекториями растет экспоненциально со временем:

$$D(t) = D(0) e^{h_0 t}. \quad (2.37)$$

Инкремент неустойчивости h_0 является функцией точки в фазовом пространстве. Свойство системы, которое выражено уравнением (2.37), может

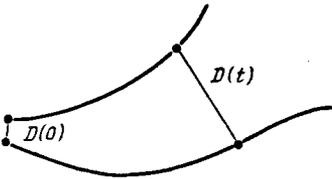


Рис. 2.3. Локальная неустойчивость траекторий

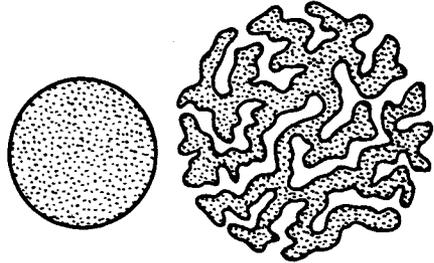


Рис. 2.4. Расплывание фазовой капли

проявляться не для всех начальных условий. Однако локальная неустойчивость системы означает, что существует область конечной меры такая, что если выбрать в ней любую из точек в качестве начальной, то малое возмущение ее приводит к сильному расхождению соответствующих траекторий. Если движение финитно, то начально близкие траектории не могут разойтись дальше, чем на размер области движения. В результате происходит их сильное запутывание. Фазовая капля правильной формы через короткое время принимает сильно изрезанную форму (рис. 2.4). Степень усложнения капли растет со временем и может быть оценена скоростью перемешивания (см. § 2.5).

Обозначим через z вектор точки в фазовом пространстве системы. Пусть \hat{T} определяет отображение динамической системы, совершающей финитное движение:

$$z_{n+1} = \hat{T}z_n, \quad (2.38)$$

где n – дискретное время. Якобиева матрица \hat{M} отображения \hat{T} определяется формулой

$$M_{ij;n} = \partial z_{i;n+1} / \partial z_{j;n} \quad (i, j = 1, \dots, P), \quad (2.39)$$

где P – размерность фазового пространства. В гамильтоновских системах $P = 2N$. Кроме того, фазовый объем гамильтоновских систем сохраняется и $|\hat{M}| = 1$ для любого момента времени.

Собственные значения λ матрицы \hat{M} находятся из уравнения

$$|\hat{M} - \lambda \hat{1}| = 0,$$

где $\hat{1}$ – единичная матрица размерности P . Величины λ_k , вообще говоря,

комплексны. Их можно расположить в порядке возрастания абсолютных значений:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots \leq |\lambda_P|,$$

где λ_k — последнее собственное значение, для которого $|\lambda_k| \leq 1$. Это означает, что имеется $(P - k)$ направлений в фазовом пространстве, вдоль которых возмущение вектора состояния z растягивается. В этих же направлениях растягивается элемент фазового объема.

Показатель растяжения можно определить следующим образом. Пусть, для простоты, происходит растяжение в направлении собственного вектора с номером i на m -м шагу отображения. Оно характеризуется величиной $|\lambda_{i,m}| > 1$. Пусть также λ_i не зависит от m . Тогда через n шагов отображения элемент длины d вектора состояния будет расти в направлении i :

$$d_i(n) = |\lambda_i|^n d_i(0) = d_i(0) e^{\sigma_i n}, \quad (2.40)$$

где величина

$$\sigma_i = \ln |\lambda_i| \quad (2.41)$$

является показателем Ляпунова.

Если все направления имеют сохраняющиеся во времени показатели Ляпунова, то локальная неустойчивость характеризуется выражением

$$h_0 = \sum_{i > k}^P \sigma_i = \sum_{i > k}^P \ln |\lambda_i|. \quad (2.42)$$

Формулы (2.40)–(2.42) определяют некоторую идеализированную ситуацию локальной неустойчивости. В реальных гамильтоновских системах, как правило, все показатели Ляпунова зависят от точки в пространстве, а собственные значения $\lambda_{i,n}$ якобиевой матрицы $\hat{M}(n)$ зависят также и от времени n . Более того, оказывается, что реально трудно доказать справедливость формулы (2.40) (т.е. существование асимптотического экспоненциального закона с $\sigma_i > 0$) не только для любого n , но даже в среднем. Далее мы познакомимся с причинами этих трудностей.

В гамильтоновском случае $|\hat{M}| = 1$ и поэтому $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2N} = 1$. В частности, при $N = 1$ имеем

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Отсюда следует, что если неустойчивость существует, то одно направление в фазовом пространстве неустойчивое (растягивающее элементы длины), другое — устойчивое (сжимающее элементы длины). Если, например,

$$\lambda_1 = 1/\lambda_2 = \text{const} > 1,$$

то согласно (2.37) и (2.42) $h_0 = \lambda_1$.

§ 2.5. Перемешивание

Свойство локальной неустойчивости непосредственно связано со свойством перемешивания в фазовом пространстве. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две произвольные интегрируемые функции. Корреляционной функцией или коррелятором называется величина

$$\mathcal{R}(f, g; T) = \langle f(\hat{T}z)g(z) \rangle - \langle f(z) \rangle \langle g(z) \rangle, \quad (2.43)$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают среднее по фазовому пространству:

$$\langle f \rangle \equiv \int_{\Gamma} f(z) d\Gamma(z). \quad (2.44)$$

Для эргодических движений справедливо равенство среднего по фазовому объему и среднего по времени:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' f[z(t')] = \langle f \rangle. \quad (2.45)$$

Поэтому средние значения $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ в (2.43) не зависят от момента времени, в который они вычисляются, если процесс — эргодический.

Перемешиванием называется затухание (или расщепление) корреляторов:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{R}(f, g; T) = 0. \quad (2.46)$$

Закон затухания корреляторов зависит от выбора функций f и g . Процесс $z(t)$, для которого выполнено свойство перемешивания (2.46), является одновременно и эргодическим в смысле определения (2.45). Обратное утверждение, вообще говоря, не справедливо.

В случае дискретного времени определение коррелятора имеет вид

$$\mathcal{R}_n(f, g) = \langle f(\hat{T}^n z), g(z) \rangle - \langle f(z) \rangle \langle g(z) \rangle, \quad (2.47)$$

а условие перемешивания (2.46) заменяется на следующее:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n(f, g) = 0. \quad (2.48)$$

В этом случае закон убывания коррелятора \mathcal{R}_n зависит не только от вида функций f и g , но и от выбора последовательности моментов времени $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$.

Свойство перемешивания означает достаточно быстрое и достаточно равномерное перемешивание двух видов жидкости: фазовой жидкости и области, не занятой ею (см. рис. 2.4). Далее, как правило, будет подразумеваться всегда экспоненциальный закон перемешивания, т.е.

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0 \exp(-t/\tau_c). \quad (2.49)$$

Время τ_c называется временем перемешивания или временем расщепления корреляций.

Если отвлечься от некоторых очень специальных и очень сложных вопросов, то в некотором грубом смысле свойство локальной неустойчивости означает одновременно и существование перемешивания. Более того, имеет место соотношение

$$h_0 \sim 1/\tau_c. \quad (2.50)$$

Хотя интуитивно выражение (2.50) может показаться достаточно естественным, доказательство его возможно лишь в некоторых очень "прямолинейных" случаях (ком. 2.4).

Свойство траекторий динамических систем иметь расщепляющиеся корреляторы или локальную неустойчивость означает, что эти траектории эквивалентны реализации некоторого случайного процесса. Поэтому явления такого типа называют хаосом или стохастичностью. Его главным свойством является проявление законов случайного движения, хотя в системе нет никаких внешних случайных сил или никаких внешних случайных источников. Более того, локальная неустойчивость может иметь

пороги своего возникновения, в зависимости от значений какого-либо из параметров системы.

Для описания систем с перемешиванием используется понятие энтропии Колмогорова – Синая (КС-энтропия). Это определение введено в работе [8] Колмогоровым и впоследствии усовершенствовано Синаем [9, 10]. Понятие энтропии Колмогорова – Синая проще всего ввести исходя из физических соображений [1, 2]. Пусть фазовая капля занимает объем $\Delta\Gamma$ в фазовом пространстве. Тогда ее энтропия равна

$$S = \ln \Delta\Gamma. \quad (2.51)$$

Если начальный фазовый объем капли был равен $\Delta\Gamma_0$, то в момент времени t он принимает значение $\Delta\Gamma(t)$. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема означает, что

$$\Delta\Gamma(t) = \Delta\Gamma_0,$$

и энтропия (2.51) не изменяется.

Для того чтобы учесть сильно усложняющуюся форму фазовой капли в результате перемешивания, следует ввести понятие огибающего фазового объема $\overline{\Delta\Gamma}(t)$. Им является огрубленный фазовый объем, в котором мелкие пузырьки пустоты не фиксируются в результате усреднения и перехода к "крупнозернистым" характеристикам капли. Огрубленный фазовый объем растет, так как для него теорема Лиувилля уже не применима. Используя формулу локальной неустойчивости (2.37), можно оценить $\overline{\Delta\Gamma}(t)$:

$$\overline{\Delta\Gamma}(t) = \Delta\Gamma_0 e^{ht}, \quad (2.52)$$

где

$$h = \langle h_0 \rangle. \quad (2.53)$$

Воспользуемся формулой (2.51) для определения энтропии фазовой капли после ее крупнозернистого усреднения:

$$\tilde{S} \equiv \ln \overline{\Delta\Gamma}(t) = \ln(\Delta\Gamma_0 e^{ht}) = ht + \ln \Delta\Gamma_0. \quad (2.54)$$

Величина $\Delta\Gamma_0$ может быть положена равной тому малому значению объема, по которому следует проводить усреднение и внутри которого пузырьки пустоты оказываются незаметными. Выражение

$$\lim_{\Delta\Gamma_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \overline{\Delta\Gamma}(t) = \lim_{\Delta\Gamma_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (ht + \ln \Delta\Gamma_0) = h \quad (2.55)$$

вычисляется с помощью (2.54) и определяет энтропию Колмогорова – Синая. Порядок выполнения пределов в (2.55) является существенным.

Выражение (2.55) определяет также скорость изменения энтропии \tilde{S} огрубленного объема и согласно (2.53) и (2.50) имеет место соотношение

$$h \sim h_0 \sim 1/\tau_c. \quad (2.56)$$

Оно связывает перемешивание и локальную неустойчивость с энтропией Колмогорова – Синая.

Формула (2.56) играет фундаментальную роль при анализе условий возникновения хаоса в динамических системах.

Глава 3

СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛОЙ

Гамильтоновские системы в общем случае являются "носителями хаоса". Это означает, что при некоторых минимальных ограничениях фазовое пространство произвольной динамической гамильтоновской системы имеет некоторые области, внутри которых происходит движение с перемешиванием. Ограничения связаны, главным образом, с размерностью системы. Она должна иметь не менее $3/2$ степеней свободы, т.е. $N \geq 3/2$. Будем предполагать далее, что время как часть степени свободы является циклической переменной. Иначе — если гамильтониан системы явно зависит от времени, то эта зависимость является периодической.

Существование в фазовом пространстве областей устойчивой динамики и областей хаоса является одним из самых удивительных и неожиданных открытий. Оно позволяет проанализировать, как зарождается хаос и как выглядит минимальная область хаоса. И хотя на многие вопросы здесь еще нет ответов, тем не менее, сейчас ясно, что зародышем хаоса является стохастический слой, образующийся в окрестности разрушенных сепаратрис. Стохастический слой был описан в работе [1] при изучении задачи об устойчивости и разрушении магнитных поверхностей, а в [2] были получены различные оценки его ширины. Эта глава будет посвящена систематическому анализу стохастического слоя и некоторым важным приложениям (ком. 3.1). Образование стохастического слоя при возмущении нелинейного маятника является типичным. Поэтому эта модель будет рассмотрена первой.

§ 3.1. Стохастический слой нелинейного маятника.

Сепаратрисное отображение

Если на маятник действует нестационарное возмущение, то его сепаратриса разрушается, и в ее окрестности образуется стохастический слой. Процесс его образования содержит основные черты общего случая, и поэтому удобно начать описание зарождения хаоса именно с этой модели.

Пусть в гамильтониане

$$H = H_0(x, \dot{x}) + \epsilon V(x, t) \quad (3.1)$$

выражение для невозмущенной части H_0 относится к нелинейному маят-

нику с единичной массой (см. формулу (1.39)):

$$H_0 = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x, \quad (3.2)$$

а возмущение V периодически зависит от времени:

$$V(x, t + T) = V(x, t), \quad (3.3)$$

с периодом

$$T = 2\pi/\nu. \quad (3.4)$$

С помощью определений (1.25) и (1.27) можно совершить замену переменных и перейти от (\dot{x}, x) к (I, θ) следующим образом:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int dq p(q, H_0), \quad p(q, H_0) = [2(H_0 + \omega_0^2 \cos q)]^{1/2}. \quad (3.5)$$

В формулах (3.5) замена переменных совершается с помощью невозмущенного гамильтониана H_0 . Все необходимые далее результаты уже получены в § 1.4. Формулы (1.48) или (1.49) определяют скорость маятника \dot{x} как функцию (I, θ, t) , а также ее разложение в ряд Фурье. Формула (1.46) выражает $I = I(H_0)$; ее обращение дает зависимость $H_0 = H_0(I)$. Заметим, что при использовании формул § 1.4 необходимо всюду вместо H писать H_0 .

С помощью описанной замены (3.5) исходный гамильтониан (3.1) может быть переписан в виде

$$H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta, t). \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) имеет общий вид системы с возмущением, зависящим от времени. Ее связь с конкретной рассматриваемой задачей заключена в виде функций H_0 и V .

Запишем точное уравнение для изменения энергии H_0 :

$$\dot{H}_0 = [H_0, H] = \epsilon [H_0, V] = -\epsilon \frac{\partial H_0}{\partial \dot{x}} \frac{\partial V}{\partial x} = -\epsilon \dot{x} \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.7)$$

В формуле (3.7) удобно использовать переменные (\dot{x}, x) по причинам, которые станут понятны ниже.

Далее будет рассмотрено движение вблизи сепаратрисы. Главная его особенность, которая используется ниже, связана с характером зависимости скорости \dot{x} невозмущенного движения около сепаратрисы. Она представлена на рис. 1.4. Это последовательность импульсов, по форме близких к профилю солитона. Отношение интервала времени между импульсами к их ширине равно

$$N = \omega_0/\omega(I) \gg 1, \quad (3.8)$$

так как $\omega(I) \rightarrow 0$ по мере того, как I приближается к своему значению на сепаратрисе

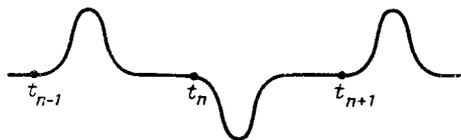
$$I_c = \frac{8}{\pi} \omega_0 E\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \frac{8}{\pi} \omega_0 \quad (3.9)$$

(см. формулу (1.46) при $\kappa = 1$). Соотношение (3.8) показывает, что система долго ($\sim T = 2\pi/\omega$) находится вблизи точек поворота, где скорость

близка к нулю, и быстро ($\sim T_0 = 2\pi/\omega_0$) пролетает основную часть потенциальной ямы.

Поведение скорости маятника \dot{x} , стоящей в правой части формулы (3.7), позволяет построить отображение, описывающее динамику вблизи сепаратрисы. Оно определяется как соотношение между переменными (I, θ) при переходе от одного импульса скорости к другому.

Рис. 3.1. Выбор последовательности моментов времени для построения отображения вблизи сепаратрисы



По техническим причинам удобно сделать еще одну замену переменных и перейти от (I, θ) к (E, t) , где уравнение

$$E = H_0(I) \quad (3.10)$$

определяет переход $I \rightarrow E$. Поскольку возмущение является периодической функцией во времени, то можно ввести фазу возмущения

$$\varphi = \nu t + \text{const}, \quad (3.11)$$

которая эквивалентна времени. Таким образом, уравнения (3.10) и (3.11) определяют новую каноническую пару (E, φ) , которая оказывается даже очень удобной.

Пусть (E, φ) есть значения переменных непосредственно перед действием импульса скорости (рис. 3.1). Соответственно $(\bar{E}, \bar{\varphi})$ — их значения через полпериода колебаний маятника. Тогда искомое отображение определяется связью

$$(\bar{E}, \bar{\varphi}) = \hat{T}(E, \varphi),$$

которая может быть представлена в виде

$$\bar{E} = E + \Delta E, \quad \bar{\varphi} = \varphi + \pi \nu / \bar{\omega}, \quad (3.12)$$

где ΔE — изменение энергии $E = H_0$, возникающее в результате действия одного импульса скорости, а частоты $\omega = \omega(E)$ и $\bar{\omega} = \omega(\bar{E})$. Чтобы получить эти зависимости, необходимо в $\omega = \omega(I)$ сделать замену (3.10).

Величина ΔE легко выражается с помощью интегрирования уравнения (3.7):

$$\Delta E = -\epsilon \int_{\Delta t} dt \dot{x} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3.13)$$

где интеграл Δt равен

$$\Delta t = \frac{1}{2} \bar{T} = \pi / \bar{\omega} \quad (3.14)$$

в соответствии со вторым уравнением в (3.12). Его положение на оси времен ясно из рис. 3.1.

Некоторые особенности отображения (3.12), называемого также сепаратрисным отображением, можно понять, не вычисляя ΔE . Достаточно

лишь заметить, что

$$|\Delta E| = |\bar{E} - E| \sim \epsilon V \sim \epsilon E. \quad (3.15)$$

Поэтому с точностью до малых величин более высокого порядка в правой части (3.13) можно под знаком интеграла использовать невозмущенные значения переменных. Условие (3.15) показывает также, что изменение энергии не может привести к заметной неустойчивости, по крайней мере на временах $t \propto 1/\epsilon$ (так как $\Delta E \propto \epsilon$). Однако второе уравнение в (3.12) для фазы совсем другое.

Рассмотрим выражение

$$K = |\delta \bar{\varphi} / \delta \varphi - 1|. \quad (3.16)$$

Оно определяет растяжение малого интервала фаз. Если

$$K \gtrsim 1, \quad (3.17)$$

то возникает локальная неустойчивость по фазам. Условие (3.17) будет рассмотрено более подробно позднее. Здесь ограничимся лишь тем, что оно может быть принято как хорошая оценка границы той области, в которой возникает стохастичность. Физическая причина возможности появления неустойчивости (3.17) в следующем. Малое изменение энергии приводит к относительно малым изменениям частоты. Вблизи дна потенциальной ямы, где частота слабо зависит от энергии (действия), малые ее изменения приведут также и к малому изменению фазы за период колебаний. Наоборот, вблизи сепаратрисы, где период колебаний $T = 2\pi/\omega$ стремится к бесконечности, даже малые изменения частоты могут привести к значительным изменениям фазы. Это и является причиной локальной неустойчивости.

§ 3.2. Стохастический слой нелинейного маятника.

Ширина слоя

В этом параграфе будет проведено систематическое определение ширины стохастического слоя.

Как видно из (3.12), для этого необходимо вычислить величину ΔE . Для этой цели запишем некоторое типичное представление для гамильтониана возмущенного маятника. Положим

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x + \epsilon \omega_0^2 \cos(kx - \nu t), \quad (3.18)$$

где ϵ — безразмерная амплитуда возмущения и масса маятника равна единице. Гамильтониан (3.18) может быть проинтерпретирован, как гамильтониан частицы, движущейся в поле двух плоских волн. При этом выражение (3.18) записано в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью первой волны, а фазовая скорость второй волны в этой системе отсчета равна ν/k . Параметр k выражает отношение волновых чисел второй и первой волн.

Гамильтониану (3.18) соответствует уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = \epsilon k \omega_0^2 \sin(kx - \nu t). \quad (3.19)$$

Если учесть обозначение (3.10), то выражение (3.7) принимает вид

$$\dot{E} = \epsilon k \omega_0^2 \dot{x} \sin(kx - \nu t). \quad (3.20)$$

Изменение энергии согласно (3.13) получается интегрированием выражения (3.20):

$$\Delta E = \epsilon k \omega_0^2 \int_{\Delta t} dt \dot{x} \sin(kx - \nu t). \quad (3.21)$$

Под интегралом могут быть использованы значения x и \dot{x} , взятые для движения на сепаратрисе, т.е. (1.42)–(1.44):

$$\dot{x} = \pm \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}(t - t_n)\omega_0}, \quad x = 4 \arctg e^{\pm \omega_0(t - t_n)}. \quad (3.22)$$

Здесь учтено, что центр солитона расположен в некоторой точке t_n . Поскольку \dot{x} экспоненциально быстро убывает при $t \rightarrow \pm\infty$, то это позволяет переписать (3.21) в следующей окончательной форме:

$$\Delta E = (-1)^n \cdot 2\epsilon k \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\operatorname{ch} \tau} \sin\left(kx - \frac{\nu\tau}{\omega_0} - \varphi_n\right), \quad (3.23)$$

где фаза φ_n имеет простое выражение

$$\varphi_n = \nu t_n \quad (3.24)$$

и отражает фазовую координату солитона в момент времени t_n в соответствии с формулой (3.11). Кроме того, знак в (3.22) без ограничения общности принят положительным при четных n . Выражение (3.23) может быть вычислено тем или иным способом, и это уже чисто технический вопрос.

Приведем значение ΔE для важного случая $k = 1$. Для этого заметим, что из (3.22) следуют соотношения

$$\cos(x/2) = 1/\operatorname{ch} \tau, \quad \sin(x/2) = \operatorname{sh} \tau/\operatorname{ch} \tau, \quad \tau = \omega_0(t - t_n). \quad (3.25)$$

Используя их, имеем из (3.23)

$$\Delta E = 4\pi\epsilon\nu^2(-1)^n \frac{\exp(\pi\nu/2\omega_0)}{\operatorname{sh}(\pi\nu/\omega_0)} \sin \varphi_n. \quad (3.26)$$

Отметим сразу, что выражение (3.26) справедливо в окрестности сепаратрисы как при $H_0 > H_s = \omega_0^2$, так и при $H_0 < H_s = \omega_0^2$ (см. формулу (1.41)).

При малых частотах возмущения ($\nu \ll \omega_0$) из (3.26) следует

$$\Delta E = 4\pi\nu\omega_0(-1)^{n+1} \sin \varphi_n \quad (\nu \ll \omega_0), \quad (3.27)$$

т.е. изменение энергии порядка амплитуды возмущения. Наоборот, при больших частотах возмущения

$$\Delta E = 8\pi\epsilon\nu^2(-1)^{n+1} \exp(-\pi\nu/2\omega_0) \sin \varphi_n \quad (\nu \gg \omega_0). \quad (3.28)$$

Обозначим далее для удобства

$$\Delta E = \Delta E_s \sigma \sin \varphi, \quad (3.29)$$

где

$$\Delta E_s = 4\pi\epsilon\nu^2 \frac{\exp(\pi\nu/2\omega_0)}{\operatorname{sh}(\pi\nu/\omega_0)};$$

величина $\sigma = \pm 1$ и индекс n при σ и при φ для простоты записи опускается.

Из выражения для частоты невозмущенного маятника (1.47) имеем вблизи сепаратрисы согласно (1.51)

$$\omega(E) = \frac{\pi \omega_0}{\ln(32E_s/|E - E_s|)}, \quad E_s = \omega_0^2. \quad (3.30)$$

Теперь сепаратрисное отображение (3.12) принимает конкретный вид

$$\bar{E} = E + \Delta E_s \sigma \sin \varphi, \quad \bar{\varphi} = \varphi + \frac{\nu}{\omega_0} \ln \frac{32E_s}{|\bar{E} - E_s|}. \quad (3.31)$$

Отображение (3.31) позволяет определить параметр локальной неустойчивости K и решить вопрос об области существования хаоса. Согласно (3.16) находим из (3.31)

$$K = \frac{\nu}{\omega_0} \frac{\Delta E_s}{|E - E_s|} |\sin \varphi| \approx \frac{4\pi \epsilon \nu^3}{\omega_0 |E - E_s|} \frac{\exp(\pi \nu / 2 \omega_0)}{\text{sh}(\pi \nu / \omega_0)}. \quad (3.32)$$

При малых частотах возмущения $\nu \ll \omega_0$ величина ΔE в отображении (3.31) определяется формулой (3.27). Простая оценка показывает, что всюду, за исключением экспоненциально малой области $|E - E_s| < \omega_0^2 \exp(-\pi \omega_0 / \nu)$, изменение фазы в (3.31) становится адиабатическим ($\ll 2\pi$) в течение почти всего периода $2\pi/\nu$, за исключением небольшого интервала времени в окрестности момента пересечения невозмущенной сепаратрисы. Хотя строгой теории ширины стохастического слоя в этом случае и не существует, однако различного типа оценки дают для его ширины

$$|E - E_s| \sim \max \Delta E = 4\epsilon \nu \omega_0. \quad (3.33)$$

При высоких частотах возмущения ($\nu \gg \omega_0$) из (3.32) следует

$$K = \frac{8\pi \epsilon}{|E - E_s|} \frac{\nu^3}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\pi \nu}{2\omega_0}\right) |\sin \varphi|. \quad (3.34)$$

Отсюда следует для границы области стохастичности

$$|E - E_s| \lesssim 8\pi \epsilon \frac{\nu^3}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\pi \nu}{2\omega_0}\right) \quad (3.35)$$

или для безразмерной ширины стохастического слоя

$$\frac{\delta E}{E_s} = 8\pi \epsilon \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^3 \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{\nu}{\omega_0}\right), \quad (3.36)$$

где учтено, что $E_s = \omega_0^2$. В этом случае ширина стохастического слоя оказывается экспоненциально малой (рис. 3.2).

Наконец, в общем случае (3.32) для определения ширины слоя условие $K \gtrsim 1$ дает

$$|E - E_s| \lesssim \frac{4\pi \epsilon \nu^3}{\omega_0 \text{sh}(\pi \nu / \omega_0)} e^{\frac{\pi \nu}{2\omega_0}}. \quad (3.37)$$

Отсюда находим безразмерную ширину слоя

$$\frac{\delta E}{E_s} = 4\pi\epsilon \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^3 \frac{\exp(\pi\nu/2\omega_0)}{\text{sh}(\pi\nu/\omega_0)}. \quad (3.38)$$

Рассмотренный пример стохастического слоя демонстрирует нам явление минимального хаоса. Оно заключается в том, что в системе общего положения всегда существует область стохастичности при сколь угодно

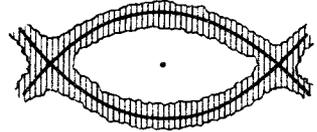


Рис. 3.2. Стохастический слой в окрестности сепаратрисы нелинейного маятника

малом параметре ϵ . Область хаоса точно локализована. Ее носителем является окрестность сепаратрисы. Далее будет видно, что сделанное утверждение обладает значительной степенью универсальности.

Рассмотрим еще один пример возмущения нелинейного маятника

$$H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x + \epsilon\omega_0^2 x \sin \nu t. \quad (3.39)$$

Он соответствует дипольному взаимодействию осциллятора с внешним возмущением. Для модели (3.39) имеем

$$V(x, t) = \omega_0^2 x \sin \nu t, \quad (3.40)$$

и формула (3.13) для определения изменения энергии принимает вид

$$\Delta E = -\epsilon \int_{\Delta t} dt \dot{x} \frac{\partial V}{\partial x} = -\epsilon\omega_0^2 \int_{\Delta t} dt \dot{x} \sin \nu t. \quad (3.41)$$

Далее следует поступить так же, как и при вычислении выражения (3.21). Подстановка (3.22) в (3.41) и вычисление интеграла дает

$$\Delta E = \frac{2\pi\epsilon\omega_0^2}{\text{ch}(\pi\nu/2\omega_0)} \sigma \sin \varphi, \quad (3.42)$$

или ΔE_s в сепаратрисном отображении (3.31) равно

$$\Delta E_s = 2\pi\epsilon\omega_0^2/\text{ch}(\pi\nu/2\omega_0). \quad (3.43)$$

Оно определяет границу стохастического слоя

$$|E - E_s| \lesssim \nu \Delta E_s / \omega_0 = 2\pi\epsilon\nu\omega_0/\text{ch}(\pi\nu/2\omega_0). \quad (3.44)$$

Полученная формула обладает теми же свойствами, что и выражение (3.37) и в специальном обсуждении не нуждается.

§ 3.3. Слабое взаимодействие резонансов

Следующий пример может быть рассмотрен очень простым способом, если использовать результаты предыдущего параграфа. Он соответствует взаимодействию двух, сильно удаленных друг от друга резонансов [8]. Уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\omega_0^2 \cos(\frac{1}{2}\nu t) \sin x = 0. \quad (3.45)$$

Оно соответствует нелинейному маятнику с осциллирующей частотой. Относительно величины ν будет предполагаться неравенство

$$\nu \gg \omega_0, \quad (3.46)$$

т.е. частота модуляции $\nu/2$ велика относительно частоты малых колебаний маятника. Если представить (3.45) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [\sin(x + \frac{1}{2}\nu t) + \sin(x - \frac{1}{2}\nu t)] = 0, \quad (3.47)$$

то нетрудно заметить, что система (3.47) эквивалентна уравнению движения (3.12). Достаточно лишь сделать замену

$$\tilde{x}_{\pm} = x \pm \frac{1}{2}\nu t. \quad (3.48)$$

Уравнениям движения (3.45) или (3.46) соответствует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^2 - 2\omega_0^2 \cos(\frac{1}{2}\nu t) \cos x = \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^2 - \omega_0^2 [\cos(x - \frac{1}{2}\nu t) + \cos(x + \frac{1}{2}\nu t)]. \quad (3.49)$$

Если изобразить фазовые портреты в одном масштабе и на одной плоскости, то получится уже известная структура из сепаратрисных ячеек для маятника (рис. 3.3). Различие заключается в том, что теперь имеются две сепаратрисные цепочки, которые не перекрываются друг с другом вследствие неравенства (3.46). Действительно, ширина каждой из сепаратрис равна ω_0 , а расстояние между ними ν . Неравенство (3.46) означает также, что в системе нет резонанса первого порядка ($\nu \approx \omega_0$). Именно это обстоятельство всегда позволяло применять различные приближенные методы типа метода усреднения по быстрым модуляционным колебаниям. Новые возможности, появившиеся благодаря теории стохастического слоя, позволяют решить очень тонкий вопрос: какая информация о поведении системы (3.45) или (3.47) теряется при использовании процедуры усреднения.

Для ответа на этот вопрос сравним уравнения движения (3.19) и (3.47). Они совпадают, если сделать замену $x \rightarrow \tilde{x}_{\pm}$ и положить $\epsilon = -1$. Теперь заметим, что формула (3.37) справедлива не только при малых ϵ , но и при $\epsilon \sim 1$ из-за наличия экспоненциально малого множителя в изменении энергии ΔE при $\nu \gg \omega_0$ (см. формулу (3.29)). Это позволяет сразу

использовать выражение (3.37). Таким образом, два взаимодействующие и неперекрывающиеся резонанса с гамильтонианом (3.49) "одеваются" стохастическими слоями в окрестности их разрушенных сепаратрис (3.45). Ширина слоев экспоненциально мала и равна

$$\delta E = 8\pi \frac{\nu^3}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\pi\nu}{2\omega_0}\right). \quad (3.50)$$

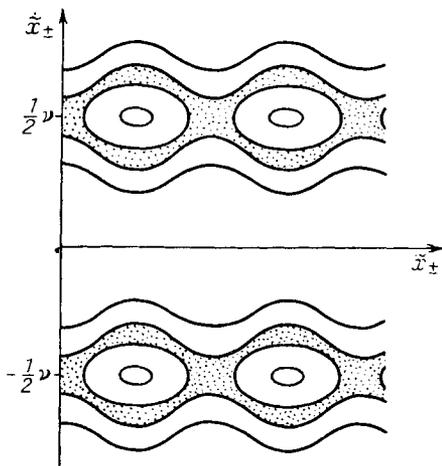


Рис. 3.3. Два неперекрывающиеся резонанса

Полученный результат позволяет сделать еще более важное заключение. Рассмотрим гамильтониан частицы, движущейся в поле большого числа плоских волн:

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \sum_k V_k \cos(kx - \omega_k t). \quad (3.51)$$

Эта задача имеет значительное число приложений [8–11]. Сделаем два предположения относительно вида потенциала в (3.51):

1) амплитуды V_k удовлетворяют условию

$$\sum_k V_k^2 < \infty, \quad (3.52)$$

2) расстояние между соседними частотами $\Delta\omega_k = |\omega_{k_1} - \omega_{k_2}|$ достаточно велико:

$$\Delta\omega_k \gg |V_k|^{1/2}. \quad (3.53)$$

Условие (3.53) должно выполняться для всех k . Оно означает отсутствие перекрытия каких-либо резонансов и эквивалентно неравенству (3.46). Если имеют место (3.52) и (3.53), то на фазовой плоскости частица, двигаясь в окрестности какой-либо из плоских волн, слабо чувствует влияние остальных волн. Во всяком случае, воздействие других волн на частицу может быть получено обычными методами усреднения. Исключение составляет лишь экспоненциально узкая область в окрестности сепаратрис волн, где влияние соседних волн велико, а движение является стохастическим (ком. 3.2).

§ 3.4. Стандартное отображение

Стандартное отображение, называемое также отображением Чирикова–Тейлора, возникает во многих задачах физики [11, 6, 10]. Одновременно оно представляет одну из простейших моделей возникновения хаоса, в которой сохранены наиболее характерные и сложные черты этой проблемы.

Гамильтониан системы, приводящий к стандартному отображению, имеет вид

$$H = \frac{1}{2} I^2 - K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n). \quad (3.54)$$

Он описывает систему с невозмущенным гамильтонианом

$$H_0 = \frac{1}{2} I^2, \quad (3.55)$$

на которую действует периодическая последовательность толчков (δ -импульсов) с периодом

$$T = 2\pi/\nu. \quad (3.56)$$

Выражение (3.55) соответствует движению свободной частицы ($I = p$, $\theta = x$) или движению ротатора, если переменная θ — циклическая, т.е. $\theta \in (0, 2\pi)$. Примем последний случай. Если учесть тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi n t/T), \quad (3.57)$$

то выражение (3.54) может быть переписано в виде

$$H = \frac{1}{2} I^2 - K \cos \theta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(mvt). \quad (3.58)$$

Нетрудно установить соответствие между (3.51) и (3.58). Для этого достаточно положить в формуле (3.51)

$$k \equiv k_0 = 1, \quad V_k \equiv V_0 = K, \quad \omega_k = kv \quad (3.59)$$

и считать k целым, а суммирование по k распространить в пределах $(-\infty, \infty)$. Таким образом, гамильтониан (3.54) соответствует, в частности, движению частицы в периодическом волновом пакете с бесконечным числом гармоник равной амплитуды.

Уравнения движения из (3.54) имеют вид

$$\dot{I} = -K \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n), \quad \dot{\theta} = I \quad (3.60)$$

между двумя δ -функциями

$$I = \text{const}, \quad \theta = It + \text{const}.$$

При переходе через δ -функцию переменная θ остается непрерывной, а действие I изменяется на величину $-K \sin \theta$. Если принять, что (I, θ) — значения переменных непосредственно перед n -м толчком, а $(\bar{I}, \bar{\theta})$ — их значения перед следующим, $(n+1)$ -м, толчком, то из (3.60) следует отображение

$$\bar{I} = I - K \sin \theta, \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I} \pmod{2\pi}, \quad (3.61)$$

которое заменяет уравнения движения (3.60).

Нас будет интересовать, в основном, случай малых возмущений

$$K \ll 1. \quad (3.62)$$

Однако даже при этом условии уравнения (3.61) являются очень сложными. Проще всего убедиться в этом сразу, до того как будут приведены некоторые результаты их исследования. Для этого обратимся к рис. 3.4, представляющему фазовый портрет системы (3.61) при $K = 0,9$. Он состоит из следующих элементов. Наиболее крупным является ячейка сепаратрисы с седлом при $\theta = \pm \pi$ (весь фазовый портрет следует рассматривать на торе с попарно склеенными правой и левой, верхней и нижней сторонами квадрата). Сепаратриса разрушена, а на ее месте образовался стохастический слой. Внутри этого, главного, стохастического слоя располагается семейство вложенных друг в друга инвариантных кривых, охватывающих точку $(0, 0)$. Вне главного стохастического слоя имеются ожерелья сепаратрисных ячеек со значительно более узкими стохастическими слоями. Они соответствуют нелинейным резонансам различных порядков и охватывают тор перпендикулярно оси I . Между резонансами находятся инвариантные кривые, охватывающие тор. Поэтому фазовый портрет напоминает сэндвич с бесконечным числом чередующихся инвариантных кривых и стохастических слоев.

Важное свойство фазового портрета заключается в том, что при условии (3.62) малости K стохастические слои не соединяются друг с другом.

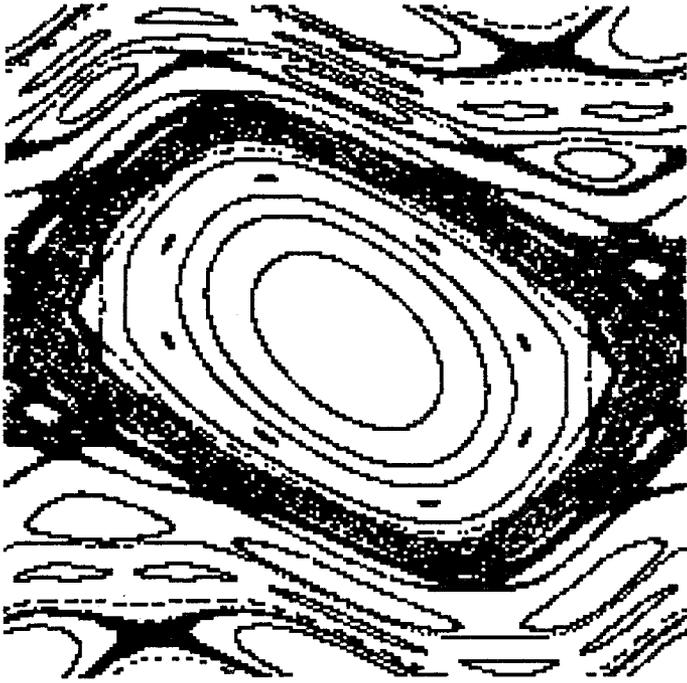


Рис. 3.4. Фазовый портрет для стандартного отображения (числовые данные) $K = 0,9$; горизонтальная ось: $\theta \in (-\pi, \pi)$; вертикальная ось: $I \in (\pi, -\pi)$

Это есть прямое следствие КАМ-теории для числа степеней свободы $N \leq 2$. В данном случае $N = 3/2$ и инвариантные торы делят пространство. Используя результаты предыдущих параграфов этой главы, можно дать объяснение приведенной картине фазового портрета.

Сначала обратим внимание на то, что при малых K конечно-разностные уравнения (3.61) могут быть заменены дифференциальными уравнениями

$$dI/dn = -K \sin \theta, \quad d\theta/dn = I,$$

которые соответствуют уравнению маятника

$$d^2 \theta / dn^2 + K \sin \theta = 0. \quad (3.63)$$

Если в формуле (3.58) оставить в сумме только члены с $m = 0, \pm 1$, то получим

$$\begin{aligned} H &\approx \frac{1}{2} I^2 - K \cos \theta - 2K \cos(\nu t) \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2} I^2 - K \cos \theta - 2K \cos(2\pi n) \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.64)$$

где величина n играет роль времени (см. (3.63)).

Уравнение (3.63) описывает колебания маятника с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{K}. \quad (3.65)$$

Разрушенная сепаратриса этих колебаний образует основной стохастический слой на рис. 3.4. Возмущением является третий член в (3.64). Он имеет ту

же амплитуду, что и основной член в гамильтониане H , однако его частота

$$\bar{\nu} = 2\pi \quad (3.66)$$

велика по сравнению с ω_0 , так как $K \ll 1$. Это дает возможность воспользоваться формулой (3.37) для ширины стохастического слоя. Полагая в этой формуле $\epsilon = 2K$, $\omega_0 = \sqrt{K}$, $F_s = \omega_0^2 = K$, $\bar{\nu} = 2\pi$, получаем

$$\frac{\delta E}{E_s} = \max \left| \frac{E - E_s}{E_s} \right| = \frac{(4\pi)^4}{2\sqrt{K}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{K}}\right). \quad (3.67)$$

Формула (3.67) описывает экспоненциально малый стохастический слой, образующийся при любых малых значениях K . Если бы в сумме в (3.58) сохранить следующие члены с $m = \pm 2$, то это привело бы к экспоненциально малым поправкам к формуле (3.67). Таким образом, определение показателя в (3.67) имеет высокую точность.

Несколько ниже будет рассмотрен вопрос о том, что изменяется в динамике ротатора при увеличении параметра K .

Выше было рассмотрено только некоторое первое приближение, передающее лишь грубую структуру фазового портрета. В действительности, во всех окнах и островках фазового портрета имеется неограниченное число сепаратрисных ожерелий и стохастических слоев более высокого порядка. Они образуют в целом необычайно сложный фрактальный орнамент, который пока еще никому не удалось описать.

§ 3.5. Стохастический слой нелинейного резонанса

В § 2.1 и 2.2 было рассмотрено очень важное явление нелинейного резонанса между системой и внешним возмущением или между внутренними степенями свободы системы. Среди упрощений, используемых для его анализа, содержится одно, которое будет обсуждено здесь. Речь идет о пренебрежении нерезонансными членами. Это настолько обычное в современной физике приближение, что трудно найти такую область, где бы оно не применялось. В действительности именно учет нерезонансного члена приводит к малому, но качественно новому результату — к образованию стохастического слоя на месте сепаратрисы нелинейного резонанса. Ширину этого слоя можно записать практически сразу, используя уже готовые результаты.

Для этой цели заметим, что в уравнениях движения (2.6) отброшен нерезонансный член. Если его учесть, то уравнение для действия принимает вид

$$\dot{I} = \epsilon k_0 [V_0 \sin(k_0 \theta - l_0 \nu t + \varphi) + V_1 \sin(k_0 \theta + l_0 \nu t + \varphi_1)], \quad (3.68)$$

где

$$V_{k_0, -l_0} = |V_{k_0, -l_0}| e^{i\varphi_1} \equiv V_1 e^{i\varphi_1}.$$

В уравнении (3.68) числа k_0 и l_0 положительны, и поэтому второй член является нерезонансным. Выражение (2.12) для гамильтониана нелинейного резонанса преобразуется в следующее:

$$H = \frac{1}{2} k_0 \omega' (\Delta I)^2 + \epsilon k_0 V_0 \cos \psi + \epsilon k_0 V_1 \cos(\psi + 2l_0 \nu t + \varphi_1 - \varphi). \quad (3.69)$$

Используя гамильтоновские уравнения движения (2.11), получаем из (3.69)

$$\frac{d}{dt} \Delta I = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = \epsilon k_0 V_0 \sin \psi + \epsilon k_0 V_1 \sin(\psi + 2l_0 \nu t + \varphi_1 - \varphi),$$

$$d\psi/dt = \partial H/\partial(\Delta I) = k_0 \omega' \Delta I.$$

Отсюда следует

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \Omega^2 \sin \psi = -\Omega_1^2 \sin(\psi + 2l_0 \nu t + \varphi_1 - \varphi), \quad (3.70)$$

где Ω_0 – частота фазовых колебаний (см. (2.14)):

$$\Omega_0^2 = \epsilon k_0^2 V_0 |\omega'|, \quad (3.71)$$

и аналогично

$$\Omega_1^2 = \epsilon k_0^2 V_1 |\omega'|.$$

Далее для упрощения записи полагаем $k_0 = 1$. Условие резонанса выражается равенством

$$\omega = l_0 \nu. \quad (3.72)$$

Поэтому $\nu \sim \omega$ и, следовательно,

$$\nu \gg \Omega_0. \quad (3.73)$$

Неравенство (3.73) очевидно, так как нерезонансный член имеет частоту порядка частоты невозмущенных колебаний, а частота фазовых колебаний Ω_0 пропорциональна корню из возмущения и, следовательно, очень мала. Если воспользоваться связью (2.18) между частотами, то из (3.72) следует

$$\nu = \frac{1}{l_0} \omega = \frac{1}{l_0} \frac{\Omega_0}{\sqrt{\epsilon \alpha}}, \quad (3.74)$$

где α – параметр нелинейности задачи.

Сравним теперь два уравнения движения (3.19) и (3.70). Они идентичны, если в (3.19) совершить замену

$$\omega_0 \rightarrow \Omega_0, \quad k \rightarrow 1, \quad \epsilon \rightarrow \Omega_1^2/\Omega_0^2, \quad \nu \rightarrow 2l_0 \nu.$$

Учитывая неравенство (3.73) и подставляя эту замену в формулу (3.36), получаем для безразмерной ширины стохастического слоя:

$$\frac{\delta E}{E_s} \equiv \max \frac{|E - E_s|}{E_s} = 8\pi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} \right)^2 \left(\frac{2l_0 \nu}{\Omega_0} \right) \exp \left(-\frac{\pi}{2} \frac{l_0 \nu}{\Omega_0} \right) =$$

$$= \frac{64\pi}{(\epsilon \alpha)^{3/2}} \left| \frac{V_1}{V_0} \right|^2 \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{\epsilon \alpha}} \right). \quad (3.75)$$

В частности, при $|V_1| = |V_0|$ имеем просто

$$\frac{\delta E}{E_s} = \frac{64\pi}{(\alpha \epsilon)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{\epsilon \pi}} \right). \quad (3.76)$$

Это экспоненциально малое выражение того же типа, что и формула (3.67). Оно представляет некоторый универсальный результат: всякий нелинейный резонанс (в том числе, и внутренний) окружен стохастическим слоем с шириной (3.75) или (3.76). Далее будет видно, каким образом этот важный результат отражается на некоторых универсальных свойствах динамических систем.

§ 3.6. Нетривиальные эффекты дискретизации

Примеры образования стохастического слоя, рассмотренные выше, очень удобны для того, чтобы обсудить один из весьма серьезных вопросов, возникший в период эскалации компьютерных методов для решения различных задач естествознания. В основе численного анализа лежат разностные схемы, и это вынуждает нас переходить от дифференциальных уравнений к уравнениям в конечных разностях. Например, уравнение движения маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 \quad (3.77)$$

в простейшем варианте заменяется уравнением

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + \omega_0^2 (\Delta t)^2 \sin x_n = 0. \quad (3.78)$$

Здесь Δt — длина интервала времени, являющегося элементарным шагом разностной схемы, и

$$x_n = x(n \Delta t).$$

Для повышения точности вычислений выбираются очень малые значения Δt , так чтобы выполнялось неравенство

$$K = \omega_0^2 (\Delta t)^2 \ll 1. \quad (3.79)$$

В какой мере мы можем контролировать ошибки при переходе от задачи (3.77) к задаче (3.78)? Этот вопрос имеет давнюю историю. Уже при первых численных моделированиях нелинейных физических задач началось обсуждение того, какие свойства теряются и что новое приобретает от введения дискретизации в непрерывную задачу [12]. В значительной степени ответ на подобные вопросы стал возможен лишь после того, как стало ясно, что в динамических системах возможен хаос. Пример дискретизации уравнения (3.77) позволяет выяснить один универсальный и нетривиальный эффект дискретизации.

Обозначим

$$p_n = \frac{1}{\Delta t} (x_n - x_{n-1}). \quad (3.80)$$

Перепишем (3.78) и (3.80) в виде совместной системы:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - \omega_0^2 \Delta t \sin x_n, \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta t p_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

где использовано обозначение (3.79). Отображение (3.81) совпадает со стандартным отображением (3.61). Это позволяет сразу сформулировать ряд результатов. Фазовое пространство системы (3.77) состоит только из

инвариантных кривых. Наоборот, фазовое пространство системы (3.81) имеет неограниченное число стохастических слоев при произвольно малых значениях K .

Переход к дискретным уравнениям эквивалентен добавлению внешней периодической силы. Заметим, что отображение (3.81) порождается гамильтонианом (3.58), в котором следует положить $I = p \Delta t$, $\theta = x$, т.е.

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos x \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(mvt), \quad (3.82)$$

где

$$v = 2\pi/\Delta t.$$

Учитывая неравенство (3.79), ограничимся в (3.82) только членами с $m = 0, \pm 1$. Это дает

$$H = H_0 + V_{\text{discr}}, \quad (3.83)$$

где

$$H_0 = p^2/2 - \omega_0^2 \cos x, \quad V_{\text{discr}} = -2\omega_0^2 \cos x \cos(vt). \quad (3.84)$$

Из этих формул видно, что H_0 есть гамильтониан исходного уравнения (3.77), а V_{discr} — потенциал возмущения, обусловленного дискретизацией. Он приводит к образованию стохастического слоя (см. формулу (3.67)) с относительной шириной

$$\frac{\delta E}{E_s} = \frac{\delta E}{\omega_0^2} = \frac{(4\pi)^2}{2\omega_0 \Delta t} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\omega_0 \Delta t}\right). \quad (3.85)$$

Это простое выражение отражает новую качественную сторону дискретизации. Потенциал дискретизации V_{discr} является высокочастотным ($v \gg \omega_0$), однако амплитуда его того же порядка, что и амплитуда невозмущенного потенциала. Все поправки из-за V_{discr} малы, так же как малы поправки высокочастотных возмущений. Однако это утверждение остается справедливым только для возмущений инвариантных кривых, расположенных вдали от сепаратрис. В окрестности сепаратрис влияние V_{discr} приводит к качественно новой динамике — к стохастической неустойчивости. При высокой размерности решаемой задачи все фазовое пространство покрывается сеткой стохастических слоев на месте разрушенных сепаратрис. Наличие такой сетки, как будет видно далее, может приводить к заметным отличиям дискретной задачи от непрерывной.

§ 3.7. Хаотическое вращение спутников

Явления, в той или иной степени связанные с хаосом, самым неожиданным образом возникают в таких областях физики, для которых высокая степень предсказуемости результата считалась всегда отличительным свойством.

В серии работ [13–15] Висдом обратил внимание на то, что асимметричные спутники могут совершать стохастические вращения при движении по некруговым орбитам. Асимметричная форма спутников приводит к своеобразной спин-орбитальной связи. Существуют несколько объектов,

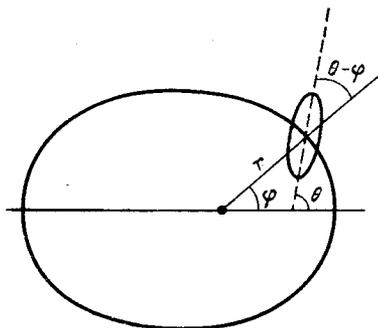


Рис. 3.5. Геометрия спин-орбитальной связи спутника

для которых результаты Висдома могут представлять вполне реальный интерес. К ним, в первую очередь, относится спутник Сатурна Гиперион и спутник Марса Фобос. Не касаясь детально астрофизических проблем Гипериона и Фобоса, мы рассмотрим лишь динамический аспект задачи, который интересен также и для искусственных спутников.

Для простоты будем считать, что ось вращения спутника (спиновая ось) перпендикулярна плоскости его орбиты (рис. 3.5). Сам спутник предполагается в форме трехосного эллипсоида с главными моментами инерции $A < B < C$ (C — момент относительно спиновой оси). Степень асимметрии спутника можно характеризовать параметром

$$\alpha_0^2 = (3/C)(A - B). \quad (3.86)$$

Орбита спутника предполагается эллиптической формы и имеет в полярных координатах (r, φ) вид

$$r = a(1 - e_0^2)/(1 + e_0 \cos \varphi), \quad (3.87)$$

где a — большая полуось орбиты и e_0 — ее эксцентриситет. Частота обращения спутника по орбите равна

$$\omega_0 = (\gamma M)^{1/2}/a^{3/2},$$

где γ — гравитационная постоянная и M — масса планеты. Если ввести безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, то уравнение вращения спутника будет иметь вид

$$d^2 \theta/d\tau^2 + \frac{1}{2} \alpha_0^2 (a/r)^3 \sin [2(\theta - \varphi)] = 0. \quad (3.88)$$

В этом уравнении r и φ являются функциями времени. Если бы орбита спутника была круговой, то было бы просто

$$\varphi = \omega_0 t = \tau, \quad r = a. \quad (3.89)$$

Из-за эллиптичности орбиты r и φ являются функциями времени, которые приводят к появлению дополнительных гармоник в (3.88). В частности, при $e_0 \ll 1$ из (3.87) следует

$$r \approx a(1 - e_0 \cos \tau).$$

Если учесть также гармоники, возникающие при разложении $\cos \varphi$ [9], то уравнение (3.88) приобретает вид

$$d^2 \psi/d\tau^2 + \alpha_0^2 \sin \psi = -\epsilon \alpha_0^2 \sin(\psi - \tau), \quad (3.90)$$

где $\epsilon = 7e_0/2$ и сделана замена переменных

$$\psi = 2(\theta - \tau). \quad (3.91)$$

Проанализируем уравнение (3.90). При $\epsilon = 0$ левая часть описывает колебания оси спутника с частотой α_0 . Пусть асимметрия спутника мала

($\alpha_0 \ll 1$). Например, для Меркурия $\alpha_0 = 0,017$. Тогда из (3.91) следует, что $d\psi/d\tau = \alpha_0 = 2(d\theta/d\tau - 1)$.

Это соотношение также показывает, что частота возмущения в (3.90) равна 1, т.е. возмущение является высокочастотным ($\alpha_0 \ll 1$). Такое возмущение образует стохастический слой в окрестности сепаратрисы с шириной, определяемой формулой (3.36), где надо положить

$$\epsilon \rightarrow 7e_0/2, \quad \nu \rightarrow 1, \quad \omega_0 \rightarrow \alpha_0.$$

Отсюда

$$\frac{\delta E}{E_s} = \frac{28e_0}{\alpha_0^3} \exp\left(-\frac{\pi}{2\alpha_0}\right). \quad (3.92)$$

Для Меркурия $e_0 = 0,206$ и область хаотической динамики имеет порядок 10^{-34} . Это, конечно, очень малая величина. Однако для Гипериона $e_0 = 0,1$ и $\alpha_0 = 0,89$. Стохастический слой уже становится порядка единицы, а формула (3.92) не применима. Численный анализ по определению области стохастичности исходного уравнения (3.88) для Гипериона показал, что параметры $e_0 = 0,1$ и $\alpha_0 = 0,89$ приводят к перекрытию резонансов и к образованию большого стохастического моря [13], о котором речь будет идти далее.

Таким образом, реальные небесные объекты нашей Солнечной системы могут иметь малые и большие элементы хаотической динамики при спин-орбитальной связи. Основные соображения, приведенные здесь, применимы также и для искусственных спутников.

Глава 4

ПЕРЕХОД СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛОЙ – СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОРЕ

Современная картина возникновения хаоса настолько сложна, что к пониманию ее удобно приближаться последовательно, временно исключая из рассмотрения некоторые вопросы. В предыдущей главе ничего не говорилось о границе между стохастическим слоем и областью, где лежат инвариантные кривые. Именно поэтому в качестве границы хаоса принималось приближенное неравенство $K \gtrsim 1$ при вычислении ширины стохастического слоя. Конечно, вопрос об условиях возникновения хаоса появился одновременно с первыми работами по анализу реальных физических моделей. Слово "реальных" здесь означает типичных для многочисленных физических задач, так как существуют математически строгие критерии хаоса, которые могут быть проиллюстрированы на не слишком абстрактных моделях (ком. 4.1). Главной особенностью этих "избранных" случаев является отсутствие в фазовом пространстве структур типа "сэндвича" или "дырявого предмета", в которых области хаоса чередуются с областями

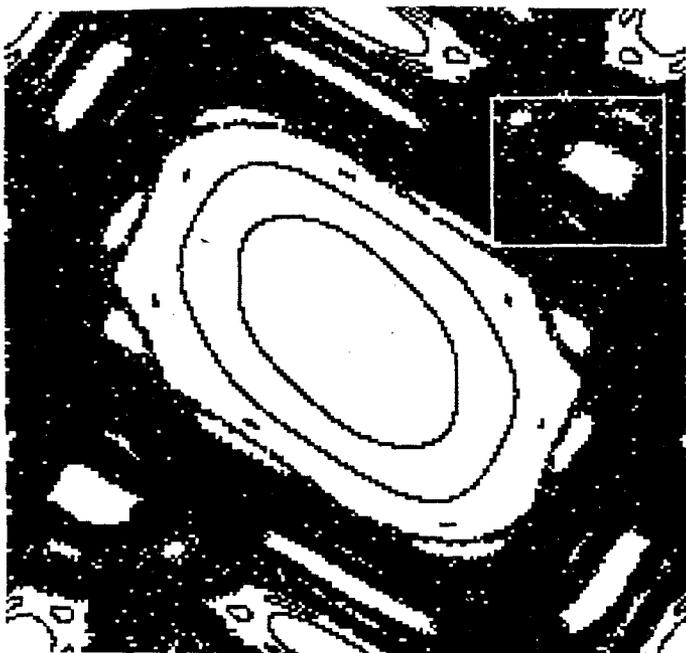
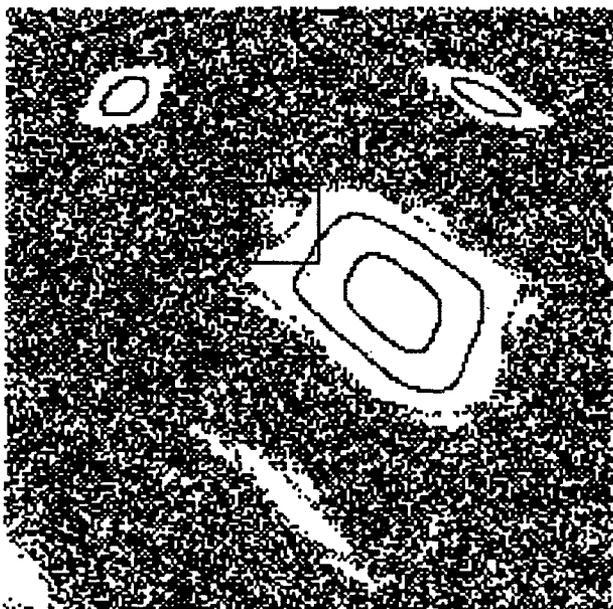


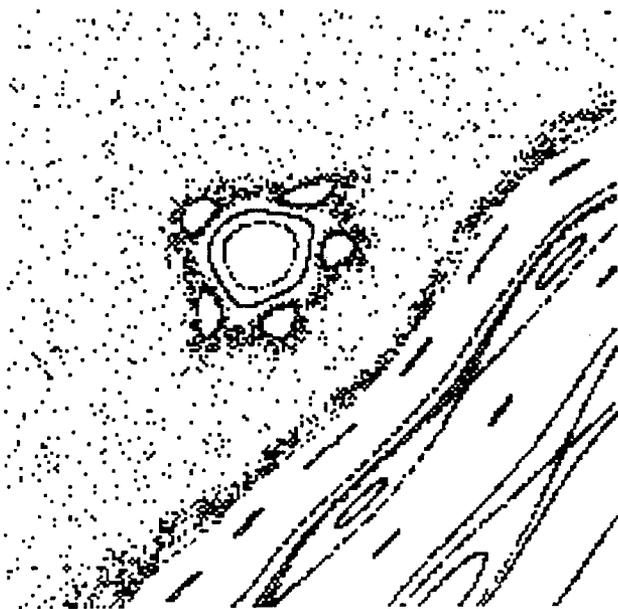
Рис. 4.1. Фазовый портрет для стандартного отображения при $K = 1,2$; горизонтальная ось: $\theta \in (-\pi, \pi)$; вертикальная ось: $I \in (\pi, -\pi)$

устойчивости. Пример первого типа приведен на рис. 3.4, а второго типа — на рис. 4.1. В нем "стохастическое море" (затемненная область) образовано точками отображения, принадлежащими одной траектории, а светлые области — островки, в которые траектория не может попасть из области "моря" и наоборот.

Существование областей устойчивости и областей хаоса в фазовом пространстве создает значительные трудности в изучении динамического хаоса (ком. 4.2). Эта сложность проявляется, например, уже в структуре стохастического моря. Каждый островок и его малая окрестность на рис. 4.1 в действительности представляют такое же сложное строение этой части фазового пространства, как и вся область на рис. 4.1 (см. рис. 4.2). Внутренние части островков также сложны и имеют очень узкие области типа сэндвичей и т.д. Такого типа структуры принято называть фрактальными (ком. 4.3). Иерархическая сложность фазового портрета распространяется также и на способ его анализа. Например, стохастический слой является элементом структуры типа "сэндвича", если рассматривать не слишком большую часть фазового пространства. Однако сам слой внутри имеет структуру типа "стохастического моря". Поэтому описание структурных свойств фазового пространства всегда связано либо с некоторой степенью локализации описываемой области и с потерей информации об области "в целом", либо с некоторыми крупномасштабными свойствами области и с потерей некоторой информации о мелких масштабах.



a



b

Рис. 4.2. Два последовательных увеличения области фазового пространства для стандартного отображения при $K = 1,2$; *a* – область внутри квадрата на рис. 4.1, *б* – область внутри квадрата на рис. *a*

В этой главе будут приведены некоторые очень тонкие свойства динамических систем, связанные с их переходом из состояния "стохастический слой" в состояние "стохастическое море".

§ 4.1. Граница глобального хаоса

Стандартное отображение (3.61)

$$I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \quad (4.1)$$

явилось той моделью, для которой Грину удалось точно определить границу глобального хаоса, т.е. то значение параметра $K = K_c$, при котором образуется стохастическое море [8] (ком. 4.4).

Рассмотрим отображение (4.1) на торе, т.е.

$$0 < I < 2\pi, \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (4.2)$$

При $K = 0$ имеем

$$I_n = \text{const} = I_0, \quad \theta_n = \theta_0 + nI_0 \pmod{2\pi}. \quad (4.3)$$

Формулы (4.3) описывают семейство инвариантных кривых. Если $I_0/2\pi$ рационально, то инвариантная кривая замыкается на себя через конечное число шагов отображения и является периодической. Она состоит из конечного числа точек. Если $I_0/2\pi$ иррационально, инвариантная кривая всюду плотно заполнена точками траектории, а сама траектория эргодически заполняет поверхность тора.

При $K \ll 1$ инвариантные кривые существуют в силу КАМ-теории. Поскольку размерность инвариантных торов равна двум, то они делят фазовое пространство и, снова согласно КАМ-теории, стохастические слои зажаты между инвариантными кривыми (см. § 2.3). Рассмотрим основной стохастический слой (рис. 4.1). Внутри и снаружи от него проходят инвариантные кривые. Увеличение параметра K приводит к расширению стохастического слоя. Начиная с критического значения K_c все стохастические слои вне основного слоя соединяются, образуя "стохастическое море". При этом инвариантные кривые, лежащие между главным слоем и ближайшим к нему, разрушатся. Поэтому вопрос об определении K_c , при котором образуется "стохастическое море", эквивалентен также вопросу об определении того значения K_c , при котором разрушается последняя инвариантная кривая. До сих пор для этой величины использовалась оценка

$$K_c \sim 1. \quad (4.4)$$

Теперь речь идет о возможности получения точного значения K_c .

Введем понятие числа вращения $\hat{\phi}$ [14]. Рассмотрим траекторию на двумерном торе. Тогда $\hat{\phi}$ определяется как средний угол наклона траектории, деленный на 2π . В случае, например, (4.3) имеем просто

$$\hat{\phi} = I_0/2\pi. \quad (4.5)$$

Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — две координаты траектории на торе. Тогда

$$\hat{\phi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}, \quad (4.6)$$

где симметрия в выборе φ_1 и φ_2 определяется тем, относительно какой оси вычисляется число вращения. В случае отображения (4.1) определим $\hat{\varphi}$ следующим образом:

$$\hat{\varphi} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi m} \sum_{n=1}^m (\theta_n - \theta_{n-1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\theta_m - \theta_0}{2\pi m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\theta_m}{2\pi m} \quad (4.7)$$

в соответствии с (4.6), если $\varphi_1(t)$ совпадает с дискретным временем. Если $\hat{\varphi}$ рационально, то

$$\hat{\varphi} = Q_1/Q_2, \quad (4.8)$$

где Q_1, Q_2 — целые, взаимно простые числа. Выражение (4.8) означает, что траектория замыкается через Q_2 шагов отображения, совершая при этом Q_1 оборотов вокруг оси тора.

В общем случае КАМ-торов число вращения $\hat{\varphi}$ иррационально. Наоборот, торы с рациональным $\hat{\varphi}$ при $K = 0$ являются резонансными и должны разрушаться при $K \neq 0$. Поэтому задача об определении K_c может быть также сформулирована как задача об определении критического числа вращения $\hat{\varphi}_c$ для последней инвариантной кривой вблизи внешней границы стохастического слоя.

Рассмотрим представление числа вращения в виде непрерывной дроби

$$\hat{\varphi} = \left(a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots} \right)^{-1}$$

или, в более компактной записи,

$$\hat{\varphi} = [a_1, a_2, \dots]. \quad (4.9)$$

Для рациональных $\hat{\varphi}$ последовательность чисел a_1, a_2, \dots конечна. Для иррациональных $\hat{\varphi}$ эта последовательность бесконечна. Если оборвать последовательность на некотором числе a_Q , то аппроксимация

$$\hat{\varphi} \approx \hat{\varphi}_Q = [a_1, a_2, \dots, a_Q] = Q_1/Q_2 \quad (4.10)$$

является наилучшей при любых $Q' < Q$.

Теперь снова обратимся к отображению (4.1). При $K = 0$ зафиксируем траектории с рациональным углом вращения (4.8). Поскольку шаг отображения принят равным единице, то возмущение содержит периоды Q (Q — целое число), т.е. частоты $2\pi/Q$. В этом случае можно говорить о том, что при любом Q траектории, у которых $\hat{\varphi}$ рационально (4.8), находятся в резонансе с возмущением. В их окрестности образуются сепаратрисные ячейки, соответствующие нелинейному резонансу порядка Q . Кроме того, сепаратрисы этого резонанса слабо разрушены и одеты узким стохастическим слоем (рис. 4.3). Ближайшие к слою инвариантные кривые очевидным образом имеют число вращения $\hat{\varphi} \approx \hat{\varphi}_Q$, т.е. для них аппроксимация (4.10) должна быть вполне подходящей. Теперь можно высказать обратное сообщение. Пусть для некоторой инвариантной кривой с числом вращения $\hat{\varphi}$ оказывается, что аппроксимация (4.10) является хорошей. Тогда это означает, что данная кривая находится вблизи резонанса Q -го порядка.

Каким должно быть число $\hat{\varphi}$, чтобы любая конечная аппроксимация его была одинаково плохой? По предположению Грина таким числом является золотое сечение

$$\varphi_c = [1, 1, \dots] = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1). \quad (4.11)$$

Оно и принимается равным критическому. Численное определение значения K_c для (4.11) дает

$$K_c = 0,9716. \quad (4.12)$$

Несмотря на нестрогую основу всех приведенных рассуждений, числа (4.11) и (4.12) оказались очень надежными. Это показало правильность понимания некоторых особенностей возникновения хаоса.

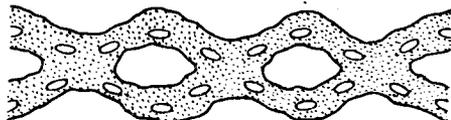


Рис. 4.3. Сепаратрисные ячейки, соответствующие резонансу 3-го порядка ($Q = 3$)

Подчеркнем в заключение этого параграфа, что КАМ-теория и структура фазового пространства типа сэндвича явились важными элементами всех этапов рассуждений в методе Грина. Именно это обстоятельство, как станет видно далее, ограничивает его универсальность (ком. 4.5).

§ 4.2. Вариационный принцип Персиваля

Идея изучения инвариантных торов или инвариантных кривых в плоскости отображения в критической ситуации, когда поблизости от них находится хаотическая зона, имеет еще одну важную модификацию, принадлежащую Персивалю [15–17]. Она заключается в формулировке вариационного принципа для нахождения инвариантных торов, если они существуют.

Пусть гамильтоновская динамическая система с N степенями свободы определяется системой канонических переменных (q, p) , где q и p — N -мерные векторы. Предположим, что существует N -мерный инвариантный тор Σ . Его можно определить с помощью N частот

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \quad (4.13)$$

и соответственно N угловых переменных

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N). \quad (4.14)$$

Если траектория лежит на инвариантном торе Σ , то для координат q на Σ имеем разложение

$$q_\Sigma = \sum_m q_m e^{i(m, \varphi)}, \quad (4.15)$$

где $m = (m_1, \dots, m_N)$ — N -мерный вектор из целых положительных и отрицательных чисел m_j и

$$(m, \varphi) = m_1 \varphi_1 + \dots + m_N \varphi_N. \quad (4.16)$$

Аналогично может быть определено разложение для вектора скорости \dot{q} :

$$\dot{q}_\Sigma = \sum_m \dot{q}_m e^{i(m, \varphi)}. \quad (4.17)$$

С помощью (4.13)–(4.15) выражение (4.17) переписывается в виде

$$\dot{q}_\Sigma = \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) q_\Sigma = \sum_m i(m, \omega) q_m e^{i(m, \varphi)}, \quad (4.18)$$

где введен оператор

$$\left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \dots + \omega_N \frac{\partial}{\partial \varphi_N}. \quad (4.19)$$

Выражения

$$q = q_\Sigma(\varphi), \quad \dot{q} = \dot{q}_\Sigma(\varphi) = (\omega, \partial q_\Sigma / \partial \varphi) \quad (4.20)$$

определяют тор Σ в параметрической форме.

Пусть $L(q, \dot{q})$ есть лагранжиан системы. Он имеет обычную связь с гамильтонианом $H(p, q)$:

$$L(q, \dot{q}) = (p, \dot{q}) - H(p, q), \quad (4.21)$$

если уравнение

$$\dot{q} = \partial H(p, q) / \partial p \quad (4.22)$$

можно разрешить относительно p . Все формулы (4.17)–(4.22) достаточно хорошо известны из механики [18]. Здесь они приведены для того, чтобы указать путь перехода от гамильтоновского описания системы к описанию функций q и \dot{q} в (4.20) на N -мерном торе Σ .

Определим функционал на торе

$$\mathcal{L}(\omega, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots d\varphi_N L(q_\Sigma(\varphi), \dot{q}_\Sigma(\varphi)), \quad (4.23)$$

где $\dot{q}_\Sigma(\varphi)$ определено в (4.19). Вариацией тора Σ называется близкий к Σ тор, который задается выражениями

$$q = q_\Sigma(\varphi) + \delta q(\varphi), \quad (4.24)$$

$$\dot{q} = \left(\omega, \frac{\partial q_\Sigma(\varphi)}{\partial \varphi} \right) + \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \delta q(\varphi).$$

Вариация функционала (4.28) приводит к выражению

$$\delta \mathcal{L}(\omega, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots d\varphi_N \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q. \quad (4.25)$$

Условие стационарности функционала $\mathcal{L}(\omega, \Sigma)$ и периодичность q и \dot{q} по φ приводят к уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \left(\omega, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4.26)$$

Из (4.26) сразу следует, что если $q_{\Sigma}(\varphi)$ есть решение этой системы, то

$$\begin{aligned} q_{\Sigma}(\varphi) &= q_{\Sigma}(\omega t + \varphi_0), \\ \dot{q}_{\Sigma}(\varphi) &= \left(\omega \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \right) q_{\Sigma}(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Результат Персиваля может быть выражен в виде следующей теоремы: гладкий тор Σ является инвариантным тором системы, совершающей на нем условно-периодическое движение с частотами ω , если и только если он является стационарной точкой функционала $\mathcal{L}(\omega, \Sigma)$. Из результата Персиваля, в частности, следует, что КАМ-торы являются решениями уравнения

$$\delta \mathcal{L}(\omega, \Sigma) = 0, \quad (4.28)$$

если частоты ω_i сильно несоизмеримы и динамическая задача рассматривается в области применимости КАМ-теории (для стандартного отображения (4.1) последнее условие означает, что $K \ll 1$).

Обратимся к стандартному отображению (4.1). Ранее уже записывался гамильтониан (3.54), из которого могут быть получены уравнения (3.61) или (4.1).

Нетрудно записать лагранжиан, используя выражение (3.54) для H :

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n). \quad (4.29)$$

Уравнение Лагранжа (4.26) принимает вид

$$\ddot{\theta} = -K \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n). \quad (4.30)$$

Оно совпадает с уравнениями движения (3.60), если учесть замену $\dot{\theta} = I$, и в результате интегрирования на периоде возмущения T приводит, как и в § 3.4, к отображению (4.1). Запишем его в виде

$$\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1} = -K \sin \theta_n = F(\theta_n). \quad (4.31)$$

Хотя выражения (4.29) и (4.30), на первый взгляд, приводят к тому же, что и гамильтоновский формализм, однако теперь в них вложен новый смысл. Он — в том, что уравнение (4.31) должно иметь периодическое решение с частотой ω , не соизмеримой с частотой $\nu = 2\pi/T$.

Переменная θ , по смыслу своего введения, вообще говоря, не является периодической функцией, однако она может быть представлена в виде

$$\theta = \theta(\varphi) = \varphi + q(\varphi), \quad (4.32)$$

где

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (4.33)$$

и $q(\varphi)$ — периодическая функция φ . После подстановки (4.32) в уравнение (4.31) получаем

$$q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = -K \sin(\varphi + q_n(\varphi)) \equiv F_n(\varphi). \quad (4.34)$$

Учитывая, что $q(\varphi)$ есть периодическая функция φ , запишем разложения

$$q_n(\varphi) = \sum_m q_n^{(m)} e^{im\varphi}, \quad F_n(\varphi) = \sum_m F_n^{(m)} e^{im\varphi}. \quad (4.35)$$

Разлагаем левую и правую часть уравнения (4.34) в ряд Фурье и используем выражения (4.35). Это дает окончательно

$$q_n^{(m)} = F_n^{(m)} / 4 \sin^2(m\omega T), \quad (4.36)$$

где учтено соотношение

$$q_{n+1}^{(m)} = q_n^{(m)} e^{im\omega T},$$

вытекающее из определения θ_n и формул (4.32), (4.33). Напомним, что величина $\omega T / 2\pi = \omega / \nu$ иррациональна.

Для численного определения гармоник $q_n^{(m)}$ выбирается конечное число их и производится приближенное вычисление амплитуд $F_n^{(m)}$, а с их помощью решаются уравнения (4.36). Увеличение параметра K приводит при некотором значении K_c к расходимости подобного метода определения периодических орбит. Используя 15 фурье-гармоник в разложениях (4.35), Персиваль получил $K_c = 0,97161$, совпадающее с (4.12). Таким образом, метод Персиваля позволил сравнительно просто прийти к критическому параметру возмущения. И хотя этот путь не совсем однозначен, так как расходимость процесса решения системы (4.34) может быть связана с появлением малых знаменателей, тем не менее вариационный принцип Персиваля позволяет естественным образом прийти к новому понятию — кантор-тору (термин также принадлежит Персивалю).

§ 4.3. Кантор-торы

Выше рассматривалась задача о том, как найти условно-периодическое решение заданной динамической системы. Вначале дана совокупность частот $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, где N — число степеней свободы. Этот набор произволен, и требуется определить тот инвариантный тор, который обматывает траектория с частотами ω . Оказалось, что решение этой задачи сводится к решению уравнений Лагранжа (4.26). В области устойчивости их решениями являются КАМ-торы. Новый вопрос — что является решением уравнений (4.26) в области фазового пространства, где движение стохастично? Ответ на него был получен лишь для некоторых простейших случаев [17, 19, 20].

Рассмотрим уравнения стандартного отображения (4.31) при $K > 1$. В этом случае имеется стохастическое море, в которое погружены многочисленные островки устойчивости. Инвариантные торы в стохастическом море отсутствуют (иначе невозможна была бы диффузия в фазовом пространстве). Однако "дырявый" инвариантный тор может быть. Персиваль назвал решение такого типа кантор-тором, так как его сечением является инвариантная "кривая" канторовского типа. Иначе, кантор-тор для (4.31) представляет собой цилиндр, сечение которого образует канторовское множество. Решение уравнений (4.31) может быть записано в виде

$$\theta_n = 2\pi(n\nu + \nu_0) + f(n\nu + \nu_0), \quad (4.37)$$

где ν_0 – произвольная константа ($0 < \nu_0 < 1$) и f – периодическая функция с периодом $1/\nu$. Для кантор-тора f имеет сложную разрывную структуру.

Персиваль привел пример точного вычисления кантор-тора [39]. Рассмотрим отображение

$$q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = \frac{1}{a^2} s(q_n), \quad (4.38)$$

где $0 < q < 1$, разрывная функция $s(q)$ определена формулой

$$s(q) = q - \frac{1}{2} - [q]$$

и $[q]$ означает целую часть q .

Отличие (4.38) от (4.31) заключается в том, что периодическая функция $\sin \theta$ заменена другой периодической функцией $s(q)$. Точное решение (4.38) при достаточно малых a для кантор-тора имеет вид

$$q(\xi) = \xi - \frac{1}{(1 + 4a^2)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{-|m|} s(\xi + m\nu), \quad (4.39)$$

где

$$\rho = 1 + \frac{1}{2a^2} [1 + (1 + 4a^2)^{1/2}] \quad (4.40)$$

и значения q_n получаются из (4.39), если положить $\xi = n\nu + \nu_0$.

Возникновение кантор-торов происходит следующим образом. При $K > K_c = 0,9716$... для отображения (4.31) на инвариантной кривой (если она существует) образуется хотя бы одна щель. Итерации этой щели порождают бесконечное число новых щелей, которые не пересекаются друг с другом и уменьшаются в своих размерах. Этот процесс и создает канторовское множество, образующее инвариантную кривую как сечение инвариантного тора. Кантор-торы неустойчивы, так как малые возмущения в перпендикулярном к ним направлении быстро нарастают.

Поскольку кантор-торы являются инвариантными решениями уравнения (4.31) с иррациональными числами вращений, то их много в фазовом пространстве, и они создают препятствие для диффузионного движения частиц в стохастическом море. Замедление диффузии вблизи кантор-торов тем сильнее, чем меньше щели в нем. Наиболее сильные барьеры для диффузии находятся вблизи границы области стохастичности. Попадая в окрестность кантор-тора точка, изображающая состояние системы

на фазовой плоскости, медленно движется вдоль кантор-тора, пока не достигнет щели (рис. 4.4) и не получит возможность пройти сквозь кантор-тор (ком. 4.6).

При численном анализе диффузии системы в области стохастического моря

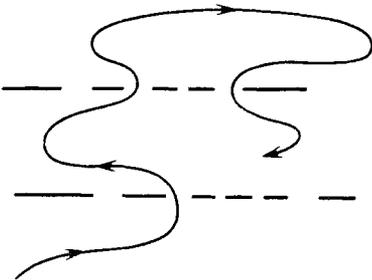
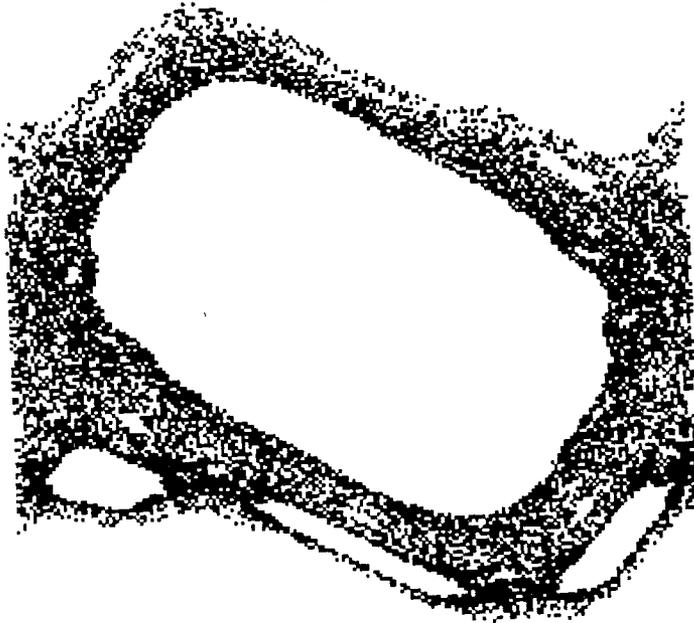


Рис. 4.4. Прохождение траектории через щели кантор-торов

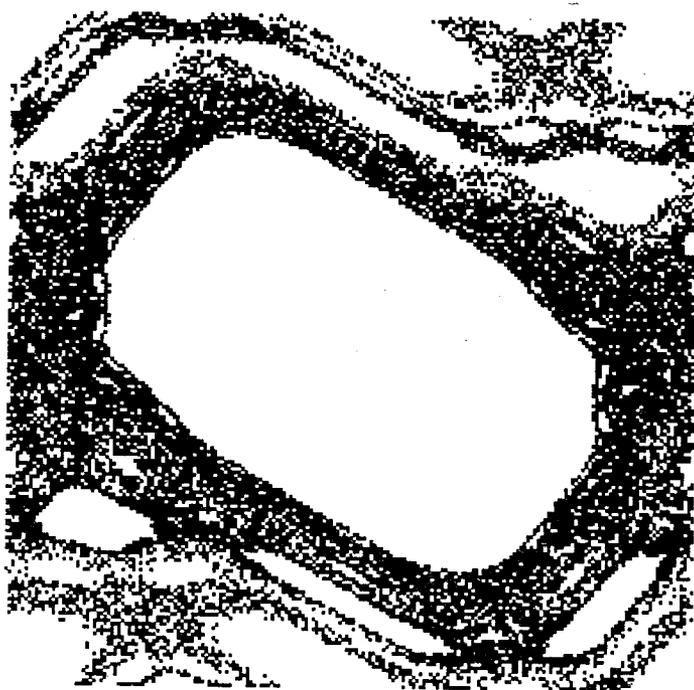
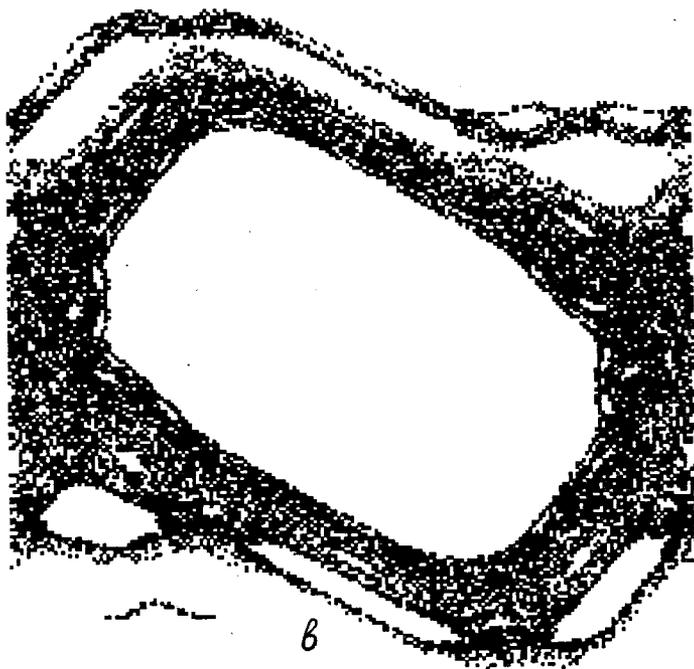


a



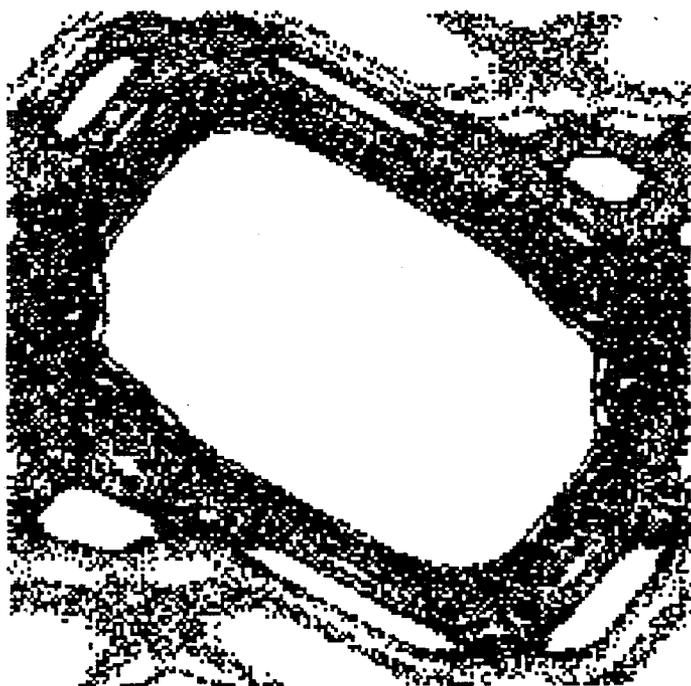
b

Рис. 4.5. Пять последовательных картин на фазовой плоскости стандартного отображения при $K = 1,1$, полученные соответственно к моментам времени $t = 3646$ (*a*); 15268 (*б*); 24245 (*в*); 29122 (*г*); 34984 (*д*). Каждый последующий шаг связан с "прорывом" траектории через кантор-тор. Поэтому на границах изображенных областей стохастического моря расположены невидимые на рисунке кантор-торы



2

Рис. 4.5 (продолжение)



д

Рис. 4.5 (окончание)

существование кантор-торов выглядит следующим образом. Сначала блуждание точки происходит в некоторой узкой ограниченной области фазового пространства (рис. 4.5). Так происходит, например, для стандартного отображения при $K = 1,1$ на рис. 4.5а до $t = 3646$ (число шагов отображения). Движение, как видно из рис. 4.5а, "зажато" в некотором слое. Далее траектория прорывается сквозь невидимый кантор-тор и очень быстро заполняет значительно большую область фазового пространства (рис. 4.5б). Теперь ее движение ограничено другим кантор-тором с крупными барьерами и малыми щелями. Так продолжается до момента времени $t = 15268$, после чего происходит следующий "прорыв" траектории через кантор-тор и т.д. В действительности подобных скачкообразных продвижений значительно больше, и на рис. 4.5 зафиксированы лишь наиболее крупные из них. По мере увеличения параметра K движение становится все более плавным и более близким к привычному стохастическому процессу. Кантор-торы при больших K являются очень "дырявыми", и эффективная "длина", приходящаяся на барьеры, становится чрезвычайно малой.

Сложность описанного процесса обусловлена тем, что он является переходным и относится к пограничной области, где уже есть основные признаки случайного движения, но еще не исчезли следы регулярной динамики.

§ 4.4. Гамильтоновская перемежаемость

Граница хаоса в фазовом пространстве, рассмотренная в § 4.1, представляет собой, по-видимому, одну из простейших возможностей. Она является следствием специфического вида модели. Здесь будет продемонстрирована картина границы хаоса совсем иного вида. Своим происхождением задача, рассматриваемая ниже, обязана попыткам реализовать идею стохастического ускорения Ферми в регулярных полях (ком. 4.7).

Рассмотрим сначала некоторые качественные соображения, объясняющие, как в задачах об ускорении частиц появляется граница хаотической динамики. Пусть частица движется в некотором поле волнового пакета

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \cos(k_n x - \omega_n t), \quad (4.41)$$

в котором

$$\Delta\omega = 2\pi/T \quad (4.42)$$

— характерное расстояние между частотами ω_n и

$$\Delta k = 2\pi/L \quad (4.43)$$

— характерное расстояние между волновыми числами k_n волнового пакета.

Хотя правая часть в (4.41) и является регулярной (неслучайной), тем не менее, при некоторых условиях, которые будут выяснены ниже, движение частицы становится стохастическим, и она начинает ускоряться. По мере роста скорости частицы время, за которое она пролетает путь длиной L , уменьшается. Это означает, что степень адиабатичности возмущения увеличивается и следует ожидать появления границы хаоса из-за слабого воздействия волнового поля на динамику высокоэнергетической частицы. Можно также ожидать, что в этом случае хаос должен быть очень слабым относительно регулярной компоненты движения. Кроме того, хаотическая компонента движения должна иметь большие временные и пространственные масштабы на фоне высокочастотного регулярного движения. В теории турбулентности подобный характер движения принято называть перемежаемостью [31, 32].

Обычно под перемежаемостью понимают пространственно-временную хаотическую динамику системы с достаточно четко выраженной пространственно-временной структурой. Проще всего представить себе картину перемежаемости в диссипативных системах. В окрестности устойчивого предельного цикла динамика системы определяется, в основном, тем спектром, который имеет цикл. Если, например, цикл имеет только один период, то фурье-спектр системы в окрестности цикла имеет вид, близкий к δ -функции, с максимумом на частоте цикла. В том случае, когда имеется очень слабый хаос в окрестности цикла, спектр системы также близок к δ -образному. Временную эволюцию можно наглядно представить себе как беспорядочно "сшитые" длинные участки регулярных осцилляций. Существование достаточно больших участков регулярного движения уже означает наличие значительной степени динамической регу-

лярности. Аналогично выглядит и пространственная перемежаемость при движении сплошной среды (ком. 4.8).

Та же картина движения, очень близкого к регулярному, но с очень слабо выраженной хаотической динамикой возможна и в гамильтоновских системах. В этом разделе будет изучено явление гамильтоновской перемежаемости в задаче о движении частицы в поле волнового пакета (4.41). Однако, как будет ясно ниже, характер описываемого явления достаточно универсален и присущ многим, на первый взгляд, никак не связанным задачам [36].

Будем считать, что волновой пакет в (4.41) очень широк, т.е. что очень большое число гармоник в нем имеет существенно отличные от нуля амплитуды E_n . Это свойство можно формально выразить, положив

$$E_n \approx E_0 \quad (4.44)$$

для всех n . Положим также

$$\omega_n \approx \omega_0 + n \Delta \omega, \quad k_n \approx k_0 + n \Delta k. \quad (4.45)$$

Если ввести групповую скорость пакета

$$v_g = \Delta \omega / \Delta k, \quad (4.46)$$

то можно выделить два предельных случая: $v > v_g$ и $v < v_g$. Далее будет рассматриваться первый из них, так как исследуемое явление перемежаемости возникает при больших скоростях частиц. При условии $v \geq v_g$ из (4.45) следует, что можно положить $\omega_n \approx \omega_0$ для всех n . Используя это и формулы (4.44) и (4.45), получаем вместо (4.41) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{e}{m} E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(k_0 x - \omega_0 t + n \Delta k x) = \\ &= \frac{e}{m} E_0 \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n \Delta k x), \end{aligned} \quad (4.47)$$

где обозначена фаза

$$\theta = k_0 x - \omega_0 t. \quad (4.48)$$

Используя соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n \Delta k x) = L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL) \quad (4.49)$$

и обозначение (4.43), перепишем уравнение (4.47) в виде

$$\dot{v} = \frac{e}{m} E_0 L \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL); \quad v = \dot{x}. \quad (4.50)$$

Эта форма записи раскрывает физическое содержание исходной задачи при сделанных предположениях (4.44), (4.45) и $v \geq v_g$. Если только не имеет место равенство $x = x_n$, где

$$x_n = Ln = 2\pi n / \Delta k, \quad (4.51)$$

то $\dot{v} = 0$, т.е. $v = \text{const}$, и движение является свободным. В момент, когда координата частицы достигает значения, кратного n , частица испытывает

воздействие внешней силы — толчок. Толчки происходят в моменты времени . . . , t_n , t_{n+1} , . . . , которые согласно (4.51) должны находиться из условия

$$\dots; x(t_n) = Ln, x(t_{n+1}) = L(n \pm 1); \dots, \quad (4.52)$$

где знак \pm зависит от того, куда направлена скорость частицы после n -го толчка. Из (4.52), в частности, находим интервал времени между двумя последовательными "столкновениями":

$$\Delta t_n = |x(t_{n+1}) - x(t_n)| / |v_{n+1}| = L / |v_{n+1}|, \quad (4.53)$$

где v_{n+1} — скорость частицы после n -го толчка. Построим отображение, связывающее координату и скорость частицы между двумя последовательными столкновениями.

Введем новую переменную

$$w = \frac{1}{2} m v |v|, \quad (4.54)$$

модуль которой равен энергии частицы. Из (4.54) можно выразить скорость v :

$$v = (2 |w| / m)^{1/2} \text{sign } w. \quad (4.55)$$

Используя определение (4.51) и свойства δ -функций, находим из (4.50) и (4.54)

$$\dot{w} = eE_0 L \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n). \quad (4.56)$$

Дифференцирование выражения (4.48) для θ дает с учетом формулы (4.55)

$$\dot{\theta} = k_0 v - \omega_0 = k_0 (2 |w| / m)^{1/2} \text{sign } w - \omega_0. \quad (4.57)$$

Система уравнений (4.56), (4.57) относительно новых переменных (w , θ) является замкнутой. Кроме того, эти переменные являются канонически сопряженной парой, так как имеет место соотношение

$$\partial \dot{w} / \partial w + \partial \dot{\theta} / \partial \theta = 0.$$

Для того чтобы построить отображение в плоскости (w , θ), следует обратить внимание на то, что последовательность моментов времени t_0 , t_1 , . . . , t_n , . . . , в которые на частицу действует толчок, является монотонно возрастающей, т.е. имеет место неравенство $t_n > t_k$, если $n > k$. Однако последовательность координат x_0 , x_1 , . . . , x_n , . . . , в которых действуют толчки, не является монотонной, так как направление скорости частицы может изменяться от толчка к толчку. Это, в частности, отражено в (4.53).

Обозначим

$$w_n = w(t_n - 0), \quad \theta_n = \theta(t_n - 0). \quad (4.58)$$

Согласно уравнениям движения (4.56), (4.57) при переходе через толчок переменная θ является непрерывной, т.е.

$$\theta(t_n - 0) = \theta(t_n + 0), \quad (4.59)$$

а переменная w испытывает скачок. Учитывая свойство (4.59), получаем

из (4.56) и (4.57)

$$\begin{aligned} w(t_n + 0) - w(t_n - 0) &= eE_0 L \cos \theta_n, \\ \theta(t_n + 0) - \theta(t_n - 0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

На интервале времени $(t_n + 0, t_{n+1} - 0)$ величина w не изменяется и, следовательно,

$$\begin{aligned} w(t_{n+1} - 0) &= w_{n+1} = w(t_n + 0) = \\ &= w(t_n - 0) + eE_0 L \cos \theta_n = w_n + eE_0 L \cos \theta_n. \end{aligned} \quad (4.61)$$

По той же причине на том же интервале $\dot{\theta}$ есть константа и из (4.60) следует, что

$$\theta(t_{n+1} - 0) = \theta_{n+1} = \theta(t_n + 0) + \dot{\theta}(t_n + 0) \Delta t_n, \quad (4.62)$$

где Δt_n определяется формулой (4.53). Из (4.61) и (4.62) следуют окончательные формулы, определяющие \hat{L} -отображение:

$$\hat{L}: \begin{cases} w_{n+1} = w_n + eE_0 L \cos \theta_n, \\ \theta_{n+1} = k_0 L \operatorname{sign} w_{n+1} - \omega_0 L (m/2 |w_{n+1}|)^{1/2} \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (4.63)$$

Формулы (4.63) удобно переписать, введя новые нормированные величины

$$u = 2w/(m\omega_0^2 L^2), \quad y = \theta/2\pi - 1/4. \quad (4.64)$$

Это дает

$$\hat{L}: \begin{cases} u_{n+1} = u_n + Q \sin(2\pi y_n), \\ y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2\pi |u_{n+1}|^{1/2}} + \tilde{y} \operatorname{sign} u_{n+1} \pmod{1}, \end{cases} \quad (4.65)$$

где $\tilde{y} = k_0 L/2\pi$ — постоянный сдвиг фазы и

$$Q = 2eE_0/(m\omega_0^2 L). \quad (4.66)$$

Величина Q имеет смысл отношения изменения энергии частицы за одно столкновение ($mv\delta v \sim eE_0 L$) к энергии частицы за счет высокочастотных осцилляций ($\sim m\omega_0^2 L^2$).

При достаточно малых значениях энергии $|u|$ изменения фазы от толчка к толчку велики и траектория частицы становится стохастической. Условия возникновения хаоса можно приближенно представить в виде

$$K = \left| \frac{\delta y_{n+1}}{\delta y_n} - 1 \right| = \frac{Q}{2|u|^{3/2}} |\cos(2\pi y)| \gtrsim 1. \quad (4.67)$$

Фазовый портрет системы при $Q \ll 1$ приведен на рис. 4.6. Островки устойчивости, в которых траектории регулярные, обусловлены множителем $\cos(2\pi y)$ в (4.67), из-за которого неравенство не выполняется для некоторой области значений y .

Главная особенность \hat{L} -отображения (4.65), отличающая его от стандартного отображения (§ 3.4), состоит в том, что в уравнении для изменения фазы y переменная u , играющая роль действия, стоит в знаменате-

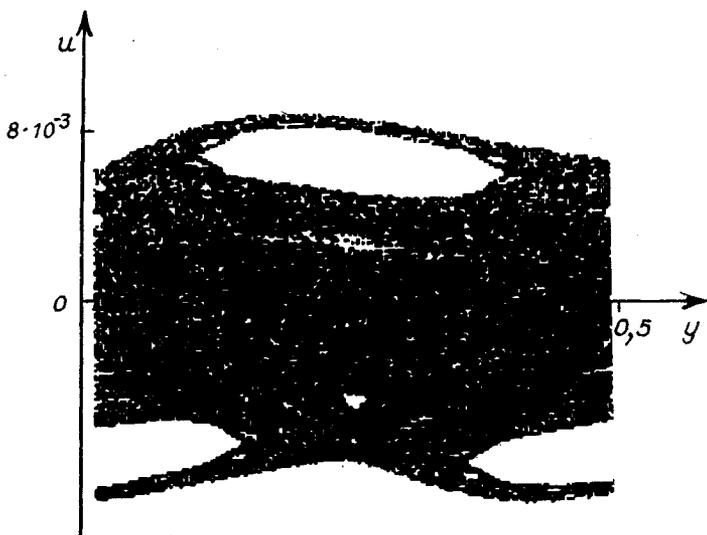


Рис. 4.6. Фазовая плоскость \hat{L} -отображения при $Q = 10^{-3}$, $\tilde{y} = 0$

ле, а не в числителе. При $Q \ll 1$, если первоначально энергия была малой ($|u| \ll 1$), то ее изменения $\delta u \sim Q$ также малы, и в течение длительного времени величина $|u|$ может оставаться малой. Однако при $Q \gg 1$ эта картина изменяется. Уже за один толчок получаем $|u| \sim Q$, даже если начальное значение $|u| \ll 1$. Это сразу дает

$$\delta y = |y_{n+1} - y_n| \sim 1/(2\pi Q^{1/2}) \ll 1. \quad (4.68)$$

Условие (4.68) означает очень медленное, адиабатическое изменение фазы y от одного столкновения до другого. Рассмотрим область значений $|u| \gg Q \gg 1$.

В этой области изменение за один шаг отображения будет

$$|\delta u| \sim Q \ll |u|. \quad (4.69)$$

Условия (4.68) и (4.69) позволяют с хорошей точностью аппроксимировать \hat{L} -отображение (4.65) дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{du(n)}{dn} &= Q \sin(2\pi y(n)), \\ \frac{dy(n)}{dn} &= -\frac{1}{2\pi |u(n)|^{1/2}} + \tilde{y}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Система (4.70) имеет регулярное, неслучайное, решение

$$u^{1/2} = \frac{1}{2} Q [1 + \cos(2\pi y)] + C \quad (u > 0), \quad (4.71)$$

определяющее инвариантную кривую, где C — произвольная постоянная и для простоты положено $\tilde{y} = 0$. Однако уравнение (4.71) не описывает

реальную ситуацию, так как имеются моменты времени, где исходная система (4.70) теряет смысл. При больших значениях Q изменение фазы y за один шаг мало согласно (4.68). Так же медленно изменяются $\sin(2\pi y)$ и величина u в \hat{L} -отображении (4.65). Процесс медленных изменений u и y описывается кривой (4.71), на которой лежат точки траектории (u, y) . Так происходит до тех пор, пока $\sin(2\pi y)$ не станет близок к нулю. Изменение его знака приводит к скачкообразному изменению на величину

$$\delta u = |u_{n+1} - u_n| = Q |\sin(2\pi y_n)|.$$

За счет этого тонкого эффекта и происходит слабая стохастизация динамики частицы. Число шагов n_0 , через которое происходит неадиабатическое изменение фазы y , легко оценивается из формулы (4.68):

$$n_0 = 2\pi Q^{1/2} \gg 1. \quad (4.72)$$

Общая картина такого движения хорошо видна из рис. 4.7. Фазовая плоскость покрывается, в основном, большими группами точек, число которых порядка $2n_0$. Каждая группа лежит на кривой (4.71) с некоторым значением константы C . При переходе разности $|u_{n+1} - u_n|$ через нуль уравнения (4.70) теряют применимость. Однако далее они снова становятся применимыми, хотя решением их является кривая (4.71), но уже с другой константой C . Эти места, где происходят перескоки траектории частицы на другую кривую из семейства (4.71), хорошо видны на рис. 4.7 вблизи оси Oy при $u = 0$. По существу, именно так можно изображать процесс гамильтоновской перемежаемости на фазовой плоскости.

Семейство кривых

$$u = u(y, C) \quad (4.73)$$

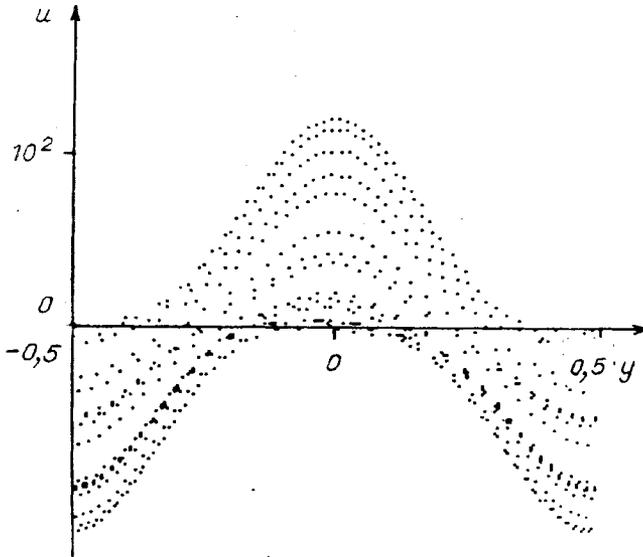


Рис. 4.7. Фазовая плоскость \hat{L} -отображения при $Q = 10$ и $\tilde{y} = 0$ соответствует случаю гамильтоновской перемежаемости

покрывает фазовую плоскость, и траектория системы представляет собой ансамбль кривых (4.73), сшитых при разных, случайно изменяющихся значениях константы C . Теперь можно поставить вопрос о предельном значении C_0 , т.е. том значении, которое определяет последнюю инвариантную кривую на рис. 4.7 сверху, являющуюся границей области стохастической динамики, лежащей снизу. Численный анализ показал [36], что

$$C_0 \approx 0,5 Q^{1/3}.$$

Вообще, граница области стохастичности может быть аппроксимирована кривой

$$u = \frac{1}{4} Q^2 [1 + \cos(2\pi y + \delta_0) + Q^{-2/3}]^2, \quad (4.74)$$

где сдвиг фазы $\delta_0 \rightarrow 0$ при $Q \rightarrow \infty$. Заметим, что при $Q \ll 1$ формула (4.74) достаточно хорошо описывает границу стохастичности, получаемую из (4.66). Поэтому можно ожидать, что она имеет более универсальный характер, чем это предполагалось при ее выводе.

Описанное явление стохастической динамики в условиях перемежаемости также приводит к ускорению частицы, хотя процесс этот является значительно более медленным, чем при малых значениях Q . Энергия, достигаемая в результате ускорения, может быть очень велика. Из (4.74) следует оценка

$$u_{\max} \sim Q^2. \quad (4.75)$$

В действительности процесс ускорения вследствие стохастической перемежаемости очень чувствителен к деталям механизма нарушения адиабатичности. Как станет ясно ниже, оценка (4.75) не является предельной, а описанная картина перемежаемости — единственной.

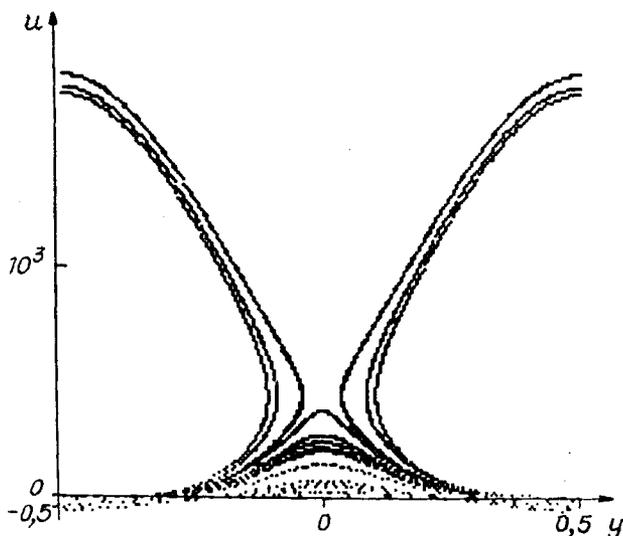


Рис. 4.8. Фазовая плоскость \hat{L} -отображения при $Q = 10$ и $\tilde{y} = 0,007$ демонстрирует сильное изменение картины перемежаемости

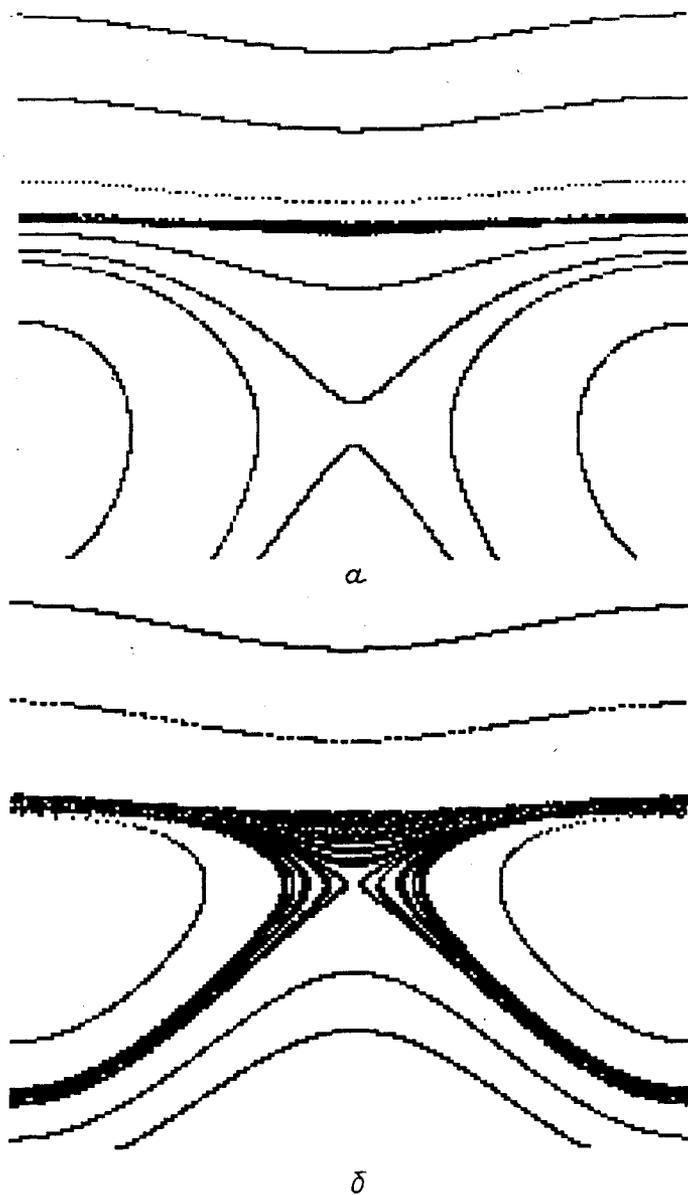


Рис. 4.9. Фазовый портрет для случая $Q = 10$ и $\tilde{y} = 0,003$ (а) и $\tilde{y} = 0,008$ (б)

Рассмотрим случай $\tilde{y} \neq 0$. Будем также считать, что $0 < \tilde{y} < 1$. Тогда из (4.70) следует существование двух новых особых точек с координатами $(y_1 = 0, u_1 = 1/(4\pi^2 \tilde{y}^2))$, $(y_2 = 1/2, u_2 = 1/(4\pi^2 \tilde{y}^2))$.

Первая из них — гиперболическая, вторая — эллиптическая. Если точка (y_1, u_1) не попадает в область стохастичности, то фазовый портрет системы аналогичен тому, что изображен на рис. 4.7. Однако если гиперболическая точка расположена достаточно низко, что зависит от величины \tilde{y} , то возникает ответвление тонкого стохастического канала вдоль усов сепаратрис, проходящих через точку (y_1, u_1) (рис. 4.8). Образовавшаяся область хаотической динамики приводит к возможности значительно более сильных ускорений, чем то, что следует из оценки (4.75). Так, например, на рис. 4.8 уже при малом отличии \tilde{y} от нуля ($\tilde{y} = 0,007$) $u_{\max} \sim Q^3$. Сильная чувствительность ускорения к изменению параметра \tilde{y} сопровождается также резким бифуркационным изменением характера перемежаемости. Теперь в нем участвуют два семейства регулярных траекторий — траекторий уже описанного типа и траекторий вдоль сепаратрис.

Пример, рассмотренный выше, показывает, в частности, что граница хаоса, определенная в § 4.1 для стандартного отображения, не является универсальной. Точно так же не является универсальной связь между числом вращения последней инвариантной кривой с золотым сечением. Это очевидно из полученных выше формул (4.71) и (4.74). Более того, разрушение последней инвариантной кривой может быть связано не с переходом к глобальному хаосу, а с соединением всего лишь двух стохастических областей (рис. 4.9). Разрушение инвариантной кривой у границы хаоса связано с "влипанием" седла в область стохастической динамики.

Гамильтоновская перемежаемость охватывает большой класс различных физических задач. Это могут быть не только задачи, в которых изменение фазы обратно пропорционально какой-либо степени действия. Пример следующего параграфа показывает некоторые дополнительные возможности возникновения слабого хаоса.

§ 4.5. Ускорение релятивистских частиц

Вернемся снова к уравнению (4.41). Оно описывало движение частиц в поле потенциального волнового пакета. Если частицы ускоряются достаточно сильно, то нерелятивистское приближение может оказаться несправедливым и следует рассматривать динамику релятивистских частиц (ком. 4.9).

В релятивистском случае уравнения движения запишем в виде [41]

$$\dot{p} = -eE(x, t), \quad \dot{x} = pc^2/\mathcal{E}, \quad (4.76)$$

где

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \sin(k_n x - \omega_n t) \quad (4.77)$$

и \mathcal{E} — энергия частицы:

$$\mathcal{E} = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}. \quad (4.78)$$

В отличие от случая, рассмотренного в § 4.4, будем считать, что волновой пакет характеризуется лишь одним пространственным периодом с волновым числом k_0 . Следуя выражениям (4.44) и (4.45), положим

$$E_n = E_0, \quad k_n = k_0, \quad \omega_n = \omega_0 + n \Delta\omega. \quad (4.79)$$

Обозначая, как и ранее,

$$\theta = k_0 x - \omega_0 t, \quad (4.80)$$

легко получаем после подстановки (4.79), (4.80) в (4.76), (4.77)

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -eE_0 \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n \Delta\omega t) = -eE_0 T \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \\ \dot{\theta} &= k_0 p c^2 / \mathcal{E} - \omega_0, \end{aligned} \quad (4.81)$$

где $T = 2\pi/\Delta\omega$, как и в (4.42).

Система уравнений (4.81) имеет ту же структуру, что и система (3.60). Поэтому в данном случае можно получить отображение аналогично тому, как выводилось стандартное отображение Чирикова (3.61). Полагаем

$$p_n = p(t = nT - 0), \quad \theta_n = \theta(t = nT - 0).$$

Интегрирование (4.81) на интервале времени $(nT - 0, (n+1)T - 0)$ дает

$$I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n, \quad (4.82)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{I_{n+1}}{(1 + I_{n+1}^2/\tau_k^2)^{1/2}} - \omega_0 T \pmod{2\pi},$$

где введен безразмерный импульс

$$I = p k_0 T / m = \tau_k p / (mc), \quad (4.83)$$

параметр K имеет тот же вид, что и в § 3.4:

$$K = (e/m) E_0 k_0 T^2 \equiv \Omega_0^2 T^2, \quad (4.84)$$

и число

$$\tau_k = k_0 c T. \quad (4.85)$$

Даже беглое сравнение отображения (4.82) с \hat{L} -отображением (4.65) устанавливает между ними определенное сходство. Приведем некоторые предельные случаи уравнений (4.82).

Из (4.83) следует, что нерелятивистскому пределу соответствует условие $I/\tau_k \rightarrow 0$. Отображение (4.82) переходит в стандартное отображение. В ультрарелятивистском пределе, наоборот, $I/\tau_k \rightarrow \infty$ и из (4.82) находим, удерживая первые члены разложения по τ_k/I :

$$I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n, \quad (4.86)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \tau_k \operatorname{sign} I_{n+1} \left(1 - \frac{\tau_k^2}{2 I_{n+1}^2} \right) - \omega_0 T \pmod{2\pi}.$$

Если $\tau_k = 2\pi m$ (m — целое число), то (4.86) переходит в следующие

уравнения:

$$I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n,$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{1}{2} \tau_k^3 \frac{\text{sign } I_{n+1}}{I_{n+1}^2} - \omega_0 T \pmod{2\pi}, \quad (4.87)$$

которые очень близки к (4.65). Различие лишь в степени действия, которое стоит в знаменателе нелинейной частоты в уравнении для фазы θ .

В случае произвольных $\tau_k \neq 2\pi m$ (m — целое число) в (4.86) малый член τ_k^2/I^2 дает малый вклад в изменение фазы θ , однако он важен при определении локальной неустойчивости, так как именно он определяет производную $\partial\theta_{n+1}/\partial I_n$.

Приведем некоторые численные иллюстрации для релятивистского отображения (4.82). На рис. 4.10 изображен его фазовый портрет при некоторых "умеренных" значениях параметров (не очень сильный релятивизм и не очень слабая неустойчивость). Стохастическая область имеет обычную систему резонансных островков. Вне области проходят инвариантные кривые.

При увеличении параметра K возникает сильная перемежаемость. Точки ложатся на регулярную кривую, которая имеет нерегулярные смещения лишь вблизи значений абсцисс (рис. 4.11). Для большей наглядности картины перемежаемости время счета выбрано не очень большим (около 10^3 итераций) на рис. 4.11а. В условиях перемежаемости регулярные

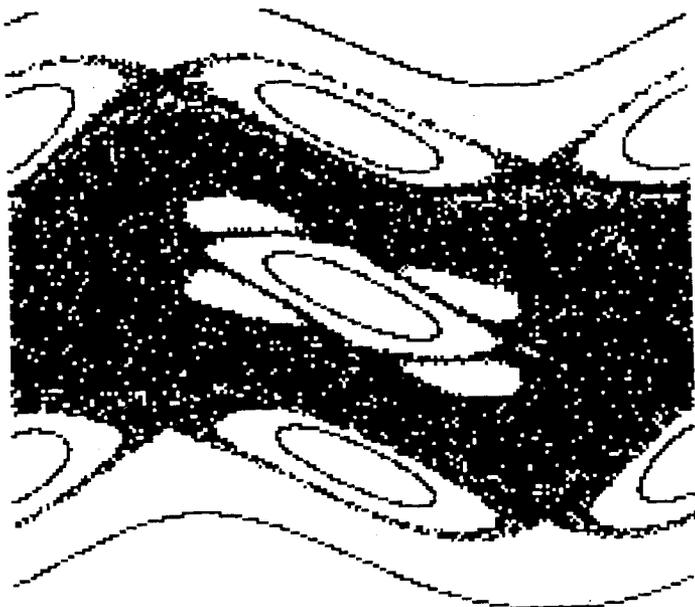


Рис. 4.10. Фазовый портрет релятивистского отображения (4.82). Области изменения: по горизонтали $\theta \in (-\pi, \pi)$, по вертикали $I \in (3\pi, -3\pi)$; значения параметров: $K = 3$, $\tau_k = 4$, $\omega_0 T = 0$

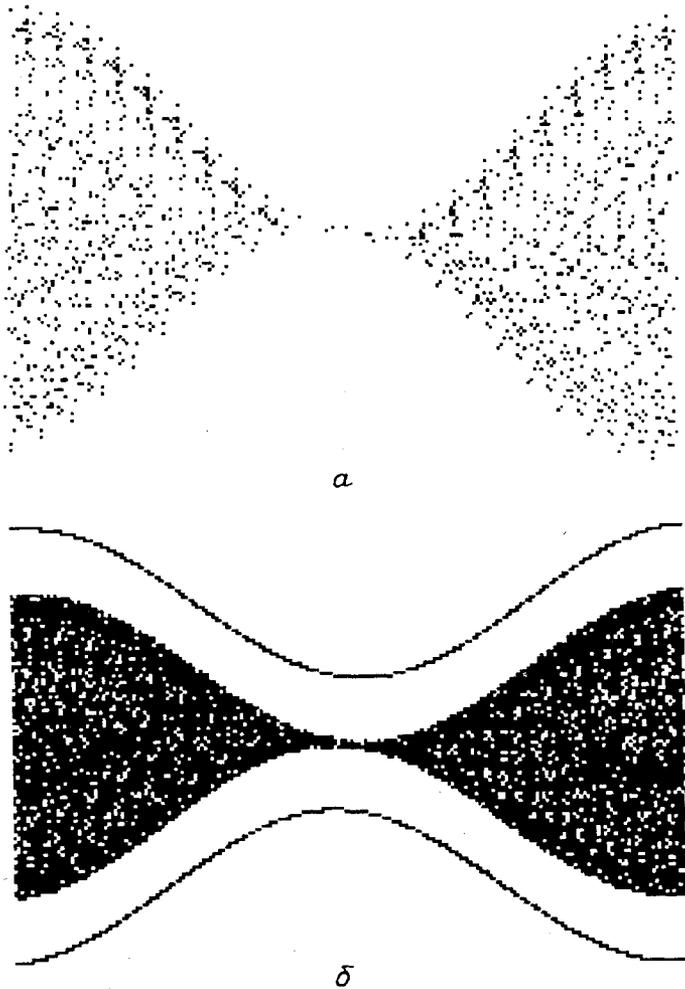


Рис. 4.11. Область хаоса релятивистского отображения в условиях сильной перемежаемости. Области изменений: по горизонтали $\theta \in (-\pi, \pi)$, по вертикали $I \in (-1500\pi, 1500\pi)$; значения параметров: $K = 200$, $\tau_k = 6$, $\omega_0 T = 0$; время счета (число шагов отображения): $a - 979$, $b - 5 \cdot 10^4$

кривые, из которых складается вся траектория, могут быть определены из уравнений

$$\begin{aligned} dI/dn &= -K \sin \theta, \\ d\theta/dn &= I/(1 + I^2/\tau_k^2)^{1/2} - \omega_0 T. \end{aligned} \quad (4.88)$$

При $\omega_0 T = 0$ из (4.88) имеем

$$I^2 = -\tau_k^2 + (K/\tau_k)^2 (\cos \theta + \text{const})^2, \quad (4.89)$$

где const — постоянная интегрирования. Соответствующим выбором const можно получить последнюю инвариантную кривую у границы области хаоса.

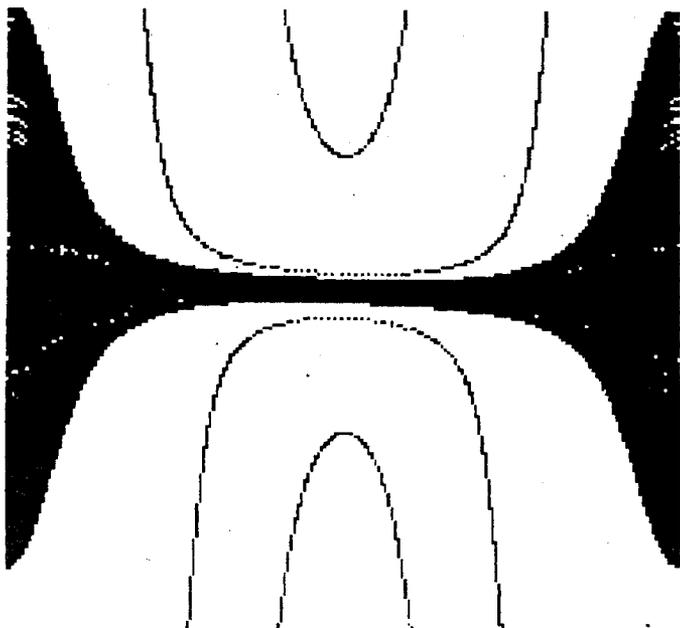


Рис. 4.12. Фазовый портрет релятивистского отображения вблизи резонансного значения $\tau_K \approx 2\pi$. Области изменений: по горизонтали $\theta \in (-\pi, \pi)$, по вертикали $I \in (-10\pi, 10\pi)$; значения параметров: $K = 6$; $\tau_K = 6,28$, $\omega_0 T = 0$

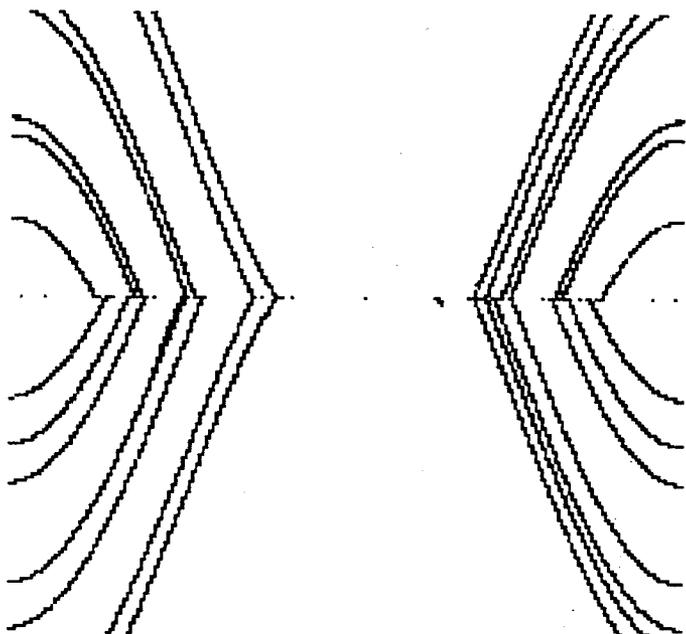


Рис. 4.13. То же, что и на рис. 4.12, но в условиях сильной перемежаемости: $\theta \in (-\pi, \pi)$, $I \in (-5 \cdot 10^4 \pi, 5 \cdot 10^4 \pi)$; $K = 19$, $\tau_K = 12,556$, $\omega_0 T = 0$



Рис. 4.14. То же, что и на рис. 4.11, но при большом значении параметра K : $\theta \in (-\pi, \pi)$; $I \in (-10\,000\pi, 10\,000\pi)$; $K = 10^4$, $\tau_k = 5,5$, $\omega_0 T = 0$

Приведем еще два примера фазовой плоскости релятивистского отображения (4.82) вблизи резонансных значений τ_k . На рис. 4.12 значения K умеренные. Однако энергии, до которых может ускоряться частица, необычайно велики. При этом большие энергии частиц сосредотачиваются вблизи фаз $\theta = \pm\pi$. На рис. 4.13 значение K велико и картина перемежаемости является очень четкой. При этом значение действия достигает значений 10^6 . Механизм стохастического ускорения в условиях сильной перемежаемости уже имеет мало общего с механизмом ускорения Ферми диффузионного типа. В частности, при очень больших значениях $K \gg \tau_k^2$, как видно из (4.89), может измениться характер картины перемежаемости (рис. 4.14).

Глава 5

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПАУТИНА

Обнаружение хаоса в динамических системах порождает ряд вопросов принципиального характера об условиях появления хаоса и о его свойствах. Существуют и вопросы иного характера, цель которых не только понять явление хаоса в целом, но и получить более общее представление о глобальных свойствах динамических систем. Поэтому вопрос о том, может ли хаос быть неустранимым, носит уже совсем иной характер. Положительный ответ на него означал бы принципиальное отсутствие полной интегрируемости таких систем. Поэтому теория стохастического слоя, рассмотренная

в гл. 3, в действительности содержит существенно большую информацию. Она состоит в том, что в общем случае любая динамическая система имеет неустраиваемую область стохастичности в фазовом пространстве. Повторим кратко, почему это так.

Представим гамильтониан системы в форме

$$H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta; t),$$

где I, θ — N_0 -мерные векторы. Такая система имеет $N = N_0 + \frac{1}{2}$ степеней свободы, причем $\frac{1}{2}$ относится к переменной t (время). В общем случае часть гамильтониана H_0 имеет сепаратрисы, и поэтому возмущение ϵV , разрушая их, образует стохастические слои при любых ϵ . Даже если $N_0 = 1$, периодические по t возмущения дают тот же результат. Хотя существование области стохастичности и становится, таким образом, некоторым универсальным свойством динамических систем, это еще не означает сильной неустойчивости в системе. Причина такого утверждения заключается в том, что области хаоса очень узкие. Поэтому дальнейшая судьба стохастических траекторий определяется тем, как соединяются области хаоса между собой или, иначе, тем, какова топология слабого хаоса в фазовом пространстве.

Объединение всех стохастических слоев в фазовом пространстве может образовать единую сеть — стохастическую паутину. По паутине возможно сколь угодно далекое блуждание частицы. Поэтому существование паутины означает качественно новое проявление хаоса. Оно выражается в универсальном механизме неустраиваемой диффузии в фазовом пространстве. В действительности это только одно из следствий. Другое, не менее важное, связано с геометрией паутины. В этой главе будет начато обсуждение того, как возникает стохастическая паутина.

§ 5.1. КАМ-торы и диффузия Арнольда

В § 2.3 была рассмотрена КАМ-теория, определяющая условия сохранения инвариантных торов гамильтоновских систем при действии на систему малого возмущения. Одна из центральных идей этой теории заключается в том, что мера разрушенных торов мала и, более того, малые области, где лежат разрушенные торы, зажаты между инвариантными торами (рис. 5.1). Эта же ситуация хорошо представлена на рис. 3.4 для стандартного отображения, где число степеней свободы равно $N = 3/2$. Ситуация могла бы сильно измениться, если бы существовали торы, которые могли бы пересекать систему вложенных друг в друга торов на рис. 5.1. Тогда различные стохастические слои оказались бы соединенными друг с другом, образуя некоторую сеть каналов со стохастической динамикой внутри. Однако по чисто топологическим причинам возможность такого пересечения существует лишь при $N > 2$. Явление универсальной диффузии по образовавшейся таким образом паутине при $N > 2$ было обнаружено Арнольдом [1]. Механизм образования паутины здесь следующий.

Рассмотрим сначала случай $N = 2$ (случай $N = 3/2$ рассматривается точно так же). Запишем гамильтониан системы в обычном виде

$$H = H_0(I_1, \dots, I_N) + \epsilon V(I_1, \theta_1; \dots; I_N, \theta_N) \quad (5.1)$$

Рис. 5.1. Области разрушенных торов зажаты между инвариантными торами

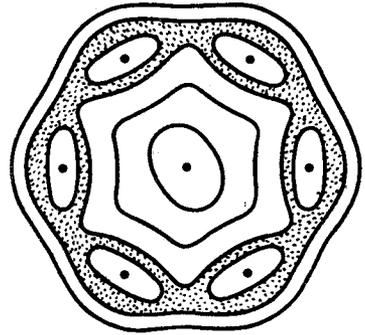
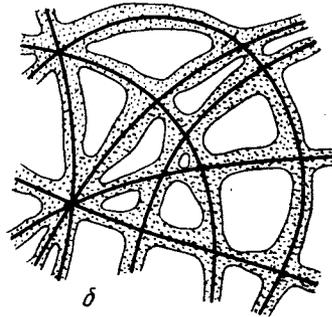
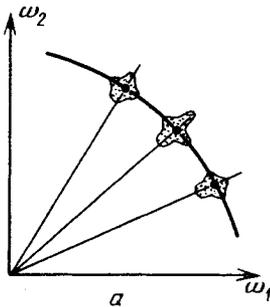


Рис. 5.2. Области стохастичности при $N = 2$ (а) и $N > 2$ (б).



и введем частоты невозмущенного движения на N -мерном торе

$$\omega_j = \partial H_0 / \partial I_j \quad (j = 1, \dots, N). \quad (5.2)$$

Каждая частота является функцией, вообще говоря, всех действий:

$$\omega_j = \omega_j(I_1, \dots, I_N) \quad (j = 1, \dots, N). \quad (5.3)$$

Выделим резонансные торы, которые определяются уравнением

$$\sum_{j=1}^N n_j \omega_j = 0, \quad (5.4)$$

где n_j — какие-либо целые числа. Для каждого комплекта целых чисел (n_1, \dots, n_N) имеется множество решений $I^{(0)} \equiv (I_1^{(0)}, \dots, I_N^{(0)})$. Каждое решение $I^{(0)}$ определяет резонансный тор. С ним связано, с одной стороны, образование сепаратрисной петли шириной $\sim \epsilon^{1/2}$ и, с другой стороны, ее разрушение и появление на ее месте стохастического слоя под действием различных нерезонансных членов в (5.1). Этот процесс был подробно описан в § 2.1, 2.2, 3.5. Теперь посмотрим на это же явление с несколько иной точки зрения.

При $N = 2$ условие (5.4) имеет вид

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0. \quad (5.5)$$

Согласно (5.3) каждая из частот зависит от двух действий (I_1, I_2) . Далее в соответствии с КАМ-теорией предполагаем отсутствие вырождения по

частотам (см. формулу (2.33)):

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_j \partial I_k} \right| \neq 0. \quad (5.6)$$

Перейдем от переменных (I_1, I_2) к переменным (ω_1, ω_2) . Формулы (5.2) определяют эту замену переменных. На плоскости (ω_1, ω_2) решения уравнения (5.5) выглядят особенно просто. Это семейство прямых

$$\omega_2 = -(n_1/n_2) \omega_1 \quad (5.7)$$

для всевозможных значений n_1 и n_2 (рис. 5.2). На поверхности заданной энергии E имеем

$$E = H_0(I_1, I_2). \quad (5.8)$$

Поэтому на ней между I_1 и I_2 существует одно соотношение, определяемое формулой (5.8). Это означает, что резонансные торы на заданной энергетической поверхности определяются из системы уравнений (5.7) и (5.8) для каждой пары целых чисел (n_1, n_2) . Решениями являются точки на плоскости (ω_1, ω_2) (см. рис. 5.2 а).

Каждой такой точке соответствует один резонанс, и каждому такому резонансу соответствует стохастический слой, создающий на плоскости (ω_1, ω_2) малую область хаоса. При $\epsilon \rightarrow 0$ размеры областей стремятся к нулю, и они не пересекаются.

При $N > 2$ все происходит иначе. Например, при $N = 3$ вместо (5.5) имеем

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3 = 0, \quad (5.9)$$

где каждая из частот зависит от трех действий (I_1, I_2, I_3) . В пространстве $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ уравнение (5.9) определяет семейство поверхностей. На поверхности энергии E имеем

$$E = H_0(I_1, I_2, I_3) = \tilde{H}_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (5.10)$$

где функция \tilde{H}_0 получается из H_0 заменой переменных. Это тоже уравнение поверхности, которая пересекается с поверхностями (5.9) по некоторым кривым. Таким образом, резонансные торы имеют некоторые общие части вдоль кривых, являющихся решениями двух уравнений (5.9) и (5.10) относительно трех переменных. Малое возмущение $\sim \epsilon$ "одевает" эти кривые стохастическим слоем. Это и есть стохастическая паутина (рис. 5.2 б).

При малых значениях ϵ структура паутины определяется лишь двумя уравнениями:

$$E = H_0(I_1, \dots, I_N), \quad (5.11)$$

$$n_1 \frac{\partial H_0}{\partial I_1} + \dots + n_N \frac{\partial H_0}{\partial I_N} = 0,$$

не зависящими от ϵ . Поэтому некоторый грубый вид паутины не связан никак с возмущением в (5.1) и определяется некоторыми структурными свойствами динамической системы с гамильтонианом H_0 . Стохастический слой на этой грубой структуре является неустранимым, т.е. он существует

при сколь угодно малых ϵ . Вместе с ним имеется неустранимая диффузия системы, у которой начальные условия оказались лежащими в области паутины. Это и есть диффузия Арнольда (ком. 5.1).

§ 5.2. Слабый хаос и стохастическая паутина

Ранее мы познакомились с ситуацией, в которой сколь угодно малое возмущение приводит к образованию областей фазового пространства, внутри которых динамика системы является стохастической. Примером их являются стохастические слои (при $N > 1$) и стохастическая паутина (при $N > 2$). Чем меньше возмущение, тем меньше области хаоса. Однако хаос неустраним, если только выполнены некоторые общие условия относительно размерности системы. В некотором не очень строгом смысле можно назвать случай, когда области стохастической динамики очень малы, случаем слабого хаоса. Как бы малы ни были области хаоса, их существование означает принципиальную неинтегрируемость системы.

Слабый хаос может реализоваться в виде стохастических слоев или в виде стохастической паутины. Из КАМ-теории следует, что стохастическая паутина существует при $N > 2$, т.е. минимальной размерностью системы, при которой возникает паутина, является

$$\min N = 2 \frac{1}{2}. \quad (5.12)$$

Может ли величина (5.12) быть понижена? Утвердительный ответ на этот вопрос был получен в серии работ [7–11]. В несколько грубой формулировке он заключается в том, что стохастическая паутина существует уже при

$$\min N = 1 \frac{1}{2}, \quad (5.13)$$

если только отказаться от условия отсутствия вырождения (5.6).

Рассмотрим движение линейного осциллятора под влиянием возмущения в виде плоской волны

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon \frac{\omega_0^2}{k} \sin(kx - vt). \quad (5.14)$$

Гамильтониан, приводящий к уравнению (5.14), равен

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) + \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \cos(kx - vt). \quad (5.15)$$

Левая часть уравнения (5.14) описывает очень простую динамику линейных колебаний. Все нетривиальные виды движения порождаются возмущением и его взаимодействием с невозмущенным движением. Однако теперь ситуация может сильно отличаться от той, которая имела место в условиях КАМ-теории. Чтобы убедиться в этом, перейдем в выражении (5.15) к новым переменным действие – угол. Для переменных (x, \dot{x}) положим

$$x = (2I_x / \omega_0)^{1/2} \sin \varphi_x, \quad \dot{x} = (2\omega_0 I_x)^{1/2} \cos \varphi_x. \quad (5.16)$$

В этих переменных

$$H = \omega_0 I_x + eV(I_x, \varphi_x; t),$$

$$V(I_x, \varphi_x; t) = \frac{\omega_0^2}{k^2} \cos \left[k \left(\frac{2I_x}{\omega_0} \right)^{1/2} \sin \varphi_x - vt \right]. \quad (5.17)$$

Невозмущенная часть гамильтониана $H_0 = \omega_0 I_x$ не удовлетворяет условию невырожденности (5.6). Поэтому при резонансе

$$n\omega_0 = \nu, \quad (5.18)$$

где n — целое число, амплитуда осциллятора может возрастать очень сильно. Загравочная нелинейность отсутствует и выход из резонанса может произойти только благодаря возмущению. Далее мы увидим, что эта ситуация является общей для систем, близких к линейным.

Задача (5.14) имеет наглядную интерпретацию. Она эквивалентна движению частицы в постоянном магнитном поле B_0 и в поле плоской волны, распространяющейся перпендикулярно к магнитному полю. Запишем уравнение движения частицы для этого случая в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{mc} [\dot{\mathbf{r}} B_0] + \frac{e}{m} E_0 \sin(k\mathbf{r} - vt). \quad (5.19)$$

Положим, что B_0 направлено вдоль оси z , вектор \mathbf{r} лежит в плоскости (x, y) и направим векторы \mathbf{k} и E_0 вдоль оси x (продольная волна). Тогда из (5.19) следует

$$\ddot{x} = \omega_0 \dot{y} + e \frac{\omega_0^2}{k} \sin(kx - vt), \quad \ddot{y} = -\omega_0 \dot{x}, \quad (5.20)$$

где

$$\omega_0 = eB_0/(mc), \quad e\omega_0^2 = eE_0 k/m.$$

Из (5.20) следует существование интеграла движения

$$\dot{y} + \omega_0 x = \text{const}.$$

Полагая без ограничения общности $\text{const} = 0$, приходим к уравнению (5.14) (ком. 5.2).

Покажем, как в уравнении (5.14) или (5.15) возникает паутина при резонансном условии (5.18). Совершим последовательно несколько замен переменных. Сначала введем обычным образом полярные координаты:

$$x = \rho \sin \varphi, \quad \dot{x} = \omega_0 \rho \cos \varphi, \quad (5.21)$$

и воспользуемся разложением

$$\cos(kx - vt) = \cos(k\rho \sin \varphi - vt) = \sum_m J_m(k\rho) \cos(m\varphi - vt), \quad (5.22)$$

где J_m — функция Бесселя. Если использовать отмеченную аналогию с движением в магнитном поле, то ρ — ларморовский радиус. Гамильтониан (5.15) в новых переменных (5.21) принимает вид с учетом разложения (5.22):

$$H = \frac{1}{2} \omega_0^2 \rho^2 + e \frac{\omega_0^2}{k^2} \sum_m J_m(k\rho) \cos(m\varphi - vt). \quad (5.23)$$

Выделим из суммы член с $m = n_0$:

$$H = \frac{1}{2} \omega_0^2 \rho^2 + \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} J_{n_0}(k\rho) \cos(n_0\varphi - \nu t) + \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \sum_{m \neq n_0} J_m(k\rho) \cos(m\varphi - \nu t). \quad (5.24)$$

Введем новые переменные

$$I = (\omega_0/2n_0) \rho^2, \quad \theta = n_0\varphi - \nu t \quad (5.25)$$

и запишем

$$\tilde{H} = H - \nu I, \quad (5.26)$$

где H выражено как функция (I, θ) . Прямым вычислением легко убедиться, что уравнения

$$\dot{I} = -\partial \tilde{H} / \partial \theta, \quad \dot{\theta} = \partial \tilde{H} / \partial I \quad (5.27)$$

эквивалентны уравнению движения (5.14). Подстановкой (5.25) в (5.24) и (5.26) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & (n_0 \omega_0 - \nu) I + \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} J_{n_0}(k\rho) \cos \theta + \\ & + \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \sum_{m \neq n_0} J_m(k\rho) \cos \left[\frac{m}{n_0} \theta - \left(1 - \frac{m}{n_0} \right) \nu t \right], \end{aligned} \quad (5.28)$$

где для сокращения записи пишется ρ , которое следует считать согласно (5.25) равным

$$\rho = (2n_0 I / \omega_0)^{1/2}. \quad (5.29)$$

Таким образом, выражение $\tilde{H} = \tilde{H}(I, \theta; t)$ является гамильтонианом относительно новых канонических переменных (I, θ) . Его можно записать также в виде

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0(I) + \tilde{V}(I, \theta; t), \quad (5.30)$$

где согласно (5.28) обозначено

$$\tilde{H}_0(I) = (n_0 \omega_0 - \nu) I + \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} J_{n_0}(k\rho) \cos \theta, \quad (5.31)$$

$$\tilde{V}(I, \theta; t) = \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \sum_{m \neq n_0} J_m(k\rho) \cos \left[\frac{m}{n_0} \theta - \left(1 - \frac{m}{n_0} \right) \nu t \right]$$

и для ρ следует использовать выражение (5.29).

Далее нас будет интересовать резонансный случай (5.18). Пусть это условие выполняется для некоторого $n = n_0$, т.е. имеет место равенство

$$n_0 \omega_0 = \nu. \quad (5.32)$$

Это и есть определение числа n_0 , которое ранее было введено формально.

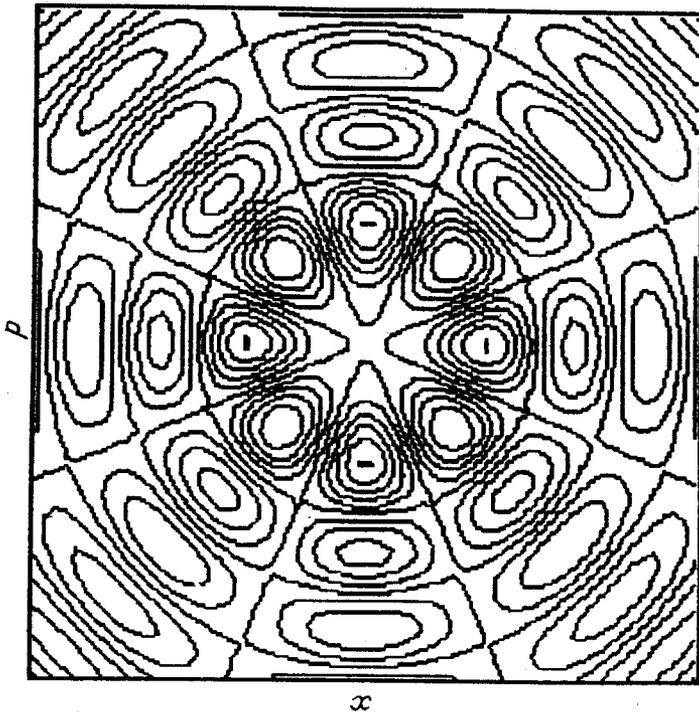


Рис. 5.3. Фазовый портрет системы с сепаратрисной сеткой в форме паутины: $n_0 = 4$

При условии (5.32) выражение для \tilde{H}_0 принимает вид

$$\tilde{H}_0 = \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} J_{n_0}(k\rho) \cos \theta = \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} J_{n_0}(k(2n_0 I / \omega_0)^{1/2}) \cos \theta. \quad (5.33)$$

Проведем предварительный анализ динамической системы, возникающей в резонансном случае. Оба члена в гамильтониане, и \tilde{H}_0 и \tilde{V} , пропорциональны ϵ . Поэтому стационарная часть гамильтониана, не зависящая от времени, индуцирована возмущением. Она исчезает при $\epsilon \rightarrow 0$, и это — новый элемент по сравнению с задачами, рассматривавшимися ранее.

Будем рассматривать $\tilde{H}_0(I, \theta)$ как невозмущенную часть гамильтониана \tilde{H} , а $\tilde{V}(I, \theta, t)$ — как возмущение. Далее станет ясно, почему это возможно. Фазовый портрет для гамильтониана (5.33) приведен на рис. 5.3. Сепаратрисы образуют на плоскости (x, \dot{x}) сетку типа паутины с числом лучей, равным n_0 , и с поворотной симметрией на угол $\alpha = 2\pi/n_0$ для четных n_0 и с числом лучей $2n_0$ и симметрией поворота на угол $\alpha = \pi/n_0$ для нечетных n_0 . Особые точки системы находятся из уравнений

$$\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta} = 0. \quad (5.34)$$

Отсюда получается, если подставить для H_0 выражение (5.33), система гиперболических точек (ρ_h, θ_h) :

$$J_{n_0}(k\rho_h) = 0, \quad \theta_h = \pm \pi/2, \quad (5.35)$$

и эллиптических точек (ρ_e, θ_e) :

$$J'_{n_0}(k\rho_e) = 0, \quad \theta_e = 0, \pi. \quad (5.36)$$

Семейство сепаратрис образовано $2n_0$ лучами и пересекающимися их окружностями с радиусами $\rho_n^{(s)}$, где $k\rho_n^{(s)}$ — различные корни функции Бесселя J_{n_0} . В ячейках паутины, образованной сепаратрисами, движение происходит по замкнутым орбитам вокруг эллиптических точек. Эти

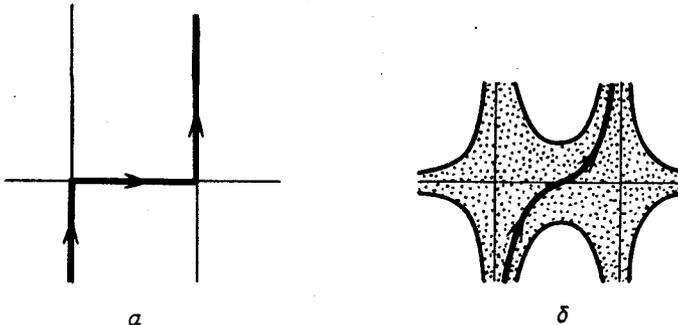


Рис. 5.4. Путь, указанный стрелками в случае *a* реально невозможен, так как приближение к гиперболической точке происходит бесконечно долго. Однако он возможен в случае *б*, когда образуется стохастический слой

точки (5.36) расположены в центрах ячеек. Таким образом описано невозмущенное движение, задаваемое гамильтонианом (5.33). Существует принципиальное различие между этим движением и движением, например, нелинейного маятника. По паутине частица может двигаться в радиальном направлении, в то время как перемещение в радиальном направлении для систем типа маятника отсутствует. В этом принципиальная особенность нелинейного случая, для которого имеет место (5.6).

Однако движение по радиусу, которое в среднем отличается от нуля, возможно только по сепаратрисам. Оно будет замораживаться вблизи гиперболических точек. Поэтому продвижение по радиусу для гамильтониана \tilde{H}_0 (5.33) также не происходит. Если принять во внимание действие возмущения \tilde{V} (5.31), то это должно привести к разрушению сепаратрис и образованию на их месте каналов с конечной шириной, в которых происходит стохастическая динамика (рис. 5.4).

§ 5.3. Инвариантные торы внутри паутины (П-торы) и ширина паутины

Опишем более детально, как происходит движение внутри паутины. Вернемся к исходному гамильтониану (5.30) и произведем в нем ряд упрощений. Будем считать выполненным условие резонанса (5.32) и удержим в выражении (5.31) для \tilde{V} только члены с $m = n_0 \pm 1$.

Как будет видно далее, остальные слагаемые в сумме для \tilde{V} дают меньший вклад (подобный прием уже использовался при вычислении толщины стохастического слоя в § 3.4). В результате из (5.31)

имеем

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}, \quad \tilde{H}_0 = \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} J_{n_0}(k\rho) \cos \theta, \quad (5.37)$$

$$\tilde{V} = \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \left\{ J_{n_0+1}(k\rho) \cos \left[\left(1 + \frac{1}{n_0} \right) \theta + \frac{\nu t}{n_0} \right] + \right. \\ \left. + J_{n_0-1}(k\rho) \cos \left[\left(1 - \frac{1}{n_0} \right) \theta - \frac{\nu t}{n_0} \right] \right\}.$$

Рассмотрим также для простоты достаточно удаленные от центра паутины области, т.е. положим

$$k\rho \gg 1. \quad (5.38)$$

Используем согласно (5.38) асимптотику функций Бесселя

$$J_n(k\rho) \sim (2/\pi k\rho)^{1/2} \cos(k\rho - \pi n/2 - \pi/4). \quad (5.39)$$

Выделим некоторую фиксированную ячейку паутины и опишем семейство траекторий внутри нее, сначала пренебрегая возмущением \tilde{V} (рис. 5.5). Пусть ρ_0 — эллиптическая точка в центре ячейки. Согласно (5.36) и (5.39) имеем при условии (5.38)

$$k\rho_0 - \pi n_0/2 - \pi/4 = 0, \pi. \quad (5.40)$$

С помощью разложения (5.39) и условия (5.40) переписываем \tilde{H}_0 из (5.37) следующим образом:

$$\tilde{H}_0 = -\sigma \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \left(\frac{2}{\pi k \tilde{\rho}_0} \right)^{1/2} \cos(k\tilde{\rho}) \cos \theta, \quad \sigma = \pm 1, \quad (5.41)$$

где $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ и разные знаки соответствуют разным координатам эллиптических точек в зависимости от значения правой части в (5.40).

Остановимся на анализе траекторий, определяемых гамильтонианом \tilde{H} (5.41). Размер одной сепаратрисной ячейки имеет порядок $2\pi/k$. Поэтому $\max \Delta\rho = 2\pi/k$, и согласно неравенству (5.37)

$$|\tilde{\rho}| = |\rho - \rho_0| \ll \rho_0. \quad (5.42)$$

Из определения действия (5.25) имеем

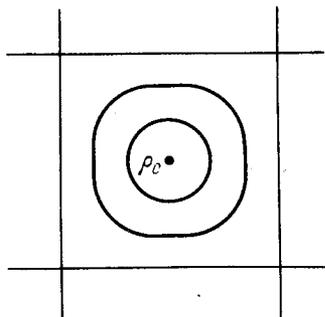
$$I = \frac{1}{2n_0} \omega_0 \rho^2 \approx \frac{1}{2n_0} \omega_0 \rho_0^2 + \frac{\omega_0 \rho_0}{n_0} \tilde{\rho}. \quad (5.43)$$

Замена переменной

$$I = I - \frac{1}{2n_0} \omega_0 \rho_0^2$$

является канонической (сдвиг на константу). В том же приближении, в котором получен гамильтониан \tilde{H} , можно считать канонической пару переменных $(\tilde{\rho}, \theta)$. Соответственно гамильтоновские уравнения движения

Рис. 5.5. Одна ячейка паутины с эллиптической точкой ρ_0 в центре и семейство орбит внутри нее



имеют вид

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{n_0}{\rho_0 \omega_0} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta}, \quad (5.44)$$

$$\dot{\theta} = \frac{n_0}{\rho_0 \omega_0} \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\rho}}.$$

Они, конечно, совпадают с теми, которые можно получить из (5.27) при условии (5.42).

Обозначим

$$\omega_w = -\sigma(2/\pi)^{1/2} \epsilon n_0 \omega_0 / (k \rho_0)^{3/2} \quad (5.45)$$

и положим

$$H_w = \omega_w \cos \xi \cos \theta, \quad (5.46)$$

где $\xi = k\tilde{\rho}$. Тогда уравнения

$$\dot{\xi} = \partial H_w / \partial \theta, \quad \dot{\theta} = -\partial H_w / \partial \xi \quad (5.47)$$

эквивалентны (5.44). Гамильтониан H_w можно назвать гамильтонианом паутиных торов (Π -торов). Величина ω_w является частотой малых колебаний для траекторий, обматывающих Π -торы.

Перепишем (5.47) в явном виде:

$$\dot{\xi} = -\omega_w \cos \xi \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega_w \sin \xi \cos \theta. \quad (5.48)$$

Используя (5.46) и интегрируя (5.48), находим

$$\sin \theta = \kappa \operatorname{sn}(\omega_w(t - t_0); \kappa), \quad (5.49)$$

где sn — эллиптическая функция Якоби, t_0 — момент времени, в который $\theta = 0$, и κ — модуль эллиптической функции:

$$\kappa = (1 - H_w^2 / \omega_w^2)^{1/2}. \quad (5.50)$$

Используя решение (5.49) и выражения (5.46) и (5.50), получаем

$$\sin \xi = \kappa \frac{\operatorname{cn}(\omega_w(t - t_0); \kappa)}{\operatorname{dn}(\omega_w(t - t_0); \kappa)}. \quad (5.51)$$

Решения (5.49) и (5.51) являются периодическими функциями времени. Период нелинейных колебаний равен

$$T(H_w) = \frac{4}{|\omega_w|} K(\kappa), \quad (5.52)$$

где $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $\kappa \rightarrow 0$ имеем

$$T_w = 2\pi / |\omega_w|,$$

т.е. период малых колебаний. Вблизи сепаратрисы $\kappa \rightarrow 1$, и из формулы

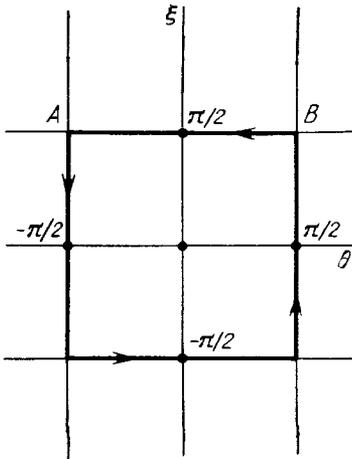


Рис. 5.6. Различные сепаратрисные ветви одной ячейки паутины

(5.52) следует

$$\begin{aligned}
 T(H_w) &= \frac{4}{|\omega_w|} \ln \frac{4}{(1 - \kappa^2)^{1/2}} = \\
 &= \frac{4}{|\omega_w|} \ln \frac{4|\omega_w|}{|H_w|} = \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{4}{\epsilon n_0 \omega_0} (k\rho_0)^{3/2} \times \\
 &\times \ln \left[4\epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \left(\frac{2}{\pi k\rho_0}\right)^{1/2} \frac{1}{\tilde{H}_0} \right]. \quad (5.53)
 \end{aligned}$$

На сепаратрисах $H_w = 0$. Из (5.46) следует, что четыре сепаратрисы определяются уравнениями

$$\cos \xi = 0, \quad \xi = \pm\pi/2 \quad (5.54)$$

и

$$\cos \theta = 0, \quad \theta = \pm\pi/2. \quad (5.55)$$

Они соответствуют четырем сторонам квадрата (в приближении $\tilde{\rho} \ll \rho_0$) на рис. 5.6. На двух горизонтальных сепаратрисах из (5.49) и (5.54) следует уравнение движения

$$\sin \theta = \pm \text{th} [|\omega_w|(t - t_0)]; \quad \xi = \pm\pi/2. \quad (5.56)$$

На двух вертикальных сепаратрисах из (5.51) и (5.55) можно получить

$$\sin \xi = \mp \text{th} [2|\omega_w|(t - t_0)]; \quad \theta = \mp\pi/2 \quad (5.57)$$

(рис. 5.6) (ком. 5.3).

Замкнутые траектории, описываемые гамильтонианом (5.41) или (5.46), являются сечениями инвариантных торов, если дополнить фазовое пространство (I, θ) переменной "время" обычным способом, учитывая периодическое по времени возмущение \tilde{V} . Инвариантные торы внутри паутины будем называть Π -торами. Их отличие от КАМ-торов проявляется в зависимости периода T_w от ϵ . В случае КАМ-торов $T \sim 1/\epsilon^{1/2}$, в случае Π -торов $T_w \sim 1/\epsilon$.

Перейдем теперь к описанию разрушения сепаратрис и образованию на их месте стохастической паутины. Для этого надо рассмотреть исходный гамильтониан (5.37). Используя асимптотику (5.39), перепишем возмущение \tilde{V} следующим образом:

$$\tilde{V} \approx 2\epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \left(\frac{2}{\pi k\rho_0}\right)^{1/2} \sigma \sin(k\tilde{\rho}) \sin \theta \sin \left[\frac{1}{n_0} (\theta + \nu t) \right]. \quad (5.58)$$

Таким образом, полная задача описывается согласно (5.41) и (5.58) сле-

дующим гамильтонианом:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \sigma \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \left(\frac{2}{\pi k \rho_0} \right)^{1/2} \left\{ -\cos(k\tilde{\rho}) \cos \theta + \right. \\ \left. + 2 \sin(k\tilde{\rho}) \sin \theta \sin \left[\frac{1}{n_0} (\theta + \nu t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{H}}_0 = \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\rho}} \dot{\tilde{\rho}} = \frac{n_0}{\rho_0 \omega_0} \left(\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \right) = \\ = \frac{2}{\pi} n_0 \epsilon^2 \frac{\omega_0^3}{k^2 (k \rho_0)^2} \sin \left(\frac{\theta}{n_0} + \omega_0 t \right) [\cos(2k\tilde{\rho}) - \cos 2\theta]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

На участке траектории вблизи сепаратрисы AB (рис. 5.6) имеем $k\tilde{\rho} = \pi/2$, $\cos(2k\tilde{\rho}) = -1$.

Поэтому при $n_0 \gg 1$

$$\dot{\tilde{H}}_0 = -\frac{4}{\pi} n_0 \epsilon^2 \frac{\omega_0^3}{k^2 (k \rho_0)^2} \cos^2 \theta \sin(\omega_0 t). \quad (5.61)$$

Вычислим изменение $\Delta \tilde{H}_0$ вблизи сепаратрисы под действием возмущения. Интегрирование (5.61) дает

$$\Delta \tilde{H}_0 = -\frac{4}{\pi} n_0 \epsilon^2 \frac{\omega_0^3}{k^2 (k \rho_0)^2} \int dt \sin(\omega_0 t) \cos^2 \theta.$$

В эту формулу можно подставить значение для $\cos \theta$, взятое на сепаратрисе. Из (5.56) имеем

$$\cos \theta = 1/\text{ch} [2|\omega_w|(t - t_0)].$$

Кроме того, пределы интегрирования можно распространить от $t = -\infty$ до $t = \infty$. В результате получаем

$$\Delta \tilde{H}_0 = -\frac{4\pi}{n_0} \frac{\omega_0^2}{k^2} k \rho_0 \exp \left[-\frac{1}{\epsilon n_0} \left(\frac{\pi}{2} k \rho_0 \right)^{3/2} \right] \sin(\omega_0 t_0). \quad (5.62)$$

Для получения окончательной формы изменения энергии $\Delta \tilde{H}_0$ вблизи сепаратрисы под действием возмущения выразим номер резонанса n_0 через $k\rho_0$, используя определение (5.40) и условие $n_0 \gg 1$. Имеем вместо (5.40)

$$\Delta \tilde{H}_0 = -2\pi^2 \frac{\omega_0^2}{k^2} \exp \left[-\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{5/2} (k\rho_0)^{1/2} \right] \sin(\omega_0 t_0). \quad (5.63)$$

Мы рассмотрели изменение $\Delta \tilde{H}_0$ при движении частицы на участке вблизи одной из сепаратрис AB (рис. 5.6). То же самое происходит и на остальных трех ветвях ячейки. Выражение для $\Delta \tilde{H}_0$ одинаково на всех четырех участках орбиты в силу симметрии задачи, и изменяются лишь моменты времени t_0 , определяющие положение частицы при прохождении

середины участка орбиты вблизи каждой из четырех сепаратрис. Интервал времени между двумя последовательными прохождением вблизи середин сепаратрис равен одной четверти периода, т.е. $T(H_w)/4$. Это позволяет описать динамику системы внутри одной ячейки, соответствующую гамильтониану \tilde{H} (5.34), в виде отображения для переменных \tilde{H}_0 и $\psi = \omega(H_w)t$, где

$$\omega(H_w) = 2\pi/T(H_w) \quad (5.64)$$

— частота нелинейных колебаний внутри сепаратрисной ячейки.

Используя формулы (5.63) и (5.53), имеем отображение вблизи сепаратрис паутины

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{n+1} &= \tilde{H}_n - 2\pi^2 \frac{\omega_0^2}{k^2} \exp \left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/2} \frac{(k\rho_0)^{1/2}}{\epsilon} \right] \sin \psi_n, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{(k\rho_0)^{1/2}}{\epsilon} \ln \left[4\epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \left(\frac{2}{\pi k\rho_0}\right) \frac{1}{\tilde{H}_{n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Условие стохастической динамики

$$K \equiv |\partial\psi_{n+1}/\partial\psi_n - 1| \gg 1$$

определяет границу H_c стохастического слоя, образующегося в окрестности сепаратрис. Имеем из (5.65) при $K = 1$

$$H_c = 2^{-1/2} \pi^{7/2} \frac{(k\rho_0)^{1/2}}{\epsilon} \frac{\omega_0^2}{k^2} \exp \left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/2} \frac{(k\rho_0)^{1/2}}{\epsilon} \right]. \quad (5.66)$$

Толщина стохастической паутины равна $2H_c$. Из (5.66) следует, что она экспоненциально мала по параметру ϵ и, кроме того, экспоненциально убывает с ростом ρ_0 , т.е. по мере удаления от центра паутины. Численный пример стохастической паутины и функции распределения в ней приведен на рис. 5.7 [10].

Таким образом, различные П-торы отделены друг от друга стохастической паутиной. Она образует единую сетку с экспоненциально малой толщиной. В показателе экспоненты стоит множитель $1/\epsilon$, а не $1/\sqrt{\epsilon}$, как в случае паутины Арнольда. Кроме того, сужение паутины с ростом энергии частицы, т.е. по мере удаления от центра паутины, затрудняет диффузию по паутине на большие расстояния и практически обрезает ее.

§ 5.4. Переход — КАМ-торы — П-торы

Выше было показано, что для уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon \frac{\omega_0^2}{k} \sin(kx - \nu t) \quad (5.67)$$

при $\epsilon \ll 1$ и условии резонанса

$$\nu = n_0 \omega_0 \quad (5.68)$$

фазовый портрет выглядит, как система инвариантных П-торов внутри

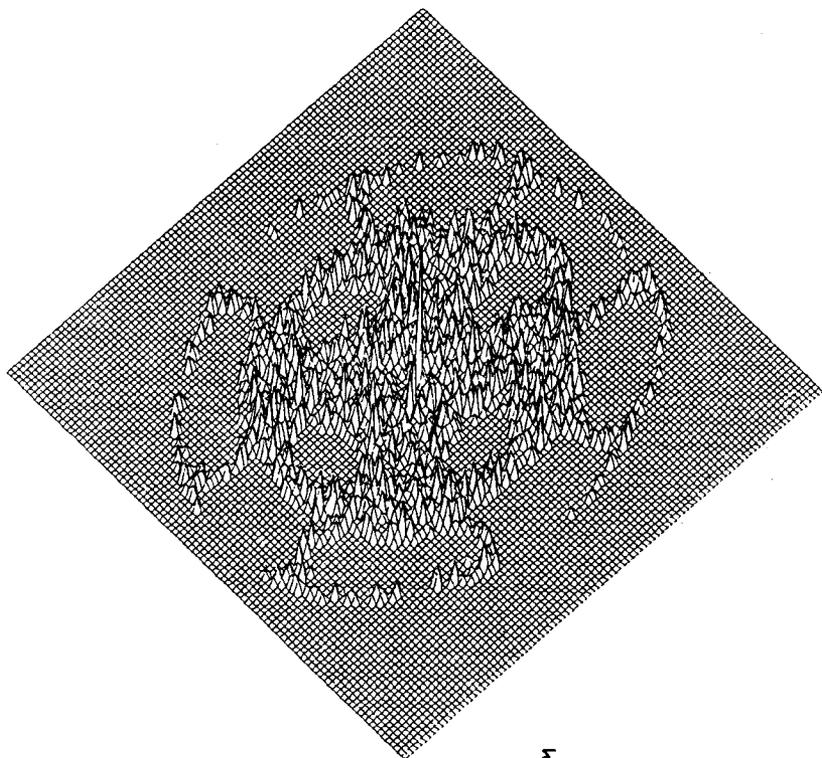
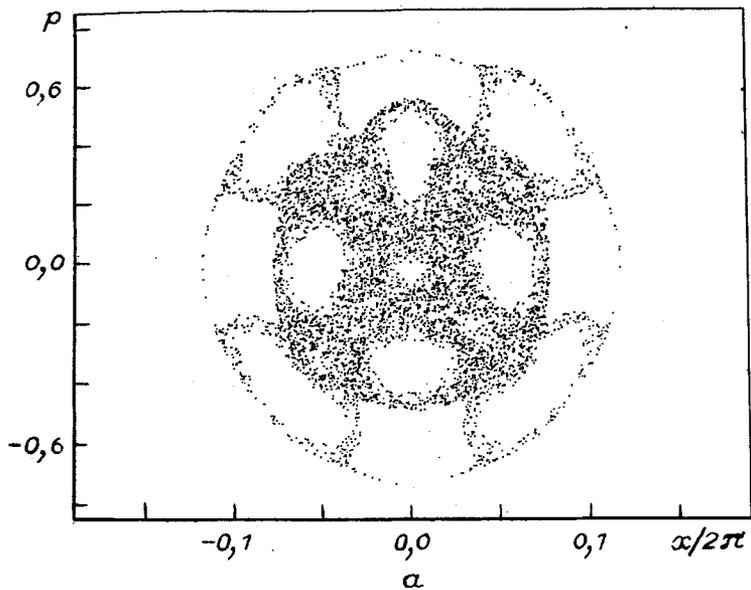


Рис. 5.7. Стохастическая паутина (а) на фазовой плоскости уравнения (5.14) при $\epsilon\omega_0^2/k = 1/10$; $k = 15$; $\nu = 4\omega_0$; $\omega_0 = 1$ и функция распределения фазовых точек в ней (б), построенная за $2 \cdot 10^4$ периодов колебаний $2\pi/\omega_0$

ячеек паутины. Сама паутина является стохастической, т.е. имеет конечную толщину, и внутри нее динамика частицы стохастическая. Паутина существует при произвольно малых ϵ . Сильное вырождение в задаче может быть снято двумя путями: расстройкой резонанса (5.67) и введением нелинейности в левую часть уравнения (5.67).

В этом параграфе мы выясним, что происходит в случае, когда оба вида вырождений (за счет резонанса и за счет линейности невозмущенной задачи) сняты, хотя система остается близкой к вырожденному состоянию.

Рассмотрим снова систему с гамильтонианом

$$H = \dot{x}^2/2 - \omega_0^2 \cos x + (\epsilon\omega_0^2/k^2) \cos(kx - \nu t), \quad (5.69)$$

который описывает движение частицы в поле двух плоских волн. Он соответствует также нелинейному маятнику, возмущаемому плоской волной ($\epsilon \ll 1$).

Будем считать возмущение в (5.69) мелкомасштабным, т.е.

$$k \gg 1. \quad (5.70)$$

Условие (5.69) является очень важным и далее будет ясно почему. Уравнения движения, следующие из (5.69), имеют вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = \epsilon(\omega_0^2/k) \sin(kx - \nu t). \quad (5.71)$$

Разлагаем $\cos x$ в (5.69) до третьего члена и $\sin x$ в (5.71) до второго члена:

$$\sin x \approx x - x^3/6, \quad \cos x \approx 1 - x^2/2 + x^4/24. \quad (5.72)$$

При $x \ll 1$ вклад нелинейных поправок x^4 (или x^3) мал.

Введем снова полярные координаты (ρ, φ) , пользуясь формулами (5.21):

$$x = \rho \sin \varphi, \quad \dot{x} = \omega_0 \rho \cos \varphi. \quad (5.73)$$

Полагая, как и в (5.25),

$$\theta = n_0 \varphi - \nu t,$$

получаем

$$x = \rho \sin \left[\frac{1}{n_0} (\theta + \nu t) \right], \quad \dot{x} = \omega_0 \rho \cos \left[\frac{1}{n_0} (\theta + \nu t) \right]. \quad (5.74)$$

Опишем кратко путь преобразований, для того чтобы избежать некоторых громоздких выкладок. Для основной части гамильтониана (маятник) можно ввести переменные действие — угол. Это уже делалось. Однако нас будет интересовать область малых значений ρ . Поэтому эту часть гамильтониана (H_ρ) можно получить простым усреднением, если подставить разложение (5.72) и (5.73) в (5.70). В результате получаем

$$H_\rho = \omega_0 I + a I^2, \quad a = -n_0^2/16, \quad (5.75)$$

где

$$I = (\omega_0/2n_0) \rho^2, \quad (5.76)$$

так же, как и в (5.25).

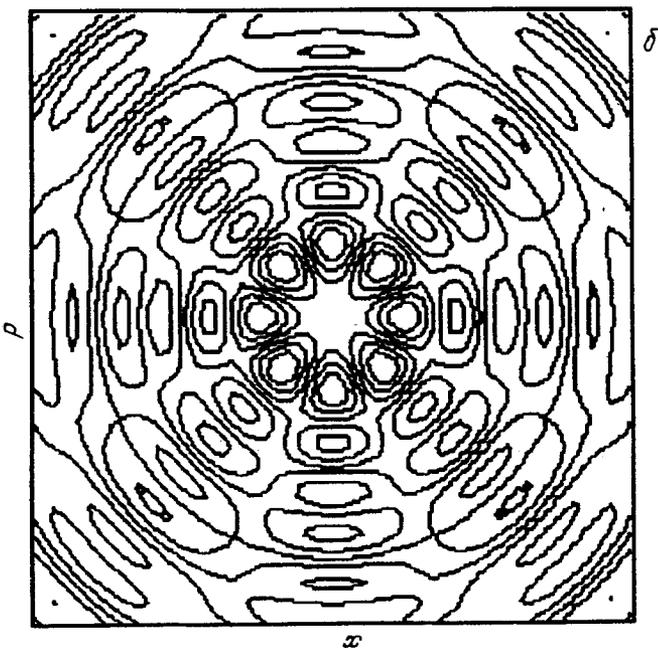
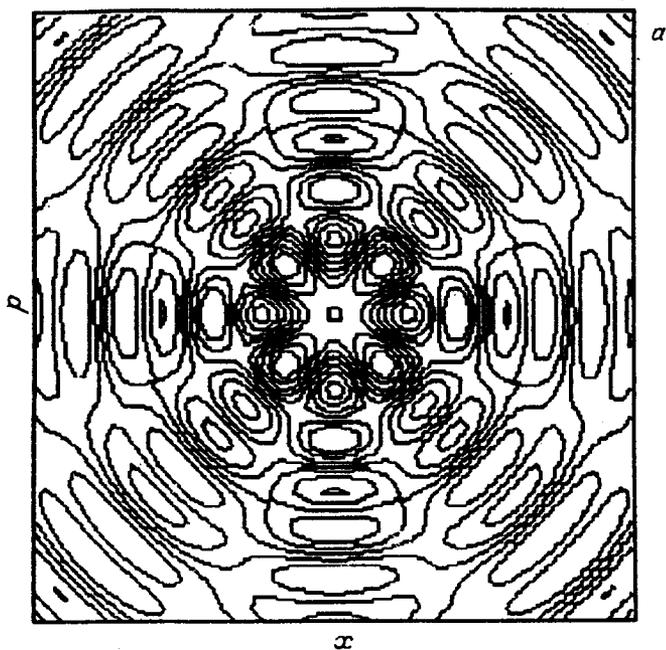


Рис. 5.8. Линии уровня усредненного гамильтониана $H_0(I, \theta) = \text{const}$ определяют семейство траекторий частицы ($n_0 = 4$): а) $\delta\omega_N = 0$, $(k^2/\epsilon\omega_0^2)\delta\omega_L = 0,03$; б) $\delta\omega_L = 0$, $(k^2 a/\epsilon\omega_0^2) = 0,001$

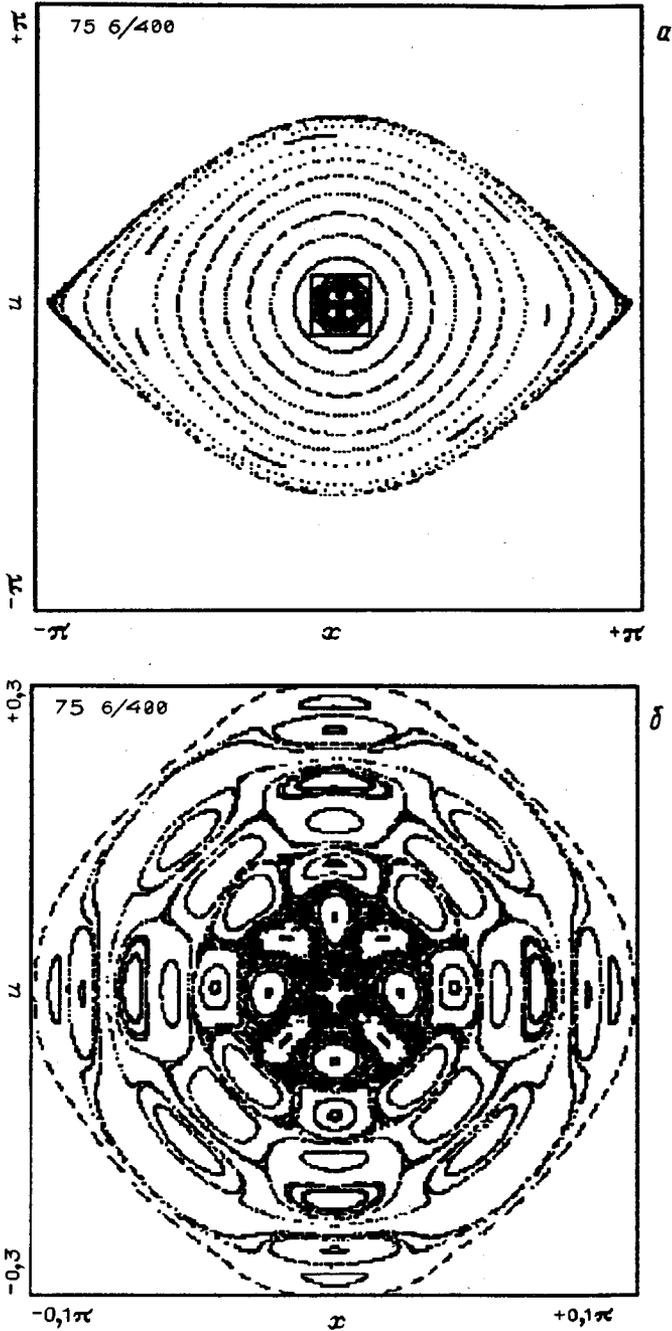


Рис. 5.9. Вкрапление части паутины внутри обычной сепаратрисной ячейки в задаче о возмущении маятника (5.71); $\omega_0 = 1$, $\nu = 4$, $k = 75$; $\epsilon/k = 3/200$; *a* — фазовый портрет внутри сепаратрисной ячейки; *b* — увеличение внутренней области, показанной на рис. *a*)

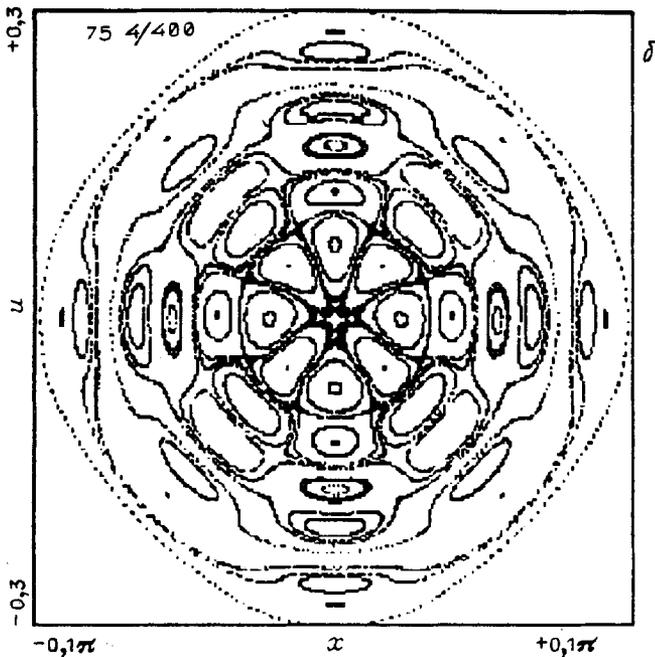
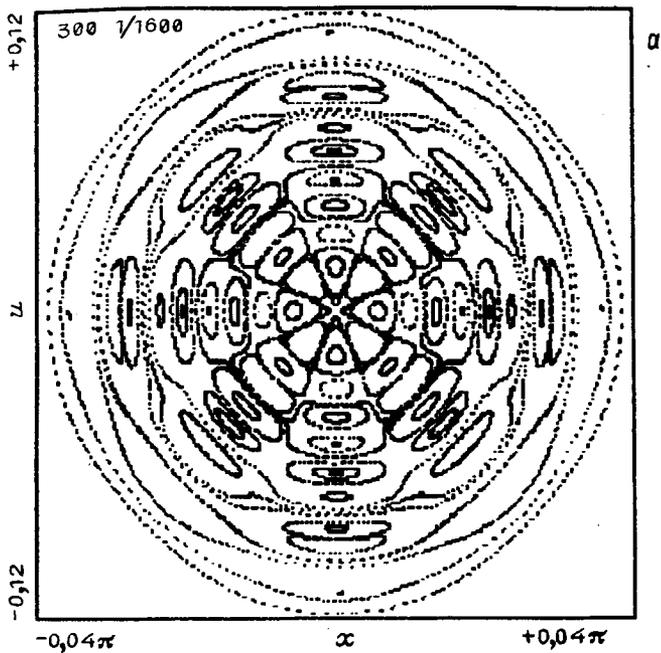
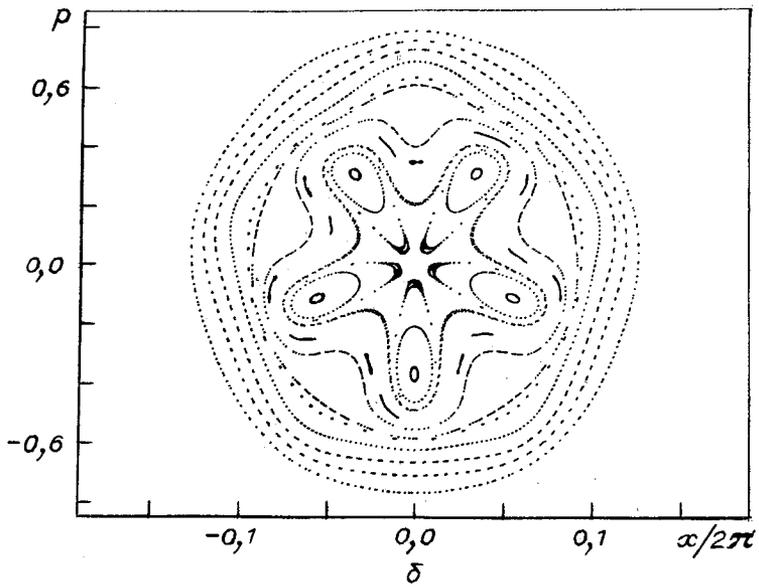
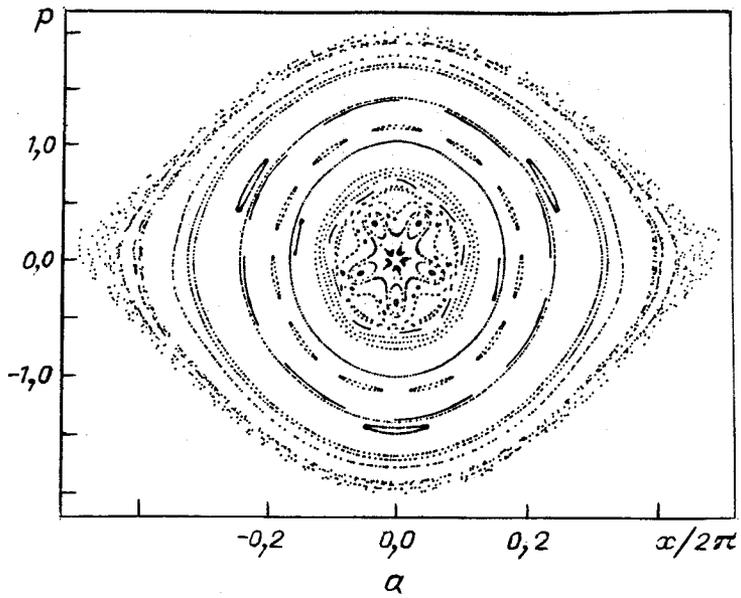


Рис. 5.10. Два примера внутренней области внутри сепаратрисной ячейки: *a* — для $k = 300, \epsilon/k = 1/400, n_0 = 4, \omega_0 = 1$; *б* — для $k = 75, \epsilon/k = 1/100, n_0 = 4, \omega_0 = 1$



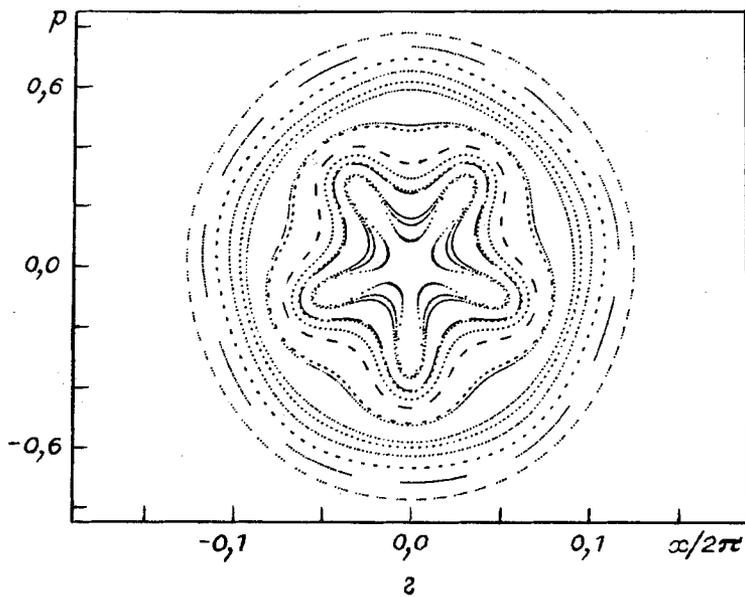
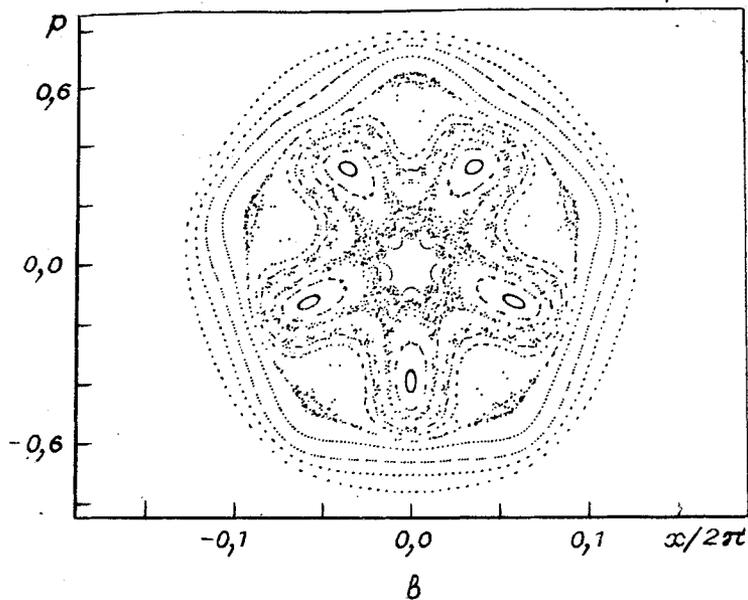


Рис. 5.11. Различные стадии перехода КАМ-торы – П-торы ($\omega_0 = 1$, $\nu = 5$, $k = 12$:
 а) – полная сепаратрисная ячейка при $\epsilon/k = 1/80$, б) – внутренняя часть портрета
 в случае а, в и г – то же, что и в случае б), но при $\epsilon/k = 1/20$ и $\epsilon/k = 1/30$ соот-
 ветственно

Теперь можно использовать то же представление (5.31) для гамильтониана, которое должно отличаться лишь наличием нелинейного добавочного члена:

$$H = H_0(I, \theta) + V(I, \theta; t);$$

$$H_0(I, \theta) = (n_0 \omega_0 - \nu) I + aI^2 + \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} J_{n_0}(k\rho) \cos \theta, \quad (5.77)$$

$$V(I, \theta; t) = \epsilon \frac{\omega_0^2}{k^2} \sum_{m \neq n_0} J_m(k\rho) \cos \left[\frac{m}{n_0} \theta - \left(1 - \frac{m}{n_0} \right) \nu t \right],$$

где подразумевается, что ρ выражено через действие I по формуле (5.76). Структура выражения (5.77), по существу, та же, что и в (5.37). Добавлены лишь два члена в $H_0(I, \theta)$. Первый из них обусловлен расстройкой резонанса, второй — затравочной нелинейностью. При $\epsilon = 0$ частота определяется выражением

$$\delta\omega \equiv \frac{\partial H_0(I, \theta; \epsilon = 0)}{\partial I} = n_0 \omega_0 - \nu + 2aI \equiv \delta\omega_L + \delta\omega_N, \quad (5.78)$$

где $\delta\omega_L = n_0 \omega_0 - \nu$ и $\delta\omega_N = 2aI$. Из-за того, что $\delta\omega \neq 0$, фазовый портрет системы при $V = 0$ уже не имеет паутины (рис. 5.8), так как вырождение снимается. Теперь в фазовом пространстве появляются инвариантные кривые, охватывающие центр. Именно они препятствуют возможной диффузии в радиальном направлении.

Однако, хотя ситуация близка к той, которая имеет место в КАМ-геории, тем не менее многие кривые сильно изгибаются, образуя картину, очень близкую к паутине. Дальнейшая идея выглядит довольно просто: если возмущение достаточно большое, для того чтобы ширина образующегося стохастического слоя могла перекрыть щели между сепаратрисами, то единая большая паутина возникнуть может. Это утверждение иллюстрируется на рис. 5.9, где изображена одна обычная сепаратрисная ячейка для возмущенного маятника. Под действием возмущения сепаратриса разрушается и в ее окрестности образуется очень узкий стохастический слой. Далее в глубине ячейки располагаются инвариантные кривые, являющиеся сечениями КАМ-торов. Однако ближе к центру ячейки появляется область, похожая на сечения П-торов (рис. 5.9б).

Дополнительные два примера на рис. 5.10 показывают, как в результате резонансного условия (5.68) и условия (5.70) внутрь сепаратрисы может имплантироваться ограниченная часть паутины. Чем больше k , тем меньше ячейки паутины, так как их размер имеет порядок $2\pi/k$. Чем больше ϵ , тем шире стохастическая паутина. Если параметры k и ϵ недостаточно велики, то картина внутри основной ячейки сепаратрисы имеет различные промежуточные состояния (рис. 5.11). Эти рисунки хорошо демонстрируют, как деформируются сечения КАМ-торов по мере увеличения параметра k , образуя новые, более мелкие ячейки П-торов.

Описанные изменения мы называем переходом КАМ-торы — П-торы. В процессе перехода при увеличении ϵ происходит бесконечное число бифуркационных изменений фазового портрета. Структуры на фазовой

плоскости, которые возникают вследствие близости к вырождению, являются дополнительными к основной картине фазового портрета, следующего из КАМ-теории.

Глава 6

РАВНОМЕРНАЯ ПАУТИНА

Паутина, рассмотренная в предыдущей главе, была неограниченной. Однако ее ширина экспоненциально быстро убывала по мере удаления от центра, и это делало ее эффективно конечной. В этой главе будет рассмотрен такой случай, когда ширина паутины в среднем не изменяется на всей фазовой плоскости. Такую паутину будем называть равномерной. Она возникла при анализе движения заряженных частиц в магнитном поле и поле перпендикулярного волнового пакета с большим числом гармоник [1, 2]. В действительности интерес к этой задаче оказался значительно шире. Это было вызвано ее связью с проблемой симметрии покрытия плоскости, с блужданиями на структурах, с гидродинамическими структурами и с геометрией квазикристаллов (см. обзор [3] и работу [4]).

В этой главе будет введен новый вид отображения, сохраняющего меру, к которому нельзя непосредственно применить результаты КАМ-теории. Тем самым мы получаем возможность более широкого взгляда на природу хаоса в гамильтоновских системах.

§ 6.1. Отображение с подкручиванием

Исходные уравнения движения частицы имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(x, t) + \frac{e}{mc} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{B}_0], \quad (6.1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ – вектор, лежащий в плоскости (x, y) , \mathbf{E} – волновой пакет, распространяющийся вдоль оси x и направленный вдоль x , \mathbf{B}_0 – постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси z . Отсутствие зависимости правой части (6.1) от y приводит к интегралу движения

$$\dot{y} = v_y = -\omega_0 x + \text{const},$$

где $\omega_0 = eB_0/(mc)$ есть циклотронная частота. Без ограничения общности можно положить $\text{const} = 0$ и тогда

$$\dot{y} = -\omega_0 x. \quad (6.2)$$

Для волнового пакета $\mathbf{E}(x, t)$ примем следующее выражение:

$$\mathbf{E} = -E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(kx - \omega t - nvt) = -E_0 T \sin(kx - \omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (6.3)$$

где E_0 направлено вдоль x и

$$T = 2\pi/\nu. \quad (6.4)$$

Подставляя (6.2) и (6.3) в (6.1), получаем уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 T \sin(kx - \omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (6.5)$$

Оно описывает линейный осциллятор, на который действуют короткие (δ -образные) толчки с периодом T . Для перехода от (6.5) к разностному уравнению обозначим

$$x_n = x(t_n - 0), \quad \dot{x}_n = v_{x,(n)} = \dot{x}_n(t_n - 0).$$

Соотношения между величинами x , \dot{x} слева и справа от δ -функции имеют вид

$$\begin{aligned} x(t_n + 0) &= x(t_n - 0), \\ \dot{x}(t_n + 0) &= \dot{x}(t_n - 0) - \frac{e}{m} TE_0 \sin(kx_n - \omega t_n), \end{aligned}$$

где $t_n = nT$. Эти соотношения приводят к следующему отображению:

$$\begin{aligned} v_{x,(n+1)} &= -\omega_0 x_n \sin(\omega_0 T) + \\ &+ \left[v_{x,(n)} + \frac{e}{m} E_0 T \sin(n\omega T - kx_n) \right] \cos(\omega_0 T), \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cos(\omega_0 T) + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \left[v_{x,(n)} + \frac{e}{m} E_0 T \sin(n\omega T - kx_n) \right] \sin(\omega_0 T). \end{aligned}$$

При $\omega_0 \rightarrow 0$ отображение (6.6) переходит в стандартное отображение

$$v_{x,(n+1)} = v_{x,(n)} + (e/m) E_0 T \sin(kx_n), \quad (6.7)$$

$$x_{n+1} = x_n + T(v_{x,(n+1)} - \omega/k),$$

приведенное в § 3.4. Для него, в частности, глобальный хаос возникает при условии

$$K = (e/m) E_0 k T^2 \gtrsim 1. \quad (6.8)$$

При $K \ll 1$ фазовый портрет системы (6.7) также описан в § 3.4. Узкие стохастические слои отделены друг от друга инвариантными кривыми, и поэтому значительное продвижение перпендикулярно слоям, т.е. увеличение энергии, невозможно. Как станет ясно ниже, свойства отображения (6.6) совсем иные.

Наличие слагаемого $\omega T \neq 2\pi m$, где m — целое число, в аргументе синуса в (6.6) имеет простой физический смысл. Если сделать замену

$$\tilde{x} = x - n\omega T/k,$$

то из формулы (6.2) будет следовать, что происходит ускорение частиц. Изменение скорости на одном толчке равно $\omega\omega_0 T/k$. Поэтому за время t

скорость изменяется на величину

$$\Delta v \sim \omega_0 t (\omega/k), \quad (6.9)$$

где ω/k – фазовая скорость волнового пакета. Ускорение обусловлено тем, что волна регулярно "подталкивает" частицу (ком. 6.1).

Положим далее $\omega = 0$, т.е. исключим из задачи возможность регулярного ускорения типа (6.9). Обозначим

$$\alpha = \omega_0 T. \quad (6.10)$$

Введем новые, безразмерные, переменные

$$u = kv_x/\omega_0, \quad v = kv_y/\omega_0 = -kx. \quad (6.11)$$

Тогда уравнения (6.6) переходят в следующее отображение:

$$\hat{M}_\alpha: \begin{cases} \bar{u} = (u + K_0 \sin v) \cos \alpha + v \sin \alpha, \\ \bar{v} = -(u + K_0 \sin v) \sin \alpha + v \cos \alpha, \end{cases} \quad (6.12)$$

где индексы n и $n+1$ для простоты записи опущены и обозначено

$$K_0 = K/\alpha. \quad (6.13)$$

Отображение \hat{M}_α будем называть отображением с подкручиванием на угол α . Запишем гамильтониан задачи, которая приводит к формулам (6.12). Уравнению движения (6.5) соответствует гамильтониан при $\omega = 0$

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) - \frac{e}{m} E_0 T \cos(kx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (6.14)$$

В безразмерных переменных u, v гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{\alpha}{2} (u^2 + v^2) - K_0 \cos v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad (6.15)$$

где введено безразмерное время

$$\tau = t/T,$$

и уравнения движения записываются следующим образом:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial v} = \alpha v + K_0 \sin v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad (6.16)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -\alpha u.$$

В переменных u, v и τ осциллятор имеет частоту α , а толчки следуют через интервалы времени $\Delta\tau = 1$. Особое внимание далее будет уделено резонансному случаю. Он возникает тогда, когда за один период колебания осциллятора $2\pi/\alpha$ происходит целое число толчков q . Условием этого является равенство $2\pi/\alpha_q = q$, или

$$\alpha_q = 2\pi/q. \quad (6.17)$$

Если вспомнить обозначение (6.10), то резонансное условие (6.17)

эквивалентно следующему:

$$q\omega_0 = 2\pi/T,$$

и совпадает с условием (5.18), в котором следует положить для частоты возмущения $\nu = 2\pi/T$. Отображение \hat{M}_q в этом случае получается из \hat{M}_α , если в (6.12) подставить значение (6.17) для α :

$$\hat{M}_q: \begin{cases} \bar{u} = (u + K_0 \sin \nu) \cos(2\pi/q) + \nu \sin(2\pi/q), \\ \bar{v} = -(u + K_0 \sin \nu) \sin(2\pi/q) + \nu \cos(2\pi/q). \end{cases} \quad (6.18)$$

Приведем некоторые частные случаи для \hat{M}_q .

При $q = 1$

$$\hat{M}_1: \begin{cases} \bar{u} = u + K_0 \sin \nu, \\ \bar{v} = \nu. \end{cases} \quad (6.19)$$

Отсюда

$$v = \text{const} = \nu_0, \quad u_n = u_0 + K_0 n \sin \nu_0. \quad (6.20)$$

Отображение \hat{M}_1 соответствует случаю основного циклотронного резонанса ($\omega_0 = \nu$), а решение (6.20) описывает ускорение вдоль оси x и n играет роль дискретного времени ($n = t/T$).

При $q = 2$ имеем из (6.18)

$$\hat{M}_2: \begin{cases} \bar{u} = -u - K_0 \sin \nu, \\ \bar{v} = -\nu. \end{cases} \quad (6.21)$$

Этот случай соответствует полуполному циклотронному резонансу. Рассмотрим два последовательных отображения $\hat{M}_2 \hat{M}_2 = \hat{M}_2^2$. Из (6.21) получаем

$$\hat{M}_2^2: \begin{cases} \bar{\bar{u}} = -\bar{u} - K_0 \sin \bar{v} = u + 2K_0 \sin \nu, \\ \bar{\bar{v}} = -\bar{v} = \nu. \end{cases}$$

Эти выражения совпадают с (6.19) и поэтому имеют то же решение (6.20), описывающее ускорение частицы.

Рассмотренные случаи резонанса $q = 1, 2$ оказались очень простыми, т.е. они допускают точные решения. Начиная с $q > 2$ система (6.15) или (6.16) уже не является интегрируемой и ее анализ, как будет видно ниже, в значительной мере сложен.

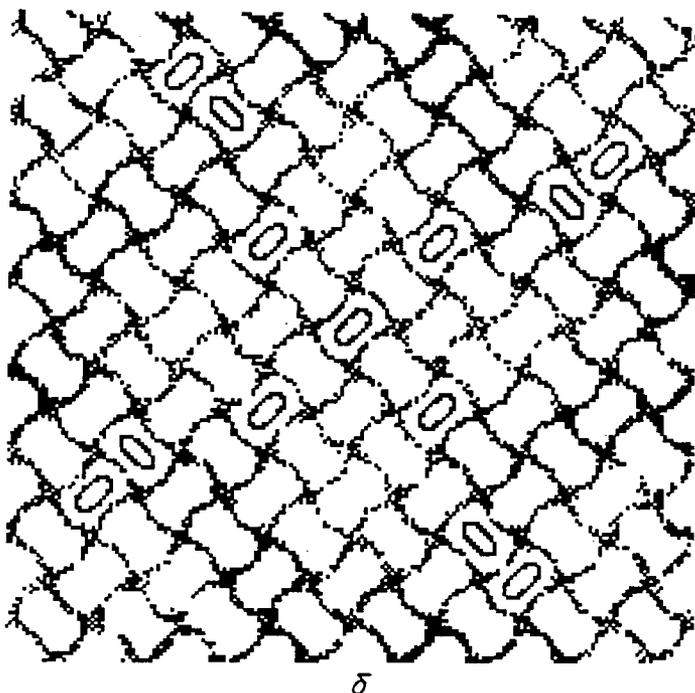
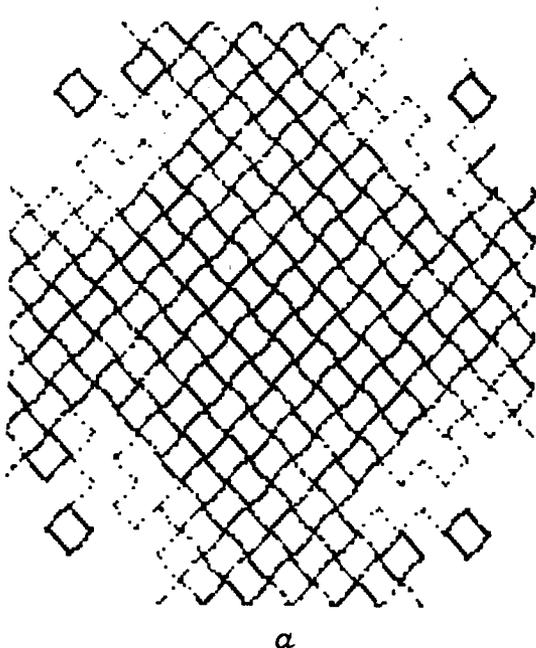
§ 6.2. Периодическая паутина

В этом параграфе будут рассмотрены резонансы с $q = 3, 4$ и 6 . Причина, объединяющая их, станет ясна чуть ниже.

Положим в (6.18) $q = 4$. Имеем

$$\hat{M}_4: \begin{cases} \bar{u} = \nu, \\ \bar{v} = -u - K_0 \sin \nu. \end{cases} \quad (6.22)$$

Рис. 6.1. Фазовый портрет на плоскости (u, v) отображения \hat{M}_4 имеет периодическую паутину с симметрией квадратной решетки: a — для $K_0 = 0,7$, размер квадрата $24\pi \times 24\pi$; b — для $K_0 = 1,5$ размер квадрата $16\pi \times 16\pi$



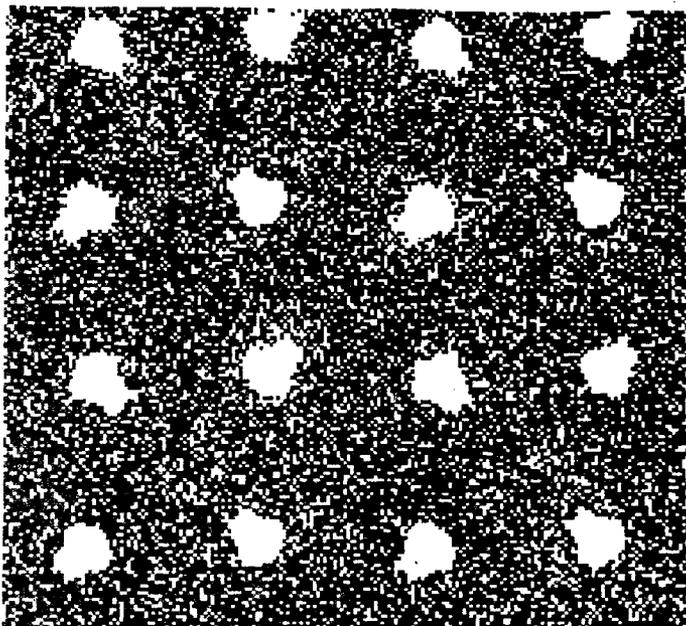


Рис. 6.2. Фазовый портрет на плоскости (u, v) отображения \hat{M}_4 при большом значении $K_0 = 3$; размер квадрата $4\pi \times 4\pi$

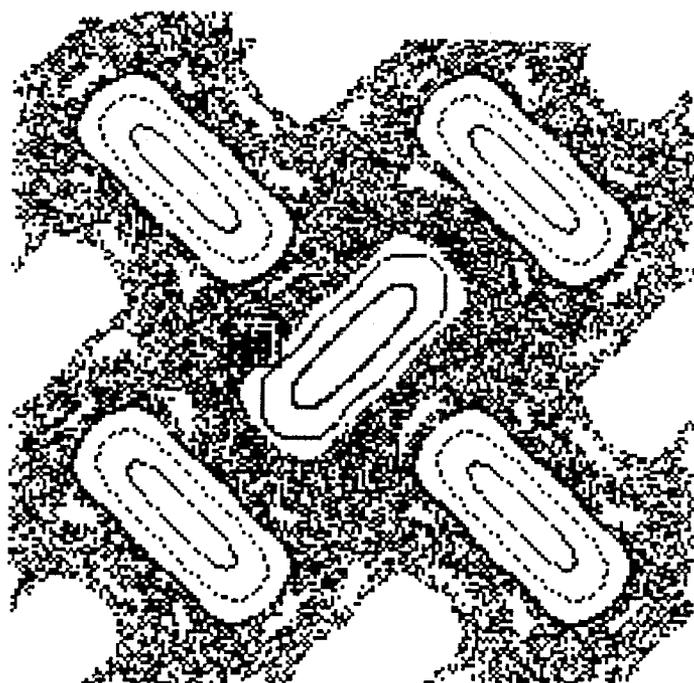
Гамильтониан, соответствующий отображению \hat{M}_4 , может быть получен из (6.15):

$$H = \omega_4(u^2 + v^2) - K_0 \cos v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n); \quad (6.23)$$

$$\omega_4 = \pi/4.$$

Фазовый портрет отображения \hat{M}_4 приведен на рис. 6.1. На фазовой плоскости имеется неограниченная паутина, т.е. область стохастической динамики частицы. Внутри ячеек паутины основная часть семейства орбит представляет собой замкнутые периодические траектории, являющиеся сечениями инвариантных торов. При малых значениях K_0 паутина является тонкой и имеет вид, близкий к квадратной решетке. С ростом K_0 область стохастической динамики растет. Размер островков устойчивости внутри ячеек уменьшается, однако их расположение по-прежнему сохраняет симметрию квадратной решетки (рис. 6.2). Еще один численный пример на рис. 6.3 демонстрирует сложную фрактальную структуру стохастической паутины. Внутри каждого из малых островков имеется субструктура, зависящая от значения K_0 .

Перейдем теперь к более аккуратному исследованию отображения \hat{M}_4 . Рассмотрим сначала малые значения $K_0 \ll 1$. Построим отображение \hat{M}_4^4 , в котором удержим лишь члены с первой степенью K_0 . Четырехкратная



a



b

Рис. 6.3. Детальные свойства фазового портрета отображения \hat{M}_4 : a – часть паутины при $K_0 = 2$, размер квадрата $4\pi \times 4\pi$; b – увеличение области внутри малого квадрата в случае a , размер квадрата $4\pi \times 4\pi$

итерация (6.22) дает

$$\hat{M}_4^2: \begin{cases} \bar{u} = u + 2K_0 \sin \bar{v}, \\ \bar{v} = v - 2K_0 \sin u. \end{cases} \quad (6.24)$$

Отображение (6.24) записано в форме, при которой оно сохраняет меру. Интервал времени между двумя последовательными шагами отображения \hat{M}_4^2 равен 4.

Нетрудно записать гамильтониан, приводящий к отображению (6.24):

$$H_4 = -\frac{1}{2} K_0 \left\{ \cos v + \cos u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{\tau}{4} - n \right) \right\}, \quad (6.25)$$

и соответствующие гамильтоновские уравнения движения

$$\dot{u} = \frac{\partial H_4}{\partial v} = \frac{1}{2} K_0 \sin v, \quad (6.26)$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial H_4}{\partial u} = -\frac{1}{2} K_0 \sin u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{\tau}{4} - n \right).$$

Выделим в сумме в (6.25) член с $n = 0$ и перепишем гамильтониан H_4 в следующем виде:

$$H_4 = -\Omega_4 (\cos v + \cos u) - \Omega_4 \cos u \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} n \tau \right). \quad (6.27)$$

Возникшая ситуация уже рассматривалась нами (§ 3.4). Первый член в H_4 описывает нелинейные колебания с гамильтонианом

$$H_4^{(0)} = -\Omega_4 (\cos v + \cos u) = -2\Omega_4 \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \cos \left(\frac{u-v}{2} \right) \quad (6.28)$$

и с частотой $\Omega_4 = K_0/2$. Второй член в H_4 можно рассматривать как возмущение

$$V_4 = -\Omega_4 \cos u \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} n \tau \right). \quad (6.29)$$

Хотя оно имеет тот же порядок, что и $H_4^{(0)}$ ($\sim K_0$), однако минимальная частота гармоник, входящих в V_4 , равна 4. Поскольку $\Omega_4 \ll 4$, то возмущение является высокочастотным и его влияние, как будет видно далее (и как уже было в § 3.4), оказывается малым. Более того, так же, как и в § 3.4, достаточно ограничиться в (6.29) лишь гармониками с $n = \pm 1$, т.е. положить

$$V_4 \approx -2\Omega_4 \cos u \cos(\pi\tau/2). \quad (6.30)$$

Движение, описываемое гамильтонианом $H_4^{(0)}$, уже рассматривалось в § 5.3. Из (6.28) следуют уравнения движения:

$$\dot{u} = \Omega_4 \sin v, \quad \dot{v} = -\Omega_4 \sin u. \quad (6.31)$$

Они могут быть также получены из (6.26), если разложить сумму δ -функций в ряд Фурье и оставить только первый член ряда, как это делалось в (6.27). Систему (6.31) можно также записать в виде одного уравнения

$$\ddot{u} + \Omega_4^2 (C \sin u - \frac{1}{2} \sin 2u) = 0, \quad (6.32)$$

где величина

$$C = \cos v + \cos u$$

представляет собой безразмерный интеграл энергии.

Устойчивым положениям равновесия (эллиптическим точкам) соответствуют значения

$$|C| = 2, \quad v = \pi n, \quad u = \pi m, \quad m + n = 2l \quad (l = 0, \pm 1, \dots);$$

неустойчивым положениям равновесия (гиперболическим точкам) соответствуют значения

$$C = 0, \quad v = \pi n, \quad u = \pi m, \quad m + n = 2l + 1 \quad (l = 0, \pm 1, \dots).$$

Сепаратрисы, проходящие через гиперболические точки, покрывают фазовую плоскость квадратной сеткой, определяемой уравнениями

$$v = \pm(u + \pi) + 2\pi l \quad (l = 0, \pm 1, \dots). \quad (6.33)$$

Траектории внутрисепаратрисных ячеек находятся интегрированием уравнений (6.31) или (6.32). Это дает при $|C| \leq 2$

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{1}{2}C + (1 - \frac{1}{2}C) \operatorname{cd} [(1 + \frac{1}{2}C)\Omega_4 \tau; \kappa], \\ \cos u &= \frac{1}{2}C - (1 - \frac{1}{2}C) \operatorname{cd} [(1 + \frac{1}{2}C)\Omega_4 \tau; \kappa], \end{aligned} \quad (6.34)$$

где $\kappa = (2 - C)/(2 + C)$ и $\operatorname{cd} = \operatorname{sn}/\operatorname{dn}$ — отношение эллиптических функций Якоби. Траектории, описываемые системой (6.34), представляют собой замкнутые орбиты, изображенные на рис. 6.3б. Период нелинейных колебаний для них равен

$$T(C) = \frac{8}{\Omega_4(1 + C/2)} K(\kappa), \quad (6.35)$$

где $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $C \rightarrow 2$ из (6.35) получаем

$$T(2) = 2\pi/\Omega_4,$$

т.е. период малых колебаний в окрестности эллиптической точки (из (6.28) разложение при малых v и u дает частоту малых колебаний Ω_4).

Учет возмущения (6.30) приводит к слабой периодической модуляции всей структуры на фазовой плоскости. Она хорошо видна на рис. 6.3. Однако наиболее сильное влияние возмущения проявляется вблизи сепаратрисы, так как приводит к ее разрушению и к образованию стохастической паутины. Для этого следовало бы рассмотреть высокочастотное возмущение (6.30), действующее на основное движение (6.28). Оно приводит к образованию экспоненциально узкого стохастического слоя толщиной порядка $\exp(-\operatorname{const}/K_0)$. Это и есть толщина паутины. Более точное ее вычисление будет приведено в следующем параграфе.

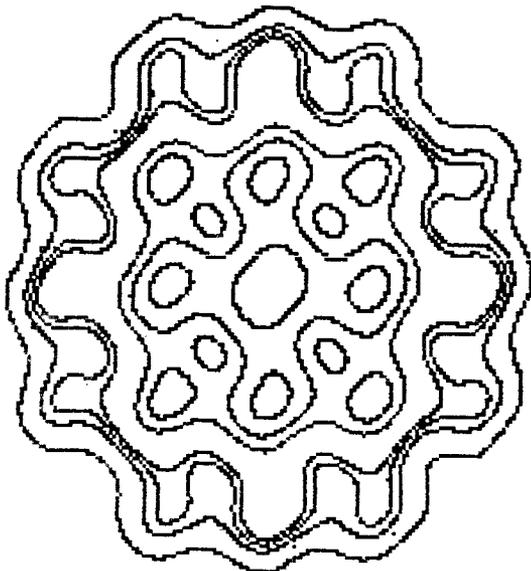


Рис. 6.4. Распад паутины из-за расстройки резонансного условия: $K_0 = 0,7$, $\alpha = \pi/2 + 0,03$; размер квадрата $12\pi \times 12\pi$

Существование неограниченной паутины имеет здесь те же следствия, что и в случае диффузии Арнольда. Она имеет равномерную толщину во всем фазовом пространстве и, следовательно, примерно одинаковую скорость диффузии. Частица, у которой начальная координата находилась внутри паутины, может совершать случайные блуждания на сетке паутины, уходя сколь угодно далеко от исходной точки.

Резонансное условие $\omega_4 = \pi/2$ играет, конечно, исключительную роль в образовании паутины. Если это условие не выполняется точно, то уже в нулевом приближении не возникает единой сепаратрисной сетки. Такой пример приведен на рис. 6.4, где разность между фазой $\alpha = 1,6$ и ее резонансным значением $\alpha_4 = \omega_4 = 2\pi/4$ составляет всего лишь около 0,03. Стохастическая паутина может возникнуть и в этом случае. Однако необходимо, чтобы возмущение было больше некоторого критического значения. Тогда достаточно сильное возмущение может привести к связи движений на различных элементах распавшейся паутины.

Внутри ячеек сепаратрисы имеется своя система инвариантных кривых, островков и сепаратрис. Последние отделены от основной сети инвариантными кривыми. Поэтому фазовый портрет внутри ячеек во многом напоминает ситуацию в случае, когда применима КАМ-теория. Вид портрета во многом зависит от величины K_0 . Увеличение K_0 приводит к уменьшению ячейки паутины. Одновременно внутри нее происходят бифуркации деления и образования ожерелий из различного числа островков меньшего размера. Рассмотрим этот процесс более подробно.

Отображение (6.12) всегда имеет стационарную точку ($u = 0$, $v = 0$). Рассмотрим матрицу \hat{M}'_α , касательную к \hat{M}_α , в точке $(0, 0)$:

$$\hat{M}'_\alpha(0, 0) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & K_0 \cos \alpha + \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha - K_0 \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Собственные значения λ матрицы $\hat{M}'_\alpha(0, 0)$ удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 - \lambda \text{Sp} \hat{M}'_\alpha + 1 = 0.$$

Точка $(0, 0)$ становится неустойчивой при $|\text{Sp} \hat{M}'_\alpha| > 2$, т.е. при

$$K_0 > 2 \text{ctg}(\alpha/2). \quad (6.36)$$

В частности, при $\alpha = \alpha_4 = \pi/2$ условие неустойчивости имеет вид $K_0 > 2$. Неустойчивость проявляется в том, что эллиптическая точка $(0, 0)$ превращается в гиперболическую. Одновременно рождаются две новых эллиптических точки. Это обычная бифуркация удвоения островков (рис. 6.5). Внутри островка виден новый стохастический слой, образующийся на месте сепаратрисы, проходящей через седло $(0, 0)$.

Рассмотрим отображение \hat{M}_4^2 :

$$\hat{M}_4^2 : \begin{cases} \bar{u} = -u - K_0 \sin v, \\ \bar{v} = -v - K_0 \sin(u + K_0 \sin v). \end{cases} \quad (6.37)$$

Его стационарные точки соответствуют циклу с периодом 2 и удовлетворяют системе уравнений

$$u_0 = -\frac{1}{2}K_0 \sin v_0, \quad v_0 = -\frac{1}{2}K_0 \sin u_0,$$

или

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2}K_0 \sin(\frac{1}{2}K_0 \sin u_0), \\ v_0 &= \frac{1}{2}K_0 \sin(\frac{1}{2}K_0 \sin v_0). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Исследование этих точек на устойчивость приводит к следующему условию:

$$|\text{Sp}(\hat{M}_4^2)'| < 2,$$

которое соответствует неравенству

$$0 < \frac{1}{4}K_0^2 \cos(\frac{1}{2}K_0 \sin v_0) \cos v_0 < 1. \quad (6.39)$$

В нем K_0 и v_0 связаны уравнением (6.38). Из (6.39) следует, что цикл с периодом 2 теряет устойчивость при значении K_0 , удовлетворяющем уравнению

$$\frac{1}{2}K_0 \sin(\frac{1}{2}K_0) = \frac{1}{2}\pi,$$

т.е. при $K_0 = 4,88665 \dots$. Эта бифуркация соответствует рождению цикла с периодом 4.

Отметим также, что при условии

$$\frac{1}{4}K_0^2 \cos(\frac{1}{2}K_0 \sin v_0) \cos v_0 = 1$$

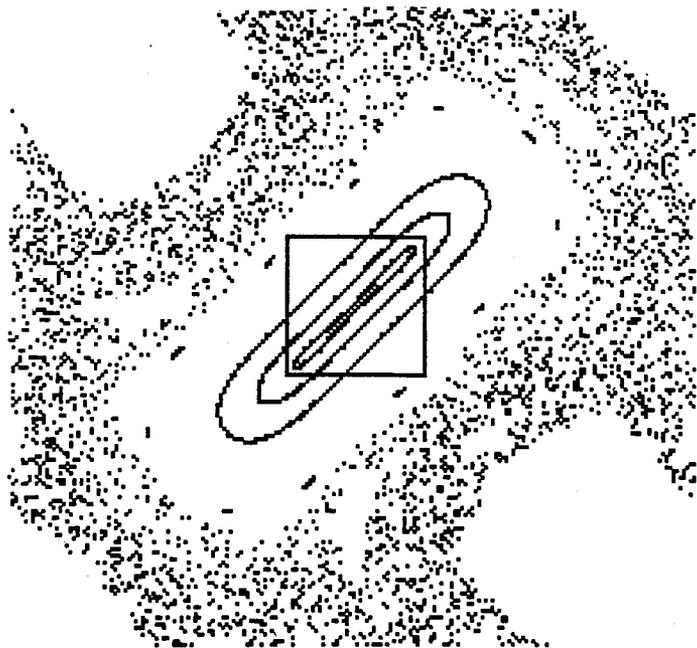
в системе происходит промежуточная бифуркация при $K_0 \approx 4,54$. Она заключается в появлении четырех эллиптических точек с прежним периодом 2.

В работе [1] показано, что потеря устойчивости цикла с периодом 4 происходит при $K_0 = 4,92934 \dots$, после чего появляются циклы с периодом 8. Обозначим через $K_0^{(n)}$ значение K_0 , при котором происходит бифуркация удвоения, цикл с периодом 2^n теряет устойчивость и возникает цикл с периодом 2^{n+1} . Последовательность бифуркационных значений $K_0^{(n)}$ является быстро сходящейся к пределу $K_0^{(\infty)}$:

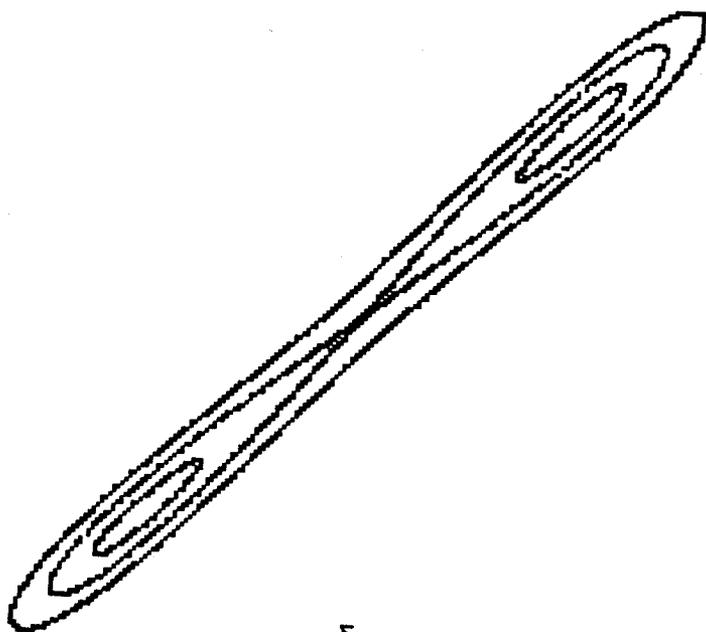
$$2 < K_0^{(1)} < K_0^{(2)} < \dots < K_0^{(\infty)} = 4,93488 \dots$$

Определим отношения

$$\delta_n = (K_0^{(n-2)} - K_0^{(n-1)}) / (K_0^{(n-1)} - K_0^{(n)}), \quad n = 2, 3, \dots$$

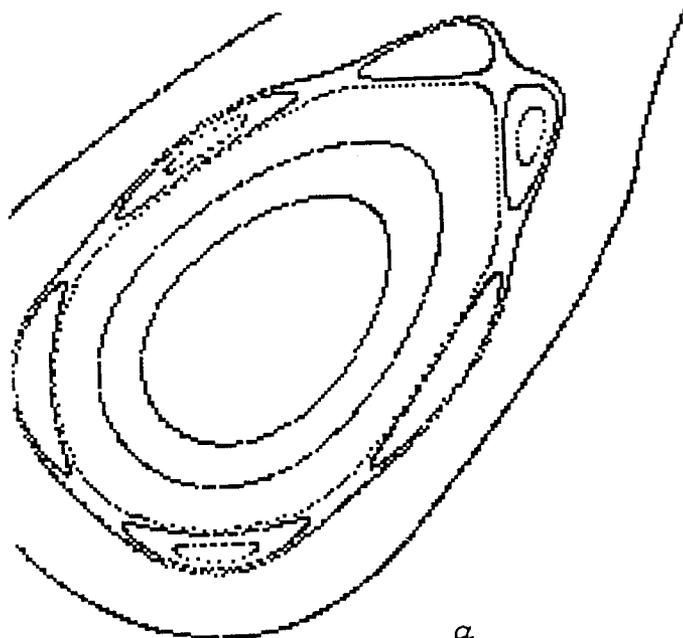


a



б

Рис. 6.5. Бифуркация удвоения для $q = 4$ при $K_0 = 2,05$: *a* – размер квадрата $2\pi \times 2\pi$, *б* – увеличение области внутри квадрата в случае *a*



a



б

Рис. 6.6. Примеры различных бифуркаций для $q = 4$: *a* – отделение шести островков, $K_0 = 2,61$; *б* – отделение тринадцати островков, $K_0 = 3,1$; *в* – отделение трех островков, $K_0 = 3,7$

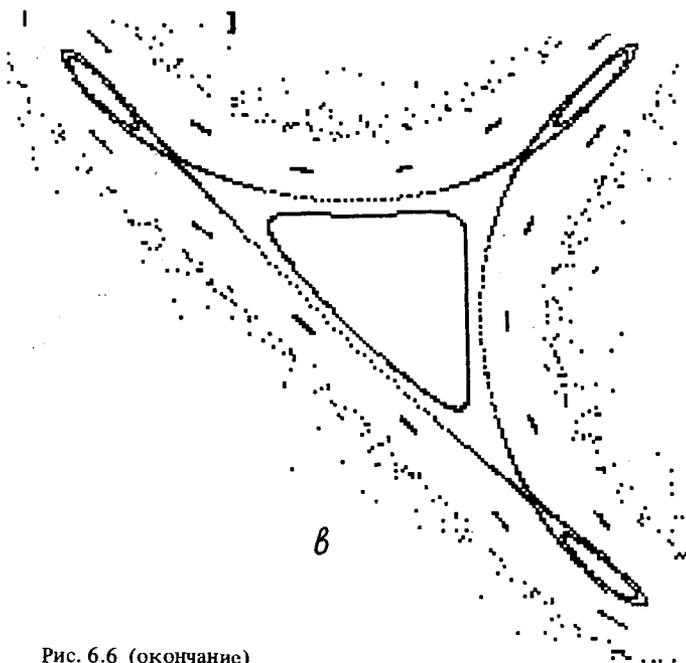


Рис. 6.6 (окончание)

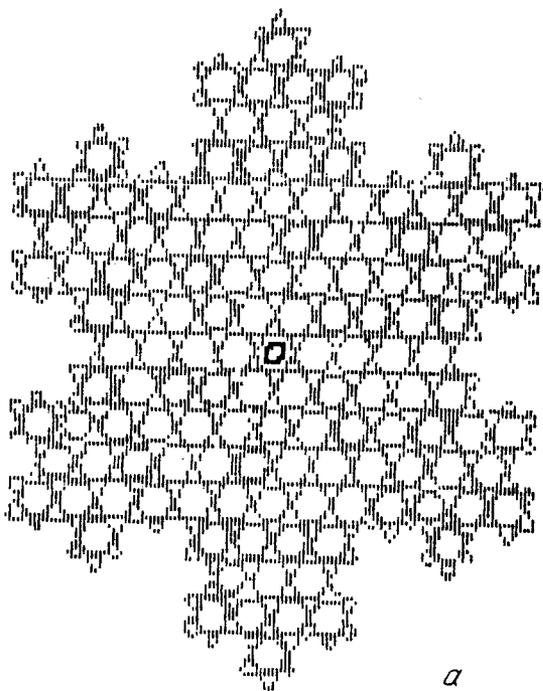


Рис. 6.7. Два примера паутины при $q = 6$: *a* – для $K_0 = 0,4$, размер квадрата $32\pi \times 32\pi$, *б* – для $K_0 = 0,8$, размер квадрата $32\pi \times 32\pi$. Образующая на плоскости сетка носит название решетки кагоме

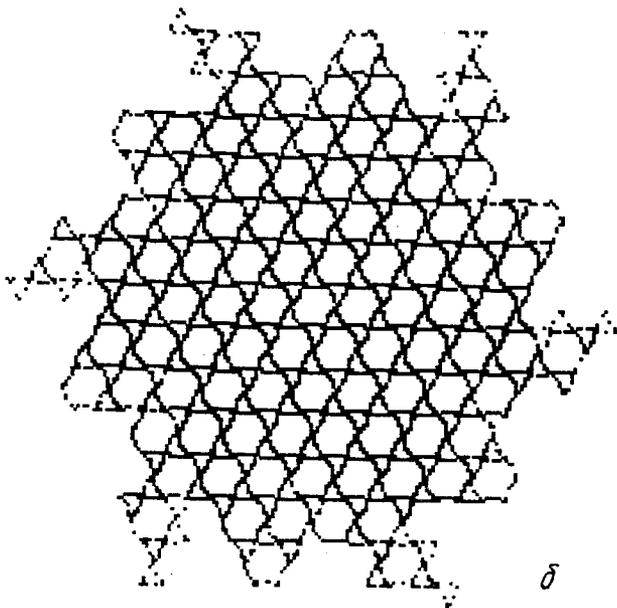


Рис. 6.7 (окончание)

Из численного анализа следует, что при достаточно больших значениях n последовательность $K_0^{(n)}$ сходится по закону геометрической прогрессии. Это означает, в частности, что $\lim \delta_n = \delta \approx 8,72 \dots$ (ком. 6.2).

Бифуркации удвоения не исчерпывают разнообразие бифуркационной картины в отображении (6.22). Например, в промежутке между значениями $K_0^{(n)}$ и $K_0^{(n+1)}$ при бифуркациях удвоения возникают и отщепляются ожерелья из островков, соответствующих резонансам высоких порядков.

На рис. 6.6 даны примеры рождения группы островков (ожерелий) различного типа. В других ячейках паутины бифуркации происходят, в основном, так же, как и в центральной ячейке. Сложная последовательность бифуркаций образует некоторую "дьявольскую лестницу", которая еще плохо изучена.

В заключение этого параграфа отметим, что случаи $q = 3$ и $q = 6$ также образуют периодическую паутину (рис. 6.7). Она напоминает классический фрактал Коха (ком. 6.3). Решетка, образованная в этом случае, носит название решетки "кагоме". Ее свойства будут описаны подробнее в следующих главах.

§ 6.3. АперIODическая паутина и симметрия покрытия плоскости

Выше были рассмотрены резонансы с $q = 4$ и $q = 3, 6$. Им соответствует фазовый портрет, имеющий на фазовой плоскости периодическую структуру типа квадратной или гексагональной решетки. Случаи $q = 1, 2$ также дают периодический (вдоль одной из осей) фазовый портрет. Поэтому

можно сказать, что множество значений

$$\{q_c\} = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad (6.40)$$

характеризуется периодическими фазовыми портретами. Что происходит при других значениях q ? Прежде чем отвечать на этот вопрос, полезно взглянуть на исходную задачу (6.15) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\alpha(u^2 + v^2) - K_0 \cos v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad (6.41)$$

с другой точки зрения.

Первый член в H описывает вращение частицы. На фазовой плоскости (u, v) ему соответствуют окружности. Поэтому фазовый портрет имеет поворотную симметрию. Она является вырожденной, т.е. семейство траекторий на фазовой плоскости симметрично относительно поворота на угол $\alpha_q = 2\pi/q$ для произвольного целого q . Второй член в гамильтониане (6.41) имеет трансляционную симметрию относительно сдвига

$$v \rightarrow v + 2\pi m,$$

где m — целое число.

Таким образом, выражение для H содержит части, определяющие два типа движений — с вращательной и трансляционной симметрией — и их взаимодействие. При малых значениях K_0 можно было бы предположить, что взаимодействие является слабым, и поэтому движение должно наследовать оба вида симметрий. Однако существуют серьезные возражения для столь простого взгляда на вещи.

Поскольку последовательность δ -функциональных толчков имеет период 1, то при $\alpha = \alpha_q = 2\pi/q$ такое возмущение является резонансным и действует наиболее эффективно. Поэтому именно в этом случае можно было бы задаться вопросом: выживает ли какая-либо одна симметрия (поворотная или трансляционная) или сосуществуют обе симметрии? В тех

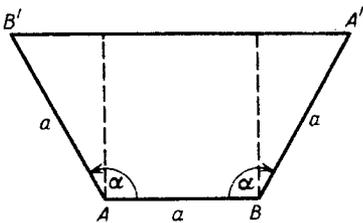
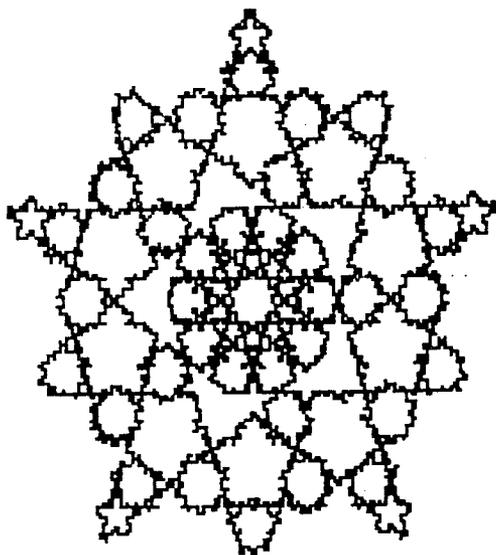


Рис. 6.8. Определение условий сосуществования трансляционной и поворотной симметрий

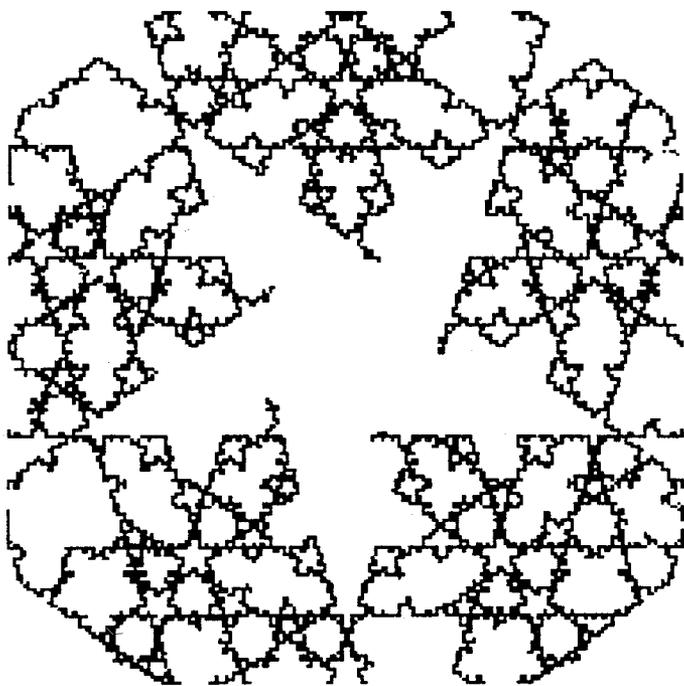
случаях, когда $q \in \{q_c\}$, мы уже могли убедиться выше, что имеет место второй случай. Все полученные структуры фазовых портретов имели одновременно как трансляционную, так и вращательную симметрию. Однако известно, что такое сосуществование симметрий на плоскости для произвольных структур возможно только для случаев, определенных в (6.40) [4, 5]. Доказательство сделанного утверждения очень простое.

Пусть точки A и B (рис. 6.8) представляют собой узлы некоторой сетки, покрывающей плоскость. Пусть также это покрытие является периодическим и имеет симметрию относительно трансляции на период a . Расстояние между точками A и B равно a , если они — соседние. Если одновременно

Рис. 6.9. Стохастическая паутина для $q = 5$ для двух различных начальных условий: $K_0 = 0,7$, размер квадрата $256\pi \times 256\pi$



a



б

сеть имеет поворотную симметрию на угол $\alpha = 2\pi/q$, то оси этой симметрии должны проходить и через точку A , и через точку B . Совершим поворот на угол α относительно точки A . При этом точка B переходит в B' (рис. 6.8). Аналогично поворот на угол α относительно точки B переводит точку A в точку A' . Расстояние $A'B'$ должно быть кратно периоду решетки a , т.е. $A'B' = ma$, где m — целое число. В противном случае была бы нарушена трансляционная симметрия. Из рис. 6.8 следует также, что

$$A'B' = ma = a + 2a \sin(\alpha - \pi/2),$$

или

$$\cos \alpha = (1 - m)/2.$$

Отсюда для m возможны значения $m = 3, 2, 1, 0$. Соответственно для $q = 2\pi/\alpha$ возможны значения $q = 2, 3, 4, 6$. Если добавить сюда тривиальный случай $q = 1$, то мы приходим к множеству $\{q_c\}$ в (6.40).

Таким образом, для значений q , не принадлежащих множеству $\{q_c\}$, периодической паутины существовать не может. Однако может существовать аperiodическая паутина с поворотной симметрией. Такие структуры были обнаружены в квазикристаллах и будут подробно обсуждены далее. Примеры паутин для $q = 5, 7, 8$ приведены на рис. 6.9, 6.10. Паутина во всех этих примерах образована случайными блужданиями изображающей точки на фазовой плоскости. Поскольку точка не может выйти за пределы каналов паутины, то за достаточно большое время приобретает достаточно детальная информация о структуре паутины.

Структура паутины проявляется очень неравномерно во времени. На рис. 6.9 приведена паутина, которая достаточно полно изображена за время ее наблюдения (время счета). Совсем другая картина имеет место на рис. 6.10. В течение более чем 10^6 шагов отображения внутри паутины остается окно в форме фрактальной пятиугольной звезды. Окно зарастает паутиной на временах $\tau > 1,3 \cdot 10^6$. Появление окон разных размеров и формы связано с выбором начальных условий. Последовательность формирования "снежинки" из паутины очень чувствительна к начальным значениям, а это в свою очередь обусловлено существованием кантор-торов, затрудняющих некоторые направления диффузии.

Рост паутины происходит следующим образом. Сначала случайные блуждания точки на плоскости создают некоторую неправильную фигуру, например звезду, у которой не все концы одинаково выросли. Затем эта звезда достраивается до правильной, и в последующее время начинается формирование звезды большего размера (рис. 6.11). Конечно, границы этих звезд имеют сложную форму и образуют фрактальные кривые в пределе $t \rightarrow \infty$. Поэтому стохастическая паутина может быть названа также фрактальной паутиной.

Фрактальная паутина имеет центральное незакрытое окно в форме правильного q -угольника при четных q и правильного $2q$ -угольника при нечетных q . Внутри центрального окна также есть стохастические слои, которые, однако, не выходят за край окна и не соединяются с основной паутиной (рис. 6.12). Чем меньше значение K_0 , тем больше размер центрального окна. Паутина имеет бесконечное число элементов той же формы, что и

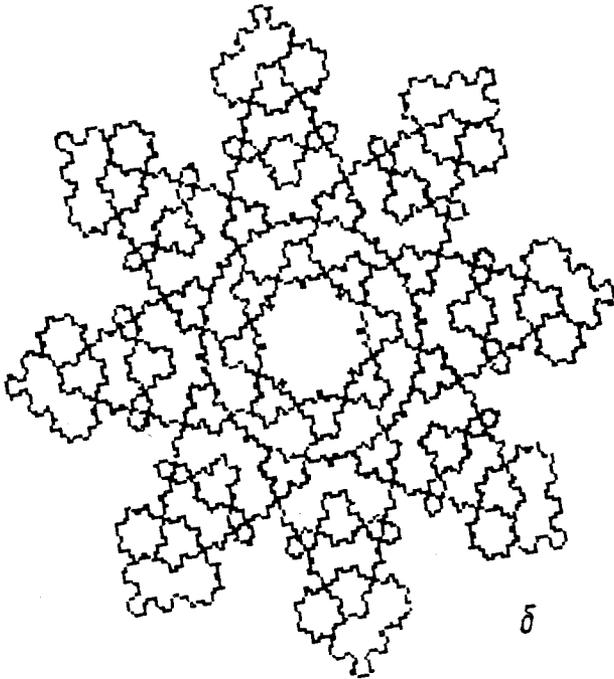
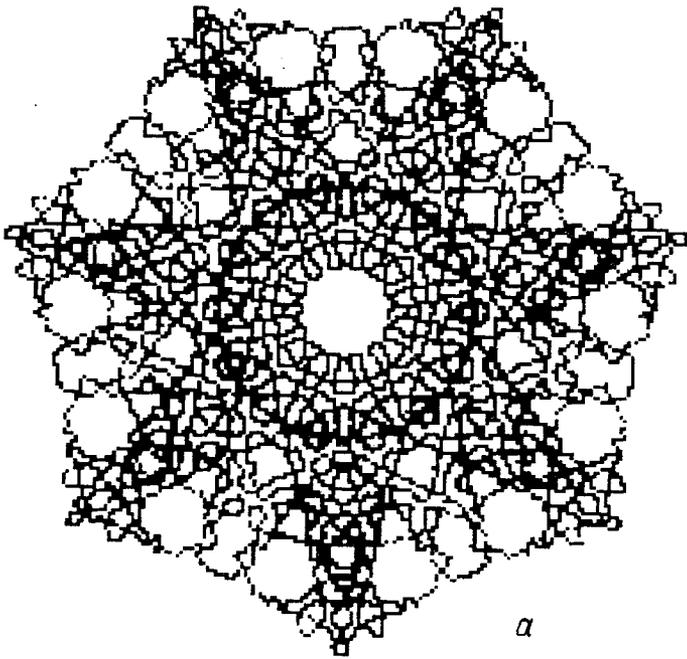
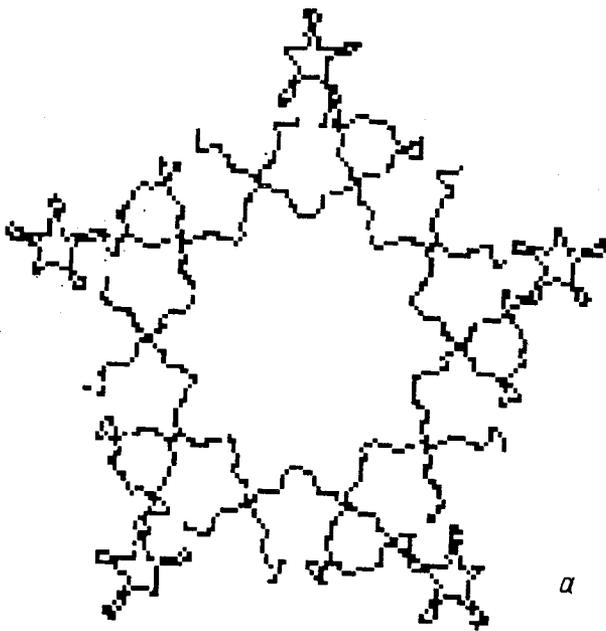
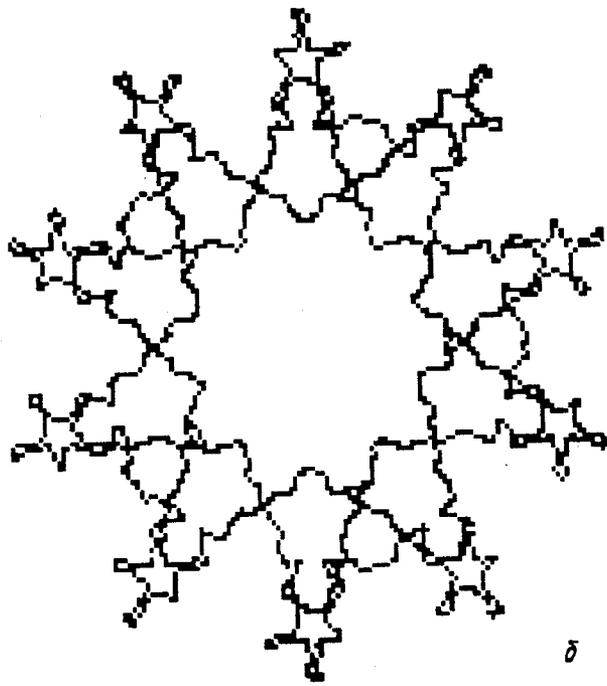


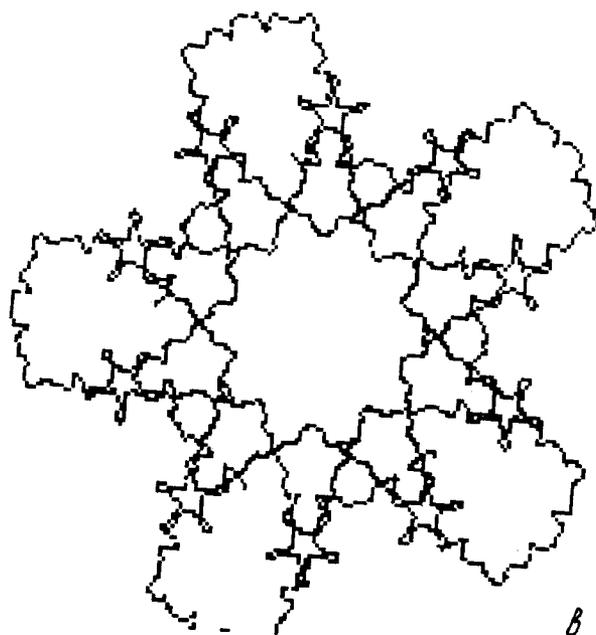
Рис. 6.10. Стохастическая паутина в случае $q = 7$ и $q = 8$: *a* – для $q = 7$, $K_0 = 0,5$, размер квадрата $64\pi \times 64\pi$; *б* – для $q = 8$, $K_0 = 0,6$, размер квадрата $128\pi \times 128\pi$



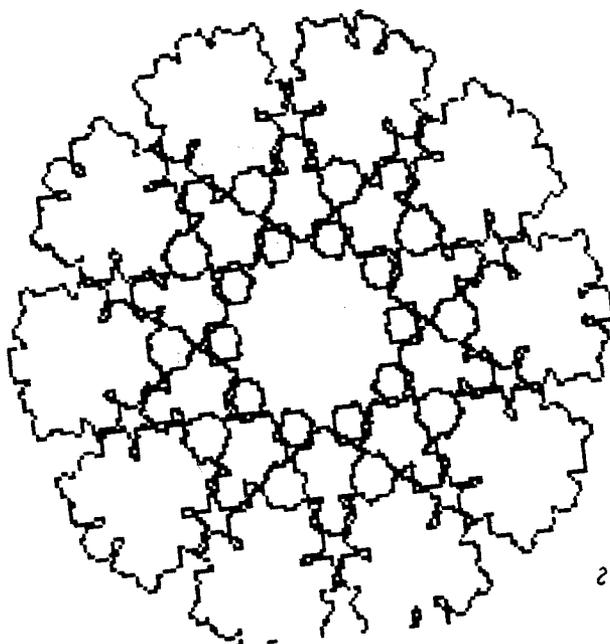
a



b



b



2

Рис. 6.11. Четыре последовательные стадии (а-г) формирования паутины с $q = 5$, $K_0 = 0,75$, размер квадрата $80\pi \times 80\pi$

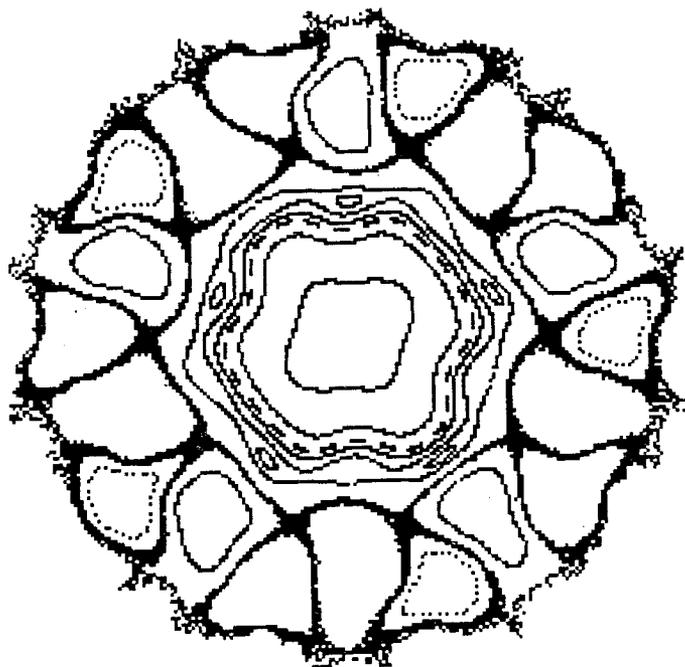


Рис. 6.12. Фазовый портрет внутри центрального окна паутины с $q = 5$: $K_0 = 0,75$, размер квадрата $10\pi \times 10\pi$

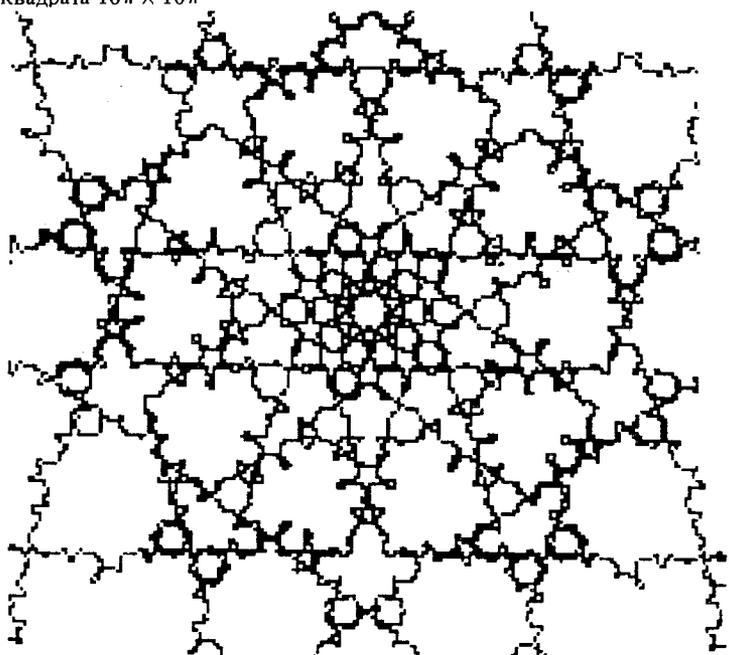


Рис. 6.13. Паутина с $q = 5$ имеет повторяющийся элемент в форме центрального окна: $K_0 = 0,7$, размер квадрата $100\pi \times 100\pi$

центральное окно. Эти элементы образуют аperiodическое покрытие плоскости (рис. 6.13).

При $K_0 \rightarrow 0$ толщина паутины уменьшается. Мы уже показали это для $q = 4$, а для $q \notin \{q_c\}$ соответствующие оценки будут приведены ниже. Периодическую паутину с $q \in \{q_c\}$ будем называть паутиной с кристаллической симметрией, а паутину с $q \notin \{q_c\}$ будем называть паутиной с квазикристаллической симметрией или просто — с квазисимметрией. Изменение величины K_0 не изменяет размеры ячеек паутины с кристаллической симметрией. Это свойство не имеет места в случае квазисимметрии. Можно предположить, что паутина $q \notin \{q_c\}$ существует даже при $K_0 \rightarrow 0$.

Специальное замечание следует сделать относительно отображения \hat{M}_q . С его помощью на плоскости генерируется некоторое инвариантное множество — стохастическая паутина. Это множество имеет почти регулярную форму и реализует покрытие плоскости с произвольной симметрией q -го порядка. Поэтому отображение \hat{M}_q может быть названо генератором покрытия с q -симметрией. Свойства этих покрытий будут изучены в следующей главе.

§ 6.4. Скелет паутины и толщина паутины

При малых значениях параметра возмущения K_0 стохастическая паутина является очень тонкой и имеет хорошо определенную структуру. Можно поставить вопрос об определении алгоритма, задающего эту структуру в каком-либо сглаженном виде, где убраны многие ее мелкие детали. Такой алгоритм может быть получен путем некоторой операции усреднения исходного гамильтониана задачи (6.41) [11, 3].

Запишем гамильтониан частицы при выполнении резонансного условия

$$H = \frac{\alpha q}{2} (u^2 + v^2) - K_0 \cos v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad (6.42)$$

где $\alpha_q = 2\pi/q$ и q — целое число. Представим (u, v) в полярных координатах:

$$u = \rho \cos \theta, \quad v = -\rho \sin \theta, \quad I = \frac{1}{2} \rho^2,$$

где ρ — безразмерный радиус вращения частицы (циклотронный радиус). С помощью производящей функции

$$F = (\theta - \alpha_q \tau) I$$

осуществляется переход к новым переменным $J = I$, $\varphi = \theta - \alpha_q \tau$ в систему координат, вращающуюся с частотой α_q . В новых переменных гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H} = H + \partial F / \partial \tau = -K_0 \cos [\rho \sin(\varphi + \alpha_q \tau)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n). \quad (6.43)$$

Преобразуем ряд δ -функций:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n) = \sum_{j=1}^q \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - (mq + j)). \quad (6.44)$$

Используем представление

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - j - mq) = \frac{1}{q} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(2\pi im \frac{\tau - j}{q}\right).$$

Подставляем это выражение из (6.44) в (6.43):

$$\tilde{H} = H_q + V_q, \quad H_q = -\frac{K_0}{q} \sum_{j=1}^q \cos(\xi_j), \quad (6.45)$$

$$V_q = -\frac{2K_0}{q} \sum_{j=1}^q \cos \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left[\frac{2\pi m}{q} (\tau - j)\right],$$

где

$$\xi_j = -\rho \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{q} j\right) = v \cos\left(\frac{2\pi}{q} j\right) - u \sin\left(\frac{2\pi}{q} j\right). \quad (6.46)$$

Согласно определению (6.46) можно также записать

$$\xi_j = \vec{\rho} e_j, \quad (6.47)$$

$$e_j = \left(\cos \frac{2\pi}{q} j, \quad -\sin \frac{2\pi}{q} j \right) \quad \vec{\rho} = (v, u),$$

т.е. e_j — единичный вектор, определяющий j -ю вершину правильного q -угольника.

Выражение

$$H_q = -\frac{\Omega_q}{2} \sum_{j=1}^q \cos(\vec{\rho} e_j), \quad \Omega_q \equiv \frac{2K_0}{q}, \quad (6.48)$$

будем называть резонансным гамильтонианом порядка q . При $q = 4$ он описывает уже известное нам выражение

$$H_4 = -\Omega_4 (\cos u + \cos v). \quad (6.49)$$

Фазовый портрет, соответствующий системе (6.49), приведен на рис. 6.14. На нем изображены линии уровня поверхности

$$\mathcal{E}_4(u, v) = -H_4/\Omega_4.$$

При $\mathcal{E}_4 = 0$ они образуют квадратную решетку. Значениям $\mathcal{E}_4 > 0$ соответствуют горбы поверхности $\mathcal{E}_4(u, v)$, а значениям $\mathcal{E}_4 < 0$ — впадины. Они чередуются в шахматном порядке.

Рассмотрим в деталях, как возмущение V_4 приводит к образованию стохастической паутины [1, 3, 12].

Выше было показано, что существует точный переход от исходного гамильтониана H в (6.42) к гамильтониану \tilde{H} в (6.45), который при $q = 4$ принимает вид

$$\tilde{H} = H_4 + V_4.$$

Для V_4 имеем

$$V_4 = -2\Omega_4 (\cos v - \cos u) \cos \pi \tau + \dots, \quad (6.50)$$

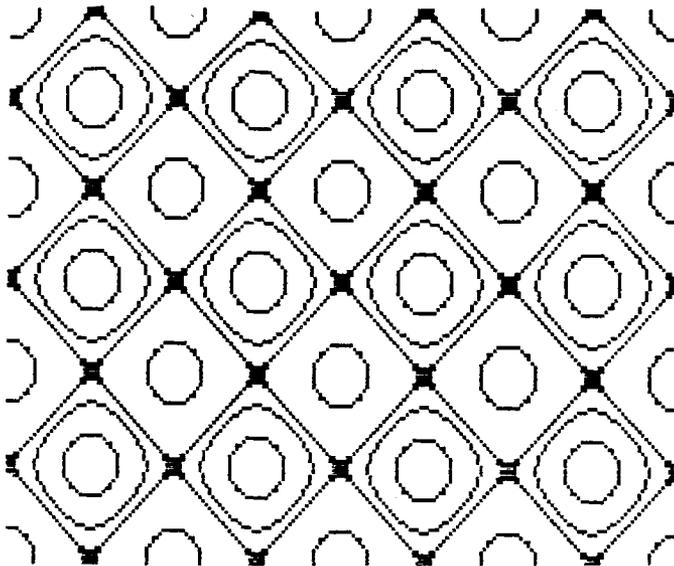


Рис. 6.14. Фазовый портрет на плоскости (u, v) для резонансного гамильтониана 4-го порядка. Замкнутые орбиты соответствуют значениям $\varepsilon = 1, -1, -3$

где многоточие включает все члены в сумме по m из (6.45) начиная с $m = 3$. Мы будем ими пренебрегать, так как они вносят очень малый вклад в ту ширину стохастического слоя, который образуется из-за первого члена в V_4 .

Из (6.49) и (6.50) имеем

$$\dot{H}_4 = 4\Omega_4^2 \sin u \sin v \cos \pi\tau. \quad (6.51)$$

Уравнение сепаратрис, определяемых из (6.49) при $H_4 = 0$, имеет вид

$$v = \pm(u + \pi) + 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

На сепаратрисах решение имеет вид

$$\sin u = -\sin v = -1/\operatorname{ch} [\Omega_4(\tau - \tau_n)], \quad (6.52)$$

где τ_n — некоторая константа, определяющая начало отсчета времени. Подставляя (6.52) в (6.51) и интегрируя, находим изменение энергии под действием возмущения вблизи сепаратрисы

$$\begin{aligned} \Delta H_4 &= -4\Omega_4^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\cos \pi\tau}{\operatorname{ch}^2 \Omega_4(\tau - \tau_n)} = \\ &= -4\pi^2 \frac{\cos \pi\tau_n}{\operatorname{sh}(\pi^2/2\Omega_4)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Omega_4 = K_0/2 \ll 1$, то это выражение принимает вид

$$\Delta H_4 = -8\pi^2 \cos \pi\tau_n \cdot e^{-\pi^2/K_0}. \quad (6.53)$$

Период колебаний вблизи сепаратрисы равен (см. (6.35)), где надо положить $\kappa = 1 - C = 1 - H_4/\Omega_4$)

$$T(H_4) = \frac{4}{\Omega_4} \ln \frac{8\Omega_4}{|H_4|}. \quad (6.54)$$

Интервал времени прохождения вблизи одной сепаратрисы равен четверти периода, т.е.

$$\tau_{n+1} - \tau_n \approx \frac{1}{4} T(H_4) = \frac{1}{\Omega_4} \ln \frac{8\Omega_4}{|H_4|}.$$

Полагая H_4 в этой формуле равным H_{n+1} и учитывая выражение (6.53), получаем отображение вблизи сепаратрисы

$$H_{n+1} = H_n - 8\pi^2 e^{-\pi^2/K_0} \cos \pi \tau_n, \quad (6.55)$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \frac{1}{\Omega_4} \ln \frac{8\Omega_4}{|H_{n+1}|}.$$

Весь этот путь уже описывался ранее в § 3.1, 3.4. Теперь можно выписать тем же путем границу стохастического слоя. Она находится из условия

$$\max \left| \frac{\delta \tau_{n+1}}{\delta \tau_n} - 1 \right| > 1.$$

Отсюда для границы H_s имеем

$$H_s = \frac{16\pi^3}{K_0} e^{-\pi^2/K_0}. \quad (6.56)$$

Величина $2H_s$ определяет ширину слоя. Поскольку все сепаратрисы соединяются, образуя единую сеть — паутину, то величина $2H_s$ есть одновременно и толщина стохастической паутины.

Рассмотрим теперь случай $q = 3$ или 6. Из (6.45) имеем

$$H_3 = H_6 = -\frac{\Omega_3}{2} \left[\cos v + \cos \left(\frac{1}{2}v + \frac{\sqrt{3}}{2}u \right) + \cos \left(\frac{1}{2}v - \frac{\sqrt{3}}{2}u \right) \right],$$

$$\Omega_3 = 2K_0/3. \quad (6.57)$$

Фазовый портрет для гамильтониана $\mathcal{E}_3 = -2H_3/\Omega_3$ приведен на рис. 6.15. Сепаратрисная сетка при $\mathcal{E}_3 = -1$ образует решетку кагоме. Она определяется уравнениями

$$\begin{aligned} v &= \pi(2n_1 + 1) \quad (n_1 = 0, \pm 1, \dots), \\ v &= \sqrt{3}u + 2\pi(2n_2 + 1) \quad (n_2 = 0, \pm 1, \dots), \\ v &= -\sqrt{3}u + 2\pi(2n_3 + 1) \quad (n_3 = 0, \pm 1, \dots). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Они соответствуют трем независимым семействам параллельных и равноотстоящих прямых. На всех сепаратрисах (6.58) интеграл энергии H_3 принимает одно и то же значение $\mathcal{E}_3 = -1$. В области значений $-3/2 \leq$

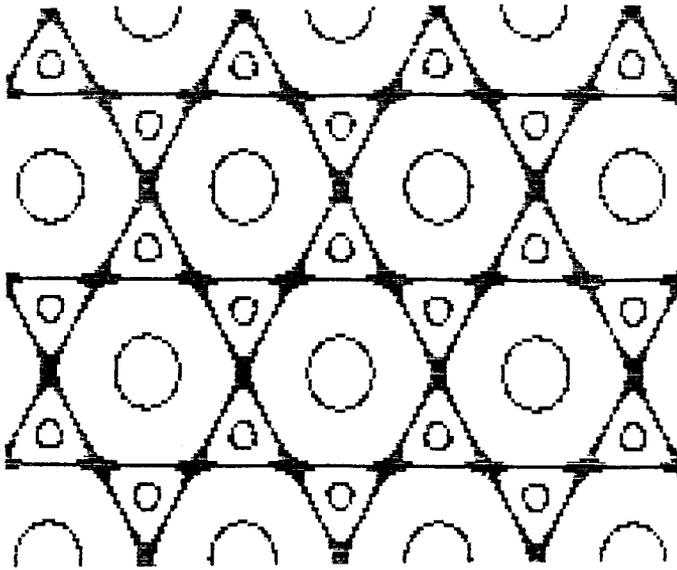


Рис. 6.15. Фазовый портрет на плоскости (u, v) для резонансного гамильтониана 3-го порядка. Замкнутые орбиты соответствуют значениям $\mathcal{E}_3 = 2$ (внутри шестиугольников) и $\mathcal{E}_3 = -3/2$ (внутри треугольников)

$\leq \mathcal{E}_3 < -1$ движение частицы происходит внутри треугольников решетки. При $-1 < \mathcal{E}_3 \leq 3$ движение происходит внутри шестиугольников.

Толщина стохастической паутины может быть получена тем же путем, поскольку возмущение V_3 имеет ту же структуру, что и V_4 :

$$H_s \sim \exp(-2\sqrt{3}\pi^2/3K_0).$$

Аналогичные соображения можно использовать для произвольного значения q и записать толщину стохастической паутины в виде

$$H_s \sim \exp(-\text{const}/K_0), \quad (6.59)$$

где константа слабо увеличивается с ростом q . Однако для всех $q \notin \{q_c\}$ существует особенность, на которой следует остановиться подробнее.

Существует ряд принципиальных различий между свойствами гамильтонианов H_q при $q \in \{q_c\}$ и $q \notin \{q_c\}$. Если $q \in \{q_c\}$, то все сепаратрисы динамической системы с гамильтонианом H_q принадлежат одному и тому же значению интеграла энергии $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_q^{(0)}$, где

$$\mathcal{E}_q = -2H_q/\Omega_q = \sum_{j=1}^q \cos(\vec{p} \cdot \vec{e}_j). \quad (6.60)$$

Выше мы, в частности, уже имели

$$\mathcal{E}_4^{(0)} = 0, \quad \mathcal{E}_3^{(0)} = -1.$$

Это обстоятельство определяет также то, что все гиперболические точки лежат в одной плоскости уровня энергии $\mathcal{E}_q^{(0)}$ при $q \in \{q_c\}$. При $q \notin \{q_c\}$

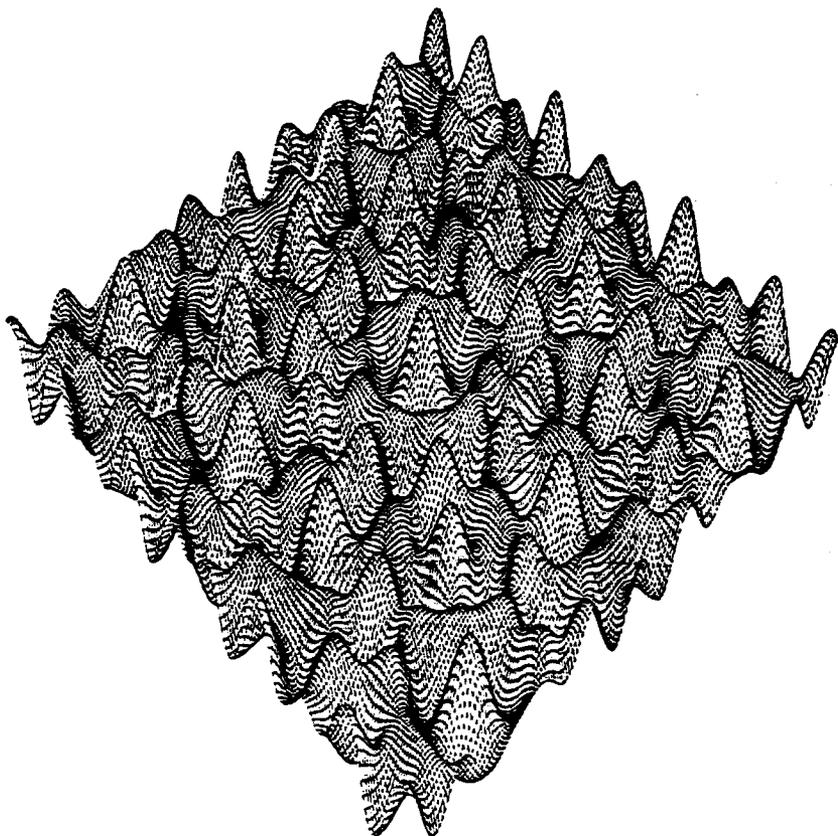
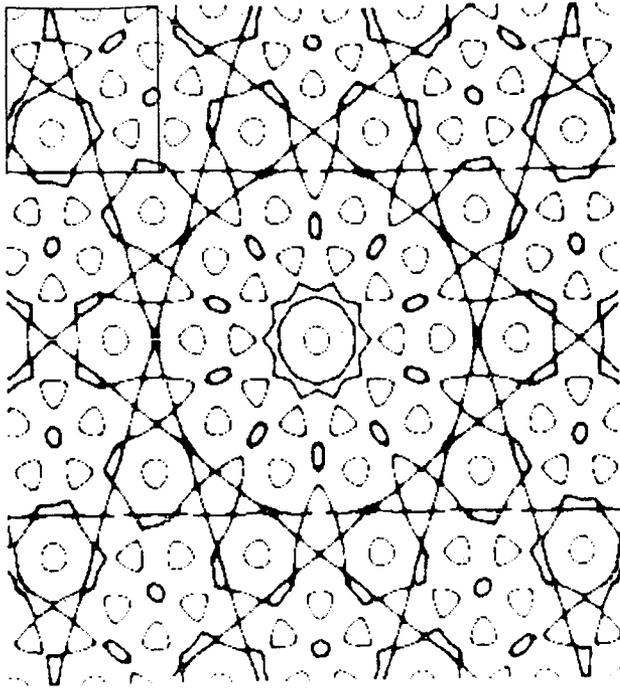


Рис. 6.16. Поверхность $\mathcal{E}_5(u, v)$ в случае квазисимметрии 5-го порядка

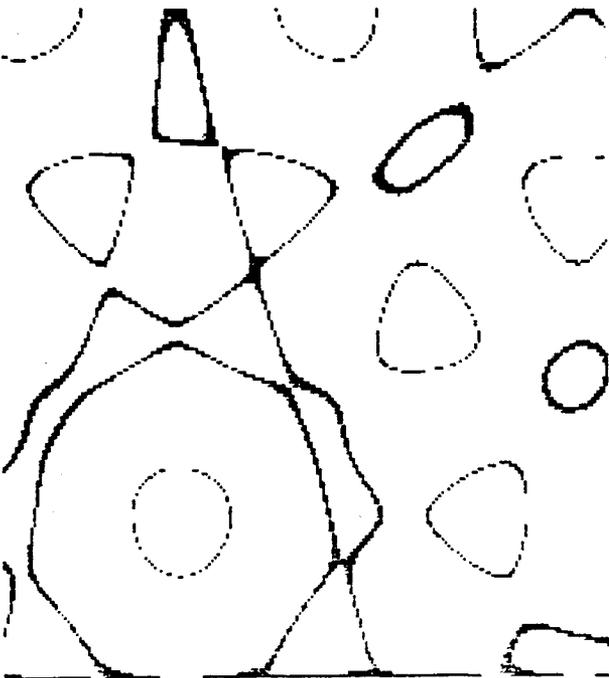
подобное свойство отсутствует. Седла и сепаратрисы распределяются в различных плоскостях уровня, и в этом заключается одно из структурных различий периодических структур и структур с квазисимметрией. При $q \notin \{q_c\}$ единая сеть сепаратрис отсутствует. Поверхность, изображающая функцию, определенную формулой (6.60), приведена на рис. 6.16 для $q = 5$. Из рисунка видно, что седла образуют структуру, близкую к семейству параллельных прямых.

Рис. 6.17 показывает, что вблизи значения $\mathcal{E}_5 = 1$ сепаратрисные петли подходят очень близко друг к другу. Однако пересечения петель происходят в разных местах на различных (хотя и близких) линиях уровня.

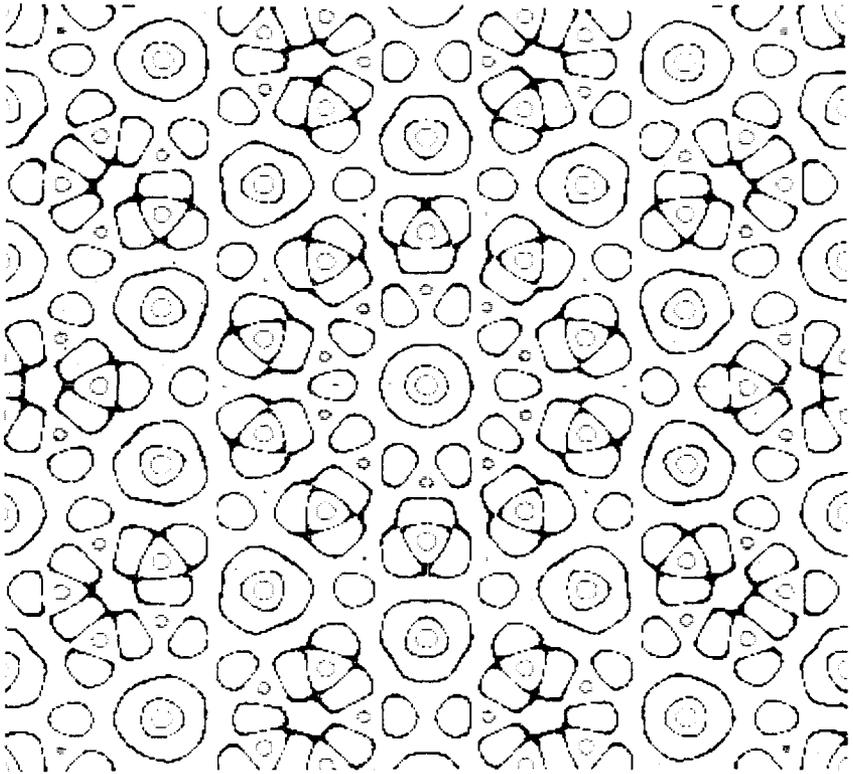
Благодаря тому, что щели между сепаратрисами очень малы на поверхности интеграла энергии $\mathcal{E}_5 \approx 1$, даже малое возмущение способно создать стохастические слои, которые перекроют эти щели. Тем самым возникнет единая стохастическая паутина. Таким образом, в случае квазисимметрии механизм образования паутины сильно отличается от случая кристаллической симметрии, так как при пренебрежении возмущением V_q единая сепаратрисная сеть отсутствует.



a



b



в

Рис. 6.17. Фазовый портрет для гамильтониана \mathcal{E}_5 с квазисимметрией 5-го порядка: *a* – линии уровня вблизи $\mathcal{E}_5 = 1$, все точки принадлежат области значений $0,8 < \mathcal{E}_5 < 1,2$, размер квадрата $32\pi \times 32\pi$; *б* – увеличенное изображение линий уровня в малом квадрате, отмеченном на рис. *a*, $0,9 \leq \mathcal{E}_5 \leq 1,1$; *в* – линии уровня в окрестности значения $\mathcal{E}_5 = 0,2$ (жирные линии) и в окрестности значения $\mathcal{E}_5 = -3,2$ (бледные линии); ширина квадрата $32\pi \times 32\pi$

Если рассмотреть фазовый объем в виде тонкого слоя толщиной $\Delta \mathcal{E}$ в окрестности значения $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_q^{(0)}$, то все линии уровня (в том числе и сепаратрисы), удовлетворяющие условию

$$\mathcal{E}_q(u, v) = \text{const} = \mathcal{E}_q^{(0)},$$

слегка размажутся и приобретут конечную толщину. Выберем значение $\mathcal{E}_q^{(0)}$ таким, чтобы сепаратрисные петли подходили достаточно близко друг к другу. Например, при $q = 5$ этому соответствует $\mathcal{E}_q^{(0)} \approx 1$. Тогда из-за конечной толщины сепаратрис они соединятся, образуя некоторую структуру (сеть) на фазовой плоскости. Именно такая структура получилась на рис. 6.16б. Будем далее называть такие структуры скелетом паутины. Скелет является некоторым огрублением стохастической паутины для исходного гамильтониана $H(u, v, \tau)$. Исследование скелетов паутин будет проведено в следующей главе.

§ 6.5. Структуры при диффузии частиц

До сих пор обсуждались только малые значения параметра возмущения K_0 . Именно в этом случае сохранялась структура тонкой паутины, генерируемая отображением \hat{M}_q . При увеличении параметра K_0 паутина становится очень широкой. Ее мелкие детали разрушаются. Дальнейшее увеличение K_0 создает уже структуру, образованную случайными блужданиями частицы на плоскости и ничего общего не имеющую со структурой периодической или аperiodической паутины при малых K_0 .

Обратимся к исходному гамильтониану (6.14) задачи о движении частицы в магнитном поле и в поле волнового пакета:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) - \frac{e}{m} E_0 T \cos kx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (6.61)$$

Введем переменные действие – угол:

$$I = \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2, \quad \varphi = \arctg(\omega_0 x / \dot{x}).$$

Величина I с точностью до постоянного множителя равна энергии частицы (осциллятора). При достаточно больших значениях I относительное изменение действия под влиянием одного толчка δ -функции будет малым, т.е.

$$|\Delta I| = |I_{n+1} - I_n| \ll I_n. \quad (6.62)$$

Если одновременно имеет место условие

$$K = \frac{e}{m\omega_0} E_0 k T \gg 1 \quad (6.63)$$

(см. определения (6.18) и (6.13)), то движение частицы сильно стохастическое и может быть описано с помощью уравнения диффузии Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} D(I) \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (6.64)$$

Здесь $F = F(I, t)$ – функция распределения и $D(I)$ – коэффициент диффузии частицы:

$$D(I) = \frac{1}{T} \langle\langle (\Delta I)^2 \rangle\rangle, \quad (6.65)$$

а скобки $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ обозначают усреднение по фазе φ .

Из отображения \hat{M}_q (6.12) следует

$$\begin{aligned} \Delta I = & 2 \frac{e}{m} E_0 T I^{1/2} \sin \varphi \sin(k\rho \cos \varphi) + \\ & + \left(\frac{e}{m\omega_0} E_0 k T \right)^2 \sin^2(k\rho \cos \varphi), \end{aligned} \quad (6.66)$$

где $\rho = I^{1/2}/\omega_0$ – радиус орбиты вращения частицы (амплитуда колебаний осциллятора).

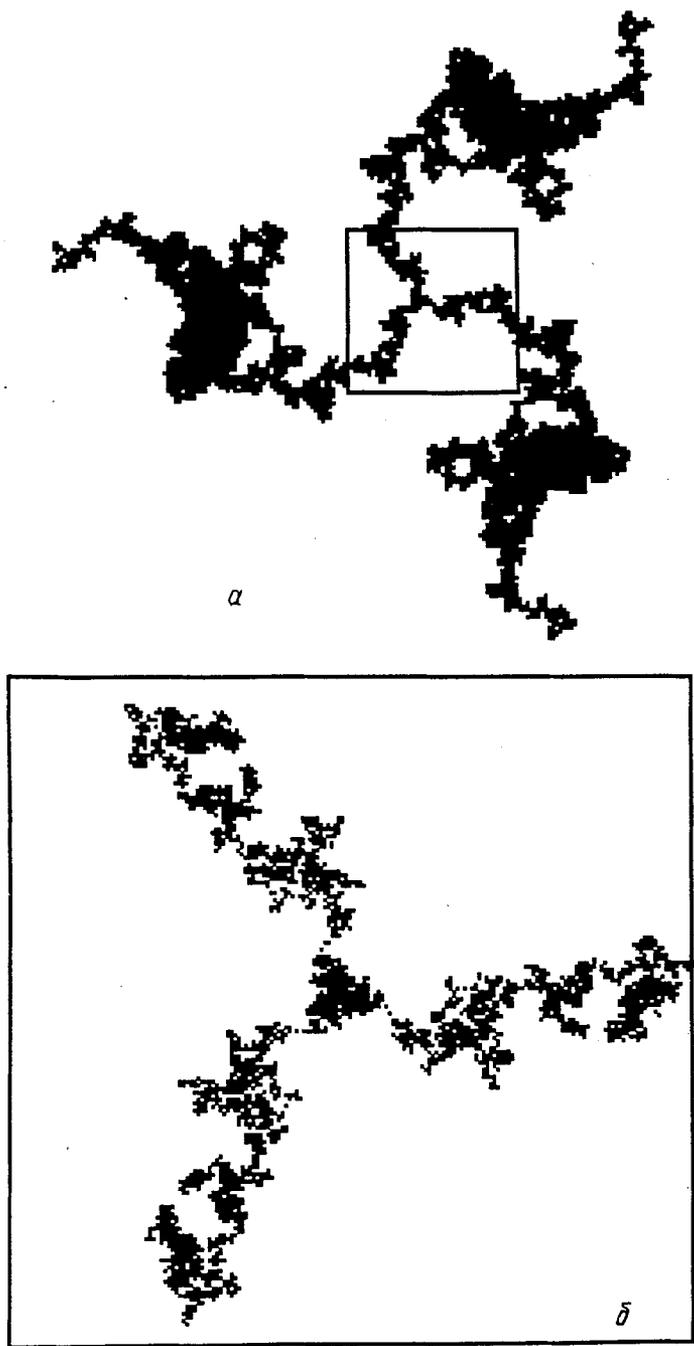


Рис. 6.18. Фрактал, образованный диффузией с симметрией 3-го порядка при $K_0 = 3,5$: a – размер квадрата $100\pi \times 100\pi$; число шагов 150000; b – часть, изображенная в малом квадрате на рис. a , образуется за 9500 шагов

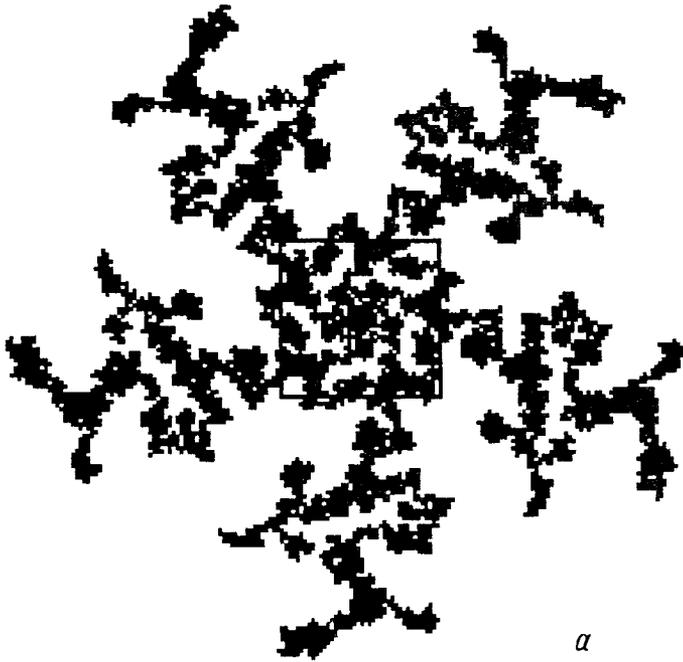
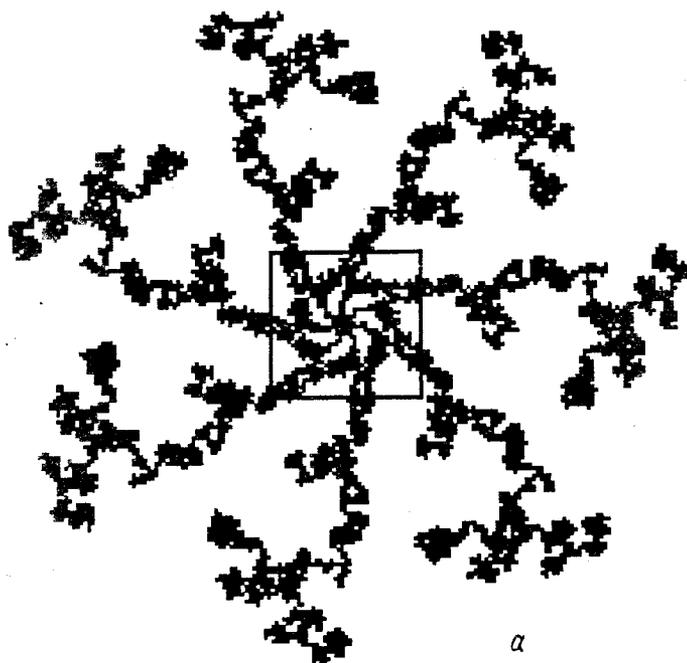
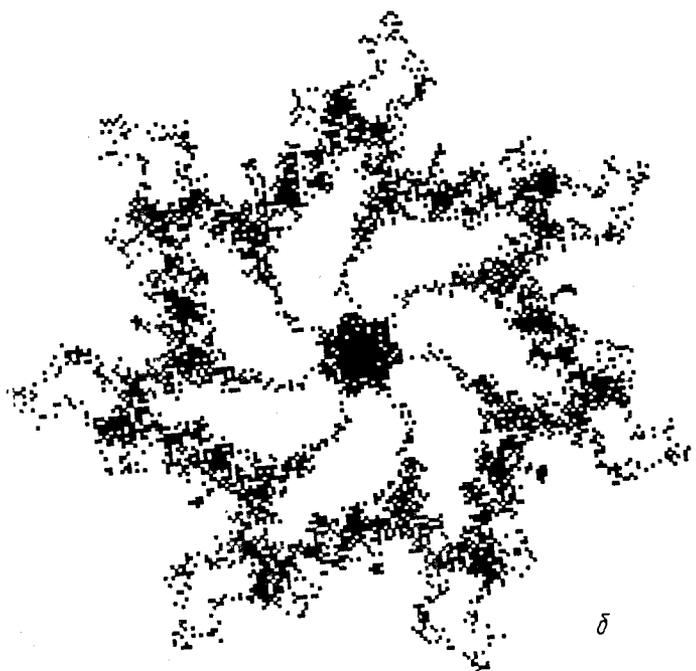


Рис. 6.19. Фрактал, образованный диффузией с симметрией 5-го порядка при $K_0 = 3,5$:
a – размер квадрата $800\pi \times 800\pi$, число шагов 160000, *б* – часть, заключенная в малом квадрате на рис. *a*, число шагов 9826



a



b

Рис. 6.20. Фрактал, образованный диффузией с симметрией 7-го порядка при $K_0 = 3,5$: *a* – размер квадрата $800\pi \times 800\pi$, число шагов 108470, *b* – часть, изображенная в малом квадрате на рис. *a*, число шагов 7618

Подстановка выражения (6.66) в (6.65) и выполнение интегрирования по фазе φ дает

$$D(I) = \frac{\omega_0^2}{k^2} K_0^2 \frac{I}{T} \left[1 - \frac{1}{k\rho} J_1(2k\rho) \right], \quad (6.67)$$

где J_1 — функция Бесселя. При выполнении усреднения по фазе теряется информация о симметрии задачи. В действительности она, конечно, существует при значениях q , близких к рациональным числам. На рис. 6.18—6.20 приведены примеры того, как траектория частицы заполняет фазовую плоскость при $q = 3$, $q = 5$ и $q = 7$. Образующиеся при этом фигуры являются типичными фракталами. Их форма сильно зависит от времени наблюдения диффузии и от параметра K_0 . Чем больше K_0 , тем сильнее вытянуты фракталы вдоль радиусов. На фазовой плоскости возникает фрактальное дерево. Действие различных сил в уравнениях движения приводит к своеобразной кластеризации диффузии. При больших амплитудах возмущения (больших K_0) частица быстро продвигается в радиальном направлении, образуя размытые лучи неправильной формы. Расплывание лучей в азимутальном направлении происходит сравнительно медленно. Поэтому, если выбрать начальное условие так, что диффузия пойдет, в основном, по другим радиусам, то новое фрактальное дерево (кластер) в течение долгого времени не будет или почти не будет пересекаться с предыдущим деревом. В этом смысле фазовая плоскость оказывается "кластеризована", т.е. условно поделена на некоторые фрактальные области диффузии, слабо перекрывающихся друг с другом.

§ 6.6. Распад паутины для релятивистских частиц

Если частица движется в магнитном поле и в перпендикулярном к нему поле волнового пакета, как в исходной задаче (6.5), то при условии резонанса

$$\omega_0 T = \alpha = 2\pi/q \quad (q = 3, 4, \dots)$$

и при $\omega = 0$ образуется стохастическая паутина. Вдоль каналов паутины возможно, вообще говоря, неограниченное ускорение частиц. Однако при достаточно больших энергиях скорость частицы начинает приближаться к скорости света. Движение частицы становится релятивистским, а частота ее вращения в магнитном поле становится нелинейной, т.е. начинает зависеть от энергии частицы. В результате паутина должна распасться в области, где нелинейность оказывается достаточно большой. Этот эффект был рассмотрен в работе [13] (ком. 6.4).

В релятивистском случае уравнения (6.15) заменяются следующими уравнениями:

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{x}) + \frac{\omega_0^2}{\gamma} x = \frac{e}{m} E(x, t), \quad (6.68)$$

$$\dot{y} = -\frac{\omega_0}{\gamma} x,$$

где γ — релятивистский фактор:

$$\gamma = [1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/c^2]^{-1/2}, \quad (6.69)$$

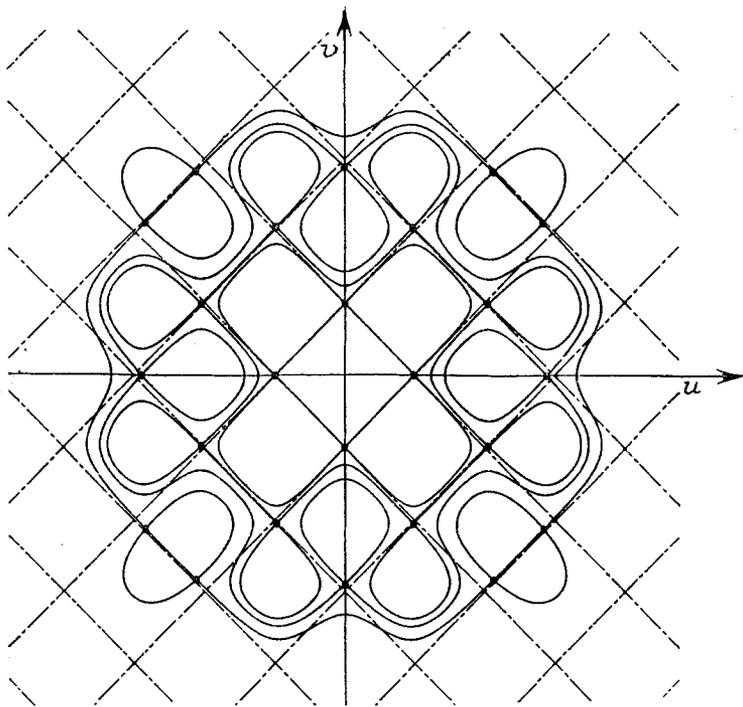


Рис. 6.21. Сепаратрисы усредненного гамильтониана $H_4^{(0)}(\gamma)$ при резонансе 4-го порядка и $\Gamma = 1,3 \cdot 10^{-4}$. Штрихпунктирные линии соответствуют сепаратрисной сетке при $\Gamma = 0$ (рисунок из [13])

а волновой пакет $E(x, t)$ определен тем же выражением (6.3) с $\omega = 0$:

$$E(x, t) = -E_0 T \sin(kx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (6.70)$$

Подстановка (6.70) и (6.69) в (6.68) позволяет перейти от дифференциального уравнения к отображению. Для этого надо проинтегрировать (6.68) в окрестности δ -функции и связать переменные (\dot{x}_n, \dot{y}_n) и $(\dot{x}_{n+1}, \dot{y}_{n+1})$ на концах интервала времени длиной T так, как это делалось в § 6.1. В результате приходим к релятивистскому отображению, полученному в [13]:

$$\hat{M}_\alpha(\gamma): \begin{cases} u_{n+1} = (u_n + K_0 \sin v_n) \cos(\alpha/\gamma_n) + v_n \sin(\alpha/\gamma_n), \\ v_{n+1} = -(u_n + K_0 \sin v_n) \sin(\alpha/\gamma_n) + v_n \cos(\alpha/\gamma_n), \end{cases} \quad (6.71)$$

где обозначено

$$\gamma_n = \left\{ 1 + \frac{\omega_0^2}{k^2 c^2} [(u_n + K_0 \sin v_n)^2 + v_n^2] \right\}^{1/2},$$

$$u = \gamma k \dot{x} / \omega_0, \quad v = \gamma k \dot{y} / \omega_0 = -kx, \quad (6.72)$$

$$K_0 = \frac{e}{m \omega_0} E k T.$$

При $\gamma = 1$ отображение $\hat{M}_\alpha(\gamma)$ переходит в (6.12).

Из формул (6.71) и (6.72) хорошо видно, в чем заключаются изменения из-за релятивизма частиц. Вместо угла подкручивания α в $\hat{M}_\alpha(\gamma)$ стоит угол α/γ_n . Поэтому условие резонанса имеет вид

$$\alpha/\gamma_n = 2\pi/q \quad (q = 1, 2, \dots). \quad (6.73)$$

Величина γ_n зависит от энергии частицы. Поэтому условие (6.73) может быть выполнено при некоторых определенных значениях (u, v) . Изменение (u, v) со временем приводит к расстройке резонанса. Тем самым снимается вырождение и становятся применимыми результаты КАМ-теории о сохранении инвариантных кривых, охватывающих центр при малых значениях возмущения.

Для иллюстрации этого заключения рассмотрим случай резонанса 4-го порядка ($q = 4$) и разложим выражения, входящие в (6.71)–(6.73), по малым значениям параметров $\beta = \omega_0/kc$ и K_0 . Это приводит к отображению

$$\hat{M}_4^A(\gamma): \begin{cases} u_{n+4} = u_n + 2K_0 \sin v_n - \pi\beta^2(u_n^2 + v_n^2)v_n, \\ v_{n+4} = v_n - 2K_0 \sin u_n + \pi\beta^2(u_n^2 + v_n^2)u_n \end{cases} \quad (6.74)$$

с точностью до членов первого порядка по K_0 и β^2 [13]. Его следует сравнить с отображением \hat{M}_4^A (6.24), которое не имеет последних членов, содержащих β^2 . Дальнейшие преобразования аналогичны тем, что проводи-

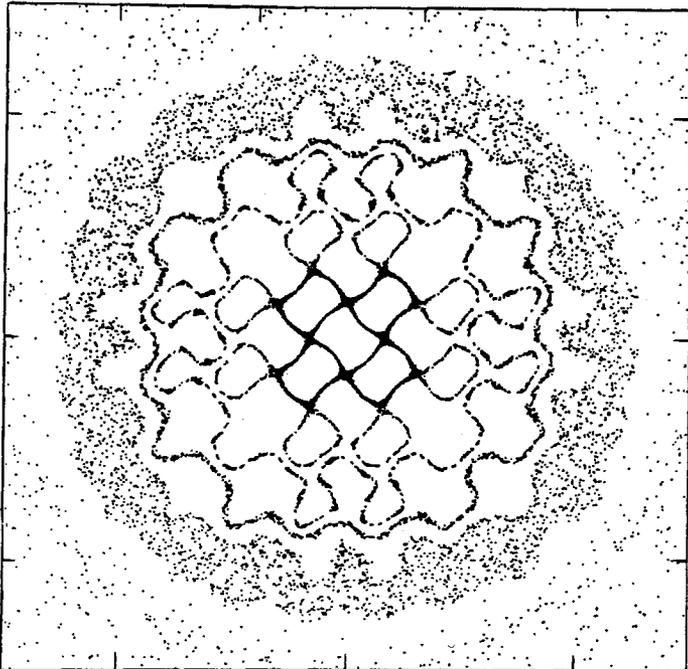


Рис. 6.22. Пять разных начальных условий для релятивистского отображения $M_4^A(\gamma)$; $\beta = 0,01$, $K_0 = 1,2$ [13]

лись в § 6.2. Гамильтониан, приводящий к (6.74), имеет вид

$$H_4(\gamma) = -\frac{1}{2} K_0 \left\{ [\cos v + \cos u + \Gamma(u^2 + v^2)^2] + \right. \\ \left. + [\cos u + \Gamma(u^2 + v^2)^2] \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} n \frac{t}{T}\right) \right\}, \quad (6.75)$$

где $\Gamma = \pi\beta^2/8K_0$.

Выражение (6.75) также следует сравнить с соответствующей формулой (6.27), которая следует из (6.75) при $\Gamma = 0$ ($\beta = 0$). Невозмущенная часть гамильтониана $H_4(\gamma)$ имеет вид

$$H_4^{(0)}(\gamma) = -\Omega_4 [\cos v + \cos u + \Gamma(u^2 + v^2)^2] \quad (6.76)$$

(см. (6.28)). Она определяет семейство сепаратрис, которое теперь не образует единую сетку, покрывающую плоскость (рис. 6.21). Поэтому действие возмущения в (6.75) приводит к образованию ограниченной паутины (рис. 6.22). Этот пример также показывает, что ускорение частиц до больших энергий возможно, если начальное условие выбрано в области, где паутина уже разрушена. В области, где часть паутины сохранилась, рост энергии ограничен границами сохранившейся части паутины (ком. 6.5).

ДВУМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ С КВАЗИСИММЕТРИЕЙ

Физические явления, происходящие в конденсированных средах, значительно разнообразнее явлений, порождаемых движением отдельных частиц. Значительное увеличение числа степеней свободы приводит к необходимости качественно иного анализа динамики сред. Одним из важных проявлений этого различия является образование регулярных структур в среде. Примеры их и многочисленны, и разнообразны: кристаллы и вихревые дорожки, конвективные ячейки и перистые облака, узоры, создаваемые трещинами, и мыльная пена, расположение зерен в головке подсолнуха и Большое Красное Пятно Юпитера, формы снежинок и "упаковка" живых клеток. Этот список можно было бы продолжить очень далеко. Желание получить общий взгляд на вещи вполне естественно. Недавнее открытие квазикристаллов значительно продвинуло наше понимание того, какие могут быть структуры и какие допустимы симметрии. Когда мы говорим о симметрии объекта, то предполагаем существование у этого объекта некоторого инвариантного свойства. Конечно, привлечение геометрических методов для анализа пространственных структур и их симметрий является достаточно распространенным. Однако использование динамических методов может сыграть здесь далеко не последнюю роль.

Динамика частиц и полей также может обладать определенными симметриями. Мы уже имели возможность убедиться в этом выше. В этой главе будет показано, каким образом симметрия динамических задач может быть использована для получения и анализа симметрии пространственных структур. По разным причинам существование подобной связи является очень эффективным и дает возможность глубже проникнуть в природу вещей. Вспомним, сколько усилий и изощренности было затрачено Кеплером для того, чтобы убедить читателя, что некоторые силы и факторы, действующие в природе, являются формообразующими. Взаимодействия определяют пространственные структуры и законы их роста (ком. 7.1).

Проникновение в глубь динамической предыстории возникновения структур позволяет применить новые методы нелинейной динамики в таких областях геометрических свойств структур, где ранее это было немислимым. Однако, по-видимому, наиболее интересным оттенком этой технической возможности является возможность включения в ме-

тод исследования принципиально нового элемента. Им является слабый хаос в геометрическом строении структур. Хаос является неустранимым свойством динамики в общем случае, и поэтому формы динамического происхождения могут также содержать небольшие стохастические отклонения от идеальности. Тем самым динамическая стохастичность может дать ключ к пониманию, как можно компенсировать малые геометрические невязки в структурах, которые принципиально не существуют в идеальном виде.

§ 7.1. Какими могут быть структуры?

Когда мы пытаемся понять, почему снежинки имеют шестиугольную, а не, например, пятиугольную форму, мы сталкиваемся с необходимостью проникнуть в глубокие тайны происхождения геометрических свойств тел, создаваемых природой. Действительно ли законы геометрии запрещают те или иные формы физических объектов? В той или иной форме подобные вопросы берут свое начало в древнем мире. Правильные платоновы тела сыграли значительную роль в картине мироздания Кеплера, а сейчас использование законов симметрии в физике стало привычным методом анализа явлений.

В кристаллофизике применение геометрических идей является особенно наглядным. В основе ортодоксальной кристаллографии лежит представление о периодически повторяющихся структурах, заполняющих

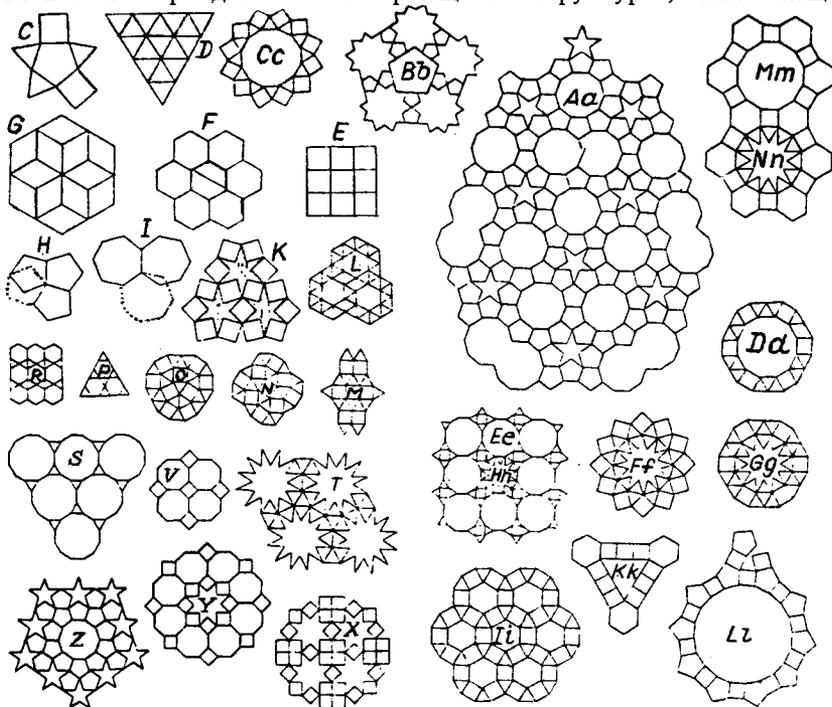


Рис. 7.1. Примеры покрытий плоскости, найденные Кеплером (Harmonice Mundi, том 2, 1619 г.)

пространство или плоскость. В более формальном смысле в кристаллах реализуется такая упаковка одной или нескольких структурных ячеек, которая обладает трансляционной симметрией относительно сдвига на некоторый вектор. В таких случаях говорят о существовании дальнего порядка в кристаллах.

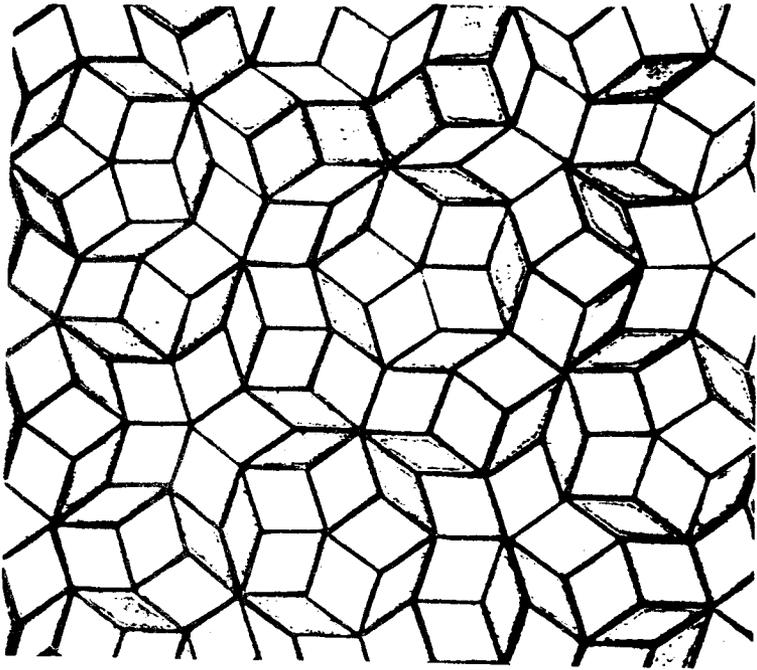
Симметричные свойства объектов обладают универсальностью. Это означает, что если какой-либо способ правильной упаковки ячеек некоторой формы найден в кристаллах, то такой же способ упаковки "жидких" ячеек может быть обнаружен и в гидродинамических течениях, и в структуре фазовой плоскости динамической системы. Поэтому проблема мозаик (покрытий) пространства или плоскости, обладающая какой-либо симметрией, оказывается связанной не только с геометрическими свойствами пространства, но и с реальными физическими процессами (ком. 7.2).

Хотя можно придать очень сложную форму отдельной ячейке мозаичной структуры, как это видно в изобретательных рисунках датского художника Мориса Эшера [9], однако мы можем замостить ими плоскость лишь вполне определенным числом способов, если хотим сохранить дальний порядок. Кеплер хорошо понимал важность и этой проблемы, т.е. проблемы покрытия неограниченной плоскости, используя лишь конечное число элементов. Об этом свидетельствуют его исследования, отраженные в рис. 7.1 [2].

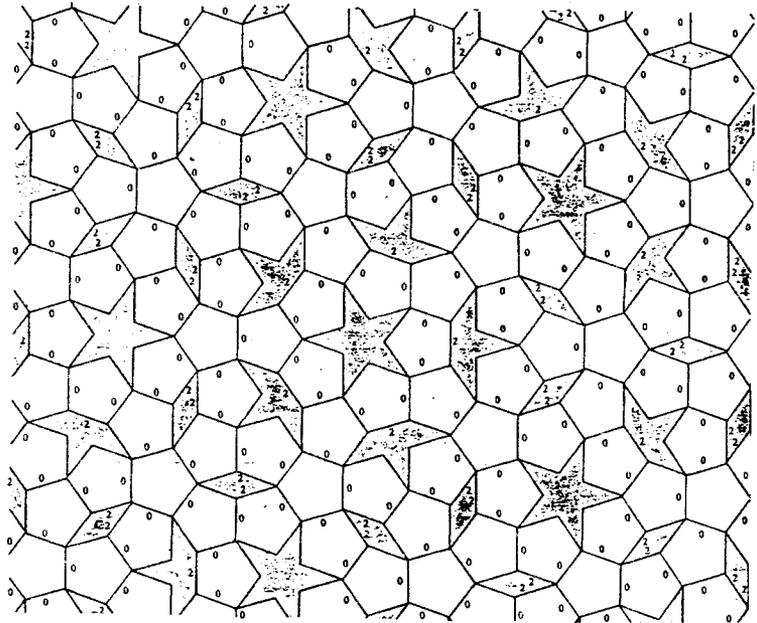
В длинном перечне исследований по покрытиям, упаковкам, мозаикам и орнаментам число 5 всегда было выделенным. Попытки понять, в какой мере правильный пятиугольник может быть включен в покрытие, мы находим уже у Кеплера (см. рис. 7.1, элемент *Aa*) и Дюрера. Одновременно с многочисленными мусульманскими орнаментами, содержащими правильные пяти- и десятиугольники (см. далее § 10.2), существовало также типичное утверждение в специальной литературе о том, что кристаллов с осью симметрии 5-го порядка не может быть.

С некоторого времени в кристаллографии появились попытки отхода от ортодоксальных взглядов на то, каким должен быть кристалл. Первое хорошо аргументированное изложение подобной необходимости принадлежит Шредингеру [10]. Для объяснения существования регулярной структуры большой молекулы, составляющей один ген, он ввел понятие аperiодического кристалла. Генетический код служит тем алгоритмом, который задает последовательность в расположении атомов и атомных групп аperiодического кристалла. Многие попытки расширить старые схемы кристаллического порядка были сосредоточены вокруг поиска структур с симметрией 5-го порядка. Хотя подобные структуры уже встречались в росписях дворца Альгамбры в Гренаде (см. далее в гл. 10), однако наибольшую популярность приобрел паркет Пенроуза. Несколько вариантов его приведено на рис. 7.2 (ком. 7.3).

На первый взгляд трудно указать связь между покрытиями Пенроуза и динамическими системами. Однако рис. 7.3 демонстрирует подобную связь [20]. На нем показано, как паркет Пенроуза возникает на скелете стохастической паутины, которая ранее была приведена на рис. 6.4. Система особенностей (эллиптические и гиперболические точки, сепаратрисы) динамической системы образует в фазовом пространстве некото-

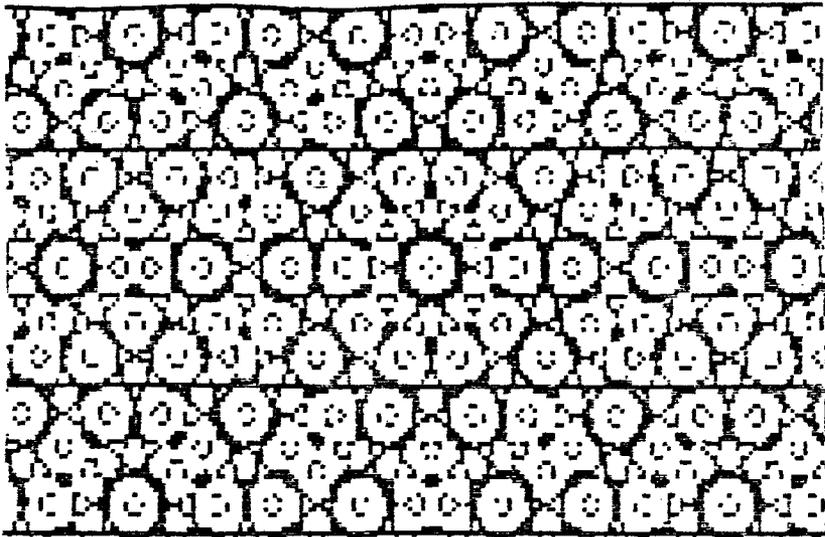


a

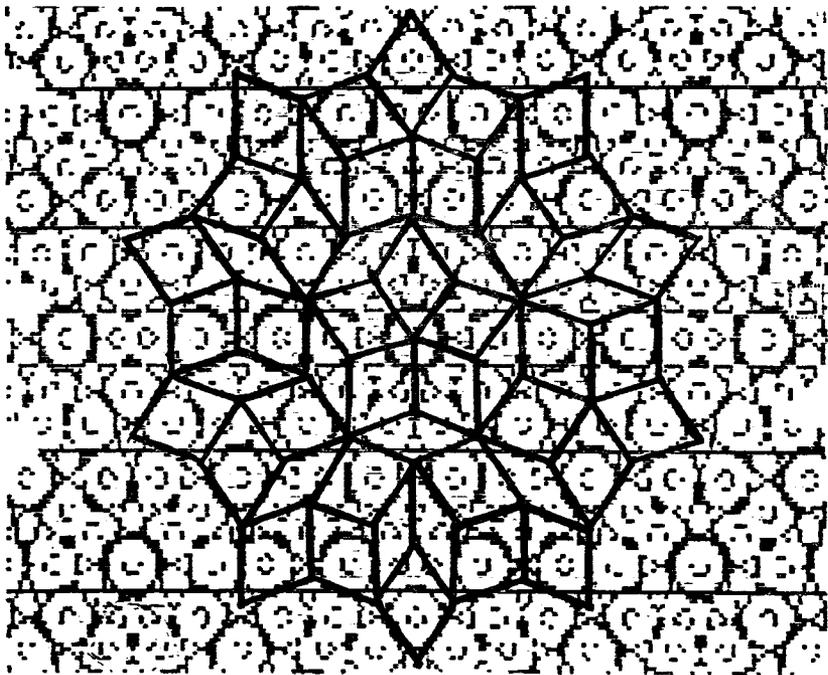


б

Рис. 7.2. Разные варианты паркета Пенроуза: *a* – паркет состоит из двух ромбов, *б* – паркет состоит из четырех элементов



a



б

Рис. 7.3. Связь между гамильтонианом H ($q = 5$) и паркетом Пенроуза: *a* – области, соответствующие значениям функции H_s , лежащим внутри интервала $H_s \in (1 - 0,15; 1 + 0,15)$, *б* – схема получения паркета Пенроуза путем соединения определенных точек рельефа на рис. *a*; алгоритм соединения очевиден из рисунков

рые структуры. Эти структуры оказываются в определенных случаях связанными со структурами квазикристаллического типа. Благодаря подобной связи некоторые геометрические свойства структур могут быть изучены методами динамики, а некоторые свойства динамических систем можно определить структурными методами.

§ 7.2. Динамическая генерация структур

Один из первоначальных методов получения квазикристаллических структур был основан на проектировании N -мерных, плотно упакованных кубов из N -мерного пространства на некоторое D -мерное ($D < N$). При $D = 2$ и $N = 5$ и надлежащем выборе угла для плоскости проектирования получался паркет Пенроуза (ком. 7.4).

Основная идея метода проектирования заключается в следующем. Рассмотрим систему ортогональных векторов $\{e_j\}$ ($j = 1, \dots, q$), исходящих из одной точки ("еж" $\{e_j\}$). На рис. 7.4 представлены двумерный ($N = 2$) и трехмерный ($N = 3$) "ежи". Каждому вектору e_j сопоставим неограниченную систему ортогональных к нему и равноотстоящих друг от друга параллельных $(q - 1)$ -мерных гиперплоскостей в q -мерном пространстве. Семейство гиперповерхностей назовем "гридом". Множество q -гридов образует мультигрид порядка q . Пересечения гиперповерхностей образуют q -мерное обобщение квадратной решетки. Проектирование некоторой части мультигрида, заключенной внутри гиперслоя конечной толщины, на D -мерное пространство порождает покрытие, или мозаику. Именно таким образом возникает паркет Пенроуза и доказывается, что он не содержит "дыр" или пересекающихся ромбов [22].

В более общем случае грид может быть устроен сложнее (например, с некоторыми пробелами), однако ясно, что операция проектирования

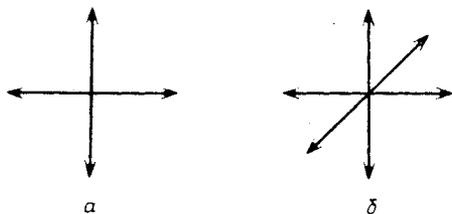


Рис. 7.4. Двумерный (а) и трехмерный (б) "ежи"

является линейной. Этот важный вывод означает, что регулярные мультигриды при проектировании создают сложный паркет упорядоченных структур, имеющих заведомо дальний порядок. Однако дальний порядок связан не с периодичностью структур, а с их почти периодичностью (конечное число несоизмеримых периодов) или с условной периодичностью (бесконечное число несоизмеримых периодов).

Существуют дальнейшие обобщения идеи проектирования для получения непериодических структур. Например, система векторов $\{e_j\}$ может образовывать произвольный (неправильный) "еж", а семейство гиперплоскостей может быть заменено семейством гиперповерхностей [17].

Вернемся к отображению \hat{M}_q с резонансным подкручиванием (см. § 6.1):

$$\hat{M}_q: \begin{cases} \bar{u} = (u + K_0 \sin v) \cos \frac{2\pi}{q} + v \sin \frac{2\pi}{q}, \\ \bar{v} = -(u + K_0 \sin v) \sin \frac{2\pi}{q} + v \cos \frac{2\pi}{q}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Оно действует на плоскости (u, v) и имеет инвариантные элементы s , т.е.

$$\hat{M}_q s = s. \quad (7.2)$$

Множество элементов s состоит из комплектов неподвижных точек и стохастических областей. В частности, стохастическая паутина является одним из таких элементов. Под действием отображения \hat{M}_q точка, принадлежащая стохастической паутине, отображается в другую ее точку. Однако вся паутина инвариантна относительно действия \hat{M}_q и поэтому \hat{M}_q можно рассматривать как генератор покрытия с квазисимметрией порядка q . Слово "квазисимметрия" здесь означает, что мы имеем дело с некоторым, не совсем "правильным" в обычном смысле покрытием плоскости.

Важным свойством определения симметрии (7.2) с помощью динамического оператора \hat{M}_q является то, что инвариантное множество точек $\{s_q\}$, составляющих стохастическую паутину, появляется с течением времени. Только при $t \rightarrow \infty$ множество точек $\{s_q\}_t$ достаточно полно представляет структуру паутины.

Операция сглаживания паутины и убирания мелких ее деталей имеет строго определенный динамический смысл. Пусть $H(u, v, t)$ — гамильтониан исходной системы, уравнения движения которой эквивалентны отображению \hat{M}_q . Выражение для $H(u, v, t)$ приведено в § 6.1 (формула (6.15)):

$$H(u, v, t) = \frac{\pi}{q} (u^2 + v^2) - K_0 \sin v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n), \quad (7.3)$$

где принято $\alpha = 2\pi/q$ и τ заменено на t . Уравнения движения имеют обычную гамильтоновскую форму

$$\dot{u} = \partial H / \partial v, \quad \dot{v} = -\partial H / \partial u. \quad (7.4)$$

Сглаживание паутины, определяемой гамильтонианом (7.3), производится путем перехода во вращающуюся систему координат с периодом $t_q = q$ и с последующим усреднением по времени. Это приводит к новому гамильтониану (см. § 6.4, формула (6.48))

$$H_q = \sum_{j=1}^q \cos(\vec{\rho} \cdot \mathbf{e}_j), \quad (7.5)$$

где опущена константа $(-\Omega_4/2)$ и для удобства переопределена система базисных векторов \mathbf{e}_j :

$$\vec{\rho} = (v, u), \quad \mathbf{e}_j = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{q} j\right), \sin\left(\frac{2\pi}{q} j\right) \right). \quad (7.6)$$

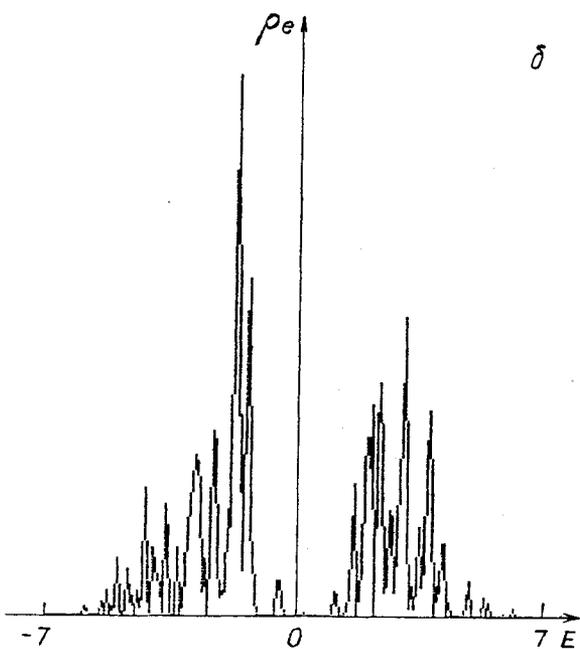
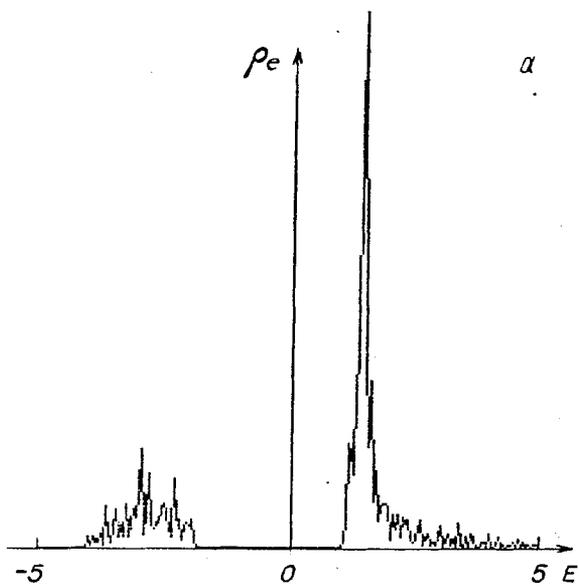


Рис. 7.5. Распределение эллиптических точек для $q = 5$ (а) и $q = 7$ (б)

Новый гамильтониан (7.5) описывает новую динамическую систему с уравнениями движения

$$\dot{u} = \partial H_q / \partial v, \quad \dot{v} = -\partial H_q / \partial u. \quad (7.7)$$

Однако теперь система имеет только одну степень свободы (H_q не зависит от времени) и поэтому формально является интегрируемой. В частности, система (7.7) не содержит хаотических траекторий. Гамильтониан H_q (7.5) имеет ряд примечательных свойств. Он использовался (при $q = 5$) для объяснения симметрии 5-го порядка [16, 25]. С помощью выражения (7.5) можно получить достаточно интересную и обширную информацию. Однако она становится значительно богаче, если принять во внимание происхождение гамильтониана H_q и его связь с отображением \hat{M}_q . Мы продемонстрируем это ниже. Рассмотрим поверхность $H_q = H_q(u, v)$. Сечение этой поверхности плоскостью

$$H_q(u, v) = E \quad (7.8)$$

определяет линии уровня. Поскольку H_q есть гамильтониан динамической системы (7.7) с энергией E , то линии уровня уравнения (7.8) образуют семейство замкнутых инвариантных кривых различной формы и размеров. В их число входят особые элементы: сепаратрисы, эллиптические и гиперболические точки. Особые точки находятся из уравнений

$$\left. \frac{\partial H_q}{\partial v} \right|_{H_q = E} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_q}{\partial u} \right|_{H_q = E} = 0. \quad (7.9)$$

Мы уже решали уравнения (7.9) при $q = 4$ (§ 6.2) и $q = 3, 6$ (§ 6.4). Для всех $q \in \{q_c\}$ существует только один уровень E_h , на котором лежат все гиперболические точки, и только два уровня E_{e_1} и E_{e_2} , на которых лежат все эллиптические точки.

Особым свойством динамических систем H_q , создающих на фазовой плоскости покрытие с квазисимметрией ($q \notin \{q_c\}$), является распределение особых точек по различным уровням энергии E . На рис. 7.5 приведено число эллиптических точек ρ_e для различных значений в случае симметрии 5-го и 7-го порядков (нормировка ρ_e произвольная) [18]. Эти точки, например при $q = 5$, распределены в окрестности двух значений энергии: $E_{e_1} = -3$ и $E_{e_2} = 1,5$, что соответствует дну потенциальных ям и вершинам потенциальных горбов. Распределение ρ_e при $q = 7$ является более равномерным. Степень равномерности распределения возрастает по мере роста q .

Аналогичное распределение гиперболических точек ρ_h для $q = 5$ и $q = 7$ приведено на рис. 7.6. Поскольку через каждую гиперболическую точку проходит сепаратриса, то соответственно имеются резкие изменения фазового портрета системы при изменениях энергии E . Можно сказать, что системы с квазисимметрией плотно заполнены катастрофами в интервале энергии $(-q, q)$. Из рис. 7.5 и 7.6 видно, что существуют также значения энергии E , при которых число особых точек имеет локальные максимумы. Резкое различие фазовых портретов при разных E хорошо представлено на рис. 6.17 а, в для $q = 5$.

Таким образом, в отличие от обычных периодических решеток, где особые точки энергетической поверхности расположены на плоскостях

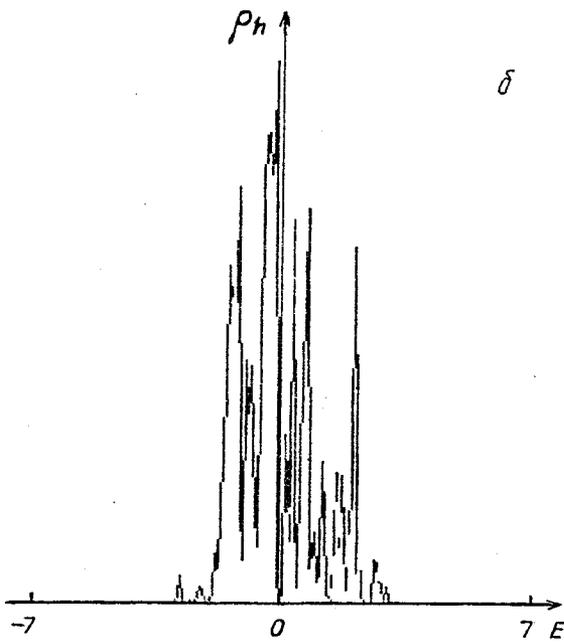
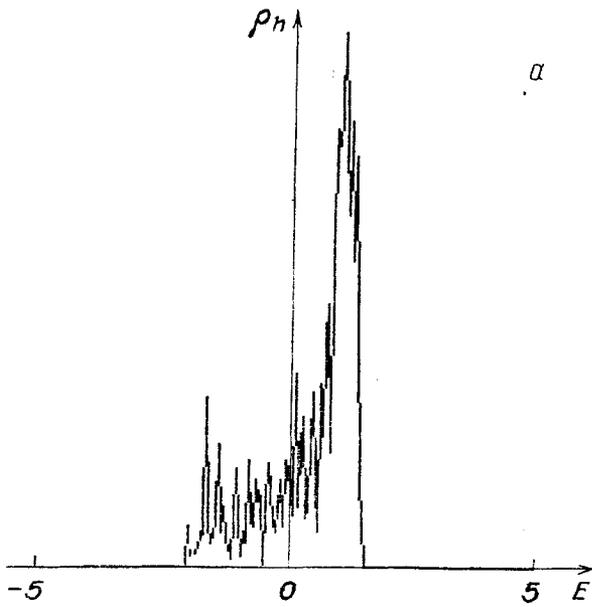
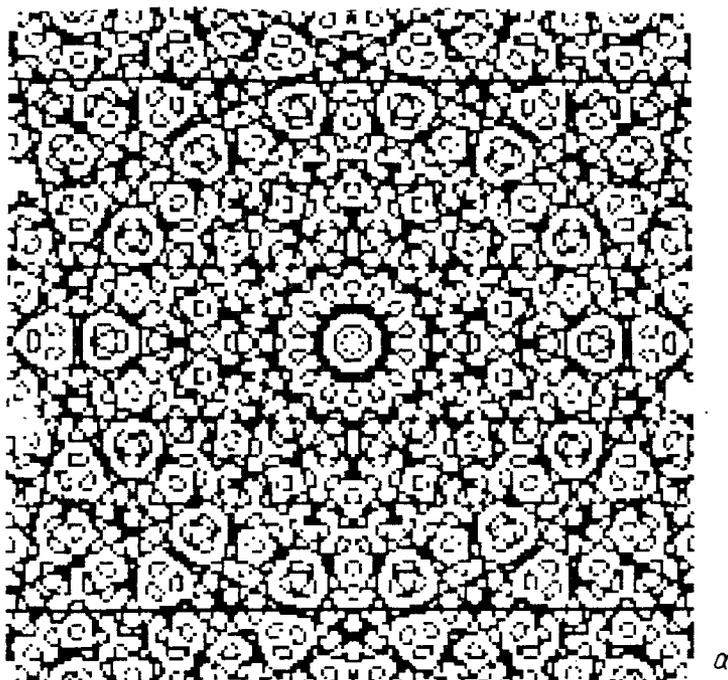
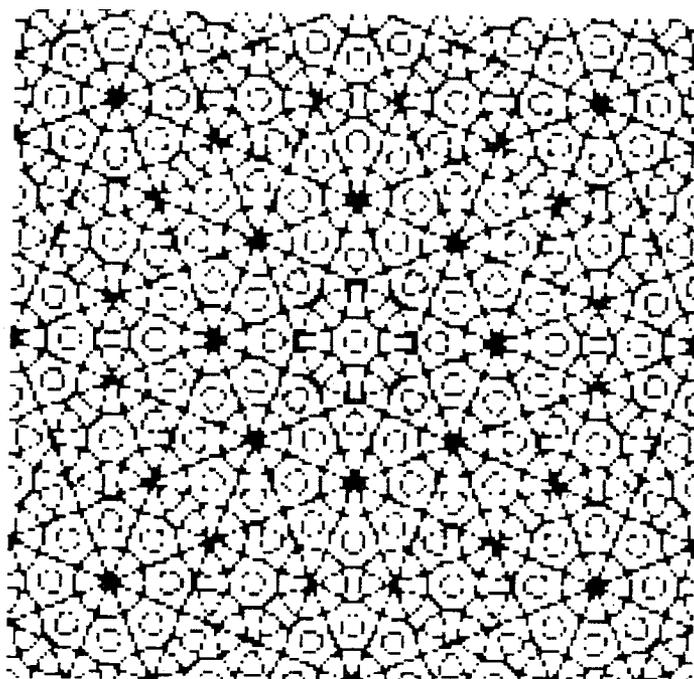


Рис. 7.6. Распределение гиперболических точек для $q = 5$ (а) и $q = 7$ (б)



a



б

Рис. 7.7. Структурные скелеты: *a* – для $q = 7$, размер квадрата $64\pi \times 64\pi$, *б* – для $q = 8$, размер квадрата $48\pi \times 48\pi$, *в* – для $q = 12$, размер квадрата $56\pi \times 56\pi$

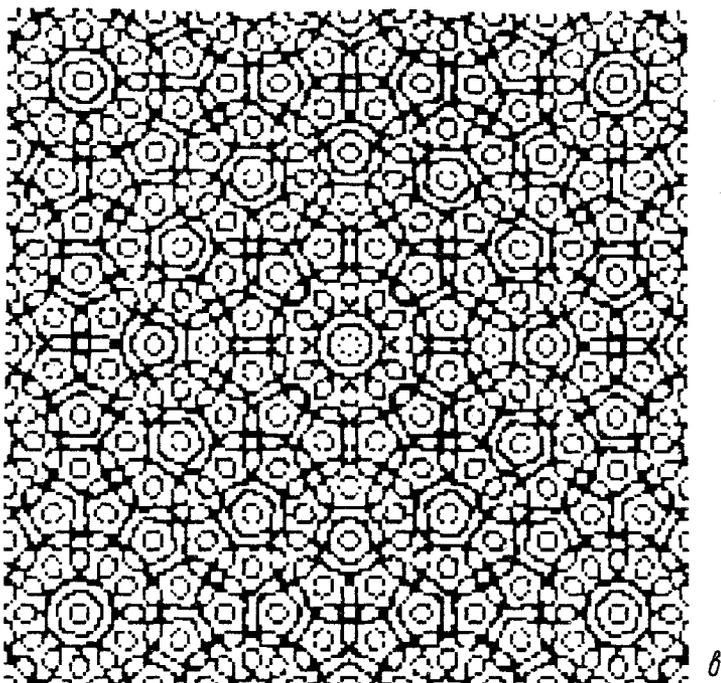


Рис. 7.7 (окончание)

со строго фиксированными значениями энергии, теперь при $q \notin \{q_c\}$ имеется разброс в распределении этих точек. Эта картина присуща неупорядоченным системам. Поэтому системы (7.5) являются новым и пока еще слабо изученным классом динамических систем с квазирегулярным строением фазового портрета. Хотя в системах H_q есть дальний порядок, однако по некоторым свойствам они приближаются к нерегулярным или неупорядоченным системам. Основу этих свойств составляет большое число катастроф фазового портрета, чувствительного к малым изменениям энергии.

Если рассмотреть слабое нестационарное возмущение гамильтониана $H_q(u, v)$, то все его сепаратрисы должны разрушиться и одеться стохастическими слоями. Как видно, например, из рис. 6.17в при $q = 5$, сепаратрисные петли могут находиться далеко друг от друга. Однако, если они расположены близко, как на рис. 6.17а, то их стохастические слои могут объединиться. Узкие промежутки между близкими участками невозмущенных сепаратрис "зарастают" и образуют общую сеть, которая может покрывать всю плоскость. Эта сеть и является стохастической паутиной, которая возникает для динамической системы (7.3) и порождается ею отображения (7.1). При переходе

$$H(u, v, t) \rightarrow H_q(u, v) \quad (7.10)$$

происходит потеря той части гамильтониана (возмущения), которая приводит к разрушению сепаратрис и к созданию паутины.

Для усредненного гамильтониана $H_q(u, v)$ паутина возникает лишь в окрестности энергетического слоя с $E \approx E_c$. Значение E_c соответствует максимуму гиперболических точек в распределении $\rho_h(E)$. Из рис. 7.6 видно, что $E_c \approx 1$ при $q = 5$ и $E_c \approx -1$ при $q = 7$.

Приведенные выше сведения подсказывают способ получения скелета стохастической паутины непосредственно из выражения $H_q(u, v)$. Рассмотрим узкий энергетический слой толщиной ΔE в окрестности значения E_c . Множество точек, принадлежащих системе и удовлетворяющих уравнению (7.8) и условию

$$E \in (E_c - \Delta E/2, E_c + \Delta E/2),$$

образуют некоторое покрытие плоскости — структурный скелет. Примеры таких покрытий для $q = 5, 7, 8, 12$ приведены на рис. 7.3а и 7.7. Они содержат скелет паутины. Размазка всех траекторий по малой области внутри энергетического интервала толщиной ΔE играет роль возмущения.

Таким образом, с помощью перехода (7.10) и последующего выделения структурного скелета устанавливается связь между динамическим генератором покрытий \hat{M}_q и мозаикой покрытия плоскости (ком. 7.5).

§ 7.3. Квазисимметрия. Фурье-спектр и локальный изоморфизм

В этой главе у нас появилось не очень четко сформулированное понятие квазисимметрии. Его интуитивное введение тесно связано с фрактальными свойствами хаоса. Рассмотрим, например, стохастическую паутину с симметрией 4-го порядка ($q = 4$). Чем меньше параметр возмущения K_0 , тем ближе форма паутины к квадратной сетке. Однако этим геометрические свойства паутины не исчерпываются. Граница области хаотической динамики и области регулярного движения имеет очень сложную (фрактальную) форму. Чем точнее мы пожелаем определить форму границы, тем более сложная ее структура будет проявляться. Это свойство присуще любому стохастическому слою (ком. 7.6).

Поэтому вряд ли стоит говорить о какой-либо точной симметрии, если обсуждается геометрическая форма инвариантной области, порождаемой реальной траекторией внутри тонкого стохастического слоя. Взаимодействие части движения с трансляционной симметрией и части движения с вращательной симметрией (или, короче, просто взаимодействие симметрий) должно испортить обе симметрии, даже при малых значениях константы взаимодействия K_0 . Однако симметричные дефекты могут оказаться слабыми. Поэтому симметрия существует в некотором приближенном смысле, который, быть может, даже трудно достаточно хорошо определить. Интуитивно мы понимаем, что некоторая степень огрубления делает форму паутины более правильной, или, иначе, более симметричной. Это показывает, что иногда полезно отойти от определения какой-либо "чистой" симметрии, а вместо этого использовать "квазисимметрию". Существование квазисимметрии означает, что свойство симметрии выполняется для неограниченного геометрического объекта с некоторой степенью точности. Важно, что точность локально однородна, т.е. не зависит от положения выбранного элемента объекта.

Для паутины, например, это означает следующее. Рассмотрим часть паутины внутри круга некоторого радиуса R . Идеальная симметрия означает, что геометрическая форма паутины внутри круга должна удовлетворять некоторым соотношениям. В действительности этого может не быть. Однако отклонения от идеальной симметрии не превышают некоторое значение $\delta(R)$. Существование локально однородной точности сохранения симметрии означает выполнение следующих двух условий:

1) для кругов с различными положениями на плоскости имеются различные значения $\delta_i(R)$, удовлетворяющие условию

$$\delta_i(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \delta_{i0}, \quad (7.11)$$

где значения δ_{i0} не зависят от R ;

2) для всех i выполнено условие

$$\delta_{i0} \leq \delta_0. \quad (7.12)$$

С точки зрения введенных понятий отображение \hat{M}_q при малых значениях параметра K_0 можно рассматривать как генератор покрытий плоскости с "квазисимметрией" порядка q типа "квазикристалл". Сглаженные структуры, получаемые из гамильтониана H_q (7.5), являются более

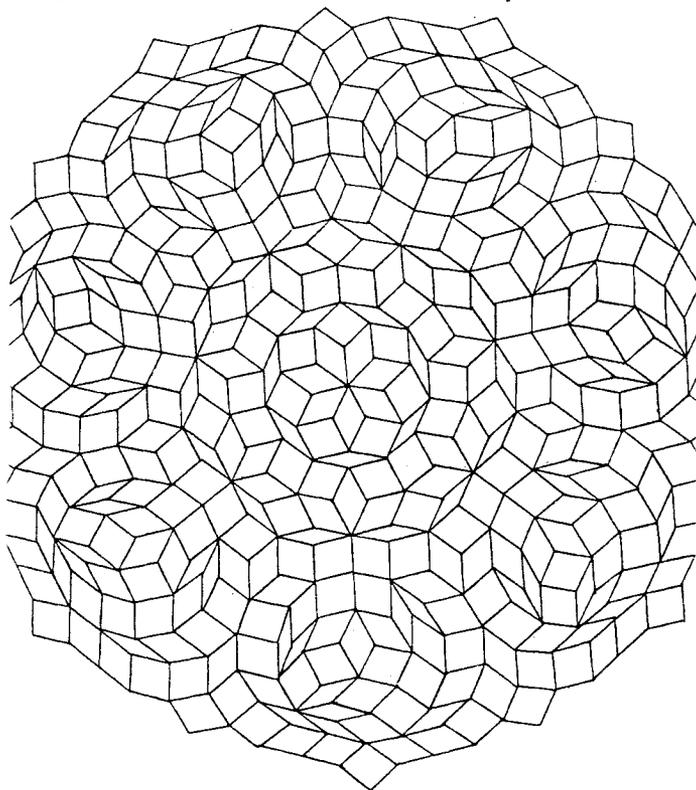


Рис. 7.8. Мозаика 7-го порядка является обобщением паркета Пенроуза на случай симметрии 7-го порядка и использует только три вида ромбов [18]

”правильными”. При переходе от паутины к сглаженным рельефам происходит некоторое выравнивание линий и исчезновение некоторых элементов. Поэтому можно считать, что рельефы (скелеты паутины), например на рис. 7.7, являются некоторой декорацией паутины.

Вообще, на базе паутины или рельефа (скелета) можно построить множество различных покрытий плоскости, если использовать какой-либо дополнительный алгоритм для соединения различных точек основного рисунка. Такую операцию естественно назвать декорированием (ком. 7.7).

Мы уже встречались с одной декорацией, которая привела к паркету Пенроуза (§ 7.1, рис. 7.3). Аналогично можно получить мозаику 7-го порядка (рис. 7.8) как декорацию скелета на рис. 7.7а. При ее создании используются только три вида ромбов с острыми углами ($\pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7$). Это минимальное число ромбов и вообще различных элементов паркета. Более сложный вариант паркета с симметрией 7-го порядка приведен на рис. 7.9. Любой паркет, полученный в результате декорирования паутины, может быть преобразован в другой паркет путем новой декорации. Таким образом можно получить неограниченное число мозаик с той же симметрией [31].

В сглаженных структурах на рис. 7.3а, 7.7 можно выделить систему прямых, образующих мультигрид, т.е. систему параллельных прямых, повернутых q раз на угол $2\pi/q$. Рассмотрим, например, пентагрид на рис. 7.3а. Система прямых в нем имеет толщину, а расстояние между любой парой соседних прямых равно

$$a_n = a_0 \tau_0^n,$$

где a_0 — минимальное расстояние, τ_0 — золотое сечение:

$$\tau_0 = (1 + \sqrt{5})/2 = 2 \cos(\pi/5),$$

n — какое-либо целое число. Мультигрид также является одной из декораций паутины.

Определим процесс фильтрации следующим образом. Будем вычеркивать, например, из рис. 7.3а все прямые, кроме тех, которые образуют пентагрид лишь с двумя возможными расстояниями между соседними параллельными прямыми: a_{n_0} и a_{n_0-1} ($n_0 \geq 1$). Образованный таким образом пентагрид называется решеткой Амманна [4]. Координаты x_m расположения параллельных линий в решетке Амманна удовлетворяют простому правилу [32]:

$$x_m = m + \beta_1 + \frac{1}{\tau_0} \left[\frac{m}{\tau_0} + \beta_2 \right], \quad (7.13)$$

где m — целое число, β_1, β_2 — некоторые константы и скобки [...] обозначают целую часть числа.

Другой способ отобразить последовательность чередований двух расстояний a_0 и b_0 между линиями в решетке Амманна связан с использованием отображения [33]

$$\hat{T}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

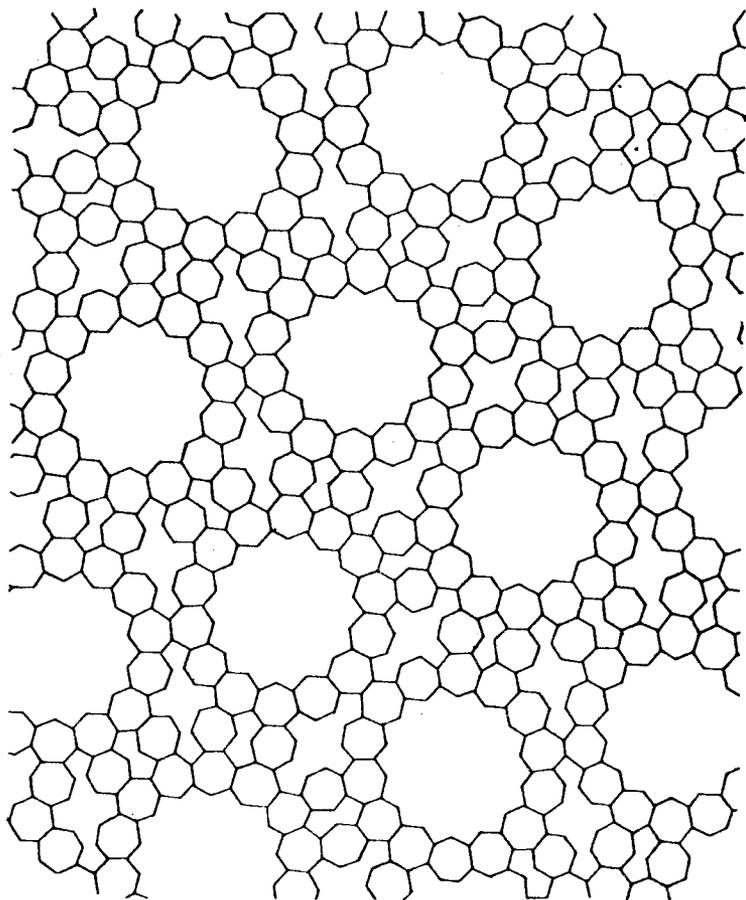


Рис. 7.9. Более сложный вариант паркета с симметрией 7-го порядка [19]

действующего на вектор-столбец (a_0, b_0) . Оно дает

$$a_1 = a_0 + b_0, \quad b_1 = a_0;$$

$$a_2 = a_1 + b_1 = a_0 + b_0 + a_0, \quad b_2 = a_1 = a_0 + b_0.$$

Последовательность $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, в которой зафиксирован порядок следова-

ния длин a_0, b_0 , называется последовательностью Фибоначчи. Она и определяет решетку Амманна (7.13) в случае $q = 5$.

При $q = 7$ оператор (7.14) должен быть заменен некоторым другим оператором \hat{T}_7 . Он является нелинейным, а последовательность линий в решетке определяется не одним числом, как в случае $q = 5$, а двумя: например, $\tau_1 = \cos(\pi/7)$, $\tau_2 = \cos(2\pi/7)$ (ком. 7.8).

Решетка Амманна наиболее простым образом объясняет суть квазикристаллических структур. Последовательность x_m в (7.13) не являет-

ся периодической. Однако она является квазипериодической и содержит два несоизмеримых периода (например, 1 и τ_0).

Таким образом, стохастическая паутина оказалась связанной с некоторым классом аперiodических мозаик, обладающих той же симметрией, что и квазикристаллы. При $q \notin \{q_c\}$ трансляционная симметрия потеряна (это и отражается в том, что мозаики являются аперiodическими). На смену свойств трансляционной симметрии приходит свойство локального изоморфизма, которое определяется следующим образом. Пусть покрытие плоскости (мозаика) образуется с помощью конечного числа определенных элементов. Например, в случае паркета Пенроуза такими элементами могут быть ромбы с острыми углами $\pi/5$ и $2\pi/5$. Число различных покрытий бесконечно велико. Рассмотрим одно из них и выделим в нем некоторый участок из конечного числа элементов. Тогда такой же участок (точнее, конгруэнтный ему) будет встречаться неограниченное число раз как в данном покрытии, так и в любом другом покрытии из тех же элементов (ком. 7.9).

Локальный изоморфизм структур с квазисимметрией особенно ярко проявляется в их фурье-спектрах. Им соответствует рентгеноструктурный анализ реальных кристаллов, который позволяет судить о симметрии внутреннего расположения атомов и молекул конденсированных сред (ком. 7.10).

Обозначим через S_Γ множество точек, принадлежащих на фазовой плоскости размеров Γ некоторому рисунку (структуре). Пусть также

$$\delta(R - R_a) = \begin{cases} 1, & a \in S_\Gamma, \\ 0, & a \notin S_\Gamma, \end{cases} \quad (7.15)$$

где R — вектор произвольной точки на плоскости Γ , R_a — вектор фиксированной точки a . Тогда фурье-образ структуры определяется выражением

$$S(k) = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dR e^{ikR} \delta(R - R_a). \quad (7.16)$$

Реально мы всегда имеем дело с конечной областью Γ . Это создает дополнительные граничные эффекты, влияющие на вид функции $S(k)$. В случае периодической структуры их иногда легко выделить. Однако в случае нелерiodических покрытий плоскости выделить чистый "монокристалл" оказывается невозможным. Тем не менее если область Γ достаточно велика, то фурье-спектры различных "образцов" Γ_j , мало отличающихся по форме и по размеру, также будут слабо различаться.

На рис. 7.10 и 7.11 приводятся фурье-спектры соответственно для стохастической паутины, порождаемой генератором \hat{M}_5 , и для скелета паутины порождаемого линиями уровня гамильтониана H_5 . Область Γ выбиралась в виде круга. Картины фурье-спектров на рис. 7.10б и 7.11б близки друг к другу. Это очень важное следствие, так как оно подтверждает возможность введения симметричного анализа бесконечных паутин динамических систем подобно тому, как это делается для кристаллов или квазикристаллов. Аналогичная эквивалентность видна из рис. 7.12 и 7.13 для $q = 7$.

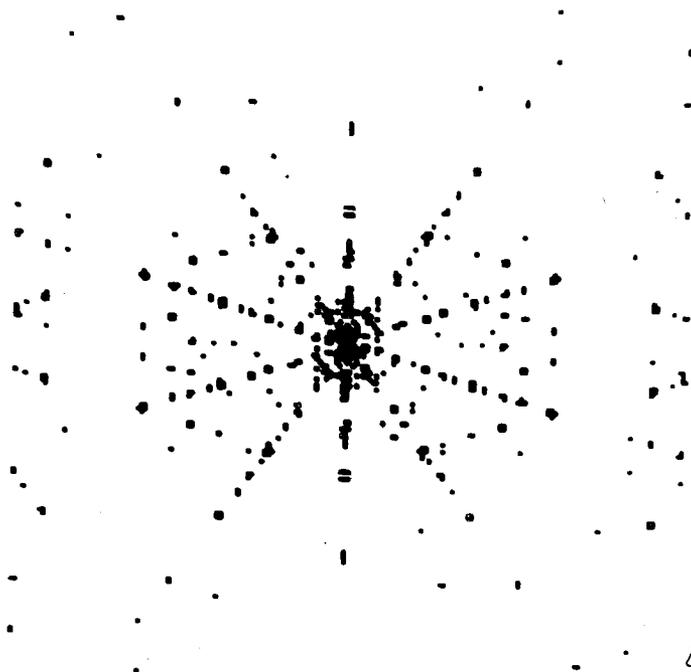
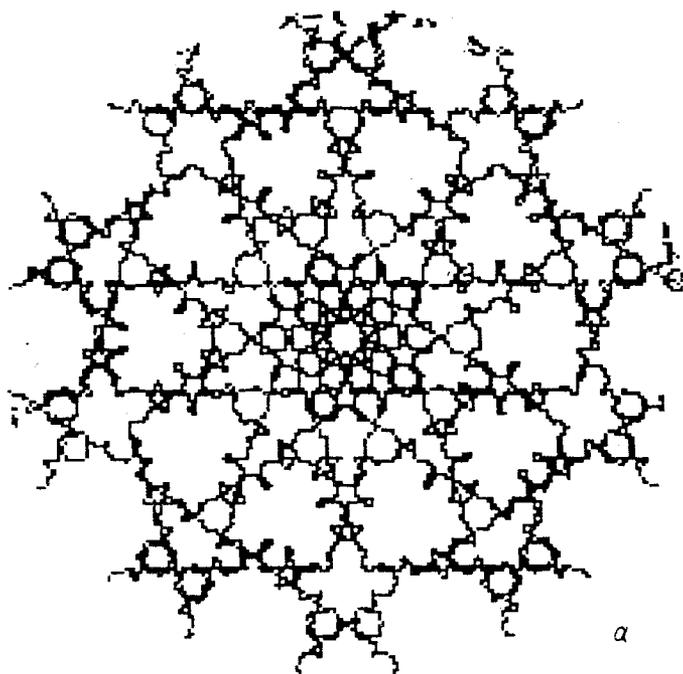


Рис. 7.10. Элемент паутины для $q = 5$ при радиусе круга 50π (а) и его фурье-спектр (б)

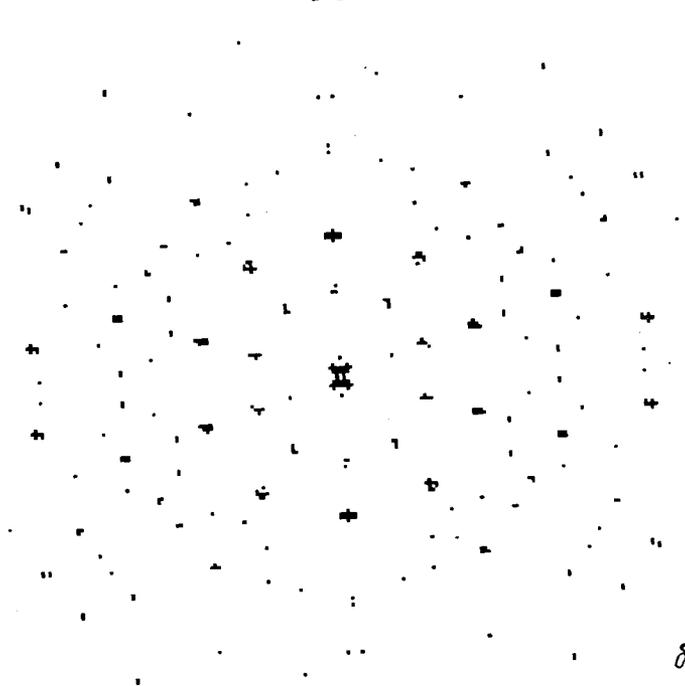
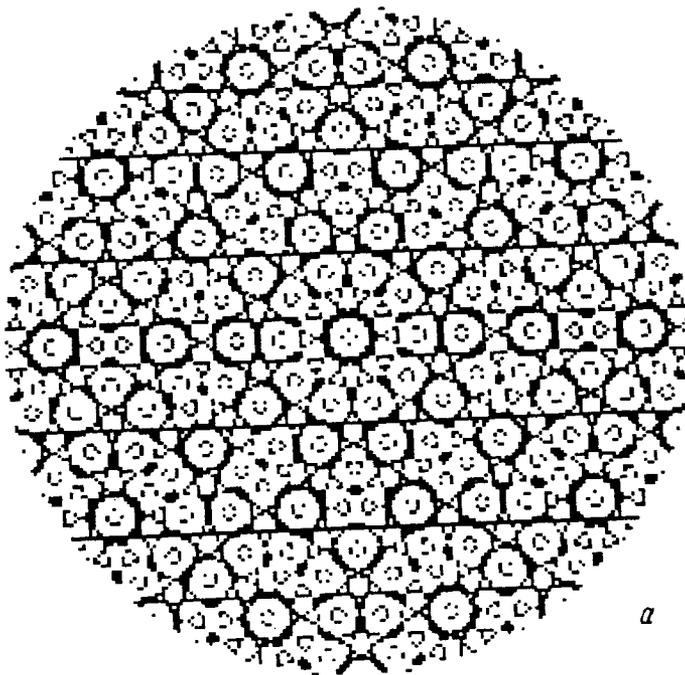
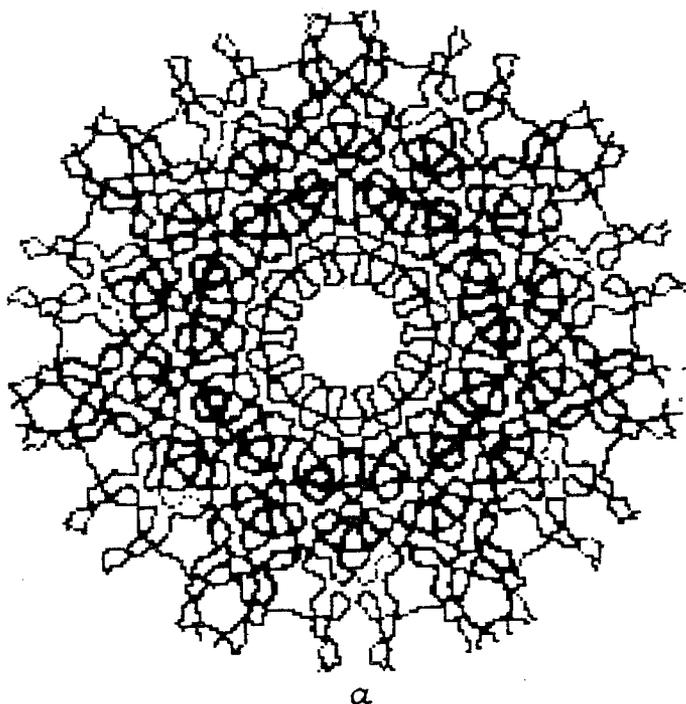
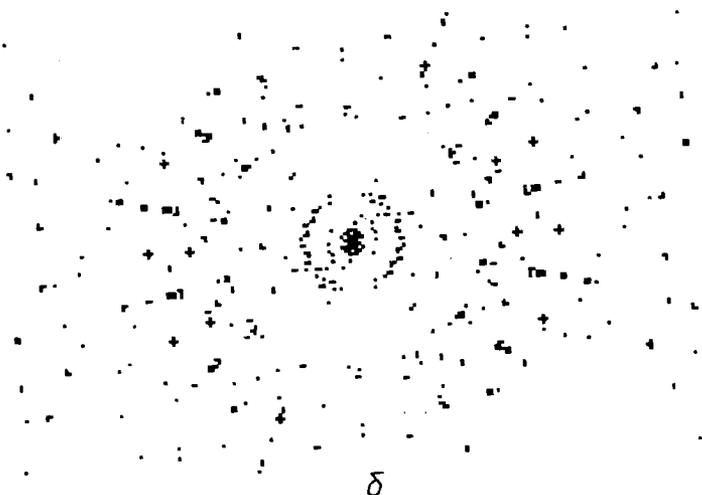


Рис. 7.11. Элемент скелета паутины для $q = 5$ при радиусе круга 32π (а) и его фурье-спектр (б)

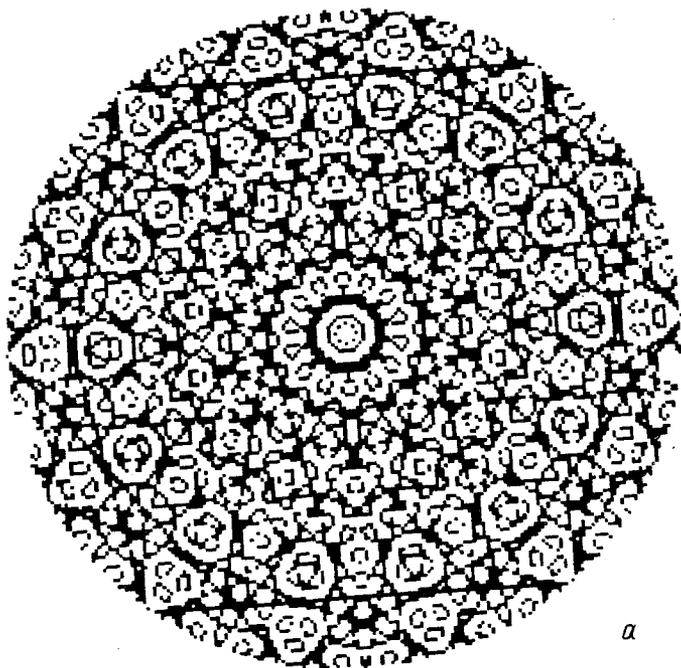


a

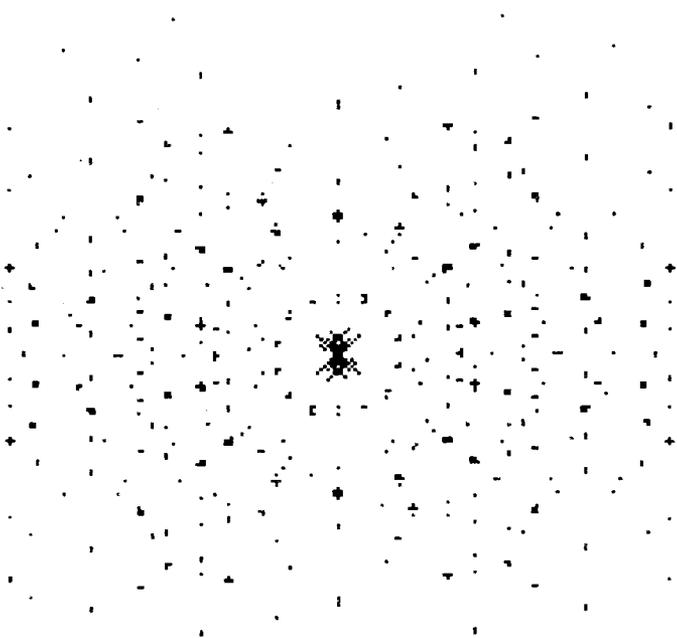


б

Рис. 7.12. Элемент паутины для $q = 7$ при радиусе круга 24π (*a*) и его фурье-спектр (*б*)

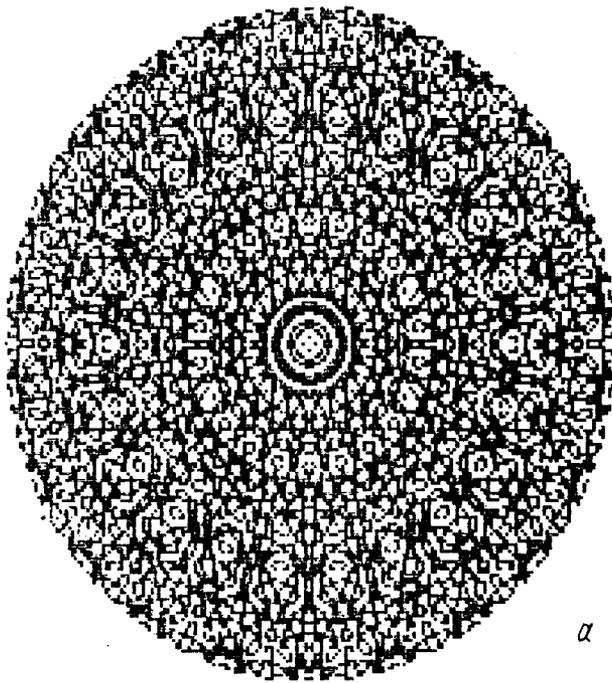


a

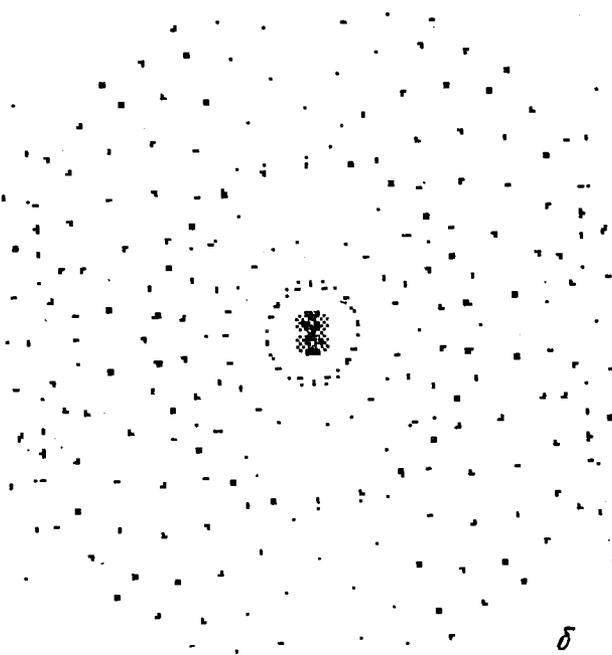


b

Рис. 7.13. Элемент скелета паутины для $q = 7$ при радиусе круга 32π (а) и его фурье-спектр (б)



a



b

Рис. 7.14. Образец скелета паутины с симметрией 11-го порядка, выбранный вблизи центра симметрии (*a*) и его фурье-образ (*b*)

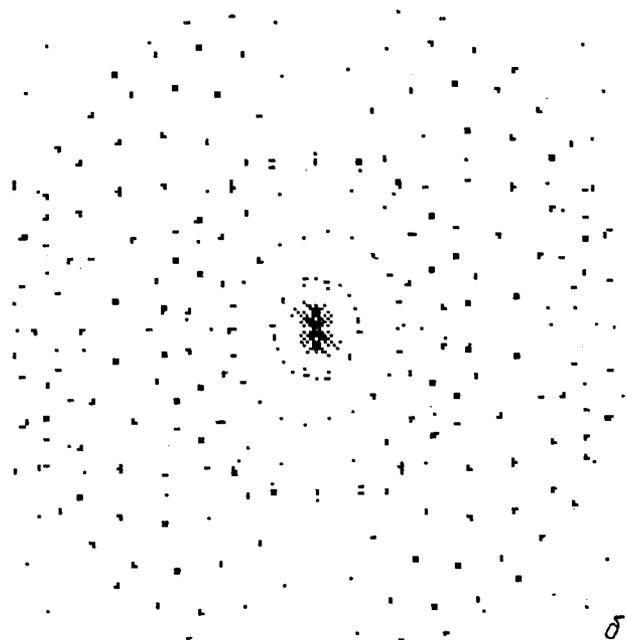
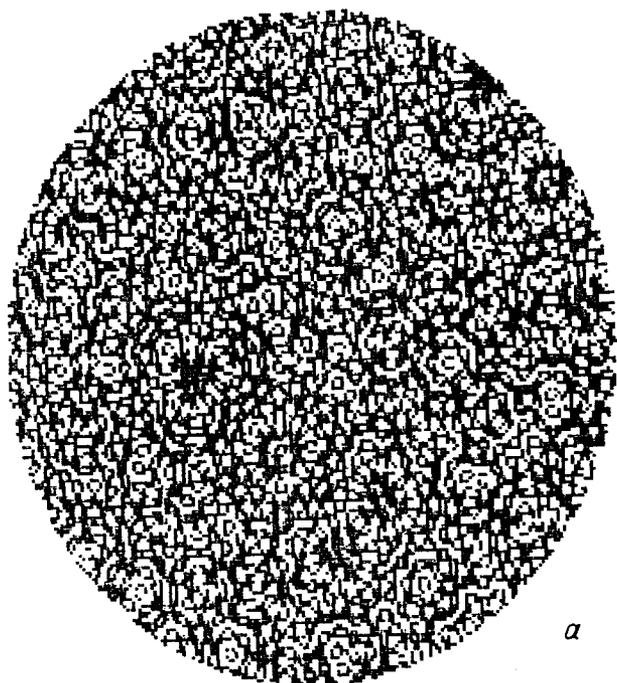


Рис. 7.15. То же, что и на рис. 7.14, но образец выбран в другой части плоскости вдали от центра симметрии

Наиболее сильная демонстрация свойства локального изоморфизма также может быть проведена с помощью фурье-анализа. Рассмотрим, например, круглый образец скелета паутины с $q = 11$ (рис. 7.14а). Его фурье-спектр на рис. 7.14б показывает, что мы действительно имеем дело с упорядоченной структурой с симметрией 11-го порядка (точечный спектр располагается на 22 лучах, исходящих из одного центра). Продолжим скелет паутины за пределы круга образца на рис. 7.14а и выберем новый образец той же формы и размера, но уже в другой части плоскости. Этот новый образец приведен на рис. 7.15а. По его виду трудно сказать, что он имеет симметрию 11-го порядка. Он скорее напоминает текстуру. Однако его фурье-спектр на рис. 7.15б точно указывает, с каким объектом мы имеем дело. Более того, сравнение спектров на рис. 7.14б и 7.15б показывает, что они практически не различимы.

Все приведенные выше фурье-спектры структур являются точечными (в пределах погрешностей их определения). Это означает, что они описывают упорядоченные структуры, которые нельзя отнести к категории аморфных или неупорядоченных структур. Однако на этом пути встречаются определенные неожиданности.

§ 7.4. Особенности в зависимости фазового объема от энергии (особенности Ван Хова)

Гамильтониан сглаженных структур (7.5)

$$H_q = \sum_{j=1}^q \cos(\vec{\rho} \cdot \vec{e}_j) \quad (7.17)$$

позволяет проанализировать некоторые тонкие свойства стохастической паутины. К их числу относятся особенности Ван Хова, связанные с существованием эллиптических и гиперболических особых точек в фазовом пространстве [36]. Пусть, например, система с одной степенью свободы совершает финитное движение с энергией E . Фазовый объем $\Gamma(E)$, ограниченный гиперповерхностью

$$H(p, x) = E \quad (7.18)$$

(в данном случае это кривая), равен

$$\Gamma(E) = \int_{H < E} dp dx = \oint dx p(E, x), \quad (7.19)$$

где интегрирование в последнем интеграле проводится по интервалу значений x , которые пробегает кривая $p = p(E, x)$ на гиперповерхности (7.18). Число квантовых состояний системы с энергией не менее E равно, как известно [36], с точностью до константы фазовому объему $\Gamma(E)$, а плотность состояний равна

$$\rho(E) = \text{const} \cdot \frac{d\Gamma(E)}{dE} = \text{const} \cdot \oint dx \frac{\partial p(E, x)}{\partial E}, \quad (7.20)$$

где использовано выражение (7.19).

В случае одной степени свободы интеграл в правой части (7.20) совпадает с периодом колебаний $T(E)$ частицы, имеющей энергию E . Отсюда

$$\rho(E) = \text{const} \cdot T(E), \quad (7.21)$$

и особые точки квантовой плотности состояний совпадают с особыми точками классического периода колебаний. Для одной степени свободы вблизи эллиптической точки имеется разрыв типа скачка функций, обусловленный границей допустимых значений энергии. Вблизи гиперболической точки имеется логарифмическая особенность, связанная с расходимостью периода колебаний на сепаратрисе.

В случае тех динамических систем, которые определяются гамильтонианом (7.17), движение устроено более сложно (см. обсуждение в § 7.2). Гиперповерхности (7.18) соответствует не одна замкнутая петля, а бесконечное число замкнутых петель, располагающихся в плоскости $H = E$ и образующих соответствующую структуру на фазовой плоскости. Поэтому формула (7.19) для фазового объема изменяется следующим образом:

$$\Gamma(E) = \sum \oint dx p(E, x), \quad (7.22)$$

где сумма берется по всем замкнутым петлям. Выражение (7.22) расходится. Смысл имеет другое представление для плотности состояний. Рассмотрим прямоугольник ($|p| \leq p_0$, $|x| \leq x_0$). Определим вместо (7.20) следующее выражение:

$$\rho_0(E) = \lim_{p_0, x_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_0} \sum \oint dx \frac{\partial p(E, x)}{\partial E}, \quad (7.23)$$

где $\Gamma_0 = p_0 x_0$ и ρ_0 — нормированная плотность состояний. Мы можем рассчитывать на то, что свойство подобия фазового портрета, порождаемого гамильтонианом H_q для произвольных q , обеспечивает существование предела в (7.23). По-видимому, достаточно также свойства локального изоморфизма.

В случаях $\dot{q} = 3, 4, 6$ (симметрия кристаллов) достаточно ограничиться лишь одной ячейкой структуры для вычисления ρ_0 , так как структуры периодические. Однако в случае квазикристаллической симметрии ($q \notin \{q_c\}$) замечание о возможности использования формулы (7.23) становится нетривиальным.

Приведем сначала некоторые простые аналитические выражения для $q = 4$ и $q = 3$.

При $q = 4$ запишем

$$H = \cos p + \cos x. \quad (7.24)$$

Тогда формула (7.23) принимает вид

$$\rho_0(E) = \oint \frac{dx}{[1 - (E - \cos x)^2]^{1/2}} = 4K((1 - E^2/4)^{1/2}), \quad (7.25)$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода. При $|E| \rightarrow 0$ и $|E| \rightarrow 2$, т.е. соответственно вблизи гиперболической и эллиптической точек, имеем из (7.25)

$$\rho_0(E) = \begin{cases} 4 \ln(8/|E|), & |E| \rightarrow 0, \\ 2\pi, & |E| \rightarrow 2. \end{cases} \quad (7.26)$$

Численное определение $\rho_0(E)$, использующее непосредственно формулу (7.23), приведено на рис. 7.16.

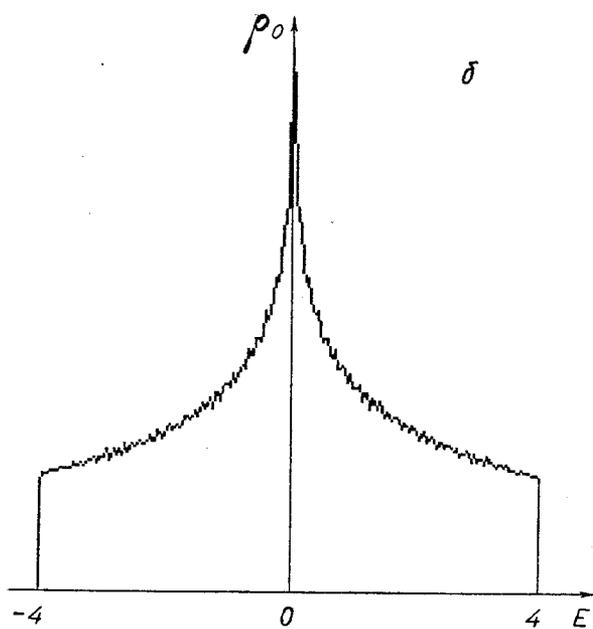
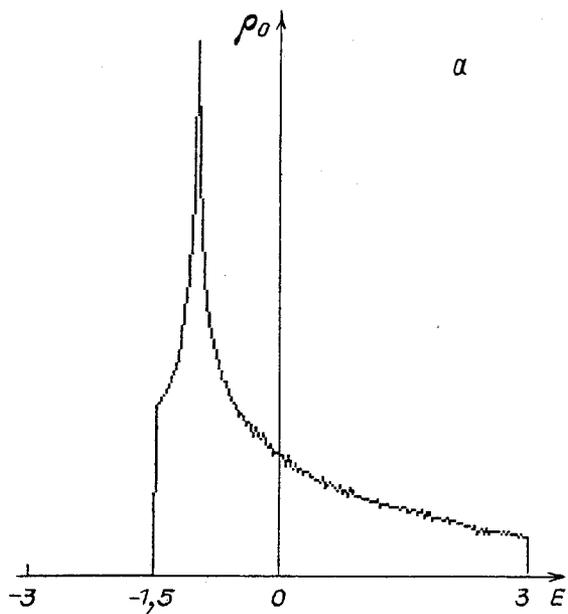


Рис. 7.16. Плотность состояний ρ_0 и особенности Ван Хова в случае кристаллической симметрии: *a* — для $q = 3$, *б* — для $q = 4$ (абсолютное значение ρ_0 в произвольных единицах)

При $q = 3$ запишем H в виде

$$H = \cos x + \cos(x/2 + (\sqrt{3}/2)p) + \cos(x/2 - (\sqrt{3}/2)p). \quad (7.27)$$

Из (7.23) и (7.27) следует

$$\rho_0(E) = \frac{2}{\sqrt{3}} \oint dx [2(1 + \cos x) - (E - \cos x)^2]^{-1/2}. \quad (7.28)$$

Отсюда следуют два интервала энергии с различными выражениями для $\rho_0(E)$. При $-1 < E \leq 3$ имеем из (7.28)

$$\rho_0(E) = \frac{8}{\sqrt{3}} (2E + 3)^{-1/4} \times \\ \times K \left\{ \frac{[(1 + \sqrt{2E + 3})^2 - (1 + E)^2]^{1/2}}{2(2E + 3)^{1/4}} \right\}.$$

Отсюда

$$\rho_0(E) = \begin{cases} 4\pi/3, & E \rightarrow 3, \\ 4\sqrt{3} \ln(1/|E + 1|), & E \rightarrow -1. \end{cases} \quad (7.29)$$

При $-3/2 \leq E < -1$ имеем из (7.28)

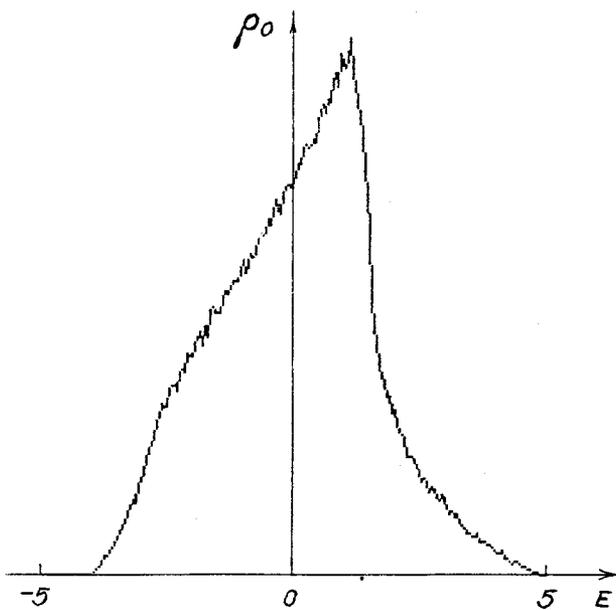
$$\rho_0(E) = \frac{16}{\sqrt{3}} [(1 + \sqrt{2E + 3})^2 - (1 + E)^2]^{-1/2} \times \\ \times K \left\{ \frac{2(2E + 3)^{1/4}}{[(1 + \sqrt{2E + 3})^2 - (1 + E)^2]^{1/2}} \right\}.$$

Отсюда

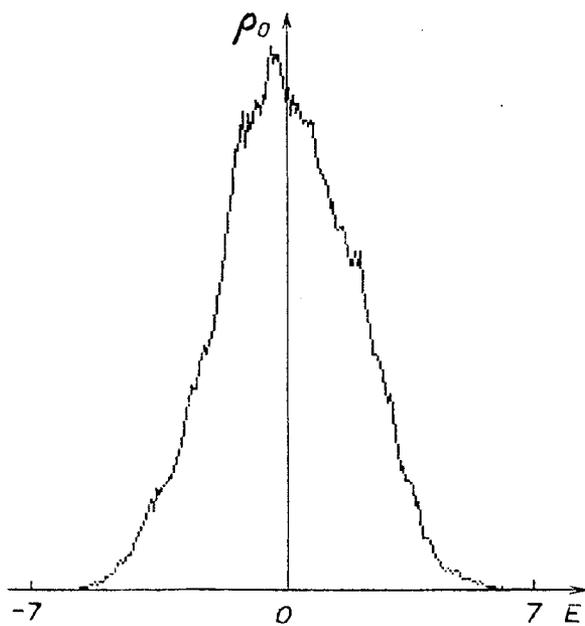
$$\rho_0(E) = \begin{cases} 16\pi/3 = 4\rho_0(3), & E \rightarrow -3/2, \\ 4\sqrt{3} \ln(1/|E + 1|), & E \rightarrow -1. \end{cases} \quad (7.30)$$

Значения $E < -3/2$ для гамильтониана (7.27) невозможны. Соответствующий вид $\rho_0(E)$, полученный численно, приведен на рис. 7.16.

Все виды особенностей, определяемые формулами (7.26), (7.29) и (7.30), отчетливо видны на рис. 7.16. Обратимся теперь к случаю квазикристаллической симметрии. Численные результаты для ρ_0 при $q = 5, 7, 8$ приведены на рис. 7.17 [18]. Эти рисунки следует сравнить с рис. 7.5 и 7.6, на которых приведены распределения особых точек эллиптического (ρ_e) и гиперболического (ρ_h) типа по энергиям. Существование их размытого распределения приводит к сглаживанию особенностей Ван Хофа. Заметные особенности ρ_0 остаются лишь в тех местах, где распределения ρ_e и ρ_h имеют сильно выраженные максимумы. Однако по мере роста параметра симметрии q распределение особых точек гамильтониана H_q становится все более равномерным, а плотность состояний ρ_0 — все более сглаженной. Начиная с $q = 7$ функция $\rho_0(E)$ практически мало отличается от случаев с $q > 7$ и очень близка к плотности состояний жидкости, а не кристалла.



a



b

Рис. 7.17. Плотность состояний ρ_0 и особенности Ван Хофа в случае квазикристаллической симметрии: *a* - для $q = 5$, *б* - для $q = 7$, *в* - для $q = 8$ (абсолютное значение ρ_0 в произвольных единицах)

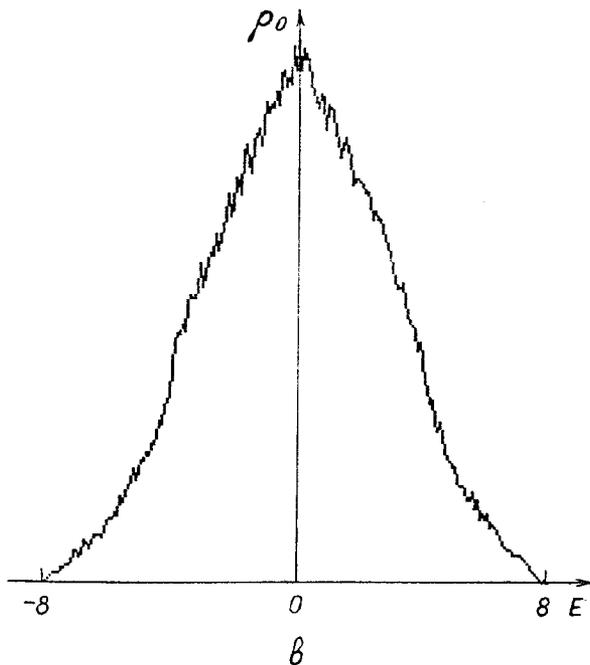


Рис. 7.17 (окончание)

Это свойство квазикристаллических структур является очень характерным для них. Несмотря на дискретный (точечный) фурье-спектр, отдельные их свойства, которые определяются видом ρ_0 , будут аналогичны свойствам жидкости.

§ 7.5. Динамическая организация в фазовом пространстве

В этой главе установлена важная связь между стохастической динамикой частицы и образованием правильных (т.е. обладающих некоторой хорошей симметрией) структур. Остановимся подробнее на том, как это происходит. Рассмотрим динамику фазовой точки на фазовой плоскости, порождаемую отображением \hat{M}_q при малых значениях параметра K_0 и, например, при $q = 4$. Выберем начальное условие таким образом, чтобы оно лежало внутри стохастической паутины. Тогда точка совершает случайные блуждания на фазовой плоскости. Однако в процессе своего беспорядочного движения точка создает на плоскости почти правильный орнамент с симметрией квадратной решетки. Отдельные места этой решетки не заполнены. Решетка становится все более правильной по мере увеличения времени блуждания. Таким образом, на плоскости асимптотически появляется хорошо организованная фигура. Этот процесс можно назвать динамической организацией. Ее существование обусловлено существованием особых точек и особых траекторий в фазовом пространстве системы. Это показывает, что хаос наследует структурные свойства фазового пространства ди-

намических систем. В том случае, когда хаос является слабым, структурные свойства проявляются более отчетливо (ком 7.11).

Столкнувшись с возможностью организации структур в фазовом пространстве, мы приходим к необходимости введения каких-либо критериев организации. До недавнего времени наше представление о характере возможных структур было сравнительно простым. Оно включало понятия о кристаллах и жидкостях. Различные неупорядоченные, аморфные среды обычно объединялись с жидкостями. Появление квазикристаллической симметрии показало, что необходимы более четкие определения. Точнее, следует вложить более определенный смысл в то, что следует называть упорядоченной структурой, а что — неупорядоченной или аморфной. Как было видно в § 7.3, 7.4, квазикристаллические структуры следовало отнести к структурам с дальним порядком, о чем свидетельствуют, например, их фурье-спектры. Однако вид плотности состояний $\rho_0(E)$ со сглаженными особенностями Ван Хоа скорее свидетельствует о неупорядоченном объекте, чем о кристалле (ком 7.12).

Причины подобных парадоксов связаны отчасти с тем, что конфигурации структур в случае квазикристаллической симметрии определяются более сложным алгоритмом, чем это имеет место в случае кристаллического порядка. Для анализа структур, задаваемых сложными алгоритмами, обратимся снова к методам, существующим в теории динамических систем [41].

Пусть вектор $\vec{\xi}$ характеризует положение некоторого элемента структуры, а вектор $\vec{\eta}$ определяет положение какого-либо другого элемента. Связь между $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ может быть задана с помощью некоторого оператора $\hat{\mathcal{F}}(\vec{\eta} | \vec{\xi})$:

$$\vec{\eta} = \hat{\mathcal{F}}(\vec{\eta} | \vec{\xi}) \vec{\xi}. \quad (7.31)$$

Пусть точки элементов структуры лежат на траектории некоторой динамической системы, как это было, например, в случае стохастической паутины. Оператор $\hat{\mathcal{F}}$ индуцируется динамическим оператором \hat{T} , действующим в фазовом пространстве Γ исходной динамической системы.

Уравнение (7.3) определяет некоторую новую динамическую систему в фазовом пространстве векторов ($\vec{\xi}$). Поскольку число элементов структуры счетно, их можно перенумеровать. Каждому элементу сопоставляется вектор $\vec{\xi}_n$. Тогда можно записать вместо (7.31)

$$\vec{\xi}_{n+m} = \hat{\mathcal{F}}_m(n) \vec{\xi}_n. \quad (7.32)$$

Введем коррелятор двух произвольных интегрируемых функций $f(\vec{\xi})$ и $g(\vec{\xi})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f, g | m) &= \int d\vec{\xi}_n f(\vec{\xi}_n) g(\vec{\xi}_{n+m}) - \int d\vec{\xi}_{n+m} f(\vec{\xi}_{n+m}) \cdot \int d\vec{\xi}_n g(\vec{\xi}_n) = \\ &= \int d\vec{\xi} f(\hat{\mathcal{F}}_m \vec{\xi}) g(\vec{\xi}) - \int d(\hat{\mathcal{F}}_m \vec{\xi}) f(\hat{\mathcal{F}}_m \vec{\xi}) \cdot \int d\vec{\xi} g(\vec{\xi}), \end{aligned} \quad (7.33)$$

где использовано определение (7.22).

С помощью (7.33) можно определить коррелятор при $g \equiv f$: $\mathcal{R}(f, f | m)$, и его разложение в ряд Фурье:

$$\mathcal{R}(f, f | \vec{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\vec{\xi}} \mathcal{R}(k). \quad (7.34)$$

Величину $\mathcal{R}(k)$ естественно назвать спектром структуры. Если отображение (7.32) определяет условно-периодическую "траекторию", то ее спектр $\mathcal{R}(k)$ является дискретным:

$$\mathcal{R}(k) = \sum_{\nu} \mathcal{R}_{\nu} \delta(k - k_{\nu}), \quad (7.35)$$

где набор волновых чисел k_{ν} определяет возможные периоды и ориентации характерных плоскостей структуры. В случае, например, периодической цепочки имеется лишь одно значение k_0 (если не считать возможные значения nk_0). Однако для квазикристаллической решетки Амманна уже появляется система пяти ориентированных пар векторов k_1 и k_2 , отношение длин которых равно золотому сечению.

Другая возможность связана с тем, что спектр $\mathcal{R}(k)$ может оказаться непрерывным. Это соответствует случаю расщепления корреляций в (7.33) и неупорядоченности структуры. Степень хаотичности структуры зависит от того, как быстро расщепляется коррелятор (7.33) — по степенному или по экспоненциальному закону. Структуры при экспоненциальном законе распада коррелятора соответствуют турбулентности в динамической системе.

До сих пор обсуждалась организация структуры в фазовом пространстве динамической системы. В следующей главе мы увидим, что аналогичные структуры могут возникать в некоторых задачах гидродинамики в реальном пространстве.

Глава 8

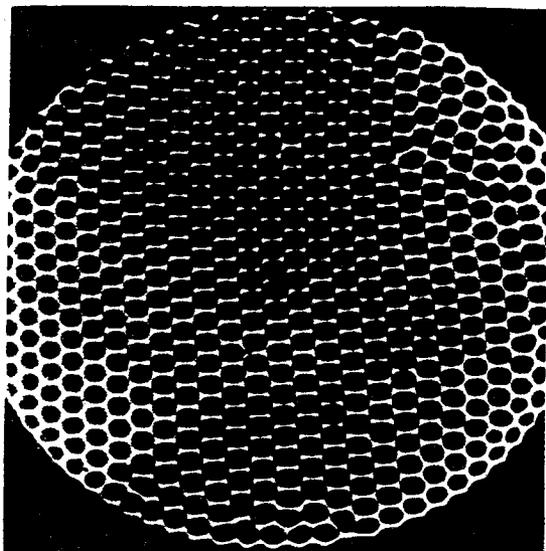
ДВУМЕРНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ С СИММЕТРИЕЙ И КВАЗИСИММЕТРИЕЙ

Выше мы показали, что фазовый портрет динамических систем с $1\frac{1}{2}$ степенями свободы может обладать некоторой не очень сложной периодической или почти периодической структурой. Такие свойства фазовой плоскости системы возникают при вполне определенных условиях, в которых существование области стохастичности (стохастической паутины) является непреременным свойством. Именно паутина создавала разбиение фазовой плоскости с периодической симметрией (сокращенно, просто симметрией) или квазипериодической симметрией (квазисимметрией). Это привело нас к новому представлению о симметриях, порождаемых динамическими системами в фазовом пространстве. В какой мере симметрии разбиения фазового пространства являются универсальными и могут ли подобные симметрии возникать в других объектах природы?

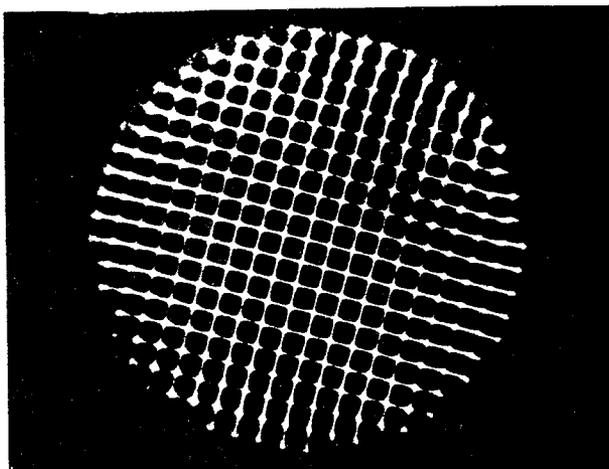
Мы уже упоминали квазикристаллы как пример проявления квазисимметрии. В этой и следующей главах мы покажем, что гидродинамические течения также могут иметь симметрию и квазисимметрию, совпадающие или близкие к той, которая генерируется рассмотренными выше динамическими системами.

Возникновение симметричных структур в жидкости известно давно. Примером простейшей из них (с геометрической точки зрения) может

служить вихревая дорожка Кармана [1]. Она представляет собой два параллельных ряда точечных вихрей. Вихри расположены в шахматном порядке и на равных расстояниях друг от друга. Модель вихревой дорожки была предложена Карманом для периодических следов позади обтекаемого цилиндра в области не очень больших чисел Рейнольдса $30 < Re < 300$. Дорожка Кармана является примером одномерной периодической цепочки, и это ее структурное свойство существенно используется при анализе ее свойств [2, 3].



a



б

Рис. 8.1. Структура ячеек Бенара (*a*) по данным работы [6а] и структура квадратных ячеек при термоконвекции (*б*) по данны работы [6в]

Среди двумерных периодических структур наиболее известными являются конвективные ячейки Бенара [4]. Они образуются в результате термоконвекции (так называемая конвекция Рэлея — Бенара [4, 5]). В подогреваемом снизу слое жидкости образуются восходящие и нисходящие потоки жидкости. В результате этих конвективных движений на поверхности жидкости может образоваться гексагональная структура типа пчелиных сот (рис. 8.1а [6а]). В течение многих лет эта структура является примером удивительного явления самоорганизации в сплошной среде. В зависимости от тех или иных условий возможны различные структурные перестройки течений и соответственно поверхности жидкости. Вместо гексагональных структур могут возникать структуры с квадратными ячейками (рис. 8.1б [6в]) и более сложные конфигурации (ком. 8.1).

Как станет ясно после этой и следующей глав, в реальном координатном пространстве также может существовать стохастическая паутина. По ней может осуществляться диффузия пассивных частиц. Пространственная паутина создает некоторое разбиение пространства. В результате этого различные области его обладают различными свойствами. Так возникает в пространстве структура.

§ 8.1. Двумерные стационарные вихревые течения идеальной жидкости

В этом параграфе мы остановимся на описании некоторых простейших вихревых течений жидкости, демонстрирующих структурные свойства и обладающих определенными свойствами симметрии. Мы ограничимся самой простой ситуацией, при которой имеет место вихревое движение, а именно, рассмотрим плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в безграничном пространстве. Уравнение сохранения вещества для несжимаемой жидкости сводится к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (8.1)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — вектор скорости жидкости, являющийся основным параметром течения и функцией координат \mathbf{r} и времени t . Движение идеальной несжимаемой жидкости подчиняется уравнению Эйлера

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla (P / \rho), \quad (8.2)$$

где P — давление жидкости, а ρ — ее плотность, которая считается далее постоянной. Уравнение Эйлера (8.2) допускает также запись в форме [10]

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + [\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{v}] = - \nabla (P / \rho + v^2 / 2). \quad (8.3)$$

Если применить операцию rot к обеим частям уравнения (8.3), то она сводится к уравнению

$$\partial \vec{\Omega} / \partial t = \operatorname{rot} [\vec{\mathbf{v}} \vec{\Omega}], \quad (8.4)$$

где величина $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ и называется завихренностью. Уравнение (8.3) интерпретируется как уравнение в замороженности величины $\vec{\Omega}$. Для плоских движений, когда скорость $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ зависит лишь от двух координат x и y , условие (8.1) записывается в виде

$$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0, \quad (8.5)$$

что позволяет выразить скорость через скалярную функцию $\Psi(x, y, t)$, называемую функцией тока:

$$v_x = -\partial\Psi/\partial y, \quad v_y = \partial\Psi/\partial x. \quad (8.6)$$

Для таких двумерных течений завихренность имеет лишь одну z -компоненту $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, и уравнение (8.4) сводится к скалярному уравнению

$$\partial\Omega/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\Omega = 0, \quad \Omega = \nabla^2\Psi. \quad (8.7)$$

Оно отражает сохранение завихренности при переносе ее жидкими частицами. Выражения для скорости жидкости (8.6) и завихренности через функцию тока Ψ позволяют записать уравнение (8.7) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi + J(\Psi, \nabla^2\Psi) = 0, \quad (8.8)$$

где принято сокращенное обозначение для якобиана

$$J(\Psi, \nabla^2\Psi) = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2\Psi. \quad (8.9)$$

Рассмотрим стационарные вихревые течения идеальной жидкости. В этом случае якобиан (8.9) равен нулю. Отсюда следует, что завихренность Ω постоянна вдоль линий уровня функции тока Ψ . Следовательно, исследование плоских стационарных вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости сводится к нахождению решений уравнения [11]

$$\nabla^2\Psi = f(\Psi), \quad (8.10)$$

где f — некоторая произвольная функция. Это уравнение становится линейным, если $f(\Psi)$ — константа либо линейная функция Ψ , и для него можно указать общее решение. Если же завихренность является нелинейной функцией Ψ , то уравнение (8.10) становится сложнее, однако и здесь найдено немало частных решений (ком. 8.2).

Остановимся теперь на одном классе решений уравнения (8.10), который далее для нас будет представлять особый интерес, как пример течений с ярко выраженной вихревой ячеистой структурой и с нетривиальными свойствами симметрии. Если $f = -\Psi$, то уравнение для Ψ становится линейным:

$$\nabla^2\Psi + \Psi = 0, \quad (8.11)$$

и имеет точное решение

$$\Psi = \sum_{j=1}^q C_j \cos(R\mathbf{e}_j + \alpha_j), \quad (8.12)$$

где вектор $R = (x, y)$, а набор $\{\mathbf{e}_j\}$ является произвольным набором q единичных векторов, C_j и α_j — произвольные константы. В частности, если все амплитуды одинаковы $C_j = \Psi_0/2$, фазы $\alpha_j = 0$ и набор $\{\mathbf{e}_j\}$ образован единичными векторами, расположенными в виде правильной звезды

$$\mathbf{e}_j = \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{q}j\right), \sin\left(\frac{2\pi}{q}j\right) \right\}, \quad (8.13)$$

то такой класс решений с функцией тока

$$\Psi = \frac{1}{2} \Psi_0 \sum_{j=1}^q \cos \left\{ x \cos \left(\frac{2\pi}{q} j \right) + y \sin \left(\frac{2\pi}{q} j \right) \right\} \quad (8.14)$$

обладает примечательными свойствами симметрии, с которыми мы уже встречались в гл. 7.

При $q = 2$ имеем периодическое течение Колмогорова с функцией тока

$$\Psi = \Psi_0 \cos y. \quad (8.15)$$

При $q = 4$ функция тока

$$\Psi = \Psi_0 (\cos x + \cos y) \quad (8.16)$$

описывает ячеистую структуру с квадратными ячейками, а при $q = 3$ либо $q = 6$ функция тока

$$\Psi = \Psi_0 [\cos x + \cos(x/2 + \sqrt{3}y/2) + \cos(x/2 - \sqrt{3}y/2)] \quad (8.17)$$

описывает ячеистую структуру с гексагональными ячейками. Эта же функция описывает течение жидкости при термоконвекции, образующее ячейки Бенара. Отметим, что при $q = 2, 3, 4, 6$ симметрия течений с функциями тока (8.15)–(8.17) является относительно простой и совпадает с симметрией двумерных кристаллов. Такие течения обладают как трансляционной, так и ориентационной инвариантностью относительно поворота на угол $2\pi/q$ (для четных q) либо на угол π/q (для нечетных q). Если набор векторов $\{e_j\}$ не образует правильной звезды, то трансляционная инвариантность может сохраниться, а ячейками могут быть ромбы.

Новые виды структур возникают при $q = 5, 7, 8, \dots$. Эти структуры не являются периодическими. Их точный аналог – квазикристалл. Мы вернемся к этим течениям ниже (ком. 8.3).

Рассмотрим теперь случай нелинейной связи между завихренностью и функцией тока. Так называемое решение Стюарта [14] соответствует выбору функции f в виде экспоненты

$$\nabla^2 \Psi = e^{-2\Psi}. \quad (8.18)$$

Уравнение (8.18) имеет точное решение

$$\Psi = \ln(C \operatorname{ch} y + \sqrt{C^2 - 1} \cos x), \quad C \geq 1, \quad (8.19)$$

которое описывает стационарную структуру в виде дорожки распределенных вихрей, расположенных периодически по оси x на расстоянии 2π друг от друга. Параметр C характеризует концентрации завихренности. При $C \rightarrow \infty$ функция тока (8.19) имеет вид

$$\Psi = \ln(\operatorname{ch} y - \cos x) + \text{const}, \quad (8.20)$$

совпадающий с функцией тока цепочки точечных вихрей, расположенных периодически по оси x [2, 3].

Структуру различных течений можно представить себе, используя понятие линий тока. Линиями тока называются такие линии, в каждой точке которых скорость направлена по касательной к ним. Для стационарного поля скоростей линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости и такие линии тока легко наблюдать, если насыпать на поверхность жидкости пассивную примесь в виде легкого и хорошо видимого

порошка. При фотографировании с малым временем экспозиции на фотографии возникнут отчетливо видимые линии, совпадающие с линиями тока.

Уравнения линий тока определяются в плоском случае системой дифференциальных уравнений

$$dx/v_x = dy/v_y. \quad (8.21)$$

Подставляя сюда (8.6), получаем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = d\Psi = 0, \quad (8.22)$$

откуда $\Psi(x, y) = \text{const}$. Таким образом, в двумерных стационарных течениях линии тока устроены очень просто и представляют собой семейство линий уровня функции $\Psi(x, y)$.

Через каждую точку плоскости можно провести, вообще говоря, лишь одну линию тока. Исключением являются такие особые точки, через которые проходят несколько линий тока. Эти особые точки соответствуют седловым точкам на поверхности $h = \Psi(x, y)$ и соединяются особыми сепаратрисными линиями тока.

В случае течений, обладающих кристаллической симметрией $q = 3, 4, 6$, особые точки находятся на одной линии уровня функции тока Ψ и соединяются единой сепаратрисной сеткой (см. § 7.4).

На рис. 6.14 показаны линии уровня функции тока (8.16), соответствующие течению с квадратными ячейками. Поверхность $h = \Psi(x, y)$ при $q = 4$ представляет собой чередующиеся в шахматном порядке горбы $\Psi > 0$ и впадины $\Psi < 0$. Сепаратрисные линии тока образуют при $\Psi = 0$ квадратную решетку. Рис. 6.15 иллюстрирует линии уровня функции тока (8.17) для $q = 3$. Сечение поверхности при $\Psi = -\Psi_0$ образует сепаратрисную решетку кагоме. При других значениях уровня линии тока являются замкнутыми.

Иная ситуация возникает для течений с квазисимметрией. Теперь седловые точки поверхности $h = \Psi(x, y)$ находятся на различных линиях уровня и не соединяются единой сепаратрисной сетью. Рис. 6.17 представляет поверхность $h = \Psi(x, y)$ для $q = 5$. На этой поверхности отчетливо видно, что седловые точки находятся на различной высоте. Тем не менее седловые области образуют структуры из линий, близких к прямым. В разных плоскостях $\Psi(x, y) = \text{const}$ получаются различные распределения сепаратрисных петель и особые линии тока не создают единую сеть — паутину. Имеется много разрывов, как это видно из рис. 6.17б, в, на которых показаны линии уровней течений с квазисимметрией $q = 5$. Расстояние между линиями уровней в окрестности разрывов на определенном уровне очень мало. Это связано с наличием особенности в плотности распределения седловых точек по высоте h на этом уровне.

Точно так же картина линий тока для течения (8.19), изображенная на рис. 8.2, дает наглядное представление о вихревой дорожке. Такое течение имеет симметрию относительно сдвига на период вдоль оси цепочки.

Плоскость постоянного значения функции тока и линии уровня играют ту же роль, что и фазовая плоскость динамической системы и ее орбиты. Эта аналогия становится особенно очевидной, если учесть, что уравнения

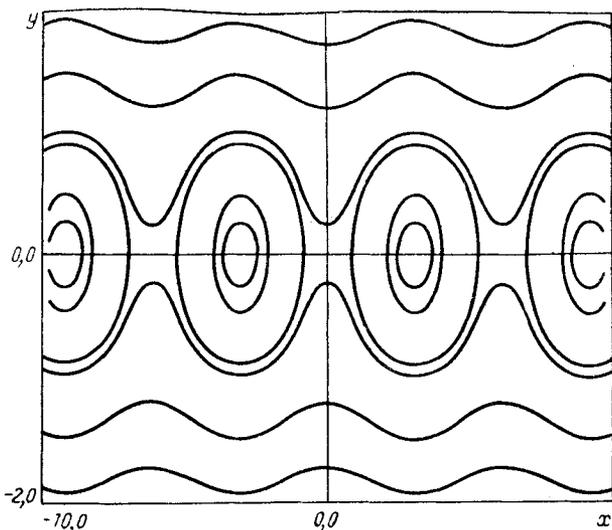


Рис. 8.2. Картина линий тока для течения Стюарта (8.19) при $C = 1,03$

траекторий частиц жидкости для плоского движения имеют вид

$$dx/dt = -\partial\Psi/\partial y, \quad dy/dt = \partial\Psi/\partial x, \quad (8.23)$$

т.е. записываются в форме гамильтоновских уравнений, в которых гамильтонианом является функция тока $\Psi(x, y, t)$, а координаты (x, y) играют роль канонической пары. Запись уравнений траекторий в гамильтоновской форме позволяет сделать следующее заключение. Если плоское течение стационарно, т.е. $\Psi = \Psi(x, y)$, то уравнения (8.23) соответствуют консервативной системе с одной степенью свободы и, следовательно, задача об отыскании траекторий частиц жидкости является интегрируемой, а траектории частиц жидкости совпадают с линиями уровня функции тока. Для нестационарных двумерных течений жидкости, когда функция тока Ψ явно зависит от времени, система уравнений (8.23) соответствует неконсервативной гамильтоновской системе и, вообще говоря, не является интегрируемой.

§ 8.2. Устойчивость стационарных плоских течений с симметричной структурой

В предыдущем параграфе было показано, что в двумерном случае могут существовать стационарные течения с симметрией и квазисимметрией. Их структура и симметрия этой структуры могут быть выявлены с помощью картины линий уровня. Этот путь приводит к установлению полной аналогии с анализом подходящей динамической системы и ее фазового портрета. Однако имеется одно существенное различие в этой аналогии. Рассматриваемое стационарное течение может оказаться неустойчивым, и тогда исследование его структуры в значительной степени теряет смысл.

Цель этого параграфа — несколько дополнить представление о существовании стационарных структур и привести некоторые примеры и аргументы в пользу того, что такие структуры могут быть устойчивыми. Более того, структуры, например с квазисимметрией, могут быть возбуждены при определенных условиях, в которых находится система.

Мы ограничимся здесь лишь несколькими простейшими примерами, демонстрирующими возможность существования области устойчивости течений со структурами, определяемыми функцией тока типа (8.14). Роль таких течений, обладающих либо трансляционной симметрией, либо симметрией квазикристалла, в настоящее время еще недостаточно хорошо исследована. В первую очередь это замечание относится к их устойчивости в ограниченных и безграничных системах. Однако ясно, что могут существовать условия в виде внешнего поля (накачки) и диссипации, при которых такие течения реализуются.

Рассмотрим сначала устойчивость плоского течения с функцией тока (8.14) в неограниченной системе. С этой целью запишем вместо уравнения (8.8) уравнение Навье—Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J \{ \Psi, \nabla^2 \Psi \} = \nu \nabla^4 \Psi + F, \quad (8.24)$$

отличающееся от (8.8) наличием в правой части вязкого члена (ν — коэффициент вязкости) и внешней силой $F = F(x, y, t)$, играющей роль источника возбуждения среды. Стационарное решение $\bar{\Psi}(x, y)$ в форме (8.14) для невязкого уравнения (8.8) является также, согласно (8.11), стационарным решением для вязкого уравнения (8.24), если выполнено условие

$$F = -\nu \bar{\Psi}, \quad (8.25)$$

т.е. стационарное решение имеет ту же симметрию, что и внешняя сила (накачка).

Остановимся в качестве первого примера на исследовании устойчивости плоского периодического течения вязкой несжимаемой жидкости (8.15), возникающего под действием одномерной пространственно-периодической силы (течение Колмогорова) [21]. Такое течение в безразмерных переменных описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \right) \nabla^2 \Psi + J \{ \Psi, \nabla^2 \Psi \} = \frac{1}{\text{Re}} \cos y, \quad (8.26)$$

где $\text{Re} = \Psi_0/\nu$ — число Рейнольдса и Ψ_0 — характерное значение Ψ . Стационарное решение уравнения (8.26) имеет вид

$$\bar{\Psi} = -\cos y. \quad (8.27)$$

Для возмущения $\Psi' = \Psi - \bar{\Psi}$ из (8.26) и (8.27) имеем следующее линейризованное уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \right) \nabla^2 \Psi' - \sin y (1 + \nabla^2) \frac{\partial}{\partial x} \Psi' = 0. \quad (8.28)$$

Ограничимся исследованием устойчивости периодических вдоль оси x

возмущений:

$$\Psi'(x, y, t) = e^{i\alpha x} \Psi'(y, t) + \text{к.с.} \quad (8.29)$$

После подстановки (8.29) в (8.28) получим для возмущения $\Psi'(y, t)$ так называемое уравнение Орра–Зиммерфельда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \right) \nabla^2 \Psi' + i\alpha \sin y (1 + \nabla^2) \Psi' = 0. \quad (8.30)$$

Здесь $\nabla^2 = \partial^2 / \partial y^2 - \alpha^2$. Подставим возмущение $\Psi'(y, t)$ в виде ряда Фурье по y :

$$\Psi'(y, t) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n e^{iny}. \quad (8.31)$$

Подставляя (8.31) в (8.7), получим бесконечную систему уравнений для коэффициентов Ψ_n :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha} [\alpha^2 + n^2] \left(\gamma + \frac{\alpha^2 + n^2}{\text{Re}} \right) \Psi_n + \Psi_{n-1} [\alpha^2 - 1 + (n-1)^2] - \\ - \Psi_{n+1} [\alpha^2 - 1 + (n+1)^2] = 0. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Наиболее опасными с точки зрения устойчивости оказываются длинноволновые возмущения ($\alpha \ll 1$). Для исследования устойчивости таких возмущений достаточно в системе (8.32) ограничиться учетом конечного числа гармоник с $n = 0, \pm 1$. Тогда в качестве условия разрешимости укороченной системы получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(\gamma + \frac{1 + \alpha^2}{\text{Re}} \right) \left(\gamma + \frac{\alpha^2}{\text{Re}} \right) - \frac{\alpha^2(1 - \alpha^2)}{2(1 + \alpha^2)} = 0. \quad (8.33)$$

Из (8.33) следует, что для достаточно больших чисел Рейнольдса (т.е. при $\text{Re} \rightarrow \infty$) $\gamma^2 \approx \alpha^2/2 > 0$, и течение Колмогорова является неустойчивым относительно длинноволновых возмущений. Пороговое значение $\text{Re} = \text{Re}_c$, при котором неустойчивость может исчезнуть, найдем, полагая в (8.33) $\gamma = 0$. Тогда при $\alpha \ll 1$ критическое значение числа Рейнольдса задается следующим асимптотическим выражением:

$$\text{Re}_c = \sqrt{2} (1 + 3/2 \alpha^2) + O(\alpha^4). \quad (8.34)$$

При малой надпороговости $\text{Re} - \text{Re}_c \ll \text{Re}_c$ выражение для инкремента неустойчивости оказывается пропорциональным квадрату волнового числа длинноволновых возмущений:

$$\gamma = \alpha^2 (\text{Re} - \text{Re}_c). \quad (8.35)$$

Такая зависимость инкремента от волнового числа может быть интерпретирована как неустойчивость течения с отрицательной вязкостью (ком. 8.4).

В качестве второго примера рассмотрим устойчивость течения (8.16) с квадратными ячейками. Уравнение, описывающее такое течение, отличается от (8.26) правой частью:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \right) \nabla^2 \Psi + J \{ \Psi, \nabla^2 \Psi \} = \frac{1}{\text{Re}} (\cos x + \cos y), \quad (8.36)$$

и имеет стационарным решением функцию тока

$$\bar{\Psi} = -(\cos x + \cos y). \quad (8.37)$$

Линеаризованное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \right) \nabla^2 \Psi' - \sin y (1 + \nabla^2) \frac{\partial \Psi'}{\partial x} + \sin x (1 + \nabla^2) \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = 0. \quad (8.38)$$

Представляя возмущение Ψ' в виде ряда Фурье

$$\Psi'(x, y, t) = e^{\gamma t + i\alpha x + i\beta y} \sum_{m, n} \Psi_{mn} e^{im y + in x}, \quad (8.39)$$

получим для коэффициентов Ψ_{mn} бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} & [(n + \alpha)^2 + (m + \beta)^2] \left[\gamma + \frac{(n + \alpha)^2 + (m + \beta)^2}{\text{Re}} \right] \Psi_{mn} - \\ & - \frac{(n + \alpha)}{2} \{ [(n + \alpha)^2 + (m - 1 + \beta)^2 - 1] \Psi_{m-1, n} - \\ & - [(n + \alpha)^2 + (m + 1 + \beta)^2 - 1] \Psi_{m+1, n} \} + \\ & + \frac{(m + \beta)}{2} \{ [(m + \beta)^2 + (n - 1 + \alpha)^2 - 1] \Psi_{m, n-1} - \\ & - [(m + \beta)^2 + (n + 1 + \alpha)^2 - 1] \Psi_{m, n+1} \} = 0. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Как и для течения Колмогорова, здесь наиболее неустойчивыми оказываются длинноволновые возмущения, волновой вектор которых направлен вдоль одной из осей координат. Для исследования устойчивости этих возмущений ограничимся, как и в предыдущем примере, в разложении (8.39) учетом конечного числа гармоник с $m = 0, \pm 1$; $n = 0, \pm 1$. Рассматривая для простоты $\beta = 0$, получим в качестве условия разрешимости укороченной системы следующее дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} & [1 + \alpha^2] \left(\gamma + \frac{1 + \alpha^2}{\text{Re}} \right) = \frac{\alpha^2 (1 - \alpha^2)}{2(\gamma + \alpha^2 / \text{Re})} - \\ & - \frac{\alpha^2}{4} \left\{ \frac{(\alpha - 1)^2}{[1 + (\alpha - 1)^2][\gamma + (1 + (\alpha - 1)^2) / \text{Re}]} + \right. \\ & \left. + \frac{(\alpha + 1)^2}{[1 + (\alpha + 1)^2][\gamma + (1 + (\alpha + 1)^2) / \text{Re}]} \right\}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

При $\alpha \ll 1$ выражение для критического числа Рейнольдса имеет вид

$$\text{Re}_c = \sqrt{2} \left(1 + \frac{13}{8} \alpha^2 \right) + O(\alpha^4), \quad (8.42)$$

а для инкремента неустойчивости γ при малой надпороговости сохраняется формула (8.35), т.е. мы снова имеем дело с неустойчивостью типа неустойчивости течения с отрицательной вязкостью.

Рассмотренные выше примеры показывают, что при достаточно большой вязкости ($Re < Re_c$) и соответствующем выборе накачки имеется область устойчивости структурных течений типа (8.14) для $q = 2$ и $q = 4$. В работе [29] рассматривалась аналогичная задача об устойчивости структурных течений с симметрией шестого порядка ($q = 3$ или $q = 6$) и также была найдена область устойчивости.

Вопрос об аналитическом исследовании устойчивости течений с квазисимметрией более сложен и здесь нам придется обратиться к численному эксперименту. Здесь же возникает нетривиальный вопрос о роли граничных условий, которые, например будучи условиями периодичности, имеют совсем иную симметрию, чем накачка. Тогда установившееся стационарное течение возникает в результате конкуренции двух разных симметрий. Выживать может структура, имеющая одну из этих двух симметрий либо какая-либо сложная их комбинация.

Покажем теперь, как возникает течение с квазисимметрией. Для определенности предположим, что накачка в уравнении (8.24) имеет симметрию пятого порядка

$$F(x, y) = F_0 \sum_{j=1}^5 \cos(2\pi k) \left[x \cos\left(\frac{2\pi}{5} j\right) + y \sin\left(\frac{2\pi}{5} j\right) \right]. \quad (8.43)$$

Результаты численного анализа задачи для сетки размером 128×128 ячеек показаны на рис. 8.3 [17]. Эти данные приведены для случая, когда граничные условия выбраны в виде

$$\begin{aligned} \Psi(0, y; t) &= \Psi(0, y; 0) = \Psi_0, & \Psi(1, y; t) &= \Psi(1, y; 0) = \Psi_0; \\ \Psi(x, 0; t) &= \Psi(x, 0; 0) = \Psi_0 \cos(2\pi x); \\ \Psi(x, 1; t) &= \Psi(x, 1; 0) = \Psi_0 \cos(2\pi x). \end{aligned} \quad (8.44)$$

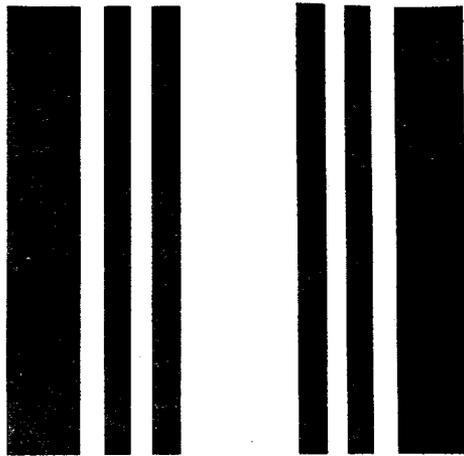
Такие граничные условия имеют симметрию, соответствующую $q = 2$. Они фиксируют однородный вдоль оси y поток жидкости с градиентом профиля скорости $v_y = -\partial\psi/\partial x$ как функции x (см. рис. 8.3а). Таким образом, имеет место конкуренция между симметрией второго порядка, навязываемой граничными условиями (8.44), и симметрией пятого порядка, которую имеет накачка (8.43). Возникающее в результате распределение скорости приведено на рис. 8.3в, где параметры подобраны таким образом, что выживает симметрия пятого порядка. Возможны и различные промежуточные случаи. Однако для дальнейшего анализа нам важно отметить, что стационарные течения со структурой квазикристаллов (и, в том числе, с пентагональной структурой) могут существовать.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда накачка в правой части уравнения (8.24) явно зависит от времени. Для определенности выберем внешнюю силу F в виде

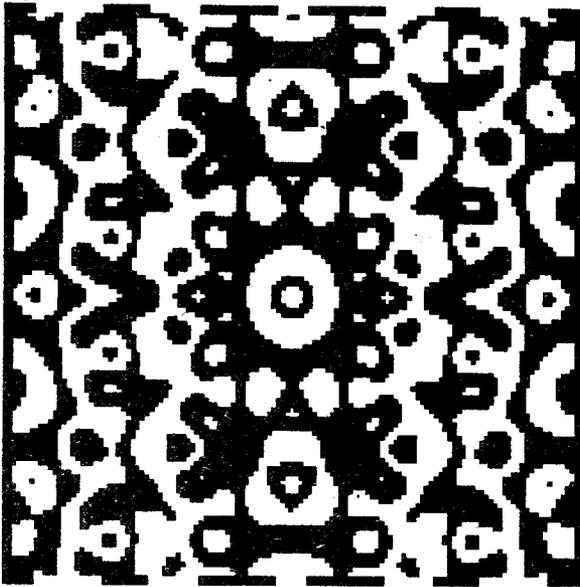
$$F(x, y, t) = F_0(t) \cos[k(x \cos \omega t + y \sin \omega t)], \quad (8.45)$$

где волновое число накачки $k = 2\pi/L$, а частота $\omega = 2\pi/T$; F_0 — амплитуда внешней силы, зависящая, вообще говоря, от времени.

Уравнение (8.24) с вынуждающей силой (8.45) численно интегрировалось на сетке, имеющей вид единичного квадрата размером 128×128 яче-

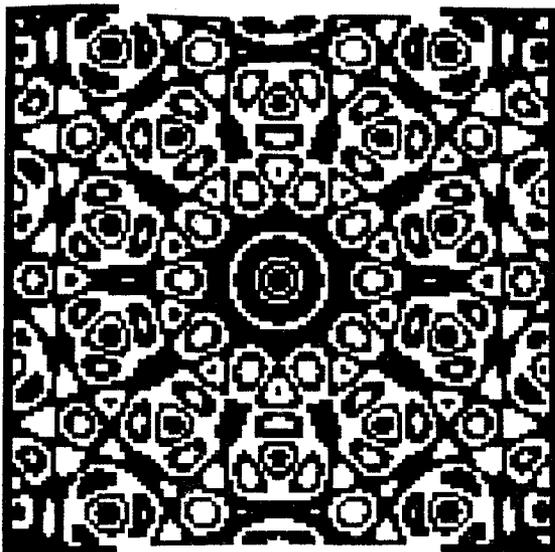


a



b

ек [18]. На рис. 8.4 приведены данные для случая, когда амплитуда вынуждающей силы $F_0(t)$ представляет собой последовательность прямоугольных импульсов малой длительности τ с периодом следования $T_0 = 2\pi/\Omega$. Длительность одиночного импульса τ в численных расчетах [18] была существенно меньше остальных временных масштабов задачи. В результате численных расчетов было найдено, что установившиеся стационарные структуры при выполнении резонансных условий $\Omega = q\omega$ могут обладать симметрией кристаллического либо квазикристаллического типа.



8

Рис. 8.3. Формирование структуры течения с симметрией 5-го порядка. Результат численного интегрирования уравнения (8.21) с вынуждающей силой вида (8.42). Использованы параметры: $k = 10$, $F_0 = 10^{-4}$, $\psi_0 = 10^{-8}$, $\nu = 0,31$. Рисунки соответствуют моментам времени t : 0 (а), 2×10^{-5} (б), $> 10^{-2}$ (в)

Приближенное аналитическое выражение для стационарной функции тока $\bar{\Psi}$ можно найти следующим образом. Аппроксимируем амплитуду накачки $F_0(t)$ последовательностью δ -функций:

$$F(x, y, t) = F_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T_0 - n) \cos[k(x \cos \omega t + y \sin \omega t)]. \quad (8.46)$$

Пользуясь представлением (6.48), легко находим

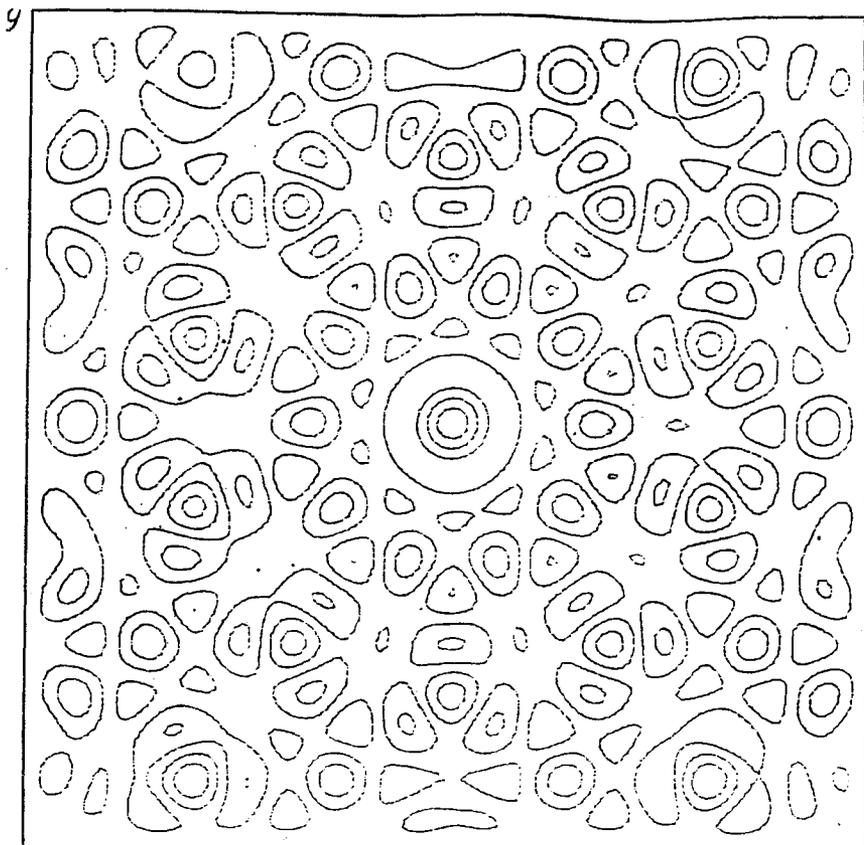
$$F = \bar{F} + \tilde{F}, \quad \bar{F} = \frac{F_0}{q} \sum_{j=1}^q \cos \xi_j, \quad (8.47)$$

$$\tilde{F} = \frac{2F_0}{q} \sum_{j=1}^q \cos \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[\frac{2\pi m}{q} \left(\frac{t}{T_0} - j \right) \right],$$

где $\xi_j = k \left[x \cos \left(\frac{2\pi}{q} j \right) + y \sin \left(\frac{2\pi}{q} j \right) \right]$. Величина $\xi_j = k \vec{\rho} e_j$, где $\vec{\rho}$ – радиус-вектор на плоскости (x, y) и e_j – единичный вектор, определяющий вершину правильного q -угольника. Поскольку функция $\bar{F}(x, y)$ в (8.47) является точным решением уравнения (8.8), то функция тока

$$\bar{\Psi} = - \frac{F_0}{\nu k^2 q} \sum_{j=1}^q \cos \left\{ k \left[x \cos \left(\frac{2\pi}{q} j \right) + y \sin \left(\frac{2\pi}{q} j \right) \right] \right\} \quad (8.48)$$

является точным решением уравнения Навье–Стокса (8.24) со стационар-



α

ной накачкой \bar{F} . На рис. 8.4а приведены данные для случая, когда имеет место резонансное условие $\Omega = 10\omega$, а на рис. 8.4б представлена система линий уровня для случая резонанса восьмого порядка.

Условия на границе единичного квадрата Γ были следующими:

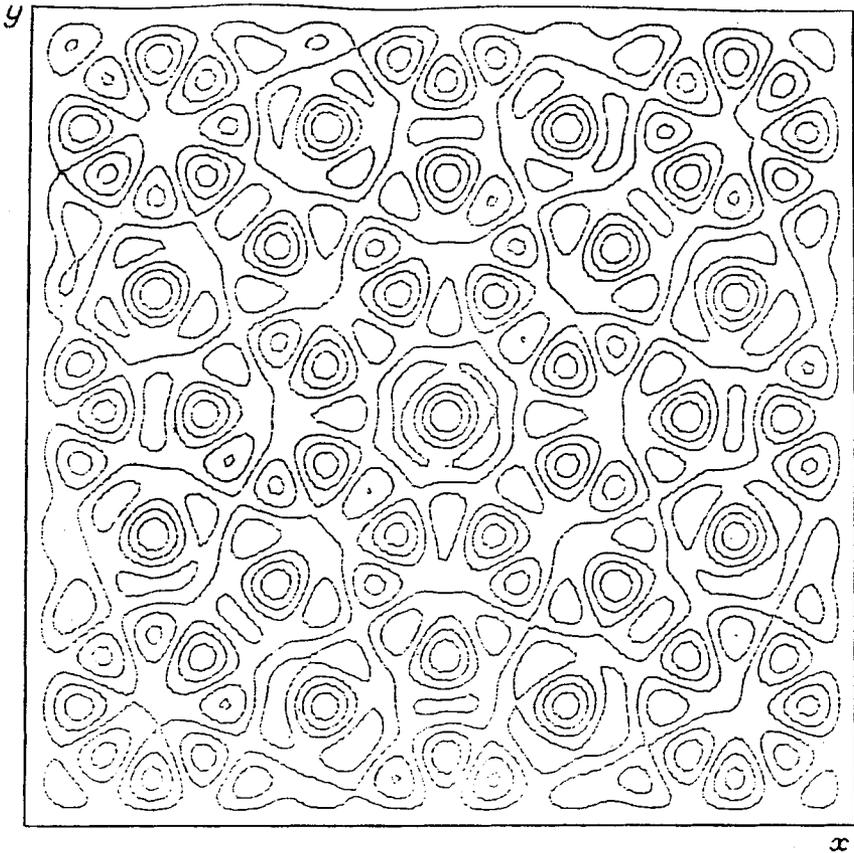
$$\Psi(t, \Gamma) = \Psi_0; \quad (8.49)$$

аналогичным образом выбирались и начальные условия.

Рис. 8.5 иллюстрирует решение уравнения (8.24), когда амплитуда вынуждающей силы выбирается в виде

$$F_0(t) = F_0 \cos(\Omega t). \quad (8.50)$$

Картина течения в резонансном случае $\Omega = q\omega$ (q — целое) качественно отличается от соответствующей картины в случае, далеком от резонанса. В условиях резонанса и при $\omega/\nu k^2 \gg 1$ финальной стадией эволюции течения являлась стационарная структура с цилиндрической симметрией q -го порядка. На рис. 8.5а приведена система линий уровней функции тока в момент времени $t = 5T$ ($q = 10$), соответствующая стационарной

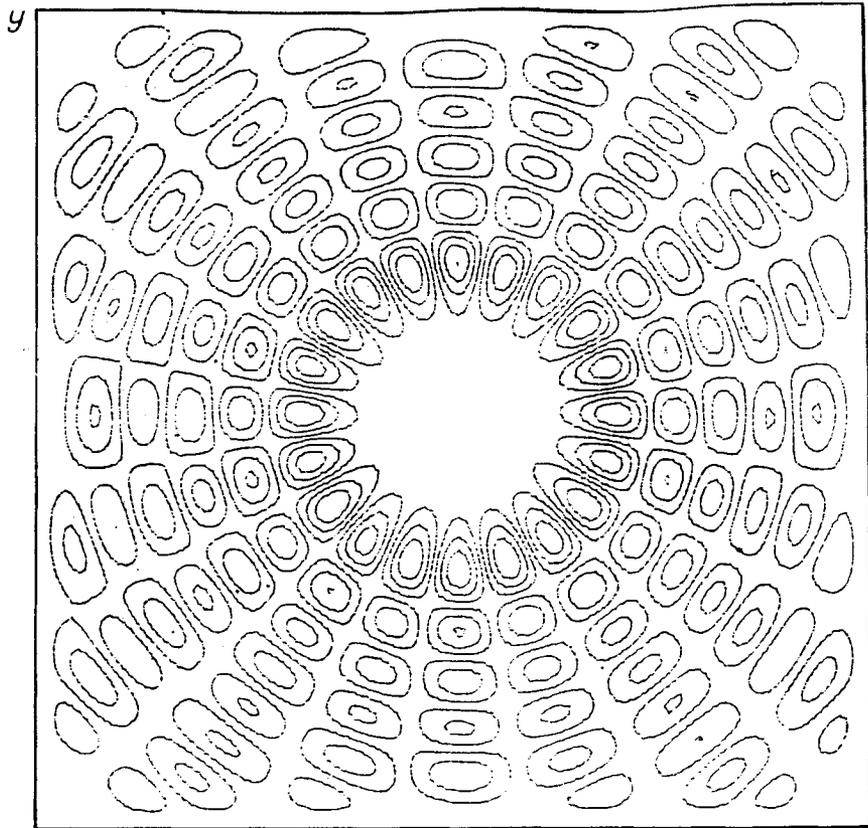


δ

Рис. 8.4. Результат численного интегрирования уравнения (8.21) с вынуждающей силой вида (8.45). Приведены линии уровня $\psi(x, y) = \text{const}$ функции тока установившейся структуры течения: *a* — для $F_0 = 100$, $\nu = 0,01$, $T = 0,25 \cdot 10^{-3}$, $\psi_0 = 10^{-2}$, $L = 10^{-1}$, $T = 10 T_0$, *б* — для $F_0 = 100$, $\nu = 0,01$, $T = 0,16 \cdot 10^{-3}$, $\psi_0 = 10^{-2}$, $L = 10^{-1}$, $T = 8 T_0$.

структуре на всей плоскости, за исключением круговой области с радиусом порядка L вблизи центра, внутри которой течение остается нестационарным. При уменьшении частоты ω и нарушении резонансных условий стационарная структура не наблюдалась. На рис. 8.5б представлен типичный вид линий уровня функции тока в один из моментов ее эволюции при $t = 5T$. Величина расстройки резонансного условия равна $\delta\Omega = N\omega - \Omega$. На рис. 8.5б относительное значение расстройки резонанса равно $\delta\Omega/\Omega = 0,044$, а величина $\omega/\nu k^2 \approx 1$.

Несколько приведенных выше численных результатов демонстрируют многообразие различных структур, которые могут возникать в простейших вариантах гидродинамических течений. Общая причина, приводящая к той или иной структуре, связана со сложным взаимодействием конку-



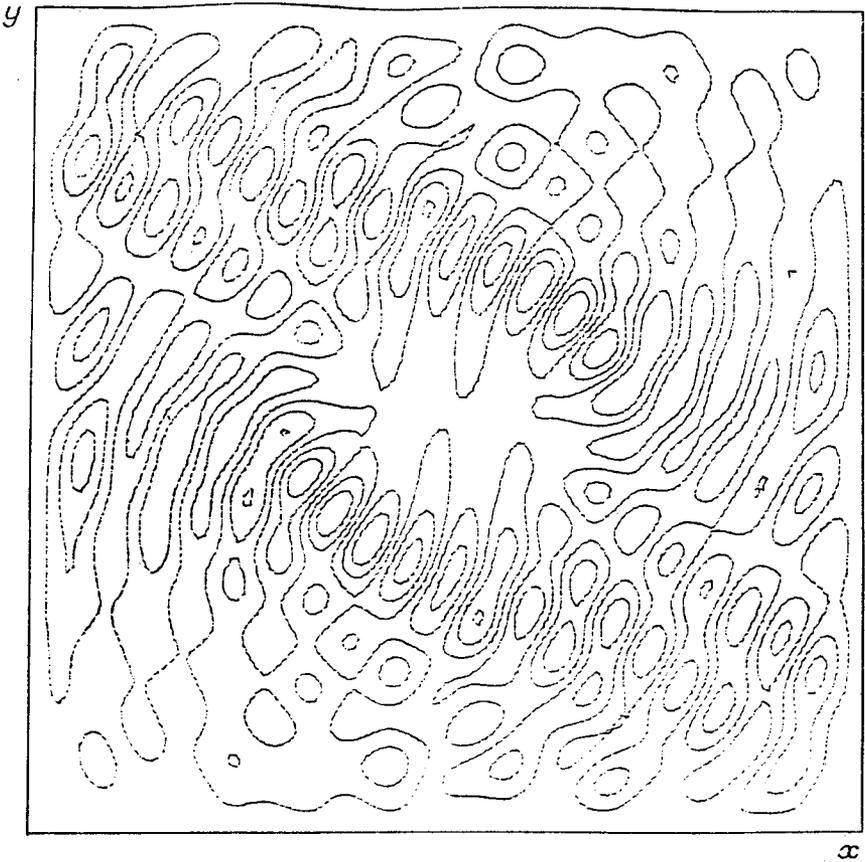
а

рирующих сил, определяющих динамику жидкости. В общем случае структуры могут возникать как проявление вторичных течений и течений более высокого порядка. В этих случаях течения более низкого порядка играют роль силовых полей, участвующих в конкуренции и влияющих на установление конечного вида течения.

Покажем, как определяется структура выживающего течения в последнем рассмотренном примере. Разобьем вынуждающую силу (8.45) с амплитудой (8.50) при $\Omega = q\omega$ на две части – стационарную \bar{F} и нестационарную \tilde{F} :

$$\begin{aligned}
 F &= \bar{F} + \tilde{F}; \quad \bar{F} = F_0 J_q(k\rho) \cos(q\varphi), \\
 \tilde{F} &\approx \frac{1}{2} F_0 \{ J_{q+1}(k\rho) \cos[(q+1)\varphi + \omega t] + \\
 &+ J_{q-1}(k\rho) \cos[(q-1)\varphi + \omega t] \},
 \end{aligned}
 \tag{8.51}$$

где ρ и φ – полярные координаты, $J_q(k\rho)$ – функция Бесселя и в правой части выражения для \tilde{F} мы пренебрегли слагаемыми, содержащими гармоники с частотой ω . В силу того, что функция \bar{F} является точным решением записанного в полярных координатах двумерного уравнения Гельм-



δ

Рис. 8.5. Результат численного интегрирования уравнения (8.21) с $F_0(t) = F_0 \cos(\Omega t)$: *a* — для $F_0 = 0.03$, $\nu = 0.31$, $T = 0.25 \cdot 10^{-3}$, $\psi_0 = 10^{-7}$, $L = 10^{-1}$, *б* — для $F_0 = 0.03$, $\nu = 0.31$, $T = 0.5 \cdot 10^{-2}$, $\psi_0 = 10^{-7}$, $L = 10^{-1}$

гольца (8.11), функция тока $\bar{\Psi} = C\bar{F}$, где C — произвольная константа, зануляет нелинейное слагаемое в левой части (8.24). Следовательно, функция тока

$$\bar{\Psi} = -\frac{F_0}{\nu k^4} J_q(k\rho) \cos(q\varphi), \quad (8.52)$$

является точным решением уравнения Навье—Стокса со стационарной накачкой \bar{F} . Быстроосциллирующая часть функции тока $\tilde{\Psi} \sim \frac{1}{\omega k^2} \tilde{F}$ при условии $\omega \gg \nu k^2$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\Psi} \ll \bar{\Psi}$. Поэтому наблюдаемая на рис. 8.5а в условиях точного резонанса стационарная структура достаточно хорошо описывается формулой (8.52).

Приведенные выше некоторые иллюстрации двумерных течений показывают, что можно установить аналогию между структурами, возникающими на фазовой плоскости динамических систем, и структурами двумерных течений несжимаемой жидкости. В действительности эту аналогию можно продвинуть значительно дальше. Для этого необходимо перейти к анализу трехмерных течений.

Глава 9

ХАОС ЛИНИЙ ТОКА

В предыдущей главе было показано, что в двумерной гидродинамике могут существовать течения со структурой, имеющей симметрию или квазисимметрию. Однако эта демонстрация является достаточно бедной, так как переход от двумерной стационарной гидродинамики к трехмерной приводит к возникновению качественно нового явления. Оно проявляется в существовании хаотически расположенных в пространстве линий тока. Иногда это явление называют лагранжевой турбулентностью. Разные его формы не только имеют интересные практические приложения, но и играют заметную роль в формировании нашего представления о зарождении турбулентности. В этой главе будет установлена связь между структурными свойствами стационарных трехмерных течений, имеющих симметрию или квазисимметрию, и хаосом линий тока этих течений. Установление этой связи в значительной степени расширит наше представление о тех областях физики, где возникает стохастическая паутина. Одновременно с этим мы обнаружим универсальность проявления квазисимметрии таких столь различающихся физических объектов, как фазовый портрет динамической системы в фазовом пространстве и геометрическая структура стационарных течений жидкости в координатном пространстве.

§ 9.1. Линии тока в пространстве

Линии тока стационарных двумерных течений устроены очень просто и являются линиями уровней функции тока $\Psi(x, y)$. Поведение линий тока стационарных трехмерных течений может быть совершенно иным, так как трехмерная гидродинамика резко отличается от двумерной. Уравнения

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (9.1)$$

определяют линию тока поля скоростей $\mathbf{v}(x, y, z)$. Более удобная запись системы (9.1), например в виде

$$\frac{dx}{dz} = \frac{v_x}{v_z} \equiv f_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dz} = \frac{v_y}{v_z} \equiv f_2(x, y, z), \quad (9.2)$$

показывает, что мы имеем дело с "нестационарной" задачей для динами-

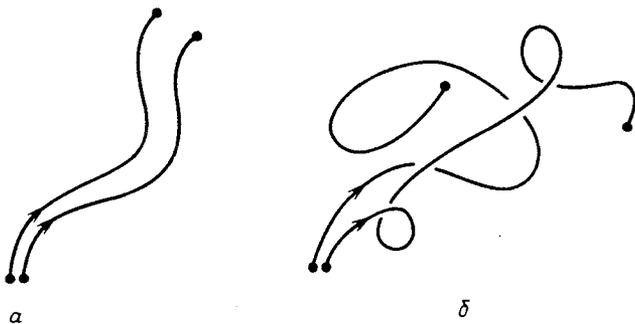


Рис. 9.1. Устойчивые (а) и неустойчивые (б) линии тока

ческой системы с двумерным фазовым пространством (x, y) . Переменная z играет роль времени. Для полей с $\text{div } \nu = 0$ можно представить систему (9.2) в гамильтоновской форме, и тогда уже хорошо разработанный аппарат теории динамических систем удастся использовать в полной мере (ком. 9.1).

Если принять в системе (9.2) переменную z в качестве "времени" (точно так же роль времени могла бы играть любая другая переменная), то расположение линии тока в пространстве определится заданием семейства двух двухпараметрических функций:

$$x = x(z; x_0, y_0), \quad y = y(z; x_0, y_0). \quad (9.3)$$

Здесь (x_0, y_0) — "начальные" координаты линии тока, т.е. значения (x, y) на некоторой начальной плоскости $z = z_0$. Поэтому выражения (9.3) удовлетворяют уравнениям движения (9.2) и начальному условию

$$x_0 = x(z_0; x_0, y_0), \quad y_0 = y(z_0; x_0, y_0). \quad (9.4)$$

Выражения (9.3), (9.4) определяют линию в пространстве (x, y, z) для заданного поля скоростей $\nu(x, y, z)$.

Структура функций f_1 и f_2 в (9.2) (или, иначе, стационарного течения $\nu(x, y, z)$) может приводить к линиям тока с разнообразной пространственной топологией. Здесь так же, как и в случае траекторий динамических систем, можно говорить об устойчивых и неустойчивых линиях тока.

Пусть, например, линия тока поля скоростей ν выходит из точки r_1 и попадает в точку r_2 (рис. 9.1). Эти точки связаны между собой соотношением

$$r_2 = \hat{\mathcal{L}} r_1, \quad (9.5)$$

в котором оператор $\hat{\mathcal{L}}$ задает "движение" линии тока. Устойчивым линиям тока соответствует случай, когда при малых возмущениях δr_1 будет также малым и δr_2 (рис. 9.1а). Поскольку число линий тока сохраняется внутри трубки тока, то появление хаоса означает сильное их "запутывание" в пространстве (рис. 9.1б) по сравнению с регулярным поведением (рис. 9.1а). Происходит перемешивание линий тока в координатном пространстве, подобное тому, которое имеет место для траекторий частиц в фазовом пространстве гамильтоновских систем.

Если течение двумерное, то зависимость от z в (9.2) исчезает и хаос линий тока невозможен. Некоторые виды стационарных трехмерных течений также исключают хаос [5]. В дальнейшем мы будем рассматривать, главным образом, течения, удовлетворяющие так называемому условию Бельтрами

$$\mathbf{v} = c \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (9.6)$$

где c — некоторая функция координат. Мы ограничимся также случаем, когда $c = \pm 1$.

Смысл условия (9.6) становится ясным из стационарного уравнения (8.3) для скорости

$$[\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] = \nabla \Phi, \quad (9.7)$$

где $\Phi = v^2/2 + P/\rho$ — произвольная скалярная функция координат, являющаяся полной механической энергией жидкости, отнесенной к единице массы. Если Φ изменяется в пространстве, т.е. если уравнение

$$\Phi(x, y, z) = \text{const}$$

определяет поверхность, то, умножая (9.7) скалярно на скорость \mathbf{v} , получаем

$$(\mathbf{v} \nabla) \Phi = 0.$$

Это условие означает, что функция Φ является первым интегралом системы уравнений (9.1) для линий тока, т.е. такие течения исключают хаос. Если же в некоторой области

$$\nabla \Phi = 0,$$

то из (9.7) следует, что поле скоростей \mathbf{v} удовлетворяет условию Бельтрами (9.6) и, как будет ясно ниже, для таких течений возможен хаос линий тока.

Обратимся теперь к уравнениям траекторий частиц жидкости

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (9.8)$$

Поскольку при стационарном поле скоростей линии тока совпадают с траекториями частиц, то хаос линий тока означает также стохастическое поведение пассивных примесных частиц. Такое поведение траекторий получило название лагранжевой турбулентности.

Пусть $\mathbf{r}(t)$ — траектория, соответствующая начальному условию $\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$. Найдем уравнение для возмущения этой траектории. Для этого рассмотрим близкую траекторию $\mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}(t)$ с начальным условием $\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}_0$, где $\delta \mathbf{r}_0$ — инфинитезимальный вектор. Тогда возмущение траектории $\delta \mathbf{r}(t)$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r} \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}),$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{r} + (\mathbf{v} \nabla) \delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r} \nabla) \mathbf{v}. \quad (9.9)$$

Стохастичность линий тока или траекторий частиц жидкости означает положительность показателя Ляпунова

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta r(t)|}{|\delta r_0|} \quad (9.10)$$

или экспоненциальное разбегание соседних элементов жидкости. Это приводит к еще одному нетривиальному эффекту, связанному с генерацией магнитного поля при движении проводящей жидкости, или эффекту гидромагнитного динамо [6, 7].

Эволюция магнитного поля \mathbf{B} при заданном течении несжимаемой жидкости описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}] + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \mathbf{B}, \quad (9.11)$$

в котором $\text{Re}_m = L_0 v_0 / \nu_m$ — магнитное число Рейнольдса; L_0 — характерный масштаб, v_0 — характерная скорость, ν_m — магнитная вязкость. Полагая формально в (9.11) $\text{Re}_m = \infty$, получим, что \mathbf{B} и δr удовлетворяют одному и тому же уравнению (9.9). Следовательно, если показатель Ляпунова (9.10) отличен от нуля, то это означает также локальное экспоненциальное усиление магнитного поля. Положительность показателя Ляпунова, тем не менее, может оказаться недостаточной для существования быстрого динамо. Следующий пример иллюстрирует это утверждение. Рассмотрим нестационарное плоское вихревое движение несжимаемой жидкости. При определенных условиях здесь имеет место хаотическая динамика и диффузия примесных частиц. Однако в силу известной в магнитной гидродинамике теоремы запрета Каулинга [6] в такой двумерной системе динамо-эффект невозможен (ком. 9.2).

§ 9.2. Линии тока ABC-течения

В 1965 г. В.И. Арнольд [11] предположил, что стационарное трехмерное течение

$$\begin{aligned} v_x &= A \sin z + C \cos y, \\ v_y &= B \sin x + A \cos z, \\ v_z &= C \sin y + B \cos x, \end{aligned} \quad (9.12)$$

обладает нетривиальной топологией линий тока, так как для этого течения выполнено условие Бельтрами (9.6): $\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Численный анализ, проведенный в работах [12, 13], подтвердил эту особенность течения (9.12). Мы уже отмечали в конце § 9.1, что хаос линий тока может привести к тому, что соответствующее течение проводящей жидкости может привести к генерации магнитного поля. Эта задача изучалась Чилдресом [14]. Течение (9.12) было названо ABC-течением (Арнольда–Бельтрами–Чилдреса) (ком. 9.3).

Отметим два важных свойства ABC-течения. Во-первых, оно является решением уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\nabla(P/\rho) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (9.13)$$

при надлежащем выборе силы F :

$$F = \nu \nu. \quad (9.14)$$

Равенство (9.14) вытекает из того, что АВС-течение (9.12) удовлетворяет условию $\nabla^2 \nu = -\nu$. Кроме того, существует утверждение об устойчивости АВС-течения при достаточно большой вязкости [19]. Поэтому АВС-течение может возникнуть в результате действия внешней накачки подобно тому, как это происходило в двумерных моделях в § 8.2.

Еще одно важное свойство АВС-течения заключается в том, что систему уравнений

$$\frac{dx}{A \sin z + C \cos y} = \frac{dy}{B \sin x + A \cos z} = \frac{dz}{C \sin y + B \cos x}, \quad (9.15)$$

определяющих линии тока поля скоростей (9.12), можно представить в гамильтоновской форме [20]. С этой целью запишем (9.15) в следующем виде:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial y} H, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial x} H, \quad (9.16)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= C \sin y + B \cos x, \\ H(x, y, z) &= \Psi(x, y) + A (y \sin z - x \cos z), \end{aligned} \quad (9.17)$$

и перейдем от независимых переменных x, y к новым независимым переменным $\xi = \xi(x, y), p = p(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial H}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right\}, \\ \frac{d\xi}{dz} &= \frac{1}{\Psi} \frac{\partial H}{\partial p} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right\}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Полагая в (9.18)

$$\xi = x, \quad p = \int_0^y dy' \Psi(x, y'), \quad (9.19)$$

приведем эту систему к каноническому виду

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial \dot{H}}{\partial x}, \quad (9.20)$$

где функция

$$H(p, x, z) = C \sin y(p, x) + B \cos x + A \{y(p, x) \sin z - x \cos z\} \quad (9.21)$$

находится из подстановки выражения (9.17) для Ψ в (9.19). Это дает

$$p = B y \cos x + C(1 - \cos y). \quad (9.22)$$

Система уравнений (9.20) с гамильтонианом (9.21) является, вообще говоря, неинтегрируемой системой, за исключением очевидного случая,

Рис. 9.2. Интегрируемый случай
 ABC-течения при $A = 0$: линии
 тока на плоскости (x, y)

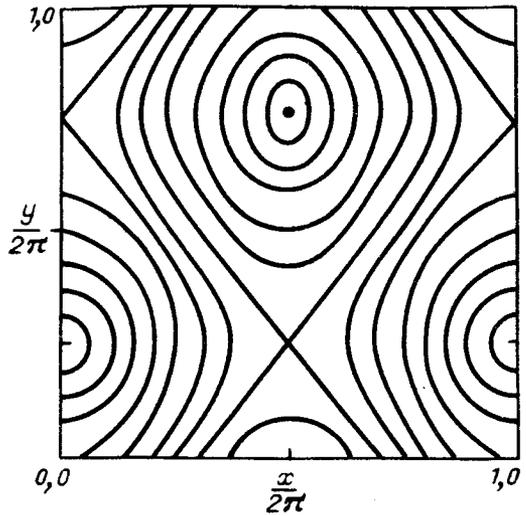
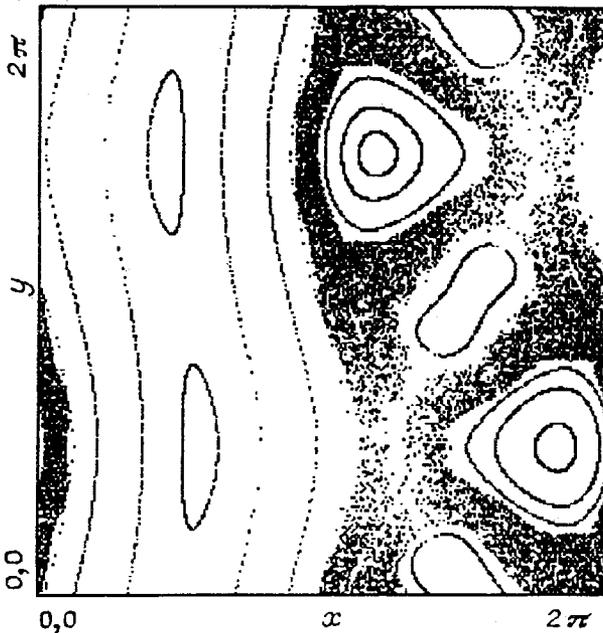


Рис. 9.3. Пример сечения Пуанкаре
 линий тока ABC-течения
 при $z = 0$ для случая $A = \sqrt{3}$,
 $B = \sqrt{2}$, $C = 1$ [12]



когда она сводится к двумерной, т.е. когда один из коэффициентов A , B , C обращается в нуль. Полагая для определенности $A = 0$, найдем первый интеграл в этом интегрируемом случае:

$$C \sin y + B \cos x = H_0 = \text{const.} \quad (9.23)$$

Линии тока в плоскости (x, y) показаны на рис. 9.2. Здесь имеются три типа линий тока: замкнутые линии тока, линии тока, уходящие на

бесконечность, и особые линии тока, проходящие через седловые точки поверхности $H_0(x, y)$ и соответствующие сепаратрисам. С помощью интеграла (9.23) система (9.20) может быть легко проинтегрирована, а решение выражено через эллиптические функции [13].

Что происходит с линиями тока при $A \neq 0$? Рассмотрим гамильтониан линий тока (9.21). При $A = 0$ (двумерный случай) он определяет семейство цилиндрических поверхностей (трубок тока), соответствующих различным значениям интеграла "энергии" $H_0 = \text{const}$, причем этот интеграл одновременно является функцией тока. Возмущение гамильтониана (9.21) при малых значениях A эквивалентно появлению малого нестационарного возмущения в динамической системе. Значительная часть трубок тока слегка изменяет свою форму в соответствии с теорией Колмогорова—Арнольда—Мозера. Однако при $A = 0$ имеются особые сепаратрисные поверхности, на которые даже малое возмущение влияет сильно. Оно приводит к образованию стохастических слоев в окрестности разрушенных сепаратрис и, следовательно, к хаосу линий тока. С ростом параметра A ($A \sim 1$) стохастические слои расширяются (рис. 9.3) и хаос линий тока охватывает значительную часть трехмерного пространства. Возникновение больших областей хаоса линий тока в ABC-течении, обнаруженное в [13], в действительности есть проявление более общего эффекта. Мы подробно рассмотрим этот вопрос в § 9.4.

§ 9.3. Трехмерные течения с симметрией и квазисимметрией

Как уже отмечалось в предыдущей главе, в двумерной гидродинамике может, вообще говоря, реализоваться квазикристаллическая симметрия, если за счет источника и вязких членов создать область устойчивости подобных течений.

В трехмерных стационарных течениях также может существовать квазисимметрия [21, 22]. Рассмотрим поле скоростей, определяемое выражениями

$$v_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \epsilon \sin z, \quad v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \epsilon \cos z, \quad v_z = \Psi, \quad (9.24)$$

где ϵ — параметр, а функция $\Psi \equiv \Psi(x, y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца (8.11)

$$\nabla^2 \Psi + \Psi = 0. \quad (9.25)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что течение (9.24) удовлетворяет условию несжимаемости

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

и условию Бельтрами в форме

$$\text{rot } \mathbf{v} = -\mathbf{v}. \quad (9.26)$$

Рассмотрим частный случай течения (9.24), в котором выберем в качестве решения уравнения (9.25) следующее выражение:

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{j=1}^q \cos(R e_j), \quad (9.27)$$

где, так же как и в (8.12), $\mathbf{R} = (x, y)$ – координатный вектор и

$$e_j = \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{q} j\right), \sin\left(\frac{2\pi}{q} j\right) \right\}$$

– единичные векторы, образующие правильную q -звезду. Так же, как и ранее, будем говорить, что течение (9.24) имеет симметрию порядка q , или просто квазисимметрию.

Заметим, что функция (8.12)

$$\Psi = \sum_{j=1}^q C_j \cos(\mathbf{R} e_j + \alpha_j), \quad (9.28)$$

так же, как и (9.27), удовлетворяет уравнению Гельмгольца (9.25). С её помощью описываются обобщенные течения с квазисимметрией.

Поле скоростей, являющееся зеркально-симметричным по отношению к (9.24), определяется выражениями

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + A \sin z, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + A \cos z, \quad v_z = \Psi, \quad (9.29)$$

где A – параметр, а функция Ψ является решением уравнения (9.25). Если выбрать функцию Ψ в виде (9.29), то такое течение имеет квазисимметрию, однако знак поляризации противоположной по отношению к (9.24), т.е. условие Бельтрами записывается в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

В частности, если

$$\Psi = C \sin y + B \cos x,$$

то соответствующее поле скоростей является ABC-течением. Таким образом, течение (9.24) или (9.29) является сильным обобщением ABC-течения на случай произвольной квазисимметрии.

Для квазисимметричного течения (9.24) система уравнений (9.2), определяющая линии тока, имеет вид

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial y} H(x, y, z), \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial x} H(x, y, z), \quad (9.30)$$

где выражение

$$H(x, y, z) = \Psi(x, y) + \epsilon V(x, y, z), \quad (9.31)$$

$$V(x, y, z) = -x \cos z - y \sin z,$$

является гамильтонианом, определяющим уравнения движения (9.30). В следующем параграфе мы покажем, каким образом динамическая система (9.30), (9.31) может быть приведена к обычной канонической форме. Однако уже сейчас некоторые результаты теории динамических систем могут быть применены непосредственно к уравнениям (9.30).

Невозмущенная часть системы (9.30) с гамильтонианом (9.31) при $\epsilon = 0$ имеет множество особых траекторий, проходящих через седловые особые точки (сепаратрисы). Например, при $q = 4$ или $q = 3, 6$, когда функция Ψ задается формулами (8.16) или (8.17), все сепаратрисы при-

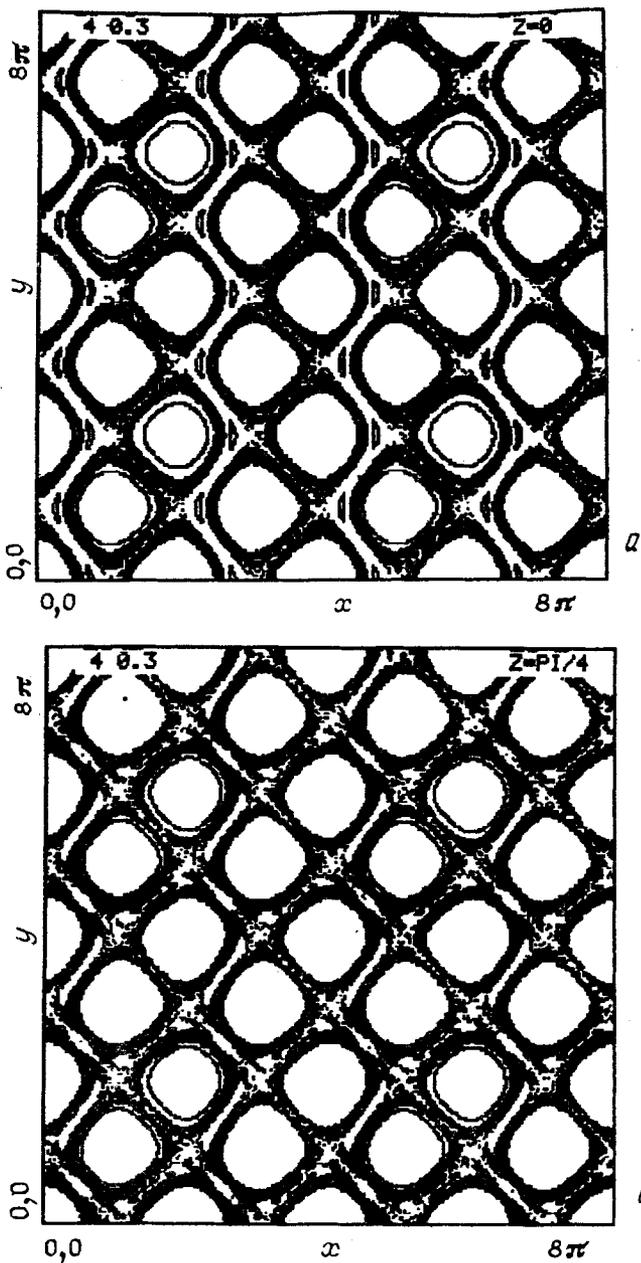


Рис. 9.4. Линии тока формируют стохастическую паутину с квадратной симметрией ($q = 4$). Показаны результаты численных расчетов уравнения (9.24) для $q = 4$ и $\epsilon = 0,6$. Плоскость сечения Пуанкаре (x, y) соответствует $z = 0$ (а) и $z = \pi/4$ (б). Размер квадрата $8\pi \times 8\pi$ [22]

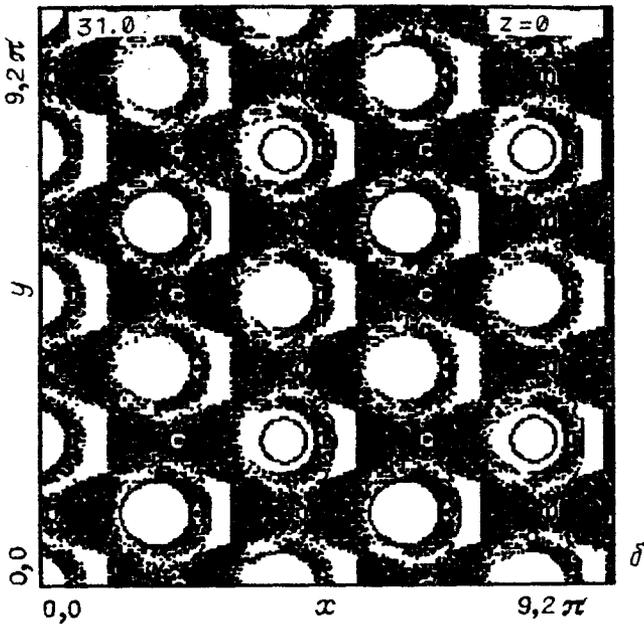
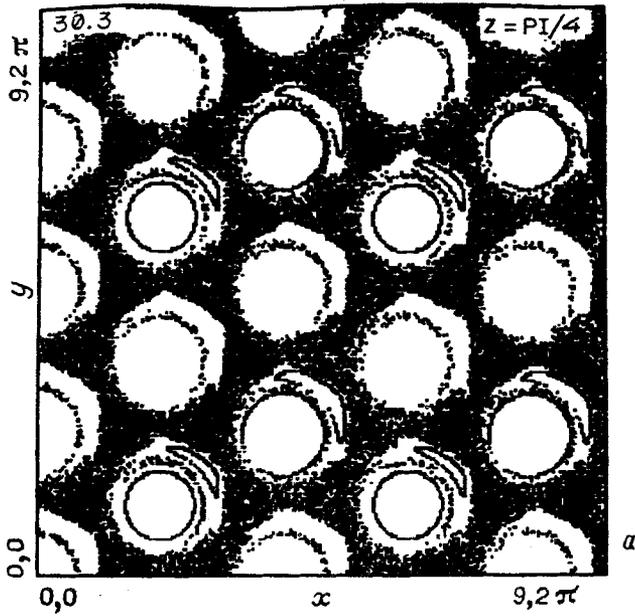


Рис. 9.5. Гексагональная стохастическая паутина. Результаты численных расчетов уравнений (9.24) для $q = 3$. Плоскость сечения Пуанкаре (x, y) : *a* – для $\epsilon = 0,3, z = \pi/4$, *б* – для $\epsilon = 1,0, z = 0$; размер квадрата $9,2\pi \times 9,2\pi$ [22]

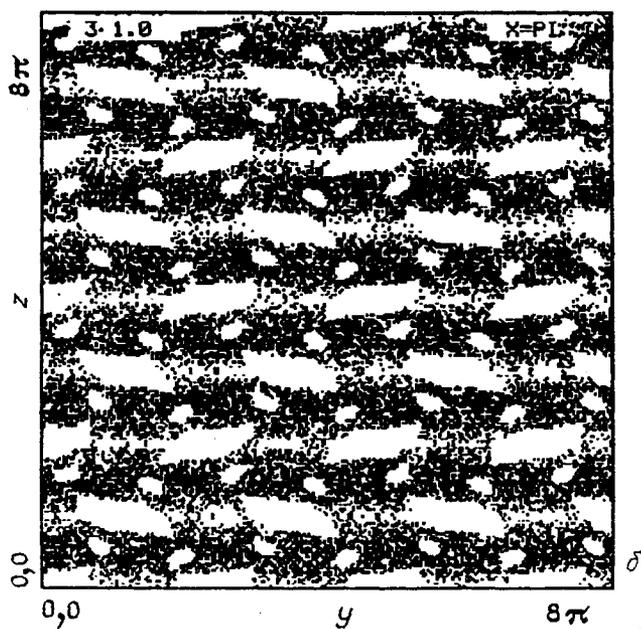
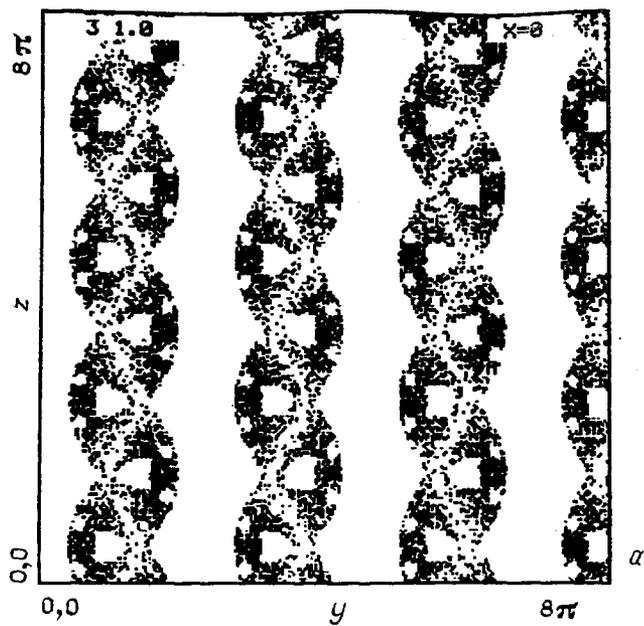


Рис. 9.6. Стратифицированная структура гексагональной паутины ($q = 3$). Сечение Пуанкаре в вертикальной плоскости (y, z) : $a - x = 0, \epsilon = 1, б - x = \pi, \epsilon = 1$; размер квадрата $8\pi \times 8\pi$ [22]

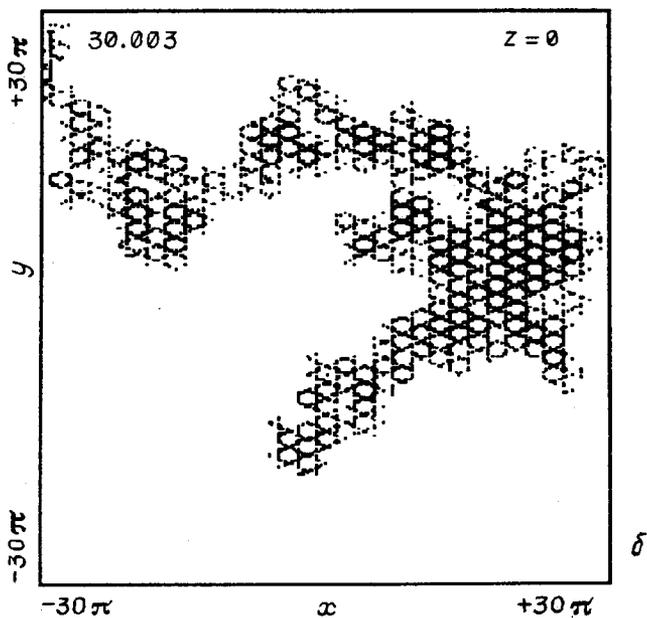
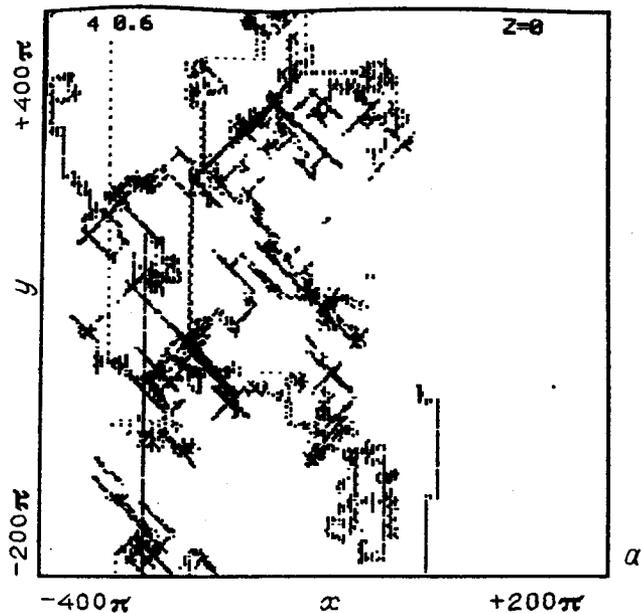


Рис. 9.7. Общий вид пространственной диффузии одной линии тока в плоскости (x, y) для $z = \pi/4$: *a* – квадратная симметрия ($q = 4, \epsilon = 0,6, -400\pi < x < 200\pi, -200\pi < y < 400\pi$), *б* – гексагональная симметрия ($q = 3, \epsilon = 0,003, -30\pi < x < 30\pi, -30\pi < y < 30\pi$) [22]

надлежат одному и тому же значению функции тока Ψ и образуют поэтому единую квадратную или гексагональную сеть. Любое, сколь угодно малое периодическое возмущение по z (т.е. произвольно малые ϵ) приводит к разрушению сепаратрис и появлению в их окрестности конечной области стохастической динамики линий тока. В данном случае это означает появление в пространстве (x, y, z) стохастической паутины с ячейками квадратной или гексагональной структуры. Примеры такой паутины приведены на рис. 9.4, 9.5. Внутри паутины сохраняются малые области (островки), внутри которых динамика линий тока устойчивая. Это означает, что линии тока наматываются регулярно на некоторую инвариантную поверхность (трубку тока). В данном случае такими поверхностями являются изгибающиеся периодически трубки с осью, ориентированной в пространстве в нескольких направлениях, зависящих от порядка симметрии q . Сечения этих трубок и образуют окна в стохастической паутине на рис. 9.6. Вся остальная область паутины заполняется всего лишь одной траекторией и является фрактальным множеством, занимающим конечный объем в пространстве (x, y, z) .

Приближаясь к точкам остановки (седлам), лежащим на пересечении сепаратрис, линия тока по случайному закону "выбирает" направление своего дальнейшего движения. В результате возникает пространственный диффузионный процесс, аналогичный броуновскому движению частицы на квадратной или гексагональной решетке. Два примера такой диффузии для $q = 4$ и $q = 3$ получены в результате численного анализа и изображены на рис. 9.7. Линия тока может пройти значительный отрезок длины в плоскости $z = \text{const}$, повернуться и перейти в плоскость $x = \text{const}$, описать довольно сложную петлю и затем снова вернуться в ту же плоскость $z = \text{const}$. Именно поэтому в картине диффузии наблюдаются "прыжки" линий тока в одной и той же плоскости $z = \text{const}$. Это особенно хорошо видно в случае $q = 4$ (рис. 9.7а).

По существу результаты этого параграфа показывают, что стационарное трехмерное течение искусственно в значительной мере нетривиально, хотя формальное выражение для поля скоростей может выглядеть достаточно просто. Области стохастичности линий тока разбивают все координатное пространство, в котором происходит течение, на систему ячеек, имеющего либо простую кристаллическую симметрию ($q = 3, 4, 6$), либо очень сложную — квазикристаллическую симметрию, как это имеет место в случае $q = 5, 7, \dots$.

Толщина областей стохастичности (стохастической паутины) определяется параметрами течения. Это явление естественно назвать турбулентностью линий тока.

Здесь нам удалось не только продемонстрировать появление пространственной стохастической паутины в гидродинамических стационарных течениях, но и пойти значительно дальше. Гидродинамическая паутина определяет структуры течений. Скорее всего, не только течение (9.24), но и другие течения с достаточно сложной структурой генерируют лагранжевскую турбулентность. Поэтому бифуркация структуры означает также бифуркационное изменение гидродинамической паутины.

В следующем параграфе будет рассмотрена теория образования гидродинамической стохастической паутины.

§ 9.4. Стохастические слои и стохастические паутины в гидродинамике

Рассмотрим теорию образования гидродинамической стохастической паутины при малых значениях $\epsilon \ll 1$. Мы приведем подробное изложение для $q = 3$. Этот же путь может быть положен в основу изучения течений с другими значениями q .

Перейдем от независимых переменных (x, y) в уравнениях (9.26) к новым каноническим переменным (x, p) с помощью нелинейного преобразования типа (9.19):

$$p \equiv p(x, y) = \int_0^y dy' \Psi(x, y'). \quad (9.32)$$

В новых переменных (x, p) уравнения (9.26) записываются в канонической форме:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (9.33)$$

с гамильтонианом

$$H(p, x, z) = \Psi(x, y(p, x)) - \epsilon y(p, x) \sin z - \epsilon x \cos z, \quad (9.34)$$

периодически зависящем от "времени" z .

Таким образом, с помощью преобразования (9.32) задача об определении линий тока в трехмерных стационарных течениях сводится к исследованию гамильтоновской системы с полутора степенями свободы.

Приведем явную запись нелинейного преобразования (9.32) в случае гексагональной симметрии ($q = 3$), когда невозмущенный гамильтониан определяется формулой (8.17):

$$\Psi = \cos x + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y\right). \quad (9.35)$$

Для определенности мы положили коэффициент $\Psi_0 = 1$. В этом выражении переменная y как функция x и p находится из решения нелинейного уравнения (9.32):

$$p = y \cos x + \frac{4\sqrt{3}}{3} \cos \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} y\right). \quad (9.36)$$

Разрешая (9.36) относительно y , будем иметь

$$y(x, p) = \frac{p}{\cos x} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} J_n\left(\frac{n \cos \frac{x}{2}}{2 \cos x}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3} np}{2 \cos x}\right). \quad (9.37)$$

С помощью (9.37) гамильтониан задачи (9.34) при $q = 3$ записывается в явном виде как функция x, p и z .

Воспользуемся далее методом канонических преобразований и перейдем с помощью производящей функции

$$S(I, x) = \int_0^x dx p(\Psi, x) \quad (9.38)$$

в гамильтониане (9.34) от переменных (x, p) к каноническим переменным (I, φ) , являющимся переменными действие — угол для невозмущенной задачи ($\epsilon = 0$):

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint dx p, \quad \varphi = \partial S(I, x) / \partial I.$$

Выражая с помощью (9.35) и (9.36) p через x и Ψ и подставляя в (9.38), получим

$$S(x, I) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^x dx \left\{ \cos x \cdot \arccos \left(\frac{\Psi - \cos x}{2\cos \frac{x}{2}} \right) + 2\cos \frac{x}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\Psi - \cos x}{2\cos \frac{x}{2}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (9.39)$$

Существует два интервала с разными выражениями для действия и угловой переменной. При $-1 < \Psi \leq 3$ из (9.39) имеем

$$I = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi} \int_0^\Psi dh \frac{h}{(2h+3)^{1/4}} K[\kappa_1(h)], \quad (9.40)$$

где

$$\kappa_1(h) = \frac{[3 - h^2 + 2(2h+3)^{1/2}]^{1/2}}{2(2h+3)^{1/4}}$$

— модуль полного эллиптического интеграла $K(\kappa_1)$. Из формулы (9.40) следует выражение для частоты нелинейных колебаний

$$\Omega = \frac{\partial \Psi}{\partial I} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4\Psi} (2\Psi+3)^{1/4} K^{-1}[\kappa_1(\Psi)]. \quad (9.41)$$

В области вблизи сепаратрисы ($\Psi \rightarrow -1$) выражение для $\Omega(\Psi)$ имеет, как обычно, логарифмическую особенность:

$$\Omega = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \frac{1}{\ln(1/|\Psi+1|)}. \quad (9.42)$$

В области значений $-3/2 \leq \Psi < 1$ вместо (9.40) имеем

$$I = \frac{8\sqrt{3}}{3\pi} \int_0^\Psi dh h [(1 + \sqrt{2h+3})^2 - (h+1)^2]^{-1/2} K[\kappa_2(h)], \quad (9.43)$$

где $\kappa_2 = 1/\kappa_1$. Частота нелинейных колебаний вблизи сепаратрисы в этой области значений невозмущенного гамильтониана Ψ по-прежнему определяется формулой (9.42).

Гамильтониан линий тока (9.34) при $\epsilon = 0$ (двумерный случай) определяет семейство цилиндрических поверхностей, соответствующих различным значениям интеграла энергии $\Psi = \text{const} \equiv E$. Среди них имеются особые сепаратрисные поверхности, на которые даже малое возмущение

влияет сильно. Их сечение плоскостью $z = \text{const}$ дает при $q = 3$ гексагональную сетку, которая при $\epsilon \neq 0$ разрушается и на ее месте образуется стохастическая паутина.

Определим толщину стохастической паутины. С этой целью рассмотрим гамильтониан (9.34) при $\epsilon \ll 1$. Изменение гамильтониана Ψ находится с помощью уравнения

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{\epsilon}{\Psi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \sin z - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos z \right). \quad (9.44)$$

Сепаратрисные поверхности при $q = 3$ соответствуют значению гамильтониана $\Psi = -1$ и определяются уравнениями

$$x = \pi(2n_1 + 1), \quad x = \sqrt{3}y + 2\pi(2n_2 + 1), \quad x = -\sqrt{3}y + 2\pi(2n_3 + 1) \\ (n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \dots). \quad (9.45)$$

Найдем одно из сепаратрисных решений невозмущенной задачи ($\epsilon = 0$). Пусть, например, $x = \pi$. Тогда из (9.30) получаем

$$\frac{dy}{dz} = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right). \quad (9.46)$$

Интегрируя (9.46), находим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{\pi}{2} - 2\text{arctg} \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(z - z_n)\right], \quad (9.47)$$

где z_n — момент прохождения поверхности $y = 0$. Выражение (9.47) имеет простой смысл. Это солитон линии тока, образующей гексагональную структуру. Подставляя (9.47) в (9.44) и интегрируя по z , найдем изменение невозмущенной энергии $\Psi = E$ при движении между двумя соседними седловыми точками $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$:

$$\Delta E = \epsilon \int_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} dz \frac{\sin z}{\text{ch}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(z - z_n)\right]} \approx \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin z}{\text{ch}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(z - z_n)\right]}. \quad (9.48)$$

Отсюда следует

$$\Delta E \approx \sqrt{3} \pi \epsilon \sin z_n. \quad (9.49)$$

Из формул (9.49) и (9.42) получаем отображение, описывающее поведение линий тока вблизи сепаратрисы:

$$E_{n+1} = E_n + \sqrt{3} \pi \epsilon \sin z_n, \\ z_{n+1} = z_n + \frac{2\sqrt{3}}{3} \ln \frac{1}{|1 + E_{n+1}|}. \quad (9.50)$$

Для области внутри стохастического слоя из (9.50) имеем (см. § 3.2)

$$|1 + E| \lesssim 2\pi\epsilon. \quad (9.51)$$

Отсюда находится ширина стохастического слоя $2\delta E$, если в (9.51) поло-

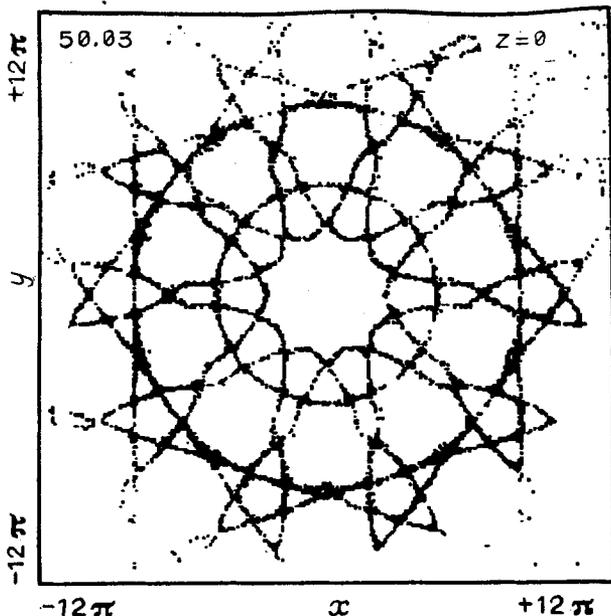


Рис. 9.8. Стохастическая паутина линий тока с квазисимметрией 5-го порядка. Плоскость $z = 0$. Решение уравнений (9.24) соответствует $q = 5$ и $\epsilon = 0,03$. Размер квадрата $24\pi \times 24\pi$ [22]

жить $E = -1 \pm \delta E$ и взять знак равенства:

$$2\delta E = 4\pi\epsilon. \quad (9.52)$$

Полученный результат показывает, что в пространстве (x, y, z) имеется конечная область — паутина, толщиной порядка ϵ , внутри которой линии тока располагаются в пространстве стохастически. Хотя этот вывод здесь приведен лишь для частного случая гексагональной симметрии, он может быть достаточно просто обобщен на случай АВС-течения [21] или течения с произвольной квазисимметрией. Это означает, что стационарные течения, создавая определенную структуру в пространстве, одновременно порождают области хаоса расположения линий тока толщиной порядка ϵ в окрестности этой структуры. Трехмерный характер структур для образования структурного хаоса является необходимым условием.

В главе 6 уже описывался механизм образования паутины с квазисимметрией. Здесь, однако, мы столкнулись с ее совершенно новым проявлением. Образование квазисимметричной гидродинамической паутины происходит не в фазовом пространстве частицы, а в обычном координатном пространстве (x, y, z) , где роль условного времени играет переменная z . Паутина является трехмерной, а квазисимметрия реализуется в плоскости (x, y) . Пример трехмерного течения, в котором образуется плоская структура с квазисимметрией пятого порядка, приведен на рис. 9.8. Он получен численно для системы (9.24) с функцией тока (9.27) при $\Psi_0 = 1$ и $q = 5$.

§ 9.5. Винтовые стационарные течения

В этом параграфе мы введем еще один тип трехмерных стационарных течений, который обладает винтовой симметрией порядка N и является трехмерным обобщением плоского течения с функцией тока Ψ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца (9.25). Такие течения симметричны относительно поворота вокруг оси z на угол $2\pi/N$. Их существование основано на представлении поля скоростей (9.24) в цилиндрических координатах:

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{\epsilon}{r} \sin z, \quad v_\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\epsilon}{r} \cos z, \quad v_z = \Psi. \quad (9.53)$$

Здесь функция $\Psi \equiv \Psi(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (9.25), записанному в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \Psi = 0. \quad (9.54)$$

Легко убедиться в том, что для поля скоростей (9.53) выполнено условие Бельтрами $\text{rot } \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Решением уравнения (9.54) является функция

$$\Psi(r, \varphi) = \sum_n C_n J_n(r) \cos(n\varphi), \quad (9.55)$$

где C_n — постоянные коэффициенты, а $J_n(r)$ — функция Бесселя. Некоторые частные случаи (9.55) вызывают особый интерес. Если в (9.55) оставить только один член с $n = N$, то получится винтовое течение с симметрией поворота в плоскости $z = \text{const}$ на угол $2\pi/N$:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{N}{r} J_N(r) \sin(N\varphi) + \frac{\epsilon}{r} \sin z, \\ v_\varphi &= J'_N(r) \cos(N\varphi) - \frac{\epsilon}{r} \cos z, \\ v_z &= J_N(r) \cos(N\varphi). \end{aligned} \quad (9.56)$$

Система уравнений для линий тока может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \frac{1}{\Psi} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{\epsilon}{r} \sin z \right), \\ r \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{1}{\Psi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\epsilon}{r} \cos z \right), \end{aligned} \quad (9.57)$$

где

$$\Psi(r, \varphi) = J_N(r) \cos(N\varphi) \quad (9.58)$$

является первым интегралом в отсутствие возмущения при $\epsilon = 0$. Уравнения (9.57) также могут быть представлены в гамильтоновской форме с

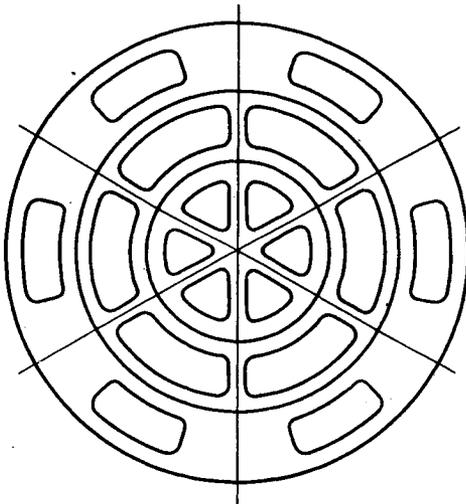


Рис. 9.9 Линии уровней функции тока (9.58) винтового поля с симметрией 6-го порядка

гамильтонианом

$$\begin{aligned}
 H(r, \varphi, z) &= \\
 &= \Psi(r, \varphi) - \epsilon(\varphi \sin z + \\
 &+ \ln r \cdot \cos z). \quad (9.59)
 \end{aligned}$$

Сепаратрисы невозмущенной системы с гамильтонианом (9.58) образуют правильную паутину (рис. 9.9). В двух, симметрично расположенных относительно центра ячей-

ках жидкость вращается в противоположных направлениях. Для винтовых течений (9.56), так же, как и для течений с квазисимметрией, устанавливается существование стохастической паутины. Действие возмущения при $\epsilon \neq 0$ разрушает сепаратрисную сетку, образуя на ее месте стохастический слой.

Частным случаем винтового течения (9.56) является цилиндрическое течение при $N = 0$. В этом случае из (9.58) следует

$$\Psi = J_0(r), \quad (9.60)$$

и задача является интегрируемой. Действительно, из (9.57) следует

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\epsilon \sin z}{r J_0(r)}, \quad (9.61)$$

и это уравнение сразу интегрируется:

$$\epsilon \cos z + r J_1(r) = \text{const}. \quad (9.62)$$

Отсюда следует, что такие течения сохраняют вращательный момент:

$$v_\varphi r = -\text{const},$$

и описывают движение жидкости с особенностью на оси $r = 0$ похожее на вихревое движение в смерчах.

Можно провести аналогию между структурами, образуемыми гидродинамическими течениями с винтовой симметрией, и структурами на фазовой плоскости, описанными в § 5.2.

§ 9.6. Стохастичность линий тока при стационарной конвекции Рэлея—Бенара

Описанная выше ситуация, по-видимому, является достаточно универсальной и поэтому хорошо известные структуры при других стационарных движениях жидкости, газа или плазмы должны обладать подобными свойствами. Это означает, что структуры, возникающие в жидкости до появления турбулентности, создают стохастическую паутину линий тока. Кроме

Рис. 9.10. Линии тока в гексагональной ячейке в первом приближении по параметру надкритичности ϵ

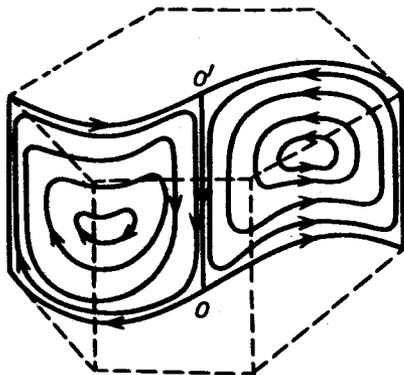
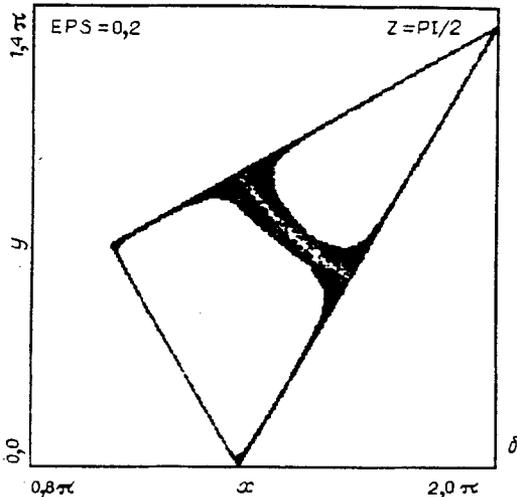
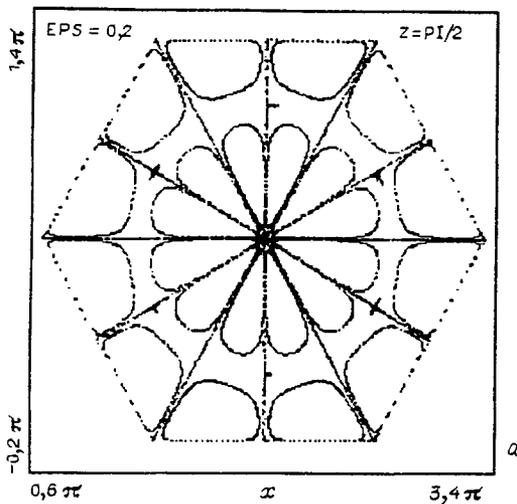


Рис. 9.11. Сечение Пуанкаре системы (9.65) при $z = \pi/2$; a – сечение тороидальных поверхностей, b – стохастическая линия тока в ячейке



того, расположение этой паутины в пространстве естественным образом отражает форму структуры. Причина такого вывода заключается в следующем. Воспользуемся любым подходящим способом анализа предтурбулентного состояния гидродинамической среды. Такое состояние можно описывать конечным числом гармоник, которые получаются в результате разложения решения в ряд Фурье и обрезания ряда. Любой конечный ряд гармоник обладает свойством квазисимметрии. Если задача трехмерная, то она соответствует динамической системе с трехмерным фазовым пространством. Поэтому стохастичность линий тока должна возникать практически в любой общей ситуации трехмерных течений, характеризуемой квазипериодичностью.

Продемонстрируем сказанное на примере линий тока при стационарной конвекции Рэлея—Бенара в бесконечном по горизонтали слое жидкости. Если число Рэлея R , служащее безразмерной характеристикой разности температуры на границах слоя, превышает критическое значение R_c , то жидкость самоорганизуется в гексагональные ячейки Бенара. При малой надкритичности $\epsilon = (R - R_c)^{1/2} \ll 1$ пространственная зависимость поля скоростей \mathbf{v} с точностью до членов второго порядка малости по параметру ϵ имеет следующий вид [23]:

$$\mathbf{v} = \epsilon \operatorname{rot} \operatorname{rot} z \Psi, \quad (9.63)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi = & \left[\cos x + \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) + \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right] (\sin z + a \epsilon \sin 2z) + \\ & + b \epsilon \left[\cos \sqrt{3} y + \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y + 3x \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y - 3x \right) \right] \sin 2z. \end{aligned} \quad (9.64)$$

В работе [23] получены явные выражения для коэффициентов a и b в зависимости от параметров задачи, а в работе [24] приведено разложение с точностью до членов третьего порядка по ϵ .

Уравнения, описывающие динамику пассивной примеси в поле скоростей (9.63), (9.64), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & - \left(\sin x + \sin \frac{x}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right) (\cos z + 2\epsilon_1 \cos 2z) - \\ & - 2\epsilon_2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \sin \left(\frac{3}{2} x \right) \cos 2z, \\ \frac{dy}{dt} = & - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y \right) (\cos z + 2\epsilon_1 \cos 2z) - \\ & - \frac{2\sqrt{3}}{3} \epsilon_2 \left(\sin \sqrt{3} y + \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \cos \left(\frac{3}{2} x \right) \right) \cos 2z, \\ \frac{dz}{dt} = & \left(\cos x + 2 \cos \frac{x}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right) (\sin z + \epsilon_1 \sin 2z) + \\ & + \epsilon_2 \left(\cos \sqrt{3} y + 2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \cos \left(\frac{3}{2} x \right) \right) \sin 2z, \end{aligned} \quad (9.65)$$

где $\epsilon_1 = a\epsilon$ и $\epsilon_2 = 3b\epsilon$. В первом приближении по параметру ϵ , т.е. когда $\epsilon_1 = 0$ и $\epsilon_2 = 0$, картина линий тока в гексагональных ячейках была получена в [25]. Линиями тока являются замкнутые кривые, которые лежат на вертикальных цилиндрических поверхностях (рис. 9.10).

Во втором порядке по параметру ϵ картина меняется. Большинство линий тока теперь оказываются незамкнутыми и наматываются на тороидальные поверхности. На рис. 9.11а представлены результаты численного интегрирования системы (9.65) при $\epsilon_1 = 0$ и $\epsilon_2 = 0,2$. Приведено сечение одного из торов плоскостью $z = \pi/2$. Тороидальные поверхности оказываются разрушенными вблизи границы ячейки. Рис. 9.11б иллюстрирует хаос линий тока в одном из секторов гексагональной ячейки. Отметим, что в этом приближении по параметру ϵ , несмотря на возникновение хаоса внутри ячейки, скалярная примесь не может диффундировать между ячейками, так как на границе ячейки нормальная компонента скорости зануляется [25]. Образование единой стохастической паутины здесь, в отличие от случая квадратных ячеек [26], оказывается возможным лишь при учете членов более высокого порядка малости по ϵ .

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава 10

СТРУКТУРЫ В ИСКУССТВЕ И В ПРИРОДЕ

До сих пор обсуждались различные проявления структур, обладающих правильной или почти правильной симметрией. Они возникали в фазовом пространстве динамических систем или в координатном пространстве гидродинамических течений. Общим для всех этих случаев явился метод получения или обнаружения структур. Структуры возникали не в результате "придумывания" некоторого формального алгоритма, а в результате действия некоторых определенных законов природы. Такие структуры являлись лишь отображением действия законов. Однако в далекие времена древности человек еще не владел тем уровнем знаний, который доступен ему сейчас. Возможно, что попытки разгадать тайны законов создания регулярных построений родили особую область искусства — искусство орнамента. Возможно, что эта сфера проявления человеческой активности родилась независимо от наблюдательного материала. Так или иначе, сейчас интересно провести ряд сравнений между проявлениями древнейшей орнаментальной техники и теми "рисунками", которые создаются реальной траекторией частицы в некоторых определенных условиях.

§ 10.1. Двумерные покрытия в искусстве

Византийская мозаика представляет собой одно из древнейших достижений по созданию симметричных периодических замощений плоскости (рис. 10.1). Хотя условие периодичности могло возникнуть как некоторая независимая задача, практические цели архитектурного оформления требовали создания орнаментов именно такого типа. Одна или небольшое число плиток одной и той же формы должны были создавать основной элемент покрытия. Элемент орнамента должен был иметь возможность неограниченного продолжения, так чтобы в конце концов замостить любую часть плоскости.

Наиболее сильное развитие орнаментальной техники произошло в мусульманском искусстве. Элементарные ячейки орнаментов сильно усложнились (рис. 10.2–10.4). Требование периодичности вынуждало художников проявлять особую изощренность при создании рисунка. Даже присутствие пятиугольных (рис. 10.2*a*) и семиугольных элементов (рис. 10.3) не привело к отступлению от периодической структуры покрытия.

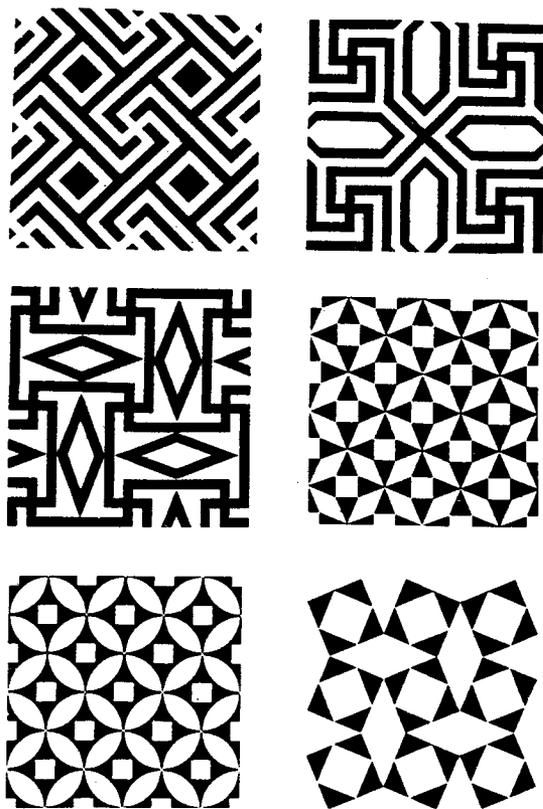


Рис. 10.1. Примеры византийской мозаики [1]

Сейчас не известны аперiodические мозаики квазикристаллического типа в Средней Азии, хотя существовало много различных способов построения правильных пятиугольников и звезд [2]. Один из них приведен на рис. 10.5.

Если обратиться только к геометрическим особенностям орнаментов, то в мавританском дворце в Альгамбре (Испания) содержится уникальное собрание различных видов покрытий. Именно здесь был обнаружен орнамент с симметрией 5-го порядка. Почему именно здесь художник решился (или захотел) отойти от периодической симметрии и как он к этому пришел — одна из загадок, решение которой заслуживает своего места в истории науки.

Примеры орнаментов с симметрией 5-го порядка приведены на рис. 10.6а, б, в. Рядом с ними (г) в той же технике для сравнения приведен орнамент с симметрией 4-го порядка. Рисунки показывают, что художники свободно владели техникой образования неперiodического пентагонального орнамента. По-видимому, им была известна решетка Амманна, которая и служила трафаретом для создания орнамента.

В 1977 г. Роберт Амманн открыл несколько новых аперiodических покрытий, описание которых появилось в литературе только в публикации

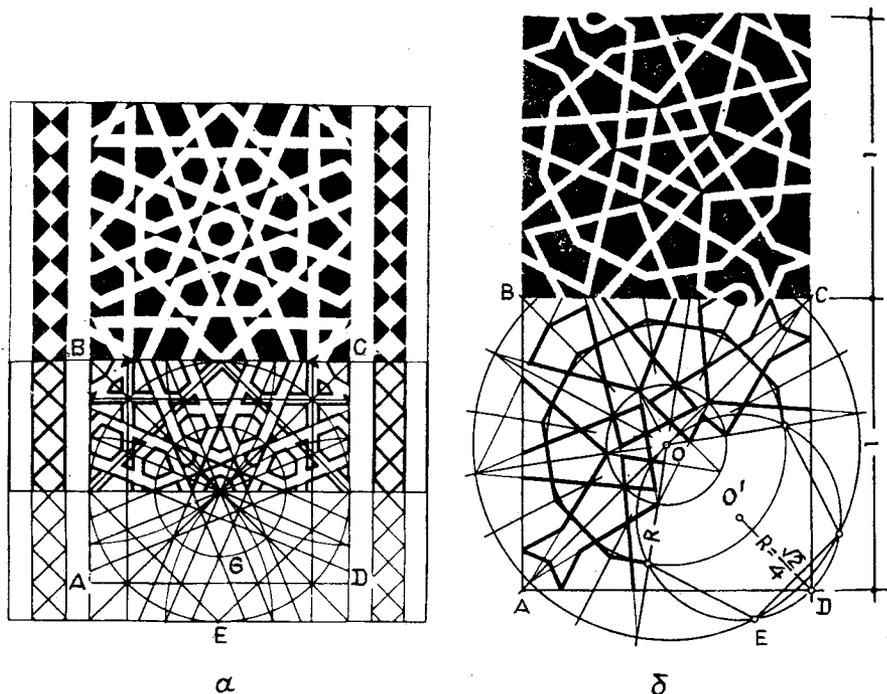


Рис. 10.2. Примеры двух плиток и способов их построения из Средней Азии (XII в.) [2]: α – Самаркандский музей, δ – Бухарский музей

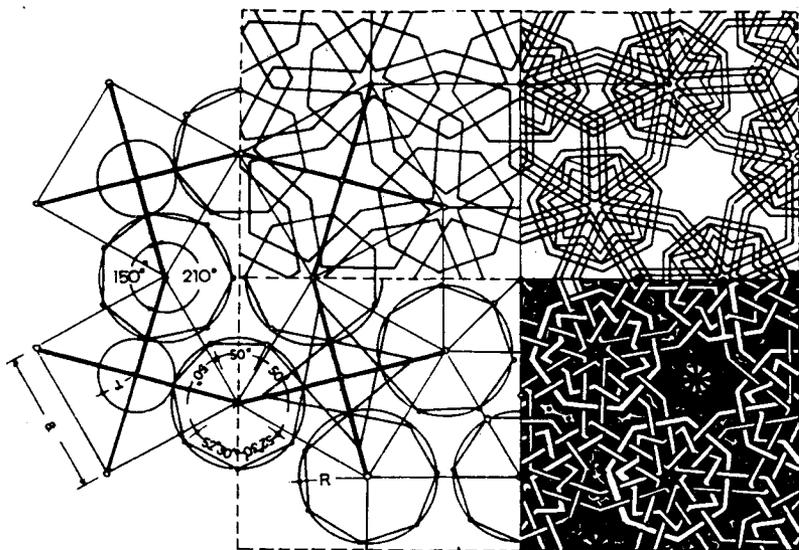
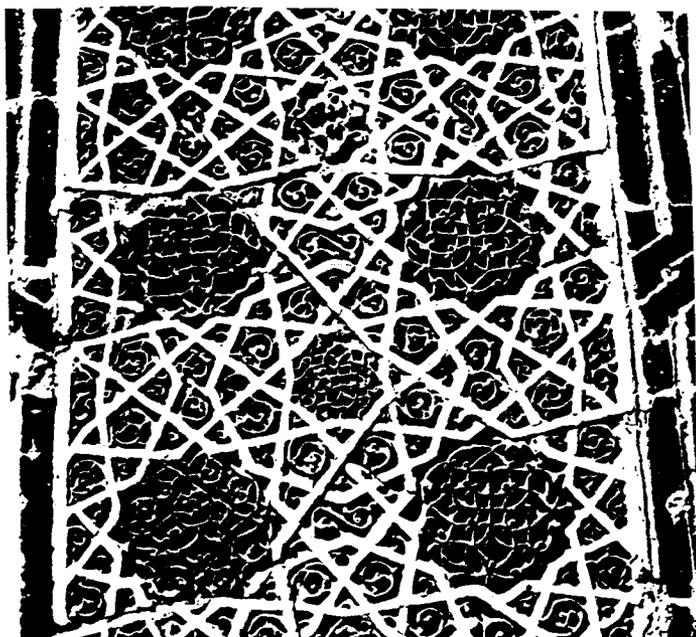


Рис. 10.3. Орнамент и способ его создания из мавзолея Ходжа Ахмада (Самарканд, Шан-и-Зинда, XIV в.) [2]



a



b

Рис. 10.4. Один из распространенных орнаментов в Средней Азии (мавзолей Шах-и-Зинда, Самарканд) [3]: *a* – ячейка орнамента, *b* – образование периодического покрытия с включением ячейки

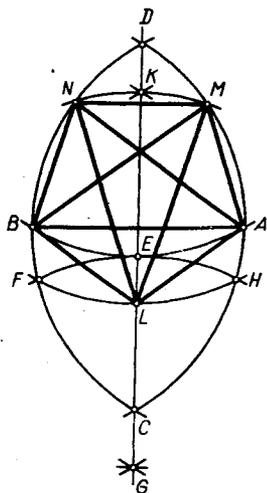


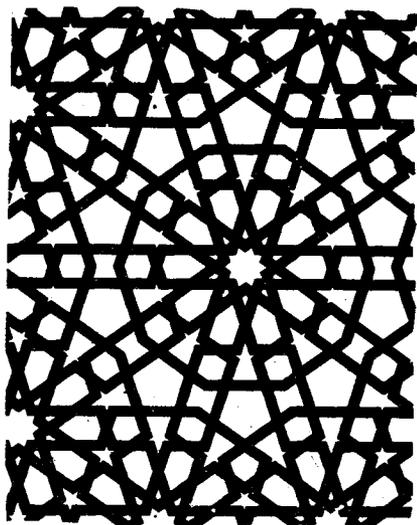
Рис. 10.5. Построение пятиугольника постоянным размером циркуля равным заданной диагонали пятиугольника (метод Абу Бакра ал-Халика ат-Такджира) [2]

[4]. Решетка Амманна представляет собой систему параллельных линий, пятикратно повернутую на углы $2\pi/5$, $4\pi/5$, ... Расстояния между линиями соответствуют числам Фибоначчи. Система этих линий отчетливо видна на рис. 10.6в (см. § 7.1).

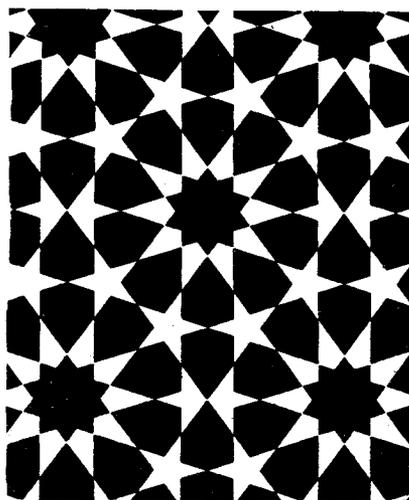
Так же, как и в орнаментах Средней Азии, рисунок создавался с помощью геометрических построений пятиугольника (рис. 10.7). В основе приведенной мозаики лежат всего три элемента (если не считать формы промежутков между ними). Теперь орнамент создается уже не с помощью одинаковых плит с одинаковым рисунком, а путем плотной упаковки

нескольких элементов определенной формы. Одно из важных достижений художников из Альгамбры состояло в экспериментальном доказательстве существования плотной упаковки (и далеко не единственным способом). Тем самым фантазия художника получила значительно большую свободу, чем он имел, создавая периодические орнаменты. В [5] проводится аналогия между созданием пентагонального паркета и музыкальной импровизацией на заданную тему. Эту аналогию можно развить значительно дальше, если включить дефекты в построение паркета.

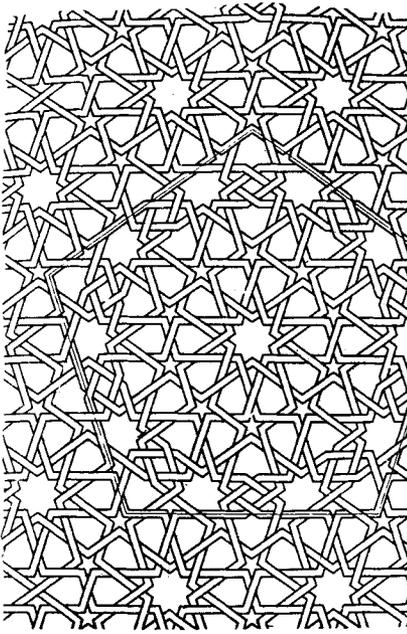
Интересно отметить, что Альбрехт Дюрер создал свой вариант построения правильного пятиугольника. Известны также его попытки замостить



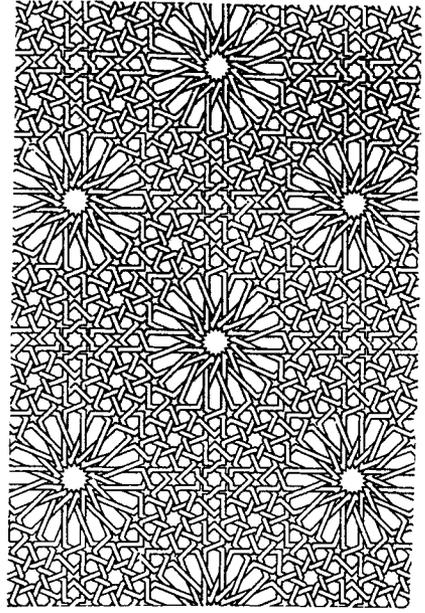
а



б



б



а

Рис. 10.6. Примеры непериодических орнаментов с симметрией 5-го порядка (а, б, в) и периодического орнамента с симметрией 4-го порядка (г) [1]

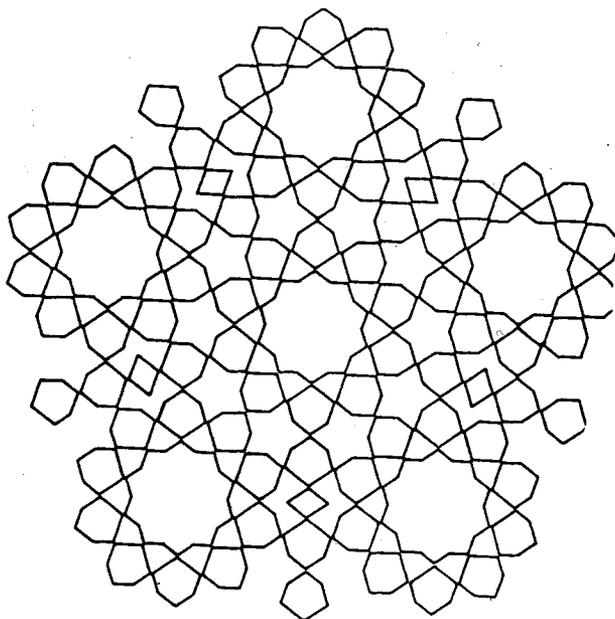
плоскость пятиугольниками и какими-либо еще элементами. Однако структуры типа решетки Амманна им не были найдены.

Материал, изложенный в гл. 6, 7, позволяет решить проблему покрытий с квазисимметрией универсальным образом, доведя ее до алгоритма. В основе такого решения лежит создание трафарета с помощью гамильтониана (6.48). Продемонстрируем это на простом примере. На рис. 10.8 приведен типичный декагональный элемент мусульманского орнамента и его "расшифровка" с помощью уже известного нам рельефа с симметрией 5-го порядка. Наложение рисунка на рельеф позволяет указать, какие линии привели художника к потере пентагональной симметрии и к вырождению орнамента в обычную периодическую структуру. Рис. 10.9 демонстрирует один из возможных путей получения орнамента с симметрией 5-го порядка, использующей тот же рельеф и сохраняющая в мотиве структуры тот же декагон.

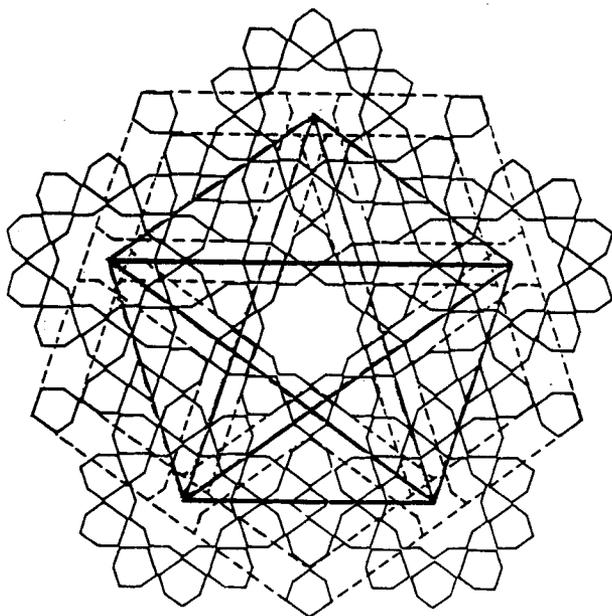
Аналогичная идея использования рельефа обсуждалась в § 7.1 (см. рис. 7.3) в связи с мозаикой Пенроуза. Использование рельефов, порождаемых гамильтонианами

$$H_q = \sum_{j=1}^q \cos(re_j),$$

где r — двумерный вектор, e_j — единичные симметрично расположен-

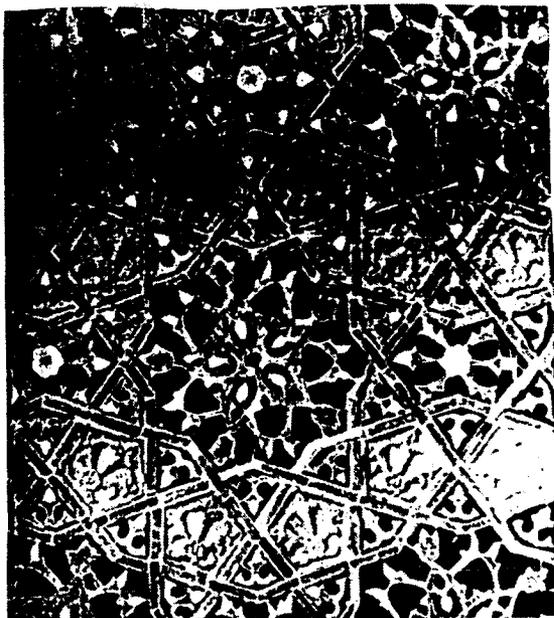


а

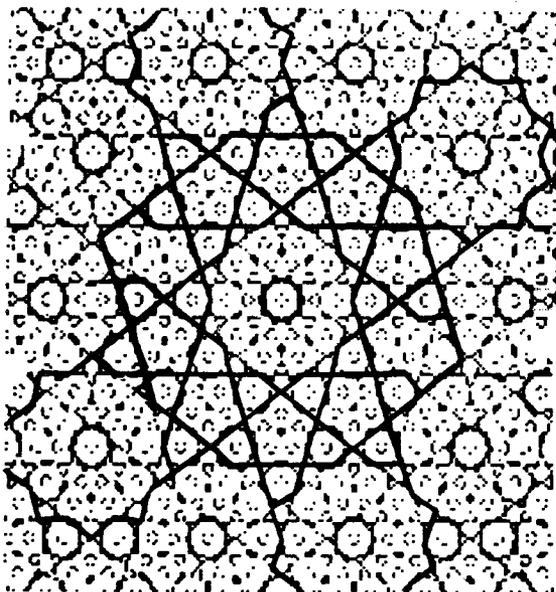


б

Рис. 10.7. Пример пентагонального покрытия (а) и его геометрическая расшифровка (б) [5]



а



б

Рис. 10.8. Пример типичного декагонального элемента мусульманской мозаики в Тбилиси (а) и его "расшифровка" с помощью рельефа с симметрией 5-го порядка (б) [6]

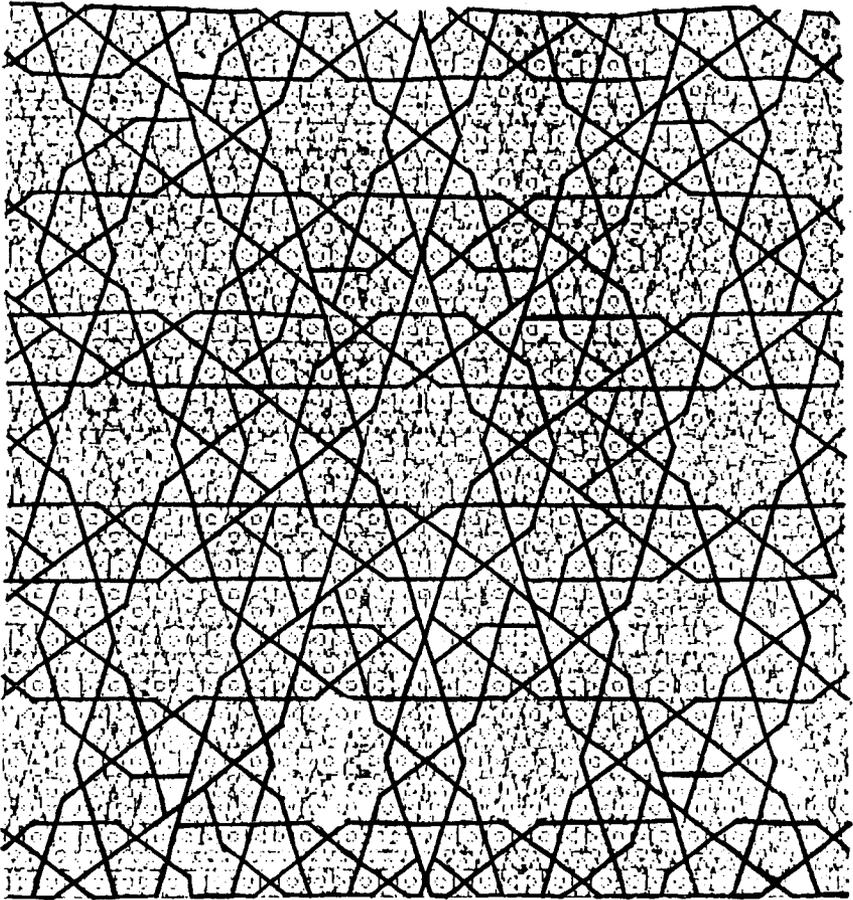


Рис. 10.9. Использование рельефа с симметрией 5-го порядка для получения орнамента с той же симметрией и с включением в него декагона из рис. 10.8а

ные векторы, создает неограниченные возможности для новых произведений орнаментальной графики. Однако еще более заманчивой картиной является возможность создания орнамента, прочерчиваемого траекторией частицы, совершающей случайные блуждания внутри стохастической паутины.

Связь искусства орнаментов с математической проблемой покрытий имеет обширную историю и литературу (см., в частности, [4, 7, 8]). Материал настоящей книги затрагивает эту связь лишь вскользь. Однако трудно было бы обойти искусство Мориса Эшера [9]. Существует множество аспектов, в которых его творчество вызывает исключительный интерес математиков, искусствоведов и дизайнеров. Об этом свидетельствуют, в частности, материалы конференции, посвященной его творчеству [10]. Многие из картин Мориса Эшера также использовали одну или несколько плиток

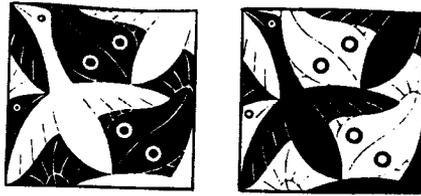


Рис. 10.10. Использование двух плиток для создания периодического орнамента в рисунке Мориса Эшера [11]

для создания порой очень сложных орнаментов, относящихся к так называемой цветной симметрии (см. например, рис. 10.10, заимствованный из [11]). С помощью того же приема Эшер пытался обнаружить переход из одной симметрии в другую. Наиболее сильное представление об этих поисках дает его картина "Метаморфозы 111" (рис. 10.11). В ней есть несколько мест, в которых делается попытка "сшить" симметрии третьего и шестого порядка с симметрией четвертого порядка. Однако природа способна решить проблему сшивки симметрий более естественным образом. Об этом свидетельствует, в частности, рис. 10.12. Он возник в двумерном течении (§ 8.2), в котором начальное условие для поля скоростей имело гексагональную симметрию, а поле внешней накачки – симметрию 5-го порядка. В результате возникла мозаика со сложной перестройкой структуры. Это лишь пример того, каким образом динамические задачи могут решить многие сложные проблемы теории покрытий. Отметим, что эти

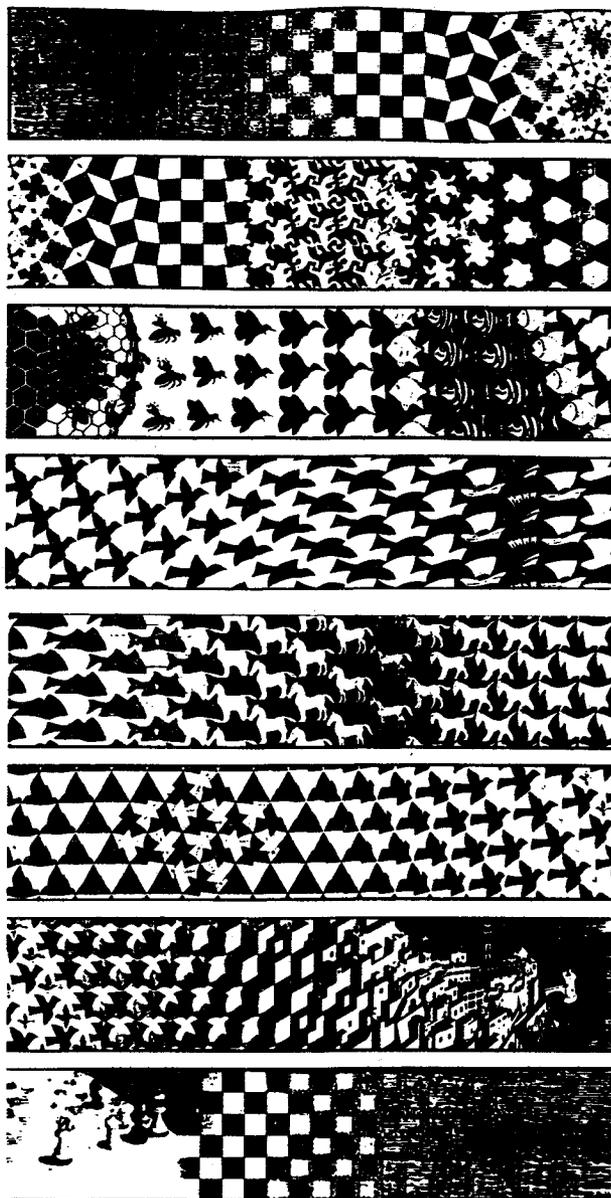


Рис. 10.11. Картина Мориса Эшера "Метаморфозы III" (1967/1968)

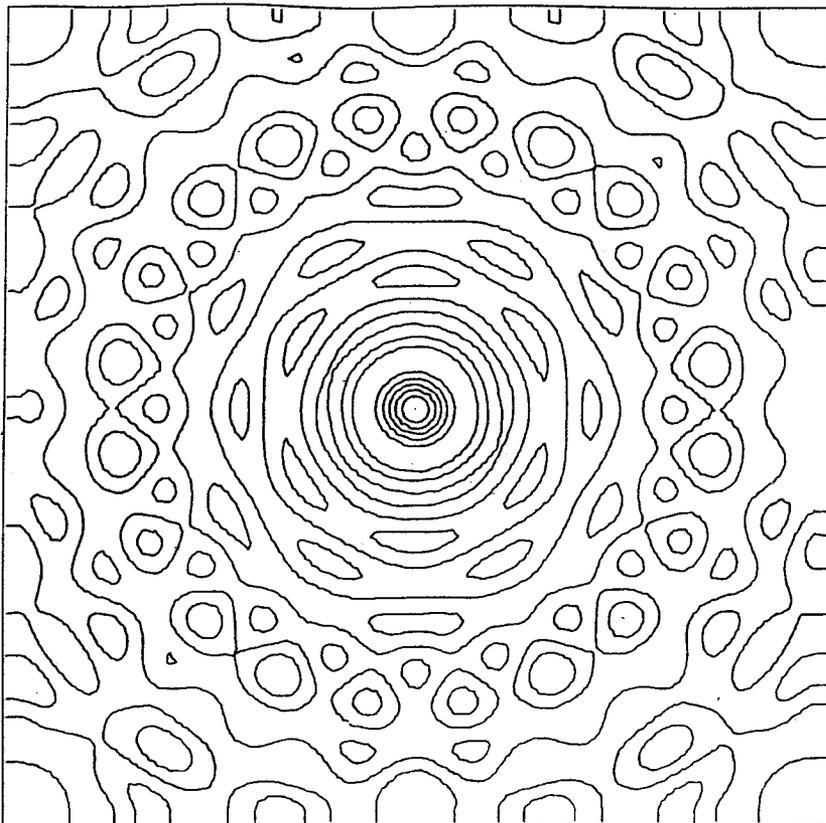


Рис. 10.12. Рельеф поля скоростей в двумерном течении, в котором начальные условия и внешнее силовое поле имеют разные симметрии (рисунок получен В.В. Белошапкинским)

возможности резко возрастают, если использовать не только устойчивые динамические структуры, но и метастабильные и квазистационарные динамические объекты.

§ 10.2. Филотаксис

Форма и симметрия кристаллов характерны для неживой материи. В кристаллах представлен наиболее примитивный тип организации – монотонная повторяемость, т.е. простая трансляция элементарной ячейки. Какова же степень сложности симметрии структуры материи, начиная с которой она проявляет признаки жизни?

Обсуждая строение гигантских молекул – генов, являющихся носителями наследственных признаков живой материи, Шредингер исключил периодические структуры, так как они содержат малый объем информации [13]. Он ввел понятие аperiodического кристалла. Это регулярная структура, в которой может быть записана значительно большая информация.

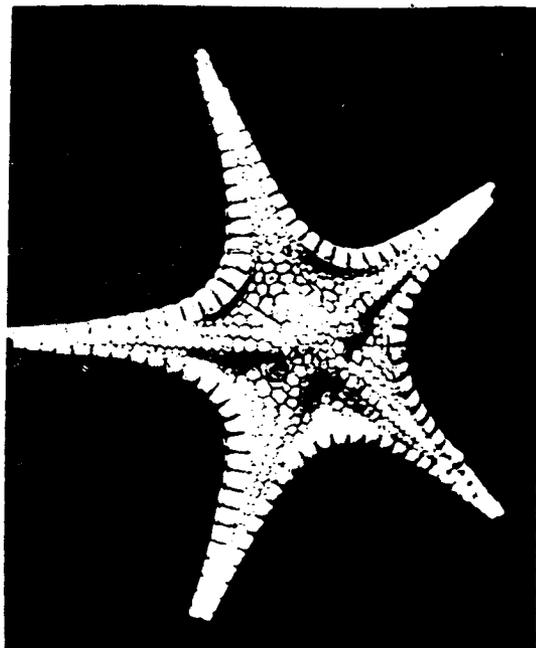


Рис. 10.13. Фотография морской звезды с симметрией пятого порядка [24]

Квазикристаллы представляют собой простейшую форму такого вида самоорганизации.

Особое место в аperiodической структурной организации играет симметрия 5-го порядка. Она широко распространена в биологических объектах. Например, наличие осей 5-го порядка используется палеонтологами для доказательства биологического, а не геологического происхождения ископаемых объектов. Согласно Белову [3] ось симметрии 5-го порядка является у мелких организмов своеобразным инструментом борьбы за существование, страховкой против окаменелости, против кристаллизации, первым шагом которой была бы "поимка" решеткой живого организма. Уже рентгенограммы очень простых организмов, находящихся на грани между живой и неживой материей, — вирусов говорят о высокой степени регулярности их структуры и о наличии осей симметрии 5-го порядка. На фотографиях, полученных с помощью электронного микроскопа, можно увидеть, что некоторые разновидности вирусов обладают формой, похожей на правильный многогранник — икосаэдр, а колонии вирусов образуют структуру с симметрией 5-го порядка [4]. Другим хорошо известным примером животных с ярко выраженной симметрией 5-го порядка являются морские звезды (рис. 10.13) и многие другие обитатели моря (рис. 10.14). У этих животных наряду с широким распространением пентагональной симметрии нередко можно наблюдать не только симметрию более высокого порядка, но также и сосуществование различных типов симметрии. На рис. 10.15 приведен взятый из атласа Геккеля [14] пример сосуществования симметрии 4-го и 5-го порядков. Другим примером природных объектов с квазисимметрией являются раковины моллюсков-аммонитов

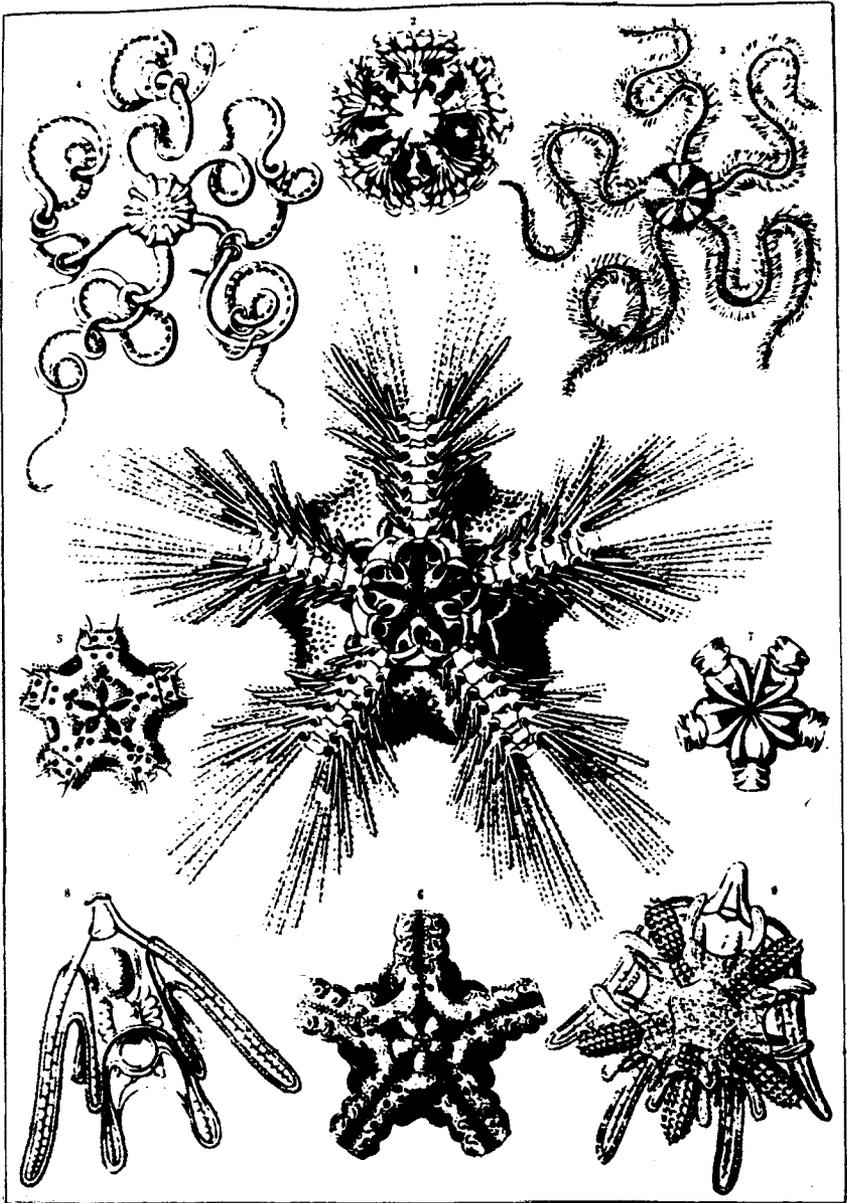


Рис. 10.14. Внешний вид иглокожих из класса офиуров (*Ophiodea*). Рисунок из атласа Геккеля [15]

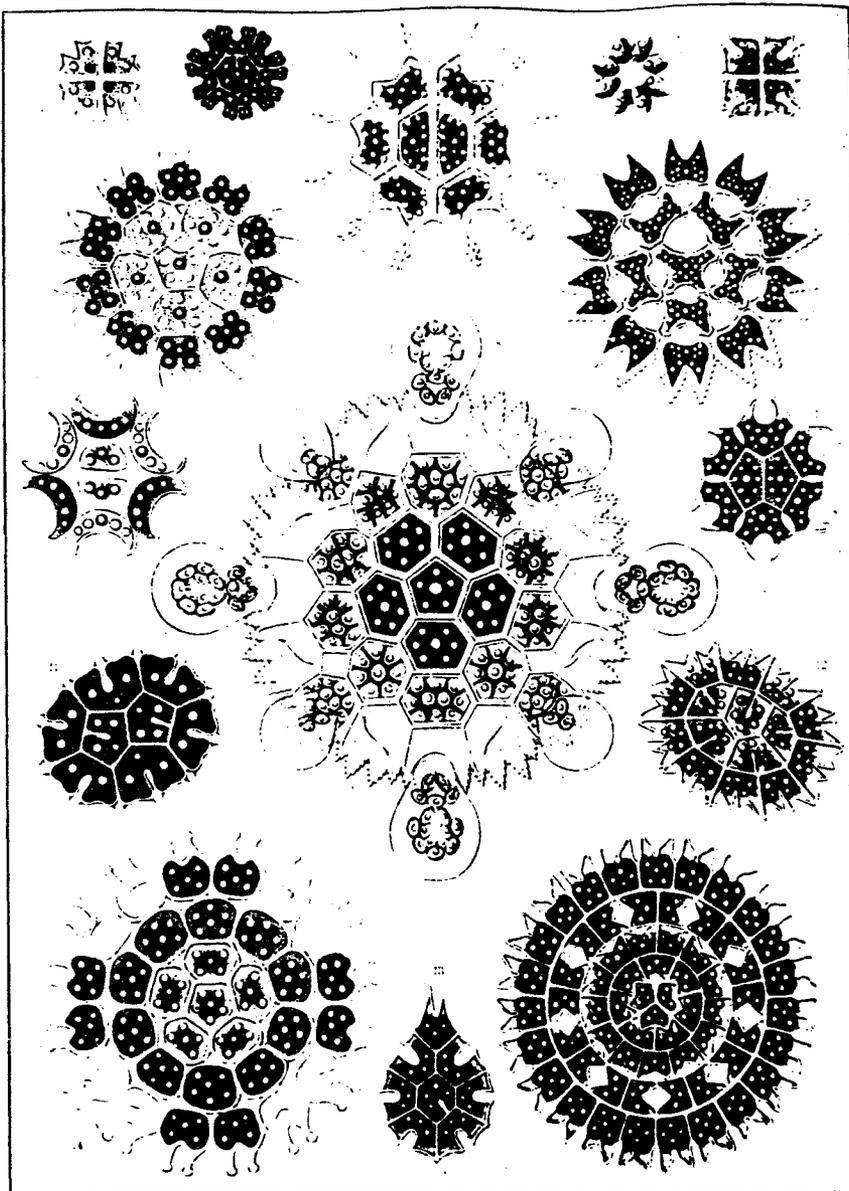


Рис. 10.15. Пример сосуществования симметрий четвертого и пятого порядков у *Melathalia* [15]



Рис. 10.16. Раковины аммонитов (*Ammonitida*) – пример самоподобных логарифмических спиралей [15]

(рис. 10.16), форма которых фактически оказывается очень близкой к форме, встречающейся у растений. Здесь, однако, необходимо сделать некоторые пояснения.

Структурное упорядочение, проявляющееся у растений в расположении цветков, зерен, чешуек, листьев и т.п. (например, в подсолнухе, маргаритках, шишках и др.), носит название филотаксиса [8]. Сравнительно давно ботаники начали обсуждение этого явления [16]. Объекты филотаксиса, как правило, имеют структуру цилиндрического или конического вида, обладающую некоторыми свойствами квазикристалла с симметрией 5-го порядка [17].

Наблюдения показывают [18, 19], что зерна или чешуйки у еловой шишки или ананаса образуют некоторое квазирегулярное покрытие поверхности, в котором соседние ячейки организуются в хорошо различимые спирали, называемые парастихами. Если отдельная ячейка по форме является шестиугольной (как у астры или ананаса), то она принадлежит трем типам парастихов. Если же ячейка ромбическая (как у шишек или подсолнуха), то имеется два типа парастихов, соответствующих вращению либо по часовой стрелке, либо против (рис. 10.17). В большинстве случаев у растений числа парастихов каждого типа являются последовательными числами Фибоначчи, а их отношение — подходящей дробью для золотого сечения [20, 21] (рис. 10.18).

Если разрезать поверхность, например, ананаса и развернуть ее на плоскость, то получится полоска, заключенная между двумя параллельными

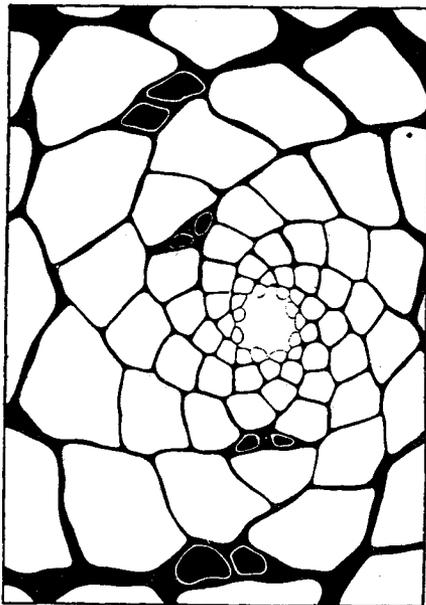
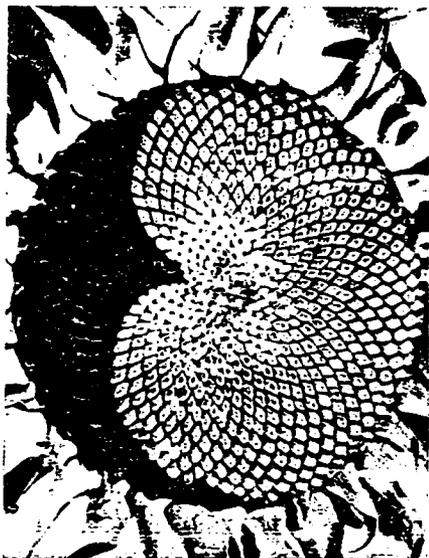


Рис. 10.17. Головка подсолнечника с удаленной частью семечек. Числа парастихов (34 и 55) являются числами Фибоначчи [19]

Рис. 10.18. Логарифмические спирали на срезе апекса *agaucaria excelsa* [21]. Числа парастихов 8 и 13

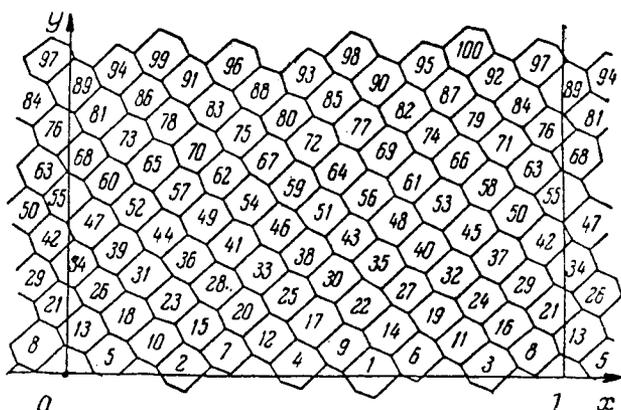


Рис. 10.19. Развертка поверхности ананаса на плоскости [22]

прямыми, которые образовались вдоль вертикального разреза. На рис. 10.19 в качестве двух таких прямых взяты $x = 0$ и $x = 1$, а шестиугольные ячейки занумерованы последовательно в порядке возрастания ординат их центров [22]. Начало координат является центром нулевой ячейки, а центр ячейки с индексом "1" имеет координаты (τ, h) , где h произвольно, а число

$$\tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \quad (10.1)$$

является золотым сечением. Центр n -й ячейки имеет координаты [22]

$$y = nh, \quad x = n/\tau - [n/\tau], \quad (10.2)$$

т.е. задается таким же алгоритмом квазикристаллического типа, как и последовательность прямых в решетке Амманна.

Другим проявлением филотаксиса является то, что форма парастихов может быть близка к форме логарифмической спирали (см. рис. 10.17), т.е. кривой, обладающей свойствами самоподобия. Свойство самоподобия является чрезвычайно важным, и оно тесно связано со свойствами инфляции и дефляции у объектов с квазикристаллической симметрией. Так, некоторыми простыми разбиениями или соединениями ромбов в паркете Пенроуза можно превратить его точно в такой же паркет, состоящий, однако, уже из ромбов большего размера (инфляции) или ромбов меньшего размера (дефляции) [23].

Свойство самоподобного преобразования структуры должно быть заложено в растениях генетическим кодом, однако и сами структуры должны обладать свойством самоподобия. Наличие свойства самоподобия приводит нас к мысли, что некоторые инварианты, которые мы наблюдаем в макроскопическом масштабе, например число вращения у объектов филотаксиса, равное золотому сечению, должны сохраняться и в микроскопическом масштабе на молекулярном уровне.

КОММЕНТАРИИ

1.1. Современное изложение гамильтоновского формализма с приложениями ко многим задачам физики имеется в книгах [1–3]. Ряд обобщений гамильтоновского формализма был инициирован развитием методов точного интегрирования нелинейных волновых уравнений, с одной стороны, и анализом неинтегрируемых динамических задач (которых оказалось большинство), с другой стороны [4, 5].

1.2. Здесь, конечно, трудно обсуждать сравнительные качества гамильтоновских и диссипативных систем. Многие различия и их физическая интерпретация приведены в [6].

1.3. Мы здесь не будем также касаться недиссипативных и негамильтоновских систем. Например, так называемые обратимые системы [7] могут иметь многие свойства, аналогичные гамильтоновским системам.

1.4. Подробное решение можно найти в [6]. Там же содержится вывод всех формул, приводимых здесь в окончательной форме.

1.5. Точная формулировка условий теоремы и ее доказательство принадлежат Арнольду и приведены в [2].

2.1. Простое изложение различных вопросов устойчивости и хаоса и их приложений к разнообразным физическим задачам содержится в книге [1]. Специальные проблемы теории хаоса (динамической стохастичности) можно найти в книгах [2, 3] и в [4].

2.2. Подробнее о нелинейном резонансе и о его различных приложениях см. в [1, 4].

2.3. Изложение теории КАМ можно найти в [5, 6]. Там же содержатся многие следствия из этой теории. Теорема Колмогорова о сохранении инвариантных торов была сформулирована в 1954 г. Доказательство теоремы Колмогорова было дано Арнольдом. Аналогичная теорема была независимо доказана Мозером при несколько отличающихся условиях.

2.4. Более подробное изложение этого вопроса можно найти в книге [1]. Причины возникающих трудностей связаны с тем, что сложно доказать свойство перемешивания в форме экспоненциального закона (2.49) для $t \rightarrow \infty$. Реальные системы имеют, как правило, не один интервал (а возможно, и бесконечное число интервалов) с разными асимптотиками распада корреляций. Точно так же трудно установить свойство локальной неустойчивости в виде экспоненциального закона (2.37) с достаточно равномерной по времени оценкой величины h_0 . Существуют, однако, доста-

точно удобные модели, для которых можно найти h_0 и τ_c и проверить (2.50). К ним относятся, например, системы Аносова и некоторые виды билиардов [2].

3.1. История обнаружения стохастического слоя следующая. В начале 60-х годов физики, исследующие высокотемпературную плазму, активно изучали строение магнитных поверхностей различных конфигураций магнитных ловушек. Устойчивость магнитных поверхностей в тороидальных системах рассматривалась как необходимое условие, предъявляемое к установкам. В противном случае замагниченные частицы могли бы уходить из ловушек вдоль силовых линий магнитного поля, не лежащих на инвариантных магнитных поверхностях. Известно было еще со времен работ Пуанкаре, что вблизи сепаратрис движение неустойчиво и траектории ведут себя необычайно сложно. Сложность была связана с расщеплением сепаратрис под действием возмущения. Оценка области расщепления сепаратрис была сделана в [3] также в связи с задачей об устойчивости магнитных поверхностей. В статье [4] поведение магнитных поверхностей было проанализировано как задача о нелинейных резонансах и их перекрытии в эквивалентной динамической системе, что позволило ввести в эту проблему понятие хаоса магнитных силовых линий. В последующей работе [1] уже конкретно исследована область вблизи сепаратрисы. Роль нестационарного возмущения играло периодическое вдоль оси тора возмущение. В этой же работе был проведен необходимый численный анализ, который показал существование локальной неустойчивости и пространственной диффузии магнитных силовых линий. Дальнейшее обобщение этих результатов в [2] показало универсальность и неустрашимость стохастического слоя.

Во многих работах часто происходит смешение понятий расщепления сепаратрисы и образования стохастического слоя. В действительности эти понятия не эквивалентны, и их различие является тонким вопросом. В работе [5], например обращается внимание на то, что расщепление сепаратрис может происходить даже в интегрируемом случае (т.е. в отсутствие стохастического слоя). Там же приведен обратный пример, в котором стохастический слой существует в окрестности не пересекающихся сепаратрис.

3.2. Если $\nu \lesssim \omega_0$, то происходит перекрытие резонансов. В этом случае, почти вся область внутри сепаратрисных петель становится областью стохастического движения. Это является причиной того, что условие $\nu \lesssim \omega_0$ рассматривается как критерий возникновения сильной стохастичности (критерий перекрытия резонансов Чирикова [8]). При $\nu \lesssim \omega_0$ модуляции частоты маятника в уравнении (3.45) становится адиабатической. Тем не менее в этом случае также почти вся область внутри сепаратрисной петли есть область хаоса. Однако теперь времена перемешивания существенно больше [6, 7].

4.1. К таким моделям могут быть отнесены системы Аносова [1] билиарды Синая [2] и др. Простое описание этих моделей можно найти в [3].

4.2. Многие аспекты этих трудностей описаны в [3]. Один из интересных вопросов, возникающих в связи с возможностью сосуществования области хаоса и области и устойчивости: как устроена граница хаоса.

4.3. О фракталах и фрактальных объектах и их распространении в природе см. книгу Мандельброта [4]. Различные проявления фрактальности хаоса обсуждаются в [5, 6]. Доступное изложение связи фракталов с хаосом см. в книге [3]. Хаос на рис. 4.1 относится к категории так называемых "жирных фракталов" [7].

4.4. Значительно ранее существовали приближенные качественные методы определения K_c . В первую очередь следует назвать метод перекрытия резонансов Чирикова [9, 10]. Позднее появилась оценка K_c из условия локальной неустойчивости фаз [11, 12]. Оба эти метода давали $K_c \sim 1$. В дальнейшем появились попытки уточнения границы образования стохастического моря [10, 13]. Все они основывались на использовании некоторой (и довольно сильной!) экстраполяции результатов из области малых значений K в область значений $K \sim 1$.

4.5. В связи с отсутствием строгого метода определения границы глобального хаоса в форме (4.11) или (4.12) мы не можем точно указать все необходимые условия получения этих формул. Поэтому нельзя априори исключить иных возможностей даже в случаях, когда КАМ-теория применима.

4.6. Исследование транспортных процессов с учетом кантор-торов производилось в работах [21, 22]. Можно сказать, что наличие их не только представляет значительный интерес для приложений в физике плазмы, но и создает трудности в строгой теории хаоса реальных систем. Дело в том, что всегда находятся барьеры, вдоль которых траектория движется аномально долго. В функции распределения таких временных интервалов задержки есть, по-видимому, сколь угодно большие интервалы задержек. Это означает, что в траектории, которая должна быть случайной, содержатся регулярные вставки, в которых система проводит очень много времени. Это же свойство движения приводит к слабому (степенному) затуханию корреляторов [23].

4.7. При движении частиц в случайных полях скорость частиц может в среднем возрастать. Такой способ ускорения был предложен Ферми для объяснения происхождения быстрых космических частиц [24]. Позднее Улам предложил для анализа простую модель, в которой частица движется между двумя стенками, одна из которых периодически колеблется [25]. Численный и аналитический анализы модели Улама, проведенные в работе [26], показали, что в этой модели существует хаотическая динамика и стохастическое ускорение частиц. Впоследствии эти исследования были продолжены во многих работах (см. обзор результатов в [3, 10, 12, 27]). Сейчас существуют и другие, более реалистические модели ускорения частиц, возникшие в физике плазмы [28–30].

4.8. Существует обширная литература, посвященная явлению перемежаемости. Оно оказывается связанным со свойством мультифрактальности процесса, т.е. с неоднородным распределением сингулярных или фрактальных свойств в пространстве и во времени. Мы здесь не будем касаться этого вопроса, так как его приложения очень разнообразны и нуждаются в ином вспомогательном материале. Приведем лишь ссылки на наиболее крупные обзоры — [33–35].

4.9. Сильные электрические поля релятивистских ($\omega/k \sim c$) потенциальных волн в плазме могут быть использованы для ускорения частиц до

сверхвысоких энергий [37, 38]. Одной из хорошо исследованных к настоящему времени схем ускорения является так называемый beat-wave-ускоритель [39]. Частица ускоряется в нем плазменной волной, возбуждаемой с помощью двух коллинеарных лазерных пучков в неоднородной плазме. В случае, когда излучение одного из лазерных пучков является широкополосным, возбуждаемое в плазме электростатическое поле $E(x, t)$ также будет иметь большую спектральную ширину.

Приводимые в этом параграфе результаты следуют работе [40].

5.1. Имеются несколько примеров диффузии Арнольда в задачах физики плазмы и динамики частиц в ускорителях. Обзор их см. в [2–4]. Оценку толщины паутины ($\sim \exp(-\text{const}/\sqrt{\epsilon})$) см. в [5]. Скорость диффузии оценивалась в [6]. Диффузия на паутине имеет своеобразную специфику, которая будет обсуждаться несколько позднее.

5.2. Уравнение (5.19) описывает взаимодействие волна – частица в постоянном магнитном поле. Эта задача имеет многочисленные приложения в физике плазмы (см. обзоры [3, 12]). Случай движения волны под углом к магнитному полю был впервые рассмотрен в [13]. Хаотизация при перпендикулярном движении волны была обнаружена в [14–16]. Эта задача оказалась очень богатой различными физическими ситуациями, и до сих пор в ней остаются не исследованные совсем или достаточно полно случаи. См. также анализ уравнения (5.19) в связи с парадоксом исчезновения затухания Ландау [17–20].

5.3. Решения (5.49), (5.52) и т.д. для движения внутри квадратной ячейки были получены в работе [16]. Впоследствии они использовались в работах [14, 15]. Асимптотика больших $k\rho$ значений позволяет сделать вывод о локальных свойствах фазового портрета системы (5.14).

5.4. Эта задача исследовалась в работах [10, 11].

6.1. Подробное исследование механизма ускорения частиц на фронте волны исследовалось в связи с многочисленными приложениями в физике плазмы [3].

6.2. В работах [5–7] исследовались бифуркации удвоения в отображениях, сохраняющих фазовый объем. Численный анализ привел к определению константы $\delta = 8,72109720$. Можно ожидать, что это значение является универсальным для гамилтониовских систем.

6.3. Фракталы представляют собой множества, организованные слишком сложно, для того чтобы их можно было назвать просто линиями, плоскостями т.д. Подробно и доступно материал о них изложен в книге Мандельброта [8]. Представление о фрактале Коха можно получить следующим образом. Рассмотрим отрезок пилы с некоторым числом зубцов (например, тремя). Сторону каждого зубца превратим снова в пилу, но уже меньшего размера. Продолжим этот процесс, превращая все время стороны уменьшающихся зубцов в пилы меньших размеров. Если этот процесс на каком-то шаге прекратить, то мы получим зазубренную кривую с конечным числом зубцов. Однако, если процесс наращивания зубцов продолжать до бесконечности, то образовавшаяся сложная кривая и будет примером фрактала Коха.

6.4. Ускорение релятивистских частиц в магнитном поле вследствие существования паутины в нерелятивистском пределе имеет многочисленные приложения. Некоторые из них отражены в работах [14, 15].

6.5. Ограничение паутины может происходить не только вследствие нелинейности невозмущенного движения, но и в случае, когда возмущение содержит конечное число гармоник [16].

7.1. Знаменитые работы Иоганна Кеплера о форме снежинок (1611 г.) [1] и "Гармония мира" (1619 г.) [2] послужили источниками многих идей для проникновения в геометрические тайны строения окружающего нас мира. Анализируя возможные причины, по которым снежинки имеют шестиугольную форму, а зерна граната не шары, а многогранники, Кеплер искал те силы, которые должны были привести именно к наблюдаемым структурам. Точно так же он пытался объяснить относительные размеры орбит известных тогда планет с помощью геометрических построений, основанных на использовании правильных платоновых тел. Идея зависимости геометрических форм объектов от вида динамических законов, в которых участвуют эти объекты, впоследствии широко обсуждалась Германом Вейлем [3].

7.2. Существует уникальная книга [4], в которой собрано и классифицировано огромное число различных покрытий плоскости. В книге изложены также современные результаты из теории двумерных покрытий. Исследование геометрических свойств мозаик можно найти также в книгах [5–8].

7.3. Пенроуз опубликовал свои варианты пентагональных покрытий в 1974 г. [11]. Однако серьезное исследование их началось после статьи Гарднера [12], которая привлекла внимание широких научных кругов не только к работе Пенроуза, но и вообще к проблеме симметрии 5-го порядка. Сразу же была сделана серьезная попытка использовать паркет Пенроуза как возможную модель кристалла с симметрией 5-го порядка [13]. Впоследствии планомерные поиски привели к открытию квазикристалла, имеющего поворотную симметрию 5-го порядка при отсутствии трансляционной симметрии [14]. Появилось огромное число работ, посвященных теоретическому и экспериментальному изучению структур и кристаллов с аномальными симметриями (квазикристаллов) [15–17]. Значительное внимание геометрии покрытий Пенроуза уделено в книге [4]. И хотя вопрос о реальном существовании квазикристаллов пока не совсем ясен, тем не менее квазикристаллические покрытия и симметрии реально существуют в динамических системах (см. обзор [21]).

7.4. В основе техники проектирования лежит метод, предложенный в [22] и развитый далее во многих работах [23–28, 16, 17].

7.5. Связь генератора \hat{M}_5 с марковскими разбиениями плоскости была отмечена В.И. Арнольдом [29].

7.6. Строго говоря, граница гамильтоновского хаоса хорошо не исследована. Динамику в ее окрестности и свойства фазового портрета вблизи границы еще предстоит понять. Сложность траекторий системы вблизи границы определяется существованием большого числа маленьких островков устойчивости, в которые стохастическая траектория не может попасть. Она их обходит, и результат такого обхода приводит к появлению нетривиальной ситуации.

7.7. Различные идеи декорирования можно найти в монографии [4]. Обсуждение некоторых частных вопросов имеется в обзорах [21, 30].

7.8. Подобно тому, как золотое сечение τ_0 является решением квадратного уравнения, которому удовлетворяет величина $\cos(2\pi/5)$, так и числа τ_1, τ_2 являются решениями кубического уравнения для $\cos(2\pi/7)$. Эти числа разлагаются в ветвящиеся целные дроби.

7.9. Фундаментальный анализ понятия локального изоморфизма имеется в [4]. См. также [17, 32].

7.10. Картина фурье-спектра покрытия Пенроуза появилась в работе [34] до того, как аналогичная картина была получена в экспериментах [14]. Сравнение фурье-спектров структур, образованных гамильтонианом H_5 , с экспериментальными проводилось в [35]. Все эти данные позволяют считать, что фурье-спектр покрытия плоскости достаточно хорошо передает симметричные свойства покрытия, хотя и не позволяет, конечно однозначно восстановить структуру.

7.11. В действительности особые траектории есть и в случае сильного хаоса. С ними могут быть связаны многие интересные геометрические свойства динамических систем, с одной стороны, и некоторые проблемы теории чисел, с другой стороны [37, 38].

7.12. Аналогичное парадоксальное совмещение свойств упорядоченных и неупорядоченных структур проявляется в электронных спектрах двумерных моделей с пентагональной симметрией [39, 40].

8.1. Сравнительно недавно исследования возникновения структур в сплошной среде достигли необычайно высокого уровня. К типичным объектам исследования относятся термоконвекция, электродинамическая конвекция, перемешивание вследствие неустойчивости Рэлея — Тейлора и др. Возникающие структуры имеют очень четкую визуализацию, хорошую (правильную) геометрию. Экспериментальные условия позволяют изучать их возбуждение, эволюцию и взаимодействие. Укажем на несколько сборников, содержащих обширные материалы по этим вопросам [7, 8].

8.2. Большое число примеров двумерных стационарных вихревых течений неограниченной жидкости приведено в [3, 11]. С помощью метода разделения переменных в [12] найден трехпараметрический класс решений уравнения (8.10) с $f(\Psi) = \Psi \ln \Psi + a\Psi$ и $f(\Psi) = \Psi^b$, где a и b — действительные числа. В работе [13] рассматривалось также представление завихренности в виде $f(\Psi) = \sin \Psi$, $f(\Psi) = \text{sh } \Psi$ и $f(\Psi) = ae^{-2\Psi} - e^\Psi$.

8.3. Гидродинамические течения типа (8.12), (8.14) начали обсуждаться в связи с разными задачами гидродинамики сравнительно недавно [15–20]. По-видимому, с ростом экспериментальных возможностей внимание к структурам квазикристаллического типа будет усиливаться, так как их возникновение может происходить в результате последовательных бифуркаций при переходе от ламинарного течения к турбулентному.

8.4. Задача исследования устойчивости ламинарного течения (8.27) была поставлена А.Н. Колмогоровым на руководимом им семинаре [22]. Линейная теория устойчивости этого течения была построена в [21]. В работе [23] доказано существование при $\text{Re} > \text{Re}_c$ вторичных стационарных течений и их устойчивость относительно периодических возмущений с периодом основного течения. Однако в [24–26] было доказано, что все вторичные течения с трансляционной симметрией неустойчивы относительно возмущений с периодом, несоизмеримым с периодом основного течения. Таким образом, теоретический вывод заключался в том, что в закры-

тической области при $Re > Re_c$ пространственно-периодические вторичные течения неустойчивы. Однако эксперименты [27] обнаружили вторичные стационарные структуры в виде регулярной решетки вихрей, расположенных в шахматном порядке и изменяющих свою форму с увеличением числа Рейнольдса. Разгадка парадокса связана с трением жидкости о дно канала. Соответствующая теория, позволившая количественно описать экспериментальные результаты, была построена в [27, 28].

9.1. Существует полная аналогия между использованием представления о линиях тока и представлением о магнитных поверхностях. Магнитные поверхности представляют собой инвариантные структуры в пространстве, на которых располагается семейство силовых линий магнитного поля. Задача о существовании магнитных поверхностей эквивалентна задаче о существовании инвариантных торов динамической системы. Разрушение магнитных поверхностей проявляется в хаосе магнитных силовых линий, хотя соответствующая пространственная конфигурация магнитного поля является регулярной. Гамильтоновский формализм для задачи о магнитных поверхностях был применен в работах [1, 2]. Дальнейшее развитие этого направления см. в [3, 4].

9.2. Исследование стохастической динамики пассивной скалярной примеси (адвекции) в нестационарном двумерном потоке было проведено в [8]. В представлении Лангранжа задача сводится к изучению стохастического поведения решений неавтономной гамильтоновской системы. Экспериментальному исследованию перемешивания пассивной примеси в жидкости, находящейся между двумя некоаксиально вращающимися цилиндрами, посвящены работы [9, 10].

9.3. Численное исследование поведения решений уравнения индукции (9.11), описывающего эволюцию магнитного поля в стационарном потоке проводящей жидкости, было начато работой [15] и затем продолжено работами [16, 17]. Для исследований было выбрано поле скоростей ABC-течения с коэффициентами $A = B = C = 1$. В [15] было обнаружено, что динамо-эффект имеет место для магнитного числа Рейнольдса в области $9 < R_m < 17,5$. В [17] численные расчеты удалось продвинуть до $R_m = 450$, и была найдена вторая область существования гидромагнитного динамо $R_m > 27$. В [18] показано, что возбуждаемое таким образом магнитное поле имеет тенденцию к концентрации на фрактале.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К ГЛАВЕ 1

1. *Тер-Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. — М.: Наука, 1974. — 223 с.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 432 с.
3. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979. — 760 с.
4. *Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.* Интегрируемые системы. 1. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. Т. 4. — М.: ВИНТИ АН СССР. Итоги науки и техники, 1985. — С. 179–284.
5. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. Т. 3. — М.: ВИНТИ АН СССР. Итоги науки и техники, 1985. — С. 5–304.
6. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1988.
7. *Arnold V.I., Sevryuk M.V.* // Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics / Ed. R.Z. Sagdeev. — Moscow: Mir, 1986. — P. 31.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений: — М.: Физматгиз, 1962. — 1100 с.

К ГЛАВЕ 2

1. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1988.
2. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984. — 271 с.
3. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
4. *Chirikov V.V.* // Phys. Rep. — 1979. — V. 52. — P. 263.
5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 432 с.
6. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. Т. 3. — М.: ВИНТИ АН СССР. Итоги науки и техники, 1985. — С. 5–304.
7. *Арнольд В.И.* // ДАН СССР. — 1964. — Т. 156. — С. 9.
8. *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. — 1958. — Т. 119. — С. 851; 1959. — Т. 124. — С. 754.
9. *Синай Я.Г.* // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124. — С. 758; 1959. — Т. 125. — С. 1200.

К ГЛАВЕ 3

1. *Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* // Nuclear Fusion. — 1967. — V. 7. — P. 253.
2. *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* // ЖЭТФ. — 1968. — Т. 54. — С. 1590.
3. *Мельников В.К.* // ДАН СССР. — 1963. — Т. 148. — С. 1257.
4. *Rosenbluth M.N., Sagdeev R.Z., Taylor J.B., Zaslavsky G.M.* // Nuclear Fusion. — 1966. — V. 6. — P. 297.

5. Зиглин С.Л. // Тр. Моск. мат. общ. – 1980. – Т. 41. – С. 287.
6. Menyuk C.R. // Phys. Rev. – 1985. – V. A31. – P. 3282.
7. Cary J.R., Escande D.F., Tennyson J.L. // Phys. Rev. – 1986. – V. A34. – P. 4256.
8. Чириков В.В. // Phys. Rep. – 1979. – V. 59. – P. 263.
9. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. – М.: Наука, 1988.
10. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1974. – 271 с.
11. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
12. Улам С.М. Нерешенные математические задачи. – М.: Наука, 1964.
13. Wisdom J., Peale S.J., Magnard J. // Icarus. – 1984. – V. 58. – P. 137.
14. Wisdom J. // Icarus. – 1987. – V. 72. – P. 241.
15. Wisdom J. // Astron. J. – 1987. – V. 94. – P. 1350.

К ГЛАВЕ 4

1. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1967. – Т. 90.
2. Силай Я.Г. // ДАН СССР. – 1963. – Т. 153. – С. 1261.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. – М.: Наука, 1988.
4. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco: Freeman, 1982.
5. Dimensions and Entropies in Chaotic Systems / Ed. G. Mayer-Kress. – Berlin: Springer, 1986.
6. Pietronero L., Tosati I. Fractal in Physics. – Amsterdam: North-Holland, 1986.
7. Umberger D.K., Farmer J.D. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 55. – P. 661.
8. Green J.M. // J. Math. Phys. – 1979. – V. 20. – P. 1183.
9. Чириков Б.В. // Атомная энергия. – 1959. – Т. 6. – С. 630.
10. Chirkov B.V. // Phys. Rep. – 1979. – V. 52. – P. 263.
11. Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M. // Nucl. Fusion. – 1967. – V. 7. – P. 253.
12. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1984.
13. Escande D.F. // Phys. Reports. – 1985. – V. 121. – P. 163.
14. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
15. Percival I.C. // J. Phys. A. – 1974. – V. 7. – P. 794.
16. Percival I.C. // J. Phys. A. – 1979. – V. 12. – P. L57.
17. Percival I.C. // Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction / Eds. Month, Herrera (Amer. Inst. of Physics, Conf. Proceed., N.Y.) – 1979. – V. 57. – P. 302.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1973.
19. Aubry S. // Physica. – 1983. – V. 7D. – P. 240.
20. Mather J.N. // Topology. – 1982. – V. 21. – P. 457.
21. MacKay R.S., Meiss J.D., Percival I.C. // Physica. – 1984. – V. 13D. – P. 55.
22. Percival I.C. // Dynamical Chaos. Proc. of a Roy. Soc. Meeting. – London: The Royal Society, 1987. – P. 131.
23. Karney C.F.F. // Physica. – 1983. – V. 8D. – P. 360.
24. Fermi E. // Phys. Rev. – 1949. – V. 75. – P. 1169.
25. Улам С. // Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. and Prob. – Los Angeles: Berkeleyf, 1961. – V. 3. – P. 315.
26. Заславский Г.М., Чириков Б.В. // ДАН СССР. – 1964. – Т. 159. – С. 306.
27. Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. Regular and Stochastic Motion. – Berlin: Springer, 1983.
28. Заславский Г.М. // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 88. – С. 1984.
29. Заславский Г.М., Черников А.А. // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 89. – С. 1632.
30. Берзин А.А., Заславский Г.М., Мусеев С.С., Черников А.А. // Физика плазмы. – 1987. – Т. 13. – С. 592.
31. Batchelor G.K., Townsend A.A. // Proc. Roy. Soc. A – 1949. – V. 199. – P. 238.
32. Pomeau Y., Manneville P. // Comm. Math. Phys. – 1980. – V. 79. – P. 149.
33. Paladin G., Vulpiani A. // Phys. Rep. – 1987. – V. 156. – P. 148.
34. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. // УФН. – 1987. – Т. 152. – С. 3.

35. *Stanley H.E., Meakin P.* // *Nature.* – 1988. – V. 335. – P. 405.
36. *Заславский Г.М., Мальков М.А., Сагдеев Р.З., Черников А.А.* // *Физика плазмы.* – 1988. – Т. 14. – С. 307.
37. *Tajima T., Dawson J.M.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1979. – V. 43. – P. 267.
38. *Katsouleas T., Dawson J.M.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1983. – V. 51. – P. 392.
39. *Tajima T.* *Physics of High Energy Particle Accelerators* // *AIP Conf. Proc.* / Ed. M. Month, P. Dahe, M. Dienes. – N.Y., 1985. V. 127. – P. 793.
40. *Chernikov A.A., Tel T., Vattay G., Zaslavsky G.M.* // *Phys. Rev.* – 1989. – V. 40. – P. 4072.
41. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* *Теория поля.* – М.: Физматгиз, 1960.

К ГЛАВЕ 5

1. *Арнольд В.И.* // *ДАН СССР.* – 1964. – Т. 156. – С. 9.
2. *Chirikov V.V.* // *Phys. Rep.* – 1979. – V. 52. – P. 263.
3. *Лухтенберг А., Либерман М.* *Регулярная и стохастическая динамика.* – М.: Мир, 1984.
4. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* *Математические аспекты классической и небесной механики.* – М.: ВИНТИ. Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат., 1985. – Т. 3.
5. *Заславский Г.М.* *Стохастичность динамических систем.* – М.: Наука, 1984.
6. *Нехорошев Н.Н.* // *УМН.* – 1977. – Т. 32. – С. 5.
7. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* // *УФН.* – 1988. – Т. 156. – С. 193.
8. *Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* // *ЖЭТФ.* – 1986. – Т. 91. – С. 500.
9. *Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zakharov M.Yu., Zaslavsky G.M.* // *Nature.* – 1987. – V. 326. – P. 559.
10. *Chernikov A.A., Natenzon M.Ya., Petrovichev B.A., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* // *Phys. Lett.* – 1987. – V. 122A. – P. 39.
11. *Chernikov A.A., Natenzon M.Ya., Petrovichev B.A., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* // *Phys. Lett.* – 1988. – V. 129A. – P. 377.
12. *Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* *Regular and Chaotic Dynamics of Particles in a Magnetic field* // *Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics* / Ed. R.Z. Sagdeev. – Moscow: Mir, 1986. – P. 65.
13. *Smith G.R., Kaufman A.N.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1975. – V. 34. – P. 1613.
14. *Karney C.F.F.* // *Phys. Fluids.* – 1978. – V. 21. – P. 1584.
15. *Karney C.F.F.* // *Phys. Fluids.* – 1979. – V. 22. – P. 2188.
16. *Fukuyama A., Momota H., Itatani R., Takizuka T.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1977. – V. 38. – P. 701.
17. *Сагдеев Р.З., Шаниро В.Д.* // *Письма в ЖЭТФ.* – 1973. – Т. 17. – С. 389.
18. *Malkov M.A., Zaslavsky G.M.* // *Phys. Lett.* – 1984. – V. 105A. – P. 257.
19. *Заславский Г.М., Мальков М.А., Сагдеев Р.З., Шаниро В.Д.* // *Физика плазмы.* – 1986. – Т. 12. – С. 788.
20. *Заславский Г.М., Нейштадт А.И., Петровичев Б.А., Сагдеев Р.З.* // *Физика плазмы.* – 1989. – Т. 15. – С. 631.

К ГЛАВЕ 6

1. *Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* // *ЖЭТФ.* – 1986. – Т. 91. – С. 500.
2. *Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zakharov M.Yu., Zaslavsky G.M.* // *Nature.* – 1987. – V. 326. – P. 559.
3. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* // *УФН.* – 1988. – Т. 156. – С. 193.
4. *Арнольд В.И.* // *УМН.* – 1987. – Т. 42. – С. 139.
5. *Green J.M., Mackay R.S., Vivaldi F., Feigenbaum M.J.* // *Physica.* – 1981. – V. 3D. – P. 468.
6. *Collet P., Eckman J.P., Koch H.* // *Ibid.* – P. 457.

7. Bountis T.C. // Ibid. – P. 557.
8. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco: Freeman, 1982.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. – М.: Наука, 1964.
10. Weyl H. Symmetry. – Princeton: Univ. Press, 1952.
11. Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. // Письма в ЖЭТФ. – 1986. – Т. 44. – С. 349.
12. Lichtenberg A.J., Wood B.P. // Phys. Rev. – 1989. – V. 39A. – P. 2153.
13. Longcope D.W., Sadan R.N. // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 59. – P. 1500.
14. Carioli S.M. // Nuovo Cimento. – 1988.
15. Karimbadi H., Angelopoulos V. // Phys. Rev. – 1989. – V. 62. – P. 2342.
16. Murakami S., Sato T., Hasegawa A. // Physica. – 1988. – V. 32D. – P. 269.

К ГЛАВЕ 7

1. Kepleris J. Strena, seu de nive sexangula. Francofurti ad Moenum: apud Tampach. 1611. – 21 p.
2. Kepler J. Weltharmonid. – Munchen, Oldenburg, 1967.
3. Weyl H. Symmetry. – Princeton: Univ. Press, 1952. (перевод: Вейль Г. Симметрия. – М.: Наука, 1968.)
4. Grunbaum B., Shepard G.C. Tilings and Patterns. N.Y.: Freeman. – 1987.
5. The Mathematical Gardner / Ed. D.A. Klarner, Prindle, Weber and Schmidt – Boston, 1981. (Перевод: Математический цветник. – М.: Мир, 1983.)
6. Patterns of Symmetry / Eds. M. Senechal, H. Fleck. – Massachusetts: Univ. Press, 1977. (Перевод: Узоры симметрии. – М.: Мир, 1980.)
7. Копциг В.А., Шубников А.В. Симметрия в науке и искусстве. – М.: Наука, 1972.
8. Coxeter H.S.M. Introduction to Geometry. – N.Y.: Wiley, 1961. (Перевод: Коксетер Г.С.М. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.)
9. The World of M.C. Escher / Ed. J.L. Locher, N.Y. Abrahams. – 1977.
10. Schrodinger E. What is Life? – 1955. (Перевод: Шредингер Э. Что такое жизнь? – М.: Атомиздат, 1972.)
11. Penrose R. // Bull. Inst. Math. Appl. – 1974. – V. 10. – P. 266.
12. Gardner M. // Scient. America. – 1977. – V. 236. – P. 110.
13. МакКай А.Л. // Sov. Phys. Crystallogr. – 1981. – V. 26. – P. 517.
14. Shechtman D., Blech I., Gratias K., Cahn J.W. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 1951.
15. Int. Workshop on Aperiodical Crystals // J. de Phys. – 1986. – V. 47. – Coll. C3, Suppl. 7.
16. Levine D., Steinhardt P.J. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 2477.
17. Корепин В.Е. Квазипериодические покрытия и квазикристаллы // Записки научных семинаров ЛОМИ. – Л.: Наука, 1986. – Т. 155. – С. 116.
18. Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M. // Phys. Lett. – 1987. – V. 125A. – P. 101.
19. Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zakharov M.Yu., Zaslavsky G.M. // Nature. – 1987. – V. 326. – P. 559.
20. Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. // Письма ЖЭТФ. – 1986. – Т. 44. – С. 349.
21. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. // УФН. – 1988. – Т. 156. – С. 193.
22. Bruijn M.G. // Kon. Bederl. Akad. Wetesch. Proc. – 1981. – Ser. A84. – P. 38, 53.
23. Kramer P., Neri R. // Acta Crystallogr. – 1984. – Ser. A40. – P. 580.
24. Elser M. // Phys. Rev. – 1985. – V. 32B. – P. 4892.
25. Калауин П.А., Китаев А.Ю., Левитов Л.С. // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 41. – С. 119.
26. Duneau M., Katz A. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 2688.
27. De Bruijn N.G. // J. de Phys. 1986. – V. 47. Coll. C3, Suppl. 7. – P. 9.
28. Gahler F., Rhyner T. // J. Phys. – 1986. – V. 19A. – P. 267.
29. Арнольд В.И. // УМН. – 1987. – Т. 42. – С. 139.
30. Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M. // Comp. Math. App. – 1989. – V. 17. – P. 17.
31. Levine D. // [15]. – P. 125.

32. *Levine D., Steinhart P.J.* // Phys. Rev. – 1986. – V. 84B. – P. 596.
33. *Choy T.C.* // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 55. – P. 2915.
34. *MacKay A.L.* // Physica. – 1982. – V. 114A. – P. 609.
35. *Lubensky J.C., Socolar T.E.S., Steinhart P.T., Bancel P.A., Heiney P.A.* // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 1440.
36. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. – М.: Наука, 1976. – Ч. 1.
37. *Percival I.C., Vivaldi F.* // Physica. – 1987. – V. 25D. – P. 105.
38. *Vivaldi F.* // Proc. R. Soc. Lond. – 1987. – V. 413A. – P. 97.
39. *Ueda K., Tsunetsugu H.* // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 1272.
40. *Kuzmenko A.V., Sagdeev I.R., Usikov D.A., Sagdeev R.Z.* // Phys. Lett. – 1988. – V. 130. – P. 381.
41. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980.

К ГЛАВЕ 8

1. *Karman T.* // Gott. Nachr. Math. – Phys. Kl. – 1912. – P. 547.
2. *Villat H.* Lecons sur la Theorie des Tourbillons. – Paris: Gauthier – Villars et C°, 1930. (Перевод: *Вилла Г.* Теория вихрей. – Л.; М.: ОНТИ, 1936).
3. *Lamb H.* Hydrodynamics. – Cambridge: Univ. Press, 1932.
4. *Benard H.* Revue generale des sciences pures et appliques. – 1900. – V. 11. – P. 1261.
5. *Rayleigh, Lord* // Phil. Mag. – 1916. – V. 32. – P. 529.
- 6a. *Koschmieder E.L., Biggerstaff M.I.* // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 167. – P. 49.
- 6b. *Le Gal P., Pocheau A., Croquette V.* // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 2501.
7. Cellular Structures in Instabilities / Eds. J.E. Wesfreid, S. Zaleski. – Berlin: Springer-Verlag, 1984.
8. Propagation in Systems Far from Equilibrium / Eds. J.E. Wesfreid, H.R. Brand, P. Manneville, H. Albinet, N. Boccara. – Berlin: Springer-Verlag, 1988.
9. New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena: The Geometry of non Equilibrium / Eds. P. Huerre, P. Couillet. – N.Y.: Plenum Press, 1988.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
11. *Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. – Cambridge: Univ. Press, 1970. (Перевод: *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973.)
12. *Chercliff J.A.* Simple rotational flows // J. Fluid Mech. – 1977. – V. 82. – P. 687.
13. *Капцов О.В.* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. – С. 597.
14. *Stuart J.T.* // J. Fluid Mech. – 1967. – Т. 29. – С. 417.
15. *Baylu B.J., Yakhot V.* // Phys. Rev. A. – 1986. – V. 34. – P. 381.
16. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Черников А.А.* // ЖЭТФ. – 1988. – Т. 94. – С. 102.
17. *Beloshapkin V.V., Chernikov A.A., Natenzon M.Ya., Petrovichev B.A., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* // Nature. – 1989. – V. 337. – P. 133.
18. *Beloshapkin V.V., Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* // Phys. Lett. – 1988. – V. 133A. – P. 395.
19. *Yakhot V., Baylu B.J., Orszag S.A.* // Phys. Fluids. – 1986. – V. 29. – P. 2025.
20. *Маломед Б.А., Непомнящий А.А., Трибельский М.И.* // Письма в ЖЭТФ. – 1987. – Т. 13. – С. 1165.
21. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* // Прикл. математика и механика. – 1965. – Т. 25. – С. 1140.
22. *Арнольд В.И., Мешалкин Л.Д.* // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15. – С. 247.
23. *Юдович В.И.* // Прикл. математика и механика. – 1965. – Т. 29. – С. 453.
24. *Непомнящий А.А.* // Прикл. математика и механика. – 1976. – Т. 40. – С. 886.
25. *Кляцкин В.И.* // Прикл. математика и механика. – 1972. – Т. 36. – С. 263.
26. *Green J.S.A.* // J. Fluid Mech. – 1974. – V. 62. – P. 273.
27. *Бондаренко Н.Ф., Гак М.З., Должанский Ф.В.* // АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1979. – Т. 15. – С. 1017.
28. *Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение. – М.: Наука, 1981.
29. *Sivashinsky G., Yakhot V.* // Phys. Fluids. – 1985. – V. 28. – P. 1040.

К ГЛАВЕ 9

1. *Rosenbluth M.N., Sagdeev R.Z., Taylor J.B., Zaslavsky G.M.* // Nucl. Fusion. – 1966. – V. 6. – P. 297.
2. *Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* // Nucl. Fusion. – 1967. – V. 7. – P. 253.
3. *Cary J.R., Littlejohn R.G.* // Ann. Phys. – 1986. – V. 151. – P. 1.
4. *Elsasser K.* // Plasma Phys. and Control. Fusion. – 1986. – V. 28. – p. 1743.
5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974.
6. *Moffatt H.K.* Magnetic Field Generation in Electrically Conducting fluids. – Cambridge: Univ. Press., 1978.
(Перевод: *Мoffatt Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. – М.: Мир, 1980.)
7. *Zel'dovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokolov D.D.* Magnetic Fields in Astrophysics // The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. Vol. 3. / Ed. P.H. Roberts. – Gordon and Breach., 1983.
8. *Aref H.* // J. Fluid Mech. – 1984. – V. 143. – P. 1.
9. *Kharhar D.V., Rising H., Ottino J.M.* // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 172. – P. 419.
10. *Ottino J.M., Leong C.W., Rising H., Swanson P.D.* // Nature. – 1988. – V. 333. – P. 419.
11. *Arnold V.I.* // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1965. – V. 261. – P. 17.
12. *Henon M.* // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1966. – V. 262. – P. 312.
13. *Dombre T., Frisch U., Green J.M., Henon M., Mehr A., Soward A.M.* // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 167. – P. 353.
14. *Childress S.* // J. Math. Phys. – 1970. – V. 11. – P. 3063.
15. *Арнольд В.И., Коркина Е.И.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1983. – № 3. – С. 43.
16. *Galloway D.J., Frisch U.* // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. – 1984. – V. 29. – P. 13.
17. *Galloway D.I., Frisch U.* // Geophys. Astrophys. Fluids Dynamics 1986. – V. 36. – P. 53.
18. *Finn J.M., Ott E.* // Phys. Rev. Lett. – 1988. – V. 60. – P. 760.
19. *Galloway D.I., Frisch U.* The Hydrodynamic Stability of the ABC-flows. – Nice Observatory, 1985.
20. *Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M.* Weak chaos and structures 1989. – Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. – V. 8.
21. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Черников А.А.* // ЖЭТФ. – 1988. – Т. 94. – С. 102.
22. *Beloshapkin V.V., Chernikov A.A., Natenzon M.Ya., Petrovichev B.A., Sagdeev R.A., Zaslavsky G.M.* // Nature. – 1989. – V. 337. – P. 113.
23. *Palm E.* // J. Fluid Mech. – 1960. – V. 1. – P. 183.
24. *Jenkins D.R.* // J. Fluid Mech. – 1988. – V. 190. – P. 451.
25. *Stuart J.T.* // J. Fluid Mech. – 1964. – V. 18. – P. 481.
26. *Arter W.* // Phys. LMett. – 1983. – V. 97A. – P. 171.

К ГЛАВЕ 10

1. *Wade D.* Pattern in Islamic Art. Studio Vista. – London, 1976.
2. *Булатов М.С.* Геометрическая гармонизация в архитектуре Средней Азии IX–XV вв. – М.: Наука, 1988.
3. *Hrbas M., Knobloch E.* The Art of central Asia. – London: P. Hamlyn, 1965.
4. *Grunbaum B., Shepard G.C.* Tilings and Patterns. – N.Y.: W.H. Freeman, 1987.
5. *Critchlow K.* Islamic Patterns. – London: Thames and Hudson, 1976.
6. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Черников А.А.* // УФН. – 1988. – Т. 155. – С. 193.
7. Patterns of Symmetry/Eg. M. Senechal, G. Fleck. – University of Massachusetts Press: Amherst, 1977. (Перевод: Узоры симметрии. – М.: Мир, 1980.)
8. *Weyl H.* Symmetry. – Princeton: Univ. Press, 1952. (Перевод: *Вейль Г.* – Симметрия. – М.: Наука, 1968.)
9. *Locher J.L.* The World of M.C. Escher. – N.Y. Abrams, 1971.
10. *Escher M.C.* Art and Science/Ed. Coxeter e.a. – Amsterdam: North-Holland, 1987.
11. *Schattschneider D.* // [10] – P. 82.
12. *Schrodinger E.* What is Life? Cambridge: Univ. Press, 1944. (Перевод: *Шредингер Э.* Что такое жизнь? – М.: Атомиздат, 1972.)

13. *Белов Н.В.* Очерки по структурной минералогии. — М.: Наука, 1976.
14. *Bunn C.* Crystals. Their Role in Nature and in Science. — N.Y., L.: Academic Press, 1964. (Перевод: *Банн Ч.* Кристаллы. Их роль в природе и науке. — М.: Мир, 1970.)
15. *Haeckel E.* Kunstformen der Natur. Bibliographisches Inst. Leipzig, Wien, 1899. (Перевод: *Геккель Э.* Красота форм в природе. — СПб: Просвещение, 1907.)
16. *Bonnet C. D'Histoire Naturelle et de Philosophie. V. 4. Recherches sur l'usage des feuilles dans des plantes/Ed. C.S. Fauche.* — Libraire du Roi, 1779.
17. *Rivier N.* // J. de Phys. — 1986. — V. 47. — Coll. C3, suppl. № 7. — P. 299.
18. *Thompson D'Arcy W.* On growth and form. — Cambridge: Univ. Press, 1942.
19. *Cook T.A.* The Curves of Lige. — London: Constable, 1914.
20. *Bravais A., Bravais L.* Ueber die Geometrische Anordnung der Blatter und der Bluthenstande. — Breslau, 1839.
21. *Church A.H.* On the Relations of Phyllotaxis to Mechanical Laws. — London: Williams and Borgate: 1901–1904.
22. *Coxeter H.S.M.* Introduction to geometry. — N.Y.: Wiley, 1965. (Перевод: *Коксетер Г.С.М.* Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.)
23. *Gardner M.* // Scientific American. — 1977. — V. 236. — P. 110.
24. *Stevens P.S.* Handbook of regular patterns. — Cambridge; Massachusetts, MIT Press, 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ	7
Глава 1. Гамильтоновская динамика	7
§ 1.1. Гамильтоновские системы	7
§ 1.2. Фазовый портрет	10
§ 1.3. Переменные действие – угол	12
§ 1.4. Нелинейный маятник	14
§ 1.5. Многомерное движение	16
§ 1.6. Отображение Пуанкаре	20
Глава 2. Устойчивость и хаос	21
§ 2.1. Нелинейный резонанс	22
§ 2.2. Внутренний нелинейный резонанс	25
§ 2.3. КАМ-теория	26
§ 2.4. Локальная неустойчивость	28
§ 2.5. Перемешивание	30
ЧАСТЬ II. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК И ХАОС	33
Глава 3. Стохастический слой	33
§ 3.1. Стохастический слой нелинейного маятника. Сепаратрисное отображение	33
§ 3.2. Стохастический слой нелинейного маятника. Ширина слоя	36
§ 3.3. Слабое взаимодействие резонансов	39
§ 3.4. Стандартное отображение	41
§ 3.5. Стохастический слой нелинейного резонанса	44
§ 3.6. Нетривиальные эффекты дискретизации	46
§ 3.7. Хаотическое вращение спутников	47
Глава 4. Переход стохастический слой – стохастическое море	49
§ 4.1. Граница глобального хаоса	52
§ 4.2. Вариационный принцип Персиваля	54
§ 4.3. Кантор-торы	57
§ 4.4. Гамильтоновская перемежаемость	62
§ 4.5. Ускорение релятивистских частиц	70

Глава 5. Стохастическая паутина	75
§ 5.1. КАМ-торы и диффузия Арнольда	76
§ 5.2. Слабый хаос и стохастическая паутина	79
§ 5.3. Инвариантные торы внутри паутины (П-торы) и ширина паутины	83
§ 5.4. Переход КАМ-торы – П-торы	88
Глава 6. Равномерная паутина	97
§ 6.1. Отображение с подкручиванием	97
§ 6.2. Периодическая паутина	100
§ 6.3. Аперриодическая паутина и симметрия покрытия плоскости	111
§ 6.4. Скелет паутины и толщина паутины	119
§ 6.5. Структуры при диффузии частиц	127
§ 6.6. Распад паутины для релятивистских частиц	131
ЧАСТЬ III. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ	135
Глава 7. Двумерные структуры с квазисимметрией	135
§ 7.1. Какими могут быть структуры?	136
§ 7.2. Динамическая генерация структур	140
§ 7.3. Квазисимметрия. Фурье-спектр и локальный изоморфизм	147
§ 7.4. Особенности в зависимости фазового объема от энергии (особенности Ван Хова)	158
§ 7.5. Динамическая организация в фазовом пространстве	163
Глава 8. Двумерные гидродинамические структуры с симметрией и квазисимметрией	165
§ 8.1. Двумерные стационарные вихревые течения идеальной жидкости	167
§ 8.2. Устойчивость стационарных плоских течений с симметричной структурой	171
Глава 9. Хаос линий тока	182
§ 9.1. Линии тока в пространстве	182
§ 9.2. Линии тока <i>ABC</i> -течения	185
§ 9.3. Трехмерные течения с симметрией и квазисимметрией	188
§ 9.4. Стохастические слои и стохастические паутины в гидродинамике	195
§ 9.5. Винтовые стационарные течения	199
§ 9.6. Стохастичность линий тока при стационарной конвекции Рэлея – Бенара	200
ЧАСТЬ IV. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ	204
Глава 10. Структуры в искусстве и в природе	204
§ 10.1. Двумерные покрытия в искусстве	204
§ 10.2. Филотаксис	215
КОММЕНТАРИИ	222
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	229